Departamento de Matemática Aplicada

DIFERENCIABILIDAD EN ESPACIOS DE BANACH

Julio Benítez López

Universidad Politécnica de Valencia

1998

A mis padres.

Contents

Quiero expresar mi agradecimiento a mis compañeros de la unidad docente del Departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S.I.T. de la Universidad Politécnica de Valencia por su constante apoyo moral; a mi familia por su comprensión y cariño; al Dr. Marian Fabian por sus valiosísimas sugerencias a la hora de desarrollar uno de los resultados más importantes del Capítulo 4; pero en especial al Dr. Vicente Montesinos Santalucía, que ha dirigido esta memoria. Su capacidad científica y su incomparable personalidad humana han quedado bien patentes para mí, a través de la relación sostenida durante varios años. Sin sus valiosísimas orientaciones y sugerencias, que indudablemente han sido definitivas en la elaboración de esta memoria, y su constante apoyo científico y humano, no habría sido posible la culminación de este trabajo.

0 Introducción y resumen de la memoria.

El estudio de la diferenciabilidad de las funciones definidas sobre espacios de dimensión infinita ha estado presente desde el principio de la construcción de la teoría de operadores a comienzos del siglo XX. Uno de los principales motivos fue dar condiciones similares a la anulación de la primera derivada de una función para la que se buscan extremos locales en el contexto más general del cálculo de variaciones.

Recordemos que el objetivo del cálculo de variaciones es encontrar condiciones sobre una función $y \equiv y(x)$ que deben ser satisfechas de modo que $F(y)$ sea un extremo y donde F es una expresión que involucra a y (y posiblemente a su derivada) que toma valores reales. Euler descubrió a finales del siglo XVIII una condición necesaria (recogida hoy en día las llamadas **ecuaciones de Euler-Lagrange**) para que una función y sea un extremo del funcional F, análoga a la condición de la anulación de la primera derivada de una función real. Posteriormente Lagrange derivó la misma fórmula usando variaciones.

Uno de los primeros esfuerzos importantes para elaborar una teoría abstracta de espacios de funciones y de funcionales fue realizado por Maurice Fréchet en su tesis doctoral de 1906, [26]. En lo que Fréchet llamó **cálculo funcional**, intentó unificar en términos abstractos las ideas contenidas en los trabajos de Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard y otros matemáticos del siglo XIX.

En su tesis, Fréchet introdujo los espacios métricos, a los cuales llamó **espacios** ϵ, y proporcionó las nociones de continuidad y diferenciabilidad que extienden las correspondientes a funciones reales en el marco de estos espacios generales. Merece la pena recordar su definición de diferencial, pues es el modelo de definiciones posteriores realizadas en situaciones más generales. Si $y \equiv y(x)$ es una función continua definida en $[a, b]$ con valores reales, Fréchet supone la existencia de un funcional lineal L tal que

$$F[y + \eta] - F[y] - L[\eta] = \epsilon M(\eta),$$

donde $\eta \equiv \eta(x)$ es una es una "variación sobre $y(x)$", $M(\eta)$ es el máximo del valor absoluto de η sobre $[a, b]$ y ϵ tiende a 0 cuando M tiende a 0; entonces L es, por definición, la **diferencial** de $F(y)$. Las formulaciones finales fueron dadas por Elizabeth le Stourgeon en 1920, [56]. Se dice que el funcional F tiene un **diferencial** en y_0 si existe un funcional lineal L tal que para todos los arcos $y_0 + \eta$ en un entorno de y_0, se verifica la relación

$$F(y_0 + \eta) - F(y_0) - L(\eta) = M(\eta)\epsilon(\eta),$$

donde $M(\eta)$ es el máximo del valor absoluto de η sobre el intervalo $[a, b]$ y $\epsilon(\eta)$ tiende a 0 cuando $M(\eta)$ tiende a 0. Es decir, en la terminología de los espacios de Banach, $F(y_0 + \eta) - F(y_0) - L(\eta) = \epsilon(\eta)\|\eta\|$, donde $\epsilon(\eta)$ tiende a 0 cuando η tiende a 0 ($\equiv \|\eta\|$ tiende a 0).

Posteriormente, en los años 20, Banach introdujo la noción de espacio normado completo, lo que Banach llamó espacio de tipo (B) y hoy en día se conoce como **espacio de Banach**, con el propósito de generalizar la teoría de las ecuaciones integrales. A partir de este momento se comienzan a estudiar las propiedades de la diferenciabilidad de las funciones convexas y más concretamente de la norma en el marco de estos espacios. Resultados iniciales en la teoría son, sólo por mencionar algunos, el Teorema de Mazur, [42], en 1933 sobre la diferenciabilidad "automática" de las funciones convexas en espacios separables, y la caracterización de Šmulyan, [53], en 1940, de la diferenciabilidad de la norma en términos del comportamiento de los funcionales soporte de la bola cerrada unidad del dual.

Comienza de este modo el estudio de ciertos comportamientos de la estructura de un espacio de Banach que son consecuencia de la existencia de una norma equivalente con ciertas propiedades. El pricipal atractivo de este tipo de resultados radica en la posibilidad de deducir propiedades topológicas a partir de la forma de su bola unidad. Como ejemplo podemos citar los clásicos teoremas de Milman-Pettis: *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*, y de Fan-Glicksberg: *Todo espacio de Banach dual con norma Fréchet diferenciable es reflexivo.*

En 1968, E. Asplund, [3], extendió el Teorema de Mazur estudiando una cierta clase de espacios de Banach (ahora llamados **espacios de Asplund**[1]) en los cuales es cierta una conclusión más fuerte (se reemplaza la Gâteaux diferenciabilidad por la Fréchet diferenciabilidad). El trabajo de Asplund abrió el camino a una intensa actividad investigadora que culminó produciendo, entre otros, resultados de caracterización alternativa de tales espacios, como los debidos en buena parte a C. Stegall, [55].

Paralelamente, se ha realizado un esfuerzo para encontrar condiciones geométricas suficientes para que un espacio sea de Asplund. El propio Asplund probó que *un espacio de Banach cuyo dual es estrictamente convexo es un espacio de Asplund*. Posteriormente, en 1976, I. Ekeland y G. Lebourg, [21], probaron que *todo espacio con norma Fréchet diferenciable es de Asplund*.

En la dirección contraria, durante años se conjeturó que todo espacio de Asplund admite una norma equivalente Fréchet diferenciable, conjetura errónea

[1]Un espacio de Asplund es un espacio de Banach tal que toda función convexa y continua definida en un abierto convexo es Fréchet diferenciable en un subconjunto denso del dominio de la función.

como ha demostrado R. Haydon, [35], encontrando un espacio $\mathcal{C}(K)$ de Asplund que ni siquiera tiene una norma Gâteaux diferenciable. A la vista de este ejemplo interesa encontrar condiciones geométricas que no necesariamente impliquen la Gâteaux diferenciabilidad de la norma para que el espacio sea de Asplund. En la búsqueda de propiedades de este tipo, se estudió la relación entre la diferenciabilidad de la norma y la "aplicación dualidad" de un espacio de Banach, cuya definición es la siguiente: Si x es un punto de un espacio de Banach X, se puede demostrar fácilmente por medio del Teorema de Hahn-Banach que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x\| = \|x^*\|$ y $\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2$. Este elemento x^* no es único en general (aunque si X^* es estrictamente convexo, como es el caso de los espacios de Hilbert o los espacios $\mathcal{L}^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$, entonces es único). De manera general se denota para cada $x \in X$:

$$J(x) := \{x^* \in X^* : \|x^*\| = \|x\|,\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2\}.$$

La aplicación multivaluada $x \mapsto J(x)$ se suele llamar la **aplicación dualidad** de X sobre X^*. La aplicación dualidad fue introducida por Beurling y Livingstone en 1962, [6].

Para estudiar las diferentes formas de continuidad de la aplicación dualidad se dispone de las nociones de **semicontinuidad inferior** o **superior** de una función conjunto valuada entre espacios topológicos. El estudio sistemático de este tipo de propiedades fue iniciado en 1964 por Cudia, [13]. En dicho artículo Cudia probó que si se exige la semicontinuidad inferior en $x \in X$, dotando a X^* de cualquiera de las topologías de la norma, w o

w^*, la aplicación dualidad es univaluada en x, es decir, la norma es Gâteaux diferenciable en x. Concretamente prueba que *la aplicación dualidad es semicontinua inferiormente en $x \in X$ para la topología w^* si y sólo si la norma es Gâteaux diferenciable en x* y también que *la aplicación dualidad es semicontinua inferiormente en $x \in X$ para la topología de la norma si y sólo si la norma es Fréchet diferenciable en x.*

La correspondiente formulación para el caso de la topología w, intermedia entre la w^* y la de la norma en el dual, introduce el concepto de punto **muy suave**, es decir, $x \in X$ es un punto muy suave si y sólo si la aplicación dualidad es semicontinua inferiormente en x para la topología w de X^*. Este tipo de continuidad fue estudiado por J. Diestel y B. Faires, [17], en 1974 (ver también [16]).

Si, de acuerdo con lo dicho anteriormente, se quiere evitar que la función de dualidad sea univaluada, no hay más remedio que substituir la noción de semicontinuidad inferior por otra noción más débil. La semicontinuidad superior ha sido poco estudiada. La razón de este desinterés se debe en, nuestra opininión, a tres razones fundamentales: No se conoce una caracterización mediante cocientes diferenciales, no es estable frente a sumas directas, y sobre todo, existe una noción parecida a la semicontinuidad superior que ha resultado ser la más adecuada a la hora de trabajar con la función dualidad, como veremos a lo largo de la memoria. Este último tipo de continuidad fue introducida por J. Giles, D. Gregory y B. Sims en un artículo en 1978,

[27]. Dicha continuidad se define como sigue: *Si x está en la esfera unidad de un espacio de Banach X y si τ denota cualquier topología del dual de X, la aplicación multivaluada $\Phi : X \to \mathcal{P}(X^*)$ es* **restringida τ-semicontinua superiormente** *si, para cada τ-entorno de 0, U, en X^* existe $\delta > 0$ tal que, $\Phi(B(x, \delta)) \subset \Phi(x) + U$.*

El caso particular en donde la aplicación dualidad es restringida $\|\cdot\|$-semicontinua superiormente fue estudiado en primer lugar por Gregory en 1980, [33], probando que la aplicación dualidad es restringida $\|\cdot\|$-semicontinua superiormente en $x \in X$ si y sólo si el límite

$$d^+\|\cdot\|_x(u) := \lim_{t \to 0+} \frac{\|x + tu\| - \|x\|}{t}$$

(que existe para todo $u \in X$) es uniforme para $\|u\| \leq 1$. Se dice también que la norma es **fuertemente subdiferenciable** en x. Esta nomenclatura fue introducida por Franchetti y Payá en [25].

Siguiendo con esta modificación de la semicontinuidad superior, y considerando en el dual de X la topología w, se obtiene otro tipo de continuidad de la aplicación dualidad, a saber, la restringida w-semicontinua superiormente, ya estudiada por Giles, Gregory y Sims en [27], en donde prueban diversas caracterizaciones de esta forma de continuidad. Siguiendo a Contreras y Payá, [12], diremos que la norma es **bastante suave** en un punto x del espacio de Banach X si la aplicación dualidad es restringida w-semicontinua superiormente en dicho punto.

La aplicación dualidad es un caso particular de una clase de operadores asociados a funciones convexas. Si f es una función convexa y continua definida en un abierto D no vacío de un espacio de Banach X, la **subdiferencial** de f en x es el siguiente subconjunto de X^*:

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) \; \forall \; y \in X\}.$$

De esta manera se establece una aplicación $\partial f : D \to \mathcal{P}(X^*)$. La continuidad de esta aplicación multivaluada está muy relacionada con la diferenciabilidad de la función dada, como veremos en esta memoria.

Por otra parte, la existencia de funciones **bump** (i.e. funciones cuyo soporte es acotado y no vacío) definidas en un espacio de Banach X cumpliendo propiedades de diferenciabilidad, tiene un fuerte impacto en la estructura de X (véase, por ejemplo, [2] o [15]). Baste recordar el siguiente resultado, debido a Leach y Whitfield, [41]: *Si X admite un bump Fréchet diferenciable, entonces X es un espacio de Asplund.* Obsérvese que de este resultado se sigue en particular que si X posee una norma Fréchet diferenciable, entonces X es de Asplund, ya que es muy fácil demostrar ([15], pág. 10) que a partir de una norma Fréchet diferenciable se puede construir un bump Fréchet diferenciable.

Pasamos a comentar brevemente la memoria: Nuestro principal objetivo es el estudio de las diferentes formas de diferenciabilidad de funciones convexas en un espacio de Banach, y más concretamente la norma. Por otra parte dedicamos atención al impacto que tienen estos diferentes tipos de diferenciabilidad sobre la estructura topológica de los espacios de Banach, en especial dedicamos atención a los espacios de Asplund. A continuación pasamos a exponer de manera sucinta los contenidos de cada capítulo.

El primer capítulo está dedicado a estudiar las diferentes formas de diferenciabilidad de las funciones convexas. El contenido de la primera sección versa sobre los fundamentos de la teoría de la diferenciabilidad de funciones convexas en espacios de Banach y la mayor parte es bien conocida desde hace bastante tiempo. Damos, en particular, una descripción cuantitativa del diámetro de $\partial f(x)$ en términos de $d^+ f_x$:

> Sea f una función convexa definida en un abierto convexo de X y x un punto de dicho abierto. Entonces el diámetro de $\partial f(x)$ es el supremo de $d^+ f_x(y) + d^+ f_x(-y)$ cuando y recorre S_X.

Obsérvese que este enunciado generaliza de manera natural el hecho de que una función convexa es Gâteaux diferenciable en un punto si y sólo si la subdiferencial de la función en dicho punto consta de un sólo elemento.

La aplicación multivaluada subdiferencial es uno de los ejemplos más importantes de operadores monótonos, y más en concreto de los operadores monótonos maximales, como indica el Teorema de maximalidad de Rockafellar. Nosotros haremos uso de este Teorema de maximalidad para presentar una caracterización de los funcionales soporte del epigrafo de una función convexa:

Si f es una función continua y convexa definida en un abierto convexo no vacío y x pertenece a dicho abierto, entonces los funcionales soporte de epi(f) en $(x, f(x))$ son los múltiplos positivos de los funcionales lineales $\phi \in (X \times \mathbb{R})^*$ de la forma

$$\phi(y, \lambda) = \langle y, x^* \rangle - \lambda, \qquad x^* \in \partial f(x).$$

A continuación, se estudia la continuidad de la aplicación subdiferencial en el sentido clásico topológico de la semicontinuidad inferior. Generalizando un resultado sobre la norma debido a Cudia, establecemos lo siguiente:

Sea f una función continua y convexa definida en un abierto convexo D no vacío y $x \in D$. Entonces:

1. f es Gâteaux diferenciable en x si y solamente si ∂f es inferiormente w^*-semicontinua en x.
2. f es Fréchet diferenciable en x si y solamente si ∂f es inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinua en x.

Después pasamos a estudiar la continuidad, no en el sentido clásico de la semicontinuidad superior, sino de la semicontinuidad superior restrigida. Consideraremos las funciones fuertemente subdiferenciables y las bastante suaves, estudiadas como hemos visto por diferentes autores. Generalizamos resultados ya conocidos mediante un sólo teorema que puede considerarse como el análogo del Test de Šmulyan:

Si f es una función convexa y continua definida en un abierto D no vacío de X, $x \in D$ y si τ es alguna de las topologías siguientes de X^*: la de la norma, la w o la w^*. Entonces, si $\partial_\epsilon f$ denota la ϵ-subdiferencial de f, ∂f es restringida τ-semicontinua superiormente en x si y sólamente si para todo N, τ-entorno de 0, en X^*, existe $\epsilon > 0$ tal que $\partial_\epsilon f(x) \subset \partial f(x) + N$.

En el resto del capítulo se estudia la relación que hay entre la **conjugada de Fenchel**, la diferenciabilidad y la "rotundidad" del grafo de las funciones convexas. La conjugación de Fenchel, que fue introducida en [24] para espacios de dimensión finita, ha encontrado una amplia aplicación en la teoría de los espacios de Banach, (véase, entre otros a [2], [43] o [47]).

El concepto geométrico de normas **uniformemente localmente rotundas** y otros relacionados han sido muy estudiados, (recuérdese el Teorema de Milman-Pettis). Estos conceptos, de manera muy intuitiva, están relacionados con la "redondez" de la bola unidad. Nosotros, usando la conjugada de Fenchel, relacionamos la diferenciabilidad de una función convexa con la "rotundidad" de su grafo. De hecho, generalizamos el siguiente hecho conocido: *Si la norma dual es localmente uniformemente rotunda, entonces la norma es Fréchet diferenciable.* Dicha generalización es la siguiente:

Sea τ alguna de las siguientes topologías de X^*, la de la norma, la w o la w^*, f una función convexa y continua definida en un abierto D de X, y $x \in D$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es Gâteaux diferenciable en x y ∂f es restringida superior-

mente τ-semicontinua en x.

2. Para todo N, τ-entorno de 0 en X^*, y $x^* \in \partial f(x)$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\left.\begin{array}{c} y^* \in \mathrm{dom}(f) \\ f(x_0) + \frac{f^*(x^*)+f^*(y^*)}{2} - \delta < \left\langle x, \frac{x^*+y^*}{2} \right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow y^* \in x^* + N.$$

Es bien conocido que si X posee una norma localmente uniformemente rotunda, entonces en S_X las topologías de la norma y la w coinciden (dicha propiedad se conoce como de **Kadec-Klee**). De nuevo haremos uso de la conjugada de Fenchel para generalizar el anterior resultado de la siguiente manera:

Sea f una función continua y convexa definida en un abierto convexo no vacío D, $x_0 \in D$, $x_0^* \in \partial f(x_0)$ y τ alguna de las siguientes topologías de X^{**}: la de la norma, la w o la w^*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f^* es Gâteaux diferenciable en x_0^* y ∂f^* es restringida τ-semicontinua superiormente en x_0^*.

2. Para todo U, τ-entorno de 0 en X^{**}, $x \in \partial f^*(x_0^*)$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\left.\begin{array}{c} y \in \mathrm{dom}(f) \\ \langle \frac{y+x}{2}, x_0^* \rangle > \frac{f(x)+f(y)}{2} + f^*(x_0^*) - \delta \end{array}\right\} \Rightarrow y \in x + U.$$

3. Si (x_d^{**}) es cualquier red contenida en $\mathrm{dom}(f^{**})$ cumpliendo $\langle x_d^{**}, x_0^* \rangle - f^{**}(x_d^{**}) \to f^*(x_0^*)$, entonces $x_d^{**} \to x_0$ en la topología τ.

En el segundo capítulo se estudian las funciones bastante suaves. En el artículo ya citado de Giles, Gregory y Sims, [27], se prueba una caracterización de las normas bastantes suaves. Siguiendo esta línea de trabajo se presenta una generalización de este resultado. En concreto se prueba que

> Si f es una función continua convexa definida en un abierto convexo y si x es un punto de dicho abierto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes entre sí:
>
> 1. $\partial f(x)$ es $\sigma(X^{***}, X^{**})$-denso en $\partial f^{**}(x)$.
> 2. $d^+ f_x^{**} = \sup\{\langle \cdot, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\}$.
> 3. Dados $\epsilon > 0$, $u^{**} \in S_{X^{**}}$, existe $\delta > 0$ tal que
>
> $$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f^{**}(x)}{t} - \sup\{\langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\} < \epsilon,$$
>
> para todo $0 < t < \delta$.
>
> 4. f es bastante suave en x.

Para la demostración de este resultado se necesitarán varios lemas, que son una generalización del Teorema de Goldstine al caso de las funciones convexas e inferiormente semicontinuas:

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa e inferiormente semicontinua. Entonces

1. Si $x^{**} \in \overline{\mathrm{dom}(f)}^{w^*}$,
$$f^{**}(x^{**}) = \inf\{\liminf_i f(x_i) : (x_i) \subset \mathrm{dom}(f), x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}\}.$$
2. $\overline{\mathrm{epi}(f^{**})}^{w^*} = \mathrm{epi}(f^{**})$.

Siguiendo el camino iniciado con el resultado de Ekeland y Lebourg ya citado, (*todo espacio de Banach con norma Fréchet diferenciable es un espacio de Asplund*) se han publicado numerosos resultados. Diestel y Faires, [17], probaron que todo espacio con norma muy suave es de Asplund. Este resultado fue mejorado en dos direcciones por Giles, Gregory y Sims, [27], en donde probaron que un espacio de Banach con norma bastante suave y tal que para todo x de la esfera unidad, $\partial\|\cdot\|(x)$ es, o bien w-compacto, o bien tiene diámetro menor que una constante $k < 1$, es un espacio de Asplund. La primera de estas afirmaciones fue mejorada por Zhibao Hu y Bor-Luh Lin, [37]: *Si la función dualidad es superiormente w-semicontinua, entonces el espacio es Asplund.* Godefroy, en [30], estableció una mejora independiente del resultado de Ekeland y Lebourg, probando que todo espacio de Banach con norma fuertemente subdiferenciable es de Asplund. Posteriormente Contreras y Payá, [12], establecieron un resultado que engloba a los anteriores estableciendo que todo espacio con norma bastante suave es de Asplund. Finalmente Giles y Moors probaron un resultado similar bajo una condición formalmente más débil, a saber, si en un espacio de Banach

X existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*)$ bastante suave y cuya gráfica está contenida en la gráfica de $\partial\|\cdot\|$, entonces X es de Asplund, [28].

En otra dirección, diferentes cuestiones relativas a subespacios normantes del dual de un espacio de Banach X están muy relacionadas con la diferenciabilidad de la norma en X: Se puede comprobar fácilmente que *si X tiene una norma bastante suave y la norma es Gâteaux diferenciable en x, entonces $d\|\cdot\|_x$ pertenece a todos los subespacios normantes de X^**, lo que permitió probar a Contreras y Payá que *el dual de un espacio de Banach bastante suave no contiene subespacios propios normantes*. Siguiendo esta línea establecemos:

> Sea X un espacio de Banach en donde existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*)$ bastante suave y su gráfica está contenida en la de $\partial\|\cdot\|$. Entonces X^* no tiene subespacios propios normantes.

La demostración del anterior resultado en el caso separable utiliza un lema de Contreras y Payá, [12], el cual es una ligera mejora de un lema anterior de Godefroy, utilizado en [30], para demostrar que todo espacio de Banach con norma fuertemente subdiferenciable es de Asplund. La herramienta principal utilizada en dichos lemas es una importante desigualdad descubierta por S. Simons, [49]. Para demostrar el caso general se utiliza la llamada "topología de la bola" estudiada por Kalton y Godefroy en [31]. Usando estos resultados proporcionamos una consecuencia de carácter geométrico:

> Si existe $\Phi : X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave y cuya gráfica está

> contenida en la de $\partial\|\cdot\|$ entonces cualquier subconjunto acotado y w-cerrado de X es intersección de uniones finitas de bolas.

El estudio de propiedades geométricas (y en particular la diferenciabilidad de la norma) que implican reflexividad tiene una larga tradición, en particular se ha tratado de caracterizar los espacios reflexivos teniendo en cuenta la diferenciabilidad de la norma. G. Fan e I. Glicksberg, en 1958, probaron que *todo espacio dual con norma Fréchet diferenciable es reflexivo*, [23]. Recientemente, Aparicio, Ocaña, Payá y Rodríguez probaron en [1] que *todo espacio dual con norma fuertemente subdiferenciable es reflexivo.* Godefroy demostró en [30] que la hipótesis de ser un espacio dual se puede debilitar: basta que el espacio cumpla la llamada **propiedad de la intersección finita-infinita**. Contreras y Payá utilizaron dicha propiedad para caracterizar los espacios reflexivos: *Un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si su norma es bastante suave y satisface la propiedad de la intersección finita-infinita.* Nosotros extendemos dicho resultado para proporcionar, entre otras, la siguiente caracterización de la reflexividad:

> Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
>
> 1. X es reflexivo.
> 2. X posee la propiedad de la intersección finita-infinita y existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*)$ bastante suave cuya gráfica está contenida en la de $\partial\|\cdot\|$.
> 3. Para toda norma equivalente de X, $\|\cdot\|$, existe $\Phi : S_X \to$

$\mathcal{P}(X^*)$ bastante suave cuya gráfica está contenida en la de $\partial\|\cdot\|$.

Es evidente, a partir de la caracterización anterior, que si X posee la propiedad de la intersección finita-infinita, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i) X es reflexivo. (ii) X posee una norma equivalente bastante suave. (iii) X posee una norma equivalente y existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*)$ bastante suave cuya gráfica está contenida en la de $\partial\|\cdot\|$. Este comentario responde muy parcialmente a un problema que aparece implícitamente en el artículo ya citado de Giles y Moors: *¿Existe un espacio X que no posea una norma equivalente bastante suave y, sin embargo, podamos definir en él $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*)$ bastante suave y que su gráfica esté contenida en la de $\partial\|\cdot\|$?* Es claro que si tal espacio existe, éste no debe poseer la propiedad de la intersección finita-infinita.

El ya citado resultado de Ekeland y Lebourg en su forma original decía que las *funciones convexas y continuas definidas en abiertos convexos no vacíos de X son Fréchet diferenciables en los puntos de subconjuntos densos de dichos abiertos cuando X admite un bump Fréchet diferenciable.* Queda claro que la existencia de bumps diferenciables en un espacio implica determinanadas propiedades de éste. Por otra parte, Haydon, ha encontrado un ejemplo de un espacio de Banach en el cual existe un bump Lipschitz y Fréchet diferenciable, y, sin embargo, no existe en dicho espacio una norma Gâteaux diferenciable, [35], [36]. Interesa, por tanto, encontrar condiciones más débiles que la existencia de bumps Fréchet diferenciables para intentar caracterizar los espacios de Asplund.

En otra dirección, que posteriormente se vio que coincidía con la anterior, Leach y Whitfield, [41], enunciaron el siguiente teorema: *Si existe una norma equivalente áspera, entonces no puede existir un bump Fréchet diferenciable.* Originalmente este tipo de normas fueron llamadas **uniformemente discontinuas diferenciables** por Leach y Whitfield. Demostramos que este tipo de normas coincide con las normas ásperas según la definición de Deville, Godefroy y Zizler, [15]. En concreto demostramos que si X es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ y $x \in S_X$, existen $x_1, x_2 \in B(x, \delta)$, $u \in S_X$ cumpliendo $|d^+\|\cdot\|_{x_1}(u) - d^+\|\cdot\|_{x_2}(u)| > \epsilon$.
2. $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall x \in S_X$, $\displaystyle\limsup_{\|u\|\to 0} \frac{\|x+u\| + \|x-u\| - 2}{\|u\|} > \epsilon$.

Posteriormente se demostró que un espacio de Banach no era de Asplund si y solamente si admite una norma áspera, por lo que los resultados de Ekeland y Lebourg, y de Leach y Whitfield son equivalentes.

Como ya se ha comentado, interesa encontrar condiciones más débiles que la existencia de bumps Fréchet diferenciables. Usando el llamado *Pricipio Variacional de Ekeland* demostramos el siguiente resultado que cuantifica el "grado" de "aspereza" de una norma en relación con la existencia de un bump que también posea un cierto "grado" de "aspereza".

Sea C un cerrado acotado de un espacio de Banach X. Si existe $f : C \to \mathbb{R}$ continua y acotada inferiormente cumpliendo:

1. Existe $\delta \geq 0$ tal que $\forall\ x \in \operatorname{int}(C)$,
$$\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} \leq \delta.$$
2. Existe $x_0 \in \operatorname{int}(C)$ cumpliendo $f(x_0) < \inf_{\partial C} f$.
3. f está acotada inferiormente.

Entonces X no puede tener una norma ϵ-áspera para $\epsilon > \gamma\delta/\alpha$, siendo $\alpha = \inf_{\partial C} f - f(x_0)$, $\gamma = \sup\{\|x_0 - x\| : x \in C\}$.

Obsérvese que este resultado implica en particular que si existe un bump Fréchet diferenciable sobre X, entonces X es Asplund.

En el siguiente capítulo se estudian versiones más restrictivas de diferenciabilidad que las ya vistas anteriormente. El principal objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente resultado:

Si X es un espacio separable, entonces toda función f convexa y Lipschitz definida en $A + \delta B_X$ (A es un abierto convexo no vacío de X y $\delta > 0$) es límite en A de funciones $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ convexas, Lipschitz y uniformemente Gâteaux diferenciables, siendo esta convergencia uniforme sobre los compactos de A. Además si f es $\mathcal{C}^n$-suave, entonces las funciones f_ϵ son también $\mathcal{C}^n$-suaves.

Hemos de destacar que la demostración de este resultado se basa en una construcción ideada por Fabian y Zizler, [22], en donde estos autores usaron una especie de producto de convolución para demostrar que *en todo espacio separable que admite una norma $\mathcal{C}^n$-suave se puede construir una norma equivalente al mismo tiempo $\mathcal{C}^n$-suave y uniformemente Gâteaux diferenciable.*

Como hemos visto, un gran número de caracterizaciones de los espacios de Asplund han sido hechas desde su introducción en [3]. Se conjeturó que un espacio de Banach era de Asplund si y solamente si no contiene una copia de ℓ_1, una conjetura que resultó falsa, como demostró James. Por supuesto, si un espacio de Banach contiene una copia de ℓ_1 no puede ser de Asplund. La clase de los espacios separables con dual no separable y los espacios separables que contienen una copia de ℓ_1 pueden ser caracterizadas mediante la forma en que se sumerge un conjunto ternario de Cantor en la bola unidad dual dotada de la topología w^*, esencialmente por los resultados de Stegall, [55], sistematizada y completada por Bator, [4]. En esta memoria haremos uso de una generalización de un lema de Stegall para establecer una extensión de uno de los resultados de E. Bator:

> Sea X un espacio de Banach separable e Y un subespacio cerrado cumpliendo que $(X/Y)^*$ es separable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
>
> 1. Para todo $\epsilon > 0$, existen $\Delta \subset S_{X^*}$, $w*$-homeomorfo al ternario de Cantor, $(y_{n,i})_{n=0}^{\infty}{}_{i=1}^{2^n} \subset (1+\epsilon)B_Y$ tales que
>
> $$|\langle y_{n,i}, x^* \rangle - \chi_{C_{n,i}}(x^*)| < \frac{\epsilon}{2^n}, \qquad \forall\, x^* \in \Delta,$$

donde,

$$\Delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{2^n} C_{n,i},$$

y cada $C_{n,i}$ es w^*-homeomorfos a los intervalos diádicos del conjunto ternario de Cantor.

2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\Delta \subset S_{X^*}$, w^*-homeomorfo al ternario de Cantor, tal que, dado x^* existe $y^{**} \in (1+\epsilon)B_{Y^{**}}$ cumpliendo

$$\langle y^{**}, z^* \rangle = \begin{cases} 1 & z^* = x^* \\ 0 & z^* \neq x^* \end{cases}, \qquad \forall\, z \in \Delta.$$

3. Existe un subconjunto de S_{X^*}, w^* homeomorfo al ternario de Cantor, que es $\sigma(X^*, Y^{**})$-discreto.

4. X^* no es separable.

Nos gustaría destacar que la generalización del lema de Stegall permite proporcionar una prueba original del hecho conocido que *la propiedad de ser un espacio de Asplund es de tres espacios*; es decir, si Y es un subespacio cerrado del espacio de Banach X tales que tanto Y como X/Y son espacios de Asplund, entonces X es un espacio de Asplund (véase [15] para encontrar otra prueba).

Por otra parte E. Saab y P. Saab proporcionaron en [48] una caracterización de los espacios de Banach que contienen una copia de ℓ_1 usando el concepto de **oscilación**. En último lugar presentamos una caracterización de los espacios de Asplund separables mediante el estudio de la oscilación de elementos del bidual, utilizando para ello los resultados previos de este capítulo. Concretamente probamos que:

> Sea X es un espacio de Banach separable. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
>
> 1. X es un espacio de Asplund.
> 2. Para cada $\delta > 0$ existe un subconjunto K de B_{X^*}, w^*-compacto, cumpliendo que, para todo U abierto relativo a (K, w^*), existe $x^{**} \in (1+\delta)B_{X^{**}}$, cumpliendo $\operatorname{osc}(x^{**}, U) = 1$.

Se ha adoptado en toda la memoria el punto de vista de proporcionar las demostraciones de los resultados que no aparecen en la literatura ya existente, así como de las pruebas alternativas a hechos conocidos.

Por último no queremos dejar pasar la ocasión de agradecer al Dr. M. Fabian las valiosas ayudas que han posibilitado, como ya se ha comentado, la elaboración de parte de esta memoria, en concreto los resultados más importantes del capítulo cuarto.

1 Diferentes formas de diferenciabilidad.

En lo que sigue recordaremos las definiciones de las dos formas clásicas de diferenciabilidad en espacios de Banach: La Gâteaux diferenciabilidad y la Fréchet diferenciabilidad; también estudiaremos la aplicación subdiferencial y sus propiedades más esenciales. En la segunda sección analizaremos la propiedad de la monotonía maximal de la subdiferencial, y proporcionaremos una relación entre la subdiferencial y el epigrafo de una función convexa. Asimismo discutiremos varias formas de continuidad de la subdiferencial y la relación con la derivabilidad ampliando unos resultados debidos a Cudia, [13]. En la última sección caracterizaremos, en términos de la conjugada de Fenchel, las diferentes formas de diferenciabilidad de una función convexa, ampliando unos resultados clásicos de normas localmente uniformemente rotundas y que poseen la propiedad de Kadec-Klee.

1.1 Conceptos y resultados básicos.

Antes de comenzar estableceremos una notación estándar que usaremos en toda la memoria. Los espacios de Banach que aparecen en ella son espacios de Banach definidos sobre el cuerpo de los números reales. Las normas de un espacio de Banach serán denotadas por $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, etc. Las letras mayúsculas X, Y, Z, ... denotarán, siempre que no haya confusión, espacios de Banach. Denotaremos por B_X la bola unidad cerrada de X, esto es $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. La esfera unidad S_X es $\{x \in X : \|x\| = 1\}$. Una función **bump** en X es una función real definida en X con soporte acotado no vacío.

1.1 DEFINICIÓN. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, donde D es un abierto no vacío del espacio de Banach X y sea $x_0 \in D$. Se dice que*

1. *f es* **Gâteaux diferenciable** *en x_0 si*

$$df_{x_0}(u) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tu) - f(x_0)}{t}$$

existe para todo $u \in B_X$ y si, al mismo tiempo, $df_{x_0} \in X^*$. El funcional lineal df_{x_0} se llama **la diferencial Gâteaux** *de f en x_0.*

2. *f es* **Fréchet diferenciable** *en x_0 si*

$$f'(x_0)(u) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tu) - f(x_0)}{t}$$

existe para todo $u \in B_X$, es uniforme para $u \in B_X$ y si, al mismo tiempo, $f'(x_0) \in X^*$. El funcional lineal $f'(x_0)$ se llama **la diferencial**

Fréchet *de f en x_0*[1].

3. *Si el límite*

$$d^+f_{x_0}(u) := \lim_{t\to 0+} \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}, \qquad u \in B_X$$

existe, dicho límite se llama **derivada direccional de f por la derecha en la dirección** u.

Las funciones convexas, y en particular la norma, tienen unas propiedades adicionales que hacen que su estudio merezca especial atención. La siguiente proposición, cuya demostración es de caracter elemental (ver, por ejemplo, [45]), caracteriza la Gâteaux diferenciabilidad de las funciones convexas.

1.2 PROPOSICIÓN. *Sea f una función convexa definida en un abierto convexo no vacío D del espacio de Banach X y sea $x_0 \in D$. Entonces*

1. *existe $d^+f_{x_0}(u)$ para todo $u \in B_X$ y es un funcional sublineal.*
2. *f es Gâteaux diferenciable en x_0 si y sólo si $-d^+f_{x_0}(-u) = d^+f_{x_0}(u)$ para todo $u \in X$ y también si y sólo si existe un único funcional lineal $x^* \in X^*$ satisfaciendo*

$$\langle x - x_0, x^* \rangle \leq f(x) - f(x_0), \qquad \forall x \in D. \tag{1.1}$$

Los funcionales lineales x^* que satisfacen (1.1) juegan un papel importante en el estudio de las funciones convexas.

[1] La razón de utilizar una expresión distinta para el mismo límite se debe a razones históricas. Cuando utilicemos $f'(x_0)$ en lugar de df_{x_0} estaremos suponiendo que f es Fréchet diferenciable en el punto x_0.

1.3 DEFINICIÓN. *Si f es una función convexa definida en un abierto convexo no vacío D de un espacio de Banach X y $x \in D$, la* **subdiferencial** *de f en x es el conjunto $\partial f(x)$ de todos los $x^* \in X^*$ que verifican*

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x), \qquad \forall y \in D.$$

La siguiente proposición puede demostrarse (ver [45]) utilizando el Teorema de Hahn-Banach y el Teorema de Alaoglu-Bourbaki.

1.4 PROPOSICIÓN *Si la función convexa f definida en un abierto convexo no vacío D del espacio de Banach X es continua en $x_0 \in D$, entonces $\partial f(x_0)$ es un subconjunto no vacío, convexo y w^*-compacto de X^*. Además, la aplicación $x \mapsto \partial f(x)$ está localmente acotada en x_0, esto es, existen $M > 0$ y un entorno U de x_0 en D tales que $\|x^*\| \leq M$, $\forall\ x \in U$, $x^* \in \partial f(x_0)$.*

Notemos que una función continua convexa es Gâteaux diferenciable en x si y sólo si $\partial f(x)$ consta de un sólo elemento. Por tanto, si f no es Gâteaux diferenciable en x, $\operatorname{diam}(\partial f(x)) \neq 0$. La siguiente proposición muestra la relación entre $\operatorname{diam}(\partial f(x))$ y la aplicación $y \mapsto d^+ f_x(y) + d^+ f_x(-y)$. Para ello necesitamos el siguiente resultado simple pero a la vez útil (ver [45]):

1.5 PROPOSICIÓN. *Si f es convexa en D, abierto no vacío de X, y continua en $x \in D$, entonces para todo $y \in X$,*

$$d^+ f_x(y) = \sup\{\langle y, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\}.$$

y este supremo se alcanza en algún punto $x^* \in \partial f(x)$.

1.6 PROPOSICIÓN. *Si f es una función convexa definida en D, subconjunto abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X, y si es continua en un cierto punto $x \in D$, entonces*

$$\mathrm{diam}\,(\partial f(x)) = \sup\{d^+ f_x(y) + d^+ f_x(-y) : y \in S_X\}.$$

Demostración: En primer lugar veamos un hecho elemental: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, sea $F : A \times B \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que F esté acotada superiormente en $A \times B$. Entonces

$$\exists \sup_{x\in A} \sup_{y\in B} f(x,y) \equiv S_1, \qquad \exists \sup_{y\in B} \sup_{x\in A} f(x,y) \equiv S_2$$

y ambos valores coinciden: Fijado $x \in A$, la función $y \mapsto f(x, y)$ definida en B está acotada superiormente. Entonces está bien definido $\sup_{y\in B} f(x, y)$, $\forall\, x \in A$. Además, si $f(x, y) \le M$, $\forall\, x \in A$, $y \in B$, se tiene $\sup_{y\in B} f(x, y) \le M$. Por tanto existe $\sup_{x\in A} \sup_{y\in B} f(x, y) \le M$. Análogamente existe $\sup_{y\in B} \sup_{x\in A} f(x, y) \le M$. Fijamos ahora $x \in A$. Como $\sup_{y\in B} f(x, y) \le S_1$, entonces, dado $y \in B$, $f(x, y) \le S_1$. Por tanto $\sup_{x\in A} f(x, y) \le S_1$, luego $\sup_{y\in B} \sup_{x\in A} f(x, y) \le S_1$. Obtenemos $S_2 \le S_1$. Invirtiendo los papeles de A y B, obtenemos $S_1 \le S_2$.

Se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathrm{diam}\,(\partial f(x)) = \sup\{\|x^* - y^*\| : x^*, y^* \in \partial f(x)\} = \\
&\quad = \sup\{\sup\{\langle z, x^* - y^*\rangle : z \in S_X\} : x^*, y^* \in \partial f(x)\} = \\
&\quad = \sup_{z\in S_X} \sup_{x^*,y^*\in\partial f(x)} \langle z, x^* - y^*\rangle = \sup_{z\in S_X} \sup_{x^*,y^*\in\partial f(x)} \langle z, x^*\rangle - \langle z, y^*\rangle =
\end{aligned}$$

$$= \sup_{z\in S_X}\{\sup_{x^*\in\partial f(x)}\langle z, x^*\rangle + \sup_{y^*\in\partial f(x)}\langle -z, y^*\rangle\} =$$

$$= \sup_{z\in S_X}\{d^+f_x(z) + d^+f_x(-z)\}.$$

■

Como una consecuencia inmediata se tiene que, para una función f convexa definida en un conjunto D, abierto convexo y no vacío de un espacio de Banach, y continua en el punto $x \in D$ (ya que $d^+f_x(-y) = -d^-f_x(y)$, $\forall y \in X$), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es Gâteaux diferenciable en x.
2. $\partial f(x)$ consta de un sólo elemento.
3. $\operatorname{diam}\partial f(x) = 0$.
4. $d^+f_x(y) = d^-f_x(y),\ \forall\ y \in S_X$.

Las funciones convexas en la recta real poseen muchos puntos de diferenciabilidad, más concretamente, *si f es una función convexa definida en un intervalo abierto no vacío D de* $\mathbb{R}$, *entonces $f'(x)$ (o df_x, ya que en espacios de dimensión finita la Gâteaux diferenciabilidad coincide con la Fréchet diferenciabilidad) existe para todo punto de $D \setminus N$, donde N es un subconjunto numerable de D.* El siguiente teorema se debe a Mazur, [42], y generaliza el resultado anterior.

1.7 Teorema (Mazur). *Si X es un espacio de Banach separable y f es una función convexa continua definida en un abierto convexo no vacío D de X, entonces el conjunto de puntos donde f es Gâteaux diferenciable es un subconjunto G_δ denso de D.*

Para una demostración sencilla se puede consultar [45].

Si particularizamos la definición 1.3 al caso $f = \|\cdot\|$ obtenemos la llamada **función dualidad** de X. En este caso se puede probar sin ninguna dificultad que para $x \in S_X$ se tiene

$$\begin{aligned}\partial\|\cdot\|(x) &= \{x^* \in S_{X^*} : \langle x, x^*\rangle = 1\} = \\ &= \{x^* \in X^* : \langle x, x^*\rangle = 1,\ \langle y, x^*\rangle \leq 1\ \forall\ y \in B_X\},\end{aligned}$$

lo cual significa, desde el punto de vista geométrico, que el hiperplano de ecuación $\langle \cdot, x^*\rangle = 1$; $x^* \in \partial\|\cdot\|(x)$, pasa por el punto x y deja la bola unidad a un lado. O, equivalentemente, manejando el espacio dual, que todos los elementos de $\partial\|\cdot\|(x)$ forman la cara de B_{X^*} determinada por el hiperplano de ecuación $\langle x, \cdot\rangle = 1$.

1.2 La subdiferencial como operador monótono.

Una propiedad que se deduce fácilmente de la definición de la subdiferencial de una función convexa es la siguiente: *Si f es una función continua convexa definida en el abierto convexo no vacío D, entonces*

$$\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0, \qquad \forall x, y \in D,\ x^* \in \partial f(x),\ y^* \in \partial f(y).$$

Las aplicaciones multivaluadas que cumplen esta condición son muy importantes y han sido extensamente estudiadas desde los años sesenta por numerosos matemáticos en conexión con el análisis no lineal (véase, por ejemplo, [10]).

Las siguientes definiciones son clásicas y pueden encontrarse, por ejemplo, en [45]:

1.8 DEFINICIÓN. *Una aplicación multivaluada* $\Phi : A \to \mathcal{P}(X^*)$, *donde* A *es un subconjunto de un espacio de Banach* X, *se dice que es un* **operador monótono** *si*

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \qquad \forall x, y \in A,\ x^* \in \Phi(x),\ y^* \in \Phi(y).$$

Estudiamos a continuación algunas propiedades adicionales que distinguen a las subdiferenciales dentro de la clase de los operadores monótonos.

1.9 DEFINICIÓN. *Un subconjunto* G *de* $X \times X^*$ *es* **monótono** *si*

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

siempre que $(x, x^*), (y, y^*) \in G$. *Si* $\Phi : A \to \mathcal{P}(X^*)$ *es un operador monótono, entonces su grafo*

$$G(\Phi) = \{(x, x^*) : x \in A, x^* \in \Phi(x)\}$$

es un subconjunto monótono.

Un subconjunto monótono se dice **maximal monótono** *si es maximal en la familia de subconjuntos monótonos de* $X \times X^*$ *ordenada por inclusión.*

Decimos que un operador monótono es **maximal monótono** *si su grafo es un subconjunto maximal monótono.*

Es fácil ver, a partir de la definición, que un operador monótono $\Phi : A \to \mathcal{P}(X^*)$ es maximal monótono si y sólo si la siguiente condición es cierta: Dados cualesquiera $y \in X, y^* \in X^*$ tales que

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in X,\ x^* \in \Phi(x),$$

entonces se sigue necesariamente que $y^* \in \Phi(y)$.

El siguiente teorema se debe a G. Minty. Un resultado mucho más general, substituyendo la continuidad por la semicontinuidad inferior es debido a R. T. Rockafellar [46].

1.10 TEOREMA. *Si f es una función convexa y continua en un subconjunto abierto y convexo no vacío D de un espacio de Banach X, entonces la aplicación subdiferencial $\partial f : D \to \mathcal{P}(X^*)$ es maximal monótona.*

Una demostración puede encontrase, por ejemplo, en [45]. También en este libro se demuestra el Teorema de maximalidad de Rockafellar, en donde, para este fin, se utiliza un teorema de Borwein, [8], que resulta extremadamente útil en este contexto y tiene una larga lista de corolarios, entre los cuales están el Teorema de Brønsdted-Rockafellar y el Teorema de Bishop-Phelps. Una prueba alternativa de carácter geométrico del teorema de maximalidad de Rockafellar ha sido dada recientemente por S. Simons ([50], [51] y [52]). Debido a que lo utilizaremos posteriormente, enunciaremos el Teorema de

Brønsdted-Rockafellar en una forma más restrictiva que la original, donde se substituye la semicontinuidad inferior por la continuidad. En este teorema se utiliza el siguiente concepto, que también se puede definir para funciones inferiormente semicontinuas:

1.11 Definición. *Sea f una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío D de un espacio de Banach X y sea $x \in D$. Para cualquier $\epsilon > 0$, se define la* **ϵ-subdiferencial** *$\partial_\epsilon f(x)$ como*

$$\partial_\epsilon f(x) := \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) + \epsilon, \ \forall y \in D\}.$$

Es claro que si $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, entonces $\partial_{\epsilon_1} f(x) \subset \partial_{\epsilon_2} f(x)$. Además, se puede demostrar, [45], que, bajo las condiciones de la definición 1.11, $\partial_\epsilon f(x)$ es siempre un subconjunto no vacío de X^* para cualquier $\epsilon > 0$.

Cuando $f = \|\cdot\|$, la definición anterior adquiere un significado geométrico aún más claro. Es fácil comprobar que si $x \in S_X$, entonces

$$\partial_\epsilon \|\cdot\|(x) = \{y^* \in B_{X^*} : \langle x, y^* \rangle \leq 1 - \epsilon\},$$

lo cual significa que $\partial_\epsilon \|\cdot\|(x)$ es el conjunto de puntos de B_{X^*} tales que están entre los hiperplanos de ecuaciones $\langle x, \cdot \rangle = 1 - \epsilon$, $\langle x, \cdot \rangle = 1$. Éste último es el hiperplano en el cual está contenido $\partial \|\cdot\|(x)$. Es decir, $\partial_\epsilon \|\cdot\|(x)$ es una sección determinada por x en B_{X^*}.

1.12 Teorema. (Brønsdted-Rockafellar) *Sea f una función convexa continua definida en D, un abierto convexo no vacío de un espacio de Banach*

X. Entonces dados cualesquiera $x_0 \in D$, $\epsilon > 0$, $x_0^* \in \partial_\epsilon f(x_0)$, existen $x_\epsilon \in D$ y $x_\epsilon^* \in X^*$ tales que

$$x_\epsilon^* \in \partial f(x_\epsilon), \qquad \|x_\epsilon - x_0\| \leq \sqrt{\epsilon}, \qquad \|x_\epsilon^* - x_0^*\| \leq \sqrt{\epsilon}.$$

Recordemos que si $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$, el **epigrafo** de f es el siguiente subconjunto de $X \times \mathbb{R}$:

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, \lambda) : x \in D, f(x) \leq \lambda\}.$$

Si D es convexo, entonces f es una función convexa si y sólo si $\mathrm{epi}(f)$ es un conjunto convexo.

1.13 DEFINICIÓN. *Un punto y de un subconjunto A de un espacio Y se dice* **un punto soporte** *de A si existe $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$ tal que y^* alxanza el supremo sobre A en y. Cualquier y^* que cumpla esta definición se dice que es un* **funcional soporte** *de A en y, o que y^** **soporta** *a A en y.*

La terminología geométrica surge del hecho de que un hiperplano cerrado se dice que soporta a A si uno de los dos semiespacios cerrados que define el hiperplano contiene a A, el otro semiespacio abierto no corta a A y este hiperplano corta a A. Si y^* soporta a A en y, entonces $H = \{z \in Y : \langle z, y^* \rangle = \sup_A \langle \cdot, y^* \rangle\}$ es tal hiperplano.

La siguiente proposición relaciona los funcionales soporte de un epigrafo de una función convexa con la subdiferencial; y es una consecuencia, como veremos, del teorema de maximalidad de Minty:

1.14 PROPOSICIÓN. *Sea f una función continua y convexa definida en un abierto convexo no vacío y sea x un punto de dicho abierto. Entonces, los funcionales soporte de* $\operatorname{epi}(f)$ *en* $(x, f(x))$ *son los múltiplos positivos de los funcionales lineales* $\phi \in (X \times \mathbb{R})^*$ *de la forma*

$$\phi(y, \lambda) = \langle y, x^* \rangle - \lambda, \qquad x^* \in \partial f(x). \tag{1.2}$$

Demostración: Primero veamos que si $x^* \in \partial f(x)$, $\alpha > 0$, entonces el funcional ϕ de la forma

$$\phi(y, \lambda) = \alpha \left(\langle y, x^* \rangle - \lambda \right)$$

soporta a $\operatorname{epi}(f)$ en $(x, f(x))$. Sea $(y, \lambda) \in \operatorname{epi}(f)$, entonces

$$\phi(y, \lambda) = \alpha \left(\langle y, x^* \rangle - \lambda \right) \leq \alpha \left(\langle y, x^* \rangle - f(y) \right).$$

Como $x^* \in \partial f(x)$, entonces $\langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x)$, por lo que

$$\alpha \left(\langle y, x^* \rangle - f(y) \right) \leq \alpha \left(\langle x, x^* \rangle - f(x) \right) = \phi(x, f(x)).$$

Sea ahora ϕ un funcional lineal y continuo sobre $X \times \mathbb{R}$. Entonces ϕ tiene necesariamente una expresión de la forma

$$\phi(y, \lambda) = \langle y, x^* \rangle + \alpha\lambda, \qquad x^* \in X^*, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que ϕ es soporte en $(x, f(x))$ de $\operatorname{epi}(f)$. Comprobemos que es un múltiplo positivo de un funcional lineal de la forma (1.2): Como $(x, f(x))$ pertenece a $\operatorname{epi}(f)$ y ϕ es un funcional soporte de $\operatorname{epi}(f)$ en $(x, f(x))$, entonces $\phi(x, f(x) + 1) \leq \phi(x, f(x))$, es decir

$$\langle x, x^* \rangle + \alpha(f(x) + 1) \leq \langle x, x^* \rangle + \alpha f(x).$$

Simplificando se tiene $\alpha \leq 0$.

Si $\alpha = 0$, se tiene, para $t > 0$ suficientemente pequeño y para todo $u \in B_X$, $\phi(x + tu, \lambda) \leq \phi(x, f(x))$, siendo λ cualquier número real que sea mayor que $f(x + tu)$. De la anterior desigualdad se deduce que $\langle u, x^* \rangle \leq 0$ para todo $u \in B_X$, de donde se concluye que $x^* = 0$, y por tanto $\phi = 0$, lo cual es imposible por ser ϕ un funcional soporte.

Ya que ϕ un funcional soporte de $\mathrm{epi}(f)$ en $(x, f(x))$,

$$\langle y, x^* \rangle + \alpha\lambda = \phi(y, \lambda) \leq \phi(x, f(x)) = \langle x, x^* \rangle + \alpha f(x), \quad \forall\ (y, \lambda) \in \mathrm{epi}(f),$$

de donde, si $(y, \lambda) \in \mathrm{epi}(f)$, se tiene $\langle y - x, x^* \rangle \leq \alpha(f(x) - \lambda)$. En particular,

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq \alpha(f(x) - f(y)) = (-\alpha)(f(y) - f(x)),$$

luego $\langle y - x, -\frac{1}{\alpha} x^* \rangle \leq f(y) - f(x)$, así que, por ser ∂f un operador maximal monótono

$$\phi(y, \lambda) = (-\alpha) \left[\langle y, -\frac{1}{\alpha} x^* \rangle - \lambda \right]$$

y obtenemos la conclusión. ■

1.3 Continuidad de la subdiferencial.

La aplicación subdiferencial es un ejemplo de una aplicación multivaluada. La siguiente definición establece nociones de continuidad para este tipo de funciones:

1.15 Definición. *Sean (A, τ) y (B, τ') dos espacios topológicos y sea una aplicación multivaluada $\Phi : A \to \mathcal{P}(B)$. Se dice que*

1. Φ *es* **superiormente $\tau - \tau'$−semicontinua en** $x \in A$ *si para cada* τ'*-abierto* U *que verifique* $\Phi(x) \subset U$*, existe un* τ*-entorno* V *de* x *tal que* $\Phi(y) \subset U$ *para todo* $y \in V$.

2. Φ *es* **inferiormente $\tau - \tau'$−semicontinua en** $x \in A$ *si para cada* τ'*-abierto* U *que verifique* $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$*, existe un* τ*-entorno* V *de* x *tal que* $\Phi(y) \cap U \neq \emptyset$ *para todo* $y \in V$.

Nos interesa el caso en que Φ sea la subdiferencial de una función convexa y continua definida en un conjunto D abierto, convexo y no vacío de un espacio de Banach X. Siempre consideraremos al espacio de Banach X dotado de la topología de la norma, mientras que en X^* consideraremos alternativamente las topologías de la norma, la w o la w^*. Usaremos la nomenclatura **superiormente (inferiormente) τ−semicontinua** cuando τ sea una de las topologías mencionadas anteriormente sobre X^*.

En la siguiente proposición se considera el caso en que τ es la topología w^*.

1.16 Proposición. *Si* f *es una función continua convexa definida en el abierto convexo no vacío* D *de un espacio de Banach* X*, entonces la subdiferencial* $x \mapsto \partial f(x)$ *es superiormente* w^**-semicontinua.*

La demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [45]. Analizando la demostración proporcionada allí, se observa que en realidad basta suponer que la función sea continua sólo en $x_0 \in X$ para asegurar que $x \mapsto \partial f(x)$ sea superiormente w^*-semicontinua en x_0. El caso particular en el que $f = \|\cdot\|$ fue demostrado en 1964 por Cudia [13].

1.17 DEFINICIÓN. *Una* **selección** ϕ *para una aplicación conjunto valuada* Φ *es una aplicación univalorada satisfaciendo* $\phi(x) \in \Phi(x)$ *para todo* x *tal que* $\Phi(x) \neq \emptyset$.

Para caracterizar la diferenciabilidad Gâteaux y Fréchet en términos de la semicontinuidad inferior de la subdiferencial necesitamos la siguiente proposición, cuya demostración se puede encontrar en [45] o también en [15].

1.18 PROPOSICIÓN. *Sea* f *una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío* D *del espacio de Banach* X. *Sea* $x \in D$, *entonces*

1. f *es Gâteaux diferenciable en* x *si y sólo si existe una selección* ϕ *para* ∂f *que es* $\|\cdot\|$*-*w^**-continua en* x. *(De hecho, en ese caso,* toda *selección* ϕ *tiene esa propiedad.)*

2. f *es Fréchet diferenciable en* x *si y sólo si existe una selección* ϕ *para* ∂f *que es* $\|\cdot\|$*-*$\|\cdot\|$*-continua en* x. *(Análogamente,* toda *selección* ϕ *tiene esa propiedad en ese caso.)*

La siguiente proposición fue demostrada en el caso en que f es la norma en [13]. En el caso Gâteaux diferenciable, las ideas de la demostración son similares; en el caso Fréchet se utilizan ideas distintas.

1.19 PROPOSICIÓN. *Sea* f *una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío* D *del espacio de Banach* X. *Dado* $x \in D$, *entonces*

1. *f es Gâteaux diferenciable en x si y sólo si ∂f es inferiormente w^*-semicontinua en x.*

2. *f es Fréchet diferenciable en x si y sólo si ∂f es inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinua en x.*

Demostración: (i $\Rightarrow$) Sea U un subconjunto w^*-abierto de X^* cumpliendo que $\partial f(x) \cap U \neq \emptyset$. Por la Proposición 1.18 existe una selección para ∂f, $\phi : D \to X^*$, que es $\|\cdot\|$-w^*-continua en x. Además, por ser f Gâteaux diferenciable en x, $\partial f(x)$ consta de un sólo elemento, que es $\phi(x)$; por tanto $\phi(x) \in U$. Por la $\|\cdot\|$-w^*-continuidad de ϕ, existe $\delta > 0$ tal que $\phi(y) \in U$ para todo $y \in B(x, \delta)$, es decir

$$\partial f(y) \cap U \neq \emptyset, \qquad \forall y \in B(x, \delta).$$

(i $\Leftarrow$) Sean $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x)$. Queremos probar que $x_1^* = x_2^*$, es decir, $\langle y, x_1^* \rangle = \langle y, x_2^* \rangle$ para todo $y \in X$. Fijemos $y \in X$, y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Ya que $N = \{x^* \in X^* : |\langle y, x^* \rangle| < \epsilon/2\}$ es un w^*-entorno de 0 y se tiene $(x_i^* + N) \cap \partial f(x) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$\partial f(z) \cap (x_i^* + N) \neq \emptyset, \qquad \forall z \in B(x, \delta). \tag{1.3}$$

Sea $Y = \text{lin}\{x, y\}$. Al ser Y un subespacio de dimensión finita, Y es separable; por tanto podemos aplicar el Teorema de Mazur (1.7) a $f_{|Y}$. Existirá, pues, $z \in Y \cap D$, $\|x - z\| < \delta$, en donde $f_{|Y}$ es Gâteaux diferenciable. Por (1.3) existen $z_1^*, z_2^* \in \partial f(z)$ tales que $|\langle y, z_i^* - x_i^* \rangle| < \epsilon/2$. Pero como $f_{|Y}$ es Gâteaux diferenciable en z, entonces $\langle y, z_1^* \rangle = \langle y, z_2^* \rangle$. Por tanto

$$|\langle y, x_1^* - x_2^* \rangle| \leq |\langle y, x_1^* - z_1^* \rangle| + |\langle y, z_2^* - x_2^* \rangle| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\langle y, x_1^* - x_2^* \rangle = 0$. Esto ocurre para todo $y \in X$, es decir $x_1^* = x_2^*$.

(ii $\Rightarrow$) Es prácticamente la misma demostración que (i $\Rightarrow$).

(ii $\Leftarrow$) Por hipótesis, y en particular, ∂f es inferiormente w^*-semicontinua en x, y por (i $\Leftarrow$) f es Gâteaux diferenciable en x. Sea $\{x^*\} = \partial f(x)$. Ahora basta comprobar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \leq \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} - \langle u, x^* \rangle \leq \epsilon, \qquad \forall\ 0 < t < \delta,\ u \in B_X :$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $(x^* + \epsilon B_{X^*}) \cap \partial f(x) \neq \emptyset$, por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\partial f(y) \cap (x^* + \epsilon B_{X^*}) \neq \emptyset$, $\forall y \in B(x, \delta)$. Sean $0 < t < \delta$, $u \in B_X$. Existe $y^* \in \partial f(x+tu)$, $\|x^* - y^*\| < \epsilon$.

Como $x^* \in \partial f(x)$, entonces $\langle x + tu - x, x^* \rangle \leq f(x+tu) - f(x)$. Como $y^* \in \partial f(x+tu)$, entonces $\langle x - (x+tu), y^* \rangle \leq f(x) - f(x+tu)$. Combinando estas dos desigualdades

$$0 \leq f(x+tu) - f(x) - t\langle u, x^* \rangle \leq t\langle u, y^* \rangle - t\langle u, x^* \rangle = t\langle u, y^* - x^* \rangle,$$

de donde, dividiendo por $t > 0$,

$$0 \leq \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} - \langle u, x^* \rangle \leq \langle u, y^* - x^* \rangle \leq \|y^* - x^*\| < \epsilon.$$

Como f es Gâteaux diferenciable y el límite $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(x+tu) - f(x)}{t}$ es uniforme para $u \in B_X$ se tiene que f es Fréchet diferenciable en x. ■

Šmulyan, en 1940, también estudió la diferenciabilidad Fréchet y Gâteaux de la norma, [53], llegando al siguiente resultado, hoy en día conocido como el **test de Šmulyan**:

1.20 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y sea $x \in S_X$. Se tiene*

1. *$\|\cdot\|$ es Fréchet diferenciable en x si y sólo si para cualesquiera $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset B_{X^*}$ cumpliendo $\langle x, x_n^* \rangle \to 1$, $\langle x, y_n^* \rangle \to 1$, entonces $x_n^* - y_n^* \to 0$ en la topología de la norma.*

2. *$\|\cdot\|$ es Gâteaux diferenciable en x si y sólo si para cualesquiera $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset B_{X^*}$ cumpliendo $\langle x, x_n^* \rangle \to 1$, $\langle x, y_n^* \rangle \to 1$, entonces $x_n^* - y_n^* \to 0$ en la topología w^*.*

Como hemos visto, la semicontinuidad inferior implica que la función subdiferencial sea univaluada. Si se quiere evitar este hecho, hemos de considerar la semicontinuidad superior. Sin embargo, cuando se estudia la subdiferencial, resulta mucho más apropiado considerar otro tipo de continuidad:

1.21 DEFINICIÓN. *Si (A, τ) es un espacio topológico, (B, τ') es un espacio vectorial topológico y $\Phi : A \to \mathcal{P}(B) \setminus \emptyset$. Diremos que Φ es* **restringida superiormente** $\tau - \tau'$**−semicontinua** *en $x \in A$ si para cada U, τ'-entorno de 0 en B, existe V, τ-entorno de x en A, tal que $\Phi(y) \subset \Phi(x) + U$ para todo $y \in V$.*

Es claro que la semicontinuidad superior implica la semicontinuidad restringida superior, y si $\Phi(x)$ es τ'-compacto ambas nociones coinciden. Igual que en la Definición 1.15, estaremos interesados sólamente en el caso en que se considera la topología de la norma en $A \subset X$ y a $B = X^*$ le dotamos de las topologías de la norma y w, respectivamente. El caso en que a X^* se le dota de la topología w^* es trivial por la Proposición 1.16 y por ser $\partial f(x)$ siempre w^*-compacto (si f es continua en x). Esta clase de continuidad, que fue introducida en 1978 por J. R. Giles, D. Gregory y B. Sims, [27], ha encontrado interesantes aplicaciones, como veremos de ahora en adelante en la memoria.

Pasamos a comentar las propiedades de dicho tipo de continuidad cuando se considera en X^* la topología de la norma. Es interesante observar que este tipo de continuidad está muy relacionada con una debilitación natural de la diferenciabilidad Fréchet. La siguiente terminología se introdujo en [25].

1.22 DEFINICIÓN. *Sean $f : D \to \mathbb{R}$, D un abierto no vacío de X, $x \in D$. Decimos que la función f es* **fuertemente subdiferenciable en** *x si el límite*

$$d^+ f_x(u) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

es uniforme para $u \in X$.

Son bastantes los trabajos dedicados a este tipo de extensión no suave de la diferenciabilidad Fréchet, extensión que aparece frecuentemente bajo diferentes definiciones, y que ha encontrado interesantes aplicaciones. Merecen destacarse, aparte del ya mencionado de Giles, Gregory y Sims, [27], los de Gregory, [33], Aparicio, Ocaña, Payá y Rodríguez, [1], Franchetti y Payá,

[25], Giles y Moors, [28], Godefroy, [30], Contreras y Payá, [12], y por último el de Godefroy, Montesinos y Zizler, [32].

Para la aplicación subdiferencial de funciones convexas y continuas definidas en un abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X esta propiedad tiene una apropiada caracterización geométrica, demostrada por primera vez en un artículo de Gregory, [33].

1.23 PROPOSICIÓN. *Si f es convexa y continua en el abierto convexo no vacío D de X, entonces f es fuertemente subdiferenciable en $x \in D$ si y sólo si ∂f es restringida superiormente $\|\cdot\|$-semicontinua en x.*

De la monotonicidad del cociente diferencial y del Teorema clásico de Dini se deduce que cualquier norma en un espacio de dimensión finita es fuertemente subdiferenciable. Una especie de recíproco también es cierto, como probaron Contreras y Payá, [12]: *En todo espacio de dimensión infinita existe una norma equivalente que no es fuertemente subdiferenciable.*

La siguiente nomenclatura se debe a Contreras y Payá, [12], aunque en este artículo se estudia únicamente la función convexa $\|\cdot\|$.

1.24 DEFINICIÓN. *Decimos que una función continua y convexa f definida en un abierto convexo no vacío D de un espacio de Banach X es* **bastante suave** *en $x \in D$ si la aplicación $\partial f : D \to \mathcal{P}(X^*)$ es restringida superiormente w-semicontinua en x. Análogamente diremos que $\Phi : A \to \mathcal{P}(X^*)$,*

$A \subset X$ es **bastante suave** *en $x \in A$, si es restringida superiormente w-semicontinua en x.*

Se pueden generalizar los resultados ya citados de Contreras, Payá y de Giles, Gregory, Sims en la siguiente proposición, que se puede considerar como el análogo del Test de Šmulyan para estos tipos de diferenciabilidad

1.25 TEOREMA. *Sean f una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío D de X, $x \in D$ y τ alguna de las siguientes topologías de X^*: la de la norma, la w o la w^*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *∂f es restringida τ-semicontinua superiormente en x.*

2. *Para todo N, τ-entorno de 0 en X^*, existe $\epsilon > 0$ tal que $\partial_\epsilon f(x) \subset \partial f(x) + N$.*

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que ∂f es restringida τ-semicontinua superiormente en x. Sea N un τ-entorno de 0 en X^*, que lo podemos tomar convexo. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\partial f(B(x,\delta)) \subset \partial f(x) + \frac{1}{2}N$. Claramente podemos tomar δ tal que $\delta B_{X^*} \subset N$. Sea $\epsilon = \frac{\delta^2}{4}$. Veamos que este ϵ es el buscado:

Sea $y^* \in \partial_\epsilon f(x)$. Por el Teorema de Brønsdted-Rockafellar (Teorema 1.12), existen $x_\epsilon \in X$, $x^*_\epsilon \in \partial f(x_\epsilon)$, tales que

$$\|x_\epsilon - x\| \leq \sqrt{\epsilon} = \frac{\delta}{2}, \qquad \|x^*_\epsilon - y^*\| \leq \sqrt{\epsilon} = \frac{\delta}{2}.$$

Por tanto

$$y^* \in x_\epsilon^* + \frac{\delta}{2} B_{X^*} \subset \partial f(x_\epsilon) + \frac{1}{2}N \subset \partial f(x) + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N \subset \partial f(x) + N.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea N un τ-entorno de 0 en X^*. Por hipótesis existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\partial_{\epsilon_0} f(x) \subset \partial f(x) + N$. Ya que la subdiferencial está localmente acotada, existen $\epsilon_1 > 0$, $M > 0$ tal que

$$y^* \in \partial f(B(x, \epsilon_1)) \;\Rightarrow\; \|y^*\| < M.$$

Como f es continua en x, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$y \in B(x, \epsilon_2) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \frac{\epsilon_0}{2M}, \epsilon_2\}$. Comprobemos que $\partial f(B(x,\epsilon)) \subset \partial f(x) + N$: Sea $y^* \in \partial f(B(x,\epsilon))$. Existe $y \in B(x,\epsilon)$ con $y^* \in \partial f(y)$. Por tanto, si $z \in D$ es arbitrario

$$\begin{aligned} \langle z - x, y^* \rangle &= \langle z - y, y^* \rangle + \langle y - x, y^* \rangle \leq \\ &\leq f(z) - f(y) + M\epsilon < f(z) - f(x) + f(x) - f(y) + \frac{\epsilon_0}{2} < \\ &< f(z) - f(x) + \epsilon_0. \end{aligned}$$

Es decir, $y^* \in \partial_{\epsilon_0} f(x) \subset \partial f(x) + N$. ∎

El caso particular en el que la función f es la norma de un espacio de Banach fue obtenido por Giles, Gregory y Sims en [27], donde se utiliza el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, [7]. Aquí hemos utilizado lo que se puede considerar la generalización de este teorema para funciones convexas e inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinuas: El Teorema de Brønsdted-Rockafellar, Teorema 1.12.

1.4 La conjugación de Fenchel, diferenciabilidad y rotundidad.

Recordemos que una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es **inferiormente $\tau-$semicontinua**, siendo (X, τ) un espacio topológico, si el subconjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq r\}$$

es τ-cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a afirmar que para cualquier $x \in X$ y $(x_d)_{d\in D}$ una red que τ-converge a x, entonces

$$f(x) \leq \liminf_{d\in D} f(x_d).$$

El **dominio efectivo** de f es el subconjunto de X

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

f se llama **propia** si $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Se puede demostrar muy fácilmente que si I es un conjunto arbitrario de índices y si $f_i : X \to \mathbb{R}$ son τ-continuas para todo $i \in I$, entonces $\sup_{i\in I} f_i$ es una función inferiormente τ-semicontinua. En particular, obsérvese que toda norma equivalente en un espacio X es inferiormente w-semicontinua y que toda norma dual en X^* es inferiormente w^*-semicontinua.

La definición de la subdiferencial ∂f para una función convexa propia inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinua f es casi la misma que para una función continua:

1.26 Definición. *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia e inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinua.*

1. *Si* $x \in \mathrm{dom}(f)$*, se define la* **subdiferencial de** f **en** x *como el subconjunto de* X^*

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x),\ \forall y \in X\},$$

mientras que $\partial f(x) := \emptyset$ *si* $x \notin \mathrm{dom}(f)$*.*

2. *Definimos* $d^+ f_x$ *sólo en el caso en que* $x \in \mathrm{dom}(f)$*. En esta situación*

$$d^+ f_x(y) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}, \qquad y \in X.$$

Si $x + ty \notin \mathrm{dom}(f)$ *para todo* $t > 0$*, definimos* $d^+ f_x(y) := +\infty$*.*

3. *Si* $x \in \mathrm{dom}(f)$*,* $\epsilon > 0$*, definimos la* ϵ**-subdiferencial** *como*

$$\partial_\epsilon f(x) := \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) + \epsilon,\ \forall y \in X\}.$$

Las siguientes importantes relaciones son todavía válidas en este ambiente más general (véase [45]): Si $x \in \mathrm{dom}(f)$,

1. $x^* \in \partial f(x) \Rightarrow \langle x, x^* \rangle \leq d^+ f_x(y),\ \forall y \in X$.

2. $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \Rightarrow \partial f(x) \subset \partial_{\epsilon_1} f(x) \subset \partial_{\epsilon_2} f(x)$.

3. $0 < \epsilon \Rightarrow \partial_\epsilon f(x)$ es w^*-cerrado convexo no vacío.

Además, nótese que el Teorema de Brønsted-Rockafellar (Teorema 1.12) es válido para funciones convexas, propias e inferiormente semicontinuas definidas sobre un espacio de Banach X (véase, por ejemplo, [45]). Por tanto, obsérvese que la implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) del Teorema 1.25 es válida para funciones convexas, propias e inferiomente semicontinuas.

El siguiente simple lema, que será de utilidad en el capítulo siguiente, establece que, esencialmente, la subdiferencial es un concepto definido localmente.

1.27 Lema. *Sean $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funciones propias, convexas e inferiomente semicontinuas que coinciden en un entorno de $x_0 \in X$, entonces $\partial f(x_0) = \partial g(x_0)$.*

Demostración: Si $x_0 \notin \mathrm{dom}(f)$, obviamente $x \notin \mathrm{dom}(g)$ y $\partial f(x_0) = \partial g(x_0) = \emptyset$. Supongamos que $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Denotemos por D un entorno, que lo suponemos abierto y convexo, donde coinciden f y g. Sea $x^* \in \partial g(x_0)$. Sea $y \in X$. Tomemos $t > 0$ suficientemente pequeño para que $x_0 + t(y - x_0) = (1-t)x_0 + ty \in D$. Entonces

$$\langle x_0 + t(y - x_0) - x_0, x^* \rangle \leq g(x_0 + t(y - x_0)) - g(x_0),$$

por tanto

$$\begin{aligned} \langle y - x_0, x^* \rangle &\leq f((1-t)x_0 + ty) - f(x_0) \leq \\ &\leq (1-t)f(x_0) + tf(y) - f(x_0) = t[f(y) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Por tanto $\langle y - x_0, x^* \rangle \leq f(y) - f(x_0)$. Luego $\partial g(x_0) \subset \partial f(x_0)$. La inclusión opuesta es completamente análoga. ■

Dada una función continua y convexa f definida en un abierto convexo no vacío A del espacio de Banach X podemos extender f a una función con dominio X, que seguimos denotando del mismo modo, definiendo

$$f(x) = \begin{cases} \liminf\limits_{y \to x} f(y) & x \in \overline{A} \\ +\infty & x \notin \overline{A} \end{cases}$$

Se puede demostrar fácilmente que la función resultante es inferiormente semicontinua y convexa.

El siguiente concepto, que fue introducido en [24] para espacios de dimensión finita, ha encontrado diversas aplicaciones en la teoría de los espacios de Banach (véase, por ejemplo, [2], [43] o [47]). Nosotros lo aplicaremos a relacionar la diferenciabilidad y la "rotundidad" del grafo de funciones convexas.

1.28 DEFINICIÓN. *Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, convexa e inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinua* [2]*, la* **conjugada de Fenchel** *de f es la función definida en X^* dada por*

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in X\}, \qquad x^* \in X^*.$$

Es trivial demostrar que f^* es convexa. Es inferiormente w^*-semicontinua por ser el supremo de funciones w^*-continuas. Además f^* es propia, ya que si tomamos $\epsilon > 0$, $x \in \mathrm{dom}(f)$ y $x^* \in \partial_\epsilon f(x)$, entonces

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) + \epsilon, \qquad \forall y \in X.$$

[2] Esta definición se puede hacer para una función propia y convexa arbitraria, véase, por ejemplo, [45].

Es decir, $f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle - f(x) + \epsilon < +\infty$.

Es trivial demostrar que bajo las condiciones de la definición 1.28 entonces $\langle x, x^* \rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$. Además si $\epsilon \geq 0$, entonces $\partial_\epsilon f(x)$ se puede caracterizar de la manera siguiente: $x^* \in \partial_\epsilon f(x)$ si y sólo si $f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle + \epsilon$. (Aquí, hemos tomado $\partial_0 f = \partial f$). En particular, se tiene $x^* \in \partial f(x)$ si y sólo si $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$.

Es sencillo probar que la conjugada de Fenchel de la norma viene dada por

$$\|x^*\|^* = \begin{cases} 0 & x^* \in B_{X^*} \\ +\infty & x^* \notin B_{X^*} \end{cases}$$

El siguiente concepto geométrico ha sido muy estudiado, teniendo una estrecha relación con diferentes aspectos de la teoría de los espacios de Banach: Diferenciabilidad de la norma, reflexividad, diversas topologías en la bola unidad, etc. La siguiente formulación está extraída de [15]:

1.29 Definición. *La norma $\|\cdot\|$ en X se dice* **localmente uniformemente rotunda en** $x_0 \in X$ *si* $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ *para cualquier* $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ *cumpliendo* $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ *y* $\lim_{n\to+\infty} \|x_0 + x_n\| = 2\|x_0\|$. *Si la norma $\|\cdot\|$ es localmente uniformemente rotunda en cada punto de X (es equivalente a que $\|\cdot\|$ lo sea en cada punto de S_X), decimos que $\|\cdot\|$ es localmente uniformemente rotunda.*

Es bien conocida la siguiente caracterización de las normas localmente uniformemente rotundas en puntos de la esfera unidad. Esta caracterización motivará el resto de la sección.

1.30 Teorema. *Sea $x_0 \in S_X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\|\cdot\|$ es localmente uniformemente rotunda en x_0.*

2. *$\forall\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*
$$x \in B_X,\ \|\frac{x+x_0}{2}\| > 1-\delta \ \Rightarrow\ \|x_0 - x\| < \epsilon.$$

La dualidad entre la rotundidad y la diferenciabilidad de normas se refleja en la siguiente proposición, demostrada en, por ejemplo, [15]. *Si la norma dual de $\|\cdot\|$ en X^* es localmente uniformemente rotunda, entonces la norma $\|\cdot\|$ en X es Fréchet diferenciable.* El siguiente teorema es la generalización de la proposición anterior para la clase de funciones convexas continuas.

1.31 Teorema. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua definida en D, abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X. Sea $x_0 \in D$. Sea τ una de las topologías w, w^*, $\|\cdot\|$. Son equivalentes:*

1. *La función f es Gâteaux diferenciable en x_0 y ∂f es restringida superiormente τ-semicontinua en x_0.*

2. *Para todo N, τ-entorno de 0 en X^*, para todo $x^* \in \partial f(x_0)$, existe $\delta = \delta(x^*, N) > 0$ tal que*
$$\left.\begin{array}{c} y^* \in \operatorname{dom}(f^*) \\ f(x_0) + \dfrac{f^*(x^*)+f^*(y^*)}{2} - \delta < \left\langle x_0, \dfrac{x^*+y^*}{2}\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow y^* \in x^* + N.$$

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea N un τ-entorno de 0 en X^*. Sea $\partial f(x_0) = \{x_0^*\}$. En virtud del Teorema 1.25, existe $\epsilon > 0$, que depende de N y de x_0 con

$$\partial_\epsilon f(x_0) \subset x_0^* + N. \tag{1.4}$$

Tomamos $x^* \in \partial f(x_0) = \{x_0^*\}$, es decir $x^* = x_0^*$. Sea $\delta(x_0, N) = \dfrac{\epsilon(x_0, N)}{2}$. Sea $y^* \in \mathrm{dom}(f)$ con

$$f(x_0) + \frac{f^*(x_0^*) + f^*(y^*)}{2} - \delta < \left\langle x_0, \frac{x_0^* + y^*}{2} \right\rangle \tag{1.5}$$

Se quiere probar que $y^* \in x_0^* + N$. Por (1.4) basta ver que $y^* \in \partial_\epsilon f(x_0)$. Por tanto demostraremos que

$$f(x_0) + f^*(y^*) \leq \langle x_0, y^* \rangle + \epsilon.$$

Observar que, en virtud de que $\{x_0^*\} = \partial f(x_0)$, se tiene $f(x_0) + f^*(x_0^*) = \langle x_0, x_0^* \rangle$, y por tanto, por (1.5):

$$\begin{aligned}
f(x_0) + f^*(y^*) &= 2f(x_0) + f^*(y^*) - f(x_0) = \\
&= 2f(x_0) + f^*(y^*) + f^*(x_0) - \langle x_0, x_0^* \rangle = \\
&= 2\left[f(x_0) + \frac{f^*(y^*) + f^*(x_0^*)}{2}\right] - \langle x_0, x_0^* \rangle < \\
&< 2\left[\left\langle x_0, \frac{x_0^* + y^*}{2} \right\rangle + \delta\right] - \langle x_0, x_0^* \rangle = \\
&= \langle x_0, y^* \rangle + 2\delta = \langle x_0, y^* \rangle + \epsilon.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos ahora (ii). Probaremos en primer lugar que f es Gâteaux diferenciable en x_0. Tomemos $x_1^*, x_2^* \in \partial f(x_0)$. Supongamos

$x_1^* \neq x_2^*$. Entonces existe N, τ-entorno de 0 en X^*, con $(x_1^*+N)\cap(x_2^*+N) = \emptyset$. Existen $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2)$ tales que

$$\left.\begin{array}{c} y^* \in \operatorname{dom}(f^*) \\ f(x_0) + \dfrac{f^*(x_i^*) + f^*(y^*)}{2} - \delta_i < \left\langle x_0, \dfrac{x_i^* + y^*}{2} \right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow y^* \in x_i^* + N.$$

Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $y^* \in \partial_\delta f(x_0)$. Entonces, como $f^*(y^*) \leq \langle x_0, y^*\rangle - f(x_0) + \delta < +\infty$, resulta $y^* \in \operatorname{dom}(f^*)$. Además

$$\begin{aligned} f(x_0) + \frac{f^*(x_i^*) + f^*(y^*)}{2} - \delta_i &\leq \\ \leq f(x_0) + \frac{f^*(x_i^*) + \langle x_0, y^*\rangle - f(x_0) + \delta}{2} - \delta_i &< \\ < \frac{f(x_0) + f^*(x_i^*) + \langle x_0, y^*\rangle}{2} = \left\langle x_0, \frac{x_i^* + y^*}{2} \right\rangle&, \end{aligned}$$

pues $f(x_0) + f^*(x_i^*) = \langle x_o, x_i^*\rangle$, luego $y^* \in (x_1^* + N) \cap (x_2^* + N)$, una contradicción.

Sea N un τ-entorno de 0 en X^*. Como f es Gâteaux diferenciable en x_0, $\partial f(x_0) = \{x_0^*\}$. Dado N y x_0^*, obtenemos $\delta(x_0^*, N) > 0$ con la propiedad de que si

$$\left.\begin{array}{c} y^* \in \operatorname{dom}(f^*) \\ f(x_0) + \dfrac{f^*(x_0^*) + f^*(y^*)}{2} - \delta < \left\langle x_0, \dfrac{x_0^* + y^*}{2} \right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow y^* \in x_i^* + N, \tag{1.6}$$

Tomemos $y^* \in \partial_\delta f(x_0)$. La misma construcción anterior prueba que $y^* \in \operatorname{dom}(f^*)$ y se verifica (1.6). Por tanto $y^* \in x_0^* + N$. En virtud del Teorema 1.25 obtenemos que f es restringida superiormente τ-semicontinua en x_0. ■

Nótese que la implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) es válida para funciones convexas, propias e inferiormente semicontinuas, debido a que el Teorema de Brønsdted-Rockafellar es válido en este contexto.

Es bien conocido que si X posee una norma localmente uniformemente rotunda, entonces posee la llamada propiedad de Kadec-Klee. Recordemos que X posee la **propiedad de Kadec-Klee** si en S_X las topologías inducidas por $(B_X, \|\cdot\|)$ y (B_X, w) coinciden (ver, por ejemplo, [15] para una demostración). Enunciaremos un resultado que muestra una generalización de este hecho. Dicho resultado hace uso del siguiente concepto, que es una extensión del concepto de norma en el bidual de un espacio de Banach.

Obsérvese que si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, entonces f^* también es convexa, propia e inferiormente semicontinua (de hecho es inferiormente w^*-semicontinua), por lo que a f^* se le puede aplicar la definición 1.28 obteniendo la función **bidual de Fenchel**:

$$(f^*)^* := f^{**} : X^{**} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

El siguiente resultado conocido muestra que esta función extiende la función original. Nosotros haremos uso de las propiedades de la ϵ-subdiferencial. Para una demostración directa, aunque más larga, se puede consultar [2] o [9].

1.32 PROPOSICIÓN. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua y convexa. Si $x \in \operatorname{dom}(f)$, entonces $f(x) = f^{**}(x)$.*

Demostración. Se tiene $\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \leq f(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Por tanto

$$f^{**}(x) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) : x^* \in X^*\} \leq f(x).$$

Para probar la desigualdad opuesta tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario y $x^* \in \partial_\epsilon f(x)$ cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup\{\langle x, y^*\rangle - f^*(y^*) : y^* \in X^*\} \geq \\ &\geq \langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) \geq \langle x, x^*\rangle - (\langle x, x^*\rangle - f(x) + \epsilon) = f(x) - \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se obtiene $f^{**}(x) \geq f(x)$. ■

1.33 TEOREMA. *Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X, $x_0 \in D$, $x_0^* \in \partial f(x_0)$. Entonces si τ es alguna de las topologías siguientes de X^{**}, la de la norma, la w o la w^*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f^* es Gâteaux diferenciable en x_0^* y ∂f^* es restringida superiormente τ-semicontinua en x_0^*.*

2. *Para todos U, τ-entorno de 0 en X^{**}, $x \in \partial f^*(x_0^*)$, existe $\delta = \delta(U, x) > 0$ tal que*

$$\left.\begin{array}{c} y \in \operatorname{dom}(f) \\ \left\langle \dfrac{y+x}{2}, x_0^* \right\rangle > \dfrac{f(x)+f(y)}{2} + f^*(x_0^*) - \delta \end{array}\right\} \Rightarrow\ y \in x + U.$$

3. *Si (x_d^{**}) es cualquier red contenida en $\operatorname{dom}(f^{**})$ cumpliendo que*

$$\langle x_d^{**}, x_0^*\rangle - f^{**}(x_d^{**}) \to f^*(x_0^*),$$

entonces $x_d^{**} \to x_0$ en la topología τ.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Dada la función f del enunciado, se extiende a una función definida en todo el espacio de Banach X como se describe en la página 26. Se obtiene una extensión propia, convexa e inferiomente semicontinua a todo X. Esta función tiene una conjugada de Fenchel propia, convexa e inferiomente semicontinua. Se usa ahora la implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) del Teorema 1.31, válida, como hemos visto, para esta clase de funciones.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea (x_d^{**}) una red contenida en $\operatorname{dom}(f^{**})$ cumpliendo

$$\langle x_d^{**}, x_0^* \rangle - f^{**}(x_d^{**}) \to f^*(x_0^*).$$

Hemos de probar que $x_d^{**} \to x_0$ en la topología τ. Sea U un τ-entorno de 0 en X^{**}. Por hipótesis existe $\delta > 0$ verificando la condición (ii). Existe d_0 tal que para todo $d \geq d_0$, $\langle x_d^{**}, x_0^* \rangle - f^{**}(x_d^{**}) - f^*(x_0^*) \geq -2\delta$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{x_d^{**} + x_0}{2}, x_0^* \right\rangle = \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[\langle x_d^{**}, x_0^* \rangle - f^{**}(x_d^{**}) + f^{**}(x_d^{**}) + f(x_0) + f^*(x_0^*)\right] \geq \\
&\quad \geq \frac{1}{2}\left[-2\delta + 2f^*(x_0^*) + f^{**}(x_d^{**}) + f(x_0)\right] = \\
&\quad = f^*(x_0^*) + \frac{f^{**}(x_d^{**}) + f(x_0)}{2} - \delta.
\end{aligned}$$

Por hipótesis $x_d^{**} \to x_0$ en la topología τ.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Notemos que $x_0^* \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in \partial f^*(x_0^*)$. Veamos que f^* es Gâteaux diferenciable en x_0^*. Sea $x^{**} \in \partial f^*(x_0^*)$. Aplicando (iii) para la red constante $x_d^{**} = x^{**}$, obtenemos $x^{**} = x_0$. Veamos que ∂f^* es restringida superiormente τ-semicontinua en x_0^*. Si fuese falso, existirían U un τ-entorno de 0 en X^{**}, $x_n^{**} \in \partial_{1/n} f^*(x_0^*)$, $x_n^{**} \notin x_0 + U$, para $n \in \mathbb{N}$. Como

$$f^*(x_0^*) - \frac{1}{n} \leq \langle x_n^{**}, x_0^* \rangle - f^{**}(x_n^{**}) \leq f^*(x_0^*),$$

se tiene por la hipótesis (c) que x_n^{**} tiende a x_0 en la topología τ, una contradicción. ∎

Obsérvese que aplicando la equivalencia (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) para el caso de $f = \|\cdot\|$, τ es la topología de la norma y $x_0 \in S_X$ obtenemos como corolario inmediato el resultado de que toda norma localmente uniformemente rotunda posee la propiedad de Kadec-Klee.

2 Aplicaciones bastantes suaves.

Dedicamos este capítulo al estudio de las aplicaciones multivaluadas que son bastante suaves, es decir el caso en que estas aplicaciones son restringida superiormente w-semicontinuas, según definieron Giles, Gregory y Sims, [27]. Dichos autores estudiaron la subdiferencial de la norma, y en esta memoria ampliamos dicho estudio a funciones convexas continuas, intentando establecer, entre otras cosas, una caracterización mediante cocientes diferenciales de la bastante suavidad. Posteriormente estableceremos la relación entre espacios que tengan grafos de aplicaciones bastante suaves contenidos en el grafo de la aplicación dualidad y los subespacios normantes de los duales, utilizando esta relación para caracterizar los espacios reflexivos.

2.1 Funciones bastante suaves.

Cuando la aplicación multivaluada dualidad (i.e. la subdiferencial de $\|\cdot\|$) es restringida superiormente w-semicontinua, el espacio de Banach X disfruta de numerosas propiedades. En la siguiente proposición se caracteriza esta clase de continuidad. Esta caracterización se debe a Giles, Gregory y Sims,

[27].

2.1 PROPOSICIÓN. *Sea $x \in S_X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\|\cdot\|$ es bastante suave en x.*

2. *Para cada w-entorno de 0, N, en X^*, existe $\delta > 0$ tal que*

$$y^* \in B_{X^*},\ \langle x, y^* \rangle > 1 - \delta\ \Rightarrow\ y^* \in \partial\|\cdot\|(x) + N,$$

3. *$\partial\|\cdot\|(x)$ es denso en $\partial\|\cdot\|^{**}(x)$ para la topología $\sigma(X^{***}, X^{**})$ de X^{***}.*

Se hace patente, observando las Proposiciones 1.19, 1.23 y 2.1, que se echa de menos una caraterización mediante cocientes diferenciales de la propiedad "ser bastante suave". Observemos que en la proposición anterior aparece de forma bastante natural la extensión de la norma de X, $\|\cdot\|$, a X^{**}; es decir $\|\cdot\|^{**}$. En la teoría de los espacios de Banach existe una generalización de tal extensión: la conjugada de Fenchel. Este tipo de operación, como hemos visto en el capítulo primero, se aplica a la clase de funciones inferiormente semicontinuas.

El Teorema fundamental sobre funciones bastante suaves es el Teorema 2.5. El siguiente lema muestra una serie de propiedades adicionales de la biconjugada de Fenchel que nos serán de utilidad. A partir de ahora, si $x_0 \in X$ y $\delta > 0$, denotaremos por $B^{**}(x_0, \delta)$ la bola abierta en X^{**} de centro x_0 y radio δ.

2.2 Lema. *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *convexa, propia e inferiormente semicontinua y* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. *Entonces, si* f *es continua en* x_0,

1. f^{**} *es continua en* x_0.

2. $\partial f(x_0) = \partial f^{**}(x_0) \cap X^*$.

3. $\partial_\epsilon f^{**}(x_0)$ *es* w^**-compacto para todo* $\epsilon \geq 0$.

Demostración: (i) Como es bien sabido, la continuidad de una función convexa en un punto equivale a la acotación local en dicho punto (ver, por ejemplo, [45]). En primer lugar probemos que f^{**} está acotada superiormente en un entorno (en X^{**}) de x_0:

Como f es continua en x_0, existen $\delta > 0$, $M > 0$ tales que

$$y \in B(x_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(y)| \leq M \tag{2.1}$$

Sea $y^{**} \in B^{**}(x_0, \delta)$. Por el Teorema de Goldstine existe una red $(y_d)_{d\in D} \subset B(x_0, \delta)$ que tiende a y^{**} en la topología w^* de X^{**}. Por (2.1), $f(y_d) \leq M$ para todo $d \in D$. Por ser f^{**} inferiormente w^*-semicontinua $f^{**}(y^{**}) \leq \liminf_{d\in D} f(y_d) \leq M$.

Veamos ahora que f^{**} está acotada inferiormente en $B^{**}(x_0, \delta)$: Sea $y^{**} \in B^{**}(x_0, \delta)$. Entonces $2x_0 - y^{**} \in B^{**}(x_0, \delta)$ y, por la convexidad de f^{**},

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2} f^{**}(y^{**}) + \frac{1}{2} f^{**}(2x_0 - y^{**}) \leq \frac{1}{2} f^{**}(y^{**}) + \frac{M}{2},$$

de donde $2f(x_0) - M \leq f^{**}(y^{**})$. Por tanto f^{**} es localmente acotada en x_0, luego continua en x_0.

(ii) Observemos que por el apartado previo, tanto $\partial f(x_0)$, como $\partial f^{**}(x_0)$ son conjuntos no vacíos. La inclusión $\partial f^{**}(x_0) \cap X^* \subset \partial f(x_0)$ es trivial. Probemos la opuesta: Sea $x^* \in \partial f(x_0)$. Si $x^* \notin \partial f^{**}(x_0)$ existiría $y^{**} \in X^{**}$ cumpliendo $\langle y^{**} - x_0, x^* \rangle > f^{**}(y^{**}) - f(x_0)$. Por tanto

$$\langle y^{**}, x^* \rangle - f^*(x^*) \leq f^{**}(y^{**}) < \langle y^{**} - x_0, x^* \rangle + f(x_0),$$

simplificando obenemos

$$\langle x_0, x^* \rangle < f(x_0) + f^*(x^*). \tag{2.2}$$

Pero, como $x^* \in \partial f(x_0)$, entonces $f(x_0) + f^*(x^*) \leq \langle x_0, x^* \rangle$, lo cual es una contradicción con (2.2) [1].

(iii) En realidad, la situación es general: Supongamos que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sea una función convexa, propia e inferiormente semicontinua. Supongamos también que para un cierto punto $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ f sea continua en x_0. Entonces f está localmente acotada en un cierto entorno $N(x_0)$ (y, por supuesto, $N(x_0) \subset \mathrm{dom}(f)$). La restricción de f a ese entorno es una función continua. Sea $x_0^* \in \partial_\epsilon f(x_0)$. Tenemos

$$\langle y - x_0, x_0^* \rangle \leq f(y) - f(x_0) + \epsilon, \qquad \forall\ y \in N(x_0).$$

[1] Este apartado admite una prueba más elemental: Sea $x^* \in \partial f(x_0)$, entonces $f(x_0) + f^*(x^*) = \langle x_0, x^* \rangle$, luego $f^{**}(x_0) + f^{***}(x^*) = \langle x_0, x^* \rangle$, es decir $x^* \in \partial f^{**}(x_0)$. Sin embargo, presentamos la prueba anterior debido a que servirá en un contexto más general.

Como f es Lipschitz en $N(x_0)$, tenemos

$$\langle y - x_0, x_0^* \rangle \leq f(y) - f(x_0) + \epsilon \leq M\|y - x_0\| + \epsilon \leq M\delta + \epsilon,$$

siendo M la constante de Lipschitz de f en $N(x_0)$ y $\delta > 0$ tal que $N(x_0) \subset B(x_0, \delta)$. Como x_0^* está acotada en un entorno de x_0 por la misma cota para todo $x_0^* \in \partial_\epsilon f(x_0)$, resulta que $\partial_\epsilon f(x_0)$ es un conjunto acotado en X^*, luego w^*-compacto (al ser w^*-cerrado) y convexo.

Ahora, el resultado se puede aplicar a f^{**}, función inferiormente semicontinua, convexa, propia y continua en x_0 por el apartado (i). ■

Obsérvese que la demostración del apartado (ii) puede modificarse sin ningún esfuerzo para obtener el siguiente resultado: *Bajo las condiciones del apartado (ii) del lema 2.2 y* $\epsilon > 0$*, entonces* $\partial_\epsilon f(x_0) = \partial_\epsilon f^{**}(x_0) \cap X^*$.

Los dos lemas siguientes serán de utilidad en la demostración del Teorema 2.5. Además permiten describir la biconjugada de Fenchel en términos de la función original.

2.3 Lema. *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y propia e inferiormente semicontinua. Si* $x^{**} \in \overline{\mathrm{dom}(f)}^{\,*}$*, entonces*

$$f^{**}(x^{**}) = \inf\{\liminf_i f(x_i) : (x_i)_{i \in I} \subset \mathrm{dom}(f), x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}\}.$$

Demostración: En primer lugar supongamos que $f \geq 0$. Sea $(x_i)_{i \in I} \subset \mathrm{dom}(f)$ una red que w^*-converge a x^{**}. Como f^{**} es inferiormente w^*-semicontinua,

$$f^{**}(x^{**}) \leq \liminf_i f^{**}(x_i) = \liminf_i f(x_i).$$

Por tanto $I(x^{**}) := \inf\{\liminf_i f(x_i) : (x_i)_{i\in I} \subset \operatorname{dom}(f), x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}\}$ existe y cumple $I(x^{**}) \geq f^{**}(x^{**})$.

Si existiese $x^{**} \in X^{**}$ con $f^{**}(x^{**}) < I(x^{**})$, entonces $(x^{**}, f^{**}(x^{**})) \notin \overline{\operatorname{epi}(f)}^{w^*}$, ya que si no, se podría encontrar $(x_i, \lambda_i) \subset \operatorname{epi}(f)$ con $x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}$ y $\lambda_i \to f^{**}(x^{**})$, por lo que

$$f^{**}(x^{**}) < I(x^{**}) \leq \liminf_i f(x_i) \leq \liminf_i \lambda_i = f^{**}(x^{**}),$$

lo que es imposible. Por el Teorema de Hahn-Banach existen $x_0^* \in X^*$, $\alpha, k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle x^{**}, x_0^*\rangle + kf^{**}(x^{**}) < \alpha < \langle y^{**}, x_0^*\rangle + k\lambda, \qquad \forall\ (y^{**}, \lambda) \in \overline{\operatorname{epi}(f)}^{w^*}. \quad (2.3)$$

Tomando $y \in \operatorname{dom}(f), \lambda \to +\infty$, de (2.3) resulta $k \geq 0$. Sea $\epsilon > 0$. Como $f \geq 0$, de (2.3) se deduce que

$$\langle x, x_0^*\rangle + (k+\epsilon)f(x) > \alpha, \qquad \forall\ x \in \operatorname{dom}(f),$$

y, por tanto,

$$\langle x, \frac{x_0^*}{k+\epsilon}\rangle + f(x) \geq \frac{\alpha}{k+\epsilon}, \qquad \forall\ x \in \operatorname{dom}(f).$$

Luego

$$f^*\left(-\frac{x_0^*}{k+\epsilon}\right) = \sup\{\langle x, -\frac{x_0^*}{k+\epsilon}\rangle - f(x) : x \in \operatorname{dom}(f)\} \leq -\frac{\alpha}{k+\epsilon}.$$

Así,

$$f^{**}(x^{**}) \geq \langle x^{**}, -\frac{x_0^*}{k+\epsilon}\rangle - f^*\left(-\frac{x_0^*}{k+\epsilon}\right) \geq \langle x^{**}, -\frac{x_0^*}{k+\epsilon}\rangle + \frac{\alpha}{k+\epsilon}.$$

Por tanto, $\langle x^{**}, x_0^*\rangle + (k+\epsilon)f^{**}(x^{**}) \geq \alpha$, y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene $\langle x^{**}, x_0^*\rangle + kf^{**}(x^{**}) \geq \alpha$, lo cual es una contradicción con (2.3).

Ahora sea f arbitraria. Como f^* es propia, existe $x_0^* \in X^*$ tal que $f^*(x_0^*) = \alpha < +\infty$. Se tiene que, para todo $x \in X$, $\langle x, x_0^*\rangle \leq f^*(x_0^*) + \alpha$. Definamos ahora $g(x) := f(x) + \alpha - \langle x, x_0^*\rangle$. Obviamente g es convexa, propia e inferiormente semicontinua y cumple $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f)$, siendo $g \geq 0$. Es fácil comprobar que

$$g^*(x^*) = f^*(x^* + x_0^*) - \alpha, \qquad x^* \in X^*,$$

$$g^{**}(x^{**}) = f^{**}(x^{**}) + \alpha - \langle x^{**}, x_0^*\rangle, \qquad x^{**} \in X^{**}.$$

Por el paso previo aplicado a g,

$$\begin{aligned} f^{**}(x^{**}) &= g^{**}(x^{**}) - \alpha + \langle x^{**}, x_0^*\rangle = \\ &= \inf\{\liminf_i g(x_i) : (x_i)_{i\in I} \subset \mathrm{dom}(g), x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}\} - \alpha + \langle x^{**}, x_0^*\rangle = \\ &= \inf\{\liminf_i f(x_i) : (x_i)_{i\in I} \subset \mathrm{dom}(g), x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}\}. \end{aligned}$$

■

2.4 LEMA. *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, entonces* $\mathrm{epi}(f^{**}) = \overline{\mathrm{epi}(f)}^{w^*}$.

Demostración: De manera análoga a la demostración del último Lema, podemos suponer $f \geq 0$. Trivialmente $\mathrm{epi}(f) \subset \mathrm{epi}(f^{**})$, y como $\mathrm{epi}(f^{**})$ es

w^*-cerrado (al ser f^{**} inferiormente w^*-semicontinua), se tiene $\overline{\text{epi}(f)}^{w^*} \subset \text{epi}(f^{**})$.

Probemos la inclusión opuesta: Sea $(x_0^{**}, \lambda_0) \in \text{epi}(f^{**})$, es decir $\lambda_0 \geq f^{**}(x_0^{**})$. Supongamos que $(x_0^{**}, \lambda_0) \notin \overline{\text{epi}(f)}^{w^*}$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existen $x_0^* \in X^*$, $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle x_0^{**}, x_0^* \rangle + k\lambda_0 < \alpha < \beta < \langle y^{**}, x_0^* \rangle + k\lambda, \qquad \forall\ (y^{**}, \lambda) \in \overline{\text{epi}(f)}^{w^*}. \tag{2.4}$$

De (2.4) se deduce que $k \geq 0$ (si $k < 0$, basta tomar $y \in \text{dom}(f)$, $\lambda \to +\infty$). Otra vez de (2.4) se deduce, en particular,

$$\langle y, x_0^* \rangle + kf(y) > \beta, \qquad \forall\ y \in \text{dom}(f). \tag{2.5}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $f \geq 0$, de (2.5) se obtiene

$$\langle y, -\frac{1}{k+\epsilon} x_0^* \rangle - f(y) < -\frac{\beta}{k+\epsilon}, \qquad \forall\ y \in \text{dom}(f),$$

y, por tanto,

$$f^*(-\frac{1}{k+\epsilon} x_0^*) = \sup\{\langle y, -\frac{1}{k+\epsilon} x_0^* \rangle - f(y) : y \in X\} \leq -\frac{\beta}{k+\epsilon}.$$

De lo anterior resulta

$$\begin{aligned} f^{**}(x_0^{**}) &\geq \langle x_0^{**}, -\frac{1}{k+\epsilon} x_0^* \rangle - f^*(-\frac{1}{k+\epsilon} x_0^*) \geq \\ &\geq \frac{1}{k+\epsilon} \langle x_0^{**}, -x_0^* \rangle + \frac{\beta}{k+\epsilon} = \frac{1}{k+\epsilon} \left[\beta - \langle x_0^{**}, x_0^* \rangle\right] > \frac{\beta - \alpha + k\lambda_0}{k+\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si $k = 0$, entonces $f^{**}(x_0^{**}) > \dfrac{\beta - \alpha}{\epsilon}$, lo cual es una contradicción en vista de la arbitrariedad de ϵ y del hecho que $x_0^{**} \in \text{dom}(f^{**})$. Ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario, de (2.6) se deduce $f^{**}(x_0^{**}) \geq \dfrac{\beta-\alpha}{k} + \lambda_0 > \lambda_0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $(x_0^{**}, \lambda_0) \in \mathrm{epi}(f^{**})$. ■

Obsérvese que los dos Lemas anteriores permiten describir f^{**} del modo siguiente: Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, entonces

$$f^{**}(x^{**}) = \begin{cases} \inf\{\liminf_i f(x_i) : (x_i) \subset \mathrm{dom}(f), x_i \stackrel{w^*}{\to} x^{**}\} & x^{**} \in \overline{\mathrm{dom}(f)}^{w^*} \\ +\infty & x^{**} \notin \overline{\mathrm{dom}(f)}^{w^*} \end{cases}.$$

Además se tiene $\mathrm{dom}(f^{**}) = \overline{\mathrm{dom}(f)}^{w^*}$. Nótese que esto generaliza al Teorema de Goldstine. En efecto, basta considerar la función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $f(x) = 0$ si $\|x\| \leq 1$, $f(x) = +\infty$ si $\|x\| > 1$.

Presentamos a continuación la extensión de los resultados de Giles, Gregory y Sims (Proposición 2.1) al caso de las funciones convexas y continuas.

2.5 TEOREMA. *Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa, siendo D un abierto convexo no vacío de X y $x \in D$. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *f es bastante suave en x.*
2. *Para todo N, w-entorno de 0 en X^*, existe $\epsilon > 0$ tal que $\partial_\epsilon f(x) \subset \partial f(x) + N$.*
3. *$\partial f(x)$ es $\sigma(X^{***}, X^{**})$-denso en $\partial f^{**}(x)$.*

4. *$d^+ f_x^{**} = \sup\{\langle \cdot, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\}$.*

5. *Dados $\epsilon > 0$ y $U \hookrightarrow X^{**}$ de dimensión finita, existe $\delta > 0$ tal que*
$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f^{**}(x)}{t} - \sup\{\langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\} < \epsilon,$$
para cualesquiera $0 < t < \delta,\ u^{**} \in S_U$.

6. *Dados $\epsilon > 0$ y $u^{**} \in S_{X^{**}}$, existe $\delta > 0$ tal que*
$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f^{**}(x)}{t} - \sup\{\langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\} < \epsilon,$$
para cualquier $0 < t < \delta$.

Demostración: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en virtud del Teorema 1.25.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Denotemos por τ la topología $\sigma(X^{***}, X^{**})$ de X^{***} y A la τ-clausura de $\partial f(x)$ en X^{***}. La inclusión $A \subset \partial f^{**}(x)$ deriva del Lema 2.2, apartado (ii). Probemos la opuesta. Tomemos N un τ-entorno cerrado de 0 en X^{***}. Por ser A τ-compacto y N τ-cerrado, $A + N$ es τ-cerrado. Por hipótesis existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\partial_\epsilon f(x) \subset \partial f(x) + (N \cap X^*) \subset A + N. \tag{2.7}$$

Demostremos ahora $\partial f^{**}(x) \subset A + N$: Sea $x^{***} \in \partial f^{**}(x)$. Se tiene

$$f^{***}(x^{***}) + f(x) = \langle x, x^{***} \rangle < \langle x, x^{***} \rangle + \frac{\epsilon}{3}.$$

Como $x^{***} \in \partial f^{**}(x)$, en particular, $x^{***} \in \mathrm{dom}(f^{***})$. Por el Lema 2.4, $x^{***} \in \overline{\mathrm{dom}(f^*)}^{\tau}$; y por el Lema 2.3

$$f^{***}(x^{***}) = \inf\{\liminf_i f^*(x_i^*) : (x_i) \subset \mathrm{dom}(f^*), x_i^* \xrightarrow{w^*} x^{**}\}.$$

Por tanto existe $(x_i^*)_{i\in I}$, una red contenida en $\mathrm{dom}(f^*)$, que τ-converge a x^{***}, cumpliendo

$$f^{***}(x^{***}) + \frac{\epsilon}{3} > \liminf_i f^*(x_i^*).$$

Existe una subred de $(x_i)_{i\in I}$, que será denotada de la misma manera, tal que

$$f^{***}(x^{***}) + \frac{\epsilon}{3} > \lim_i f^*(x_i^*).$$

Existe $i_0 \in I$ tal que, para todo $i \geq i_0$, se tiene

$$f^{***}(x^{***}) + \frac{\epsilon}{3} > f^*(x_i^*).$$

Existe $i_1 \in I$ tal que, para todo $i \geq i_1$, se tiene $|\langle x, x^{***} - x_i^*\rangle| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Tomemos $i_2 \geq i_0, i_1$, y consideremos la red $(x_i^*)_{i\geq i_2}$ que τ-converge a x^{***}. Se tiene

$$f^*(x_i^*) < f^{***}(x^{***}) + \frac{\epsilon}{3} < \langle x, x^{***}\rangle + \frac{\epsilon}{3} - f(x) + \frac{\epsilon}{3} < \langle x, x_i^*\rangle - f(x) + \epsilon,$$

es decir, $x_i^* \in \partial_\epsilon f(x) \subset A+N$. Como $A+N$ es τ-cerrado y $(x_i^*)_{i\geq i_2}$ τ-converge a x^{***}, $x^{***} \in A+N$. Así pues $\partial f^{**}(x) \subset A+N$ y como N es un τ-entorno cerrado arbitrario de 0 se tiene $\partial f^{**}(x) \subset A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea N un w-entorno de 0 en X^*. Tomemos N^* un w^*-entorno de 0 convexo en X^{***} tal que $N^* \cap X^* \subset N$. Por ser f^{**} continua en x, ∂f^{**} es superiormente w^*-semicontinua (Proposición 1.16) y por tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\partial f^{**}(B^{**}(x,\delta)) \subset \partial f^{**}(x) + \frac{1}{2}N^*.$$

Por hipótesis $\partial f^{**}(x) \subset \partial f(x) + \dfrac{1}{2}N^*$. Por tanto

$$\partial f^{**}(B^{**}(x,\delta)) \subset \partial f^{**}(x) + \frac{1}{2}N^* \subset \partial f(x) + \frac{1}{2}N^* + \frac{1}{2}N^* \subset \partial f(x) + N^*.$$

Como $\partial f^{**}(y) \cap X^* = \partial f(y)$ para todo $y \in \mathrm{dom}(f)$, se concluye que

$$\partial f(B(x,\delta)) \subset \partial f(x) + N.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua y convexa en D (abierto convexo en X). Se toma $x \in D$. Se ha demostrado en el Lema 2.2 que f^{**} es una función (convexa) que es continua en un entorno N^{**} de x en X^{**}. El cálculo de $\partial f^{**}(x)$ requiere sólo conocer el comportamiento de f^{**} en un entorno de x (Lema 1.27). En ese entorno, f^{**} es una función convexa y continua en N^{**}.

Así, aplicando la Proposición 1.5 a $f^{**} : N^{**} \to \mathbb{R}$, obtenemos

$$d^+ f^{**}(y^{**}) = \sup\{\langle y^{**}, x^{***}\rangle : x^{***} \in \partial f^{**}(x)\}, \qquad \forall\, y^{**} \in X^{**}.$$

Por hipótesis, $\partial f(x)$ es w^*-denso en $\partial f^{**}(x)$, luego para $y^{**} \in X^{**}$,

$$\sup\{\langle y^{**}, x^{***}\rangle : x^{***} \in \partial f^{**}(x)\} = \sup\{\langle y^{**}, x^*\rangle : x^* \in \partial f(x)\}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) Se sabe que, para todo $u^{**} \in X^{**}$, se tiene

$$\sup\{\langle u^{**}, x^*\rangle : x^* \in \partial f(x)\} = d^+ f_x^{**}(u^{**}).$$

De nuevo, f^{**} es continua en x (y en un entorno $N(x)$ convexo en X^{**}). Además es convexa. La forma como el cociente incremental

$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f^{**}(x)}{t}, \qquad t > 0$$

tiende a su límite $d^+ f_x^{**}(u^{**})$ cuando $t \to 0+$ es monótona. Por el Teorema de Dini la aproximación es uniforme sobre los compactos de X^{**}, por ejemplo sobre S_U, siendo U un subespacio de dimensión finita en X^{**}. Entonces es obvio que para todo $\epsilon > 0$, y para todo U subespacio de dimensión finita de X^{**}, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$, $u^{**} \in S_U$, entonces

$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f^{**}(x)}{t} - d^+ f_x^{**}(u^{**}) < \epsilon.$$

Esto es (v).

(v) $\Rightarrow$ (vi) Es trivial.

(vi) $\Rightarrow$ (iii) Por hipótesis se tiene

$$d^+ f_x^{**}(u^{**}) = \sup\{\langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\}, \qquad \forall\, u^{**} \in X^{**}.$$

Como, obviamente, $\partial f(x) \subset \partial f^{**}(x)$, y se sabe (esto es una afirmación siempre válida en este contexto) que

$$d^+ f_x^{**}(u^{**}) = \sup\{\langle u^{**}, x^{***} \rangle : x^{***} \in \partial f^{**}(x)\}, \qquad \forall u^{**} \in X^{**},$$

de la igualdad de los dos supremos se deduce, por el Teorema de Hahn-Banach, que $\partial f(x)$ es $\sigma(X^{***}, X^{**})$-denso en $\partial f^{**}(x)$. ■

2.2 Subespacios normantes y la topología de la bola.

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de los subespacios normantes y de la llamada *topología de la bola* considerada por G. Godefroy y N.

Kalton, [31] (ver también [18]) con el propósito de demostrar, en la sección siguiente, varios de los resultados más significativos de la memoria.

2.6 Definición. *Sea X un espacio de Banach y N un subespacio de X^*. Se dice que N es un subespacio* **normante***, , si es cerrado (en la topología de la norma) y satisface*

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x^* \in B_N\}, \qquad \forall\, x \in X.$$

Se puede demostrar de manera sencilla, aplicando el Teorema de Hahn-Banach, que un subespacio cerrado N de X^* es normante si y solamente si B_N es w^*-denso en B_{X^*}. Denotaremos por N_X la intersección de todos los subespacios cerrados normantes de X^*, que en general será cerrada pero no siempre normante. Los subespacios normantes de X^* juegan un papel importante en cuestiones de dualidad, ya que cualquier predual isométrico de X es un subespacio de X^* normante.

Además, los subespacios normantes de X^* guardan una relación directa con la diferenciabilidad de la norma, como se puede observar en el siguiente hecho: *Si la norma es bastante suave en todo S_X y es Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$, entonces $x^* = d\|\cdot\|_x \in N_X$.* En efecto: Si N es un subespacio cerrado normante de X^*, como

$$1 = \sup\{\langle x, y^*\rangle : y^* \in B_N\},$$

existe $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_N$ tal que $\langle x, y_n^*\rangle \to 1$. Aplicando la Proposición 2.1 se puede comprobar que $y_n^* \to x^*$ en la topología w, por lo que $x^* \in \overline{B_N}^{\,w} = B_N$.

Si X admite un predual N, entonces N es un subespacio normante de X^*; si además X^* no posee subespacios propios normantes, entonces $N = X^*$; por lo que $X^{**} = N^* = X$, es decir X es reflexivo. Como Godefroy demostró, la hipótesis de que X sea un espacio dual se puede debilitar, exigiendo únicamente la siguiente propiedad:

2.7 DEFINICIÓN. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de la intersección finita-infinita** *(para abreviar escribiremos $IP_{f,\infty}$) si toda familia de bolas cerradas en X, con intersección vacía, contiene una subfamilia finita con intersección vacía.*

Es fácil ver que si X es un espacio de Banach dual, entonces X posee la propiedad $IP_{f,\infty}$. En efecto: Sean N el predual de X y $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ una colección de bolas cerradas tal que para todo subconjunto finito F de I se tiene $\cap_{\alpha\in F} B_\alpha \neq \emptyset$. Ya que las bolas cerradas, por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, son $\sigma(X, N)$ compactas, se tiene $\cap_{\alpha\in I} B_\alpha \neq \emptyset$. En particular todo espacio reflexivo posee la propiedad $IP_{f,\infty}$. El siguiente resultado se debe a G. Godefroy, si bien no aparece explícitamente en ninguno de sus trabajos.

2.8 LEMA. *Sea X un espacio de Banach que posee la propiedad $IP_{f,\infty}$ y tal que X^* no posee subespacios propios normantes. Entonces X es reflexivo.*

Ahora definiremos la llamada *topología de la bola* ([31], [18]) y estudiaremos sus propiedades más importantes en relación con los subespacios normantes del dual. El motivo de introducir esta topología en esta memoria es el siguiente: En la próxima sección demostraremos uno de los teoremas más significativos de la memoria, el 2.18. Primero se demuestra el teorema para el caso en que X sea un espacio separable, y para debilitar la hipótesis de separabilidad usaremos las propiedades de la topología de la bola.

2.9 DEFINICIÓN. *Dado un espacio de Banach X, se define la* **topología de la bola**, b_X, *como la topología menos fina en X para la que cada bola cerrada es b_X-cerrada.*

Notemos que b_X depende esencialmente de la norma que se considere en X; es decir, si se substituye la norma en X por otra equivalente, la topología b_X puede variar. En general, la topología de la bola puede no ser compatible con la estructura de espacio vectorial de X.

La relación entre la topología de la bola de X y los subespacios normantes de X^* viene reflejada en la siguiente proposición, [31]:

2.10 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y sea $x^* \in X^*$. Entonces*

1. *si $x^* : B_X \to \mathbb{R}$ es b_X-continua, entonces $x^* \in N_X$; es decir, x^* pertenece a todos los subespacios normantes de X^*.*

2. *si $x^* \in N_X$ y X es separable, entonces $x^* : B_X \to \mathbb{R}$ es b_X-continuo.*

3. *si para cada subespacio separable Y de X se verifica que $x^* : B_Y \to \mathbb{R}$ es b_Y-continuo, entonces $x^* : B_X \to \mathbb{R}$ es b_X-continuo.*

De hecho este lema dice que la propiedad “el dual de un espacio de Banach no contiene ningún subespacio propio normante” es separablemente determinada: Sea X un espacio de Banach tal que para cualquier subespacio cerrado separable, su dual no tiene subespacios propios normantes. Sea $N \hookrightarrow X^*$ un subespacio cerrado propio normante. Sea $x^* \in X^* \setminus N$. Por el Lema 2.10, i) $x^* : B_X \to \mathbb{R}$ no es b_X-continua; por iii) existe $Y \hookrightarrow X$ cerrado y separable tal que $x^* : B_Y \to \mathbb{R}$ no es b_Y-continua y por ii) $x^* : B_Y \to \mathbb{R}$ no pertenece a N_Y, donde N_Y denota la intersección de todos los subespacios cerrados normantes de Y. Ya que Y es cerrado y separable, obtenemos $N_Y = Y^*$, una contradicción.

Para caracterizar la reflexividad en términos de aplicaciones bastante suaves, usaremos el siguiente resultado de Godefroy y Kalton [31].

2.11 Proposición. *Sea W un subconjunto acotado de X. Supongamos que, para cada norma equivalente en X, W es cerrado en la topología de la bola correspondiente. Entonces W es w-compacto.*

2.3 Aplicaciones bastante suaves y subespacios normantes.

Observemos que hay espacios no separables en los cuales la condición del teorema de Mazur sigue siendo válida. Los intentos por caracterizar aquellos espacios en los cuales las funciones convexas y continuas son siempre genéricamente diferenciables ha motivado la siguiente terminología:

2.12 Definición. *Un espacio de Banach X se dice que es* **un espacio de Asplund** *si cualquier fución continua convexa definida en un abierto convexo* *no vacío D de X es Fréchet diferenciable en cada punto de algún subconjunto G_δ denso de D.*

En 1978, C. Stegall, [55], consigue dar una forma definitiva a una larga serie de trabajos previos demostrando el siguiente resultado:

2.13 TEOREMA. *Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *X es un espacio de Asplund.*

2. *X^* posee la propiedad de Radon-Nykodým.*

3. *Todo subespacio separable de X tiene dual separable.*

Como se comentó en la Introducción, hay una larga serie de trabajos donde se proporcionan condiciones geométricas que implican que el espacio es de Asplund. En 1994, Contreras y Payá, [12], lograron generalizar varios resultados previos estableciendo que *todo espacio de Banach donde la norma sea bastante suave es de Asplund.* Giles y Moors, [28], probaron un resultado similar bajo una condición (formalmente) más débil, el Teorema 2.14.

En el artículo de Contreras y Payá también se demostró la siguiente afirmación: *Si X es un espacio con norma bastante suave, entonces X^* no tiene subespacios propios normantes.* En esta memoria usaremos la condición de Giles y Moors sobre un espacio de Banach para probar que su dual no posee subespacios cerrados propios normantes.

Obsérvese que la propiedad de que para alguna norma equivalente, el dual no contiene ningún subespacio propio normante y la propiedad de ser un espacio de Asplund son independientes, como se muestra en [39]. En este artículo, los autores, suponiendo la hipótesis del continuo, encuentran un ejemplo de un espacio de Asplund que no puede admitir una norma equivalente de modo que el dual de este espacio no tenga subespacios propios normantes.

En primer lugar probaremos el caso separable. Necesitaremos dos resultados previos que enunciamos a continuación. El primero de ellos, como ya se ha comentado, es debido a Giles y Moors, [28].

2.14 TEOREMA. *Un espacio es de Asplund si tiene una norma equivalente cuya aplicación dualidad tiene un grafo que contiene el grafo de una aplicación bastante suave.*

El siguiente lema es la clave en la demostración del caso separable. Es una aplicación del *Lema de Simons*, [49]; el cual tiene unas consecuencias muy diversas e importantes; y es una ligera mejora de un lema de Godefroy. Este lema se debe a Contreras y Payá, [12].

2.15 LEMA. *Sea B una frontera de X (es decir, $B \subset S_{X^*}$ tal que $B \cap \partial\|\cdot\|(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in S_X$) tal que $B \subset \overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|}(F + \alpha B_{X^*})$ para algún subconjunto F numerable de X^* y algún $0 \leq \alpha < 1$. Entonces $\mathrm{lin}(F)$ es norma-denso en X^*.*

El siguiente resultado es el caso separable del Teorema 2.18

2.16 TEOREMA. *Sea X un espacio de Banach separable tal que exista $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave cumpliendo $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para todo $x \in S_X$. Entonces X^* no tiene subespacios propios cerrados normantes.*

Demostración: Sea N un subespacio cerrado normante de X^*. Por el Teorema 2.14 X es un espacio de Asplund, por lo que existe $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ denso en S_X de modo que la norma es Fréchet diferenciable en cada x_n. Sea

$$\{x_n^*\} = \Phi(x_n) \subset \partial\|\cdot\|(x_n) = \{\|\cdot\|'(x_n)\}.$$

Como N es un subespacio normante de X^* y B_{X^*} es metrizable para la topología w^*, existe $(x_{n,m}^*)_{m=1}^{\infty} \subset B_N$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} x_{n,m}^* = x_n^* \text{ (en la topología } w^*), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sean $F = \{x_{n,m}^* : n, m \in \mathbb{N}\}$; $A = \overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|}\left(F + \frac{1}{2}B_{X^*}\right)$; $B = A \cap S_{X^*}$. Es sencillo probar que $B \neq \emptyset$.

Si B no fuese una frontera, existiría $x \in S_X$ con $B \cap \partial\|\cdot\|(x) = \emptyset$; esto es, $A \cap \partial\|\cdot\|(x) = \emptyset$. Como A es convexo con norma-interior no vacío y $\partial\|\cdot\|(x)$ es convexo, por el Teorema de separación existe $z^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que

$$\sup\{\langle z^{**}, a^*\rangle : a^* \in A\} \leq \inf\{\langle z^{**}, x^*\rangle : x^* \in \partial\|\cdot\|(x)\}.$$

Demostremos el siguiente hecho:

$$f^* \in F \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} + \langle z^{**}, f^*\rangle \leq \inf\{\langle z^{**}, x^*\rangle : x^* \in \partial\|\cdot\|(x)\} :$$

Sean $\eta > 0$, $f^* \in F$. Existe $z^* \in B_{X^*}$ tal que $1 - \eta < \langle z^{**}, z^*\rangle$. Como $f^* + \dfrac{1}{2}z^* \in A$, tenemos

$$\inf\{\langle z^{**}, x^*\rangle : x^* \in \partial\|\cdot\|(x)\} \geq \langle z^{**}, f^* + \frac{1}{2}z^*\rangle > \langle z^{**}, f^*\rangle + \frac{1}{2}(1-\eta).$$

Es suficiente hacer tender $\eta \to 0+$ para probar el hecho.

Sea $W := \{y^* \in X^* : |\langle z^{**}, y^* \rangle| < \frac{1}{2}\}$ un w-entorno convexo de 0 en X^*. Por la afirmación recién demostrada se tiene

$$F \cap (\partial \| \cdot \|(x) + W) = \emptyset. \tag{2.8}$$

Como Φ es bastante suave en x, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\Phi(B(x, \epsilon) \cap S_X) \subset \Phi(x) + \frac{1}{2}W. \tag{2.9}$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es denso en S_X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$. Como la norma es Fréchet diferenciable en x_n y $\lim_{m\to\infty} \langle x_n, x^*_{n,m} \rangle = \langle x_n, x^*_n \rangle = 1$ se obtiene, por el test de Šmulyan, $\lim_{m\to\infty} \|x^*_{n,m} - x^*_n\| = 0$. Se deduce que existe $f^* \in F$ tal que $\|f^* - x^*_n\| < \frac{1}{4}$, de donde

$$\langle z^{**}, f^* - x^*_n \rangle \leq \|f^* - x^*_n\| < \frac{1}{4}.$$

Por tanto, $f^* \in x^*_n + \frac{1}{2}W$. Como $\|x_n - x\| < \epsilon$, y $\| \cdot \|$ es Fréchet diferenciable en x_n, por (2.9) se tiene que

$$x^*_n \in \partial \| \cdot \|(x_n) = \Phi(x_n) \subset \Phi(B(x, \epsilon) \cap S_X) \subset \Phi(x) + \frac{1}{2}W.$$

Resulta

$$f^* \in x^*_n + \frac{1}{2}W \subset \Phi(x) + \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subset \Phi(x) + W.$$

Esto contradice (2.8). Por lo tanto B es una frontera. Por el Lema 2.15 $\mathrm{lin}(F)$ es norma-denso en X^*. Ya que $F \subset B_N$, obtenemos $\mathrm{lin}(F) \subset N$ y debido a que N es norma-cerrado obtenemos $N = X^*$. ■

Necesitaremos el siguiente lema elemental para probar el caso general. Por esta vez, distinguiremos la norma en un espacio X ($\|\cdot\|_X$) de la inducida por ella en un subespacio Y ($\|\cdot\|_Y$).

2.17 LEMA. *Sea $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|_X(x)$ para todo $x \in S_X$. Sea Y un subespacio cerrado de X. Definimos $\Psi : S_Y \to \mathcal{P}(Y^*) \setminus \emptyset$ como $\Psi(y) = \{{x^*}_{|Y} : x^* \in \Phi(y)\}$. Entonces*

1. *$\Psi(y) \subset \partial\|\cdot\|_Y(y)$ para todo $y \in S_Y$.*

2. *Ψ es bastante suave.*

Demostración: (i) Sea $x^* \in \Phi(y) \subset \partial\|\cdot\|_X(y)$, para un cierto $y \in S_Y$. Entonces $\langle y, {x^*}_{|Y}\rangle = \langle y, x^*\rangle = 1$. Además se tiene

$$1 = \|x^*\| \geq \|{x^*}_{|Y}\| \geq \langle y, {x^*}_{|Y}\rangle = 1.$$

Esto implica que ${x^*}_{|Y} \in S_Y$ y ${x^*}_{|Y} \in \partial\|\cdot\|_Y(y)$.

(ii) Sea $y \in S_Y$ y W un w-entorno de 0 en Y^*. Como $x^* \mapsto {x^*}_{|Y}$ es continua para las topologías w, existe un w-entorno V de 0 en X^* tal que $\{x^*_{|Y} : x^* \in V\} \subset W$. Como Φ es bastante suave en y, existe $\delta > 0$ tal que $\Phi(B(y,\delta) \cap S_X) \subset \Phi(y) + V$. Ahora es fácil probar que $\Psi(B(y,\delta) \cap S_Y) \subset \Psi(y) + W$. ■

Ahora estamos en condiciones de probar el caso general. Para tal fin haremos uso de los resultados de Godefroy y Kalton sobre la topología de la bola descritos en la sección previa.

2.18 Teorema. *Sea X tal que existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave cumpliendo $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para todo $x \in S_X$. Entonces X^* no tiene subespacios propios cerrados normantes.*

Demostración: Sea X tal que exista $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$, bastante suave, cumpliendo $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para todo $x \in S_X$. Hay que demostrar que $N = X^*$. Por el Lema 2.10 (i), basta probar que si $x^* \in B_{X^*}$, entonces ${x^*}_{|B_X}$ es b_X-continua. Por la parte (iii) del Lema 2.10 basta probar que si $x^* \in B_{X^*}$, entonces ${x^*}_{|B_Y}$ es b_Y-continua para cualquier subespacio cerrado Y separable de X, y, por la parte (ii) del Lema 2.10, basta probar que si $y^* \in B_{Y^*}$, entonces $y^* \in N_Y$ para todo Y subespacio cerrado separable de X.

Sea $y^* \in B_{Y^*}$, siendo Y cualquier subespacio cerrado separable de X. Por el Lema 2.17 existe $\Psi : S_Y \to \mathcal{P}(Y^*)\setminus\emptyset$ bastante suave tal que $\Psi(y) \subset \partial\|\cdot\|_Y(y)$ para todo $y \in S_Y$, y, por el Teorema 2.16, Y no tiene subespacios cerrados propios normantes. Por tanto $y^* \in N_Y$. ■

El siguiente resultado muestra una aplicación directa del Teorema 2.18 a la geometría de los espacios de Banach y es una generalización de un resultado de Godefroy aparecido en [30].

2.19 Corolario. *Sea X un espacio de Banach tal que exista $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave cumpliendo $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para todo $x \in S_X$. Entonces cualquier subconjunto de X acotado y w-cerrado es una intersección de uniones finitas de bolas de X.*

Demostración: Sólo necesitamos probar que la topología b_X coincide en los subconjuntos acotados con la topología w (ver [31] para más detalles). Para probar esta afirmación, por la Proposición 2.10, es suficiente demostrar que si Y es un subespacio separable de X y $x^* \in X^*$, entonces $x^*_{|Y}$ pertenece a todos los subespacios cerrados normantes de Y^*. Esto es claramente cierto por el Teorema 2.18. ■

2.4 Reflexividad y aplicaciones bastante suaves.

Utilizando los resultados de la sección anterior se proporcionan dos caracterizaciones de la reflexividad más generales que las ya comentadas en la Introducción.

2.20 TEOREMA. *X es reflexivo si y solamente si X tiene la propiedad $IP_{f,\infty}$ y existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*)\backslash\emptyset$ bastante suave y tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ $\forall x \in S_X$.*

Demostración: Si X es reflexivo, entonces X tiene la propiedad $IP_{f,\infty}$ y $\partial\|\cdot\|$ es bastante suave. El recíproco se sigue del Teorema 2.18 y del Lema 2.8. ■

El siguiente corolario es obvio:

2.21 COROLARIO. *Sea X un espacio que cumple la propiedad $IP_{f,\infty}$. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *X es reflexivo*

2. *X tiene una norma equivalente bastante suave.*

3. *Existe una norma equivalente, $\|\cdot\|$, y una aplicación $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$, para cualquier $x \in S_X$.*

Este corolario responde de manera muy parcial a un problema que aparece implícito en el trabajo de Giles y Moors, [28], y que no hemos sabido responder:

2.22 PROBLEMA. *¿Es la condición de Giles y Moors más débil que la bastante suavidad?, es decir: ¿Existe un espacio X con una norma no bastante suave y en el que sin embargo podamos definir $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$, $\forall x \in S_X$?*

Es claro, por el corolario, que si tal contraejemplo existe, éste no debe cumplir la propiedad $IP_{f,\infty}$.

Nuestra segunda caracterización de la reflexividad es una consecuencia del Lema 2.11.

2.23 TEOREMA. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es reflexivo.*

2. *Para toda norma equivalente en X existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para cualquier $x \in S_X$.*

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es evidente.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Probemos primero el caso separable. Por el Teorema de James basta probar que B_X es w-compacto, y por el Lema 2.11 basta probar que B_X es b_X-cerrado para toda norma equivalente de X. Sea $\|\cdot\|$ cualquier norma equivalente de X. Por hipótesis existe $\Phi : S_X \to \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$, $\forall x \in S_X$. Por el Teorema 2.18, X^* no tiene subespacios normantes. Por tanto, por el Lema 2.10, para todo $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*_{|B_X}$ es b_X-continuo. Veamos que B_X es b_X-cerrado: Sea $(x_d)_{d\in D} \subset B_X$ una red que tiende a x en la topología b_X. Como para todo $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*_{|B_X}$ es b_X-continuo, se concluye que $\langle x_d, x^*\rangle \xrightarrow{d\in D} \langle x, x^*\rangle$, $\forall x^* \in B_{X^*}$, es decir, que $x_d \xrightarrow{d\in D} x$ en la topología w. Por tanto $x \in \overline{B_X}^w = B_X$.

Probemos el caso general: Por el Teorema de Eberlein, basta probar que si Y es un subespacio cerrado separable, entonces Y es reflexivo. Sea $\|\cdot\|_Y$ una norma equivalente en Y. Tomemos una norma $\|\cdot\|$ equivalente en X que extienda a $\|\cdot\|_Y$. Por el Lema 2.17 existe $\Phi : S_Y \to \mathcal{P}(Y^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Psi(y) \subset \partial\|\cdot\|_Y(y)$, para todo $y \in S_Y$, y por el caso separable, Y es reflexivo. $\blacksquare$

3 Normas ásperas y funciones bump.

Este capítulo está dividido en dos secciones que guardan una estrecha relación. En la primera sección se hará un estudio de las llamadas *normas ásperas*. Esta clase de normas fue introducida por Leach y Whitfield, [41], bajo el nombre de *normas con diferencial uniformemente discontinua*, con la intención de caracterizar los espacios de Banach X tales que $\mathrm{dens}(X) = \mathrm{dens}(X^*)$. Veremos que este tipo de normas coincide con otra clase de normas introducidas en [15]. En la segunda sección se generaliza el siguiente resultado de Ekeland y Lebourg, [21]: *Si X es un espacio de Banach que admite un bump Fréchet diferenciable, entonces X es un espacio de Asplund*, mediante un teorema que cuantifica el "grado de aspereza" de una norma en relación con la existencia de un bump que también posea un cierto "grado de aspereza".

3.1 Normas ásperas.

Como hemos visto en el capítulo previo, las propiedades de diferenciabilidad de la norma influyen considerablemente sobre la situación de que el espacio donde está definida dicha norma sea o no un espacio de Asplund. A pesar de todo, y como es bien conocido, esta propiedad posee una caracterización exclusivamente topológica. El siguiente concepto, estudiado originalmente en Day [14], Kurzweil, [40], Whitfield, [57], y en Leach y Whitfield, [41], es "lo diametralmente opuesto a que la norma sea Fréchet diferenciable".

3.1 DEFINICIÓN. *Una norma* $\|\cdot\|$ *en un espacio de Banach* X *se dice que es* **áspera** *si existe* $\epsilon > 0$ *tal que para todo* $x \in S_X$ *y* $\eta > 0$*, existen* $x_1, x_2 \in B(x, \eta)$*,* $u \in S_X$ *cumpliendo* $d^+\|\cdot\|_{x_1}(u) - d^+\|\cdot\|_{x_2}(u) \geq \epsilon$*.*

Notar que el número positivo ϵ que aparece en la definición anterior, por la desigualdad triangular, no puede ser mayor que 2. Leach y Whitfield, en [41], donde usaron la terminología **norma con diferencial uniformemente discontinua**, probaron la siguiente caracterización que nos será útil:

3.2 LEMA. *Sea* X *un espacio de Banach con norma* $\|\cdot\|$*. Entonces la norma es áspera si y solamente si existe* $\epsilon > 0$ *tal que para todo* $x \in S_X$ *y* $\eta > 0$*, existe* $v \in X$ *tal que* $\|v\| < 2$ *y* $\|x + tv\| > 1 + \epsilon\frac{|t|}{2} - \eta$*, donde* $|t| \leq 1$*.*

El siguiente resultado establece la equivalencia entre el concepto introducido por Leach y Whitfield y el que aparece en [15].

3.3 TEOREMA. *Sea* $\|\cdot\|$ *una norma en un espacio de Banach* X*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La norma $\|\cdot\|$ es áspera.*

2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in S_X$ y $\alpha > 0$, el diámetro de $\partial\|\cdot\|_\alpha(x)$ es mayor o igual que ϵ.*

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sean $x \in S_X$, $\alpha > 0$. Por hipótesis existen $x_1, x_2 \in B(x,\alpha)$, $u \in S_X$ tales que $d^+\|\cdot\|_{x_1}(u) - d^+\|\cdot\|_{x_2}(u) \geq \epsilon$. Por la Proposición 1.5 existen $x_i^* \in \partial\|\cdot\|(x_i)$, $i = 1,\ 2$ de modo que $d^+\|\cdot\|_{x_i}(u) = \langle u, x_i^*\rangle$. Entonces $\|x_1^* - x_2^*\| \geq \langle u, x_1^* - x_2^*\rangle \geq \epsilon$, por lo que sólo falta comprobar $x_i^* \in \partial\|\cdot\|_\alpha(x)$, $i = 1,\ 2$. Como $x_i^* \in \partial\|\cdot\|(x)$, entonces es cierto $\|x_i^*\| = 1$, $\langle x_i, x_i^*\rangle = 1$, por tanto

$$\begin{aligned}\langle x, x_i^*\rangle &= \langle x - x_i, x_i^*\rangle + \langle x_i, x_i^*\rangle = \\ &= 1 - \langle x_i - x, x_i^*\rangle \geq 1 - \|x_i^*\|\|x_i - x\| \geq 1 - \alpha.\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Usaremos el Lema 3.2 para probar esta implicación. Sean $x \in S_X$, $\eta > 0$. Por hipótesis existe $\epsilon > 0$ tal que $\operatorname{diam}(\partial\|\cdot\|_{\eta/2}(x)) \geq \epsilon$. Por tanto existen $x_1^*,\ x_2^* \in \partial\|\cdot\|_{\eta/2}(x)$ con $\|x_1^* - x_2^*\| > \epsilon$. Sea $u \in S_X$ tal que $\langle u, x_1^* - x_2^*\rangle > \epsilon$.

Sea $v := u - \dfrac{\langle u, x_1^* + x_2^*\rangle}{2}x$. Se tiene $\|v\| \leq 1 + \dfrac{1}{2}|\langle u, x_1^* + x_2^*\rangle| \leq 2$; pero si fuese $\|v\| = 2$, entonces se tendría que, o bien $\langle u, x_1^*\rangle = \langle u, x_2^*\rangle = 1$, o bien $\langle u, x_1^*\rangle = \langle u, x_2^*\rangle = -1$, lo cual es una contradicción con $\langle u, x_1^* - x_2^*\rangle > \epsilon$. Por tanto $\|v\| < 2$. De forma análoga se comprueba $0 < \|v\|$.

Sea $|t| \leq 1$. Definimos $s := 1 - \dfrac{1}{2}\langle tu, x_1^* + x_2^*\rangle$. Fácilmente se comprueba que $0 < s < 2$ y que $sx + tu = x + tv$. Entonces, si $t > 0$,

$$\|x + tv\| = \|sx + tv\| = s\|x + \frac{t}{s}u\| \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq s\langle x + \frac{t}{s}u, x_1^*\rangle \geq s\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) + t\langle u, x_1^*\rangle = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\langle tu, x_1^* + x_2^*\rangle - \frac{s\eta}{2} + t\langle u, x_1^*\rangle = \\
&= 1 - \frac{s\eta}{2} + t\frac{\langle u, x_1^* - x_2^*\rangle}{2} \geq \\
&\geq 1 - \frac{s\eta}{2} + \frac{t\epsilon}{2} > 1 - \eta + \frac{t\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Para $t < 0$, razonando de manera completamente similar, obtenemos $\|x + tv\| > 1 - \eta + |t|\frac{\epsilon}{2}$. ■

La siguiente proposición constituye otra caracterización de las normas ásperas y su demostración puede encontrarse en [15]. Precisamente, en dicho libro se toma como definición de norma áspera la parte (ii) de la próxima proposición.

3.4 PROPOSICIÓN. *Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio de Banach X. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *$\|\cdot\|$ es una norma áspera.*
2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in S_X$,*

$$\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\| + \|x-h\| - 2}{\|h\|} \geq \epsilon.$$

La siguiente proposición generaliza a la anterior al caso de las funciones convexas e inferiormente semicontinuas:

3.5 PROPOSICIÓN. *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ y $\epsilon > 0$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\displaystyle\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{\|h\|} \geq \epsilon$.
2. *Para todo* $\alpha > 0$, *se tiene* $\operatorname{diam}(\partial_\alpha f(x_0)) \geq \epsilon$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Por hipótesis, existe (h_n) una sucesión en X, $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$ tal que

$$\frac{f(x_0+h_n)+f(x_0-h_n)-2f(x_0)}{\|h_n\|} \geq \epsilon - \frac{1}{n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $x_n^* \in \partial f(x_0+h_n)$, $y_n^* \in \partial f(x_0-h_n)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
&\langle x_0+h_n, x_n^*\rangle + \langle x_0-h_n, y_n^*\rangle = \\
&\quad = f(x_0+h_n)+f^*(x_n^*)+f(x_0-h_n)+f^*(y_n^*) \geq \\
&\quad \geq 2f(x_0)+\|h_n\|+(\epsilon-\frac{1}{n})+f^*(x_n^*)+f^*(y_n^*).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&\langle h_n, x_n^*-y_n^*\rangle \geq \\
&\quad \geq 2f(x_0)+\|h_n\|(\epsilon-\frac{1}{n})+f^*(x_n^*)+f^*(y_n^*)-\langle x_0, x_n^*+y_n^*\rangle \geq \\
&\quad \geq \|h_n\|(\epsilon-\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\|x_n^*-y_n^*\| \geq \epsilon - \frac{1}{n}. \tag{3.1}$$

Por otra parte, al ser f continua en x_0 (ya que f es inferiormente semicontinua y x_0 está en el interior de $\mathrm{dom}(f)$), podemos suponer que existe $M > 0$ tal que $\|x_n^*\|, \|y_n^*\| \le M$. Resulta

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f^*(x_n^*) = \\ & \quad = f(x_0) + \langle x_0 + h_n, x_n^* \rangle - f(x_0 + h_n) \le \\ & \quad \le f(x_0) - f(x_0 + h_n) + \langle x_0, x_n^* \rangle + M\|h_n\|. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0) + f^*(x_n^*) - \langle x_0, x_n^* \rangle = 0$. Análogamente obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0) + f^*(y_n^*) - \langle x_0, y_n^* \rangle = 0$. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \ge n_0$,

$$0 \le f(x_0) + f^*(x_n^*) - \langle x_0, x_n^* \rangle \le \alpha, \quad 0 \le f(x_0) + f^*(y_n^*) - \langle x_0, y_n^* \rangle \le \alpha.$$

Esto implica que $x_n^*, y_n^* \in \partial_\alpha f(x_0)$. Por (3.1), $\mathrm{diam}\,(\partial_\alpha f(x_0)) \ge \epsilon - \dfrac{1}{n}$ para $n \ge n_0$. Luego $\mathrm{diam}\,(\partial_\alpha f(x_0)) \ge \epsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $\lambda > 0$ tal que $B(x_0, \lambda) \subset \mathrm{dom}(f)$. Sea $\alpha > 0$. Fijemos $\delta \in]0, \alpha\epsilon\lambda[$. Por hipótesis existen $x^*, y^* \in \partial_\delta f(x_0)$ con $\|x^* - y^*\| \ge \epsilon(1-\alpha)$. Tomemos $u \in S_X$ con $\epsilon(1-\alpha) < \langle u, x^* - y^* \rangle$. Se tiene

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \lambda u) + f(x_0 - \lambda u) \ge \\ & \quad \ge \langle x_0 + \lambda u, x^* \rangle - f^*(x^*) + \langle x_0 - \lambda u, y^* \rangle - f^*(y^*) = \\ & \quad = \langle x_0, x^* + y^* \rangle + \lambda \langle u, x^* - y^* \rangle - f^*(x^*) - f^*(y^*) \ge \\ & \quad \ge \langle x_0, x^* + y^* \rangle + \lambda \langle u, x^* - y^* \rangle - f^*(x^*) - f^*(y^*) \ge \\ & \quad \ge \langle x_0, x^* + y^* \rangle + \lambda\epsilon(1-\alpha) + 2f(x_0) - \langle x_0, x^* \rangle - 2\delta - \langle x_0, y^* \rangle = \\ & \quad = \lambda\epsilon(1-\alpha) + 2f(x_0) - 2\delta, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{f(x_0+\lambda u)+f(x_0-\lambda u)-2f(x_0)}{\lambda} \geq \epsilon(1-3\alpha).$$

Por tanto

$$\sup_{\|h\|=\lambda} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{\|h\|} \geq \epsilon.$$

Como esto vale para todo $\lambda > 0$, obtenemos

$$\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{\|h\|} \geq \epsilon.$$

■

La relación entre normas ásperas y espacios de Asplund queda reflejada en la siguiente proposición, [15], demostrada originalmente en [41] con otra técnica.

3.6 Proposición. *Sea X un espacio de Banach. X admite una norma equivalente áspera si y solamente si X no es un espacio de Asplund.*

3.2 Funciones bump.

Un resultado muy útil en Análisis Funcional es el llamado *Principio Variacional de Ekeland*, que enunciamos a continuación y cuya demostración puede verse, por ejemplo, en [15]. Se puede consultar [20] para observar la aplicación de este principio al análisis no lineal.

3.7 Teorema. *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función inferiormente semicontinua, acotada inferiormente y propia. Sea* $\epsilon > 0$. *Entonces existe* $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ *tal que, para todo* $x \in X$, *se tiene*

$$f(x) \geq f(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|, \qquad f(x_0) \leq \inf_X f + \epsilon.$$

La existencia de funciones bump con ciertas condiciones de diferenciabilidad como consecuencia de que la norma sea diferenciable queda reflejada en el siguiente hecho elemental: *Si un espacio admite una norma equivalente Fréchet diferenciable, entonces existe un bump Lipschitz y continuamente Fréchet diferenciable.* En la otra dirección Leach y Whitfield probaron que *si* $\operatorname{dens}(X^*) > \operatorname{dens}(X)$, *entonces no existe un bump Fréchet diferenciable*, [41]. Recordemos que el **carácter de densidad** de X, denotado por $\operatorname{dens}(X)$, es el mínimo cardinal de un subconjunto denso de X. Claramente esta última afirmación tiene una conexión directa con los espacios de Asplund por el Teorema 2.13. Posteriormente Ekeland y Lebourg probaron que *si existe una norma equivalente Fréchet diferenciable, el espacio es de Asplund*, [21].

Damos a continuación un Teorema que cuantifica el "grado" de "aspereza" de una norma en relación con la existencia de un bump que también posea un cierto grado de "aspereza". Esto precisa lo cerca que un espacio está de ser Asplund cuando existe un bump con determinadas propiedades de "cuasi-suavidad".

Obsérvese que este resultado implica en particular que si existe $f : X \to \mathbb{R}$ un bump Fréchet diferenciable, entonces X es un espacio de Asplund.

3.8 TEOREMA. *Sea C un subconjunto cerrado y acotado del espacio de Banach X. Si existe $f : C \to \mathbb{R}$, continua y acotada inferiormente cumpliendo*

1. *Existe $\delta \geq 0$ tal que, para todo $x \in \operatorname{int}(C)$,*
$$\limsup_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} \leq \delta.$$
2. *Existe $x_0 \in \operatorname{int}(C)$ tal que $f(x_0) < \inf_{\partial C} f$ y*
3. *f acotada inferiormente.*

Entonces X no puede tener una norma ϵ-áspera para $\epsilon > \gamma\delta/\alpha$, siendo $\alpha = \inf_{\partial C} f - f(x_0)$, $\gamma = \sup\{\|x_0 - x\| : x \in C\}$.

Demostración: Supongamos que X sí tiene una norma ϵ-áspera para $\epsilon > \dfrac{\gamma\delta}{\alpha}$. Sea $\rho > 0$, $M = \gamma + \rho$, $\sigma \in]0, \dfrac{\rho}{\gamma}[$. Sea $\psi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\psi(x) := \begin{cases} \frac{M}{\alpha}[f(x) - f(x_0)] - \|x - x_0\| & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}.$$

ψ es inferiormente semicontinua y acotada inferiormente. Por el Principio Variacional de Ekeland (Teorema 3.7), existe $z_0 \in C$ tal que

$$\psi(x) \geq \psi(z_0) - \sigma\|x - z_0\| \qquad \forall\, x \in X. \tag{3.2}$$

A partir de (3.2) se obtiene

$$\psi(z_0) \leq \psi(x_0) + \sigma\|x_0 - z_0\| = \sigma\|x_0 - z_0\| \leq \sigma\gamma.$$

Si $z_0 \in \partial C$, entonces

$$\psi(z_0) = \frac{M}{\alpha}[f(z_0) - f(x_0)] - \|z_0 - x_0\| > M - \gamma = \rho,$$

luego $\rho < \psi(z_0) \leq \sigma\gamma < \rho$, lo cual es una contradicción. Por tanto $z_0 \in C \setminus \partial C = \mathrm{int}(C)$. Tomemos $\eta > 0$ tal que $B(z_0, \eta) \subset C$.

Sea $h \in X$, $0 < \|h\| < \eta$. Se tiene

$$\psi(z_0 + h) \geq \psi(z_0) - \sigma\|h\|. \tag{3.3}$$

Es decir,

$$\frac{M}{\alpha}[f(z_0+h) - f(x_0)] - \|z_0+h-x_0\| > \frac{M}{\alpha}[f(z_0) - f(x_0)] - \|z_0 - x_0\| - \sigma\|h\|,$$

luego, llamando $s_0 := z_0 - x_0$,

$$\sigma\|h\| + \frac{M}{\alpha}[f(z_0 + h) - f(z_0)] > \|s_0 + h\| - \|s_0\|.$$

Si en (3.3) se substituye h por $-h$ se obtiene

$$\sigma\|h\| + \frac{M}{\alpha}[f(z_0 - h) - f(z_0)] > \|s_0 - h\| - \|s_0\|.$$

Si se suman las dos desigualdades anteriores y se divide por $\|h\|$ se obtiene:

$$2\sigma + \frac{M}{\alpha}\frac{f(z_0 + h) + f(z_0 - h) - 2f(z_0)}{\|h\|} > \frac{\|s_0 + h\| + \|s_0 - h\| - 2\|s_0\|}{\|h\|}.$$

Al tomar límites superiores, ya que la norma es ϵ-áspera, se consigue $\epsilon \leq 2\sigma + M\dfrac{\delta}{\alpha}$; es decir $\epsilon < 2\dfrac{\rho}{\gamma} + (\rho+\gamma)\dfrac{\delta}{\alpha}$. Como esta desigualdad vale para todo $\rho > 0$, se obtiene $\epsilon \leq \gamma\delta/\alpha$, una contradicción. ∎

4 Diferenciabilidad uniforme.

En este Capítulo se estudian conceptos más restrictivos de diferenciabilidad que los estudiados en capítulos precedentes (concretamente la *uniformeme Gâteaux diferenciabilidad* y la *diferenciabilidad de orden superior a* 1). Consiguiendo un resultado que afirma que en espacios separables toda función convexa y Lipschitz se puede expresar como límite (uniforme en los compactos) de funciones convexas, Lipschitz y uniformemente Gâteaux diferenciables. Hemos de destacar que la construcción presentada en la demostración de este resultado se basa en una técnica ideada por Fabian y Zizler, [22].

4.1 Funciones uniformemente Gâteaux diferenciables y funciones suaves.

En la siguiente definición se pretende dar una noción de "uniformidad" para la Gâteaux diferenciabilidad.

4.1 Definición. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$, D un abierto no vacío de un espacio de Banach y sea $E \subset D$. Decimos que f es* **uniformemente Gâteaux**

diferenciable *en E si f es Gâteaux diferenciable en todo punto de E y para todo $\epsilon > 0$, $u \in S_X$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \frac{f(z+tu)-f(z)}{t} - df_z(u) \right| < \epsilon, \qquad \forall\ |t| \in]0,\delta[,\ z \in E.$$

La norma $\|\cdot\|$ se dice **uniformemente Gâteaux diferenciable** *si es uniformemente Gâteaux diferenciable en $\{x \in X : \|x\| > r\}$ para algún $r > 0$.*

La siguiente proposición caracteriza la uniforme Gâteaux diferenciabilidad de las funciones Lipschitz:

4.2 Proposición. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz y Gâteaux diferenciable en todo punto de D, siendo D un abierto no vacío de un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es uniformemente Gâteaux diferenciable en D.*

2. *Para todos $\epsilon > 0$, $u \in S_X$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D$ se cumple*

$$|df_z(u) - df_y(u)| < \epsilon, \qquad \forall\ y \in B(z,\delta).$$

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sean $\epsilon > 0$, $u \in B_X$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z+tu)-f(z)}{t} - df_z(u) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \forall\ |t| \in]0,\delta],\ z \in D.$$

Sean $x \in D$, $y \in B(x, \frac{\epsilon\delta}{6F})$, siendo F la constante de Lipschitz de f. Entonces

$$|df_x(u) - df_y(u)| \leq$$

$$\leq \left| df_x(u) - \frac{f(x+\delta u) - f(x)}{\delta} \right| + \left| \frac{f(x+\delta u) - f(y+\delta u)}{\delta} \right| +$$
$$+ \left| \frac{f(y) - f(x)}{\delta} \right| + \left| \frac{f(y+\delta u) - f(y)}{\delta} - df_y(u) \right| \leq$$
$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{F}{\delta}\|x-y\| + \frac{F}{\delta}\|x-y\| + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sean $\epsilon > 0$, $u \in B_X$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D$

$$|df_z(u) - df_y(u)| < \epsilon, \qquad \forall\, y \in B(z,\delta).$$

Sean $|t| \in]0,\delta[$ y $x \in D$. Definimos $\phi : [0,t] \to \mathbb{R}$ como $\phi(s) := f(x+su)$. Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in]0,t[$ cumpliendo $\phi(t) - \phi(0) = t\phi'(\xi)$; es decir, $f(x+tu) - f(x) = tdf_{x+\xi u}(u)$. Por tanto,

$$\left| \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} - df_x(u) \right| = |df_{x+\xi u}(u) - df_x(u)| < \epsilon,$$

ya que $x + \xi u \in B(x,\delta)$. ∎

La siguiente definición de "diferenciabilidad de orden superior a 1" está universalmente aceptada. Procede de forma inductiva.

4.3 DEFINICIÓN. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto del espacio de Banach X. La* **Fréchet diferenciabilidad de orden 1** *es simplemente la Fréchet diferenciabilidad. Sea $n \in \{2,3,\cdots\}$ y supongamos que ya hemos definido la $(n-1)$-veces Fréchet diferenciabilidad y el símbolo $f^{(n-1)} \in \mathfrak{L}^{(n-1)}(X)$. Supongamos que f es $(n-1)$-veces Fréchet diferenciable en un entorno de x y que existe $L \in \mathfrak{L}^n(X)$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+th_1)(h_2,\cdots,h_n) - f^{(n-1)}(x)(h_2,\cdots,h_n)}{t} - L(h_1,\cdots,h_n) = 0$$

uniformemente para $h_1, \cdots, h_n \in B_X$*. Entonces decimos que* f *es* n**-veces Fréchet diferenciable en** x *y denotamos* $L = f^{(n)}(x)$ [1].

Sea $E \subset D$ *un abierto y* $n \in \mathbb{N}$*. Decimos que* f *es* $\mathcal{C}^n$**-suave** *en* E *si es* n*-veces Fréchet diferenciable en todo punto de* E *y la aplicación* $x \mapsto f^{(n)}(x)$ *desde* E *sobre* $\mathcal{L}^n(X)$ *es continua en* E*. Decimos que* f *es* $\mathcal{C}^\infty$**-suave** *si es* $\mathcal{C}^n$*-suave para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Se puede comprobar fácilmente que, si $f : D \to \mathbb{R}$ (D un abierto de X), f es $\mathcal{C}^n$-suave en D si y sólamente si es n-veces Fréchet diferenciable en todo punto de D y para todo $x \in D$, $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f^{(n-1)}(z + th_1)(h_2, \cdots, h_n) - f^{(n-1)}(z)(h_2, \cdots, h_n)}{t} - f^{(n)}(z)(h_1, \cdots, h_n) \right| < \epsilon$$

para todos $0 \neq t \in]-\delta, \delta[$, $z \in D$, $\|z - x\| < \delta$, $h_1, \cdots, h_n \in B_X$.

4.2 Un teorema de aproximación.

El siguiente teorema es el principal resultado de la sección. La técnica utilizada está inspirada en un artículo de Fabian y Zizler, [22], en donde se demuestra el siguiente resultado: *Sea* X *un espacio de Banach separable que admite una norma equivalente* $\mathcal{C}^n$*-suave, donde* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. Entonces* X *admite una norma equivalente que es simultáneamente uniformemente Gâteaux diferenciable y* $\mathcal{C}^n$*-suave.*

[1] Es conocido que $f^{(n)}(x)$ es entonces simétrica con respecto a las variables $h_1, \cdots, h_n \in X$, (ver [11]), pero no necesitaremos este hecho.

4.4 TEOREMA. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces toda función f convexa y Lipschitz definida sobre $A+\delta B_X$, siendo A un abierto convexo no vacío de X y $\delta>0$, es límite en A de funciones $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ convexas, Lipschitz y uniformemente Gâteaux diferenciables, siendo dicha convergencia uniforme sobre los compactos de A. Además si f es $\mathcal{C}^n$-suave, ($n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) entonces tales funciones $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ son también $\mathcal{C}^n$-suaves.*

Demostración: Sea $f: A+\delta B_X \to \mathbb{R}$ convexa y F-Lipschitz. Consideremos los compactos

$$K_m := \frac{\delta}{4}\left[[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]\times\cdots\times[0,\frac{1}{2^{m-1}}]\right], \qquad m\in\mathbb{N},$$

y denotemos por $\mu(m)$ la medida de Lebesgue de K_m. Sea $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^\infty$-bump cumpliendo $0\le b$, $\int_{\mathbb{R}} b=1$, $b(s)=0$ para $s\notin[0,1]$. Definimos para $0<\epsilon<\dfrac{\delta}{4}$, $b_\epsilon(s):=\dfrac{1}{\epsilon}b(\dfrac{s}{\epsilon})$. Observemos que $\int_{\mathbb{R}} b_\epsilon=\int_{\mathbb{R}} b=1$. Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ un conjunto denso en S_X.

Definimos para $x\in A$, $m\in\mathbb{N}$, $0<\epsilon<1$,

$$f_{m,\epsilon}(x) := \int_{K_m} f(x-\sum_{j=1}^m t_jx_j)b_\epsilon(t_1)2b_\epsilon(2t_2)\cdots 2^{m-1}b_\epsilon(2^{m-1}t_m)d\mu(m).$$

$f_{m,\epsilon}$ está bien definida, ya que si $x\in A$, entonces $x-\sum_{j=1}^m t_jx_j\in A+\delta B_X$ (puesto que $\|\sum_{j=1}^m t_jx_j\|\le\sum_{j=1}^m t_j\le\dfrac{\delta}{4}\sum_{j=1}^m\dfrac{1}{2^{j-1}}<\delta$) y el integrando es continuo sobre K_m. Denotemos

$$B_{m,\epsilon}(t) := b_\epsilon(t_1)2b_\epsilon(2t_2)\cdots 2^{m-1}b_\epsilon(2^{m-1}t_m).$$

Observemos que $\int_{K_m} B_{m,\epsilon}(t)\; d\mu(m) = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in]0, \dfrac{\delta}{4}[$, puesto que si $j \in \{1, \cdots, m\}$, se tiene

$$\int_0^{\frac{\delta}{4\cdot 2^{j-1}}} 2^{j-1} b_\epsilon(2^{j-1}t)dt = \int_0^{\frac{\delta}{4\epsilon}} b(s)ds = 1,$$

ya que $\dfrac{\delta}{4\epsilon} > 1$.

También se verifica que, si g es una función integrable sobre K_m, entonces, por el Teorema de Fubini, si $m < m'$,

$$\int_{K_m} g(t)\; d\mu(m) = \int_{K_m} g(t)\; d\mu(m) \int_0^{\frac{\delta}{4\cdot 2^m}} \frac{4\cdot 2^m}{\delta}\; dt \cdots \int_0^{\frac{\delta}{4\cdot 2^{m'-1}}} \frac{4\cdot 2^{m'-1}}{\delta}\; dt =$$

$$= \int_{K_{m'}} g(t) \frac{4\cdot 2^m}{\delta} \cdots \frac{4\cdot 2^{m'-1}}{\delta}\; d\mu(m').$$

Paso 1. $(f_{m,\epsilon})_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión uniforme de Cauchy en A. Sean $x \in A$, $m, m' \in \mathbb{N}$, $m < m'$. Entonces

$$\begin{aligned}
(a) &:= |f_{m,\epsilon}(x) - f_{m',\epsilon}(x)| = \\
&= \left| \int_{K_m} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) - \int_{K_{m'}} f(x - \sum_{j=1}^{m'} t_j x_j) B_{m',\epsilon}(t) d\mu(m') \right| = \\
&= \left| \int_{K_{m'}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t) \frac{4\cdot 2^m}{\delta} \cdots \frac{4\cdot 2^{m'-1}}{\delta}\; d\mu(m') - \right. \\
&\qquad \left. - \int_{K_{m'}} f(x - \sum_{j=1}^{m'} t_j x_j) B_{m',\epsilon}(t) d\mu(m') \right| \le \\
&\le \left| \int_{K_{m'}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \left[B_{m,\epsilon}(t) \frac{4\cdot 2^m}{\delta} \cdots \frac{4\cdot 2^{m'-1}}{\delta} - B_{m',\epsilon} \right] d\mu(m') \right| + \\
&\qquad + \left| \int_{K_{m'}} \left(f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(x - \sum_{j=1}^{m'} t_j x_j) \right) B_{m',\epsilon}(t)\; d\mu(m') \right| \le
\end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_{K_{m'}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t) \right.$$
$$\left. \left[\frac{4 \cdot 2^m}{\delta} \cdots \frac{4 \cdot 2^{m'-1}}{\delta} - 2^m b_\epsilon(2^m t_{m+1}) \cdots 2^{m'-1} b_\epsilon(2^{m'-1} t_{m'}) \right] d\mu(m') \right| +$$
$$+ F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \int_{K_{m'}} B_{m',\epsilon}(t) d\mu(m') =$$
$$= \left| \int_{K_m} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon)}(t) d\mu(m) \cdot \right.$$
$$\left. \int_{Q_{m,m'}} (\frac{4 \cdot 2^m}{\delta} \cdots \frac{4 \cdot 2^{m'-1}}{\delta} - 2^m b_\epsilon(2^m t_{m+1}) \cdots 2^{m'-1} b_\epsilon(2^{m'-1} t_{m'})) d\mu_{m,m'} \right| +$$
$$+ F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}},$$

donde $Q_{m,m'} = \frac{\delta}{4} \left[[0, \frac{1}{2^m}] \times \cdots \times [0, \frac{1}{2^{m'-1}}] \right]$ y $\mu_{m,m'}$ es la medida de Lebesgue en $Q_{m,m'}$. Tenemos

$$(a) =$$
$$= \left| f_{m,\epsilon}(x) \left[\int_{Q_{m,m'}} \frac{4 \cdot 2^m}{\delta} \cdots \frac{4 \cdot 2^{m'-1}}{\delta} d\mu(m, m') - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \int_{Q_{m,m'}} 2^m b_\epsilon(2^m t_{m+1}) \cdots 2^{m'-1} b_\epsilon(2^{m'-1} t_{m'})) d\mu_{m,m'} \right] \right| +$$
$$+ F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} = F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \to 0, \quad (m, m' \to \infty).$$

Por tanto podemos definir para $x \in A$,

$$f_\epsilon(x) := \lim_{m \to \infty} f_{m,\epsilon}(x)$$

y este límite es uniforme en A.

PASO 2. PROPIEDADES ELEMENTALES DE f_ϵ.

f_ϵ es convexa: Por el paso 1 basta ver que las funciones $f_{m,\epsilon}$ son convexas para todo $m \in \mathbb{N}$: Sean $x, y \in A$, $\alpha \in]0,1[$. Entonces

$$\begin{aligned}
&f_{m,\epsilon}(\alpha x + (1-\alpha)y) = \\
&\quad = \int_{K_m} f(\alpha x + (1-\alpha)y - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t)\ d\mu(m) = \\
&\quad = \int_{K_m} f\left(\alpha(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) + (1-\alpha)(y - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)\right) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) \leq \\
&\quad \leq \int_{K_m} \left[\alpha f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) + (1-\alpha) f(y - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)\right] B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) = \\
&\quad = \alpha f_{m,\epsilon}(x) + (1-\alpha) f_{m,\epsilon}(y).
\end{aligned}$$

f_ϵ es F-Lipschitz: De nuevo por el paso 1 basta comprobar que las funciones $f_{m,\epsilon}$ son F-Lipschitz para todo $m \in \mathbb{N}$. Sean $x, y \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
&|f_{m,\epsilon}(x) - f_{m,\epsilon}(y)| \leq \\
&\quad \leq \int_{K_m} \left| f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(y - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \right| B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) \leq \\
&\quad \leq F\|x - y\| \int_{K_m} B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) = F\|x - y\|.
\end{aligned}$$

PASO 3. LA DIFERENCIAL DE $f_{m,\epsilon}$ EN LA DIRECCIÓN x_n PARA $m > n$.

Sean $x_0 \in A$ y t_0 suficientemente pequeño para que $x + \tau x_n \in A$ con $0 < |\tau| \leq t_0$.

$$(b) := \frac{f_{m,\epsilon}(x + \tau x_n) - f_{m,\epsilon}(x)}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\int_{K_m} f(x+\tau x_n - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) - \right.$$

$$\left. - \int_{K_m} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m)\right],$$

denotemos por I_1 la primera integral, y por I_2 la segunda. Puesto que b es un bump que se anula fuera de $[0,1]$ se tiene

$$I_1 = \int_{R_{m,n}} f(x - \sum_{j\neq n}^{m} t_j x_j) - (t_n - \tau)x_n) \prod_{j=1}^{m} 2^{j-1} b_\epsilon(2^{j-1} t_j) d\mu(m),$$

$$I_2 = \int_{R_{m,n}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m),$$

donde

$$R_{m,n} = \frac{\delta}{4}\left[[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]\times\cdots\times[0,\frac{1}{2^{n-2}}]\times \mathbb{R} \times [0,\frac{1}{2^n}]\times\cdots[0,\frac{1}{2^{m-1}}]\right].$$

Haciendo la substitución $t_n - \tau \to t_n$ obtenemos

$$I_1 = \int_{R_{m,n}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) 2^{n-1} b_\epsilon(2^{n-1}(t_n+\tau)) \prod_{j\neq n}^{m} 2^{j-1} b_\epsilon(2^{j-1} t_j) d\mu.$$

Por tanto

$$(b) = \int_{R_{m,n}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \prod_{j\neq n}^{m} 2^{j-1} b_\epsilon(2^{j-1} t_j) \cdot$$

$$\cdot 2^{2n-2} \frac{b_\epsilon(2^{n-1}t_n + 2^{n-1}\tau) - b_\epsilon(2^{n-1}t_n)}{2^{n-1}\tau} d\mu(m).$$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f_{m,\epsilon}(x+\tau x_n) - f_{m,\epsilon}(x)}{\tau} =$$

$$= \int_{R_{m,n}} f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) 2^{2n-2} b'_\epsilon(2^{n-1} t_n) \prod_{j\neq n}^{m} 2^{j-1} b_\epsilon(2^{j-1} t_j) d\mu(m).$$

Denotemos, para abreviar, si $n < m$,

$$\begin{aligned}
&\beta^n_{m,\epsilon}(t) := \\
&\quad = b_\epsilon(t_1)2b_\epsilon(2t_2)\cdots 2^{n-2}b_\epsilon(2^{n-2}t_{n-1})\ 2^{2n-2}b'_\epsilon(t)(2^{n-1}t_n)\ \cdot \\
&\quad\quad \cdot\ 2^n b_\epsilon(2^n t_{n+1})\cdots 2^{m-1}b_\epsilon(2^{m-1}t_m),
\end{aligned}$$

y, puesto que b' es un bump que se anula fuera de $[0,1]$ entonces

$$Df_{m,\epsilon}(x)(x_n) = \int_{K_m} f(x - \sum_{j=1}^m t_j x_j)\beta^n_{m,\epsilon}(t)d\mu(m),$$

donde denotaremos a partir de ahora $Dg(x)(u)$ la derivada direccional de g en el punto x en la dirección $u \neq 0$.

Paso 4. La diferencial de f_ϵ en la dirección x_n.

Sea $x \in A$ y t_0 suficientemente pequeño para que $x + sx_n \in A$ con $0 \leq |s| \leq t_0$. Definamos para $m \in \mathbb{N}$, $m > n$:

$$\phi_m(s) := f_{m,\epsilon}(x + sx_n), \quad \phi(s) := f_\epsilon(x + sx_n), \quad s \in [-t_0, t_0].$$

Por el paso 1, $\phi_m \to \phi$ uniformemente en $[-t_0, t_0]$. Ahora, por el paso 3

$$\begin{aligned}
\phi'_m(s) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\phi_m(\lambda+s)-\phi_m(s)}{\lambda} = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f_{m,\epsilon}(x+sx_n+\lambda x_n)-f_{m,\epsilon}(x+sx_n)}{\lambda} = Df_{m,\epsilon}(x+sx_n)(x_n).
\end{aligned}$$

Comprobemos que $(\phi'_m)_{m=n+1}^\infty$ converge uniformemente a cierta función Φ. Para ello bastará comprobar que es uniformemente de Cauchy. Sea $s \in [-t_0, t_0]$, $m' > m > n$.

$$(c) := |\phi'_m(s) - \phi'_{m'}(s)| =$$

$$
\begin{aligned}
&= |Df_{m,\epsilon}(x+sx_n)(x_n) - Df_{m',\epsilon}(x+sx_n)(x_n)| = \\
&= \Bigg| \int_{K_m} f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)\beta^n_{m,\epsilon}(t)d\mu(m) - \\
&\quad - \int_{K_{m'}} f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m'} t_j x_j)\beta^n_{m',\epsilon}(t)d\mu(m')\Bigg| = \\
&= \Bigg| \int_{K_{m'}} f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)\beta^n_{m,\epsilon}(t)\frac{4\cdot 2^m}{\delta}\cdots\frac{4\cdot 2^{m'-1}}{\delta}d\mu(m') - \\
&\quad - \int_{K_{m'}} f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m'} t_j x_j)\beta^n_{m',\epsilon}(t)d\mu(m')\Bigg| \leq \\
&\leq \Bigg| \int_{K_{m'}} f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)\left[\beta_{m,\epsilon}(t)\frac{4\cdot 2^m}{\delta}\cdots\frac{4\cdot 2^{m'-1}}{\delta} - \beta_{m',\epsilon}(t)\right]d\mu(m')\Bigg| + \\
&\quad + \Bigg| \int_{K_{m'}} \left(f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(x+sx_n - \sum_{j=1}^{m'} t_j x_j)\right)\beta_{m',\epsilon}(t)d\mu(m')\Bigg|.
\end{aligned}
$$

La primera integral que aparece es nula, (véase el paso 1). Por tanto,

$$
\begin{aligned}
(c) &\leq F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \int_{K_{m'}} |\beta^n_{m',\epsilon}(t)|d\mu(m') = \\
&= F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \prod_{j\neq n}^{m} \int_0^{\frac{\delta}{4\cdot 2^{j-1}}} 2^{j-1} b_\epsilon(2^{j-1}t)dt \int_0^{\frac{\delta}{4\cdot 2^{n-1}}} 2^{2n-2}|b'_\epsilon(2^{n-1}t)|dt = \\
&= F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \cdot 2^{n-1} \int_0^{\frac{\delta}{4}} |b'_\epsilon(t)|dt = \\
&= F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\epsilon^2} \int_0^{\frac{\delta}{4}} |b'(\frac{t}{\epsilon})|dt = \\
&= F \sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\epsilon} \int_0^{\frac{\delta}{4\epsilon}} |b'(s)|ds.
\end{aligned}
$$

Denotando $M(n,\epsilon) := \dfrac{2^{n-1}}{\epsilon}\displaystyle\int_0^{\frac{\delta}{4\epsilon}} |b'(s)|ds$ tenemos

$$(c) \leq FM(n,\epsilon)\sum_{j=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{j-1}},$$

expresión que tiende a 0 uniformemente cuando $m, m' \to \infty$. Por un teorema estándar del análisis real se tiene que $\phi'(s) = \lim_{m\to\infty} \phi'_m(s)$ para $s \in]-t_0, t_0[$. En concreto, para $s = 0$,

$$Df_\epsilon(x)(x_n) = \lim_{m\to\infty} Df_{m,\epsilon}(x)(x_n).$$

Paso 5. f_ϵ es Gâteaux diferenciable en A.

Sean $x \in A$ y $u \in S_X$. Tomemos $\sigma > 0$ arbitrario; existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - x_n\| < \dfrac{\sigma}{2F}$. Sean $t, t' > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f_\epsilon(x+tu) - f_\epsilon(x)}{t} - \frac{f_\epsilon(x+t'u) - f_\epsilon(x)}{t}\right| \leq \\
&\quad \leq \left|\frac{f_\epsilon(x+tu) - f_\epsilon(x+tx_n)}{t}\right| + \left|\frac{f_\epsilon(x+t'x_n) - f_\epsilon(x+t'u)}{t'}\right| + \\
&\quad + \left|\frac{f_\epsilon(x+tx_n) - f_\epsilon(x)}{t} - \frac{f_\epsilon(x+t'x_n) - f_\epsilon(x)}{t}\right| \leq \\
&\quad \leq \sigma + \left|\frac{f_\epsilon(x+tx_n) - f_\epsilon(x)}{t} - \frac{f_\epsilon(x+t'x_n) - f_\epsilon(x)}{t'}\right|,
\end{aligned}$$

haciendo tender $t, t' \to 0$; por el paso previo, se tiene

$$\limsup_{t,t'\to 0}\left|\frac{f_\epsilon(x+tu) - f_\epsilon(x)}{t} - \frac{f_\epsilon(x+t'u) - f_\epsilon(x)}{t}\right| \leq \sigma,$$

y como $\sigma > 0$ es arbitrario, concluimos que el límite anterior es nulo. Por tanto existe el límite siguiente para todo $x \in A$ y $u \in S_X$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_\epsilon(x+tu) - f_\epsilon(x)}{t}.$$

Como f_ϵ es convexa en A, se deduce que f_ϵ es Gâteaux diferenciable en todo punto de A.

Paso 6. f_ϵ es uniformemente Gâteaux diferenciable en A.

Sean $\sigma > 0$, $u \in S_X$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - x_n\| < \dfrac{\sigma}{4F}$. Tomemos $\eta := \dfrac{\sigma}{4FM(n,\epsilon)}$ (ver el paso 4 para la definición de $M(n,\epsilon)$) y comprobemos que cualquier $z \in A$ cumple

$$|d(f_\epsilon)_z(u) - d(f_\epsilon)_y(u)| < \sigma, \qquad \forall\, y \in B(z,\eta).$$

Por el paso 4 existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ($m_1, m_2 > n$) tales que

$$|d(f_\epsilon)_z(x_n) - Df_{m,\epsilon}(z)(x_n)| < \frac{\sigma}{8}, \qquad \forall\, m \geq m_1,$$

$$|d(f_\epsilon)_y(x_n) - Df_{m,\epsilon}(y)(x_n)| < \frac{\sigma}{8}, \qquad \forall\, m \geq m_2.$$

Tomemos un natural m mayor que $\max\{m_1, m_2\}$. Observemos que al ser f_ϵ F-Lipschitz, se tiene $\|d(f_\epsilon)_x\| \leq F$ para todo $x \in A$, puesto que si $v \in S_X$ y $t \neq 0$ es suficientemente pequeño

$$\left|\frac{f_\epsilon(x+tv) - f_\epsilon(x)}{t}\right| \leq F \;\Rightarrow\; \langle v, d(f_\epsilon)_x\rangle \leq F \;\Rightarrow \|d(f_\epsilon)_x\| \leq F.$$

Se tiene, por el paso 3

$$\begin{aligned}
&|d(f_\epsilon)_z(u) - d(f_\epsilon)_y(u)| \leq \\
&\quad \leq |d(f_\epsilon)_z(u - x_n)| + |d(f_\epsilon)_z(x_n) - Df_{m,\epsilon}(z)(x_n)| + \\
&\qquad + |Df_{m,\epsilon}(z)(x_n) - Df_{m,\epsilon}(y)(x_n)| + \\
&\qquad + |Df_{m,\epsilon}(y)(x_n) - d(f_\epsilon)_y(x_n)| + |d(f_\epsilon)_y(x_n - u)| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq 2F\|u-x_n\| + \frac{\sigma}{4} +$$
$$+ \int_{K_m} |f(z-\sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(y-\sum_{j=1}^{m} t_j x_j)||\beta^n_{m,\epsilon}(t)|d\mu(m) <$$
$$< \frac{3\sigma}{4} + F\|z-y\|M(n,\epsilon) < \sigma.$$

PASO 7. $\lim_{\epsilon\to 0+} f_\epsilon = f$ EN A.

Sea $x \in A$. Se tiene, para $\epsilon > 0$ arbitrario,

$$f_\epsilon(x) - f(x) = \lim_{m\to\infty} f_{m,\epsilon}(x) - f(x) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int_{K_m} \left(f(x-\sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(x) \right) B_{m,\epsilon}(t)d\mu(m). \tag{4.1}$$

Sea $\sigma > 0$. Por la continuidad de f en x existe ϵ_0 tal que

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\sigma}{2}, \qquad \text{para } \|u\| < \epsilon_0. \tag{4.2}$$

Tomemos $0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$. Vamos a probar que $|f_\epsilon(x) - f(x)| < \sigma$. Por (4.1) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| f_\epsilon(x) - f(x) - \int_{K_m} \left[f(x-\sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(x) \right] B_{m,\epsilon}(t)d\mu(m) \right| < \frac{\sigma}{2}.$$

Sean

$$K_{m1} := \{t = (t_1, \cdots, t_m) \in K_m : \|\sum_{j=1}^{m} t_j x_j\| < \epsilon_0\},$$

$$K_{m2} := \{t = (t_1, \cdots, t_m) \in K_m : \|\sum_{j=1}^{m} t_j x_j\| \geq \epsilon_0\}.$$

Si $t = (t_1, \cdots, t_m) \in K_{m2}$, entonces algún índice j_0 cumple $t_{j_0} > \dfrac{\epsilon}{2^{j_0-1}}$; ya que, si no,

$$\epsilon_0 \leq \| \sum_{j=1}^{m} t_j x_j \| \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\epsilon}{2^{j-1}} < 2\epsilon < \epsilon_0,$$

una contradicción. Como para este índice j_0 se cumple $\dfrac{2^{j_0-1}t_{j_0}}{\epsilon} > 1$, entonces $b_\epsilon(2^{j_0-1}t_{j_0}) = \dfrac{1}{\epsilon} b(\dfrac{2^{j_0-1}t_{j_0}}{\epsilon}) = 0$, y por tanto, $B_{m,\epsilon}(t) = 0$ para todo $t \in K_{m2}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
&|f_\epsilon(x) - f(x)| \leq \\
&\leq \left| f_\epsilon(x) - f(x) - \int_{K_m} \left[f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(x) \right] B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) \right| + \\
&\quad + \left| \int_{K_{m1}} \left[f(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f(x) \right] B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) \right| \leq \\
&\leq \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \int_{K_{m1}} B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) = \sigma.
\end{aligned}$$

Paso 8. $\lim_{\epsilon \to 0+} f_\epsilon = f$ uniformemente en los compactos de A.

Si K es un compacto de A; entonces por el Teorema de Heine-Cantor, f es uniformemente continua en K; luego la elección de ϵ_0 es independiente de x en (4.2). Por otra parte, la elección de m también es independiente de x, por ser el límite (4.1) uniforme en A.

A partir de este momento supondremos que f es $\mathcal{C}^n$-suave en $A + \delta B_X$.

Paso 9. Las funciones $f_{m,\epsilon}$ del paso 1 son $\mathcal{C}^n$-suaves en A y

$$f_{m,\epsilon}^{(n)}(x)(h_1, \cdots, h_n) = \int_{K_m} f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_1, \cdots, h_n) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m).$$

Obviamente ello es cierto para $n = 0$. Supongamos que ha sido probado hasta $n-1$. Lo probaremos ahora para n: Fijemos $x \in A$ y sea

$$L_{m,\epsilon}(h_1, \cdots, h_n) := \int_{K_m} f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_1, \cdots, h_n) B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m).$$

Notar que, al ser $f^{(n)}$ $\mathcal{C}^n$-suave, el integrando es continuo sobre el compacto K_m y así $L_{m,\epsilon} \in \mathcal{L}^n(X)$. Sea $\tau_1 < \dfrac{\delta}{2}$ tal que $x + \tau_1 B_X \subset A$.

Sea $\sigma > 0$ fijo para el resto de la prueba; por ser K_m compacto y $f^{(n)}$ continua en A, entonces existe $\tau_0 \in]0, \dfrac{\tau_1}{2}[$ tal que

$$\left\| f^{(n)}(z - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \right\| < \sigma,$$

para $z \in A$, $\|z - x\| < 2\tau_0$, $(t_1, \cdots, t_m) \in K_m$. Notar que, como

$$\|z - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j - x\| \leq 2\tau_0 + \sum_{j=1}^{m} t_j < 2\tau_0 + \frac{\delta}{2},$$

entonces

$$z - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j \in x + \left(2\tau_0 + \frac{\delta}{2}\right) B_X \subset x + \delta B_X \subset A + \delta B_X.$$

Ahora tomemos cualquier $\tau \neq 0$, $|\tau| < \tau_0$, $h_1, \cdots, h_n \in B_X$, $y \in X$ con $\|y - x\| < \tau_0$; entonces, por la hipótesis de inducción,

$$(d) :=$$
$$= \left| \frac{f_{m,\epsilon}^{(n-1)}(y+\tau h_1)(h_2,\cdots,h_n) - f_{m,\epsilon}^{(n-1)}(y)(h_2,\cdots,h_n)}{\tau} - L_{m,\epsilon}(h_1,\cdots,h_n) \right| =$$
$$= \left| \int_{K_m} \left[\frac{(e)}{\tau} - f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_1,\cdots,h_n) \right] B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) \right|,$$

donde

$$(e) := f^{(n-1)}(y+\tau h_1 - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_2,\cdots,h_n) - f^{(n-1)}(y - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_2,\cdots,h_n).$$

Por el Teorema del Valor Medio existe $\theta \in]0,\tau[$ tal que

$$(d) =$$
$$= \left| \int_{K_m} \left[f^{(n)}(y+\theta h_1 - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_1,\cdots,h_n) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f^{(n)}(y - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j)(h_1,\cdots,h_n) \right] B_{m,\epsilon}(t) d\mu(m) \right|.$$

Como $\|y+\theta h_1 - x\| < 2\tau_0$, entonces

$$\left\| f^{(n)}(y+\theta h_1 - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) - f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \right\| < \sigma,$$

y así $(d) < \sigma$.

Paso 10. Las funciones f_ϵ definidas en el paso 1 son $\mathcal{C}^n$-suave en A y

$$\lim_{m\to\infty} \|f_{m,\epsilon}^{(n)}(x) - f_\epsilon^{(n)}(x)\| = 0$$

PARA TODO $x \in A$.

Obviamente ello es cierto para $n = 0$. Supongamos que hubiese sido probado hasta $n-1$. Lo probaremos ahora para n: Fijemos $x \in A$. De la compacidad de $\{\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j : 0 \leq t_j \leq \frac{\delta}{4 \cdot 2^{j-1}}\}$ y la continuidad de $f^{(n)}$ obtenemos

$$\left\| f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m_1} t_j x_j) - f^{(n)}(x - \sum_{j=1}^{m_2} t_j x_j) \right\| \to 0,$$

cuando $m_1, m_2 \to \infty$. Luego, por el paso 9,

$$\lim_{m_1, m_2 \to \infty} \|f^{(n)}_{m_1,\epsilon} - f^{(n)}_{m_2,\epsilon}\| = 0.$$

Por tanto, podemos definir $L := \lim_{m \to \infty} f^{(n)}_{m,\epsilon}(x) \in \mathcal{L}^n(X)$.

Fijemos $\sigma > 0$ y sea τ_0 elegido como en el paso anterior. Tomemos cualquier $\tau \neq 0$, $|\tau| < \tau_0$, $h_1, \cdots, h_n \in B_X$, $y \in A$, $\|y - x\| < \tau_0$. Entonces, por el paso anterior,

$$\left| \frac{f^{(n-1)}_{m,\epsilon}(y + \tau h_1)(h_2, \cdots, h_n) - f^{(n-1)}_{m,\epsilon}(y)(h_2, \cdots, h_n)}{\tau} - f^{(n)}_{m,\epsilon}(x)(h_1, \cdots, h_n) \right| < \sigma,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora hacemos tender m a ∞. Por la hipótesis de inducción,

$$\left| \frac{f^{(n-1)}_{\epsilon}(y + \tau h_1)(h_2, \cdots, h_n) - f^{(n-1)}_{\epsilon}(y)(h_2, \cdots, h_n)}{\tau} - L(h_1, \cdots, h_n) \right| \leq \sigma.$$

Esto indica que f es $\mathcal{C}^n$-suave y que $f^{(n)}_{\epsilon}(x) = L = \lim_{m \to \infty} f^{(n)}_{m,\epsilon}(x)$. ■

5 Conjuntos de Cantor en el dual de un espacio de Banach.

Como se ha visto a lo largo de toda la memoria, el estudio de la diferenciabilidad en un espacio de Banach tiene unas consecuencias importantes en el comportamiento de determinados subconjuntos del dual de éste, piénsese, entre otros, en el resultado de Stegall, 2.13, sobre la caracterización de los espacios de Asplund. Por esta razón presentamos este capítulo complementario en donde se analiza la relación entre la diferenciabilidad y la inmersión de conjuntos w^*-homeomorfos al ternario de Cantor en la bola unidad del dual.

El objetivo de este capítulo es doble: Por un lado se proporciona una nueva demostración del hecho conocido de que la propiedad de ser un espacio de Asplund es una propiedad de tres espacios. Y por otra parte se generaliza un resultado de Bator, [4], concerniente a una construcción del ternario de Cantor sobre la bola unidad del dual de un espacio separable cumpliendo unas ciertas condiciones relacionadas con la propiedad de que el espacio sea de Asplund. Por último obtendremos una caracterización de los espacios de Asplund separables usando el concepto de oscilación, una idea que fue utilizada por E. Saab y P. Saab, [48], para caracterizar los espacios de Banach que contienen una copia de ℓ_1. Obsérvese que, por el Teorema 2.13, si X es un espacio de Asplund entonces no puede tener una copia de ℓ_1. Por otra parte, se ha demostrado que esta implicación es estricta (véase, por ejemplo, [15]).

5.1 Una generalización de un Lema de Stegall.

Sea X un espacio de Banach, que se considera, como siempre, un subespacio cerrado de su bidual X^{**}. Sea Y un subespacio cerrado de X. Se puede identificar, de forma natural, el bidual de Y con el subespacio $\widetilde{Y}$ de X^{**} definido como la clausura de Y en (X^{**}, w^*). Precisamente, el dual Y^* se identifica canónicamente con el cociente $X^*/Y^{\perp}$. Por tanto, el bidual Y^{**} se identifica canónicamente con $Y^{\perp\perp}$ (el segundo ortogonal para el par dual $\langle X^{**}, X^* \rangle$). El Teorema de los bipolares asegura que $Y^{\perp\perp}$ (o bien $Y^{\circ\circ}$) se identifica con la clausura de Y en (X^{**}, w^*). Esto incluye el resultado trivial de que todo subespacio de un espacio reflexivo es asimismo reflexivo.

Por otra parte, recordemos algunos hecho básicos sobre el espacio topológico Δ llamado **Ternario de Cantor**, necesarios en este Capítulo. Δ es un espacio topológico compacto que puede identificarse con el espacio producto $2^{\mathbb{N}}$ con la topología producto usual. Alternativamente, Δ puede describirse con el subespacio de $[0,1]$ (con la métrica usual) de todos los puntos que tienen una expansión decimal en base 3 que no contiene el dígito 2. Obviamente coincide con $\bigcap_{n=0}^{\infty}[\bigcup_{i=1}^{2^n} C_{n,i}]$, siendo $(C_{n,i})_{n=0}^{\infty}{}_{i=1}^{2^n}$, la colección de intervalos diádicos, es decir, intervalos cerrados obtenidos dividiendo intervalos previos en tres partes iguales y desechando el intervalo central. Δ es, pues, un espacio métrico compacto, y todo espacio compacto metrizable y no numerable es imagen continua de Δ, [38].

Necesitaremos el siguiente lema para establecer los resultados más importantes de este capítulo. Se trata de una extensión de un Lema debido a Stegall, [54].

5.1 Lema. *Sea X un espacio de Banach con dual no separable y ω_1 el primer ordinal no numerable. Entonces, para todo subespacio cerrado Y de X tal que $(X/Y)^*$ es separable y para cada $\epsilon > 0$, existen subconjuntos $\{x_\alpha^* : \alpha < \omega_1\}$ de X^* y $\{y_\alpha^{**} : \alpha < \omega_1\}$ de Y^{**} cumpliendo $\|x_\alpha^*\| = 1$, $\|y_\alpha^{**}\| < 1 + \epsilon$ para todos $\alpha < \omega_1$, así como*

$$\langle y_\alpha^{**}, x_\beta^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}.$$

Demostración: Elegimos $x_0^* \in S_{X^*}$ y sea $Z_1 := \overline{\text{lin}}^{\|\cdot\|}\{x_0^*, Y^\perp\}$, un subespacio separable (ya que $Y^\perp \simeq (X/Y)^*$) de X^*. Este último espacio no es separable, luego existe $y_1^{**} \in X^*$ cumpliendo $\|y_1^{**}\| = 1 + \dfrac{\epsilon}{2}$ y $y^*_{1|Z_1} = 0$. De esta última igualdad se concluyen dos hechos: Por una parte $\langle y_1^{**}, x_0^* \rangle = 0$ y, por otra, si $y^* \in Y^\perp$ entonces $\langle y_1^{**}, y^* \rangle = 0$ (es decir $y_1^{**} \in (Y^\perp)^\perp = Y^{**}$). Tomamos ahora $x_1^* \in S_X^*$ tal que $\langle y_1^{**}, x_1^* \rangle = 1$.

Supongamos que hemos hecho la construcción para $\alpha < \beta < \omega_1$. Sea $Z_\beta := \overline{\text{lin}}^{\|\cdot\|}\{\bigcup_{\alpha<\beta} x_\alpha^*, Y^\perp\}$, un subespacio separable de X^*. Teniendo en cuenta, de nuevo, que X^* no es separable, existe $y_\beta^{**} \in X^{**}$ cumpliendo $\|y_\beta^{**}\| = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ y $y^*_{\beta|Z_\beta} = 0$. De forma análoga al párrafo anterior se concluye $y_\beta^{**} \in Y^{**}$ y $\langle y_\beta^{**}, x_\alpha^* \rangle = 0$ para $\alpha < \beta$. Ahora basta tomar $x_\beta^* \in S_{X^*}$ tal que $\langle y_\beta^{**}, x_\beta^* \rangle = 1$. Esto completa el proceso de inducción. ∎

Obsérvese que el lema original de Stegall se obtiene del Lema 5.1 sin más que tomar $Y = X$.

5.2 La propiedad "ser un espacio de Asplund" es de tres espacios.

A partir de la definición no es obvio que un subespacio cerrado de un espacio de Asplund sea otro espacio de Asplund; sin embargo este hecho es una consecuencia fácil del Teorema 2.13. Por otra parte, si Y es un subespacio cerrado de Asplund de un espacio X, entonces no se sigue que X sea un espacio de Asplund, aunque Y sea complementado en X y el complemento sea separable. Para verlo, tómese, por ejemplo, $X = \ell_1(\mathbb{N}) \oplus \ell_2(\mathbb{N})$. $\ell_2(\mathbb{N})$ es un espacio de Asplund, por ser un espacio de Hilbert, y, sin embargo, X no es un espacio de Asplund por contener una copia de $\ell_1(\mathbb{N})$.

El siguiente teorema, ya conocido, establece que la propiedad de ser un espacio de Asplund es una propiedad de tres espacios. Recordemos que una propiedad $\mathcal{P}$ de espacios de Banach es **una propiedad de tres espacios** si X cumple $\mathcal{P}$ cuando, para un subespacio Y cerrado de X, tanto Y como X/Y cumplen $\mathcal{P}$. La demostración que puede encontrarse en [15] usa el concepto de norma áspera y delicados resultados acerca de w^*-secciones de la bola unidad del dual. Proponemos una demostración alternativa basada en el Lema 5.1:

5.2 TEOREMA. *Sea X un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X cumpliendo que tanto Y como X/Y son espacios de Asplund. Entonces X es un espacio de Asplund.*

Demostración: Primero demostremos el Teorema para el caso en que X sea separable: Si X no fuese un espacio de Asplund, por el Teorema 2.13 X^* no sería separable. Aplicamos el Lema 5.1 para $\epsilon < \frac{1}{3}$ y obtenemos subconjuntos $\{x^*_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de X^* y $\{y^{**}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de Y^{**} tales que $\|x^*_\alpha\| = 1$, $\|y^{**}_\alpha\| < 1+\epsilon$ y

$$\langle y^{**}_\alpha, x^*_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Veamos que $\{x^*_{\alpha|Y} : \alpha < \omega_1\} \subset Y^*$ no es numerable. Para ello basta tomar $\beta < \alpha$ y demostrar $x^*_{\alpha|Y} \neq x^*_{\beta|Y}$. Si $x^*_{\alpha|Y} = x^*_{\beta|Y}$, entonces $x^*_\alpha - x^*_\beta \in Y^\perp$. Pero entonces se tendría

$$0 = \langle y^{**}_\alpha, x^*_\alpha - x^*_\beta \rangle = \langle y^{**}_\alpha, x^*_\alpha \rangle - \langle y^{**}_\alpha, x^*_\beta \rangle = 1 - 0 = 1,$$

lo cual es una contradicción.

Veamos que $\{x^*_{\alpha|Y} : \alpha < \omega_1\} \subset Y^*$ es $\|\cdot\|$-discreto. Tomemos $\beta < \alpha$. Entonces se tiene $1 = \langle y^{**}_\alpha, x^*_\alpha - x^*_\beta \rangle$. Como $y^{**}_\alpha \in (1+\epsilon)B_{X^{**}}$, por el Teorema de Goldstine existe $y \in (1+\epsilon)B_X$ tal que $1-\epsilon < \langle y, x^*_\alpha - x^*_\beta \rangle$. Entonces,

$$\frac{1}{2} < \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} < \frac{1}{\|y\|}\langle y, x^*_\alpha - x^*_\beta \rangle \leq \|x^*_{\alpha|Y} - x^*_{\beta|Y}\|.$$

Como $\{x^*_{\alpha|Y} : \alpha < \omega_1\} \subset Y^*$ es $\|\cdot\|$-discreto y no es numerable, Y^* no es separable, lo cual es una contradicción con el hecho de ser Y un espacio separable y de Asplund.

Ahora demostremos el Teorema para el caso general. Para ello usaremos de nuevo el Teorema 2.13: Sea Z un subespacio cerrado de X separable. Tenemos que probar que Z^* es separable. Por el caso separable basta comprobar que tanto $(Z\cap Y)^*$ como $(Z/(Z\cap Y))^*$ son separables. Pero esto es cierto, ya que tanto Y como X/Y son espacios de Asplund y $Z\cap Y \subset Y$ y $Z/(Z\cap Y) \subset X/Y$ son ambos subespacios cerrados. ■

5.3 Conjuntos de Cantor y espacios de Asplund.

Es conocido que si X es un espacio de Banach separable con dual no separable, entonces podemos construir $\Delta \subset S_{X^*}$, un subconjunto de (S_{X^*}, w^*), que es, con la topología inducida, homeomorfo al Ternario de Cantor, donde además la aplicación $T : X \to \mathcal{C}(\Delta)$ dada por $T(x)(x^*) = \langle x, x^* \rangle$ es lineal, continua y $T(X)$ es un subespacio denso de $\mathcal{C}(\Delta)$, [4]. En general, $T(X)$ no es todo $\mathcal{C}(\Delta)$, ya que por el Teorema de Pełczynski-Hagler ([34], [44]) esta afirmación equivale a que X tenga una copia de ℓ_1. Se podría esperar que la afirmación "$T(X)$ es un subespacio denso de $\mathcal{C}(\Delta)$" fuera equivalente a "X^* no es separable"; pero esto es falso, como ha demostrado E. Bator, [4]. En dicho artículo se proporciona una caracterización de los espacios de Banach separables con dual no separable. A continuación damos una extensión de este resultado.

5.3 Teorema. *Sea X un espacio de Banach separable e Y un subespacio cerrado de X tal que $(X/Y)^*$ sea separable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cada $\epsilon > 0$ existen un subconjunto Δ de S_{X^*} que es w^*-homeomorfo al ternario de Cantor, y una sucesión $(y_{n,i})_{n=0}^{\infty}{}_{i=1}^{2^n}$ en Y con $\|y_{n,i}\| < 1+\epsilon$, tales que*

$$|\langle y_{n,i}, x^*\rangle - \chi_{C_{n,i}}(x^*)| < \frac{\epsilon}{2^n}, \qquad \forall\ x^* \in \Delta,$$

   donde todos los conjuntos $C_{n,i} \subset B_{X^*}$ son w^*-homeomorfos a los intervalos diádicos.

2. *Para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto Δ de S_{X^*}, w^*-homeomorfo al ternario de Cantor, tal que, para todo $x^* \in \Delta$, existe $y^{**} \in Y^{**}$, cumpliendo $\|y^{**}\| < 1+\epsilon$, y*

$$\langle y^{**}, z^*\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } z^* = x^* \\ 0 & \text{si } z^* \neq x^* \end{cases}, \qquad \forall\ z^* \in \Delta.$$

3. *Existe Δ, un subconjunto de S_{X^*} w^*-homeomorfo al ternario de Cantor, que es $\sigma(X^*, Y^{**})$-discreto.*

4. *X^* no es $\sigma(X^*, Y^{**})$-separable.*

5. *X^* no es separable.*

Demostración: (v) $\Rightarrow$ (i) Dado $\epsilon > 0$, aplicamos el Lema 5.1 para encontrar subconjuntos $A = \{x^*_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset X^*$ y $\{y^{**}_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset Y^{**}$ cumpliendo $\|x^*_\alpha\| = 1$, $\|y^{**}_\alpha\| < 1 + \epsilon$, y

$$\langle y^{**}_\alpha, x^*_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Eliminamos, en primer lugar, todos los puntos de A que no sean de w^*-condensación, quedándonos con un conjunto que sigue siendo no numerable, y que denotaremos de nuevo por A. Esto se puede hacer pues (B_{X^*}, w^*) es un espacio métrico compacto. Probemos la siguiente afirmación: Si $A_1, \cdots, A_n$ son subconjuntos no numerables y disjuntos de A y si j es un entero comprendido entre 1 y n inclusive, entonces para cada $\eta > 0$ existen conjuntos no numerables $A'_i \subset A_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ y $y_j \in Y$ con $\|y_j\| < 1 + \epsilon$, tales que

$$|\langle y_j, x^* \rangle - \chi_{A'_j}(x^*)| < \eta, \qquad \forall x^* \in \bigcup_{i=1}^{n} A'_i.$$

Fijemos $j \in \mathbb{N}$. Para cada $i = 1, \cdots, n$ sea $x^*_{\beta_i}$ un punto de w^*-acumulación de A_i tal que si $i \neq j$ entonces $\beta_j > \beta_i$. Entonces $\|y^{**}_{\beta_j}\| < 1 + \epsilon$ y $\langle y^{**}_{\beta_j}, x^*_{\beta_i} \rangle = \delta_{ij}$. Por el Teorema de Goldstine elegimos $y_j \in Y$ con $\|y_j\| \leq 1 + \epsilon$ y $|\langle y_j - y^{**}_{\beta_j}, x^*_{\beta_i} \rangle| < \dfrac{\eta}{2}$ para $i = 1, \cdots, n$. Se definen los siguientes subconjuntos no numerables de A_i:

$$A'_i := A_i \cap \{z^* \in X^* : |\langle y_j, z^* - x^*_{\beta_i}| < \frac{\eta}{2}\}.$$

Veamos que estos subconjuntos son los buscados: Si $x^* \in A'_i$, entonces

$$|\langle y_j, x^*\rangle - \delta_{ij}| \leq |\langle y_j, x^* - x^*_{\beta_i}\rangle| + |\langle y_j, x^*_{\beta_i}\rangle - \delta_{ij}| <$$
$$< \frac{\eta}{2} + |\langle y_j - y^{**}_{\beta_j}, x^*_{\beta_i}\rangle| + |\langle y^{**}_{\beta_j}, x^*_{\beta_i}\rangle - \delta_{ij}| < \eta.$$

Esto prueba la afirmación.

Ahora, dado el conjunto A, aplicamos la afirmación precedente (para $n = 1$) y obtenemos $A'_{0,1}$. Sean $x^*_{0,1} \in A'_{0,1}$ un punto de w^*-acumulación y

$$C_{0,1} := A'_{0,1} \cap D(x^*_{0,1}, 1),$$

donde denotamos por $D(z^*, \sigma)$ las bolas en B_{X^*} de centro z^* y radio σ en la métrica de (B_{x^*}, w^*), denotando por ρ dicha métrica (recordemos que por ser X separable, entonces (B_{x^*}, w^*) es metrizable).

Supongamos que hemos construido $(C_{n,i})_{n=0}^{m}{}_{i=1}^{2^n}$ con las propiedades

- $C_{n+1,2i-1} \cup C_{n+1,2i} \subset C_{n,i}$ para todos $n = 1, \cdots, m$; $i = 1, \cdots, 2^n$.
- $\overline{C}^{w^*}_{n+1,i} \cap \overline{C}^{w^*}_{n+1,j} = \emptyset$ para un n natural fijo comprendido entre 1 y m; $i, j = 1, \cdots, 2^n$.
- $\rho - \operatorname{diam}(\overline{C}^{w^*}_{n,i}) < \frac{1}{2^n}$ para todos $n = 1, \cdots, m$; $i = 1, \cdots, 2^n$.
- $C_{n,i}$ no son numerables para todos $n = 1, \cdots, m$; $i = 1, \cdots, 2^n$.

Elegimos $x^*_{m+1,2i-1}$, $x^*_{m+1,2i}$ dos puntos distintos de w^*-acumulación de $C_{m,i}$. Existen $U_{m+1,2i-1}$, $U_{m+1,2i}$, w^*-entornos de $x^*_{m+1,2i-1}$, $x^*_{m+1,2i}$, respectivamente, tales que $\overline{U}^{w^*}_{m+1,2i-1} \cap \overline{U}^{w^*}_{m+1,2i} = \emptyset$. Sean

$$A_{m+1,2i-1} := C_{m,i} \cap D(x^*_{m+1,2i-1}, \frac{1}{2^{m+1}}) \cap U_{m+1,2i-1},$$

$$A_{m+1,2i} := C_{m,i} \cap D(x^*_{m+1,2i}, \frac{1}{2^{m+1}}) \cap U_{m+1,2i}.$$

Aplicando la afirmación anterior 2^{m+1} veces obtenemos puntos $y_{m+1,i} \in Y$, y conjuntos $C_{m+1,i} \subset A_{m+1,i}$ para $i = 1, \cdots, 2^{m+1}$, cumpliendo $\|y_{m+1,i}\| < 1+\epsilon$, y

$$|\langle y_{m+1,i}, x^* \rangle - \chi_{C_{m+1,i}}(x^*)| < \frac{\epsilon}{2^{m+1}}, \qquad \forall\ x^* \in \bigcup_{j=1}^{2^{m+1}} C_{m+1,j}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sean $\epsilon > 0$ y Δ el subconjunto w^*-homeomorfo al ternario de Cantor satisfaciendo (i). Sea $x^* \in \Delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} C_{n,i}$. Existe una única sucesión $i(n)$ tal que $x^* \in C_{n,i(n)}$. Sea $y^{**} \in (1+\epsilon)B_{Y^{**}}$ un punto w^*-adherente de la sucesión $(y_{n,i(n)})_{n=0}^{\infty}$. Como $|\langle y_{n,i(n)}, x^* \rangle - 1| < \frac{\epsilon}{2^n}$, haciendo tender n a infinito, obtenemos $\langle y^{**}, x^* \rangle = 1$.

Si $z^* \in \Delta$, pero $z^* \neq x^*$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene $z^* \notin A_{n,i(n)}$. Por tanto $|\langle y_{n,i(n)}, z^* \rangle| < \frac{\epsilon}{2^n}$ para $n \geq n_0$. De donde se concluye $\langle y^{**}, z^* \rangle = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea Δ como en (ii). Tomemos $x^* \in \Delta$. Veamos que $\{x^*\}$ es un subconjunto $\sigma(X^*, Y^{**})$-abierto relativo a Δ. Dado este x^* encontramos, por hipótesis, $y^{**} \in Y^{**}$ cumpliendo

$$\langle y^{**}, z^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } z^* = x^* \\ 0 & \text{si } z^* \neq x^* \end{cases}, \qquad \forall\ z^* \in \Delta.$$

Entonces $\{x^*\} = \Delta \cap \{z^* \in X^* : \langle y^{**}, z^* \rangle > 0\}$. Por lo que $\{x^*\}$ es, efectivamente, un subconjunto $\sigma(X^*, Y^{**})$-abierto relativo a Δ.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Delta \subset S_{X^*}$ no es numerable y es $\sigma(X^*, Y^{**})$-discreto, de donde se deduce que X^* no es $\sigma(X^*, Y^{**})$-separable.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Es trivial. ∎

En el artículo ya citado de E. Bator, [4], se proporciona una caracterización de los espacios de Banach separables que contienen una copia de ℓ_1 mediante los ternarios de Cantor en la esfera del dual. La teoría de los espacios de Banach conteniendo a ℓ_1 está bien establecida en, por ejemplo, [19]. En [48] E. Saab y P. Saab dieron una caracterización completamente diferente:

5.4 Teorema. *Un espacio de Banach no contiene un subespacio topológicamente isomorofo a ℓ_1 si, y solamente si, dado $x^{**} \in X^{**}$, cualquier subconjunto acotado no vacío K de X^* tiene w^*-secciones sobre las cuales la oscilación de x^{**} es arbitrariamente pequeña.*

Recuérdese que, dado $x^{**} \in X^{**}$ y un subconjunto no vacío K de X^*, la **oscilación** de x^{**} sobre K es

$$\operatorname{osc}(x^{**}, K) = \sup\{\langle x^{**}, x^* \rangle : x^* \in K\} - \inf\{\langle x^{**}, x^* \rangle : x^* \in K\}.$$

El siguiente teorema proporciona una caraterización de los espacios de Asplund separables usando el concepto de oscilación. En la demostración de este teorema se usará el Teorema 5.3.

5.5 Teorema. *Sea X un espacio de Banach separable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cada* $\delta > 0$ *existe* $K \subset B_{X^*}$*, subconjunto* w^**-compacto, tal que, para todo* U w^**-abierto no vacío de* K*, existe* $x^{**} \in (1+\delta)B_{X^{**}}$ *(que depende de* U*) que verifica* $\operatorname{osc}(x^{**}, U) = 1$.

2. *Existen* $K \subset B_{X^*}$*, subconjunto* w^**-compacto, y* $\epsilon > 0$*, tales que, para todo* U w^**-abierto no vacío de* K*, se tiene* $\operatorname{diam}(U) \geq \epsilon$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Tomamos $\delta = 1$. Por hipótesis existe $K \subset B_{X^*}$, w^*-compacto, satisfaciendo (i). Sea U un subconjunto w^*-abierto no vacío de K. Existe $x^{**} \in 2B_{X^{**}}$ tal que

$$1 = \operatorname{osc}(x^{**}, U) = \sup_{x^* \in U} \langle x^{**}, x^* \rangle - \inf_{y^* \in U} \langle x^{**}, y^* \rangle.$$

Sean $S := \sup_U x^{**}$, $I := \inf_U x^{**}$ y $\eta > 0$ arbitrario. Existen $x^*, y^* \in U$ tales que $S - \eta < \langle x^{**}, x^* \rangle$ y $\langle x^{**}, y^* \rangle < I + \eta$. Sumando estas desigualdades, $\langle x^{**}, y^* \rangle + S - \eta < \langle x^{**}, x^* \rangle + I - \eta$. Por tanto,

$$1 < \langle x^{**}, x^* - y^* \rangle + 2\eta \leq 2\|x^* - y^*\| + 2\eta \leq 2\operatorname{diam}(U) + 2\eta.$$

Haciendo $\eta \to 0+$ se tiene $1/2 \leq \operatorname{diam}(U)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es bien conocido que bajo la hipótesis (ii) X^* no es separable (ver [45], por ejemplo). Por el Teorema 5.3 en el caso particular en que $Y = X$, y utilizando la equivalencia (ii), se tiene que, para cada $\delta > 0$, existe $K \subset B_{X^*}$ w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor (y por tanto w^*-compacto) tal que, para cada $x^* \in K$, existe $x^{**} \in (1+\delta)B_{X^{**}}$ tal que

$$\langle x^{**}, z^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } z^* = x^*, \\ 0 & \text{si } z^* \neq x^*, \ z^* \in K. \end{cases}$$

Sea U un w^*-abierto de K no vacío. Dado $x^* \in U$, existe $x^{**} \in (1+\delta)B_{X^{**}}$ cumpliendo lo anterior. Como en U hay puntos de K diferentes de x^* (pues en todo conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor, todos sus puntos son de acumulación y U es un abierto relativo a K en la topología w^*), se tiene $\operatorname{osc}(x^{**}, U) = \sup_U x^{**} - \inf_U x^{**} = 1$. ■

Bibliography

[1] C. Aparicio, F. Ocaña, R. Payá, A. Rodríguez: A non-smooth extension of Fréchet differentiability of the norm with applications to numerical ranges. *Glasgow Math. J.* **28**, 121-137.

[2] J. P. Aubin, I. Ekeland: Applied Nonlinear Analysis. *John Wiley*, 1984.

[3] E. Asplund: Fréchet differentiability of convex functions. *Acta Math.* **121** (1968), 31-47.

[4] E. M. Bator: A basic construction in duals of separable Banach spaces. *Rocky Mountain J. of Math.* **22** (1992), 81-92.

[5] J. Benítez, V. Montesinos: On restricted weak upper semicontinuity and reflexivity. *Bolletino U. M. I.* Por aparecer.

[6] A. Beurling, A. E. Livingstone: A theorem on duality mappings in Banach spaces. *Ark. Mat.* **4** (1962), 405-411.

[7] B. Bollobás: An extension to the Theorem of Bishop and Phelps. *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 181-182.

[8] J. M. Borwein: A note on ϵ-subgradients and maximal monotonicity. *Pac. J. of Math.* **103**, 2 (1982), 307-314.

[9] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle: Theorie et Applications. *Masson et Cie.*, 1983.

[10] F. E. Browder: Multivalued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach spaces. *Trans. Amer. Soc.* **118** (1965), 338-351.

[11] H. Cartan: Calcul Différentielle, Forms Différentielles. *Hermann, Paris*, 1967.

[12] M.D. Contreras, R. Payá: On upper semicontinuity of duality mapping. *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), 451-459.

[13] D.F. Cudia: The geometry of Banach spaces. Smoothness. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964), 218-314.

[14] M. M. Day: Strict convexity and smoothness of normed sapces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1955), 516-528.

[15] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler: Smoothness and Renormings in Banach Spaces. *Pitman Monographs and surveys in Pure and Appl. Math.* **64** (Longman Scientific & Technical, Harlow), 1993.

[16] J. Diestel: Geometry of Banach Spaces. Selected Topics. *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag.* **485**, 1975.

[17] J. Diestel, B. Faires: On vector measures. *Trans. Amer. Math. Soc.* **198** (1974), 253-271.

[18] Dongjian Chen, Bor-Luh Lin: Ball topology on Banach spaces. *Houston Journal of Maths* **22**, 4 (1996), 821-823.

[19] D. van Dulst: Characterizations of Banach Spaces not Containing ℓ_1. *CWI Tracts* **59**, Amsterdam, 1989.

[20] I. Ekeland: Nonconvex minimization problems. *Bull. Amer. Math Soc. (New series)* **1** (1979), 443-474.

[21] I. Ekeland, G. Lebourg: Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1976), 193-216.

[22] M. Fabian, V. Zizler: On uniform $\mathcal{C}^n$-smooth norms on separable Banach spaces. *Por aparecer.*

[23] K. Fan, I. Glicksberg: Some geometric properties of the spheres in a normed linear space. *Duke Math. J.* **25** (1958), 553-568.

[24] W. Fenchel: On conjugate convex functions. *Canad. J. Math.* **1** (1949), 73-77.

[25] C. Franchetti, R. Payá: Banach spaces with strongly subdifferentiable norm. *Bolletino U. M. I.* **7**, B (1993), 45-70.

[26] M. Fréchet: Tesis. *Rendiconti del circolo Matematico di Palermo.* **22** (1906), 1-74.

[27] J. Giles, D. Gregory, B. Sims: Geometrical implications of upper semi-continuity of the duality mapping on a Banach space. *Pacific J. Math* **79** (1978), 99-108.

[28] J. Giles, W. B. Moors: Generic continuity of restricted weak upper semi-continuous set valued mappings. *Set Valued Analysis.* **4** (1996), 25-39.

[29] J. Giles, S. Sciffer: On weak Hadamard differentiability of convex functions on Banach spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.* **54** (1996), 155-166.

[30] G. Godefroy: Some applications of Simons' inequality. *Seminar of Functional Analysis.* Vol. 1. Universidad de Murcia, 1987.

[31] G. Godefroy, N. J. Kalton: The ball topology and its applications. *Contemporary Math.* **85** (1989), 195-237.

[32] G. Godefroy, V. Montesinos, V. Zizler: Strong subdifferentiability of norms and geometry of Banach spaces. *Commentationes Mathematicæ Universitatis Carolinæ* **36**, 3 (1995), 493-502.

[33] D. A. Gregory: Upper semi-continuity of subdifferential mappings. *Canad. Math. Bull.* **23** (1980), 11-19.

[34] J. Hagler: Some more Banach spaces which contain ℓ^1. *Studia Math.* **46** (1973), 35-42.

[35] R. Haydon: A counterexemple to several questions about scattered compact spaces. *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 261-268.

[36] R. Haydon: Trees in renorming theory. *Proc. London Math. Soc.* **78** (1999), 541-584.

[37] Z. Hu, B. Lin: Smoothness and the asymptotic-norming properties of Banach spaces. *Bull. Austr. Math. Soc.* **45** (1992), 285-296.

[38] G. J. O. Jameson. Topology and Normed Spaces. *Chapman & Hall*, 1974.

[39] M. Jiménez Sevilla, J. P. Moreno: Renorming Banach spaces with the Mazur intersection property. *Journal of Funct. Anal.* **144**, 2 (1997), 486-504.

[40] J. Kurzweil: On approximations in real Banach spaces. *Studia Math.* **14** (1954), 213-231.

[41] E. B. Leach, J. H. M. Whitfield: Differentiable norm and rough norms in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **33** (1972), 120-126.

[42] S. Mazur: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. *Studia Math.* **4** (1933), 70-84.

[43] J.J. Moreau: Inf-Convolution, sous-addivité des fonctions numériques. *J. Math. Pures App.* **49**, (1970), 109-154.

[44] A. Pełczynski: On Banach spaces containing L_1. *Studia Math.* **30** (1968), 231-246.

[45] R.R. Phelps: Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag*, 1988.

[46] R. T. Rockafellar: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific J. Math* **33** (1970), 209-216.

[47] R. T. Rockafellar: Convex Analysis. *Princeton. N.J.*, 1970.

[48] E. Saab, P. Saab: A dual geometric characterization of Banach spaces no containig ℓ_1. *Pacific J. Math.* **105** (1983), 415-425.

[49] S. Simons: A convergence theorem with boundary. *Pacific J. Math.* **40** (1972), 703-708.

[50] S. Simons: The least slope of a convex function and the maximal monotonicity of its subdifferential. *J. Optimization Theory and Applications* **71** (1991), 127-136.

[51] S. Simons: Subdifferentials are locally maximal monotone. *Bull. Australian Math. Soc.* **47** (1993), 465-471.

[52] S. Simons: Les Dérivées Directionelles et la Monotonicité des sous Differentiels. *Séminaire d'Initiation à l'Analyse (Séminaire Choquet). Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie*, 107.

[53] V.L. Šmulyan: Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach. *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S. (Doklady)* **27** (1940), 643-648.

[54] C. Stegall: The Radon-Nikodým property in conjugate Banach spaces *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 463-477.

[55] C. Stegall: The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nykodým property. *Israel J. Math* **29** (1978), 408-412.

[56] E. le Stourgeon: *Trans. Amer. Math. Soc.* **21** (1920), 357-383.

[57] J. H. M. Whitfield: Differentiable functions with bounded nonempty support on Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 145-146.