Resum

El procés d'estimació del preu d'una acció, opció o un altre derivat en els mercats de valors és objecte clau d'estudi de les matemàtiques financeres . En la literatura es poden trobar diverses tècniques per a obtindre un model matemàtic adequat a fi de millorar el procés de valoració de les opcions per a períodes curts o llargs. Històricament, l'equació de Black-Scholes (1973) es considera un gran avanç en l'elaboració de models matemàtics per als mercats de valors. Suposa un model matemàtic pràctic per a estimar un valor raonable per a una determinada opció en el moment en que esta s'adquirix. Sobre una sèrie de suposats F. Black i M. Scholes van obtindre una equació diferencial en derivades parcials lineal amb solució analítica.

Des de llavors, el comerç de valors ha crescut enormement i diversos factors s'han incorporat portant a l'aparició de nous productes financers de major complexitat. Supòsits de partida de Black-Scholes com la volatilitat constant i que l'actiu subjacent segueix el moviment brownià estàndard no poden mantindre's amb este desenrotllament dels mercats financers. En conseqüència, estes restriccions han de ser qüestionades. S'han realitzat nombrosos esforços per a desenrotllar models alternatius d'actius que són capaços de captar les característiques leptocúrticas que es troben en les dades dels mercats i, posteriorment, utilitzar estos models per a calcular preus de les opcions que reflectisquen amb exactitud l'anomenada somriure de volatilitat i asimetries que es troben en els mercats. Dos estratègies s'han desenrotllat per a capturar estos comportaments; la primera modificació consisteix a afegir salts en el procés del preu de l'actiu subjacent, com originàriament va ser proposta per Merton; la segona és permetre que la volatilitat evolucione estocàsticament, introduïda per Heston. La primera idea conduïx als models de difusió amb salts i als models de Lévy que es descriuen per mitjà d'una equació integre-diferencial en derivades parcials (PIDE) amb dues variables independents, actiu subjacent i temps. Amb el segon enfocament s'arriba a una equació diferencial en derivades parcials (PDE) amb dues variables espacials, l'actiu subjacent i la volatilitat, a més de la variable temporal.

En esta memòria s'aborda la resolució numèrica d'una àmplia classe de models baix processos de Lévy. Es desenrotllen esquemes en diferències finites per a opcions europees i també per a opcions

americanes amb el seu problema de complementarietat lineal (LCP) associat. D'altra banda també es tracten models de valoració d'opcions amb volatilitat estocástica incorporant difusió amb salts. Es planteja l'anàlisi numèrica dels esquemes proposats ja que és el camí eficient i pràctic per a garantir la convergència i precisió de les solucions numèriques. De fet, sense anàlisi numèrica, els càlculs inconsistents poden debilitar bons models matemàtics.

Esta memòria està organitzada en quatre capítols. El primer és una introducció amb un breu repàs dels processos estocàstics, el model de Black-Scholes així com nocions preliminars d'anàlisi numèrica. En el segon capítol es tracta la PIDE per a les opcions europees segons el model CGMY. Es proposen dos esquemes en diferències finites; la primera aproximació garantix consistència incondicional de la solució amb la PIDE mentres que la segona proporciona estabilitat i positivitat incondicionals. Amb el primer enfocament, la part diferencial es discretitza per mitjà d'un esquema explícit i per a la part integral s'utilitza la regla del trapezi. En la segona aproximació, per a la part diferencial s'usa l'esquema tipus Patankar i la part integral s'aproxima per mitjà de la fórmula de tipus obert amb quatre punts. Posteriorment s'estudia en cada cas la positivitat, estabilitat i consistència. S'inclouen diversos exemples i simulacions.

En el capítol tercer, es proposa un tractament unificat per a una àmplia classe de models d'opcions en processos de Lévy com ara CGMY, Meixner i hiperbòlic generalitzat. Primer s'eliminen els termes de reacció i convecció en la PIDE per mitjà d'un apropiat canvi de variables. Posteriorment, la part diferencial de la PIDE s'aproxima per un esquema explícit, mentres que per a la part integral s'usa la fórmula de quadratura de Laguerre-Gauss. S'analitzen les propietats de positivitat, estabilitat i consistència. Per al cas d'opcions americanes, la part diferencial del PCL es discretitza per mitjà d'una aproximació amb tres nivells temporals, usant la quadratura de Laguerre-Gauss per a la integració numèrica de la part integral. Finalment, s'implementen mètodes iteratius de projecció i relaxació successiva i la tècnica de multimalla. Es mostren diversos exemples incloent l'estudi d'errors i el cost computacional.

Finalment, el capítol 4 està dedicat al model de Bates. Este model combina els enfocaments de volatilitat estocàstica i de difusió amb salts el que porta a una PIDE amb un terme amb derivades creuades. Tenint en compte que la discretización d'una derivada creuada comporta l'existència de termes amb coeficients negatius en l'esquema que deterioren la qualitat de la solució numèrica, es proposa una transformació de variables que elimina la esmentada derivada creuada en l'equació. La PIDE transformada es resol numèricament i es mostra l'anàlisi numèrica. D'altra banda s'estudia el LCP per a opcions americanes en el model de Bates.