Resumen

El proceso de estimación del precio de una acción, opción u otro derivado en los mercados de valores es objeto clave de estudio de las matemáticas financieras. En la literatura se pueden encontrar diversas técnicas para obtener un modelo matemático adecuado con el fin de mejorar el proceso de valoración de las opciones para períodos cortos o largos. Históricamente, la ecuación de Black-Scholes (1973) se considera un gran avance en la elaboración de modelos matemáticos para los mercados de valores. Supone un modelo matemático práctico para estimar un valor razonable para una determinada opción en el momento en que se adquiere. Sobre una serie de supuestos F. Black y M. Scholes obtuvieron una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal con solución analítica.

Desde entonces, el comercio de valores ha crecido enormemente y varios factores se han incorporado llevando a la aparición de nuevos productos financieros de mayor complejidad. Supuestos de partida de Black-Scholes como la volatilidad constante y que el activo subyacente sigue el movimiento browniano estándar no pueden mantenerse con este desarrollo de los mercados financieros. En consecuencia, estas restricciones deben ser cuestionadas. Se han realizado numerosos esfuerzos para desarrollar modelos alternativos de activos que son capaces de captar las características leptocúrticas que se encuentran en los datos de los mercados y, posteriormente, utilizar estos modelos para calcular precios de las opciones que reflejen con exactitud la llamada sonrisa de volatilidad y asimetrías que se encuentran en los mercados. Dos estrategias se han desarrollado para capturar estos comportamientos; la primera modificación consiste en añadir saltos en el proceso del precio del activo subyacente, como originalmente fue propuesta por Merton; la segunda es permitir que la volatilidad evolucione estocásticamente, introducida por Heston. La primera idea conduce a los modelos de difusión con saltos y a los modelos de Lévy que se describen mediante una ecuación integro-diferencial en derivadas parciales (PIDE) con dos variables independientes, activo subyacente y tiempo. Con el segundo enfoque se llega a una ecuación diferencial en derivadas parciales (PDE) con dos variables espaciales, el activo subyacente y la volatilidad, además de la variable temporal.

En esta memoria se aborda la resolución numérica de una amplia clase de modelos bajo procesos de Lévy. Se desarrollan esquemas en diferencias finitas para opciones europeas y también para opciones americanas con su problema de complementariedad lineal (LCP) asociado. Por otra parte, también se tratan modelos de valoración de opciones con volatilidad estocástica incorporando difusión con saltos. Se plantea el análisis numérico de los esquemas propuestos ya que es el camino eficiente y práctico para garantizar

la convergencia y precisión de las soluciones numéricas. De hecho, sin análisis numérico, los cálculos inconsistentes pueden debilitar buenos modelos matemáticos.

Esta memoria está organizada en cuatro capítulos. El primero es una introducción con un breve repaso de los procesos estocásticos, el modelo de Black-Scholes asi como nociones preliminares de análisis numérico. En el segundo capítulo se trata la PIDE para las opciones europeas según el modelo CGMY. Se proponen dos esquemas en diferencias finitas; la primera aproximación garantiza consistencia incondicional de la solución con la PIDE mientras que la segunda proporciona estabilidad y positividad incondicionales. Con el primer enfoque, la parte diferencial se discretiza mediante un esquema explícito y para la parte integral se emplea la regla del trapecio. En la segunda aproximación, para la parte diferencial se usa el esquema tipo Patankar y la parte integral se aproxima mediante la fórmula de tipo abierto con cuatro puntos. Posteriormente se estudia en cada caso la positividad, estabilidad y consistencia. Se incluyen varios ejemplos y simulaciones.

En el capítulo tercero, se propone un tratamiento unificado para una amplia clase de modelos de opciones en procesos de Lévy tales como CGMY, Meixner e hiperbólico generalizado. Primero se eliminan los términos de reacción y convección en la PIDE mediante un apropiado cambio de variables. Posteriormente la parte diferencial de la PIDE se aproxima por un esquema explícito mientras que para la parte integral se usa la fórmula de cuadratura de Laguerre-Gauss. Se analizan las propiedades de positividad, estabilidad y consistencia. Para el caso de opciones americanas, la parte diferencial del LCP se discretiza mediante una aproximación con tres niveles temporales, usando la cuadratura de Laguerre-Gauss para la integración numérica de la parte integral. Por último se implementan métodos iterativos de proyección y relajación sucesiva y la técnica de multimalla. Se muestran diversos ejemplos incluyendo el estudio de errores y el coste computacional.

Finalmente, el capítulo 4 está dedicado al modelo de Bates. Este modelo combina los enfoques de volatilidad estocástica y de difusión con saltos lo que lleva a una PIDE con un término con derivadas cruzadas. Teniendo en cuenta que la discretización de una derivada cruzada conlleva la existencia de términos con coeficientes negativos en el esquema que deterioran la calidad de la solución numérica, se propone una transformación de variables que elimina dicha derivada cruzada en la ecuación. La PIDE transformada se resuelve numéricamente y se muestra el análisis numérico. Por otra parte se estudia el LCP para opciones americanas en el modelo de Bates.