El modelo de Phillips-Friedman sobre la interacción de la inflación y el desempleo

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Sánchez Sánchez, Almudena; Villanueva Micó, Rafael Jacinto jccortes@imm.upv.es; alsncsnc@posgrado.upv.es; rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se estudian, a partir de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) de tipo lineal, diferentes versiones de un modelo sobre la interacción de la inflación y el desempleo, que en la literatura especializada se conoce como el modelo de Phillips-Friedman. El estudio incluye la obtención de la trayectoria temporal de las magnitudes macroeconómicas involucradas (desempleo, inflación e inflación esperada), así como su comportamiento a largo plazo. A partir del estudio matemático se obtiene la existencia de un paro estructural incluso en el caso en que la inflación sea nula, lo cual permite explicar situaciones que se presentan de forma endémica con frecuencia en las economías reales.

2 Introducción

La concepción neoclásica de la macroeconomía sostiene que se pueden mantener cifras bajas del desempleo con tasas altas de inflación. Este principio se establece a través de la denominada "curva de Phillips". En este trabajo analizaremos la formulación matemática del modelo macroeconómico de Phillips-Friedman y entenderemos, gracias a las ecuaciones diferenciales ordinarias, algunas de las principales consecuencias de este principio macroeconómico.

La presentación de este trabajo discurre de la siguiente forma: En primer lugar se presentará el modelo original de Phillips donde únicamente se consideran como variables la inflación y el desempleo; en un segundo paso se introducirá la aportación de Friedman que añade una tercera variable, la inflación esperada, quedando establecido el modelo de Phillips-Friedman. En términos matemáticos, el modelo se formulará en vía una e.d.o. lineal de segundo orden a coeficientes constantes para la inflación esperada que se establece mediante la manipulación algebraica de las tres relaciones que involucran la inflación y el desempleo (inicialmente consideradas en el modelo original de Phillips) y las expectativas de la inflación (aportada por el modelo de Friedman). Establecido el modelo matemático se obtendrá su solución y se realizará una discusión del comportamiento a largo de la misma. Finalmente se analizarán dos versiones simplificadas del modelo de Phillips-Friedman que aparecen en la literatura económica y se subrayarán las diferencias en términos económicos que dichos modelos tienen respecto del modelo de Phillips-Friedman.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Desarrollar, mediante las e.d.o.'s de tipo lineal, la modelización dinámica de magnitudes de interés macroeconómico como la inflación y el desempleo, a través del modelo de Phillips-Friedman, así como algunas de sus variaciones.
- Analizar el comportamiento a largo plazo o asintótico de la solución del modelo de Phillips-Friedman.

4 Planteamiento del modelo de Phillips-Friedman

El modelo de interacción entre la inflación y el desempleo debido a A.W. Phillips y a M. Friedman se formula a partir de las relaciones especificadas en la Ec.1

$$\left.\begin{array}{llll} (1) & p(t) & = & \alpha - T - \beta U(t) + h\pi(t), & 0 < h \le 1, \\ (2) & \pi'(t) & = & j(p(t) - \pi(t)), & 0 < j \le 1, \\ (3) & U'(t) & = & -k(m - p(t)), & k > 0. \end{array}\right\}$$

Ecuación 1. Formulación del modelo de Phillips-Friedman.

Vamos a ir explicando, ecuación por ecuación, la motivación económica que hay detrás de la formulación del modelo. Para ello en primer lugar, introduciremos las variables endógenas del modelo, es decir, las variables que se desean determinar al resolverlo:

- $p(t)$ denota la tasa de inflación (o de crecimiento de precios) en el instante t. Por tanto, si $P(t)$ denota el precio en el instante t, se tiene que $p(t) = P'(t)/P(t)$.
- $\pi(t)$ denota la tasa de inflación esperada en el instante t.
- $U(t)$ denota la tasa de desempleo en el instante t.

Para motivar la formulación del modelo expuesto en la Ec.1, conviene señalar que inicialmente éste surgió como una mejora de un modelo más básico, llamado modelo de Phillips. Inicialmente A.W. Phillips trató de explicar la interacción de la tasa del salario monetario $w = w(t)$, definida como la ratio $w(t) = W'(t)/W(t)$, siendo $W = W(t)$ el salario monetario en el instante t, y la tasa del desempleo $U = U(t)$. La relación entre las variables dinámicas, es decir, dependientes del tiempo t, debe ser de la forma $w = f(U)$, siendo f una función decreciente de su argumento, esto es, una función cuya derivada sea negativa: $f'(U) < 0$, ya que, empíricamente se constata que a medida que aumenta el desempleo, los salarios bajan. El ejemplo más sencillo de una tal función f es una función lineal, $f(U) = \alpha - \beta U$, $\alpha, \beta > 0$, la cual está considerada como parte del término derecho de la relación (1) del modelo dado en la Ec.1. La relación entre w y U está explicitada en la Ec.2.

$$w(t) = \alpha - \beta U(t).$$

Ecuación 2. Relación entre la tasa de crecimiento de los salarios monetarios y el desempleo en el modelo original de Phillips.

Por otra parte, la tasa de inflación $p(t)$ puede verse compensada por la productividad del trabajo, que denotaremos por T, por lo que puede considerarse la siguiente relación: $p(t) = w(t) - T$. Teniendo en cuenta la relación dada en la Ec.2, se obtiene la relación entre la inflación y el desempleo dada en la Ec.3.

$$p(t) = \alpha - T - \beta U(t).$$

Ecuación 3. Relación entre la inflación y el desempleo en el modelo original de Phillips.

Por otra parte, la contribución de M. Friedman al modelo original de Phillips fue introducir la tasa esperada de inflación según la modificación de la Ec.3 dada en la Ec.4. En esta nueva relación se asume que a la tasa de inflación se añade una proporción (por eso se supone $0<h\leq 1$) de las expectativas que sobre la inflación esperada $\pi(t)$ tienen los trabajadores. La consideración de este término en el modelo se basa en que si una tendencia inflacionista tiene lugar durante un período temporal dilatado, los trabajadores tienden a asumir ciertas expectativas sobre la inflación que se verán incorporadas en las demandas salariales de los convenios colectivos.

$$p(t)=\alpha-T-\beta U(t)+h\pi(t),\quad 0<h\leq 1.$$

Ecuación 4. Modificación de Friedman para la relación entre la tasa de inflación y el desempleo, introduciendo la inflación esperada.

La explicación de la segunda ecuación, $\pi'(t)=j(p(t)-\pi(t))$, del modelo dado en la Ec.1 es más sencilla. Simplemente indica que la variación instantánea de la inflación esperada en cada instante t, dada por el término $\pi'(t)$, es una proporción $j>0$ de la discrepancia que hay entre el valor de la inflación real, $p(t)$, y la esperada, $\pi(t)$, en dicho instante temporal t. De este modo, si la inflación está por encima (debajo) de la esperada, entonces la inflación esperada tenderá a crecer (decrecer). Para entender esta interpretación, recuérdese que si la derivada de una función es positiva (negativa), la función es creciente (decreciente). La relación (2) de la Ec1. Se denomina "expectativas adaptativas" porque relaciona la variación $\pi'(t)$ de la inflación esperada $\pi(t)$ respecto de la inflación real $p(t)$.

La explicación de la tercera ecuación, $U'(t)=-k(m-p(t))$, del modelo dado en la Ec.1 es similar a la segunda ecuación. En dicha ecuación, $m(t)$ está definida por $m(t)=M'(t)/M(t)$, donde $M(t)$ es el nivel de dinero nominal en el instante t, y por tanto $m(t)$ representa su tasa de variación. En el modelo dicha tasa se considera constante, por ello se utiliza la notación m en lugar de $m(t)$. Por tanto, la tercera ecuación del modelo nos indica que un nivel de inflación $p(t)$ superior (inferior) a la tasa del dinero nominal, m, implica que $U'(t)>0$ $(U'(t)<0)$, es decir, un crecimiento (decrecimiento) del desempleo.

5 Modelo Phillips-Friedman: Determinación de la inflación esperada y estudio de su comportamiento asintótico

El modelo de Phillips-Friedman se ha establecido en términos de las relaciones (1)-(3) de la Ec.1. Una vez que el modelo ha sido interpretado económicamente, pasaremos a resolverlo, es decir, a calcular las funciones incógnita $\pi(t)$, $p(t)$ y $U(t)$. Obsérvese que si determinamos $\pi(t)$, entonces de la expresión (2) de la Ec.1, podremos fácilmente obtener $p(t)$, ya que, despejando $p(t)=\pi'(t)/j+\pi(t)$ y, conocidas $p(t)$ y $\pi(t)$, de la (1) de la Ec.1 se obtiene $U(t)=(\alpha-T+h\pi(t)-p(t)/\beta$. Por lo tanto bastará determinar $\pi(t)$ para tener el modelo completamente resuelto Para ello, a partir de las tres relaciones dadas en la Ec.1, vamos a transformarlas mediante sustituciones algebraicas y diferenciaciones apropiadas en una e.d.o. lineal de segundo orden completa a coeficientes constantes que resolveremos posteriormente. En primer lugar sustituimos la expresión (1) en la (2) de la Ec.1, y esto se detalla en la Ec.5.

$$\pi'(t)=j(p(t)-\pi(t))\overset{(1)}{=}j\left\{\left(\alpha-T-\beta U(t)+h\pi(t)\right)-\pi(t)\right\}=j\alpha-jT-j\beta U(t)+j(h-1)\pi(t).$$

Ecuación 5. Paso 1 en la transformación del modelo de Phillips-Friedman en una e.d.o. lineal de segundo orden completa a coeficientes constantes.

En segundo lugar, derivamos la expresión obtenida en la Ec.5 respecto de t. El desarrollo de este cálculo y su simplificación se detalla en la Ec.6. Obsérvese que se utiliza la siguiente relación, $p(t)=\pi'(t)/j+\pi(t)$, obtenida al despejar la inflación de la expresión (2) de la Ec.1.

$$\begin{aligned}
\pi''(t) &= -j\beta U'(t)+j(h-1)\pi'(t)\\
&\overset{(3)}{=} -j\beta\left\{-k(m-p(t))\right\}+j(h-1)\pi'(t)\\
&= j\beta km-j\beta kp(t)+j(h-1)\pi'(t)\\
&= j\beta km-j\beta k\left\{\frac{1}{j}\pi'(t)+\pi(t)\right\}+j(h-1)\pi'(t)\\
&= \left\{-\beta k+j(h-1)\right\}\pi'(t)-j\beta k\pi(t)+j\beta km.
\end{aligned}$$

Ecuación 6. Paso 2 en la transformación del modelo de Phillips-Friedman en una e.d.o. lineal de segundo orden completa a coeficientes constantes.

Si organizamos la expresión obtenida en la Ec.6 llegamos a la e.d.o. de segundo orden completa a coeficientes constantes que aparece en la Ec.7.

$$\pi''(t)+\left\{\beta k+j(1-h)\right\}\pi'(t)+j\beta k\pi(t)=j\beta km.$$

Ecuación 7. Modelo de Phillips-Friedman vía una e.d.o. lineal de segundo orden completa a coeficientes constantes.

Atendiendo a la teoría de resolución de las e.d.o.'s lineales de segundo orden a coeficientes constantes introducida en [2], sabemos que la expresión de la solución $\pi(t)$ dependerá de si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica asociada a la e.d.o. homogénea son reales y distintas, reales e iguales o complejas. Las expresiones de las raíces se detallan en la Ec.8.

$$r^2+\underbrace{\left\{\beta k+j(1-h)\right\}}_{a_1}r+\underbrace{j\beta k}_{a_2}=0\Rightarrow\left\{\begin{aligned} r_1 &= \frac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2},\\ r_2 &= \frac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ecuación 8. Raíces de la ecuación característica asociada a la e.d.o. del modelo de Phillips-Friedman.

La expresión de $\pi(t)$ tendrá alguna de las formas mostradas en las Ec.9. Esta solución se ha obtenido como la suma de la solución general de la e.d.o. homogénea (la cual depende de dos constantes libres K_1 y K_2) y una solución particular de la e.d.o. completa, en este caso dada por m. Las constantes libres

K_1 y K_2 se calculan a partir de dos condiciones iniciales de la forma $\pi(0)=\pi_0$ y $\pi'(0)=\pi_1$ que especifican el valor actual de la inflación esperada y su crecimiento instantáneo en el momento actual, respectivamente.

$$\pi(t)=\begin{cases} K_1 e^{r_1 t}+K_2 e^{r_2 t}+m & si \quad r_1 \neq r_2 \in IR, \\ K_1 e^{rt}+K_2 t\, e^{rt}+m & si \quad r_1=r_2=r=-\dfrac{a_1}{2}\in IR, \\ e^{\alpha t}\Big(K_1\cos(\beta t)+K_2\sin(\beta t)\Big)+m & si \quad r_1=\alpha+i\,\beta, r_2=\alpha-i\,\beta\in C, \begin{cases} \alpha & = & -\dfrac{a_1}{2}, \\ \beta & = & \dfrac{\sqrt{4a_2-(a_1)^2}}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Ecuación 9. Expresión de la solución general de la e.d.o. completa del modelo de Phillips-Friedman.

Un aspecto que tiene gran importancia en el análisis dinámico de modelos económicos es el estudio de su comportamiento a largo plazo, también denominado comportamiento asintótico y, más particularmente, dilucidar bajo qué condiciones el modelo es asintóticamente estable. Para ello obsérvese que independientemente del carácter real o complejo de las raíces de la ecuación característica asociada a la e.d.o. homogénea, se cumple que dichas raíces son siempre negativas (en el caso de ser las raíces reales) o tienen parte real negativa (en el caso de ser las raíces complejas). Esto puede verse en la Ec.10. Por lo tanto, atendiendo a la expresión que tiene la solución (véase la Ec.9), a largo plazo la inflación esperada tenderá hacia el valor m de forma incondicional, es decir, $\pi(t)\xrightarrow{t\to+\infty}\hat{\pi}=m$ (véase Ec.11).

Raíces reales y distintas:

$$a_2=j\beta k>0 \Rightarrow (a_1)^2-4a_2<(a_1)^2 \Rightarrow \sqrt{(a_1)^2-4a_2}<\sqrt{(a_1)^2}\overset{a_1>0}{=}a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}<0 & \Rightarrow \quad r_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}<0, \\ -\underbrace{a_1}_{>0}-\underbrace{\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}_{>0}<0 & \Rightarrow \quad r_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}<0. \end{cases}$$

Raíces reales e iguales:

$$a_1=\beta k+j(1-h)>0 \Rightarrow r_1=r_2=\frac{-a_1}{2}<0$$

Raíces complejas

$$r_1=\alpha+i\,\beta,\ r_2=\alpha-i\,\beta\in C$$

$$\mathrm{Re}(r_1)=\mathrm{Re}(r_2)=\alpha=-\frac{a_1}{2}\overset{a_1>0}{<}0$$

Ecuación 10. Estudio del signo de las raíces de la ecuación característica asociada a la e.d.o. homogénea del modelo de Phillips-Friedman.

$$r_1 \neq r_2 \in IR \quad : \qquad \hat{\pi} = \lim_{t\to\infty} \pi(t) = K_1 \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{r_1 t}}_{=0,\text{ya que, } r_1<0} + K_2 \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{r_2 t}}_{=0,\text{ya que, } r_2<0} + m = m,$$

$$r_1 = r_2 \in IR \quad : \qquad \hat{\pi} = \lim_{t\to\infty} \pi(t) = K_1 \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{rt}}_{=0,\text{ya que, } r<0} + K_2 \underbrace{\lim_{t\to\infty} te^{rt}}_{=0,\text{ya que, } r<0} + m = m,$$

$$r_1, r_2 \in C \quad : \quad \hat{\pi} = \lim_{t\to\infty} \pi(t) = K_1 \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t)}_{=0,\text{ya que, } \alpha<0} + K_2 \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t)}_{=0,\text{ya que, } \alpha<0} + m = m.$$

Ecuación 11. Comportamiento a largo plazo de la solución general del modelo de Phillips-Friedman.

En la Ec.11 los valores de los límites involucrados en los casos en que las raíces son reales e iguales, o complejas, se deducen aplicando la regla de L'Hôpital y el llamado criterio del sandwich, respectivamente, tal y como se detalla en la Ec.12.

$$\lim_{t\to\infty} te^{rt} \overset{r<0}{=} \{\infty \times 0\} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-rt}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-re^{-rt}} = -\frac{1}{r} \lim_{t\to\infty} e^{rt} = 0,$$

$$0 \leq \left| \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \right| \leq \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} \overset{\alpha<0}{=} 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t) = 0,$$

$$0 \leq \left| \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t) \right| \leq \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} \overset{\alpha<0}{=} 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t) = 0.$$

Ecuación 12. Algunos límites que aparecen en el estudio del comportamiento a largo plazo de la solución general del modelo de Phillips-Friedman.

Una consecuencia importante que se infiere del comportamiento a largo plazo es la relación entre el valor de equilibrio del desempleo, que denotaremos por $U(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \hat{U}$, y el correspondiente valor de la inflación a largo plazo, $p(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \hat{p}$. Esta relación se especifica en la Ec.13. Para su deducción obsérvese que primero se toman límites en la expresión (2) de la Ec.1. y posteriormente se sustituye el resultado obtenido en la expresión que resulta de tomar límites en la expresión (1) de la Ec.1. El resultado nos indica la existencia en el largo plazo de un paro o desempleo crónico de tamaño $\hat{U} = (\alpha - T)/\beta$ en el caso de inflación nula: $\hat{p} = m = 0$ y una relación opuesta entre la inflación y el desempleo: $\hat{U} = (\alpha - T - (1-h)m)/\beta$, en el largo plazo.

$$\lim_{t\to+\infty} \pi'(t) = \left(\lim_{t\to+\infty} \pi(t)\right)' = (m)' = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = \lim_{t\to+\infty} \pi'(t) = j\left(\underbrace{\lim_{t\to+\infty} p(t)}_{\hat{p}} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \pi(t)}_{=m}\right) = j\left(\hat{p} - m\right) \overset{j>0}{\Rightarrow} \hat{p} = \lim_{t\to+\infty} p(t) = m.$$

$$(1) \Rightarrow m = \lim_{t\to+\infty} p(t) = \alpha - T - \beta \underbrace{\lim_{t\to+\infty} U(t)}_{=\hat{U}} + h \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \pi(t)}_{=m} = \alpha - T - \beta\hat{U} + hm \Rightarrow \hat{U} = \frac{\alpha - T - (1-h)m}{\beta} \overset{m=0}{\Rightarrow} \hat{U} = \frac{\alpha - T}{\beta}.$$

Ecuación 13. Algunos límites que aparecen en el estudio del comportamiento a largo plazo de la solución general del modelo de Phillips-Friedman.

6 Algunas variantes del modelo

El modelo de Phillips-Friedman ha sido simplificado por algunos autores asumiendo diferentes hipótesis. En este apartado analizaremos dos casos:

- Caso 1: El desempleo es una constante dada exógenamente: $U(t)=U$.
- Caso 2: La inflación esperada coincide con la inflación: $p(t)=\pi(t)$. Esta relación también se denomina "previsión perfecta" y sustituye a la denominada "expectativas adaptativas".

Caso 1: En el primer caso, el modelo se formula eliminando la expresión (3) de la Ec.1 y, por tanto el modelo se reduce al dado en la Ec.14.

$$\left.\begin{array}{llll}(1)' & p(t) & = \alpha-T-\beta U+h\pi(t), & 0<h\le 1,\\ (2)' & \pi'(t) & = j(p(t)-\pi(t)), & 0<j\le 1.\end{array}\right\}$$

Ecuación 14. Caso 1: Modificación del modelo de Phillips-Friedman asumiendo que el desempleo está dado exógenamente.

Para resolver este modelo primero se transforma mediante manipulaciones algebraicas en una e.d.o. lineal completa de primer orden a coeficientes constantes tal y como se muestra en la Ec.15.

$$\begin{array}{c}\pi'(t) \overset{(2)'}{=} j(p(t)-\pi(t)),\\ \pi'(t)=j\left\{\alpha-T-\beta U+h\pi(t)-\pi(t)\right\},\\ \pi'(t)+j(1-h)\pi(t)=j(\alpha-T-\beta U).\end{array}$$

Ecuación 15. Caso 1: Formulación de la modificación del modelo de Phillips-Friedman mediante una e.d.o. lineal de primer orden completa a coeficientes constantes.

La solución de dicha e.d.o. está dada en la Ec.16, y para ello se han utilizado las técnicas expuestas en la referencia [3] (concretamente la Ec.15 de dicha referencia). Una vez calculada la inflación esperada $\pi(t)$, el cálculo de la otra función incógnita, $p(t)$, se deduce inmediatamente sin más que sustituir $\pi(t)$ en la expresión (1)' de la Ec.14. Observamos en la Ec.16 que la solución es incondicionalmente estable, ya que, tanto $\pi(t)$ como $p(t)$ se aproximan al valor fijo $(\alpha-T-\beta U)/(1-h)$, cuando $t\to+\infty$, con independencia de los valores de los parámetros. Este valor asintótico desempeña el valor análogo al que tiene m en el modelo completo dado en la Ec.1. Sin embargo, una diferencia importante entre ambos modelos es que en esta simplificación del mismo se observa que el comportamiento de la solución a lo largo del tiempo no sufre nunca oscilaciones periódicas, mientras que en el modelo completo de Phillips-Friedman esto sí podía suceder cuando las raíces de la ecuación característica son complejas al aparecer entonces la funciones trigonométricas seno y coseno en la expresión de la solución de $\pi(t)$.

$$\pi(t)=Ke^{-j(1-h)t}+\frac{\alpha-T-\beta U}{1-h}\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\alpha-T-\beta U}{1-h},\quad K \text{ constante libre},$$

$$p(t)\overset{(1)'}{=}\alpha-T-\beta U+h\pi(t)=\alpha-T-\beta U+h\left(Ke^{-j(1-h)t}+\frac{\alpha-T-\beta U}{1-h}\right)=\frac{Kh(1-h)e^{-j(1-h)t}+\alpha-T-\beta U}{1-h}\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\alpha-T-\beta U}{1-h}.$$

Ecuación 16. Cálculo de la inflación esperada y su comportamiento asintótico en el Caso 1.

Caso 2: Otra versión simplificada del modelo de Phillips-Friedman consiste en sustituir la expresión (2) de la Ec.1 por la condición $p(t)=\pi(t)$, lo que significa que $\pi'(t)=0$, es decir, las expectativas de la inflación son constantes porque se ha alcanzado el nivel deseado ("previsión perfecta"). En este caso, el modelo dado en la Ec.1 se reduce al dado en la Ec.17.

$$\left.\begin{array}{llcll} (1)'' & p(t) & = & \alpha - T - \beta U(t) + hp(t), & 0 < h \le 1, \\ (3) & U'(t) & = & -k(m - p(t)), & k > 0. \end{array}\right\}$$

Ecuación 17. Caso 2: Modificación del modelo de Phillips-Friedman asumiendo que la "previsión de la inflación es perfecta".

Este nuevo modelo se resuelve planteando, mediante sustituciones algebraicas, una e.d.o. lineal de primer orden completa a coeficientes constantes para $U(t)$, aunque también puede plantearse para $p(t)$. Los detalles se muestran en la Ec.18.

$$(1)'' \Rightarrow p(t) = \frac{\alpha - T - \beta U(t)}{1-h},$$

$$U'(t) \overset{(3)}{=} -k\big(m - p(t)\big) = -k\left(m - \frac{\alpha - T - \beta U(t)}{1-h}\right),$$

$$U'(t) + \frac{k\beta}{1-h} U(t) = -km + k\frac{\alpha - T}{1-h},$$

$$U'(t) + \frac{k\beta}{1-h} U(t) = \frac{k(\alpha - T - m + mh)}{1-h}.$$

Ecuación 18. Caso 2: Formulación de la modificación del modelo de Phillips-Friedman mediante una e.d.o. lineal de primer orden completa a coeficientes constantes.

Procediendo como en el Caso 1 anterior, la solución de este nuevo modelo se resuelve del mismo modo. La solución y su comportamiento a largo plazo están especificadas en la Ec.19. Observamos que la solución es incondicionalmente estable.

$$U(t) = Ke^{-\frac{k\beta}{1-h}t} + \frac{\alpha - T - m + mh}{\beta} \xrightarrow{t \to +\infty} \frac{\alpha - T - m + mh}{\beta}, \quad K \text{ constante libre.}$$

Ecuación 19. Cálculo del desempleo y su comportamiento asintótico en el Caso 2.

De nuevo observamos que la solución de esta simplificación del modelo no describe la evolución temporal del desempleo mediante oscilaciones a diferencia de lo que sucede en el modelo completo de Phillips-Friedman. Finalmente, cabe señalar que a partir de la expresión de $U(t)$ dada en la Ec.19, la solución de la inflación $p(t)$ se obtiene de la expresión (1)'' de la Ec.17 (véase Ec.20).

$$p(t) = \frac{\alpha - T - \beta U(t)}{1-h} = \frac{\alpha - T - \beta\left\{Ke^{-\frac{k\beta}{1-h}t} + \frac{\alpha - T - m + mh}{\beta}\right\}}{1-h} \xrightarrow{t \to +\infty} \frac{\alpha - T - \beta\left\{\frac{\alpha - T - m + mh}{\beta}\right\}}{1-h} = m.$$

Ecuación 20. Cálculo de la inflación y su comportamiento asintótico en el Caso 2.

Esta segunda versión simplificada del modelo nos dice que a largo plazo la inflación y el desempleo tenderán a los mismos valores que en el modelo extendido de Phillips-Friedman.

7 Cierre

En este trabajo se estudiado, desde una perspectiva matemática basada en las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden a coeficientes constantes, un modelo macroeconómico sobre la inflación y el desempleo conocido en la literatura especializada como el modelo de Phillips-Friedman. Más allá del modelo particular analizado, el trabajo pretende ilustrar la potencia de los métodos matemáticos para modelizar problemas de interés económicos, permitiendo con ello alcanzar resultados económicos cuantitativos y cualitativos que difícilmente serían posible desde otras perspectivas no cuantitativas.

8 Bibliografía

[1] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.

[2] Cortés, J.C., Sánchez Sánchez, A., Romero J.V., Roselló M.D. y Villanueva, R.J.: "Modelos Dinámicos Continuos basados en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Segundo Orden a Coeficientes Constantes". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/38756

[3] Cortés, J.C., Sánchez Sánchez, A., Romero J.V., Roselló M.D. y Villanueva, R.J.: "Modelos Dinámicos Continuos basados en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden a Coeficientes Constantes". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/38747

[4] Phillips, A.W.: "The relationship between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kigdom, 1861-1957", Economica, 1958, pp: 283-299.

[5] Friedman, M.: "The role of monetary policy", American Economic Review, 1968, pp: 1-17.