UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

MÁSTER EN INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

Frames de Gabor: el principio de dualidad de Ron y Shen

Trabajo Final de Máster presentado por:

Eva Primo Tárraga

Dirigido por:

Dra. Carmen Fernández Rosell y Dr. Antonio Galbis Verdú

Índice general

Introducción

Un frame en un espacio de Hilbert permite representar todo elemento del espacio como combinación lineal (infinita) de los elementos del frame. La principal diferencia respecto de las bases es que los elementos del frame no tienen porque ser linealmente independientes, y la representación de un elemento en términos del frame no tiene por qué ser única. En general, si $\{e_k\}$ es un frame en $\mathcal{H}$, habrá varias maneras de representar un elemento $f \in \mathcal{H}$ como

$$f = \sum c_k e_k.$$

De un frame que no es una base, es decir, sus elementos no son linealmente independientes, se dice que es **redundante**. La redundancia es muy importante en las aplicaciones.

Por ejemplo, imaginemos que se quiere transmitir una señal, es decir, una cierta función f. Si el transmisor y el receptor se ponen de acuerdo en cuanto a la utilización de un determinado frame, entonces el transmisor sólo necesita transmitir los coeficientes $\{c_k\}$, a partir de los cuales el receptor podrá reconstruir la señal. Hasta aquí, parece que no hay ninguna ventaja en usar sistemas redundantes, respecto a usar bases. El problema surge del hecho de que no vivimos en un mundo ideal y el receptor no captará los coeficientes $\{c_k\}$ con exactitud, sino que recibirá una señal ruidosa $\{c_k + \xi_k\}$, esto es, una perturbación de los coeficientes correctos del frame. Basándose en los datos que recibe, el receptor llegará a la conclusión de que la señal transmitida es

$$\sum (c_k + \xi_k) e_k = f + \sum \xi_k e_k,$$

que difiere de la señal correcta f en el término $\sum \xi_k e_k$. Si el sistema $\{e_k\}$ es redundante entonces la aplicación

$$\{d_k\} \mapsto \sum d_k e_k$$

tiene núcleo no trivial, lo que implica que partes de la contribución al ruido podrían cancelarse entre sí. Esto nunca va a ocurrir si $\{e_k\}$ es una base ortonormal, ya que en este caso

$$\| \sum \xi_k e_k \|^2 = \sum |\xi_k|^2 \,,$$

y cualquier error en la transmisión de un coeficiente contribuye a que la reconstrucción sea peor. En resumen: *a mayor redundancia del sistema, más posibilidades hay de que los distintos errores se cancelen entre sí.*

Los frames fueron introducidos en 1952 por Duffin y Schaeffer [DS52] como una herramienta para el estudio de series de Fourier no armónicas, esto es, sucesiones del tipo $\left\{e^{\mathbf{i}\lambda_n x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son números reales o complejos. En 1980, Young [You80] escribe un libro que contiene la teoría básica de frames en un contexto abstracto. En 1985, con el inicio de la teoría de wavelets, Daubechies, Grossmann y Meyer observaron que los frames se pueden usar para obtener desarrollos de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ similares a los obtenidos usando bases ortonormales.

En este trabajo se presenta una introducción a la teoría de frames y su relación con las bases de Riesz. Nos centramos en el estudio de un tipo concreto de frames, los frames de Gabor, para los que estudiamos las condiciones de su existencia, así como su estructura. El objetivo será culminar nuestro trabajo con la relación que existe entre los frames de Gabor y las bases de Riesz, resultado conocido como el principio de dualidad de Ron y Shen.

En el Capítulo 1, se presentan las definiciones y los resultados que acompañan a la introducción de un nuevo concepto, como es el concepto de frame, para después focalizar en el tipo de frame que resultará de nuestro interés, los frames de Gabor.

En el Capítulo 2, profundizamos en las condiciones que necesitamos para poder afirmar la existencia de un frame de Gabor, e introducimos la representación de Walnut.

En el Capítulo 3, presentamos algunos resultados de Walnut, Janssen, Wexler, Raz, Ron y Shen que nos ayudan a ver la estructura que tienen los frames de Gabor y, finalmente, su relación con las bases de Riesz.

Este trabajo enfoca los frames desde el punto de vista del análisis funcional. En múltiples estudios se ha visto que los frames son realmente útiles en áreas de matemática aplicada, aunque no ha sido el objetivo de este trabajo. Hemos preferido centrarnos en las bases teóricas de los frames para establecer unos buenos cimientos a la hora de avanzar en las distintas direcciones que nos ofrece esta teoría.

Capítulo 1

Frames en espacios de Hilbert. Frames de Gabor

En este primer capítulo introducimos el concepto de frame, así como los operadores que de manera natural van asociados a él. Además, veremos una serie de resultados que nos facilitarán trabajar con los frames y que nos mostrarán algunas ventajas de ellos respecto de las bases en espacios vectoriales. Más tarde, presentaremos un tipo concreto de frame, los frames de Gabor, que son el objeto principal de nuestro estudio debido a su utilidad en el análisis tiempo-frecuencia.

1.1. Frames en espacios de Hilbert

Presentamos una definición formal del concepto de frame, para posteriormente definir los operadores que son inherentes a él y las relaciones existentes entre ellos, así como sus propiedades más relevantes. Mostramos también resultados que nos relacionan los frames con las bases ortonormales, introducimos el concepto de base de Riesz y, finalmente, describimos algunas de sus caracterizaciones.

Definición 1.1.1 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Diremos que un subconjunto $\{e_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{H}$, con J numerable, es un **frame** si existen constantes $A, B > 0$ tales que para toda $f \in \mathcal{H}$ tenemos que:*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{1.1}$$

*Llamamos **cotas del frame** a las parejas A y B que satisfacen (1.1).*

*Si $A = B$, diremos que $\{e_j : j \in J\}$ es un **tight frame**.*

A continuación, tenemos un ejemplo que nos ayudará a familiarizarnos con este nuevo concepto.

Ejemplo 1.1.2 *Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Tenemos los siguientes frames:*

(a) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$,

(b) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots\}$,

(c) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x_1, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$,

(d) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \ldots\}$.

Veamos por qué:

(a) Todo elemento $f \in \mathcal{H}$ se puede escribir de forma única como $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$. Además $c_k = \langle f, x_k \rangle$ y, por la identidad de Parseval, se sigue que:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, x_k \rangle|^2 .$$

De modo que la propia base es un tight frame, con $A = B = 1$.

En (b) repetimos cada elemento de la base dos veces y obtenemos así un tight frame, con $A = B = 2$.

En (c) repetimos sólo el primer elemento de la base, luego $A = 1$ y $B = 2$.

En (d), cada vector $\frac{1}{\sqrt{k}}x_k$, con $k \in \mathbb{N}$, se repite k veces, obteniendo así $A = B = 1$.

Vamos a presentar una definición que nos ayudará a entender mejor los sumatorios con los que trabajamos.

Definición 1.1.3 *Sea $\{f_j : j \in J\}$ un conjunto numerable de elementos en $\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{B}$ un espacio de Banach. Se dice que la serie $\sum_{j \in J} f_j$* ***converge incondicionalmente*** *a $f \in \mathcal{B}$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $F_0 \subseteq J$ tal que*

$$\left\| f - \sum_{j \in F} f_j \right\| < \varepsilon,$$

para todo $F \supseteq F_0$ conjunto finito; es decir, si la red de sumas parciales definida por $S_F = \sum_{j \in F} f_j$ converge a f.

La convergencia de los sumatorios sobre los elementos de J se consideran en el sentido incondicional de la Definición 1.1.3. Sabemos que J es numerable, pero la convergencia de la suma no depende del orden que escojamos en J.

Para ayudarnos en las siguientes pruebas que mostremos, vamos a presentar un resultado al que recurriremos.

Lema 1.1.4 *Sea $\{e_j : j \in J\}$ un subconjunto de un espacio de Hilbert, con J numerable. Si existe $C > 0$ tal que, para toda $c \in \ell_2(J)$ de soporte finito, tenemos*

$$\left\| \sum_{j \in J} c_j e_j \right\|_H \leq C \|c\|_{\ell_2},$$

entonces, para cada $b \in \ell_2(J)$, la serie $\sum_{j\in J} b_j e_j$ converge en $\mathcal{H}$ y cumple

$$\left\| \sum_{j\in J} b_j e_j \right\|_H \leq C\|b\|_{\ell_2}.$$

Demostración:
Definimos $\mathcal{F} = \{F \subset J : F \text{ finito}\}$ y consideraremos $F_1 \leq F_2$ si $F_1 \subset F_2$. Entonces $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto dirigido.

Fijamos $b \in \ell_2(J)$ y consideramos la red en $\mathcal{H}$

$$\left\{ \sum_{j\in F} b_j e_j : F \in \mathcal{F} \right\}.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, seleccionamos un $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\left(\sum_{j\notin F_0} |b_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Entonces, dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_0 \subset F_1$ y $F_0 \subset F_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j\in F_1} b_j e_j - \sum_{j\in F_2} b_j e_j \right\| &= \left\| \sum_{j\in F_1\setminus F_0} b_j e_j - \sum_{j\in F_2\setminus F_0} b_j e_j \right\| \leq \left\| \sum_{j\in F_1\setminus F_0} b_j e_j \right\| + \left\| \sum_{j\in F_2\setminus F_0} b_j e_j \right\| \\ &\leq C(\| b|_{F_1\setminus F_0} \|_{\ell_2} + \| b|_{F_1\setminus F_0} \|_{\ell_2}) \leq C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, una red de Cauchy, luego $\sum_{j\in J} b_j e_j$ converge en $\mathcal{H}$. Además, para cada $F \in \mathcal{F}$, se cumple que

$$\left\| \sum_{j\in F} b_j e_j \right\| \leq C\| b|_F \|_{\ell_2} \leq C\|b\|_{\ell_2}.$$

Por lo tanto,

$$\left\| \sum_{j\in J} b_j e_j \right\| = \lim_{F\in\mathcal{F}} \left\| \sum_{j\in F} b_j e_j \right\| \leq C\|b\|_{\ell_2}.$$

■

Veamos el primero de los operadores que deducimos de la definición de frame.

Proposición 1.1.5 *Sea $\{e_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{H}$ un frame de $\mathcal{H}$, definimos el operador de coeficientes, u* ***operador de análisis****, $C : \mathcal{H} \to \ell_2(J)$, como:*

$$Cf = \{\langle f, e_j \rangle : j \in J\}. \tag{1.2}$$

El operador de análisis es acotado y tiene rango cerrado.

Demostración:

Sea $f \in \mathcal{H}$, tenemos que $Cf = (\langle f, e_j \rangle)_{j\in J}$. Por la definición de frame (1.1), sabemos que

$$\|Cf\|_2^2 = \|(\langle f, e_j\rangle)_{j\in J}\|_2^2 = \sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Luego obtenemos que $Cf \in \ell_2(J)$ y, además, que C es un operador continuo. Por otro lado, se cumple que

$$\text{máx}\{\|Cf\|_2 : \ \|f\| = 1\} \leq \text{máx}\{B^{1/2}\|f\| : \ \|f\| = 1\} = B^{1/2},$$

por lo tanto, C es un operador acotado.

Ahora, consideramos la sucesión $\{(\alpha_j^n)_{j\in J}\}_{n\in\mathbb{N}} \in C(\mathcal{H})$ de manera que converja en $\ell_2(J)$; es decir, que exista $(\alpha_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$, con $(\alpha_j)_{j\in J} = \text{lím}_{n\to\infty}(\alpha_j^n)_{j\in J}$. Vamos a ver que $(\alpha_j)_{j\in J} \in C(\mathcal{H})$.

Como $\{(\alpha_j^n)_{j\in J}\}_{n\in\mathbb{N}} \in C(\mathcal{H})$, sabemos que existen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ tales que $Cf_n = (\alpha_j^n)_{j\in J}$. Sabemos que la sucesión $\{(\alpha_j^n)_{j\in J}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\ell_2(J)$, por lo tanto es de Cauchy. Así, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &> \|(\alpha_j^n)_{j\in J} - (\alpha_j^m)_{j\in J}\|^2 = \|Cf_n - Cf_m\|^2 = \|C(f_n - f_m)\|^2 \\ &= \sum_{j\in J} |\langle f_n - f_m, e_j\rangle|^2 \geq A\|f_n - f_m\|^2, \end{aligned}$$

por (1.1). Con lo que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio completo y , por lo tanto, existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$. Aplicando el operador continuo C a esta última expresión obtenemos que

$$Cf = \lim_{n\to\infty} Cf_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha_j^n)_{j\in J} = (\alpha_j)_{j\in J}.$$

Por lo tanto, $C(\mathcal{H})$ es cerrado, como queríamos ver.

■

Estudiemos ahora el operador adjunto de C sobre las sucesiones $(\alpha_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$ con soporte finito.

$$\begin{aligned} \langle C^*(\alpha_j)_{j\in J}, f\rangle &= \langle(\alpha_j)_{j\in J}, Cf\rangle = \langle(\alpha_j)_{j\in J}, (\langle f, e_j\rangle)_{j\in J}\rangle \\ &= \sum_{j\in J} \alpha_j \overline{\langle f, e_j\rangle} = \sum_{j\in J} \alpha_j \langle e_j, f\rangle = \langle \sum_{j\in J} \alpha_j e_j, f\rangle. \end{aligned}$$

Entonces sabemos que para las sucesiones $(\alpha_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$ con soporte finito, se cumple $C^*(\alpha_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j$.

Si definimos el operador $D : \ell_2(J) \to \mathcal{H}$ como $D(\alpha_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j$. Por un lado, sabemos que sobre las sucesiones $(\alpha_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$ con soporte finito $D = C^*$, por lo tanto se cumple esta cota

$$\left\| \sum_{j\in J} \alpha_j e_j \right\| \leq B^{1/2} \|(\alpha_j)_{j\in J}\|_2.$$

De esta expresión, por el Lema 1.1.4, deducimos que la cota se extiende a toda $(\alpha_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$. Entonces, efectivamente, D está bien definido y es continuo. Por otro lado, como coincide con C^* en un conjunto denso de $\ell_2(J)$, podemos afirmar que $D = C^*$ en todo $\ell_2(J)$. A este operador D lo llamamos operador de reconstrucción u **operador de síntesis**.

Finalmente, definimos el más importante de los operadores que acompañan al concepto de frame y vemos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.6 *Definimos el **operador frame**, S, como $S := DC : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Sea $f \in \mathcal{H}$,*

$$Sf = DCf = D(\langle f, e_j \rangle)_{j\in J} = \sum_{j\in J} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Nota 1.1.7 *Recordemos que para un operador $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ definimos su norma como:*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_{\mathcal{Y}} : \ x \in \mathcal{X}, \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}.$$

En el caso en que T sea autoadjunto, esta definición se puede sustituir por:

$$\|T\| = \sup\{\langle T(x), x \rangle : \ x \in \mathcal{X}, \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}.$$

Proposición 1.1.8 *El operador frame S es un operador positivo invertible que satisface:*

$$AI_{\mathcal{H}} \leq S \leq BI_{\mathcal{H}}$$

y

$$B^{-1}I_{\mathcal{H}} \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_{\mathcal{H}}.$$

Demostración:
Si $f \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle Sf, f \rangle = \langle C^*Cf, f \rangle = \langle Cf, Cf \rangle = \langle f, C^*Cf \rangle = \langle f, Sf \rangle,$$

por lo que tenemos que S es un operador positivo y autoadjunto. Por otra parte, dada $f \in \mathcal{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \left\langle \sum_{j\in J} \langle f, e_j \rangle e_j, f \right\rangle = \sum_{j\in J} \langle f, e_j \rangle \langle e_j, f \rangle \\ &= \sum_{j\in J} \langle f, e_j \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle} = \sum_{j\in J} |\langle f, e_j \rangle|^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Así, por la expresión (1.1), tenemos que

$$A\langle f, f\rangle \ \leq\ \langle Sf, f\rangle \ \leq\ B\langle f, f\rangle,$$

lo que nos da una de las cotas del enunciado:

$$AI_{\mathcal{H}} \leq S \leq BI_{\mathcal{H}} \tag{1.4}$$

De esta expresión, podemos deducir que $0 \leq S - AI_{\mathcal{H}}$, con lo que el espectro del operador $(S - AI_{\mathcal{H}})$ es mayor o igual a cero y, así, el de S es estrictamente positivo. De lo anterior obtenemos que, efectivamente, S es invertible en $\mathcal{H}$.

Ahora consideramos el operador positivo S^{-1}. Por (1.4) sabemos que $(S-AI_{\mathcal{H}}) \geq 0$ y $(BI_{\mathcal{H}}-S) \geq 0$, luego $S^{-1}(S-AI_{\mathcal{H}}) \geq 0$ y $S^{-1}(BI_{\mathcal{H}}-S) \geq 0$; es decir, $AS^{-1} \leq I_{\mathcal{H}}$ y $I_{\mathcal{H}} \leq BS^{-1}$. Y, así, tenemos las cotas que buscábamos para el operador S^{-1}:

$$B^{-1}I_{\mathcal{H}} \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_{\mathcal{H}}.$$

■

Nota 1.1.9 *Si pensamos en el B óptimo, observamos que:*

$$\begin{aligned} B_{opt} &= \min\{B : \sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2\ \forall f \in \mathcal{H}\} \\ &= \sup\{\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle\ |^2|\ \forall f \in \mathcal{H}\ \|f\|^2 = 1\} \\ &= \sup\{\langle S(f), f\rangle :\ f \in \mathcal{H},\ \|f\|_{\mathcal{H}} = 1\} = \|S\|. \end{aligned}$$

Análogamente, $A_{opt} = \|S^{-1}\|^{-1}$.

Nota 1.1.10 *Sea $\{e_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{H}$ un frame de $\mathcal{H}$. Si $f = \sum_{j\in J} c_j e_j$ para algún $c \in \ell_2(J)$, la serie $\sum_{j\in J} c_j e_j$ converge incondicionalmente a $f \in \mathcal{H}$.*

Corolario 1.1.11 *Si $\{e_j : j \in J\}$ es un frame con cotas frame $A, B > 0$, entonces $\{S^{-1}e_j : j \in J\}$ es un frame con cotas $A^{-1}, B^{-1} > 0$, al cual llamaremos* ***frame dual****.*

Así, toda $f \in \mathcal{H}$ tiene un desarrollo no ortogonal:

$$f = \sum_{j\in J} \langle f, S^{-1}e_j\rangle e_j \tag{1.5}$$

y

$$f = \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle S^{-1}e_j, \tag{1.6}$$

donde ambas convergen incondicionalmente en $\mathcal{H}$.

Demostración:
Por la Proposición 1.1.8 tenemos $B^{-1}I_{\mathcal{H}} \le S^{-1} \le A^{-1}I_{\mathcal{H}}$, de lo que obtenemos:

$$B^{-1}\langle f, f\rangle \;\le\; \langle S^{-1}f, f\rangle \;\le\; A^{-1}\langle f, f\rangle.$$

Por otro lado, utilizando la expresión obtenida en (1.3), tenemos que

$$\sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} |\langle S^{-1}f, e_j\rangle|^2 = \langle S(S^{-1}f), S^{-1}f\rangle = \langle S^{-1}f, f\rangle.$$

Sustituyendo en la primera desigualdad tenemos la expresión que nos da la definición de frame:

$$B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 \le A^{-1}\|f\|^2,$$

y vemos que, efectivamente, $\{S^{-1}e_j : j \in J\}$ es un frame, con cotas frame B^{-1} y A^{-1}.

Ahora, usando la factorización $I_{\mathcal{H}} = S^{-1}S = SS^{-1}$, obtenemos las expresiones que buscábamos:

$$f = S(S^{-1}f) = \sum_{j\in J}\langle S^{-1}f, e_j\rangle e_j = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1}e_j\rangle e_j,$$

y, por el otro lado,

$$\begin{aligned} f &= S^{-1}(Sf) = \sum_{j\in J}\langle Sf, S^{-1}e_j\rangle S^{-1}e_j = \sum_{j\in J}\langle f, SS^{-1}e_j\rangle S^{-1}e_j \qquad (1.7)\\ &= \sum_{j\in J}\langle f, e_j\rangle S^{-1}e_j. \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Además, como $\{\langle f, S^{-1}e_j\rangle\}_{j\in J}$ y $\{\langle f, e_j\rangle\}_{j\in J}$ pertenecen a $\ell_2(J)$, por la cota superior del frame, obtenemos que la convergencia de ambas expresiones es incondicional por la Nota 1.1.10.

■

Nota 1.1.12
- *Para las bases ortonormales y los tight frames, (1.5) y (1.6) coinciden.*
- *En general, los coeficientes $(c_j)_{j\in J}$ que nos dan $f = \sum_{j\in J} c_j e_j$ no son únicos.*

Proposición 1.1.13 *Si $\{e_j : j \in J\}$ es un frame de $\mathcal{H}$ y $f = \sum_{j\in J} c_j e_j$ para algún $c \in \ell_2(J)$, entonces*

$$\sum_{j\in J} |c_j|^2 \ge \sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2. \qquad (1.9)$$

*La igualdad se obtiene si, y solo si, $c_j = \langle f, S^{-1}e_j\rangle$ para todo $j \in J$. Por ello, a los coeficientes $\langle f, S^{-1}e_j\rangle$ se les llama **coeficientes canónicos**.*

Demostración:
Sea $a_j = \langle f, S^{-1}e_j\rangle$. Entonces $f = \sum_{j\in J} a_j e_j$, y utilizando (1.3) sobre S^{-1}, en lugar de sobre S, se cumple que

$$\langle f, S^{-1}f\rangle = \sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} |a_j|^2 = \|a\|_2^2.$$

Por otro lado, dado que $\langle e_j, S^{-1}f\rangle = \langle S^{-1}e_j, f\rangle = \overline{\langle f, S^{-1}e_j\rangle}$, se obtiene que

$$\langle f, S^{-1}f\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} c_j e_j, S^{-1}f \right\rangle = \sum_{j\in J} c_j \langle e_j, S^{-1}f\rangle = \sum_{j\in J} c_j \overline{a_j} = \langle c, a\rangle.$$

Entonces, $\langle a, a\rangle = \|a\|_2^2 = \langle c, a\rangle$, con lo que $0 = \langle c, a\rangle - \langle a, a\rangle = \langle c - a, a\rangle$. Y aplicando el teorema de Pitágoras en $\|c\|_2^2$ obtenemos:

$$\|c\|_2^2 = \|c - a\|_2^2 + \|a\|_2^2 \geq \|a\|_2^2, \tag{1.10}$$

como queríamos ver.

■

El siguiente resultado muestra que al eliminar un elemento de un frame obtenemos un frame o un conjunto cuya envoltura lineal no es densa.

Teorema 1.1.14 *Sea $\{e_j\}_{j\in J}$, con J numerable, un frame de $\mathcal{H}$.*

(a) Si $\langle e_k, S^{-1}e_k\rangle \neq 1$, entonces $\{e_j\}_{j\neq k}$ es un frame de $\mathcal{H}$.

(b) Si $\langle e_k, S^{-1}e_k\rangle = 1$, entonces $\overline{\text{span}}\,\{e_j\}_{j\neq k} \neq \mathcal{H}$.

Demostración:
Fizado $k \in \mathbb{N}$, denotamos $b_j = \langle e_k, S^{-1}e_j\rangle$. De la identidad

$$e_k = \sum_{j\in J} \delta_{k,j} e_j = \sum_{j\in J} b_j e_j$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \|e_k\|1 &= \sum_{j\in J} |b_j|^2 + \sum_{j\in J} |\delta_{k,j} - b_j|^2 \\ &= |b_k|^2 + |b_k - 1|^2 + 2\sum_{j\neq k} |b_j|^2 . \end{aligned}$$

(a) Supongamos $b_k \neq 1$. Entonces

$$e_k = \frac{1}{1 - b_k} \sum_{j\neq k} b_j e_j.$$

Para cada $f \in \mathcal{H}$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} |\langle f, e_k \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{1-b_k} \sum_{j \neq k} b_j \langle f, e_j \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{|1-b_k|^2} \sum_{j \neq k} |b_j|^2 \sum_{j \neq k} |\langle f, e_j \rangle|^2 \\ &= C \sum_{j \neq k} |\langle f, e_j \rangle|^2, \end{aligned}$$

para alguna constante $C > 0$. Si A, B son las constantes del frame $\{e_j\}_{j \in J}$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} A\|f\|^2 &\leq \sum_{j \neq k} |\langle f, e_j \rangle|^2 + |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &\leq (1+C) \sum_{j \neq k} |\langle f, e_j \rangle|^2 \\ &\leq B(1+C)\|f\|^2. \end{aligned}$$

(b) Supongamos $b_k = 1$. Entonces $\sum_{j \neq k} |b_j|^2 = 0$, de donde

$$\left\langle S^{-1} e_k, e_j \right\rangle = b_j = 0 \quad \forall j \neq k.$$

Sin embargo, $S^{-1} e_k \neq 0$ ya que $b_k = 1$. Puesto que hay un elemento no nulo de $\mathcal{H}$ que es ortogonal a todos los e_j, con $j \neq k$, deducimos que $\overline{\text{span}} \{e_j\}_{j \neq k} \neq \mathcal{H}$.

■

Un frame que para algún valor de k cumpla la condición (a) del teorema anterior, se dice que es **redundante**.

Seguidamente, enunciamos y demostramos unos resultados que nos relacionan los frames con las bases ortonormales.

Lema 1.1.15 *Si $\{e_j : j \in J\}$ es un tight frame de $\mathcal{H}$ con cotas $A = B = 1$, y si $\|e_j\| = 1$ para todo $j \in J$, entonces $\{e_j\}_{j \in J}$ es una base ortonormal.*

Demostración:
Por la definición de frame (1.1), para cada $m \in J$ tenemos que

$$1 = \|e_m\|_2^2 = \sum_{j \in J} |\langle e_m, e_j \rangle|^2 = |\langle e_m, e_m \rangle|^2 + \sum_{j \in J,\ j \neq m} |\langle e_m, e_j \rangle|^2.$$

Por lo tanto $\sum_{j \in J,\ j \neq m} |\langle e_m, e_j \rangle|^2 = 0$. Y como es una suma de términos positivos o cero, concluimos que $\langle e_m, e_j \rangle = \delta_{mj}$, que es la condición que nos faltaba para poder afirmar que es una base ortonormal.

■

Teorema 1.1.16 *Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces los frames de $\mathcal{H}$ son las familias $\{Ux_k\}_{k=1}^{\infty}$, siendo $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador acotado y sobreyectivo.*

Demostración:

Sea $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica de ℓ^2 y $\Phi : \mathcal{H} \to \ell^2$ el isomorfismo isométrico definido por $\Phi(x_k) = \delta_k$. Si $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame de $\mathcal{H}$, entonces el operador de síntesis $C^* : \ell^2 \to \mathcal{H}$ es acotado y sobreyectivo y $C^*(\delta_k) = e_k$. Por tanto, $U := C^* \circ \Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es acotado y sobreyectivo y cumple $Ux_k = e_k$.

Recíprocamente, supongamos que $e_k = Ux_k$, siendo $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador acotado y sobreyectivo. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^* f, x_k\rangle|^2 = \|U^* f\|^2.$$

Por ser U acotado y sobreyectivo, existen dos constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\| \leq \|U^* f\| \leq B\|f\|,$$

y concluimos que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame de $\mathcal{H}$.

■

Recordemos que si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces la proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \to Y$ es un operador lineal y continuo que proporciona, para cada $f \in \mathcal{H}$, el único vector $Pf \in Y$ con la propiedad de que

$$f - Pf \in Y^{\perp}.$$

En otras palabras, $\mathcal{H} = Y \oplus Y^{\perp}$ y si $f = g + h$, siendo $g \in Y,\ h \in Y^{\perp}$, entonces $Pf = g$.

En particular, $\|f\|^2 = \|Pf\|^2 + \|f - Pf\|^2$. Además,

$$\|f - Pf\| = \min\{\|f - g\| : \ g \in Y\}.$$

Proposición 1.1.17 *Sea $\{e_j\}_{j\in J}$ un frame del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea P la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado Y de $\mathcal{H}$. Entonces $\{Pe_j\}_{j\in J}$ es un frame de Y.*

Demostración:

Descomponemos $e_j = Pe_j + h_j$, siendo $h_j \in Y^{\perp}$. Entonces, para cada $f \in Y$, se tiene $\langle f, h_j\rangle = 0$ y, por tanto, $\langle f, e_j\rangle = \langle f, Pe_j\rangle$. De acuerdo con (1.1), existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f, Pe_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in Y.$$

■

Observemos que la proyección ortogonal de una base ortonormal no tiene porque seguir siendo una base de Y. Incluso podría ocurrir que dos vectores distintos de la base tengan la misma proyección, o que algún vector tenga proyección nula. Sin embargo, la proyección de la base siempre define un frame.

Ejemplo 1.1.18 *Consideramos en $L^2(0,1)$ la base ortonormal $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, con $x_k(x) = e^{2\pi\,\mathbf{i}\,kx}$. Recordamos que toda función $f \in L^2(0,1)$ admite un desarrollo en serie de Fourier*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k x_k, \quad c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi\,\mathbf{i}\,kx}\, dx = \langle f, x_k\rangle\,.$$

Sea I un subintervalo abierto de $(0,1)$ de longitud $|I| < 1$ y sea e_k la restricción de x_k a I. Entonces $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un frame de $L^2(I)$.

Demostración:

Para cada $f \in L^2(I)$ definimos $\tilde{f} \in L^2(0,1)$ como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I, \\ \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$$

De acuerdo con la identidad de Parseval,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle \tilde{f}, x_k\right\rangle\right|^2 = \int_0^1 \left|\tilde{f}\right|^2 = \int_I |f|^2\,.$$

■

Notemos que si tomamos $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ e identificamos $L^2(I)$ con el subespacio cerrado Y de $L^2(0,1)$, que consta de aquellas funciones que se anulan fuera de I, entonces la proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \to Y$ es precisamente el operador restricción $Pg = g|_I$. Así, el ejemplo anterior se puede interpretar como una aplicación de la Proposición 1.1.17.

Con esta identificación, toda función $f \in L^2(I)$ admite un desarrollo

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, x_k\rangle\, e_k \quad \text{en} \quad L^2(I).$$

Pero este desarrollo no es único. En efecto, si consideramos

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I, \\ \\ 1, & x \notin I, \end{cases}$$

entonces también se cumple

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle g, x_k\rangle\, e_k \quad \text{en} \quad L^2(I),$$

pese a que $f \neq g$ en $L^2(0,1)$ y, por tanto,

$$\{\langle f, x_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}} \neq \{\langle g, x_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Ejemplo 1.1.19 *Sean $m > n$ y, para cada $k = 1, 2, \dots m$, consideremos los vectores $x_k \in \mathbb{C}^m, e_k \in \mathbb{C}^n$ definidos por*

$$x_k(j) = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{2\pi\,\mathbf{i}(j-1)\frac{k-1}{m}}, \quad j = 1, 2 \dots m,$$

y

$$e_k(j) = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{2\pi\,\mathbf{i}(j-1)\frac{k-1}{m}}, \quad j = 1, 2 \dots n.$$

Entonces:

(a) $\{x_k\}_{k=1}^m$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^m$,

(b) $\{e_k\}_{k=1}^m$ es un frame de $\mathbb{C}^n$.

Demostración:
(a) Es claro que $\|x_k\| = 1$. Además, si $k \neq \ell$, entonces

$$\langle x_k, x_\ell\rangle = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{2\pi\,\mathbf{i}(j-1)\frac{k-1}{m}} e^{-2\pi\,\mathbf{i}(j-1)\frac{\ell-1}{m}} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi\,\mathbf{i}\,j\frac{k-\ell}{m}} = 0.$$

(b) Sea $P : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ la proyección sobre las primeras n coordenadas. Entonces $e_k = Px_k$ y aplicamos la Proposición 1.1.17.

■

Recordemos un lema que nos será útil para ver el siguiente resultado.

Lema 1.1.20 *Dada $c = (c_j)_{j\in J}$ una sucesión cualquiera, tenemos que $c \in \ell_2(J)$ si, y sólo si, para todo $b \in \ell_2(J)$, la serie $\sum_{j\in J} b_j c_j$ es convergente.*

Proposición 1.1.21 *Sea $\{e_j : j \in J\}$ un frame de $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Los coeficientes $c \in \ell_2(J)$ en el desarrollo $f = \sum_{j\in J} c_j e_j$ son únicos.

(ii) El operador de análisis, C, es sobreyectivo.

(iii) Existen $A', B' > 0$ tales que las desigualdades

$$A'\|c\|_2 \leq \left\|\sum_{j\in J} c_j e_j\right\| \leq B'\|c\|_2 \tag{1.11}$$

se cumplen para toda sucesión finita de $c = (c_j)_{j\in J}$.

(iv) $\{e_j : j \in J\}$ es la imagen de una base ortonormal $\{g_j : j \in J\}$ bajo un operador $T \in B(\mathcal{H})$ invertible.

(v) La matriz de Gram, G, definida por

$$G_{jm} = \langle e_m, e_j \rangle, \quad m, j \in J, \tag{1.12}$$

define un operador positivo e invertible en $\ell_2(J)$.

Demostración:

Como $\{e_j\}_{j\in J}$ es un frame, C es inyectiva con rango cerrado y D es sobreyectiva. Recordemos que un operador acotado es inyectivo si, y solo si, su operador adjunto tiene rango denso.

$(i) \leftrightarrow (ii)$ Los coeficientes son únicos si, y sólo si, D es inyectiva. D es inyectiva si, y sólo si, $D^* = C$ es sobreyectiva, es decir, si el rango de D es cerrado y denso.

$(i) \rightarrow (iii)$ La continuidad de D implica la existencia de B'. Como D es biyectiva, por el teorema de la aplicación abierta, D^{-1} es continua. Entonces existe $A > 0$ tal que $\|D^{-1}f\| \leq A\|f\|$. Como D es sobreyectiva sabemos que existe $c \in \ell_2(J)$ tal que $f = Dc$ y sustituyendo en la expresión anterior tenemos que

$$\|c\| = \|D^{-1}Dc\| \leq A\|Dc\|,$$

y así obtenemos la desigualdad $A^{-1}\|c\| \leq \|Dc\|$, donde A^{-1} es el A' que buscábamos.

$(iii) \rightarrow (iv)$ Sea $\{f_j : j \in J\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Para $\mathcal{H} \ni f = \sum_{j\in J} c_j f_j$, definimos Tf como

$$Tf = \sum_{j\in J} c_j e_j.$$

Entonces $\|f\| = \|c\|_2$ y

$$\|Tf\| = \left\| \sum_{j\in J} c_j e_j \right\| \geq A\|c\|_2 = A\|f\|.$$

Análogamente, $\|Tf\| \leq B\|f\|$ para toda $f \in \mathcal{H}$. Así, T está bien definida, es invertible en $\mathcal{H}$ y $Tf_j = e_j$, como queríamos.

$(iv) \rightarrow (i)$ Si $Tf_j = e_j$ para todo $j \in J$, siendo $\{f_j : j \in J\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,y existen $\{a_j\}_{j\in J}$ y $\{b_j\}_{j\in J}$ tales que

$$\sum_{j\in J} a_j e_j = \sum_{j\in J} b_j e_j,$$

entonces tendríamos que, denotando $c_j = (a_j - b_j)$,

$$\sum_{j\in J} c_j e_j = \sum_{j\in J} (a_j - b_j) e_j = 0.$$

Utilizando el operador T,

$$0 = \sum_{j\in J} c_j e_j = T(\sum_{j\in J} c_j f_j).$$

Por lo tanto, $\sum_{j\in J} c_j f_j = 0$, y como $\{f_j : j \in J\}$ es base ortonormal, $0 = c_j = (a_j - b_j)$ para todo $j \in J$. Concluimos que $a_j = b_j$.

$(iii) \leftrightarrow (v)$ Tenemos $D : \ell_2(J) \to \mathcal{H}$, lineal y continua, así que para $c \in \ell_2(J)$ sabemos que $\sum_{m\in J} e_m c_m$ es finito. Por lo tanto, tenemos que

$$\infty > \left\langle \sum_{m\in J} e_m c_m, e_j \right\rangle = \sum_{m\in J} \langle e_m, e_j\rangle c_m = Gc_j,$$

es decir, tenemos un operador $G : \ell_2(J) \to \mathbb{K}^{(J)}$. Veamos que, de hecho, $G : \ell_2(J) \to \ell_2(J)$.

Queremos ver que, para todo $c \in \ell_2(J)$ de soporte finito se cumple que $Gc \in \ell_2(J)$ utilizando el Lema 1.1.20. Sea $b \in \ell_2(J)$, entonces

$$\langle Gc, b\rangle = \left\langle \left(\sum_{m\in J} \langle e_m, e_j\rangle c_m \right)_{j\in J}, b \right\rangle = \sum_{j\in J} \left(\sum_{m\in J} \langle e_m, e_j\rangle c_m \right) b_j =$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{m\in J} \langle c_m e_m, b_j e_j\rangle = \left\langle \sum_{m\in J} c_m e_m, \sum_{j\in J} b_j e_j \right\rangle \leq \left\| \sum_{m\in J} c_m e_m \right\| \left\| \sum_{j\in J} b_j e_j \right\|.$$

Como sabemos que $\{e_j : j \in J\}$ es un frame,

$$\langle Gc, b\rangle \leq \left\| \sum_{m\in J} c_m e_m \right\| \left\| \sum_{j\in J} b_j e_j \right\| \leq B\|c\|\|b\|.$$

Con lo que G es un operador bien definido sobre las sucesiones de $\ell^2(J)$ de soporte finito. Además, como ya sabemos que $\langle Gc, b\rangle$ es finito ,

$$\begin{aligned} \langle Gc, b\rangle &= \sum_{j\in J} \left(\sum_{m\in J} \langle e_m, e_j\rangle c_m \right) b_j = \sum_{m\in J} \left(\sum_{j\in J} \langle e_m, e_j\rangle b_j \right) c_m \\ &= \langle c, Gb\rangle, \end{aligned}$$

ya que $\langle e_m, e_j\rangle = \langle e_j, e_m\rangle$, y tenemos que el operador G es autoadjunto.

Así, para toda sucesión finita $c = (c_j)_{j\in J} \in \ell_2(J)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Gc, c\rangle &= \left\langle \left(\sum_{m\in J} \langle e_m, e_j\rangle c_m \right)_{j\in J}, c \right\rangle && (1.13) \\ &= \sum_{m,j\in J} \langle e_m, e_j\rangle c_m c_j = \left\langle \sum_{m\in J} c_m e_m, \sum_{j\in J} c_j e_j \right\rangle = \left\| \sum_{j\in J} c_j e_j \right\|^2 && (1.14) \end{aligned}$$

Por densidad de las sucesiones finitas en $\ell_2(J)$, extendemos este resultado a todo $\ell_2(J)$. Así, utilizando la desigualdad $A'\|c\|_2 \leq \|\sum_{j\in J} c_j e_j\|$, vista en (iii),tenemos que $A'^2\|c\|_2^2 \leq \langle Gc, c\rangle$, es decir, $\langle A'^2 c, c\rangle \leq \langle Gc, c\rangle$, con lo que nos queda

$$0 \leq \langle Gc, c\rangle - \langle A'^2 c, c\rangle = \langle (G - A'^2 I_{\ell_2(J)})c, c\rangle.$$

Y concluimos que $(G - A'^2 I_{\ell_2(J)})$ es un operador positivo. De esto deducimos que el espectro del operador $(G - A'^2 I_{\ell_2(J)})$ es mayor o igual a cero, y así que el de G es estrictamente positivo. Es decir, que G es invertible en $\ell_2(J)$.

Para la otra implicación, si partimos de que G es un operador positivo e invertible deducimos que su espectro es estrictamente positivo. Por lo tanto, podemos encontrar $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ que sea estrictamente menor que el espectro del operador G. De esta forma sabemos que el operador $(G - \lambda I_{\ell_2(J)})$ es un operador positivo, luego

$$0 \ \leq \ \langle (G - \lambda I_{\ell_2(J)})c, c\rangle = \langle Gc, c\rangle - \langle \lambda c, c\rangle,$$

con lo que tenemos $\lambda\langle c, c\rangle \ \leq \ \langle Gc, c\rangle \ = \ \| \sum_{j\in J} c_j e_j\|^2$. Esto nos da la cota inferior de la desigualdad (1.11). La cota superior se deduce de la continuidad del operador G.

■

Definición 1.1.22 *Un frame que cumple las condiciones de la Proposición 1.1.21 se denomina* ***base de Riesz*** *de $\mathcal{H}$. Algunos autores se refieren a ellas como frames exactos.*

Nota 1.1.23 *El desarrollo de Corolario 1.1.11 sólo es útil si es posible calcular el frame dual explícitamente.*

Recordemos un resultado necesario para enunciar y demostrar el siguiente lema.

Nota 1.1.24 *Por el Teorema espectral de operadores sabemos que, si S es un operador autoadjunto, acotado y positivo, podemos definir un operador $S^{1/2}$, que también será positivo y que cumplirá $S = S^{1/2}S^{1/2}$.*

Lema 1.1.25 *Si $\{e_j : j \in J\}$ es un frame, entonces $\{S^{-1/2}e_j : j \in J\}$ es un tight frame con cotas frame $A = B = 1$, donde el operador $S^{-1/2}$ es el inverso del operador $S^{1/2}$ comentado en la Nota 1.1.24.*

Demostración:

Como $S^{1/2}$ es un operador positivo, el operador $S^{-1/2}$ está bien definido, es positivo y autoadjunto. Entonces para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$f = S^{-1/2}(S(S^{-1/2}f)) = S^{-1/2}\left(\sum_{j\in J}\langle S^{-1/2}f, e_j\rangle e_j\right) = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1/2}e_j\rangle S^{-1/2}e_j.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1/2}e_j\rangle S^{-1/2}e_j, f\right\rangle = \sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1/2}e_j\rangle|^2.$$

Entonces, $\{S^{-1/2}e_j : j \in J\}$ es un tight frame.

Los vectores $S^{-1/2}e_j$, en general, no están normalizados. Por lo tanto no siempre son bases ortonormales.

■

Lema 1.1.26 *Si* $\{e_j : j \in J\}$ *es un frame, entonces la inversa del operador frame* S^{-1} *viene dada por:*

$$S^{-1}f = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1}e_j\rangle S^{-1}e_j. \tag{1.15}$$

Así, S^{-1} *es el operador frame respecto del frame dual* $\{S^{-1}e_j : j \in J\}$*.*

Demostración:
Para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$S^{-1}f = S^{-1}(S(S^{-1}f)) = S^{-1}\left(\sum_{j\in J}\langle S^{-1}f, e_j\rangle e_j\right) = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1}e_j\rangle S^{-1}e_j,$$

y podemos deducir nuestro enunciado.

■

Autores como Duffin y Schaeffer [DS52] probaron que si una succesión cumple ciertas propiedades concretas, a partir de ésta se puede definir un conjunto que, con toda seguridad, será un frame. Presentamos, sin demostración, uno de estos resultados.

Definición 1.1.27 *Una sucesión* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *de números reales tales que* $\inf_{k\neq\ell}|\lambda_k - \lambda_\ell| > 0$ *se dice que tiene densidad uniforme* $d > 0$ *si existe* $L > 0$ *tal que*

$$\left|\lambda_k - \frac{k}{d}\right| \leq L,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 1.1.28 (Duffin, Schaeffer) *Si* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *tiene densidad uniforme* $d > 0$ *entonces* $\left\{e^{i\lambda_k x}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es un frame de* $L^2(-R, R)$ *para cada* $0 < R < \pi d$*.*

1.2. Frames de Gabor

Presentamos los frames de Gabor, el tipo de frame en el que nos centraremos, y deducimos la forma que tienen los conceptos que lo acompañan: el operador frame y el frame dual.

Recordemos algunos conceptos necesarios para definir los frames de Gabor.

Definición 1.2.1 *Dada una función* f*, definimos los operadores traslación y modulación como:*

- *Traslación:*
$$T_a(f(t)) = f(t-a).$$
- *Modulación:*
$$M_a(f(t)) = e^{2\pi \mathrm{i} ta}f(t).$$

Definición 1.2.2 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ no nula. La transformada de tiempo corto de Fourier (**STFT**) de la función f respecto de g se define como*

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi \mathbf{i} t\omega}dt,$$

para $x, \omega \in \mathbb{R}^d$.

*A la función g la llamamos **ventana** de la STFT.*

Lema 1.2.3 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces la STFT pertenece a $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.*

Demostración:
Calculemos la norma de $V_g f(x,\omega)$, usando en la fórmula de Parseval,

$$\begin{aligned}
\|V_g f(x,\omega)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f \cdot T_x g}(\omega)|^2 d\omega\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f \cdot T_x g(y)|^2 dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y-x)|^2 dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 \|g\|^2 dy \\
&= \|g\|^2\|f\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

■

Definición 1.2.4 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ una ventana no nula y $\alpha, \beta > 0$ parámetros cualesquiera, llamamos **sistema de Gabor** al conjunto de cambios tiempo-frecuencia:*

$$\mathcal{G}(g,\alpha,\beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g \;:\; k, n \in \mathbb{Z}^d\}. \tag{1.16}$$

*Si $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame para $L^2(\mathbb{R}^d)$, diremos que es un **frame de Gabor** o de Weyl-Heisenberg.*

Veamos que, efectivamente, es posible definir un frame a partir de un sistema de Gabor.

Teorema 1.2.5 *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua cuyo soporte es el intervalo $[0,1]$, y tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$. Entonces para cada $0 < \alpha, \beta < 1$ se cumple que*

$$\{M_{m\beta} T_{n\alpha} g\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$$

es un frame de $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración:
Supongamos primero que f es continua y tiene soporte compacto. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, M_{m\beta} T_{n\alpha} g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x - n\alpha) e^{-2\pi\,\mathbf{i}\,m\beta x}\,dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\frac{k}{\beta}}^{\frac{k+1}{\beta}} f(x) g(x - n\alpha) e^{-2\pi\,\mathbf{i}\,m\beta x}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\beta}} F_n(x) e^{-2\pi\,\mathbf{i}\,m\beta x},
\end{aligned}$$

siendo

$$F_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(x - \frac{k}{\beta}\right) g\left(x - n\alpha - \frac{k}{\beta}\right)$$

una función periódica y de período $\frac{1}{\beta}$. En otras palabras, $\langle f, M_{m\beta}T_{n\alpha}g\rangle$ es un coeficiente de Fourier de la función F_n. Por tanto

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{m\beta}T_{n\alpha}g\rangle|^2 = \frac{1}{\beta}\int_0^{\frac{1}{\beta}} |F_n(x)|^2 \, dx.$$

Además, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(x)|^2$ coincide con

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{\ell}\sum_{k} f\left(x - \frac{\ell}{\beta}\right) g\left(x - n\alpha - \frac{\ell}{\beta}\right) \overline{f\left(x - \frac{k}{\beta}\right) g\left(x - n\alpha - \frac{k}{\beta}\right)}\right).$$

Por tener f soporte compacto, fijados $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, el sumatorio doble $\sum_\ell \sum_k$ sólo tiene un número finito de términos no nulos. Además, si $k \neq \ell$, entonces $g(x - n\alpha - \frac{\ell}{\beta})g(x - n\alpha - \frac{k}{\beta}) = 0$ debido a que el soporte de g está incluido en un intervalo de longitud 1 y $\frac{1}{\beta} > 1$. Por tanto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(x)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|f(x - \frac{k}{\beta})\right|^2 \cdot \left|g(x - n\alpha - \frac{k}{\beta})\right|^2.$$

De aqui deducimos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\frac{1}{\beta}} |F_n(x)|^2 \, dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \cdot |g(x - n\alpha)|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \cdot G(x) \, dx,\end{aligned}$$

siendo

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x - n\alpha)|^2.$$

Para concluir, es suficiente observar que, por ser $0 < \alpha < 1$ y por las propiedades de g, existen constantes $A, B > 0$ tales que $A \leq G(x) \leq B$.

■

El operador frame asociado, al que llamaremos **operador frame de Gabor**, tiene la forma

$$Sf = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}g = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n}T_{\alpha k}g$$

Escribiremos $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ o $S_{g,g}$ según sea necesario enfatizar la dependencia del operador frame de g, α y β.

Observemos que, en la definición del operador frame de Gabor, el orden de la modulación y la traslación no es importante, ya que $T_x M_\omega = e^{-2\pi \mathbf{i} x\omega} M_\omega T_x$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g &= \langle f, e^{-2\pi \mathbf{i}\beta n\alpha k} M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle e^{-2\pi \mathbf{i}\beta n\alpha k} M_{\beta n} T_{\alpha k} g \\
&= e^{2\pi \mathbf{i}\beta n\alpha k}\langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle e^{-2\pi \mathbf{i}\beta n\alpha k} M_{\beta n} T_{\alpha k} g \\
&= \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle M_{\beta n} T_{\alpha k} g.
\end{aligned}$$

El orden natural en el contexto STFT es $M_\omega T_x$, mientras que el orden $T_x M_\omega$ es ventajoso para la representación teórica. En general para los frames de Gabor usaremos $T_{\alpha k} M_{\beta n}$.

Veamos ahora que forma tienen los frames duales para los frames de Gabor.

Nota 1.2.6 *Sean α y β parámetros y $r, s, k, n \in \mathbb{Z}^d$. Entonces tenemos que*

$$(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k} M_{\beta n} = e^{-2\pi \mathbf{i}\alpha\beta(k-r)s} T_{\alpha(k-r)} M_{\beta(n-s)}.$$

Además, dadas las funciones f y g, también tenemos que:

$$\langle T_{\alpha r} M_{\beta s} f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle = e^{2\pi\,\mathbf{i}\,\beta s\alpha(k-r)}\langle f, T_{\alpha(k-r)} M_{\beta(n-s)} g\rangle.$$

Proposición 1.2.7 *Si $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame de $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces existe una ventana dual $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que el frame dual de $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es $\mathcal{G}(\gamma,\alpha,\beta)$. Consecuentemente, toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ posee los desarrollos:*

$$f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma \tag{1.17}$$

y

$$f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma\rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \tag{1.18}$$

con convergencia incondicional en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Además se tienen las siguientes relaciones

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \le B\|f\|_2^2,$$

$$B^{-1}\|f\|_2^2 \le \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma\rangle|^2 \le A^{-1}\|f\|_2^2.$$

Demostración:

Veamos que el operador frame de Gabor $S = S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ conmuta con los cambios de tiempo-frecuencia $T_{\alpha r} M_{\beta s}$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $r, s \in \mathbb{Z}^d$,

$$(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} S(T_{\alpha r} M_{\beta s} f) = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha r} M_{\beta s} f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle (T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k} M_{\beta n} g.$$

Utilizando la Nota 1.2.6 obtenemos que

$$\begin{aligned}(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1} \quad S \quad & (T_{\alpha r}M_{\beta s}f) \\ = & \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi\,\mathbf{i}\,\beta s\alpha(k-r)}\langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g\rangle e^{-2\pi\mathbf{i}\alpha\beta(k-r)s}T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g \\ = & \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g\rangle T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g\end{aligned}$$

Y dado que r y s son prefijados y k y n recorren todo $\mathbb{Z}^d$, podemos renombrar los índices y llegamos a

$$(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1}S(T_{\alpha r}M_{\beta s}f) = Sf.$$

Consecuentemente, S^{-1} conmuta con $T_{\alpha r}M_{\beta s}$, por lo que el frame dual consiste en la función

$$S^{-1}(T_{\alpha r}M_{\beta s}g) = T_{\alpha r}M_{\beta s}(S^{-1}g)$$

Así, tomamos $\gamma = S^{-1}g$ como la ventana dual. El resto de afirmaciones se deducen del Corolario 1.1.11.

■

Definición 1.2.8 *A la ventana definida como*

$$\gamma^\circ = S^{-1}g$$

la llamaremos ***ventana dual canónica*** *de g.*

Corolario 1.2.9 *Si $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame para $L^2(\mathbb{R}^d)$ con ventana dual $\gamma = S^{-1}g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces el operador frame inverso viene dado por*

$$S_{g,g}^{-1}f = S_{\gamma,\gamma}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma.$$

Recordemos ahora la fórmula de inversión para la STFT.

Nota 1.2.10 ***Fórmula de inversión para la STFT*** *Sean $g,\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tales que $\langle g,\gamma\rangle \neq 0$. Entonces, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tenemos que*

$$f = \frac{1}{\langle g,\gamma\rangle}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} V_g f(x,\omega)M_\omega T_x\gamma d\omega dx.$$

La Proposición 1.2.7 proviene de una representación tiempo-frecuencia discreta de señales. Si $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame las expresiones (1.17) y (1.18) son versiones discretas de la fórmula de inversión para el STFT.

Además, (1.18) es un desarrollo de Gabor de f con los coeficientes canónicos $c_{kn} = \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma\rangle$. El desarrollo (1.17) también lo podemos escribir como

$$f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k,\beta n)M_{\beta n}T_{\alpha k}\gamma, \tag{1.19}$$

que es una reconstrucción explícita de f con las muestras de la STFT.

Capítulo 2

Existencia de Frames de Gabor

En este capítulo veremos algunas condiciones sobre la función g y los parámetros α y β del sistema de Gabor $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ presentado en el capítulo anterior, que hacen que podamos afirmar que éste es un frame de Gabor.

2.1. El espacio de Wiener

Definimos el espacio de Wiener y vemos algunas de las equivalencias entre las normas que podemos definir sobre él.

Definición 2.1.1 *Decimos que una función $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pertenece al* ***espacio de Wiener****, $W = W(\mathbb{R}^d)$, si*

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_Q\|_\infty < \infty,$$

donde $Q = [0,1]^d$. El subespacio del espacio de Wiener de las funciones continuas lo denotaremos como $W_0(\mathbb{R}^d)$.

El espacio de Wiener contiene todas las funciones acotadas con soporte compacto. Por lo tanto, el espacio de Wiener es un subconjunto denso para cada $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. La inclusión viene dada por

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{n+Q} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|f \cdot T_n\chi_Q\|_\infty^p\right)^{1/p} \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|f \cdot T_n\chi_Q\|_\infty = \|f\|_W, \end{aligned}$$

y

$$\|f\|_\infty \le \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|f \cdot T_n\chi_Q\|_\infty = \|f\|_W.$$

Lema 2.1.2 *Los espacios $W(\mathbb{R}^d)$ y $W_0(\mathbb{R}^d)$ son espacios de Banach.*

Demostración:
Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W(\mathbb{R}^d)$ de Cauchy. Para $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$,

$$\frac{\varepsilon}{2} > \|f_n - f_m\|_W = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(f_n - f_m)T_j\chi_Q\|_\infty. \tag{2.1}$$

Por lo tanto, sabemos que $\frac{\varepsilon}{2} > \|(f_n - f_m)T_j\chi_Q\|_\infty$, para todo $j \in \mathbb{Z}^d$.

Consideramos, para cada $j \in \mathbb{Z}^d$, la sucesión $\{f_nT_j\chi_Q\} \subset L^\infty(Q + j)$, que es una sucesión de Cauchy en un espacio completo. Sea, para cada $j \in \mathbb{Z}^d$, $f^j = \lim_{n\to\infty} f_nT_j\chi_Q$ y consideramos $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, tal que $fT_j\chi_Q = f^j$, Notemos que las fronteras de cada cubo tienen medida nula, por lo que no afectan a la norma supremo.

Ahora, fijamos $n \in \mathbb{N}$ en (2.1) y hacemos tender $m \in \mathbb{N}$ a infinito en las sumas parciales, obteniendo

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(f_n - f^j)T_j\chi_Q\|_\infty.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|fT_j\chi_Q\|_\infty &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|f^j\|_\infty \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|f^j - f_nT_j\chi_Q\|_\infty + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|f_nT_j\chi_Q\|_\infty \\ &< \varepsilon + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|f_nT_j\chi_Q\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

Así, podemos afirmar que $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in W(\mathbb{R}^d)$; es decir, que $W(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Banach.

Consideramos ahora la sucesión en $W_0(\mathbb{R}^d)$, $\{f_n\}_n \subset W(\mathbb{R}^d)$ de Cauchy. Sabemos que existe $f \in W(\mathbb{R}^d)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Además como $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f, dado que la norma supremo es menor o igual que la norma de Wiener, podemos afirmar que f es continua. Con lo que tenemos que $f \in W_0(\mathbb{R}^d)$.

■

Queremos ver que la norma definida en $W(\mathbb{R}^d)$,

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_Q\|_\infty,$$

es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx.$$

Lema 2.1.3 *Para todo $Q' = [a, b]^d$, con $b - a \geq 1$, la expresión*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_{Q'}\|_\infty$$

nos da una norma equivalente a

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n\chi_Q\|_\infty.$$

Demostración:
Sabemos que existen $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ tales que

$$Q \subset \bigcup_{i\in I} i + Q', \tag{2.2}$$

$$Q' \subset \bigcup_{j\in J} j + Q. \tag{2.3}$$

Dado que Q y Q' son compactos podemos suponer I, J finitos.No hay problema en tomarlos subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$, dado que $b-a \geq 1$.

De (2.2) se deduce $\chi_Q \leq \sum_{i\in I} T_i\chi_{Q'}$, donde I es un conjunto finito, por lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n\chi_Q\|_\infty &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n \sum_{i\in I} T_i\chi_{Q'}\|_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{i\in I} \|g\cdot T_{n+i}\chi_{Q'}\|_\infty \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_{n+i}\chi_{Q'}\|_\infty = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n\chi_{Q'}\|_\infty \\
&= card(I) \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n\chi_{Q'}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Podemos intercambiar los sumatorios porque sabemos que convergen. Y con un $i \in \mathbb{Z}^d$ fijado, dado que n recorre todo $\mathbb{Z}^d$, es lo mismo sumar en n que en $n+i$. De forma análoga, a partir de (2.3), llegamos a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n\chi_{Q'}\|_\infty \leq card(J) \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g\cdot T_n\chi_Q\|_\infty.$$

■

Lema 2.1.4 *Para todo $Q' = [a,b]^d$, con $b-a \geq 1$, la expresión*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g\cdot T_x\chi_{Q'}\|_\infty dx$$

nos da una norma equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g\cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx.$$

Demostración:

De (2.2) sabemos $\chi_Q \leq \sum_{i\in I} T_i\chi_{Q'}$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x \sum_{i\in I} T_i\chi_{Q'}\|_\infty dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i\in I} \|g \cdot T_{x+i}\chi_{Q'}\|_\infty dx \\
&= \sum_{i\in I} \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_{x+i}\chi_{Q'}\|_\infty dx = \sum_{i\in I} \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_{Q'}\|_\infty dx \\
&= card(I) \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_{Q'} dx\|_\infty
\end{aligned}$$

Podemos sacar el sumatorio de la integral dado que éste es finito y, con un i fijado, podemos hacer el cambio de variable $x + i \to x$. De forma análoga, a partir de (2.3), llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_{Q'}\|_\infty dx \leq card(J) \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx.$$

■

Lema 2.1.5 *La norma que hemos definido en $W(\mathbb{R}^d)$*

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_Q\|_\infty$$

es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx.$$

Demostración:
Sea $g \in W(\mathbb{R}^d)$, Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{n+Q} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{n+Q} \|g \cdot T_n\chi_{2Q}\|_\infty dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_{2Q}\|_\infty \int_{n+Q} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_{2Q}\|_\infty \\
&\leq K \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_Q\|_\infty,
\end{aligned}$$

para $K \in \mathbb{R}$, por el Lema 2.1.3, ya que cuando $y \in x + Q$, tenemos que $g(y) \cdot T_x\chi_Q(y) = g(y)$, y $x + Q \subset n + 2k$ dado que x se mueve en $n + Q$. Así, podemos afirmar que $g \cdot T_x\chi_Q \leq g \cdot T_n\chi_{2Q}$.

Por otro lado, por el Lema 2.1.4, sabemos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$M \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_P\|_\infty dx,$$

donde $P = [-1,1]^d$. Sea $P' = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, tenemos que si $x \in n+P'$, entonces $x-n \in P'$. Con lo que $P' \subset (x-n)+P$ y, por lo tanto, $n+P' \subset x+P$. Así, podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_P\|_\infty dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{n+P'} \|g \cdot T_x\chi_P\|_\infty dx \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{n+P'} \|g \cdot T_n\chi_{P'}\|_\infty dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_{P'}\|_\infty \int_{n+P'} dx \geq N \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_Q\|_\infty,\end{aligned}$$

para $N \in \mathbb{R}$, por el Lema 2.1.3.

■

Corolario 2.1.6 *Sea $\phi \geq 0$ una función acotada con soporte compacto y tal que $\phi \geq M \geq 0$ en algún abierto acotado no vacío A. Entonces la norma definida en $W(\mathbb{R}^d)$*

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g \cdot T_n\chi_Q\|_\infty$$

es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\phi\|_\infty dx.$$

Demostración:

Podemos encontrar un compacto $U \subset A$, de forma que $\phi|_U \geq M > 0$. Por lo tanto, existe un subconjunto finito $I \subset \mathbb{R}^d$ tal que $Q \subset \bigcup_{y\in I}\{y+U\}$, con lo que tenemos que $\chi_Q \leq \sum_{y\in I} T_y\chi_U \leq \frac{1}{M}\sum_{y\in I} T_y\phi$. Así, podemos hacer el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx &\leq \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x \sum_{y\in I} T_y\phi\|_\infty \leq \frac{1}{M}\sum_{y\in I}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_{x+y}\phi\|_\infty dx \\ &= \frac{1}{M}\sum_{y\in I}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\phi\|_\infty dx = \frac{card(I)}{M}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\phi\|_\infty dx.\end{aligned}$$

Por otro lado, podemos encontrar un compacto V tal que $int(sop(\phi)) \subset V$ y $N \geq \phi|_V \geq 0$. Luego existirá un subconjunto finito $J \subset \mathbb{R}^d$ tal que $V \subset \bigcup_{y\in J}\{y+Q\}$, con lo que tenemos que $\frac{1}{N}\phi \leq \chi_V \leq \sum_{y\in J} T_y\chi_Q$. Así, podemos hacer el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\phi\|_\infty dx &\leq N\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x \sum_{y\in J} T_y\chi_Q\|_\infty \leq N\sum_{y\in J}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_{x+y}\chi_Q\|_\infty dx \\ &= \frac{card(J)}{N}\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx.\end{aligned}$$

■

Nota 2.1.7 *El espacio de Wiener $W(\mathbb{R}^d)$ es un álgebra de Banach bajo la multiplicación punto a punto y respecto de la norma*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g \cdot T_x\chi_Q\|_\infty dx.$$

Lema 2.1.8 *Si $g \in W(\mathbb{R}^d)$ y $\gamma > 0$ entonces:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\gamma n)| \leq \left(\frac{1}{\gamma}+1\right)^d \|g\|_W.$$

Demostración:

Dado $\gamma > 0$, sabemos que en un intervalo de longitud 1 podemos encontrar un máximo de $\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)$ puntos distintos con distancia mínima entre ellos γ. Por lo tanto cada cubo $k+Q = \prod_{j=1}^d [k_j, k_j+1]$ contiene, como mucho, $\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)^d$ puntos de la forma $x-\gamma n$, con $n \in \mathbb{Z}^d$, para $x \in \mathbb{R}^d$. Así, si $x - \gamma n \in k+Q$, tenemos que $|g(x-\gamma n)| \leq \|g \cdot T_k\chi_Q\|_\infty$. Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\gamma n)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\frac{1}{\gamma}+1\right)^d \|g\cdot T_k\chi_Q\|_\infty = \left(\frac{1}{\gamma}+1\right)^d \|g\|_W.$$

■

2.2. Acotación del operador frame de Gabor

En esta sección veremos condiciones que nos dan la acotación de los operadores síntesis, análisis y frame.

Para ayudarnos a detallar el estudio del operador frame de Gabor formularemos el test de Schur. Este test nos proporcionará condiciones que implican la acotación de un matriz infinita o de un operador integral.

Lema 2.2.1 ***Lema de Schur (versión matrices).*** *Sea $(a_{jk})_{j,k\in J}$ una matriz infinita con los indices en J tal que*

$$\sup_{j\in J} \sum_{k\in J} |a_{jk}| \leq K_1, \tag{2.4}$$

y

$$\sup_{k\in J} \sum_{j\in J} |a_{jk}| \leq K_2. \tag{2.5}$$

Entonces el operador A definido por la multiplicación matriz-vector $(Ac)_j = \sum_{k\in J} a_{jk}c_k$ es acotado de $\ell_p(J)$ a $\ell_p(J)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Además, la norma del operador A está acotada por

$$\|A\| \leq K_1^{1/p'} K_2^{1/p}, \tag{2.6}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demostración:

Aplicando la desigualdad de Hölder, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, tenemos que

$$\begin{aligned}|(Ac)_j| &= \left|\sum_{k\in J} a_{jk}c_k\right| = \left|\sum_{k\in J}(a_{jk}^{1/p'})(a_{jk}^{1/p}c_k)\right| \le \left(\sum_{k\in J}|a_{jk}^{1/p'}|^{p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{k\in J}|a_{jk}^{1/p}c_k|^p\right)^{1/p}\\ &= \left(\sum_{k\in J}|a_{jk}|\right)^{1/p'}\left(\sum_{k\in J}|a_{jk}||c_k|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Ahora, al sumar sobre j utilizando las cotas de (2.4) y (2.5), y empleando el lema de Fubini, deducimos la acotación de Acomo sigue:

$$\begin{aligned}\|Ac\|_p^p &\le \sum_{j\in J}\left(\sum_{k\in J}|a_{jk}|\right)^{p/p'}\left(\sum_{k\in J}|a_{jk}||c_k|^p\right)^{p/p} \le \sum_{j\in J}K_1^{p/p'}\sum_{k\in J}|a_{jk}||c_k|^p\\ &\le K_1^{p/p'}\sum_{k\in J}\left(\sum_{j\in J}|a_{jk}|\right)|c_k|^p \le K_1^{p/p'}K_2\sum_{k\in J}|c_k|^p = K_1^{p/p'}K_2\|c\|_p^p.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\{\|Ac\|_p : \|c\|_p = 1\}\\ &\le \sup\{K_1^{1/p'}K_2^{1/p}\|c\|_p : \|c\|_p = 1\} = K_1^{1/p'}K_2^{1/p}.\end{aligned}$$

■

Lema 2.2.2 ***Lema de Schur (versión operadores integrales).*** *Sea $k(x,y)$ una función medible en $\mathbb{R}^{2d}$ que satisface las condiciones*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|k(x,y)|dy \le K_1, \tag{2.7}$$

y

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|k(x,y)|dx \le K_2. \tag{2.8}$$

Entonces el operador integral A definido por

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^d}k(x,y)f(y)dy$$

es acotado de $L^p(\mathbb{R}^d)$ a $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1\le p\le\infty$. Además, la norma del operador A está acotada por

$$\|A\| \le K_1^{1/p'}K_2^{1/p}. \tag{2.9}$$

donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Demostración:

Aplicando la desigualdad de Hölder, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$,utilizando las cotas de (2.7) y (2.8), y empleando el lema de Fubini, deducimos que

$$\begin{aligned}
\|Af\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} k(x,y)f(y)dy\right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(|k(x,y)|^{1/p'})(|k(x,y)|^{1/p}|f(y)|)dy\right)^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^d}(|k(x,y)|^{1/p'})^{p'}dy\right)^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(|k(x,y)|^{1/p}|f(y)|)^p dy\right)^{1/p}\right)^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} K_1^{p/p'}\int_{\mathbb{R}^d}|k(x,y)\|f(y)|^p dy\, dx = K_1^{p/p'}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|k(x,y)|dx\right)|f(y)|^p dy \\
&\leq K_1^{p/p'}K_2\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|^p dy = K_1^{p/p'}K_2\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\{\|Af\|_p : \|f\|_p = 1\} \\
&\leq \sup\{K_1^{1/p'}K_2^{1/p}\|f\|_p : \|f\|_p = 1\} = K_1^{1/p'}K_2^{1/p}.
\end{aligned}$$

■

El siguiente lema y su corolario nos serán de gran utilidad para probar los resultados que buscamos.

Lema 2.2.3 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, para cada $\alpha > 0$, se tiene que la serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k)$$

converge absolutamente para casi todo $x \in [0,\alpha]^d$ y

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{[0,\alpha]^d}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k)\right)dx.$$

Demostración:

Como los cubos $\alpha k + [0,\alpha]^d$, para cada $k \in \mathbb{Z}^d$, se solapan sólo en conjuntos de medida nula, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\alpha k+[0,\alpha]^d}|f(x)|dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{[0,\alpha]^d}|f(x+\alpha k)|dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+\alpha k)\chi_{[0,\alpha]^d}|dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|f_k\|_1,
\end{aligned}$$

donde $f_k(x) = f(x+\alpha k)\chi_{[0,\alpha]^d}$. Como sabemos que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tenemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|f_k\|_1$ es finito. Ahora, aplicando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\infty > \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+\alpha k)\chi_{[0,\alpha]^d}|dx = \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|f(x+\alpha k)\chi_{[0,\alpha]^d}|dx.$$

Por lo tanto, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|f(x+\alpha k)|$ converge para casi todo $x\in[0,\alpha]^d$. Por otro lado, aplicando el teorema de la convergencia dominada concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+\alpha k)\chi_{[0,\alpha]^d}dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k)\right)\chi_{[0,\alpha]^d}dx \\ &= \int_{[0,\alpha]^d}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha k)\right)dx,\end{aligned}$$

como queríamos.

■

Corolario 2.2.4 *Sea $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha>0$, podemos definir la sucesión*

$$\{T_{k\alpha}f(x)=f(x-k\alpha):k\in\mathbb{Z}^d\},$$

que pertenece a $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, para casi todo $x\in\mathbb{R}^d$.

Demostración:
Si $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, tenemos que $f^2\in L^1(\mathbb{R}^d)$ y, aplicando el Lema 2.2.3, deducimos que

$$\infty>\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|f^2(x+\alpha k)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f^2(x+\alpha k) = \|\{T_{k\alpha}f(x)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|^2,$$

es decir, $\{T_{k\alpha}f(x)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, para casi todo $x\in\mathbb{R}^d$.

■

Introducimos una definición que necesitaremos para desarrollar la prueba de la siguiente proposición.

Definición 2.2.5 *Sea $g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha,\beta>0$. Definimos la matriz $\Gamma(x)$ como*

$$\Gamma(x)=\left(\Gamma_{jk}(x)\right)_{j,k\in\mathbb{Z}^d},$$

siendo

$$\Gamma_{jk}(x)=\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} g\left(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}\right)\overline{g\left(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}\right)}.$$

Cada una de estas series converge absolutamente, por el Lema 2.2.3.

Hablaremos del operador $\Gamma(x)$ refiriéndonos al operador que actúa multiplicando la matriz $\Gamma(x)$ por los elementos de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Presentamos ahora las consecuencias que provoca sobre los operadores de síntesis, análisis y frame, el hecho de tomar la función g del sistema de Gabor en el espacio de Wiener.

Proposición 2.2.6 *Si $g \in W(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha, \beta > 0$, entonces el operador de síntesis de Gabor,*

$$D_{g,\alpha,\beta}c = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g,$$

es acotado de $\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Además su norma satisface

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2} \left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2} \|g\|_W.$$

Demostración:

Suponemos que $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$ tiene soporte finito y consideramos el polinomio trigonométrico

$$m_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} e^{2\pi \mathbf{i} \beta n(x-\alpha k)}.$$

Este m_k es $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^{2d}$-periódico y su norma es

$$\|m_k\|^2_{L^2(Q_{1/\beta})} = \int_{[0,1/\beta]^d} |m_k(x)|^2 dx = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |c_{kn}|^2.$$

Además, sólo un número finito de m_k's son distintos de cero. Por otro lado, denotamos

$$f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} m_k T_{\alpha k} g.$$

Calculamos la norma de f, aplicando el Lema 2.2.3,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} m_k(x) g(x-\alpha k) \overline{m_j(x) g(x-\alpha j)} dx \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{Q_{1/\beta}} m_k(x)\overline{m_j(x)} \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} g\left(x-\alpha k - \frac{r}{\beta}\right) \overline{g\left(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}\right)} dx \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{Q_{1/\beta}} m_k(x)\overline{m_j(x)}\ \Gamma_{jk}(x) dx. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Veamos que los operadores $\Gamma(x)$ son acotados en $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Utilizaremos el test de Schur.

Por un lado, utilizando el Lema 2.1.8, tenemos que, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\Gamma_{j,k}(x)| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \left|g\left(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}\right)\right|\left|g\left(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}\right)\right| \\
&= \sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\left|g\left(\left(x-\frac{r}{\beta}\right)-\alpha j\right)\right|\right)\left|g\left(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}\right)\right| \\
&\leq \sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\left(\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d \|g\|_W\right)\left|g\left(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}\right)\right| \\
&= \left(\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d \|g\|_W\right)\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\left|g\left((x-\alpha k)-\frac{r}{\beta}\right)\right| \\
&\leq \left(\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d \|g\|_W\right)\left((\beta+1)^d\|g\|_W\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como sabemos que $\Gamma_{jk}(x) = \overline{\Gamma_{kj}(x)}$, tenemos que $|\Gamma_{jk}(x)| = |\overline{\Gamma_{kj}(x)}| = |\Gamma_{kj}(x)|$, de lo que se deduce que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\Gamma_{k,j}(x)| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d (\beta+1)^d \|g\|_W^2.$$

Aplicando el test de Schur, tenemos que, para casi todo x, el operador $\Gamma(x)$ es acotado de $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ en $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, para $1 \leq p \leq \infty$, y además su norma está acotada por

$$\|\Gamma(x)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d (\beta+1)^d \|g\|_W^2 := k(\alpha,\beta,g).$$

Por lo tanto, para casi todo x,

$$0 \leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} m_k(x)\overline{m_j(x)}\Gamma_{jk}(x) \leq k(\alpha,\beta,g)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|m_k(x)|^2.$$

Aplicando esto a (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|D_{g,\alpha,\beta}c\|_2^2 &= \|f\|_2^2 = \int_{Q_{1/\beta}} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} m_k(x)\overline{m_j(x)}\Gamma_{jk}(x)dx \\
&\leq k(\alpha,\beta,g)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{Q_{1/\beta}} |m_k(x)|^2 dx \\
&= \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d (\beta+1)^d \|g\|_W^2 \beta^{-d} \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |c_{kn}|^2.
\end{aligned}$$

Concluiremos que

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|g\|_W.$$

■

Corolario 2.2.7 *Si $g \in W(\mathbb{R}^d)$, entonces $C_{g,\alpha,\beta} := D^*_{g,\alpha,\beta} : L^2(\mathbb{R}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$ y $S_{g,g} := D_g C_g : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ son operadores acotados con norma*

$$\|C_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|g\|_W,$$

y

$$\|S_{g,g}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d}\|g\|_W^2.$$

Demostración:
Por un lado,

$$\|C_{g,\alpha,\beta}\| = \|C^*_{g,\alpha,\beta}\| = \|D_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|g\|_W.$$

Por otro

$$\|S_{g,g}\| = \|C^*_{g,\alpha,\beta}C_{g,\alpha,\beta}\| \leq \|D_{g,\alpha,\beta}\|\|C_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d}\|g\|_W^2.$$

■

Estos resultados también se pueden obtener cuando es la transformada de Fourier de g la que pertenece al espacio de Wiener.

Corolario 2.2.8 *Si $\widehat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$, entonces $D_{g,\alpha,\beta}, C_{g,\alpha,\beta}$ y $S_{g,g}$ son operadores acotados y*

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|\widehat{g}\|_W.$$

Demostración:
Sea $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|D_{g,\alpha,\beta}c\|_2 &= \|(\widehat{D_{g,\alpha,\beta}c})\|_2 = \|\sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn}M_{-\alpha k}T_{\beta n}\widehat{g}\|_2 = \|D_{\widehat{g},\alpha,\beta}\tilde{c}\|_2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|\widehat{g}\|_W\|\tilde{c}\|_2,\end{aligned}$$

donde $\tilde{c}_{kn} = c_{-nk}e^{2\pi\,\mathbf{i}\,\alpha\beta kn}$. Por lo tanto, $\|\tilde{c}\|_2 = \|c\|_2$ y obtenemos que

$$\|D_{g,\alpha,\beta}c\|_2 \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|\widehat{g}\|_W\|c\|_2.$$

Así, podemos deducir

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{d/2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{d/2}\|\widehat{g}\|_W,$$

como queríamos.

■

Corolario 2.2.9 *Si $g \in W(\mathbb{R}^d)$ o $\widehat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$, entonces la matriz de Gram*

$$G = (\langle T_{\alpha k} M_{\beta n} g, T_{\alpha k'} M_{\beta n'} g \rangle)_{(k,n),(k',n') \in J},$$

con índices en $J \times J$, siendo $J = \mathbb{Z}^{2d}$, asociada al sistema de Gabor $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$, define un operador acotado en $\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$.

Demostración:
Es suficiente aplicar los corolarios 2.2.7 y 2.2.8, dado que $G = D^* D$.

■

Aunque nuestra función g no pertenezca al espacio de Wiener, de la acotación del operador $\Gamma(x)$ también se pueden deducir propiedades del operador de síntesis.

Proposición 2.2.10 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha, \beta > 0$. Entonces $D_{g,\alpha,\beta}$ es acotado de $\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ si*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} \|\Gamma(x)\| < \infty$$

Demostración:
Si $D_{g,\alpha,\beta}$ es no acotado, para cada $N \geq 1$, existe una sucesión de soporte finito $c^{(N)}$ tal que

$$\|Dc^{(N)}\|_2^2 \geq N \|c^{(N)}\|_2^2$$

En términos de polinomios trigonométricos, $m_k^{(N)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_{kn}^{(N)} e^{-2\pi \mathbf{i} \alpha\beta kn} e^{2\pi \mathbf{i} \beta nx}$; esto significa, por la prueba de la Proposición 2.2.6, que

$$\begin{aligned} \int_{Q_{1/\beta}} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d} m_k^{(N)}(x) \overline{m_j^{(N)}(x)} \Gamma_{jk}(x) dx &= \|Dc^{(N)}\|_2^2 \geq N \|c^{(N)}\|_2^2 \\ &= N\beta^d \int_{Q_{1/\beta}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |m_k^{(N)}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Como ambos integrandos son no negativos, existe un conjunto $E_N \subset Q_{1/\beta}$ de medida positiva tal que, para todo $x \in E_N$,

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(x)(m_k^{(N)}(x))_{k \in \mathbb{Z}^d}, (m_k^{(N)}(x))_{k \in \mathbb{Z}^d} \rangle &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d} m_k^{(N)}(x) \overline{m_j^{(N)}(x)} \Gamma_{jk}(x) dx \\ &\geq N\beta^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |m_k^{(N)}(x)|^2 = N\beta^d \|(m_k^{(N)}(x))_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_2^2. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$\|\Gamma(x)\| \geq N\beta^d,$$

para todo $x \in E_N$, lo que es una contradicción con la hipótesis de partida.

■

2.3. Representación de Walnut del operador frame de Gabor

En esta sección, presentaremos una versión de la representación de Walnut del operador frame de Gabor y algunas de sus propiedades, que nos serán de utilidad más adelante.

Dados $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha, \beta > 0$, por abuso del lenguaje, nos referiremos a

$$S_{g,\gamma} f = D_\gamma C_g f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma$$

como el operador frame de Gabor.

Introducimos las funciones de correlación y algunas de sus propiedades.

Definición 2.3.1 *Sean $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha, \beta > 0$, la **función correlación del par** $(\mathbf{g}, \gamma)$ está definida como*

$$G_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k) \gamma(x - \alpha k),$$

para $n \in \mathbb{Z}^d$.

Por definición, los G_n's son periodizaciones de $\big(T_{n/\beta}\overline{g}\big) \cdot \gamma$, con período $\alpha \mathbb{Z}^d$, entonces, por lo que según el Lema 2.2.3, tenemos que $G_n \in L^1(Q_\alpha)$.

Lema 2.3.2 *Si $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$, entonces $G_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^d (2\beta + 2)^d \|g\|_W \|\gamma\|_W .$$

Demostración:
Como $\| \big(T_{n/\beta}\overline{g}\big) \cdot \gamma \|_W \leq \|g\|_\infty \|\gamma\|_W$ tenemos que $\big(T_{n/\beta}\overline{g}\big) \cdot \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$. Aplicando el Lema 2.1.8 a $\big(T_{n/\beta}\overline{g}\big) \cdot \gamma$, observamos que

$$\|G_n\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^d \| \big(T_{n/\beta}\overline{g}\big) \cdot \gamma \|_W .$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty &\leq \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \| \big(T_{n/\beta}\overline{g}\big) \cdot \gamma \|_W \\
&= \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|(T_{n/\beta}\overline{g} \cdot T_k \chi_Q)(\gamma \cdot T_k \chi_Q)\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|(T_{n/\beta}\overline{g} \cdot T_k \chi_Q)\|_\infty \right) \|(\gamma \cdot T_k \chi_Q)\|_\infty .
\end{aligned}$$

A continuación vamos a intentar acotar cada término $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|(T_{n/\beta}\overline{g}T_k\chi_Q)\|_\infty$:

$$\|(T_{n/\beta}\overline{g}T_k\chi_Q)\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in -\frac{n}{\beta}+k+Q}|g(x)| \leq \sum_{l\in I_{k,n}}\|gT_\ell\chi_Q\|_\infty,$$

donde $I_{k,n} = \left\{\ell\in\mathbb{Z}^d : \left(-\frac{n}{\beta}+k+Q\right)\cap(\ell+Q)\neq\emptyset\right\}$. Cada $\ell\in\mathbb{Z}^d$ está, como mucho, en $(2\beta+2)^d$ de los $I_{k,n}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|(T_{n/\beta}\overline{g}T_k\chi_Q)\|_\infty &\leq (2\beta+2)^d\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}\|gT_\ell\chi_Q\|_\infty\\ &= (2\beta+2)^d\|g\|_W,\end{aligned}$$

independientemente de k. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty &\leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d(2\beta+2)^d\|g\|_W\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|(\gamma\cdot T_k\chi_Q)\|_\infty\\ &= \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d(2\beta+2)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W.\end{aligned}$$

■

Ahora podemos probar el primer Teorema fundamental de representación del operador frame de Gabor, la representación de Walnut [Wal92].

Teorema 2.3.3 *Sea $g,\gamma\in W(\mathbb{R}^d)$ y sea $\alpha,\beta>0$. Entonces, el operador*

$$S_{g,\gamma}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma,$$

lo podemos escribir como

$$S_{g,\gamma}f = \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}G_nT_{n/\beta}f. \tag{2.11}$$

Por otra parte, $S_{g,\gamma}$ es acotado en todos los espacios L^p, $1\leq p\leq\infty$, con cota para su norma

$$\|S_{g,\gamma}\| \leq 2^p\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d\left(\frac{1}{\beta}+2\right)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W.$$

Demostración:
Escribimos $S_{g,\gamma}$ de la siguiente forma

$$S_{g,\gamma}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle M_{\beta n}T_{\alpha k}\gamma. \tag{2.12}$$

Ya vimos que en esta expresión podemos invertir el orden de la modulación y la traslación. Sabemos que, para toda $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\{\langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle : k,n\in\mathbb{Z}^d\}\in\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$. Por lo tanto, la serie de Fourier

$$m_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\widehat{fT_{\alpha k}\overline{g}})(\beta n)e^{2\pi\,\mathbf{i}\,\beta n\cdot x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle e^{2\pi\,\mathbf{i}\,\beta n\cdot x} \tag{2.13}$$

está en $L^2(Q_{1/\beta})$ y es $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d$-periódica con norma en $L^2(Q_{1/\beta})$

$$\|m_k\|^2_{L^2(Q_{1/\beta})} = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle|^2.$$

Queremos ver que $m_k(x)$ es igual a $\beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(f\cdot T_{\alpha k}\overline{g})\left(x-\frac{n}{\beta}\right)$. Para ello, calculamos los coeficientes de Fourier de $\beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(f\cdot T_{\alpha k}\overline{g})\left(x-\frac{n}{\beta}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\beta^d \int_{Q_{1/\beta}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (f\cdot T_{\alpha k}\overline{g}) \left(x-\frac{n}{\beta}\right)\right) e^{-2\pi \mathbf{i}\, \beta \ell\cdot x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f\cdot T_{\alpha k}\overline{g})(x) e^{-2\pi \mathbf{i}\, \beta\ell\cdot x} dx = \langle f, M_{\beta\ell} T_{\alpha k} g\rangle.
\end{aligned}$$

Observamos, por la expresión (2.13), que ambas expresiones tienen los mismos coeficientes de Fourier, de donde se deduce lo que buscábamos,

$$m_k(x) = \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(f\cdot T_{\alpha k}\overline{g})\left(x-\frac{n}{\beta}\right). \tag{2.14}$$

Sustituimos (2.14) en (2.12) y obtenemos que

$$S_{g,\gamma} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f\left(x-\frac{n}{\beta}\right) \overline{g}\left(x-\alpha k-\frac{n}{\beta}\right)\right) \gamma(x-\alpha k).$$

Si f tiene soporte compacto, entonces para $x\in\mathbb{R}^d$ la suma sobre n es finita y podemos intercambiar los sumatorios:

$$\begin{aligned}
S_{g,\gamma} f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \beta^{-d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}\left(x-\alpha k-\frac{n}{\beta}\right)\gamma(x-\alpha k)\right) f\left(x-\frac{n}{\beta}\right) \\
&= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n(x)\cdot T_{n/\beta} f(x).
\end{aligned}$$

La acotación en $L^p(\mathbb{R}^d)$ se tiene a través de la desigualdad triangular y el Lema 2.3.2:

$$\begin{aligned}
\|S_{g,\gamma} f\|_p &\le \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|G_n\cdot T_{n/\beta} f\|_p \le \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty \|T_{n/\beta} f\|_p \\
&= \beta^{-d}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty\right)\|f\|_p.
\end{aligned}$$

Así, tenemos probado el resultado para funciones de soporte compacto, Y por la densidad de estas, lo extendemos a todo el espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$.

■

Introducimos una definición auxiliar que nos ayudará en el desarrollo de los siguientes resultados.

Definición 2.3.4 *Para $j, \ell \in \mathbb{Z}^d$ definimos*

$$G_{j\ell}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}\left(x - \frac{\ell}{\beta} - \alpha k\right)\gamma\left(x - \frac{j}{\beta} - \alpha k\right). \tag{2.15}$$

Vemos que la función correlación es precisamente $G_n(x) = G_{0,n}(x)$ y que

$$G_n\left(x - \frac{j}{\beta}\right) = G_{j,j+n}(x). \tag{2.16}$$

Corolario 2.3.5 *Bajo las condiciones del Teorema 2.3.3, para toda $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, tenemos que*

$$\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle = \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} \beta^{-d}\int_{Q_{1/\beta}} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f(x)\overline{T_{j/\beta}h(x)}dx. \tag{2.17}$$

Demostración:

Primero, supondremos que f y h son funciones continuas, acotadas y de soporte compacto en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces, las sucesiones $\{T_{j/\beta}f(x) : j \in \mathbb{Z}^d\}$ y $\{T_{j/\beta}h(x) : j \in \mathbb{Z}^d\}$ tienen soporte finito.

Sustituyendo (2.11) y utilizando el argumento de la periodización con periodo $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle &= \beta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n(x)f\left(x - \frac{n}{\beta}\right)\right)\overline{h(x)}dx \qquad (2.18)\\
&= \beta^{-d}\int_{Q_{\frac{1}{\beta}}}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n\left(x - \frac{j}{\beta}\right)f\left(x - \frac{j+n}{\beta}\right)\right)\overline{h\left(x - \frac{j}{\beta}\right)}dx
\end{aligned}$$

Como la suma sobre j y n es finita, no necesitamos justificar el intercambio de los sumatorios. Usando (2.16) y la sustitución $\ell = j + n$, (2.18) se puede expresar como

$$\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle = \beta^{-d}\int_{Q_{\frac{1}{\beta}}}\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f(x)\overline{T_{j/\beta}h(x)}dx,$$

como queríamos.

Ahora, para extender la expresión (2.17) a cualquier $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ consideramos el operador $G(x)$, definido para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, sobre las sucesiones por la multiplicación de matrices

$$(G(x)c)_j = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)c_\ell.$$

Si $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$, usando el Lema 2.1.8 tenemos que, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} |G_{j\ell}(x)| &\leq \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left|g\left(x-\frac{\ell}{\beta}-\alpha k\right)\right|\left|\gamma\left(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k\right)\right| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}\left|g\left(x-\frac{\ell}{\beta}-\alpha k\right)\right|\right)|\gamma\left(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k\right)| \\ &\leq (\beta+1)^d\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d \|g\|_W\|\gamma\|_W.\end{aligned}$$

Esto nos da una estimación similar para $\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|G_{jl}(x)|$. Así, por el Lema de Schur 2.2.1, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ la matriz $G(x)$ define un operador acotado de $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ en $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Si $h, l \in L^2(\mathbb{R}^d)$, por el Corolario 2.2.4, las sucesiones $\left\{f\left(x-\frac{\ell}{\beta}\right) : \ell \in \mathbb{Z}^d\right\}$ y $\left\{h\left(x-\frac{\ell}{\beta}\right) : \ell \in \mathbb{Z}^d\right\}$ están en $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, y la representación con matrices se mantiene para $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ cualesquiera.

■

Cuando f y h son funciones acotadas y de soporte compacto, en la prueba, necesitamos condiciones mucho más débiles en g y γ. Si $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $T_{\ell/\beta}\overline{g} \cdot T_{j/\beta}\gamma \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y, así, la α-periodización $G_{j\ell}(x)$ pertenece a $L^1(Q_\alpha)$ para todo $j, \ell \in \mathbb{Z}^d$. Por lo tanto, (2.17) se mantiene cuando f y h son funciones acotadas y de soporte compacto.

Veamos ahora una proposición que será fundamental para demostrar el teorema de dualidad de Ron y Shen.

Proposición 2.3.6 ***Ron-Shen [RS97]*** *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y sean $\alpha, \beta > 0$. Entonces*

a) S_{gg} es un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ si, y sólo si,

$$G(x) \leq bI_{\ell^2},$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ y para algún $b > 0$.

b) S_{gg} es un operador invertible en $L^2(\mathbb{R}^d)$ si, y sólo si, $G(x)$ es un operador invertible en ℓ^2, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración:

a) Suponemos $G(x) \leq bI_{\ell^2}$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Suponemos ahora que S_{gg} es un operador no acotado. Entonces, existe una sucesión, $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, de funciones acotadas con soporte compacto tal que

$$\langle S_{gg}f_N, f_N\rangle > N\|f_N\|_2^2.$$

Usando (2.17), deducimos que

$$\begin{aligned}\langle S_{gg}f_N, f_N\rangle &= \beta^{-d}\int_{Q_{1/\beta}}\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f_N(x)\overline{T_{j/\beta}f_N(x)}dx \\ &> N\int_{Q_{1/\beta}}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|T_{j/\beta}f_N(x)|^2dx = N\|f_N\|_2^2.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{Q_{1/\beta}} \left(\beta^{-d} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) T_{\ell/\beta} f_N(x) \overline{T_{j/\beta} f_N(x)} - N \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta} f_N(x)|^2 \right) dx > 0.$$

Por lo tanto, existe $E_N \subset Q_{1/\beta}$ con medida positiva tal que

$$\beta^{-d} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) T_{\ell/\beta} f_N(x) \overline{T_{j/\beta} f_N(x)} - N \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta} f_N(x)|^2 > 0, \tag{2.19}$$

para $x \in E_N$.

Definimos $c^x = (T_{j/\beta} f_N(x))_{j\in\mathbb{Z}^d}$. Sabemos que $c^x \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ por el Corolario 2.2.4, entonces la expresión (2.19) es equivalente a

$$\beta^{-d} \langle G(x) T_{j/\beta} f_N(x), T_{j/\beta} f_N(x)\rangle - N \|(T_{j/\beta} f_N(x))_{j\in\mathbb{Z}^d}\|^2 > 0,$$

es decir,

$$\langle G(x) c^x, c^x\rangle > N\beta^d \|c^x\|^2,$$

para $x \in E_N$. Pero esto es una contradicción con el hecho de que exista $b > 0$ de forma que $G(x) \leq bI_{\ell^2}$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Así, tenemos que S_{gg} es un operador acotado.

La implicación recíproca la veremos por pasos. Partimos de que S es un operador acotado y $S \leq bI$ para una constante $b > 0$, es decir,

$$\langle Sf, f\rangle \leq b\langle f, f\rangle,$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Queremos ver que para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ existe $N_f \subset \mathbb{R}^d$ de medida nula tal que

   $$\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) T_{\ell/\beta} f(x) \overline{T_{j/\beta} f(x)} \leq \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta} f(x)|^2,$$

   para toda $x \notin N_f$.

Suponemos que existe $M \subset \mathbb{R}^d$, de medida no nula, tal que

$$\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) T_{\ell/\beta} f(x) \overline{T_{j/\beta} f(x)} > \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta} f(x)|^2,$$

para todo $x \in M$. Definimos $\mathcal{U} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} \{M + \frac{k}{\beta}\}$. Como ambos lados de la desigualdad anterior son $\frac{1}{\beta}$-periódicos, podemos afirmar que, para todo $x \in \mathcal{U}$, se tiene

$$\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) T_{\ell/\beta} f(x) \overline{T_{j/\beta} f(x)} > \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta} f(x)|^2.$$

Sea $\phi(x) = \chi_{\mathcal{U}}$, que es $\frac{1}{\beta}$-periódica, entonces tenemos que $f\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Como S_{gg} es acotada,

$$b\langle f\phi, f\phi\rangle \geq \langle Sf\phi, f\phi\rangle \tag{2.20}$$

Pero, por otro lado, aplicando (2.17) deducimos que

$$\begin{aligned}
\langle Sf\phi, f\phi\rangle &= \beta^{-d}\int_{Q_{1/\beta}} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f(x)T_{\ell/\beta}\phi(x)\overline{T_{j/\beta}f(x)T_{j/\beta}\phi(x)} \\
&= \beta^{-d}\int_{Q_{1/\beta}} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f(x)\phi(x)\overline{T_{j/\beta}f(x)\phi(x)} \\
&= \beta^{-d}\int_{Q_{1/\beta}\cap\mathcal{U}} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f(x)\overline{T_{j/\beta}f(x)} \\
&> b\int_{Q_{1/\beta}\cap\mathcal{U}} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta}f(x)|^2 = b\int_{Q_{1/\beta}} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta}f(x)\phi(x)|^2 \\
&= b\langle f\phi, f\phi\rangle
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción con (2.20).

2. Definimos el conjunto $\mathcal{F} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, de la siguiente forma:

   $$\mathcal{F} = \{ \quad f = \textstyle\sum_{i=1}^N q_i\chi_{c_i} \ : \ N\in\mathbb{N},\ q_i \in \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q} \text{ y } c_i \text{ es un cubo compacto con vértices en } \mathbb{Q}^d\}.$$

   Veamos que existe un $N \subset \mathbb{R}^d$ de medida nula de forma que, para toda $f \in \mathcal{F}$, se cumple

   $$\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)T_{\ell/\beta}f(x)\overline{T_{j/\beta}f(x)} \leq \beta^d b\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta}f(x)|^2, \tag{2.21}$$

   para todo $x \notin N$.

Por el paso 1, tenemos que, para cada $f \in \mathcal{F} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, existe N_f de medida nula de forma que se cumple (2.21) para todo $x \notin N_f$. Observamos que $\mathcal{F}$ es un conjunto numerable, por lo tanto

$$N = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} N_f,$$

es un conjunto de medida nula, por ser unión numerable de conjuntos de medida nula.

3. Para toda $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ finita, con $c_j \in \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q}$ para todo $j \in \mathbb{Z}^d$, tenemos que

   $$\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x)c_\ell\overline{c_j} \leq \beta^d b\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |c_j|^2, \tag{2.22}$$

   para todo $x \in \mathbb{R}^d\backslash N$.

En efecto, sea $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ finita, con $c_j \in \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q}$ para todo $j \in \mathbb{Z}^d$, y sea $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$. Elegimos $f \in \mathcal{F}$ de forma que

$$T_{j/\beta} f(x) = f\left(x - \frac{j}{\beta}\right) = c_j,$$

para todo $j \in \mathbb{Z}^d$. De esta forma, utilizando el paso 2, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) c_\ell \overline{c_j} &= \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) T_{\ell/\beta} f(x) \overline{T_{j/\beta} f(x)} \\ &\leq \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{j/\beta} f(x)|^2 = \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |c_j|^2. \end{aligned}$$

4. Para toda $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ finita tenemos que

$$\sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) c_\ell \overline{c_j} \leq \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |c_j|^2, \tag{2.23}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$.

Sea $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$ y $c = (c_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ finita. Definimos la sucesión $\{c^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $(c^n_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ finita y con el mismo soporte que c, con $c^n_j \in \mathbb{Q} + \mathbf{i}\,\mathbb{Q}$ para todo $j \in \mathbb{Z}^d$ y toda $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} c^n = c.$$

Por lo tanto, por el paso 3, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) c_\ell \overline{c_j} &= \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) (\lim_{n\to\infty} c^n_\ell)(\lim_{n\to\infty} \overline{c^n_j}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) c^n_\ell \overline{c^n_j} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |c^n_j|^2 = \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |c_j|^2. \end{aligned}$$

Hemos podido intercambiar los sumatorios y los límites dado que los primeros son finitos.

5. El operador $G(x)$ es un operador acotado para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Aplicamos la Proposición 1.1.4 a la expresión (2.24). Así, para toda $c = (c_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, tenemos que

$$\langle G(x)c, c\rangle = \sum_{j,\ell\in\mathbb{Z}^d} G_{j\ell}(x) c_\ell \overline{c_j} \leq \beta^d b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |c_j|^2 = \beta^d b \|c\|_2^2, \tag{2.24}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$.

b) La prueba es análoga al caso a), ya que S es invertible si, y solo si, existe $c > 0$ tal que $S \geq cI_{L^2}$.

■

2.4. Desarrollos no ortogonales

Los siguientes frames fueron introducidos por Daubechies, Grossmann y Meyer en [DGM86].

Teorema 2.4.1 *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con soporte incluido en el cubo $Q_L = [0, L]^d$. Si $\alpha \leq L$ y $\beta \leq \frac{1}{L}$, entonces el operador frame $S = S_{g,g}$ es*

$$Sf(x) = \left(\beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2\right) f(x).$$

Consecuentemente, $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ es un frame con cotas del frame $\beta^{-d}a$ y $\beta^{-d}b$ si, y sólo si,

$$a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2 \leq b, \tag{2.25}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además, $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ es un tight frame, si, y sólo si, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2$ es constante casi por todas partes.

Demostración:
Como $g \in L^\infty$ con soporte incluido en un compacto, tenemos que $g \in W(\mathbb{R}^d)$. Consideramos las funciones de correlación con la representación de Walnut,

$$G_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{g} \cdot g).$$

Si $n \neq 0$, entonces $sop(T_{n/\beta}\overline{g} \cdot g) \subset \left(\frac{n}{\beta} + [0, L]^d\right) \cap [0, L]^d$, que es vacío cuando $\beta < \frac{1}{L}$, o un conjunto de medida nula cuando $\beta = \frac{1}{L}$. Esto implica que $G_n = 0$ casi por todas partes para $n \neq 0$; así, utilizando la expresión del teorema de representación de Walnut, tenemos que

$$Sf = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f = \beta^{-d} G_0 f = \left(\beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2\right) f(x),$$

que es lo que buscábamos. Por tanto, si $a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2 \leq b$, tendríamos que

$$a\|f\|_2^2 \;\leq\; \langle Sf, f\rangle \;\leq\; b\|f\|_2^2.$$

Con lo que tenemos que S es acotado e invertible. Y en el caso en que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2 = K$ constante, tenemos que $S = KI$.

■

Nota 2.4.2 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.4.1, las cotas del frame óptimas son*

$$A_{opt} = \beta^{-d} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2,$$

y

$$B_{opt} = \beta^{-d} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2.$$

2.5. Existencia de frames de Gabor

En esta sección presentamos una serie de resultados que, dependiendo del tipo de funciones y sus características, nos permitirán poder afirmar la existencia de ciertos frames de Gabor.

Nota 2.5.1 *Escribiremos*

$$G_n^{(\alpha,\beta)}(x) = G_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}\left(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k\right) g(x-\alpha k),$$

para hacer énfasis en la dependencia de los parámetros (α, β).

Veamos un lema que nos ayudará en la prueba del primer resultado de existencia de frames que, acto seguido, presentaremos.

Lema 2.5.2 *Sea* $g \in W(\mathbb{R}^d)$ *y sea* $\alpha > 0$, *entonces*

$$\lim_{\beta\to 0} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty = 0.$$

Demostración:
Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $F \subset \mathbb{Z}^d$ finito, de forma que

$$\sum_{k\notin F} \|g \cdot T_k\chi_Q\|_\infty < \varepsilon.$$

Definimos

$$g_1 = \sum_{k\in F} g \cdot T_k\chi_Q, \quad \text{y} \quad g_2 = g - g_1 = \sum_{k\notin F} g \cdot T_k\chi_Q.$$

Entonces, $\|g_2\|_W = \sum_{k\notin F} \|g \cdot T_k\chi_Q\|_\infty < \varepsilon$ y $\|g_1\|_W \le \|g\|_W$. Consideramos las funciones de correlación

$$\begin{aligned} G_n &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{g} \cdot g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{(g_1+g_2)} \cdot (g_1+g_2)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{g_1} \cdot g_1) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{g_2} \cdot g_1) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{(g_1+g_2)} \cdot g_2). \end{aligned}$$

Denotaremos

$$H_n = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{g_1} \cdot g_1), \qquad K_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{g_2} \cdot g_1)$$

$$\text{y} \quad L_n = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{n/\beta}\overline{(g_1+g_2)} \cdot g_2).$$

Veamos que $H_n(x) = 0$, $n \neq 0$, para casi todo punto con un β lo suficientemente pequeño.

Tenemos que

$$\begin{aligned} T_{\alpha r}(T_{n/\beta}\overline{g_1}\cdot g_1) &= \overline{g_1}\left(x-\frac{n}{\beta}-\alpha r\right)\cdot g_1(x-\alpha r) \\ &= \overline{\sum_{k\in F} g\cdot T_k\chi_Q}\left(x-\frac{n}{\beta}-\alpha r\right)\cdot\sum_{\ell\in F} g\cdot T_\ell\chi_Q(x-\alpha r) \end{aligned}$$

donde $\sum_{k\in F} g\cdot T_k\chi_Q(x-\frac{n}{\beta}-\alpha r)$ puede ser distinto de 0 sólo si $x\in k+Q+\alpha r+\frac{n}{\beta}$ para algún $k\in F$, y $\sum_{\ell\in F} g\cdot T_\ell\chi_Q(x-\alpha r)$ puede ser distinto de 0 sólo si $x\in \ell+Q+\alpha r$ para algún $\ell\in F$. Si elegimos $\beta<(\mathrm{diam}(F)+\sqrt{d})^{-1}$, tenemos que para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $k,\ell\in F$,

$$\left(k+Q+\alpha r+\frac{n}{\beta}\right)\cap(\ell+Q+\alpha r)=\emptyset.$$

Luego, para $\beta<(\mathrm{diam}(F)+\sqrt{d})^{-1}$ y $n\neq 0$, $H_n(x)=0$ para casi todo punto.

Por lo tanto, si usamos el Lema 2.3.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n\,\in\,\mathbb{Z}^d\\ n\,\neq\,0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\|K_n\|_\infty+\|L_n\|_\infty) \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d(2\beta+2)^d(\|g_2\|_W\|g_1\|_W+\|g\|_W\|g_2\|_W) \\ &\leq 2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^d(2\beta+2)^d\|g\|_W\cdot\varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos

■

Teorema 2.5.3 ***Walnut [Wal92]*** *Suponemos que $g\in W(\mathbb{R}^d)$, con $g\neq 0$ y que existe $\alpha>0$ de forma que podemos tomar constantes $a,b>0$ que cumplan*

$$a\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|g(x-\alpha k)|^2\leq b<\infty, \tag{2.26}$$

para casi todo punto. Entonces existe un valor $\beta_0=\beta_0(\alpha)>0$ tal que $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame de Gabor para todo $\beta\leq\beta_0$.

Específicamente, si elegimos $\beta_0>0$ tal que, para todo $0<\beta\leq\beta_0$,

$$\sum_{\substack{n\,\in\,\mathbb{Z}^d\\ n\,\neq\,0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty<\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d}|G_0(x)|, \tag{2.27}$$

entonces $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame para todo $\beta\leq\beta_0$, con cotas del frame

$$A=\beta^{-d}\left(a-\sum_{\substack{n\,\in\,\mathbb{Z}^d\\ n\,\neq\,0}}\|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty\right),$$

y

$$B = \beta^{-d} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty \right).$$

Demostración:

Por el Lema 2.5.2, existe $\beta_0 > 0$ tal que, para todo $\beta \leq \beta_0$,

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty < a,$$

siendo $a = \text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2$. Sustituyendo la representación de Walnut para $S_{g,g}$ obtenemos que, para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f \rangle &= \beta^{-d} \langle \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f, f \rangle \\
&= \beta^{-d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} G_0(x) |f(x)|^2 dx + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \langle G_n T_{n/\beta} f, f \rangle \right)
\end{aligned}$$

Hemos intercambiado la suma por la integral dado que $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f$ converge en $L^2(\mathbb{R}^d)$. También sabemos que

$$|\langle G_n T_{n/\beta} f, f \rangle| \leq \|G_n\|_\infty \|T_{n/\beta} f\|_2 \|f\|_2 = \|G_n\|_\infty \|f\|_2^2,$$

por lo que $-\|G_n\|_\infty \|f\|_2^2 \leq \langle G_n T_{n/\beta} f, f \rangle$. Ahora, usando que $G_0(x) \geq a$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f \rangle &\geq \beta^{-d} \left(a \|f\|_2^2 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} -\|G_n\|_\infty \|f\|_2^2 \right) \\
&= \beta^{-d} \left(a - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n\|_\infty \right) \|f\|_2^2 = A \|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

lo que nos da la estimación inferior para S. Por construcción $A > 0$, para todo $\beta \leq \beta_0$.

Por otro lado, por la representación de Walnut, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f \rangle &= \beta^{-d} \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f, f \right\rangle = \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle G_n T_{n/\beta} f, f \rangle \\
&\leq \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty \|f\|_2^2 = B \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

■

Nota 2.5.4 *No es difícil encontrar funciones que cumplan la condición* (2.26)*, como por ejemplo, una función continua g, que pertenezca a $W(\mathbb{R}^d)$ y sea distinta de 0.*

Si es distinta de 0, es porque existe un punto x_0 donde es distinta de 0. Al ser continua, existirá $\varepsilon > 0$ de forma que g sea distinta de cero en $B(x_0, \varepsilon)$. Y si elegimos $\alpha < \varepsilon$ tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, existirá al menos un $k \in \mathbb{Z}^d$ de forma que $(x - \alpha k) \in B(x_0, \varepsilon)$ y por lo tanto, podremos tomar a de forma que

$$a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \leq b < \infty.$$

La cota superior no es un problema dado que $g \in W(\mathbb{R}^d)$.

Esencialmente, la condición (2.27) nos indica que el operador frame S es *diagonalmente dominante*; es decir, que el operador $f \mapsto \beta^{-d} G_0 f$ domina al resto de los otros términos. De esta observación se deduce la invertibilidad de S en otros espacios de funciones. Nos ayudaremos de un resultado conocido para deducirlo.

Teorema 2.5.5 *Si el operador lineal $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, con $\mathcal{B}$ espacio de Banach, satisface que $\|I - A\| < 1$, entonces A es invertible, con inversa $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n$ y su norma es $\|A^{-1}\| \leq (1 - \|I - A\|)^{-1}$.*

Corolario 2.5.6 *Bajo las hipótesis de Teorema 2.5.3, $S_{g,g}$ es invertible en cada $L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración:
Descomponemos $S = M + R$, donde

$$Mf = \beta^{-d} G_0 f \quad \text{y} \quad Rf = \beta^{-d} \sum_{n \neq 0} G_n T_{n/\beta} f,$$

Entonces, $M^{-1} f = \beta^d G_0^{-1} f$ y su norma como operador de $L^p(\mathbb{R}^d)$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$ es

$$\|M^{-1}\| = \sup_{\|f\|_p < 1} \|\beta^d G_0^{-1} f\| \leq \beta^d \|G_0^{-1}\|_\infty \leq \beta^d a^{-1},$$

como consecuencia de (2.26).

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \|f - M^{-1} S f\|_p &= \|M^{-1}(M - S) f\| = \|M^{-1} R f\| \\ &= \|\sum_{n \neq 0} G_0^{-1} G_n T_{n/\beta} f\|_B \leq \sum_{n \neq 0} \|G_0\|_\infty \|G_n\|_\infty \|f\|_p. \end{aligned}$$

Así, $\|I - M^{-1} S\| \leq a^{-1} \sum_{n \neq 0} \|G_n\|_\infty < 1$ para cada $0 < \beta \leq \beta_0$. Esta estimación implica que $M^{-1} S$ es invertible en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con inversa

$$(M^{-1} S)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (I - M^{-1} S)^l.$$

Consecuentemente, S es invertible en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con inversa $S^{-1} = (M^{-1}S)^{-1}M^{-1}$.

■

A continuación, mostramos un resultado sobre invertibilidad de matrices, en el que nos apoyaremos para deducir el resultado sobre la invertibilidad del operador frame que presentaremos después.

Lema 2.5.7 *Si la matriz $(a_{j\ell})_{j,\ell\in J}$ define un operador A acotado, positivo y auto-adjunto en $\ell^2(J)$, con A diagonalmente dominante, esto es*

$$\inf_{j\in J}(|a_{jj}| - \sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}|) \geq \delta > 0.$$

Entonces, $A \geq \delta I$ en el sentido de que $\langle Ac, c\rangle \geq \delta\|c\|_2^2$, para todo $c\in\ell^2(J)$. Consecuentemente, A es invertible en $\ell^2(J)$ y $\|A^{-1}\| \leq \delta^{-1}$.

Demostración:

Descomponemos $A = M + R$, donde M es la matriz diagonal con entradas $m_{j\ell} = a_{jj}\delta j\ell$ y R es el resto, con entradas $r_{j\ell} = a_{j\ell}$ si $j\neq\ell$ y $r_{jj} = 0$.

Para estimar la expresión

$$\langle Rc, c\rangle = \sum_{j\in J}\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} a_{j\ell}c_\ell\overline{c_j}$$

aplicaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, primero a la suma interior sobre l y después a la suma exterior sobre j:

$$\begin{aligned}
|\langle Rc, c\rangle| &\leq \sum_{j\in J}\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}|^{1/2}|c_\ell||a_{j\ell}|^{1/2}|\overline{c_j}| \\
&\leq \sum_{j\in J}\left(\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}||c_\ell|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}||c_j|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{j\in J}\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}||c_\ell|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in J}\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}||c_j|^2\right)^{1/2} \\
&= \Sigma_1\cdot\Sigma_2.
\end{aligned}$$

Como A es auto-adjunta, tenemos que $\Sigma_1 = \Sigma_2$, por lo tanto

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \left(\sum_{j\in J}\sum_{\substack{\ell\in J\\ \ell\neq j}} |a_{j\ell}||c_j|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j\in J}(a_{jj}-\delta)|c_j|^2\right)^{1/2}.$$

Así, tenemos que,

$$|\langle Rc, c\rangle| \leq \sum_{j\in J}(a_{jj} - \delta)|c_j|^2 = \langle (M - \delta I)c, c\rangle.$$

Es decir, $R \leq M - \delta I$. Por lo tanto,

$$\langle Ac, c\rangle = \langle (M + R)c, c\rangle \;\geq\; \langle Mc, c\rangle - |\langle Rc, c\rangle| \geq \delta \|c\|_2^2.$$

Consecuentemente, A es invertible y $\|A^{-1}\| \leq \delta^{-1}$.

■

Proposición 2.5.8 ***Ron-Shen [RS97]*** *Si para $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha, \beta > 0$ el operador frame de Gabor $S_{g,g}$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} \left(G_0(x) - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} |G_n(x)| \right) = \delta > 0, \tag{2.28}$$

entonces el operador frame de Gabor $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ es invertible en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ es un frame.

Demostración:
Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ tenemos que $G(x)$ verifica las hipótesis del Lema 2.5.7. En efecto, como

$$G_{j\ell}(x) = G_{\ell-j}\left(x - \frac{j}{\beta}\right),$$

por (2.15), obtenemos que

$$G_{jj}(x) - \sum_{\substack{\ell \in J \\ \ell \neq j}} |G_{j\ell}(x)| = G_0\left(x - \frac{j}{\beta}\right) - \sum_{\substack{\ell \in J \\ \ell \neq j}} |G_{\ell-j}\left(x - \frac{j}{\beta}\right)| \geq \delta.$$

Así, el Lema 2.5.7 implica que $G(x) \geq \delta I$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Y por el Lema 2.3.6 el operador $S_{g,g}$ es invertible en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

■

Nota 2.5.9 *De las condiciones* (2.27) *y* (2.28) *no se concluye que β debe ser suficientemente pequeño. Sin embargo, para las funciones de decrecimiento rápido estas expresiones pueden ser evaluadas numéricamente y, a veces, dan buenas estimaciones, como en las tablas de [Dau90, Dau92], donde encontramos estimaciones explícitas de α, β y de las cotas del frame para los casos $g(x) = e^{\pi x^2}$ y $g(x) = e^{-|x|}$.*

Capítulo 3

Estructura de los sistemas de Gabor

Finalmente, en este último capítulo estudiaremos la estructura que tienen los frames de Gabor, así como las posibles representaciones y características de sus parámetros. Acabaremos presentando y demostrando el teorema de dualidad de Ron y Shen.

3.1. La representación de Walnut

Proposición 3.1.1 *Si $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y D_g, D_γ son acotados en $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, entonces*

$$\langle S_{g,\gamma} f, h \rangle = \left\langle \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f, h \right\rangle, \tag{3.1}$$

para toda $f, h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto.

Demostración:
Ya vimos que la periodización

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (T_{\alpha k} \overline{g} f) \left(x - \frac{n}{\beta} \right)$$

tiene como serie de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle e^{2\pi \mathbf{i} \beta n \cdot x}.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $T_{\alpha k}\overline{g} \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y la periodización pertenece, al menos, a $L^1(Q_{1/\beta})$, por el Lema 2.2.3. Sin embargo, si asumimos que el operador de síntesis, D_g, es acotado, sabemos que los coeficientes $\langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle$ están en $\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$. Por lo tanto, la serie de Fourier está en $L^2(Q_{1/\beta})$ y la igualdad

$$\beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (T_{\alpha k} \overline{g} f) \left(x - \frac{n}{\beta} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle e^{2\pi \mathbf{i} \beta n x}$$

se tiene para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Sustituyendo esta identidad en el desarrollo de $S_{g,\gamma}f$ se obtiene

$$\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle = \beta^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}\overline{g}\left(x - \frac{n}{\beta}\right) \cdot f\left(x - \frac{n}{\beta}\right)\right) \cdot T_{\alpha k}\gamma(x)\right) \overline{h}(x)dx.$$

Ahora, si f y h son de soporte compacto, entonces, la suma sobre n es finita y su rango está sobre el conjunto $\left\{n \in \mathbb{Z}^d : \left|\left(\frac{n}{\beta} + \mathrm{sop}(f)\right) \cap \mathrm{sop}(h)\right| > 0\right\}$. Por lo tanto el orden de las sumas se pueden intercambiar y obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle S_{g,\gamma}f, h\rangle &= \beta^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}\overline{g}\left(x - \frac{n}{\beta}\right) \cdot f\left(x - \frac{n}{\beta}\right)\right) \cdot T_{\alpha k}\gamma(x)\right) \overline{h}(x)dx \\ &= \beta^{-d}\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f, h\rangle, \end{aligned}$$

que es lo que buscábamos.

■

La expresión (3.1) es la versión más general de la representación de Walnut dentro de la teoría de L^2.

Corolario 3.1.2 *Si D_g y D_γ son acotadas, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\|G_n\|_\infty \leq \beta^d \|S_{g,\gamma}\|.$$

Demostración:

Elegimos $f, h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con soporte en $Q_{1/\beta}$ y $\ell, m \in \mathbb{Z}^d$ arbitrarios. Por un lado, como $S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^*$ es acotado, tenemos que

$$|\langle S_{g,\gamma}T_{\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle| \leq \|S_{g,\gamma}\|\|f\|_2\|h\|_2. \tag{3.2}$$

Por otro lado, la Proposición 3.1.1 nos indica

$$\langle S_{g,\gamma}T_{\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle = \beta^{-d}\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{(n+\ell)/\beta} f, T_{m/\beta}h\rangle. \tag{3.3}$$

Como los soportes de $T_{k/\beta}f$ y $T_{m/\beta}h$ son disjuntos dos a dos, salvo cuando $k = m$, tenemos que en (3.3) sólo el término con $n + \ell = m$ contribuye. Combinando (3.2) y (3.3) se obtiene, para todo $f, h \in L^\infty(Q_{1/\beta}) \subset L^2(Q_{1/\beta})$ y para todo $\ell, m \in \mathbb{Z}^d$, que

$$\beta^{-d} \left| \int_{1/\beta} G_{m-\ell}\left(x + \frac{m}{\beta}\right) f(x)\overline{h}(x)dx \right| \leq \|S_{g,\gamma}\|\|f\|_2\|h\|_2. \tag{3.4}$$

Por densidad, podemos extender esta expresión a $f, h \in L^2(Q_{1/\beta})$ y, por lo tanto,

$$\beta^{-d} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q_{1/\beta}} \left| G_n\left(x + \frac{n+\ell}{\beta}\right)\right| \leq \|S_{g,\gamma}\|,$$

para todo ℓ, de donde se deduce que

$$\|G_n\|_\infty \leq \beta^d \|S_{g,\gamma}\|,$$

como queríamos.

■

Corolario 3.1.3 *Si $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame de Gabor con cotas $A, B > 0$, entonces,*

$$A \leq \beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)| \leq B,$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración:
Sea $f = h \in L^\infty(Q_{1/\beta})$ y $\ell = m = 0$ en (3.3), entonces,

$$\langle S_{g,g}f, f\rangle = \beta^{-d} \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f, f \right\rangle = \beta^{-d} \int_{Q_{1/\beta}} G_0(x)|f(x)|^2 dx,$$

y la desigualdad de la definición de frame implica que

$$A \leq \beta^{-d} G_0(x) \leq B,$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

■

3.2. Representación de Janssen

Para llegar a la representación de Janssen debemos plantearnos el desarrollo en serie de Fourier de las funciones de correlación α-periódicas.

El ℓ-ésimo coeficiente de Fourier de la función de correlación G_n es:

$$\begin{aligned}\widehat{G_n}(\ell) &= \alpha^{-d} \int_{Q_\alpha} G_n(x) e^{-2\pi \mathbf{i}\, \ell x/\alpha} dx = \alpha^{-d} \int_{Q_\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (T_{n/\beta}\overline{g}\gamma)(x-\alpha k) e^{-2\pi \mathbf{i}\, \ell x/\alpha} dx \\ &= \alpha^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (T_{n/\beta}\overline{g}\gamma)(x) e^{-2\pi \mathbf{i}\, \ell x/\alpha} dx = \alpha^{-d} \langle \gamma, M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta} g\rangle.\end{aligned}$$

Si pudiesemos asegurar la convergencia de su serie de Fourier, podríamos expresar $G_n(x)$ como,

$$G_n(x) = \alpha^{-d} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta} g\rangle e^{2\pi \mathbf{i}\, \ell x/\alpha}. \tag{3.5}$$

Si sustituimos esta expresión en la representación de Walnut (3.1), obtenemos el desarrollo

$$S_{g,\gamma} f = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{n/\beta} f = (\beta\alpha)^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta} g\rangle M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta} f. \tag{3.6}$$

A este desarrollo lo llamamos representación de Janssen [Jan95].

Para poder afirmar la convergencia de esta expresión introduciremos la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Diremos que el par de funciones* (g, γ) *de* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *satisface la condición* (A') *para los parámetros* $\alpha, \beta > 0$ *si*

$$\sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}^d} |\langle \gamma, T_{n/\beta} M_{\ell/\alpha} g \rangle| < \infty.$$

Si $g = \gamma$*, entonces diremos que* g *satisface la condición* (A)*.*

La condición (A') nos garantiza la convergencia absoluta de los desarrollos (3.5) y (3.6).

La representación de Janssen es complementaria a la definición original de $S_{g,\gamma}$ dada por (3.1). Mientras que (3.1) imita un desarrollo ortogonal y f se encuentra implícita en los coeficientes del frame, $\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle$, en la representación de Janssen f se encuentra más explícitamente. De hecho, esta segunda nos muestra $S_{g,\gamma} f$ como una combinación lineal de transformaciones tiempo-frecuencia de f.

En general para $g, \gamma \in L^2$ no está claro que la serie de Fourier (3.5) represente G_n de forma que podamos derivar rigurosamente en (3.6).

Teorema 3.2.2 *Si* (g, γ) *satisfacen la condición* (A') *para ciertas* $\alpha, \beta > 0$*, entonces*

$$\begin{aligned} S_{g,\gamma} &= (\beta\alpha)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta} g \rangle M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta}, \\ &= (\beta\alpha)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, T_{n/\beta} M_{k/\alpha} g \rangle T_{n/\beta} M_{k/\alpha} \end{aligned}$$

con convergencia absoluta en la norma.

Demostración:
Como consecuencia de la condición (A'), las series de la expresión del enunciado convergen absolutamente en la norma y, por lo tanto, independientemente del orden de sumación. Así, llegamos a

$$\beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(\alpha^{-d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\ell/\alpha} T_{n/\beta} g \rangle e^{2\pi \mathbf{i} \ell x/\alpha} \right) T_{n/\beta} = \beta^{-d} \sum_{n \in Z^d} G_n T_{n/\beta} = S_{g,\gamma}, \quad (3.7)$$

donde hemos usado (3.5) y la proposición 3.1.1.

■

3.3. Densidad de los frames de Gabor

Comenzamos presentando un resultado que necesitaremos para desarrollar la prueba de la densidad de los frames de Gabor.

Proposición 3.3.1 *Sean $f, h, g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$\langle f, M_y T_x \gamma \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{M_y T_x \gamma(t)} dt = V_\gamma f(x, y)$$

y

$$\langle h, M_y T_x g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h(t)\overline{M_y T_x g(t)} dt = V_g f(x, y)$$

pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ como funciones de $x, y \in \mathbb{R}^d$, y

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \langle f, M_y T_x \gamma \rangle \langle M_y T_x g, h \rangle dxdy = \langle g, \gamma \rangle \langle f, h \rangle.$$

Demostración:
Ya vimos en el Lema 1.2.3 que las STFT pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Empezamos suponiendo que $g, \gamma \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$; así, tenemos que $fT_x\gamma, hT_xg \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Por lo tanto, utilizando la fórmula de Parseval, podemos desarrollar la doble integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \langle f, M_y T_x \gamma \rangle \langle M_y T_x g, h \rangle dxdy &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{f\overline{T_x\gamma}})(y)\overline{(\widehat{h\overline{T_x g}})(y)} dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (f\overline{T_x\gamma})(t)\overline{(h\overline{T_x g})(t)} dtdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{h(t)} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\gamma(t-x)} g(t-x) dtdx \\
&= \langle f, h \rangle \langle g, \gamma \rangle,
\end{aligned}$$

donde hemos podido intercambiar los ordenes de integración por el teorema de Fubini. Ahora, dada la aplicación sesquilineal, definida por;

$$(\gamma, g) \quad \mapsto \quad \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \langle f, M_y T_x \gamma \rangle \overline{\langle h, M_y T_x g \rangle} dxdy,$$

la cual es acotada e igual a $\langle f, h \rangle \langle g, \gamma \rangle$ sobre el conjunto $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, que es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$, podemos extender el resultado a cualesquiera $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

■

Lema 3.3.2 *Sean $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^d$, tenemos que*

$$\langle f, h \rangle = \langle M_x T_y f, M_x T_y h \rangle. \tag{3.8}$$

Ahora podemos presentar el resultado inspirado en la publicación de Janssen [Jan] sobre la densidad de estos frames.

Teorema 3.3.3 *Si $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ es un frame de Gabor, entonces $\alpha\beta \leq 1$.*

Demostración:

Primero veremos que si $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame de Gabor, entonces

$$\langle g, \gamma^\circ\rangle = (\alpha\beta)^d,$$

donde $\gamma^\circ = S^{-1}g$ es su frame dual canónico. Elegimos $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, tales que $\langle f, h\rangle \neq 0$. Ahora, tenemos que, por la Proposición 1.2.7,

$$f = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{n\alpha}T_{m\beta}\gamma^\circ\rangle M_{n\alpha}T_{m\beta}g,$$

y usando (3.8), para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^d$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle f, h\rangle &= \langle M_{-x}T_{-y}f, M_{-x}T_{-y}h\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} \langle M_{-x}T_{-y}f, M_{n\alpha}T_{m\beta}\gamma^\circ\rangle M_{n\alpha}T_{m\beta}g, M_{-x}T_{-y}h \right\rangle \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} \langle M_{-x}T_{-y}f, M_{n\alpha}T_{m\beta}\gamma^\circ\rangle \langle M_{n\alpha}T_{m\beta}g, M_{-x}T_{-y}h\rangle \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{n\alpha+x}T_{m\beta+y}\gamma^\circ\rangle \langle M_{n\alpha+x}T_{m\beta+y}g, h\rangle.
\end{aligned}$$

Integrando esta identidad sobre $(x, y) \in [0, \alpha)^d \times [0, \beta)^d$, y usando la Proposición 3.3.1, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\alpha^d\beta^d\langle f, h\rangle &= \int_{Q_\alpha}\int_{Q_\beta} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{n\alpha+x}T_{m\beta+y}\gamma^\circ\rangle \langle M_{n\alpha+x}T_{m\beta+y}g, h\rangle dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \langle f, M_xT_y\gamma^\circ\rangle\langle M_xT_yg, h\rangle dxdy = \langle g, \gamma^\circ\rangle\langle f, h\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, $\langle g, \gamma^\circ\rangle = \alpha^d\beta^d$, dado que $\langle f, h\rangle \neq 0$. Ahora consideramos 2 representaciones distintas de g

$$g = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} \langle g, M_{n\alpha}T_{m\beta}\gamma^\circ\rangle M_{n\alpha}T_{m\beta}g$$

y

$$g = 1\cdot g + \sum_{\substack{n,\, m\,\in\, \mathbb{Z}^d \\ (n,m)\neq(0,0)}} 0\cdot M_{n\alpha}T_{m\beta}g.$$

Como sabemos que la norma de los coeficientes canónicos es la menor de los posibles coeficientes que reconstruyen g, por la Proposición 1.1.13, tenemos que

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}^d} |\langle g, M_{n\alpha}T_{m\beta}\gamma^\circ\rangle|^2 \leq 1^2 + \sum_{\substack{n,\, m\,\in\, \mathbb{Z}^d \\ (n,m)\neq(0,0)}} 0^2 = 1,$$

con lo que podemos afirmar que

$$\alpha^d\beta^d = \langle g, \gamma^\circ\rangle = \langle g, M_0T_0\gamma^\circ\rangle \leq 1,$$

y así, $\alpha\beta \leq 1$ como queríamos.

■

En la literatura se han mostrado más resultados estableciendo condiciones suficientes (en ocasiones, también necesarias) para la existencia de frames a partir del producto de α y β. Presentamos, sin demostración, uno de ellos.

Teorema 3.3.4 (Lyubarski [Lyu92] y Seip y Wallsten [?, ?]) *Sean $\alpha, \beta > 0$ y consideremos $g(x) = e^{-x^2}$. Entonces el sistema de Gabor $\{M_{n\beta}T_{m\alpha}g\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ es un frame de $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si $ab < 1$.*

3.4. Las relaciones de biortogonalidad de Wexler-Raz

En el primer capítulo vimos que, para cualquier frame de Gabor $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$, existe una ventana dual $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $S_{g,\gamma} = S_{\gamma,g} = I$. En general, como los coeficientes $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{Z}^d}$ del desarrollo

$$f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} a_{k,n} T_{\alpha k} M_{\beta n} g$$

no son únicos, puede haber otras ventanas duales, además de la canónica, que satisfagan $S_{g,\gamma} = I$. Las siguientes condiciones, conocidas como las relaciones de Wexler-Raz [WR90], caracterizan todas las ventanas duales.

Teorema 3.4.1 *Si D_g y D_γ son acotadas en $\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$, entonces las siguiente condiciones son equivalentes:*

(i) $S_{g,\gamma} = S_{\gamma,g} = I$, *en* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Condición de biortogonalidad: $(\alpha\beta)^{-d}\langle\gamma, M_{\ell/\alpha}T_{n/\beta}g\rangle = \delta_{\ell 0}\delta_{n0}$ *para* $\ell, n \in \mathbb{Z}^d$.

Demostración:

(ii)→(i) Si la condición de biortogonalidad se cumple, entonces (g, γ) satisfacen la condición (A'),

$$\sum_{n,\ell\in\mathbb{Z}^d} |\langle\gamma, T_{n/\beta}M_{\ell/\alpha}g\rangle| < \infty.$$

Así, las representaciones del Teorema 3.2.2 convergen en norma, y consecuentemente $S_{g,\gamma} = I$.

(i)→(ii) Tenemos que $S_{g,\gamma} = I$. Sean $f, h \in L^\infty(Q_{1/\beta})$, y sean $l, m \in \mathbb{Z}^d$ arbitrarios. Entonces, aplicando la representación de Walnut (3.1.1),

$$\begin{aligned}
\delta_{\ell m}\langle f, h\rangle &= \langle T_{\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle = \langle S_{g,\gamma}T_{\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle \\
&= \langle \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{n+\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle.
\end{aligned}$$

Por el soporte escogido para f y h, $\langle T_{n+\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle = 0$ si $n+\ell \neq m$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta_{\ell m}\langle f,h\rangle &= \langle \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{n+\ell/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle = \beta^{-d}\langle G_{m-\ell}T_{m/\beta}f, T_{m/\beta}h\rangle \\ &= \beta^{-d}\langle (T_{-m/\beta}G_{m-\ell})f, h\rangle\end{aligned}$$

Por densidad, esta identidad se extiende a $f,h \in L^2(Q_{1/\beta})$ y concluimos que $\delta_{\ell m} = \beta^{-d}G_{m-\ell}(x+\frac{m}{\beta})$ para casi todo $x \in Q_{1/\beta}$. Variando $\ell, m \in \mathbb{Z}^d$, se sigue que $\beta^{-d}G_0(x) = 1$ y $G_n(x) = 0$ cuando $n \neq 0$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Como ya dedujimos que $G_n \in L^\infty(Q_\alpha)$ tiene la serie de Fourier

$$G_n(x) = \alpha^{-d}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\langle \gamma, M_{\ell/\alpha}T_{n/\beta}g\rangle e^{2\pi\,\mathbf{i}\,\ell x/\alpha}$$

y por la unicidad de los coeficiente de Fourier, concluimos que

$$(\alpha\beta)^{-d}\langle \gamma, M_{\ell/\alpha}T_{n/\beta}g\rangle = \delta_{\ell 0}\delta_{n0}.$$

■

Nota 3.4.2 *Notemos que podemos reescribir las relaciones de biortogonalidad como*

$$(\alpha\beta)^{-d}\langle M_{\ell/\alpha}T_{n/\beta}\gamma, M_{\ell'/\alpha}T_{n'/\beta}g\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{nn'} \tag{3.9}$$

para $\ell, \ell', n, n' \in \mathbb{Z}^d$. Es decir, que los dos conjuntos $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ y $\mathcal{G}(\gamma, 1/\beta, 1/\alpha)$ son biortogonales entre ellos en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Corolario 3.4.3 *Un sistema de Gabor $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un tight frame si, y sólo si*

$$\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha) = \{T_{k/\beta}M_{n/\alpha}g : k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

es un sistema ortogonal. En este caso, la cota frame A satisface

$$A = (\alpha\beta)^{-d}\|g\|_2^2.$$

Demostración:

El operador frame de un tight frame es un múltiplo de la identidad, específicamente $\frac{1}{A}S_{g,g} = I$. Usando $\gamma = \frac{1}{A}g$ en la condición de biortogonalidad obtenemos que

$$(\alpha\beta)^{-d}A^{-1}\langle M_{\ell/\alpha}T_{n/\beta}g, M_{\ell'/\alpha}T_{n'/\beta}g\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{nn'}.$$

Para $\ell' = \ell$ y $n' = n$, obtenemos $A = (\alpha\beta)^{-d}\|g\|_2^2$ para la cota frame.

Recíprocamente, si $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ es un sistema ortonormal, utilizando la representación de Janssen, obtenemos $S_{g,g} = (\alpha\beta)^{-d}\|g\|_2^2 I$. Por lo tanto, $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un tight frame.

■

Lema 3.4.4 *Si D_g y D_γ son acotados y $S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^* = I$, entonces ambas, $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ y $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$, son frames de Gabor.*

Demostración:
Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces:

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|S_{g,\gamma} f\|_2^2 = \|D_\gamma D_g^* f\|_2^2 \\ &\leq \|D_\gamma\|^2 \|D_g^* f\|_2^2 = \|D_\gamma\|^2 \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle|^2 \\ &\leq \|D_\gamma\|^2 \|D_g\|^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\|D_\gamma\|^{-2} \|f\|_2^2 \leq \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle|^2 \leq \|D_g\|^2 \|f\|_2^2,$$

con lo que $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ es un frame de Gabor. La prueba para $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ es análoga.

■

3.5. El principio de dualidad de Ron-Shen

Finalmente, en esta sección introducimos una definición y algunas caracterizaciones que nos ayudarán en la comprensión del teorema de dualidad de Ron y Shen, que presentaremos y demostraremos al final.

Definición 3.5.1 *Sea $\Lambda = \alpha\mathbb{Z}^d \times \beta\mathbb{Z}^d$ un retículo, llamaremos **retículo adjunto** a $\Lambda^\circ = \frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d \times \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}^d$.*

Este retículo se caracteriza fácilmente por la siguiente propiedad de conmutación.

Lema 3.5.2 *Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$ pertenece al retículo adjunto Λ° si, y sólo si,*

$$(T_x M_y)(T_{\alpha k} M_{\beta n}) = (T_{\alpha k} M_{\beta n})(T_x M_y),$$

para todo $k, n \in \mathbb{Z}^d$.

Demostración:
Aplicando las relaciones de conmutabilidad, obtenemos que

$$\begin{aligned} (T_x M_y)(T_{\alpha k} M_{\beta n}) &= e^{2\pi \mathbf{i}\, \alpha k y} T_x T_{\alpha k} M_y M_{\beta n} = e^{2\pi \mathbf{i}\, \alpha k y} T_{\alpha k} T_x M_{\beta n} M_y \\ &= e^{2\pi \mathbf{i}(\alpha k y - \beta n x)} (T_{\alpha k} M_{\beta n})(T_x M_y), \end{aligned}$$

donde $e^{2\pi \mathbf{i}(\alpha k y - \beta n x)} = 1$ para todo $k, n \in \mathbb{Z}^d$ si, y sólo si, $x = \frac{\ell}{\beta}$ y $y = \frac{m}{\alpha}$ para $\ell, m \in \mathbb{Z}^d$, es decir, si $(x, y) \in \Lambda^\circ$.

■

Ahora, para formular el principio de dualidad necesitamos un lema técnico. Si $g \in W(\mathbb{R}^d)$, entonces el operador de síntesis $D_{g,\alpha,\beta}$ es acotado en $\ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$ para todo $\alpha, \beta > 0$, como ya vimos en la Proposición 2.2.6. En particular, $D_{g,1/\beta,1/\alpha}$, que es el asociado al retículo adjunto, también lo es.

Para una ventana continua g, la acotación de $D_{g,\alpha,\beta}$ depende de $\alpha, \beta > 0$ y tenemos la siguiente relación entre los retículos adjuntos.

Lema 3.5.3 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y sean $\alpha, \beta > 0$, entonces $D_{g,\alpha,\beta}$ es un operador acotado si, y sólo si, $D_{g,1/\beta,1/\alpha}$ es un operador acotado.*

Demostración:

$\rightarrow$ Suponemos que $D_{g,\alpha,\beta}$ es un operador acotado, por lo tanto, $D^*_{g,\alpha,\beta}$ también lo es. Así, tenemos que $S^{(\alpha,\beta)}_{g,g} = D_{g,\alpha,\beta}D^*_{g,\alpha,\beta}$ es un operador acotado y, por la Proposición 2.3.6, $G^{(\alpha,\beta)}(x)$ es un operador acotado para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Observamos que dadas las definición de $G^{(\alpha,\beta)}(x) = (G^{(\alpha,\beta)}_{jl}(x))_{j,l\in\mathbb{Z}}$, donde

$$G_{jl}(x) = \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}\left(x - \frac{l}{\beta} - \alpha r\right)\gamma\left(x - \frac{j}{\beta} - \alpha r\right),$$

y la de $\Gamma^{(\alpha,\beta)}(x) = (\Gamma^{(\alpha,\beta)}_{jl}(x))_{j,l\in\mathbb{Z}}$, donde

$$\Gamma^{(\alpha,\beta)}_{jl}(x) = \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}\left(x - \alpha j - \frac{r}{\beta}\right) g\left(x - \alpha l - \frac{r}{\beta}\right),$$

tenemos que $G^{(\alpha,\beta)}(x) = \Gamma^{(1/\beta,1/\alpha)}(x)$. Por lo tanto, deducimos que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \|\Gamma^{(1/\beta,1/\alpha)}(x)\| < \infty.$$

Por la Proposición 2.2.10, $D_{g,1/\beta,1/\alpha}$ es un operador acotado.

$\leftarrow$ Veamos que podemos seguir la argumentación anterior sustituyendo α por $1/\beta$ y β por $1/\alpha$. En este caso tenemos que si $D_{g,1/\beta,1/\alpha}$ es un operador acotado, entonces $D_{g,\alpha,\beta}$ también lo es.

$\blacksquare$

En particular, el lema nos muestra que $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ tiene una cota frame superior si, y sólo si, $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ también la tiene. El resultado correspondiente para la cota inferior es lo que llamamos el principio de dualidad de Ron-Shen.

Teorema 3.5.4 ***Ron-Shen [RS97]*** *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ continua y $\alpha, \beta > 0$. Entonces el sistema de Gabor $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ es un frame para $L^2(\mathbb{R}^d)$ si, y solo si, $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ es una base de Riesz para la envoltura lineal cerrada del conjunto $\{T_{k/\beta}M_{n/\alpha}g \ : k, n \in \mathbb{Z}^d\}$.*

Demostración:

$\rightarrow$ Suponemos que $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ es un frame. Sea $\mathcal{K}=\mathcal{K}(g,1/\beta,1/\alpha)$ el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la envoltura lineal cerrada de $\mathcal{G}(g,1/\beta,1/\alpha)$. Entonces, por definición, las combinaciones lineales finitas de $T_{k/\beta}M_{n/\alpha}g$ son densas en $\mathcal{K}$.

Para que $\mathcal{G}(g,1/\beta,1/\alpha)$ sea una base de Riesz necesitamos ver que se cumple

$$A\|c\|_2 \leq \left\| \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{k/\beta} M_{n/\alpha} g \right\| = \|D_{g,1/\beta,1/\alpha} c\|_2 \leq B\|c\|_2,$$

para todo $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$ con soporte finito. Como $D_{g,\alpha,\beta}$ es acotado, por ser $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ un frame, el Lema 3.5.3 nos da que $D_{g,1/\beta,1/\alpha}$ también es acotado, con lo que tenemos la cota inferior.

Para la estimación inferior utilizamos las relaciones de Wexler-Raz aplicadas a la ventana canónica γ°. Por (3.9), los coeficientes de la combinación lineal finita

$$f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{k/\beta} M_{n/\alpha} g$$

están univocamente determinados por

$$c_{\ell m} = (\alpha\beta)^{-d} \langle f, T_{\ell/\beta} M_{m/\alpha} \gamma^\circ \rangle,$$

que expresado con la notación del operador es

$$c = (\alpha\beta)^{-d} D^*_{\gamma^\circ,1/\beta,1/\alpha} f.$$

Como $\mathcal{G}(\gamma^\circ,\alpha,\beta)$ es un frame, por la Proposición 1.2.7, tenemos que $D_{\gamma^\circ,\alpha,\beta}$ es acotado. Esto último, por el Lema 3.5.3, nos lleva a que $D_{\gamma^\circ,1/\beta,1/\alpha}$ también es acotado y, por lo tanto, tenemos que

$$\|c\|_2 \leq \|D^*_{\gamma^\circ,1/\beta,1/\alpha}\| \|f\|_2,$$

que podemos reescribir como

$$\|D^*_{\gamma^\circ,1/\beta,1/\alpha}\|^{-1} \|c\|_2 \leq \|f\|_2 = \left\| \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{k/\beta} M_{n/\alpha} g \right\|.$$

Esta es la cota inferior que buscábamos. Aplicando el Lema 1.1.4, podemos extenderlo a todo $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^{2d})$, con lo que tenemos que $\mathcal{G}(g,1/\beta,1/\alpha)$ es una base de Riesz, por la Proposición 1.1.21.

$\leftarrow$ Recíprocamente, si asumimos que $\mathcal{G}(g,1/\beta,1/\alpha)$ es una base de Riesz para $\mathcal{K}$, el complemento ortogonal a $\{T_{k/\beta}M_{n/\alpha}g : (k,n) \neq (0,0)\}$ en $\mathcal{K}$ tiene dimensión 1. Además, existe una única función $\gamma \in \mathcal{K}$, tal que

$$(\alpha\beta)^{-d} \langle \gamma, T_{\ell/\beta} M_{m/\alpha} g \rangle = \delta_{\ell 0} \delta_{m0}.$$

Entonces, $\mathcal{G}(\gamma, 1/\beta, 1/\alpha)$ es un sistema biortogonal a $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ y, como $\mathcal{K}$ es invariante bajo $M_{k/\alpha}T_{n/\beta}$, $\mathcal{G}(\gamma, 1/\beta, 1/\alpha)$ está contenido en $\mathcal{K}$. Por la Proposición 1.1.21, tenemos que tanto $D_{g,1/\beta,1/\alpha}$ como $D_{\gamma,1/\beta,1/\alpha}$ son acotados. Por el Lema 3.5.3, $D_{g,\alpha,\beta}$ y $D_{\gamma,\alpha,\beta}$ también son acotados. Por lo tanto

$$S_{g,\gamma}f = D_{\gamma,\alpha,\beta}D^*_{g,\alpha,\beta}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle fT_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma$$

está bien definido y es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Como (g, γ) satisface la condición (A'), la representación de Janssen mantiene la biortogonalidad de $\mathcal{G}(g, 1/\beta, 1/\alpha)$ y $\mathcal{G}(\gamma, 1/\beta, 1/\alpha)$, lo que nos da

$$S_{g,\gamma}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma T_{k/\beta}M_{n/\alpha}g\rangle T_{k/\beta}M_{n/\alpha}f = f.$$

Y, como vimos en el Lema 3.4.4, la identidad $D_\gamma D^*_g = I$, junto a que D_γ y D_g son acotados, implica que $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ y $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ son frames.

∎

Bibliografía

[Dau90] I. Daubechies, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), no. 5, 961–1005.

[Dau92] ———, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[DGM86] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. **27** (1986), no. 5, 1271–1283.

[DS52] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 341–366.

[Grö01] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[Jan] A. J. E. M. Janssen, *Classroom proof of the density theorem for Gabor systems*, Manuscript.

[Jan95] ———, *Duality and biorthogonality for Weyl-Heisenberg frames*, J. Fourier Anal. Appl. **1** (1995), no. 4, 403–436.

[Lyu92] Yu. I. Lyubarskii, *Frames in the bargmann space of entire functions. en: Entire and subharmonic functions*, Advances in Soviet Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[RS97] A. Ron and Z. Shen, *Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in* $L_2(\mathbf{R}^d)$, Duke Math. J. **89** (1997), no. 2, 237–282.

[Sei92] K. Seip, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. I*, J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 91–106.

[SW92] K. Seip and R. Wallstén, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. II*, J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 107–113.

[Wal92] D. F. Walnut, *Continuity properties of the Gabor frame operator*, J. Math. Anal. Appl. **165** (1992), no. 2, 479–504.

[WR90] J. Wexler and S. Raz, *Discrete Gabor expansions.*, Signal Proc. **21(3)** (1990), 207–221.

[You80] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Pure and Applied Mathematics, vol. 93, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.