MÁSTER UNIVERSITARIO EN INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

PROPIEDADES DE INMERSIÓN EN PRODUCTOS DIRECTOS DE GRUPOS

Autor:

María Soler Facundo

Tutores:

Ana Martínez Pastor

MªDolores Pérez Ramos

València, 2014

Índice general

Introducción

Este Trabajo Fin de Máster se enmarca en la teoría de grupos y, más concretamente, de grupos finitos.

En el desarrollo de esta teoría tiene un papel relevante el estudio de las propiedades de inmersión de los subgrupos en los grupos. Este estudio adquiere mayor importancia en el contexto de los grupos resolubles por su particular interacción con la teoría de clases de grupos.

Por otra parte, la forma más sencilla de construir nuevos grupos a partir de otros dados es, probablemente, la construcción de productos directos. Sin embargo, a pesar de la simplicidad de dicha construcción, la estructura de tales productos resulta en ocasiones sorprendente.

Diversos autores han realizado un estudio sistemático con el fin de comprender cómo los subgrupos con determinadas propiedades de inmersión pueden ser detectados y caracterizados en la estructura reticular de los subgrupos de un producto directo de dos grupos a partir de la de los factores.

La estructura de los subgrupos de un producto directo es bien conocida, gracias a un teorema clásico debido a Goursat. A grandes rasgos, dicho resultado establece que, aparte de los subgrupos factorizados como producto directo de subgrupos de los factores directos, en un producto directo solamente aparecen "subgrupos diagonales".

Como consecuencia del teorema de Goursat, los subgrupos normales están también bien caracterizados en los productos directos. Parece natural, por tanto, investigar otros subgrupos con propiedades de inmersión relacionadas, pero más débiles que la normalidad. La referencia principal para la terminología básica y resultados sobre las propiedades de inmersión será [10].

Una primera aportación en esta línea fue debida a P. Hauck ([17]), quien describió los subgrupos subnormales de un producto directo. Dicho estudio fue motivado por una conjetura establecida por T.O. Hawkes en 1977 sobre grupos normalmente detectables, en relación con ciertas construcciones de clases de Fitting (ver [10]). Más adelante, J. Evan inició el estudio de la permutabilidad de subgrupos en un producto directo en su tesis doctoral ([11]), realizada bajo la supervisión de B. Brewster. Evan continuó esta investigación en [13], [14], [15] y [12]. Por su parte, J. Petrillo ([21, 22]) analizó la propiedad cubre-evita en un producto directo de grupos.

Nuevas contribuciones en esta línea fueron realizadas por B. Brewster, A. Martínez Pastor y M.D. Pérez Ramos en [5] y [6], con el análisis de los subgrupos normalmente inmersos, pronormales, abnormales y localmente pronormales, así como subgrupos con otras propiedades de inmersión relacionadas, en productos directos. En el trabajo recopilatorio [7] se recogen los resultados conocidos hasta ese momento en el contexto de propiedades de inmersión de subgrupos en productos directos de grupos.

En el presente trabajo se realiza un desarrollo exhaustivo de los artículos [5] y [6]. Salvo mención expresa en otro sentido, todos los grupos considerados en esta memoria son finitos. La notación utilizada es estándar y puede ser encontrada, por ejemplo, en [10], texto que se toma como referencia principal.

El primer capítulo sirve para familiarizarse con conceptos y resultados preliminares, que serán de utilidad a lo largo de toda la memoria, y contiene tres secciones. En la primera se introducirán nociones y propiedades básicas sobre grupos finitos y, asimismo, algunos resultados relevantes sobre la teoría de Hall en grupos resolubles, sin demostración. Posteriormente, en la segunda sección, se expondrán ciertas propiedades elementales de los subgrupos de productos directos. Se enunciará y demostrará el Teorema de Goursat, que puede consultarse en [24]. En particular, se presentará una descripción detallada del normalizador de un subgrupo en un producto directo, utilizando el teorema de Goursat. Finalmente, en la tercera parte se expondrán algunos resultados acerca de propiedades de inmersión necesarios para la adecuada comprensión de los capítulos siguientes.

El segundo capítulo se centra principalmente en subgrupos normalmente inmersos en productos directos. En la primera sección, como paso previo, se estudian cuales son las condiciones para obtener la permutabilidad con los subgrupos de Sylow y con los subgrupos de Hall en el caso de grupos resolubles. Estas condiciones nos conducen a caracterizar los subgrupos pemutables con un sistema de Hall en un producto directo de grupos resolubles. En la segunda sección, se analizan propiedades estructurales de los subgrupos normalmente inmersos en productos directos de grupos finitos (no necesariamente resolubles) y se dan primeras caracterizaciones de los mismos en términos de las intersecciones con los factores y de las proyecciones. En la última sección se combinan, para grupos resolubles, los resultados de los dos apartados anteriores, obteniendo una nueva caracterización de los subgrupos normalmente inmersos en este contexto. Dicha caracterización permite una construcción efectiva de todos los subgrupos normalmente inmersos de un producto directo resoluble, a partir de los correspondientes subgrupos normalmente inmersos de los factores.

En el último capítulo se analiza la pronormalidad en productos directos, así como otras propiedades de inmersión relacionadas con esta relevante propiedad. Además de los subgrupos de Sylow, los subgrupos de Hall y, más en general, los inyectores y proyectores en grupos finitos resolubles, son pronormales. Esta es una de las razones por las que gran parte de la investigación acerca de esta propiedad de inmersión se enmarca en el contexto de los grupos resolubles. En la primera sección de este capítulo tratamos la abnormalidad, propiedad de inmersión más fuerte que la pronormalidad pero íntimamente ligada a ella. Los subgrupos de Carter en grupos resolubles son ejemplos relevantes de subgrupos abnormales. En particular, el normalizador de cualquier subgrupo pronormal es abnormal. Presentamos así una caracterización de los subgrupos abnormales de un producto directo, con la condición de que uno de los dos factores directos sea resoluble, obteniendo que dichos subgrupos son exactamente aquellos que se factorizan como producto directo de subgrupos abnormales de los correspondientes factores directos. En la segunda sección se obtienen propiedades estructurales y se da una caracterización completa de los subgrupos pronormales, de nuevo en el caso de que uno de los factores sea resoluble. En la siguiente sección del tercer capítulo se investiga cómo criterios clásicos de pronormalidad y abnormalidad para grupos resolubles dados por T.A. Peng [20] y G.J. Wood [25], que consideran la persistencia en subgrupos intermedios, se extienden en productos directos. Así, se demuestra que en este caso sólo se requiere considerar subgrupos intermedios factorizados para deducir la pronormalidad y la abnormalidad. Se finaliza el trabajo analizando la pronormalidad local. En un grupo resoluble, todo subgrupo localmente pronormal es pronormal, propiedad que no se cumple en general en grupos finitos no resolubles. En el contexto de productos directos con un factor resoluble, para obtener condiciones más débiles que las deducidas directamente de la caracterización de la pronormalidad (ver Proposición 3.4.1) ha sido necesario imponer la hipótesis adicional de nilpotencia del subgrupo considerado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Generalidades

Se presenta en esta sección nociones básicas de teoría de grupos. Se definen conceptos tales como subgrupos de Sylow o subgrupos de Hall y se enuncian algunos teoremas sin demostración. Todos los resultados de esta sección pueden encontrarse en [10, (A)(I.3)(I.4)(I.5)].

Definición 1.1.1. Sea G un grupo, p un primo, y sea $|G| = p^a m$ con p no divisor de m. Un subgrupo U de G se dice *p-subgrupo de Sylow de G* si $|U| = p^a$. El conjunto de p-subgrupos de Sylow de G se denotará por $Syl_p(G)$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Sylow)**.** *Sea p un primo y G un grupo. Entonces $Syl_p(G)$ (no vacío) forma una clase de conjugación de G. Si U es un p-subgrupo de G y si $P \in Syl_p(G)$, entonces $U \leq P^g$ para algún $g \in G$. Además, tenemos $|Syl_p(G)| = |G : N_G(P)| \equiv 1(modp)$.*

Teorema 1.1.3. *Sea G un grupo y p un primo.*

a) Sea $P \in Syl_p(G)$ y $N \trianglelefteq G$. Entonces $P \cap N \in Syl_p(N)$ y $PN/N \in Syl_p(G/N)$; además, $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$.

b) Sea $\{p_1, \ldots, p_r\}$ el conjunto completo de divisores primos de $|G|$ y sea $P_i \in Syl_{p_i}(G)$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Entonces $G = \langle P_1, \ldots, P_r \rangle$, y si $r = 2$, entonces $G = P_1 P_2$.

Definición 1.1.4. Sea G un grupo.

a) Si $g, h \in G$, llamamos *conmutador de g con h* a $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$.

b) Si A y B son subconjuntos de G, escribimos $[A,B] := \langle [a,b] : a \in A, b \in B \rangle$. A $G' := [G,G]$ se le llama *subgrupo conmutador o derivado de* G.

c) Si U es un subgrupo de G, llamamos *clausura normal de* U *en* G al subgrupo $\langle U^G \rangle := \langle U^g : g \in G \rangle$.

Lema 1.1.5. *Sean* g, h *y* k *elementos de un grupo* G. *Se tiene:*

a) $g^h = g \Leftrightarrow [g,h] = 1 \Leftrightarrow gh = hg$.

b) $[gh, k] = [g,k]^h [h,k]$.

c) $[g, hk] = [g,k][g,h]^k$.

Lema 1.1.6. *Sean* A, B *y* C *subgrupos de un grupo* G. *Se tiene:*

a) $[A,B] = [B,A] \trianglelefteq \langle A, B \rangle$.

b) $[A,B] \leq A$ *si y sólo si* $B \leq N_G(A)$.

c) Si $\alpha : G \to \alpha(G)$ *es un homomorfismo de grupos, entonces* $\alpha([A,B]) = [\alpha(A), \alpha(B)]$.

d) Si A y B son subgrupos normales de G, *entonces* $[A,B]$ *es un subgrupo normal de* G.

e) Un subgrupo U *es normal en* G *con* G/U *abeliano si y sólo si* $G' \leq U$.

f) Si B *normaliza a* A *y a* C, *entonces* $[AB, C] = [A,C][B,C]$.

g) Sean $A, B \trianglelefteq G$ *con* $B \leq A$. *Entonces* $[A,G] \leq B$ *si y sólo si* $A/B \leq Z(G/B)$.

h) $\langle A^B \rangle = A[A,B]$.

i) Si $N \trianglelefteq G$ *y* $h \in G$, *entonces* $[N,h] = [N, \langle h \rangle]$.

Definición 1.1.7. Un grupo G se dice *nilpotente* si existe una serie finita $\{G_i\}_{i=0}^n$ de subgrupos de G:
$$\{1_G\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$
cumpliendo:

1. G_i es subgrupo normal de G_{i+1} para cada $i = 0, \ldots, n-1$.

2. $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$.

Teorema 1.1.8. *Sean* G *y* H *grupos. Se tiene:*

a) Sean $U \leq G$ y $N \trianglelefteq G$. Si G es nilpotente, entonces U y G/N son nilpotentes.

b) Si G y H son nilpotentes, entonces $G \times H$ es nilpotente.

c) Sean $M, N \trianglelefteq G$ y supongamos que G/M y G/N son nilpotentes. Entonces $G/(M \cap N)$ es nilpotente.

Definición 1.1.9. Un subgrupo U de un grupo G se dice *subnormal* en G (denotado $U \trianglelefteq \trianglelefteq G$) si existen subgrupos $U_0, U_1, \ldots, U_r$ de G tales que

$$U = U_r \trianglelefteq U_{r-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq U_1 \trianglelefteq U_0 = G.$$

Teorema 1.1.10. *Los siguientes resultados en un grupo G son equivalentes:*

a) G es nilpotente;

b) Si $U < G$, entonces $U < N_G(U)$;

c) Todo subgrupo maximal de G es normal;

d) G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow;

e) Todos los subgrupos de G son subnormales.

Definición 1.1.11. Sea π un conjunto de primos y G un grupo.

i) El *subgrupo característico* $O_\pi(G)$ de G se define como:

$$O_\pi(G) := \langle N : N \trianglelefteq G, N \ \pi\text{-grupo}\rangle.$$

ii) El *subgrupo de Fitting* $F(G)$ se define como:

$$F(G) := \langle O_p(G) : p \in \sigma(G)\rangle.$$

Denotamos por $\sigma(G)$ al conjunto de divisores primos del orden del grupo G.

Teorema 1.1.12. *Sea G un grupo. Se tiene:*

a) $F(G) = \langle S : S$ subnormal en G y S es nilpotente$\rangle$; en particular, $F(G)$ es el mayor subgrupo normal nilpotente de G.

b) Si $S_1, \ldots, S_r$ son subgrupos subnormales nilpotentes de G, entonces $\langle S_1, \ldots, S_r\rangle$ es también un subgrupo subnormal nilpotente.

c) Si N_1 y N_2 son subgrupos nilpotentes normales de G tal que $G = N_1N_2$, entonces G es nilpotente.

Definición 1.1.13. Un grupo G se dice *resoluble* si existe una cadena finita $\{G_i\}_{i=0}^n$ de subgrupos de G:

$$\{1_G\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

cumpliendo:

1. G_i es subgrupo normal de G_{i+1} para cada $i = 0, \ldots, n-1$.

2. El grupo cociente G_{i+1}/G_i es abeliano para cada $i = 0, \ldots, n-1$.

Teorema 1.1.14. *Sea G un grupo:*

a) Sea $U \leq G$ y $N \trianglelefteq G$. Si G es resoluble, entonces U y G/N son resolubles.

b) Si $N \trianglelefteq G$, y si N y G/N son resolubles, entonces G es resoluble.

c) Si $N_i \trianglelefteq G$ y G/N_i es resoluble para $i = 1, 2$, entonces $G/(N_1 \cap N_2)$ es resoluble.

d) Si N_1 y N_2 son subgrupos resolubles normales en G, entonces N_1N_2 es resoluble.

Definición 1.1.15. Sea π un conjunto de primos, un π-número es un número entero cuyos divisores primos están en π.

A un subgrupo H de G se le llama *π-subgrupo de Hall* si $|H|$ es un π-número y $|G : H|$ es un π'-número, donde $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$, el complementario de π en el conjunto de todos los números primos $\mathbb{P}$. El conjunto (posiblemente vacío) de π-subgrupos de Hall de G lo denotamos por $Hall_\pi(G)$. Un subgrupo H de G se llama *subgrupo de Hall* si es un π-subgrupo de Hall para algún $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

Lema 1.1.16. *Sea $H \in Hall_\pi(G)$, y sean $M, N \trianglelefteq G$. Entonces:*

a) $H^g \in Hall_\pi(G)$ para cada $g \in G$,

b) $HN/N \in Hall_\pi(G/N)$,

c) $H \cap N \in Hall_\pi(N)$,

d) $(H \cap N)(H \cap M) = H \cap MN \in Hall_\pi(MN)$,

e) $HN \cap HM = H(N \cap M)$.

Notar que d) y e) son equivalentes por [10, A Lemma 1.2].

Teorema 1.1.17. *Sea G un grupo resoluble y π un conjunto de primos. Entonces:*

a) G posee π-subgrupos de Hall.

b) Los π-subgrupos de Hall forman una clase de conjugación de subgrupos de G.

c) Cada π-subgrupo de G está contenido en un π-subgrupo de Hall de G.

Teorema 1.1.18. *Un grupo es resoluble si y sólo si tiene π-subgrupos de Hall para todo conjunto de primos π.*

Definición 1.1.19. Sea G un grupo. Se dice *sistema de Hall de G* a un conjunto Σ de subgrupos de *Hall* de G que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $\pi \subseteq \sigma(G)$, Σ contiene exactamente un π-subgrupo de *Hall*, denotado por G_π.

2. Si H,$K \in \Sigma$, entonces $HK = KH$.

Cuando dos subgrupos H y K permuten lo denotaremos por $H \perp K$.

Teorema 1.1.20. *Un grupo G es resoluble si y sólo si G posee sistemas de Hall.*

Definición 1.1.21. Sea Σ un sistema de Hall de un grupo G y L un subgrupo de G. Decimos que Σ *reduce en* L y escribimos $\Sigma \searrow L$ si $\Sigma \cap L := \{X \cap L7; X \in \Sigma\}$ es un sistema de Hall de L.
En este caso decimos que Σ es una *extensión de* $\Sigma \cap L$

En general, un sistema de Hall puede no reducir en un subgrupo arbritario.

Proposición 1.1.22. *Sea L un subgrupo de un grupo resoluble G. Cada sistema de Hall de G reduce en algún conjugado de L.*

Nota 1.1.23. Sea Σ un sistema de Hall de G, sea $L \leq G$, y sea $N \trianglelefteq G$. Se tiene:

a) $\Sigma N/N := \{XN/N \,:\, X \in \Sigma\}$ es un sistema de Hall de G/N.

b) Si Σ reduce en L, entonces $\Sigma N/N$ reduce en LN/N.

c) Si $\Sigma N/N$ reduce en LN/N, entonces Σ reduce en LN.

Proposición 1.1.24. *Sea L un subgrupo de un grupo resoluble G. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) L es subnormal en G;

b) Cada sistema de Hall de G reduce en L.

Teorema 1.1.25. *Sea Σ un sistema de Hall de un grupo G, y sean U y V subgrupos en los que Σ reduce. Entonces:*

a) Σ *reduce en* $U \cap V$*, y*

b) *si, además,* $UV = VU$*, entonces* Σ *reduce en* UV

Lema 1.1.26. *Sea* L *un subgrupo de* G*, y sea* Σ *un sistema de Hall de* G*. Supongamos que* $|G : L|$ *es una potencia de un primo* p*. Entonces, para cada primo* q *distinto de* p*, cada* q'*-subgrupo de Hall de* G *reduce en* L*. En particular,* Σ *reduce en* L *si y sólo si* L *contiene el* p'*-subgrupo de Hall de* Σ*.*

Lema 1.1.27. *Sea* M *un subgrupo maximal de un grupo resoluble* G*. Sea* p *un primo que divide* $|G : M|$*, y sea* $S \in Hall_{p'}(M)$*. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) M *no es normal en* G*;*

b) $N_G(S) \leq M$*.*

Definición 1.1.28. Sea Σ un sistema de Hall de G. Llamamos *normalizador de* Σ al subgrupo $N_G(\Sigma) := \{g \in G : H = H^g \ \forall\ H \in \Sigma\}$.

Un *normalizador de sistema de* G es un subgrupo de la forma $N_G(\Sigma)$ para algún sistema de Hall Σ de G.

Teorema 1.1.29. *Sea* Σ *un sistema de Hall de* G*, sea* $p \in \sigma(G)$*, y sean* P *y* S *el* p*-subgrupo de Sylow y el* p'*-subgrupo de Hall en* Σ*, respectivamente. Entonces:*

a) $P \cap N_G(S)$ *es un* p*-subgrupo de Sylow de* $N_G(S)$ *y de* $N_G(\Sigma)$*.*

b) $N_G(\Sigma)$ *es* Σ*-permutable, es decir,* $N_G(\Sigma) \perp H \ \forall H \in \Sigma$*. En particular,* $\Sigma \searrow N_G(\Sigma)$*.*

c) $N_G(\Sigma)$ *es nilpotente.*

Definición 1.1.30. Un subgrupo U de un grupo G se dice *permutable con sistema* si es Σ-permutable para algún sistema de Hall Σ de G, es decir, $U \perp H \ \forall H \in \Sigma$.

Teorema 1.1.31. *Sea* Σ *un sistema de Hall de un grupo resoluble* G*, y sea* $K \trianglelefteq G$*. Entonces* $N_G(\Sigma)K/K = N_{G/K}(\Sigma K/K)$*. Es decir, los normalizadores de sistemas se conservan bajo epimorfismos.*

Teorema 1.1.32. *Sea* D *un normalizador de sistema de un grupo resoluble* G*. Entonces:*

a) $\langle D^G \rangle = G$*, y*

b) $\bigcap_{g \in G} D^g = Z_\infty(G)$*, el hipercentro de* G*.*

Definición 1.1.33. Sean U, V y W subgrupos de un grupo G tal que $W \leq V$. Si $W(U \cap V) = V$ decimos que U *cubre a* V/W, y si $W(U \cap V) = W$ decimos que U *evita a* V/W.

Sea U un subgrupo de un grupo G. Si o bien cubre o bien evita cada factor central de G, decimos que U tiene la propiedad cubre-evita y llamamos a U *subgrupo cubre-evita.*

Teorema 1.1.34. *Un normalizador de sistema de un grupo resoluble G cubre los factores principales centrales, es decir, factores principales H/K de G tales que $[G, H] \leq K$, y evita los excéntricos, es decir, los no centrales.*

1.2. Resultados básicos en productos directos de grupos

En esta sección estudiamos productos directos de grupos. El conocimiento de la estructura básica de un subgrupo de un producto directo se basa principalmente en el Teorema de Goursat [24, Theorems 1.6.1 and 1.6.2].

En lo que sigue se demuestran algunos resultados básicos en productos directos que se utilizarán posteriormente.

Definición 1.2.1. Decimos que G es el *producto directo (interno)* de los subgrupos A y B si: $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \cap B = 1$ y $G = AB$.

Se observa que, en este caso, $G \cong A \times B$, el producto cartesiano (producto directo externo) de los grupos A y B, mediante la aplicación que cumple $a \mapsto (a, 1)$, $\forall a \in A$, $b \mapsto (1, b)$, $\forall b \in B$.

Con dicha observación en mente, el producto directo interno de los subgrupos A y B lo denotaremos también como $G = A \times B$ y usaremos indistintamente notación de producto cartesiano o de producto directo interno, entendiendo por el contexto su significado.

Definición 1.2.2. La aplicación $\pi_X : A \times B \longrightarrow X$ tal que $\pi_X(U) = \{x \in X : xy \in U \text{ para algún } y \in Y\}$ para $\{X, Y\} = \{A, B\}$, es un epimorfismo de grupos que recibe el nombre de *proyección canónica.*

Teorema 1.2.3. *Si $U \leq A \times B = G$ entonces:*

a) $UY \cap X = \pi_X(U) = \{x \in X : xy \in U$ *para algún* $y \in Y\}$ *para* $\{X, Y\} = \{A, B\}$.

b) $U \cap X \trianglelefteq \pi_X(U)$ *para* $X = A, B$.

Demostración. Supongamos $X = A, Y = B$ y obtendremos el resultado por simetría.

a) Si $x \in \pi_A(U)$, existe $y \in B$ tal que $xy \in U$, entonces $x = (xy)y^{-1} \in UB$ y $x \in A \cap UB$. Supongamos ahora $x \in A \cap UB$, es decir, $x = uy$ con $u \in U, y \in B$ y $x \in A$. Entonces $u = xy^{-1}$ con $u \in U, y^{-1} \in B$ y $x \in A$. Por tanto, $x \in \pi_A(U)$.

b) Obviamente $U \cap A$ es subgrupo de $\pi_A(U)$. Veamos que es normal. Si $x \in \pi_A(U)$, existe $y \in B$ tal que $xy \in U$. Ahora sea $a \in U \cap A$, entonces $ayy^{-1} \in U \cap A$. Por tanto, $x^{-1}(ayy^{-1})x = (x^{-1}y^{-1})a(yx) \in U \cap A$.

□

Teorema 1.2.4 (Teorema de Goursat)**.** *Sean* $A, B \leq G$ *y* $G = A \times B$*:*

a) Para $U \leq G$ *y* $x \in \pi_A(U)$ *se define* $x^\alpha = \{y \in B : xy \in U\}$*. Entonces* α *es un epimorfismo de* $\pi_A(U)$ *en* $\pi_B(U)/(U \cap B)$ *con núcleo* $Ker\alpha = U \cap A$*.*

b) Recíprocamente, sean $U_A \leq A$*,* $W \trianglelefteq U_B \leq B$ *y* α *un epimorfismo de* U_A *en* U_B/W*. Entonces* $U = D(U_A, \alpha) = \{xy : x \in U_A, y \in x^\alpha\}$ *es un subgrupo de* G *con* $U_A = \pi_A(U)$*,* $U_B = \pi_B(U)$*,* $W = U \cap B$ *y* $Ker\alpha = U \cap A$*.*

c) Para $U_A, V_A \leq A$ *y epimorfismos* α *y* β *respectivos definidos como en b),* *tenemos* $D(U_A, \alpha) \leq D(V_A, \beta)$ *si y sólo si* $U_A \leq V_A$ *y* $x^\alpha \subseteq x^\beta$ *para todo* $x \in U_A$*.*

Demostración. a) Por el teorema anterior sabemos que $UB \cap A = \pi_A(U) = \{x \in A : xy \in U \text{ para algún } y \in B\}$. Ahora, si $x \in UB \cap A$, entonces $x^\alpha = \{y \in B : xy \in U\} \neq \emptyset$ y está contenido en $UA \cap B = \pi_B(U)$. Veamos que α está bien definida. Si $y, z \in x^\alpha$, entonces xy y xz son elementos de U y por tanto $(xy)^{-1}xz = y^{-1}z \in U \cap B$. Es decir y, z están en la misma coclase de $U \cap B$. Si w es otro elemento de esta coclase $y(U \cap B)$, entonces $w = yu$ con $u \in U \cap B$. Por tanto $xw = xyu \in U$, así pues, $w \in x^\alpha$. Hemos visto pues que $x^\alpha \in \pi_B(U)/(U \cap B)$. Veamos ahora que es un homomorfismo. Sean $x_1, x_2 \in \pi_A(U)$ y $y_1 \in x_1^\alpha, y_2 \in x_2^\alpha$, tenemos $x_1y_1x_2y_2 = x_1x_2y_1y_2 \in U$ y por consiguiente $y_1y_2 \in (x_1x_2)^\alpha$. Por tanto, por 1.2.3 b), $(x_1x_2)^\alpha = y_1y_2(U \cap B) = y_1(U \cap B)y_2(U \cap B) = x_1^\alpha x_2^\alpha$ y α es un epimorfismo. Finalmente, $x \in \ker \alpha$ si y sólo si $x^\alpha = U \cap B$, es decir, $1 \in x^\alpha$. Esto significa que $x = x \cdot 1 \in U$ y entonces $x \in U \cap A$. Por tanto, $Ker\alpha = U \cap A$.

b) Si $x_1, x_2 \in U_A$ e $y_1 \in x_1^\alpha, y_2 \in x_2^\alpha$, entonces $y_1 y_2^{-1} \in x_1^\alpha (x_2^\alpha)^{-1} = (x_1 x_2^{-1})^\alpha$ y por tanto $(x_1y_1)(x_2y_2)^{-1} = x_1y_1x_2^{-1}y_2^{-1} = x_1x_2^{-1}y_1y_2^{-1} \in U$. Por consiguiente, U es un subgrupo de G y $U_A = \{x \in A : xy \in U$ para algún $y \in B\}$. Se tiene que $U_A = \pi_A(U)$ y α es la aplicación definida en a) para el subgrupo U de G. Así, las otras afirmaciones se siguen de a).

c) Si $U = D(U_A, \alpha) \leq D(V_A, \beta) = V$, entonces $U_A = UB \cap A \leq VB \cap A = V_A$ y $x^\alpha \subseteq x^\beta$ para todo $x \in U_A$. El recíproco es obvio.

$\square$

Con esto queda clara la estructura de un subgrupo de un producto directo. Siguiendo a J. Evan [13] se definen ahora algunos tipos de subgrupos.

Definición 1.2.5. Llamamos al subgrupo U de $A \times B$ *tipo-diagonal*, si $U \cap X = 1$ para $X = A, B$.

Definición 1.2.6. Un subgrupo U de $A \times B$ se dice *subdirecto* si $\pi_X(U) = X$ para $X = A, B$.

En la literatura (por ejemplo [24]) el término subgrupo diagonal se reserva para la siguiente situación. Nuestro uso simplemente implica que $\pi_X(U) \leq X,$ para $X = A, B$.

Definición 1.2.7. Un subgrupo U de $A \times B$ se dice *diagonal (o diagonal principal)* si $A \cong B$, U es subdirecto en $A \times B$ ($\pi_X(U) = X$) y $U \cap X = 1$, para $X = A, B$.

Como consecuencia del Teorema de Goursat se deduce el siguiente resultado.

Teorema 1.2.8. *Si $U \leq A \times B$ es un subgrupo tipo-diagonal, existe $\alpha : \pi_A(U) \to \pi_B(U)$ isomorfismo tal que $U = D(\pi_A(U), \alpha) = \{xx^\alpha : x \in \pi_A(U)\}$ es un subgrupo diagonal de $\pi_A(U) \times \pi_B(U)$.*

Notar que si $H \leq A$ y hay un monomorfismo $\alpha : H \to B$, el subgrupo tipo-diagonal se escribirá $D(H) = \{hh^\alpha : h \in H\}$, o bien $D(H, \alpha)$ cuando el papel de α necesite ser especificado.

Nota 1.2.9. Sea $\alpha : \pi_A(U)/(U \cap A) \to \pi_B(U)/(U \cap B)$ el isomorfismo obtenido en el Teorema 1.2.4. Notar que $U/(U \cap A)(U \cap B)$ es un subgrupo diagonal de $\pi_A(U)/(U \cap A) \times \pi_B(U)/(U \cap B)$ donde $u(U \cap A)$ se empareja con $(u(U \cap A))^\alpha$, para $u \in \pi_A(U)$.

A continuación se muestran algunos resultados de [5] que se utilizarán más adelante sin hacer referencia a ellos.

Proposición 1.2.10. *Sea U un subgrupo de $G = A \times B$ y sea H_X un subgrupo de X para $X = A, B$.*

a) $[U, X] = [\pi_X(U), X]$ *para* $X = A, B$.

b) $[U, G] = [\pi_A(U) \times \pi_B(U), G] = [U, A] \times [U, B]$.

c) Los siguientes enunciados son equivalentes:

- I*)* $\pi_X(U) \leq N_X(H_X)$ *para* $X = A, B$*;*
- II*)* $U \leq N_G(H_X) = N_X(H_X) \times Y$ *para* $\{X, Y\} = \{A, B\}$*;*
- III*)* $U \leq N_G(H_A) \cap N_G(H_B) = N_G(H_A \times H_B) = N_A(H_A) \times N_B(H_B)$.

d) Los siguientes enunciados son equivalentes:

- I*)* $U \perp H_X$ *para* $X = A, B$*;*
- II*)* $\pi_X(U) \leq N_X((U \cap X)H_X)$ *para* $X = A, B$*;*
- III*)* $U \leq N_G((U \cap A)(U \cap B)H_A H_B)$.

Demostración. a) Supongamos $X = A$ y por simetría tendremos el resultado. Sea $a_1 \in \pi_A(U)$ y $a_2 \in A$. Existe $b \in B$ tal que $a_1 b \in U$. Ahora, $[a_1, a_2] = [a_1 b, a_2]$ por el Lema 1.1.5. Ya tenemos que $[\pi_A(U), A] \leq [U, A]$. Además $[U, A] \leq [\pi_A(U) \times \pi_B(U), A] = [\pi_A(U), A]$. Así obtenemos el resultado.

b) $[U, G] = [U, A \times B] \leq [\pi_A(U) \times \pi_B(U), A \times B] = [\pi_A(U), A] \times [\pi_B(U), B] = $ $= [U, A] \times [U, B] \leq [U, G]$, utilizando que $[A, B] = 1$.

c) I) $\to$ II) Supongamos $X = A$ y por simetría tendremos el resultado. Sabemos que $\pi_A(U) \leq N_A(H_A)$. Por tanto $[U, H_A] \leq [\pi_A(U) \times \pi_B(U), H_A] = [\pi_A(U), H_A] \leq H_A$. Así, $U \leq N_G(H_A)$. Finalmente, $(a, b) \in N_G(H_A)$ si y sólo si $(a^{-1}, b^{-1})(H_A \times \{1\})(a, b) = a^{-1} H_A a \times \{1\} = H_A \times \{1\}$ si y sólo si $(a, b) \in N_A(H_A) \times B$.

II) $\to$ III) Tenemos que ver que $U \leq N_G(H_A) \cap N_G(H_B) = N_G(H_A \times H_B) = N_G(H_A) \times N_G(H_B)$. Por hipótesis tenemos que $U \leq N_G(H_A) \cap N_G(H_B)$. Además, cada una de las siguientes afirmaciones es equivalente a su sucesora:

$$(a, b) \in N_G(H_A \times H_B);$$
$$H_A \times H_B = (a^{-1}, b^{-1})(H_A \times H_B)(a, b) = (a^{-1} H_A a, b^{-1} H_B b);$$
$$(a, b) \in N_G(H_A) \times N_G(H_B);$$
$$(a^{-1}, b^{-1})(H_A \times \{1\})(a, b) = H_A \times \{1\} \text{ y } (a^{-1}, b^{-1})(\{1\} \times H_B)(a, b) = \{1\} \times H_B;$$
$$(a, b) \in N_G(H_A) \text{ y } (a, b) \in N_G(H_B).$$

III) $\to$ I) Supongamos que $U \leq N_G(H_A) \cap N_G(H_B) = N_G(H_A \times H_B) = N_A(H_A) \times N_B(H_B)$. Como $U \leq N_G(H_X)$ para $X = A, B$ se tiene que $[U, H_X] \leq H_X$. Pero igual que en *a*) se puede ver que $[\pi_X(U), H_X] = [U, H_X] \leq H_X$. Luego $\pi_X(U) \leq N_X(H_X)$ para $X = A, B$ como queríamos.

d) I) $\to$ II) Veamos que $\pi_A(U) \subseteq N_A((U \cap A)H_A)$ (análogo para $X = B$). Sean $a \in \pi_A(U)$, $h_A \in H_A$ e $y \in U \cap A$. Entonces para algún $b \in B$, $(a, b) \in U$. Como $UH_A = H_AU$, $(h_A, 1)(a, b) = (a', b')(h'_A, 1)$ para algún $(a', b') \in U$, $h'_A \in H_A$. Como $b' = b$, tenemos que $(a, b), (a', b) \in U$, por tanto, $(a^{-1}, b^{-1})(a', b) = (a^{-1}a', 1) \in U$. Entonces $a^{-1}a' = x \in U \cap A$. Finalmente $a^{-1}h_Aa = xh'_A$. Recordemos que $U \cap A \trianglelefteq \pi_A(U)$, por tanto $a^{-1}(yh_A)a = y^a a^{-1}h_Aa = y^a xh'_A \in (U \cap A)H_A$.

II) $\to$ I) Sea $h_A \in H_A$ y $(a, b) \in U$. Como $\pi_A(U) \subseteq N_A((U \cap A)H_A)$, $a^{-1}h_Aa = xh'_A$ donde $x \in U \cap A$, $h'_A \in H_A$. Por tanto $(h_A, 1)(a, b) = (axh'_A, b) = (ax, b)(h'_A, 1)$. Pero $(ax, b) \in U$ y por tanto $(h_A, 1)(a, b) \in UH_A$. Tenemos $UH_A = H_AU$ como queríamos. Ídem con B.

II) $\leftrightarrow$ III) Se deduce de I) $\leftrightarrow$ III) en c).

$\square$

La demostración de $I) \leftrightarrow II)$ aparece en [12, Theorem 5.1].

Notar que en el resultado anterior no es necesario exigir que $(U\cap A)(U\cap B)H_AH_B$ y $(U\cap X)H_X$, para $X = A, B$, sean subgrupos. Sin embargo, es una consecuencia de que $U \perp H_X$ para $X = A, B$, ya que por la ley modular de Dedekind $(U \cap A)H_A = UH_A \cap A = H_AU \cap A = H_A(U \cap A)$.

Nota 1.2.11. Si $U \perp H_X$ para $X = A, B$, entonces $U \perp H_AH_B$.

El siguiente ejemplo muestra como, en general, el recíproco de la Nota 1.2.11 es falso. Como veremos posteriormente, una propiedad similar al recíproco es crucial para relacionar la permutabilidad en un producto directo con la permutabilidad en cada coordenada.

Ejemplo 1.2.12. Sea $A = \langle(1234), (13)\rangle$, el grupo diédrico de orden 8, $B = \langle b\rangle$, el grupo cíclico de orden 2, y sea $G = A \times B$. Sea $H_A = \langle(13)\rangle$, $H_B = B$ y $U = \langle(12)(34), (13)(24)b\rangle \leq G$. Vemos que $U \perp H_B$ y entonces $U \perp H_AH_B$. Sin embargo, U no permuta con H_A ya que $H_A \nleq N_G(U)$.

La descripción de la estructura de un subgrupo de un producto directo está enriquecida por la caracterización de subgrupos normales

Definición 1.2.13. Sea U subgrupo de $A \times B$. Para $X = A, B$, se define

$$C_X = \{x \in X : [x, \pi_X(U)] \leq X \cap U\}.$$

Nota 1.2.14. Observemos que $C_X \leq N_X := N_X(\pi_X(U)) \cap N_X(U \cap X)$.

Proposición 1.2.15. *Si $U \leq A \times B = G$ y $C_X = \{x \in X : [x, \pi_X(U)] \leq X \cap U\}$ para $X = A, B$, entonces $C_X = N_G(U) \cap X$.*

Demostración. Probamos el resultado para $X = A$. Para la primera inclusión supongamos $a \in C_A$ y $xy \in U$ con $x \in A, y \in B$, entonces $[a, xy] = [a, x] \in A \cap U$ por la definición de C_A. Pero $[a, xy] = ((xy)^{-1})^a xy$. Por tanto $(xy)^a \in U$ y $a \in N_G(U) \cap A$. Por otra parte, si $a \in N_G(U) \cap A$ y $x \in \pi_A(U)$, entonces existe $y \in B$ tal que $xy \in U$. Por tanto $[a, xy] = [a, x] \in U \cap A$ y $a \in C_A$. $\square$

Para completar la descripción de $N_G(U)$ utilizando la estructura de Goursat, habría que mirar subgrupos U_A de $N_A \leq A$ y U_B de $N_B \leq B$ con un isomorfismo $\triangle\colon U_A/C_A \to U_B/C_B$. Este isomorfismo necesitaría además ser consistente con el isomorfismo $\alpha : \pi_A(U)/U \cap A \to \pi_B(U)/U \cap B$. Más exactamente, la acción natural de U_A/C_A y de U_B/C_B sobre $\pi_A(U)/U \cap A$ y $\pi_B(U)/U \cap B$, respectivamente, necesitaría ser $\triangle$-equivalente via α; esto significa que

$$((a(U \cap A))^{rC_A})^\alpha = ((a(U \cap A))^\alpha)^{(rC_A)^\triangle}$$

para todo $a \in \pi_A(U)$ y todo $r \in U_A$. Eligiendo (U_A, U_B) maximal que satisfaga las propiedades mencionadas, las proyecciones del normalizador serían localizadas.

El siguiente corolario generaliza la conocida estructura de los subgrupos normales de un producto directo.

Corolario 1.2.16. *Sea $N \leq A \times B$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) N es un subgrupo normal de $A \times B$;

b) $[N, X] = [\pi_X(N), X] \leq N \cap X$, para $X = A, B$;

c) $\pi_X(N)/X \cap N \leq Z(X/N \cap X)$ para $X = A, B$, $X \cap N \trianglelefteq X$.

La demostración se deduce directamente de la Proposición anterior y de los lemas 1.2.10 y 1.1.6 g).

Nota 1.2.17. Sean $G = A \times B$ con A y B grupos simples no-abelianos. Sea $N \trianglelefteq G$. Supongamos $A \nsubseteq N$ y $B \nsubseteq N$, ya que si $A \subset N$ entonces $1 \neq N/A \trianglelefteq G/A \cong B$, lo que contradice la simplicidad de B. Ahora, por el Lema 1.2.16, $[N, A] \leq N \cap A$. Como A es simple, $N \cap A = \{1\}$, luego $[N, A] = 1$. Por tanto $A \subseteq C_G(N)$. De manera análoga $B \subseteq C_G(N)$ y $N \leq Z(G)$. Puesto que $Z(G) = Z(A) \times Z(B) = 1$ obtenemos $N = 1$. Es decir, con estas condiciones no existe ningún subgrupo normal no trivial de G que no sea A, B o G.

Proposición 1.2.18. *Sea $G = A \times B$, $U \leq G$, $H_X \leq X$ para $X = A, B$. Si $\{X, Y\} = \{A, B\}$, $U \perp H_A H_B$ y $\pi_X(H_A H_B \cap U) = H_X \cap \pi_X(U)$, entonces $U \perp H_Y$.*

Demostración. Primero notemos dos observaciones generales:

(1) Si $V \leq W \leq G$, entonces $\pi_A(V)W = \pi_B(V)W$.

Supongamos $a \in \pi_A(U)$, entonces existe $b \in B$ tal que $x = ab \in V \leq W$. Por tanto, $a = b^{-1}x \in \pi_B(V)W$. El otro contenido es análogo.

(2) $UH_B \cap H_AH_BU = UH_B \cap (\pi_A(U) \cap H_A)H_BU$.

Supongamos que $x \in UH_B \cap H_AH_BU$, entonces $x = uh_B$ con $u \in U$, $h_B \in H_B$ y $x = \bar{h_A}\bar{h_B}\bar{u}$ donde $\bar{h_A} \in H_A, \bar{h_B} \in H_B$ y $\bar{u} \in U$. Ahora, $u = u_Au_B$ y $\bar{u} = \bar{u_A}\bar{u_B}$ donde $\{u_A, \bar{u_A}\} \subseteq A$ y $\{u_B, \bar{u_B}\} \subseteq B$. Resolviendo la ecuación $u_Au_Bh_B = \bar{h_A}\bar{h_B}\bar{u_A}\bar{u_B}$, obtenemos que $u_A = \bar{h_A}\bar{u_A}$, por tanto $\bar{h_A} \in H_A \cap \pi_A(U)$. Así $x = \bar{h_A}\bar{h_B}\bar{u} \in (\pi_A(U) \cap H_A)H_BU$. El contenido inverso se obtiene de forma trivial.

Probaremos la proposición suponiendo por simetría que $X = A$. Como $U \perp H_AH_B$, tenemos $UH_B \subseteq H_AH_BU$. Por tanto:

$$
\begin{array}{rcll}
UH_B & = & UH_B \cap H_AH_BU & \\
 & = & UH_B \cap (\pi_A(U) \cap H_A)H_BU & \text{por (2)} \\
 & = & UH_B \cap H_B\pi_A(H_AH_B \cap U)U & \text{por hipótesis y por ser AB producto directo} \\
 & = & UH_B \cap H_B\pi_B(H_AH_B \cap U)U & \text{por (1)} \\
 & = & UH_B \cap H_BU. &
\end{array}
$$

Por tanto $UH_B \subseteq H_BU$. Como G es finito, $UH_B = H_BU$ y $U \perp H_B$. □

En particular si $U \perp H_AH_B$ y $H_X \cap \pi_X(U) = 1$, entonces la hipótesis de la Proposición 1.2.18 claramente se da y $U \perp H_Y$ para $\{A, B\} = \{X, Y\}$.

Notar que en el Ejemplo 1.2.12 se tiene $\pi_B(U \cap H_AH_B) \neq \pi_B(U) \cap H_B$. Esto no es una coincidencia sino una consecuencia del resultado anterior.

1.3. Preliminares sobre propiedades de inmersión

Como ya se ha comentado, este trabajo trata de analizar cómo subgrupos de productos directos con varias propiedades de inmersión pueden ser detectados y caracterizados. En esta sección, se definen las propiedades de inmersión con las que se va a trabajar y se presentan resultados básicos que serán utilizados durante toda la memoria. Todos los resultados de esta sección están obtenidos de [10, (I.6),(I.7)]. Se incluyen algunas demostraciones para ilustrar las técnicas de trabajo.

Definición 1.3.1. Sea G un grupo y $U \leq G$. Entonces U se dice *pronormal* en G si para cada $g \in G$, los subgrupos U y U^g son conjugados en el subgrupo generado por ambos $\langle U, U^g \rangle$.

Decimos que U es *localmente pronormal* si cada subgrupo de Sylow de U es pronormal en G.

El concepto de pronormalidad surge principalmente de las propiedades básicas de conjugación de los subgrupos de Sylow en grupos finitos y se ha convertido en una importante propiedad. Además los subgrupos de Sylow y los subgrupos de Hall son pronormales en grupos finitos resolubles. Por esta razón gran parte de los antecedentes acerca de la pronormalidad se encuentran en fuentes que tratan principalmente con grupos resolubles. Sin embargo, el hecho de ser resoluble no se requiere en la definición y esto será el principal enfoque en este trabajo. Aunque en el Capítulo 3 se darán algunas caracterizaciones que requieren que uno de los factores del producto directo sea resoluble.

Nota 1.3.2. a) Un subgrupo normal de un grupo es pronormal.

b) Un subgrupo de Hall de un subgrupo normal resoluble N de un grupo G es un subgrupo pronormal en G.

c) Un subgrupo maximal es un subgrupo pronormal.

Proposición 1.3.3. *Sea G un grupo. Entonces:*

a) Si U es pronormal en G y $U \leq L \leq G$, entonces U es pronormal en L.

b) Si $U \leq G$, entonces U es subnormal y pronormal en G si y sólo si $U \trianglelefteq G$.

c) (Argumento de Frattini) Si $U \leq K \trianglelefteq G$ y U es pronormal en G, entonces $G = N_G(U)K$.

d) Si $K \trianglelefteq G$ y U es pronormal en G, entonces UK es pronormal en G. Además UK/K es pronormal en G/K y $N_G(UK) = N_G(U)K$.

Si $K \leq L \leq G$ y L/K es pronormal en G/K, entonces L es pronormal en G.

e) Supongamos $\Phi : G \to H$ un epimorfismo de grupos. Entonces:

a) Si U es pronormal en G, entonces $\Phi(U)$ es pronormal en H.

b) Si W es pronormal en H, entonces $\Phi^{-1}(W)$ es pronormal en G.

Demostración. a) Trivial.

b) Supongamos primero $U \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ y U pronormal en G. Entonces sea $g \in G$, tenemos que ver que $U^g = U$. Obviamente $U^g \leq K^g = K$. Ahora, como U es pronormal en G, existe $x \in \langle U, U^g \rangle$ tal que $U^g = U^x$. En particular, $x \in K$ y $U^g = U^x = U$. Supongamos ahora U pronormal en G tal que $U = U_0 \trianglelefteq U_1 \cdots \trianglelefteq U_n = G$, $n \geq 3$. Por a) e inducción sobre n, deducimos $U \trianglelefteq G$.
Por otra parte, si $U \trianglelefteq G$ es obvio que es subnormal y pronormal.

c) Sea $g \in G$. Entonces $U^g = U^x$ para algún $x \in \langle U, U^g\rangle \leq K$ y consecuentemente $gx^{-1} \in N_G(U)$ con $x \in K$. Por tanto $g \in N_G(U)K$.

d) Si $g \in G$, entonces $U^g = U^x$ para algún $x \in \langle U, U^g\rangle$. Por tanto $(UK)^g = U^gK = U^xK = (UK)^x$ y $x \in \langle U, U^g\rangle K = \langle UK, (UK)^g\rangle$. Consecuentemente UK es pronormal en G y se sigue directamente que UK/K lo es en G/K. Finalmente, por c) $N_G(UK) = N_{N_G(UK)}(U)K$. Por tanto $N_G(UK) = N_G(U)K$.

El resto es una prueba directa.

e) Se sigue fácilmente del apartado anterior ya que $G/Ker\Phi \cong H$.

□

Proposición 1.3.4. *(Gaschütz) Sea $U \leq G$ y $N \trianglelefteq G$. Son equivalentes:*

a) U es pronormal en G;

b) U es pronormal en $N_G(UN)$ y UN es pronormal en G.

Demostración. La implicación $(a) \to (b)$ se deduce de 1.3.3(a), (d).

Veamos ahora la implicación $(b) \to (a)$. Sea $g \in G$. Puesto que $\langle UN, (UN)^g\rangle = N\langle U, U^g\rangle$ y como UN es pronormal en G, $(UN)^g = (UN)^{nx}$ para algún $n \in N$, $x \in \langle U, U^g\rangle$. Por tanto $gx^{-1} \in N_G(UN)$. Puesto que U es pronormal en $N_G(UN)$ se sigue que $U^{gx^{-1}} = U^y$ para algún $y \in \langle U, U^{gx^{-1}}\rangle$. Ahora, como $x \in \langle U, U^g\rangle$, $U^{gx^{-1}} \leq \langle U, U^g\rangle$ y por tanto $y \in \langle U, U^g\rangle$. Así, $U^g = U^{yx}$ con $yx \in \langle U, U^g\rangle$. Es decir U es pronormal en G. □

Teorema 1.3.5. *Sea U un subgrupo de un grupo G resoluble. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes dos a dos:*

a) U es pronormal en G;

b) Cada sistema de Hall Σ de G reduce en exactamente un conjugado de U;

c) Si $g \in G$ y si Σ es un sistema de Hall de G tal que Σ y Σ^g reducen en U, entonces $g \in N_G(U)$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Lo probaremos por inducción sobre $|G|$. Por 1.1.22 dado un sistema de Hall Σ de G, este reduce en algún conjugado de U y podemos tomar el mismo U. Supongamos que Σ también reduce en U^g. Sea $N \trianglelefteq G$, y denotamos las imágenes bajo el homomorfismo natural $G \mapsto G/N = \bar{G}$ con barras. Por 1.1.23 y 1.3.3 d) tenemos $\bar{\Sigma} \searrow \bar{U}$ pronormal en G y entonces $\bar{U} = \bar{U}^g$ por inducción; en otras palabras $U^gN = UN$. Sea $L = UN$. Puesto que $\langle U^g, U\rangle \leq L$, tenemos $U^g = U^l$ para algún $l \in L$. Por 1.1.24 $\Sigma \searrow N$. Así, por 1.1.25 b), el conjunto $\Sigma \cap L$ es un sistema de Hall de L y claramente reduce en U y U^l. Si $L < G$, por inducción tenemos $U = U^l = U^g$, como queríamos. Por tanto podemos suponer que $UN = G$ para todo $N \trianglelefteq G$. Entonces $U = G$ o $Core_G(U) = 1$ y G es un grupo con estabilizador U. Si $U = G$ o $U = 1$, obtenemos la conclusión que queremos. Supongamos entonces que U es un subgrupo no-normal maximal de G, con índice una p-potencia, y sea $S \in \Sigma \cap Hall_{p'}(G)$. Por 1.1.26 tenemos $S \leq U \cap U^g$, donde S y $S^{g'}$ son p'-subgrupos de Hall de U. Esto nos lleva a que $S^{g'} = S^u$ para algún $u \in U$ y entonces que $ug \in N_G(S) \leq U$ por 1.1.27. Consecuentemente $g \in U$ y $U = U^g$, como queríamos.

b) $\Rightarrow$ *c)* Si Σ y Σ^g reduce en U, entonces Σ^g reduce en U y U^g. Entonces por hipótesis tenemos $U = U^g$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Sea $g \in G$, y sea Σ_0 un sistema de Hall de U. La extensión de Σ_0 en un sistema de Hall Σ_1 de $J = \langle U, U^g \rangle$, y la extensión de Σ_1 en un sistema de Hall Σ de G. Por 1.1.22 existe un $x \in J$ tal que $\Sigma_1^x \searrow U^g$. Entonces $\Sigma^x \searrow U^g$, y entonces $\Sigma^{xg'} \searrow U$. Puesto que por la definición $\Sigma \searrow U$, conluimos que $xg^{-1} \in N_G(U)$ por nuestra suposición de que *c)* es cierto. Por tanto $U^g = U^x$ con $x \in \langle U, U^g \rangle$ y U es pronormal en G. □

Corolario 1.3.6. *Sea U un subgrupo pronormal y permutable con sistema de un grupo G resoluble. Si un sistema de Hall Σ reduce en U, entonces U es Σ-permutable.*

Proposición 1.3.7. *Sea Σ un sistema de Hall de un grupo G resoluble, y sea H un subgrupo pronormal en el que Σ reduce. Entonces Σ reduce en $N_G(H)$; además, $N_G(\Sigma) \leq N_G(H)$.*

Definición 1.3.8. Un subgrupo $U \leq G$ es *abnormal* si para todo $g \in G, g \in \langle U, U^g \rangle$.

Nota 1.3.9. a) Un subgrupo $M \leq G$ maximal es abnormal si y sólo si M no es normal en G.

b) Un subgrupo subnormal K de G es abnormal si y sólo si $K = G$.

Como consecuencia de la definición se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1.3.10. *a) Si U es abnormal en G y $U \leq W \leq G$, entonces U es abnormal en W y W es abnormal en G.*

b) Si U es abnormal en G, entonces $N_G(U) = U$.

c) Si U es abnormal en G y $\Phi : G \to H$ es un homomorfismo, entonces $\Phi(U)$ es abnormal en $\Phi(G)$.

d) Si U es abnormal en G, entonces U es pronormal en G.

Lema 1.3.11. *Sea U un subgrupo de G un grupo resoluble:*

a) Si U es pronormal en G, entonces $N_G(U)$ es abnormal en G;

b) U es abnormal en G si y sólo si U es pronormal en G y $U = N_G(U)$;

c) Si Σ es un sistema de Hall de G que reduce en U y si U es abnormal en G, entonces $N_G(\Sigma) \leq H$.

Demostración. a) Sea $g \in G$ y U pronormal en G. Entonces por la definición de pronormalidad, existe $x \in < U, U^g >$ tal que $U^x = U^g$. Es decir $gx^{-1} \in N_G(U)$. Por tanto,

$$g \in N_G(U)\langle U, U^g\rangle \leq N_G(U)\langle N_G(U), N_G(U)^g\rangle = \langle N_G(U), N_G(U)^g\rangle.$$

b) La primera implicación se deduce de 1.3.10 b) d) y la segunda es consecuencia de a).

c) Es consecuencia directa de b) y de 1.3.7.

□

Definición 1.3.12. Sea U un subgrupo de un grupo G.

1. Si p es un primo, se dice que U es *p-normalmente inmerso en G* si un p-subgrupo de Sylow de U es un p-subgrupo de Sylow de algún subgrupo normal de G.

2. Decimos que U es *normalmente inmerso en G* si U es p-normalmente inmerso en G para todo primo $p \in \sigma(U)$.

Nota 1.3.13. a) Si $U \leq G$ y $P \in Syl_p(U)$, está claro que $P \in Syl_p(N)$ para algún $N \trianglelefteq G$ si y sólo si P es un p-subgrupo de Sylow de su clausura normal $\langle P^G\rangle$.

Esta observación nos da una definición alternativa a la anterior.

b) Si $P \in Syl_p(N)$ para algún $N \trianglelefteq G$, entonces P es pronormal en G. Es decir un subgrupo normalmente inmerso de G es localmente pronormal y, si G es resoluble, es pronormal en G.

Notemos que si U es normalmente inmerso en $A \times B$, entonces un resultado estandard dice que para $X = A, B$, los subgrupos $\pi_X(U)$ y $U \cap X$ son normalmente inmersos en X. Sin embargo estas propiedades no caracterizan los subgrupos normalmente inmersos U a menos que $U = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.14. Sea $A = B = Sym(3)$, $G = A \times B$, y $U = D(O_3(A))$. Entonces $\pi_X(U) \trianglelefteq X$, $U \cap X = 1$, para $X = A, B$, pero U no es normalmente inmerso en G.

Lema 1.3.15. *Sea U un subgrupo normalmente inmerso de un grupo G. Sea $K \trianglelefteq G$ y $H \leq G$. Entonces:*

a) Si $U \leq H$, entonces U es normalmente inmerso en H;

b) UK es p-normalmente inmerso en G y UK/K es p-normalmente inmerso en G/K;

c) Si $K \leq H$ y H/K es p-normalmente inmerso en G/K, entonces H es p-normalmente inmerso en G;

d) $U \cap K$ es p-normalmente inmerso en G, y si K es un p-grupo, entonces $U \cap K \trianglelefteq G$.

Demostración. Sea $P \in Syl_p(U) \cap Syl_p(N)$, donde $N \trianglelefteq G$.

a) Se sigue directamente bajo la observación de que $N \cap H \trianglelefteq H$ y $P \in Syl_p(N \cap H)$.

b) Sea $P \leq P^* \in Syl_p(UK)$. Puesto que P^*K/K contiene a $PK/K \in Syl_p(UK/K)$, tenemos que $P^*K = PK$. Por tanto $|NK : P^*K| = |NK : PK| = |N : P(N \cap K)|$, y esto es un p'-número ya que $P \in Syl_p(N)$. Por tanto, $|NK : P^*| = |NK : P^*K||P^*K : P^*|$ es también un p'-número ya que $P^* \in Syl_p(P^*K)$. Entonces P^* es un p-subgrupo de Sylow de $NK \trianglelefteq G$, y consecuentemente UK es p-normalmente inmerso en G. El resto queda claro.

c) Sea $Q \in Syl_p(H)$. Entonces $QK/K \in Syl_p(R/K)$ para algún $R \trianglelefteq G$. Puesto que $Q \in Syl_p(QK)$, se sigue que $|R : Q| = |R : QK||QK : Q|$ es un p'-número y por tanto que $Q \in Syl_p(R)$.

d) Por 1.1.3 a) tenemos $P \cap K \in Syl_p(U \cap K) \cap Syl_p(N \cap K)$. Por tanto $U \cap K$ es p- normalmente inmerso en G. Además si K es un p-grupo, tenemos que $U \cap K$ es subnormal en G y $U \cap K$ es pronormal en G, y por 1.3.3 b) concluimos que $U \cap K \trianglelefteq G$.

□

Proposición 1.3.16. *Sea P un p-subgrupo de un grupo resoluble G. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes dos a dos:*

a) P es normalmente inmerso en G;

b) P permuta con un p'-subgrupo de Hall de G y P está normalizado por un p-subgrupo de Sylow de G;

c) $P \in Syl_p(\langle P, P^g \rangle) \forall g \in G$;

d) P es normal en cada p-subgrupo que contiene a P, y P cumple la siguiente condición:

$$G = KN_G(P \cap K) \text{ para todo } K \trianglelefteq G. \tag{1.1}$$

e) P centraliza cada factor p-principal que evita y satisface (1.1);

f) P es pronormal en G y satisface (1.1);

g) P es un subgrupo cubre-evita pronormal de G.

En particular recalcamos que los subgrupos normalmente inmersos son localmente pronormales (i.e. los subgrupos de Sylow son pronormales) y en grupos resolubles son pronormales. Además, si U es un subgrupo normalmente inmerso de un grupo resoluble G, entonces U es un permutable con sistema. En particular, si Σ en un sistema de *Hall* de G, entonces $\Sigma \searrow U$ si y sólo si $\Sigma \perp U$.

Proposición 1.3.17. *Sean H y K subgrupos normalmente inmersos de un grupo G. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.*

a) Si $H \trianglelefteq \trianglelefteq G$, entonces $H \trianglelefteq G$.

b) Si M es un subgrupo normal nilpotente de G, entonces $H \cap M \trianglelefteq G$.

c) Si $H \perp K$, entonces HK es un subgrupo normalmente inmerso de G.

Demostración. a) Por inducción sobre el defecto de H como subgrupo subnormal, podemos suponer que existe un N tal que $H \trianglelefteq N \trianglelefteq G$. Sea $H_p \in Syl_p(H)$ y sea $g \in G$. Puesto que H es localmente pronormal en G, H_p es pronormal en G y podemos aplicar el argumento de Frattini. Obtenemos $G = NN_G(H_p)$ y como $N \leq N_G(H)$ tenemos que $H_p^g \leq H$. Por tanto $H = H^g$ ya que $H^g = \langle H_p^g : p \in \sigma(H) \rangle \leq H$. Así, $H \trianglelefteq G$.

b) Vamos a aplicar a) para demostrar el resultado. Es decir,vamos a probar que $H \cap M$ es normalmente inmerso y subnormal en G. $H \cap M$ es normalmente inmerso en G por serlo H y por ser $M \trianglelefteq G$. Además es subnormal por ser M normal y nilpotente.

c) Sea p un primo. Como $HK = KH$, sabemos por [1, Lema 1.3.2] que existen $H_p \in Syl_p(H)$ y $K_p \in Syl_p(K)$ tal que $H_pK_p = K_pH_p \in Syl_p(HK)$. Entonces

$H_p \in Syl_p(N)$ para algún $N \trianglelefteq G$ y $K_p \in Syl_p(M)$ para algún $M \trianglelefteq G$. Veamos que $H_pK_p \in Syl_p(MN)$.

$$|MN : H_pK_p| = |MN : MH_p||MH_p : H_pK_p| = |N : N \cap MH_p||M : M \cap H_pK_p|$$

es un p'-número ya que divide a $|N : H_p||M : K_p|$. Por tanto H_pK_p es un p-subgrupo de Sylow de $MN \trianglelefteq G$ lo que prueba que HK es normalmente inmerso en G.

□

Utilizando la Proposición 1.3.17 c) se puede ver que si U es normalmente inmerso en $G = A \times B$, M es normalmente inmerso en B y $U \perp M$, entonces $UM \cap A$ es normalmente inmerso en A. El siguiente ejemplo muestra que el hecho de que esta condición se cumpla para ambas coordenadas es insuficiente para que U sea normalmente inmerso en G.

Ejemplo 1.3.18. Sea $A = Z_3$, $B = Sym(3)$ y $U = D(A)$. Entonces $UM \cap A$ es normalmente inmerso en A para cada $M \trianglelefteq B$, y $UN \cap B$ es normalmente inmerso en B para cada $N \trianglelefteq A$, pero U es normalmente inmerso en $A \times B$.

Proposición 1.3.19. *Sea U un subgrupo de un grupo G resoluble. Entonces U es normalmente inmerso en G si y sólo si existe un sistema de Hall Σ de G tal que $U \perp \Sigma$ y $U_p = U \cap G_p \trianglelefteq G_p$ para todo primo $p \in \sigma(G)$, donde G_p es el p-subgrupo de Sylow en Σ.*

Demostración. Supongamos que U es normalmente inmerso en G. Por estar en un grupo resoluble podemos considerar Σ un sistema de Hall de G que reduce en U. Por tanto Σ permuta con U y la otra condición se deduce fácilmente. El recíproco es consecuencia de la conocida caracterización de $p-$subgrupos normalmente inmersos siendo p primo en 1.3.16. □

Capítulo 2

Subgrupos normalmente inmersos de productos directos de grupos

2.1. Permutabilidad con sistemas de Hall en productos directos resolubles.

La Proposición 1.2.18 da una condición para un subgrupo U de $G = A \times B$ que implica la permutabilidad con uno de los factores de un subgrupo factorizado permutable con U. Esto da la suficiente información para la caracterización, en la Proposición 2.1.5, de los subgrupos permutables con un sistema de Hall de un producto directo de grupos resolubles.

En los subgrupos de Hall se obtiene este caso de interés.

Proposición 2.1.1. *Sea $G = A \times B$, $U \leq G$ y $G_\pi = A_\pi \times B_\pi \in Hall_\pi(G)$ para un conjunto de primos π, donde $X_\pi = G_\pi \cap X$, para $X = A, B$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $U \perp G_\pi$;

b) $U \perp A_\pi$ *y* $U \perp B_\pi$;

c) $U \leq N_G((U \cap A)(U \cap B)G_\pi)$.

Demostración.

a) $\rightarrow$ *b)* Por la Proposición 1.2.18 si $\pi_X(G_\pi \cap U) = X_\pi \cap \pi_X(U)$ para $X = A, B$ obtenemos el resultado. Pero si $G_\pi \in Hall_\pi(G)$, $G_\pi \cap U$ es un $\pi-$subgrupo de U. Además como $UG_\pi = G_\pi U$ es un subgrupo tenemos que $|UG_\pi| = \frac{|U||G_\pi|}{|U \cap G_\pi|}$ y

$\frac{|UG_\pi|}{|G_\pi|} = \frac{|U|}{|G_\pi \cap U|}$ es un $\pi'-$número. Así $U_\pi := G_\pi \cap U \in Hall_\pi(U)$. Ahora como sabemos que $\pi_X(G_\pi \cap U) \leq \pi_X(G_\pi) \cap \pi_X(U) \leq \pi_X(U)$ y tenemos $\pi_X(U_\pi) \in Hall_\pi(\pi_X(U))$, llegamos a que $\pi_X(G_\pi \cap U) = \pi_X(G_\pi) \cap \pi_X(U)$ ya que $\pi_X(G_\pi) \cap \pi_X(U)$ es un π-subgrupo. Y obviamente $\pi_X(G_\pi) = X_\pi$ para $X = A, B$.

b) $\rightarrow$ *a)* Es inmediato (ver nota 1.2.11).

b) $\leftrightarrow$ *c)* Se sigue de la Proposición 1.2.10. $\square$

Por el argumento de Frattini junto con que todos los subgrupos de Hall son conjugados, obtenemos para grupos resolubles otra equivalencia.

Corolario 2.1.2. *Sea $G = A \times B$ un grupo resoluble, $U \leq G$, y $G_\pi \in Hall_\pi(G)$. Entonces $U \perp G_\pi$ si y sólo si $U = (U \cap A)(U \cap B)N_U(G_\pi)$ y $U \cap X \perp X_\pi$ para $X = A, B$.*

Demostración. Veamos la primera implicación. Como $U \perp G_\pi$, claramente se verfica que $U \cap X \perp X_\pi$. Ahora, sea $Z := N_G((U \cap A)(U \cap B)G_\pi)$ entonces $(U \cap A)(U \cap B)G_\pi \trianglelefteq Z$ y $G_\pi \in Hall_\pi(Z)$. Por tanto estamos en condiciones de aplicar el argumento de Frattini y obtenemos $Z = (U \cap A)(U \cap B)G_\pi N_Z(G_\pi) = (U \cap A)(U \cap B)N_Z(G_\pi)$. Y ahora por la Proposición 2.1.1 sabemos que $U \leq N_G((U \cap A)(U \cap B)G_\pi) = Z$ y por tanto $U = U \cap Z = (U \cap A)(U \cap B)N_U(G_\pi)$. Para la siguiente implicación tenemos que $U \cap X \perp X_\pi$ para $X = A, B$, por tanto, $(U \cap A)(U \cap B)G_\pi$ es un subgrupo de G y en particular de $N_G((U \cap A)(U \cap B)G_\pi)$. Podemos volver a aplicar el argumento de Frattini, ahora sobre $(U \cap A)(U \cap B)G_\pi \trianglelefteq N_G((U \cap A)(U \cap B)G_\pi)$ y de manera similar a la demostración de 2.1.1 obtenemos el resultado. $\square$

Es claro que la Proposición 2.1.1 se cumple también para subgrupos de Sylow. Podemos dar así el siguiente resultado acerca de la permutabilidad de un subgrupo con los subgrupos de Sylow en un producto directo, sin hipótesis de resolubilidad para el grupo, por la conjugación de los subgrupos de Sylow en un grupo finito arbritario.

Proposición 2.1.3. *Sea $G = A \times B$, $U \leq G$, $G_p = A_p \times B_p \in Syl_p(G)$ para un primos p, donde $X_p = G_p \cap X$ para $X = A, B$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $U \perp G_p$;

b) $U \perp A_p$ *y* $U \perp B_p$;

c) $U \leq N_G((U \cap A)(U \cap B)G_p)$;

d) $U = (U \cap A)(U \cap B)N_U(G_p)$ *y* $U \cap X \perp X_p$, *para* $X = A, B$.

Corolario 2.1.4. *Sea U un subgrupo tipo-diagonal de $G = A \times B$, y sea $G_p \in Syl_p(G)$, p primo, entonces $U \perp G_p$ si y sólo si $U = N_U(G_p)$.*

Los sistemas de Hall juegan un papel muy importante en la teoría de los grupos resolubles. En lo que sigue adoptaremos la notación: Σ es un sistema de Hall de un grupo finito resoluble G, entonces G_π es el π-subgrupo de Hall contenido en Σ; por tanto $Hall_\pi(G) \cap \Sigma = \{G_\pi\}$. Si $\pi = \{p\}$ para algún primo p, entonces escribimos $G_\pi = G_p$. También si $U \leq G$, entonces $N_U(\Sigma) = U \cap N_G(\Sigma)$. La siguiente proposición da una caracterización de los subgrupos de un producto directo permutables con un sistema de Hall.

Proposición 2.1.5. *Sean $G = A \times B$ resoluble, Σ un sistema de Hall de G y $U \leq G$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $\Sigma \perp U$;

b) $U \leq \bigcap_{G_\pi \in \Sigma} N_G((U \cap A)(U \cap B)G_\pi)$;

c) $U = (U \cap A)(U \cap B)N_U(\Sigma)$ *y* $U \cap X \perp \Sigma \cap X$ *para* $X = A, B$.

Demostración.

a) $\rightarrow$ *c)* Veamos que $U \leq (U \cap A)(U \cap B)N_U(\Sigma)$. Para cada $p \in \sigma(U)$, sea $U_p := U \cap G_p$. Puesto que $\Sigma \perp U$, $\Sigma \searrow U$, entonces $U_p \in Syl_p(U)$. Por el Corolario 2.1.2 obtenemos $U_p = (U_p \cap A)(U_p \cap B)N_{U_p}(G_{p'})$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} U_p &= (U_p \cap A)(U_p \cap B)N_{U_p}(G_{p'}) \\ &= (U_p \cap A)(U_p \cap B)N_{U_p}(\Sigma) \\ &\leq (U \cap A)(U \cap B)N_U(\Sigma) \end{aligned}$$

ya que,

$$U_p \leq G_p \leq \bigcap_{r \in \sigma(G), r \neq p} G_{r'} \text{ y } N_G(\Sigma) = \bigcap_{r \in \sigma(G)} N_G(G_{r'}).$$

Finalmente como $U = \langle U_p : U_p \in Syl_p(U) \rangle$ tenemos la igualdad.

c) $\rightarrow$ *a)* Notar que para todo conjunto de primos $\pi \subset \sigma(G)$, por c) tenemos $U = (U \cap A)(U \cap B)N_U(G_\pi)$, lo que implica a) por el Corolario 2.1.2.

a) $\leftrightarrow$ *b)* Se sigue de la Proposición 2.1.1. $\square$

Puesto que los normalizadores de sistema son nilpotentes, 2.1.5 da una idea de por qué $U/(U \cap A)(U \cap B) \cong \pi_X(U)/(U \cap X)$ es nilpotente para $X = A, B$, bajo la hipótesis de la Proposición 2.1.1. Si se supone U normalmente inmerso en $A \times B$, la misma conclusión se deduce en el apartado 2.2 sin la condición de resolubilidad.

2.2. Subgrupos normalmente inmersos de productos directos

El objetivo principal de esta sección es obtener propiedades estructurales de los subgrupos normalmente inmersos en productos directos.

Se observa que en un grupo finito simple los únicos subgrupos normalmente inmersos son los subgrupos de Hall. Pero este no es el caso para grupos arbitrarios y, en particular, para grupos resolubles. El siguiente resultado prueba que el resultado sobre grupos simples se extiende a productos directos de grupos simples.

Lema 2.2.1. *Sea $G = A \times B$ con A y B grupos simples no-abelianos. Si U es un subgrupo normalmente inmerso de G, entonces U está factorizado, es decir, $U = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$.*

Demostración. Por hipótesis, cada subgrupo de Sylow de U es un subgrupo de Sylow de un subgrupo normal de G. Además por la nota 1.2.17 no existe ningún subgrupo normal no trivial de G que no sea A, B o G. Por tanto cada subgrupo de Sylow P de U satisface $P = \pi_A(P) \times \pi_B(P)$. Ahora, si $\sigma(U) = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ y $P_i \in Syl_{p_i}(U)$, entonces:

$$U = \langle P_1, \ldots, P_r\rangle = \langle \pi_A(P_1), \ldots, \pi_A(P_r)\rangle \times \langle \pi_B(P_1), \ldots, \pi_B(P_r)\rangle =$$

$$= \pi_A(U) \times \pi_B(U).$$

□

Se debe mencionar que si $U = U_A \times U_B$ es un subgrupo factorizado de un producto directo $A \times B$, i. e. $U_A \leq A$ y $U_B \leq B$, entonces U es un subgrupo normalmente inmerso en $A \times B$ si y sólo si U_X es normalmente inmerso en X, para $X = A, B$.

Ahora se prueba el resultado al que hemos hecho alusión anteriormente en la Proposición 2.1.5

Proposición 2.2.2. *Sea U subgrupo de $G = A \times B$. Si U es normalmente inmerso en G, entonces $\pi_X(U)/(U \cap X)$ es nilpotente, para $X = A, B$.*

Demostración. Primero notemos que $\pi_X(U)/(U \cap X)$ es nilpotente para $X = A, B$ si y sólo si $U/(U \cap A)(U \cap B)$ es nilpotente. Argumentaremos por inducción sobre $|G| + |U|$. Si $\pi_A(U) \times \pi_B(U) < G$, como U es normalmente inmerso en G entonces lo es en $\pi_A(U) \times \pi_B(U)$ y por hipótesis de inducción $U/(U \cap A)(U \cap B)$ es nilpotente como queríamos. Por tanto podemos suponer que $G = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$, y entonces

$U \cap X \trianglelefteq G$, para $X = A, B$. Por inducción sobre $|U|$ podemos suponer $U \cap X = 1$, para $X = A, B$. Pero en esta situación tenemos que, por el teorema de Goursat:

$$A = \pi_A(U) \cong \pi_B(U) = B.$$

Por tanto tenemos que probar que $G = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$ es nilpotente, o equivalentemente, que U es nilpotente. Puesto que U es normalmente inmerso en G, por la Proposición 1.3.17 b) se tiene que $U \cap F(G) \trianglelefteq G$. Es fácil ver que

$$F(U) \leq \pi_A(F(U)) \times \pi_B(F(U)) \leq F(G).$$

Luego $F(G) \cap U$ es nilpotente y $F(G) \cap U \trianglelefteq G$ por tanto $F(G) \cap U \leq F(U)$. Se tiene que $F(U) = F(G) \cap U$. Pero esto implica que $\pi_X(F(U)) \leq Z(X) \leq Z(G)$, para $X = A, B$, y entonces $F(U) \leq Z(G)$. Supongamos $A = \pi_A(U)$ no simple y sea M_A subgrupo propio normal no-trivial de A. Sea $M_B := M_A U \cap B$; entonces $M_B \trianglelefteq UA = A \times B$. Además $M_B U = (M_A U \cap B)U = M_A U \cap BU = M_A U$. Denotemos con barras las imágenes en el grupo $\bar{G} = (A \times B)/(M_A \times M_B)$. Es sencillo ver que $\bar{U} \cap \bar{X} = 1$, para $X = A, B$, y consecuentemente $\bar{U}$ es nilportente por hipótesis de inducción. Además $U \cap (M_A \times M_B) \neq U$, y $U \cap (M_A \times M_B)$ es normalmente inmerso en G. Por la elección de U se tiene que $U \cap (M_A \times M_B)$ es nilpotente. Luego

$$U \cap (M_A \times M_B) \leq F(U) \leq Z(G)$$

y entonces U es nilpotente. Por tanto podemos suponer que A, B son grupos simples. Si A o B son abelianos, el resultado está claro. En otro caso, por el Lema 2.2.1 se tiene que $X = \pi_X(U) = U \cap X = 1$ para $X = A, B$, y se completa la prueba. □

Corolario 2.2.3. *Sea U un subgrupo de $G = A \times B$. Si U es normalmente inmerso en G, entonces*

a) $U \trianglelefteq \pi_A(U) \times \pi_B(U)$, *y*

b) $\pi_X(U)/(U \cap X)$ *es abeliano para* $X = A, B$.

Demostración. a) Como U es normalmente inmerso en G, también lo es en $\pi_A(U) \times \pi_B(U)$ y por tanto $U/(U \cap A)(U \cap B)$ lo es en $\pi_A(U) \times \pi_B(U)/(U \cap A)(U \cap B)$. Por otra parte este último es nilpotente por la Proposición 2.2.2 y por tanto todo subgrupo es subnormal. Ahora por la Proposición 1.3.17 *b*) obtenemos $U/(U \cap A)(U \cap B) \trianglelefteq \pi_A(U) \times \pi_B(U)/(U \cap A)(U \cap B)$ y de aquí $U \trianglelefteq \pi_A(U) \times \pi_B(U)$ como queríamos.

b) Por a) sabemos que $U \trianglelefteq \pi_A(U) \times \pi_B(U)$ y por la Proposición 1.2.16 obtenemos que $(\pi_A(U))' = [\pi_A(U), \pi_A(U)] = [U, \pi_A(U)] \leq U \cap \pi_A(U) = U \cap A$. Por tanto $\pi_A(U)/U \cap A$ es abeliano. Análogo para $X = B$.

□

Nota 2.2.4. Notemos algunos casos especiales:

a) Si U es un subgrupo subdirecto de $G = A \times B$ (i.e. $\pi_X(U) = X$ para $X = A, B$) entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

   I) U es normalmente inmerso en G;

   II) $U \trianglelefteq G$;

   III) $G/(U \cap A)(U \cap B)$ es un grupo abeliano.

b) Si U es un subgrupo diagonal de $G = A \times B$, entonces U es normalmente inmerso en G si y sólo si G es un grupo abeliano.

c) Sea U un subgrupo normalmente inmerso de un grupo G. Por la Proposición 1.3.17 b) sabemos que $U \cap F(G) \trianglelefteq G$. Además $UF_j(G) \cap F_{j+1}(G) \trianglelefteq G$, para cada $j \geq 0$, donde $F_0(G) = 1$ y $F_{j+1}(G)/F_j(G) = F(G/F_j(G))$ para cada $j \geq 0$.

d) Sea U subgrupo normalmente inmerso del producto directo $G = A \times B$. Entonces $\pi_X(U)$ es normalmente inmerso en X, $\pi_X(U)/(U \cap X)$ es abeliano para $X = A, B$, y además $UF_j(G) \cap F_{j+1}(G) \trianglelefteq G$, para cada $j \geq 0$. Sin embargo, estas propiedades no son suficientes para que un subgrupo sea normalmente inmerso, incluso para un p-subgrupo tipo-diagonal, con p primo. Para ver esto, sea $G = Sym(3) \times E(3/7)$, donde $E(3/7)$ denota el grupo no abeliano de orden 21, y sea $U = D(Z_3)$. Entonces U tiene las propiedades citadas anteriormente pero no es normalmente inmerso en G.

A continuación se obtiene la primera caracterización para subgrupos normalmente inmersos en productos directos.

Proposición 2.2.5. *Sea U subgrupo de $G = A \times B$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) U es normalmente inmerso en G.

b) $U_p \cap X \in Syl_p([U_p, X](U_p \cap X))$, para $X = A, B$, y para cada $U_p \in Syl_p(U)$ y cada primo p;

c) $|[U_p, X](U \cap X) : U \cap X|$ es un p'-número, para $X = A, B$, y para cada $U_p \in Syl_p(U)$ y cada primo p;

d) $|[U_p, G](U \cap A)(U \cap B) : (U \cap A)(U \cap B)|$ es un p'-número, para cada $U_p \in Syl_p(U)$ y cada primo p.

Demostración. Procedemos ciclicamente para demostrar que cada enunciado implica el siguiente.

a) → *b*) Supongamos U normalmente inmerso en G y tomamos $U_p \in Syl_p(U)$ para un primo p. Por tanto U_p es un p-subgrupo de Sylow de su clausura normal $\langle U_p^G \rangle$. Puesto que $\langle U_p^G \rangle = U_p[U_p, G] = U_p([U_p, A] \times [U_p, B])$ tenemos que $[U_p, X] \trianglelefteq \langle U_p^G \rangle$ y se sigue que $U_p \cap [U_p, X] \in Syl_p([U_p, X])$ para $X = A, B$.

Las implicaciones *b*) → *c*) → *d*) se deducen fácilmente.

d) → *a*) Sea p un primo y $U_p \in Syl_p(U)$. Ver que U es normalmente inmerso en G es equivalente a ver que U_p es un p-subgrupo de Sylow de su clausura normal $\langle U_p^G \rangle$; es decir, que

$$|\langle U_p^G \rangle : U_p| = |U_p[U_p, G] : U_p| = |[U_p, G] : U_p \cap [U_p, G]|$$

es un p'-número. Consideremos la siguiente igualdad:

$$|[U_p, G] : U_p \cap [U_p, G]| = |[U_p, G] : U \cap [U_p, G]||U \cap [U_p, G] : U_p \cap [U_p, G]|.$$

Ahora notemos que $|[U_p, G] : U \cap [U_p, G]|$ divide al número:

$$|[U_p, G] : [U_p, G] \cap ((U \cap A)(U \cap B))| = |[U_p, G](U \cap A)(U \cap B) : (U \cap A)(U \cap B)|$$

que por hipótesis es un p'-número. Por otra parte, puesto que $U \cap [U_p, G] \trianglelefteq U$ tenemos que $U_p \cap [U_p, G] = U_p \cap U \cap [U_p, G]$ es un p-subgrupo de Sylow de $U \cap [U_p, G]$. Por tanto $|U \cap [U_p, G] : U_p \cap [U_p, G]|$ también es un p'-número y obtenemos el resultado.

□

Corolario 2.2.6. *Si U es un subgrupo tipo-diagonal de $G = A \times B$, entonces U es normalmente inmerso en G si y sólo si $[U_p, G]$ es un p'-grupo, para todo $U_p \in Syl_p(U)$ y para todo primo p.*

Nota 2.2.7. La Proposición 2.2.5, que es independiente de la Proposición 2.2.2, da una demostración alternativa de esta última y del Corolario 2.2.3.

Recalcamos el repetido hecho de que si L, K son subgrupos de un grupo, entonces ambos L y K normalizan $[L, K]$.
Supongamos que $U \leq G = A \times B$ y, para $V \leq U$, sea

$$\bar{V} = V(U \cap A)(U \cap B)/(U \cap A)(U \cap B).$$

Supongamos que p, q son primos (no necesariamente distintos). Entonces $[\bar{U}_p, \bar{U}_q] \trianglelefteq \langle \bar{U}_p, \bar{U}_q \rangle$ y si $\bar{U}_p$ normaliza $\bar{U}_q$ entonces $[\bar{U}_p, \bar{U}_q]$ es un q-grupo. Ahora supongamos además que U es normalmente inmerso en G. Por la Proposición 2.2.5, $[\bar{U}_p, \bar{U}_q]$ es un $\{p, q\}'$-subgrupo de $\langle \bar{U}_p, \bar{U}_q \rangle = W$. Por el argumento de Frattini $W = [\bar{U}_p, \bar{U}_q] N_W(\bar{U}_q)$.

Por tanto un p-subgrupo de Sylow de $N_W(\bar{U}_q)$ es un p-subgrupo de Sylow de W. Este p-subgrupo de Sylow de W centraliza $\bar{U}_q$ y, si consideramos los pares p, q tales que $p \neq q$, se tiene que $\bar{U}$ es nilpotente. Tomando $p = q$ vemos que $\bar{U}_p$ es abeliano para todo p, y consecuentemente $\bar{U}$ es abeliano.

La Proposición 2.2.5 analiza $U \cap X$ para $X = A, B$ cuando $U \leq G = A \times B$. Si U es normalmente inmerso en G, entonces $U \cap X$ es normalmente inmerso en X. Similarmente, las imágenes homomorfas de subgrupos normalmente inmersos son normalmente inmersas en el grupo imagen. Se concluye esta sección estudiando $\pi_X(U)$ para $X = A, B$ y las condiciones para que U sea normalmente inmerso.

Proposición 2.2.8. *Sea U un subgrupo de $G = A \times B$. Supongamos que para un primo p y $U_p \in Syl_p(U)$ se da que :*

$$\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] \leq U, \text{ para } X = A, B.$$

Entonces

a)

$$\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] \leq U_p,$$

o equivalentemente,

$$\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] = U_p \cap [\pi_X(U_p), X], \text{ para } X = A, B;$$

b) U_p es normalmente inmerso en G si y sólo si $\pi_X(U_p)$ es normalmente inmerso en X, para $X = A, B$.

Demostración. a) Es sencillo ver que si $W, Y \leq G$ con $Y \leq N_G(W)$, entonces $Y \leq N_G(\pi_X(W))$ para $X = A, B$. Por tanto, por nuestra hipótesis, $\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X]$ es un p-subgrupo de U normalizado por U_p y por tanto, $\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] \leq U_p$.

b) Si U_p es normalmente inmerso en G, entonces $\pi_X(U_p)$ lo es en X por ser π_X homomorfismo. Supongamos ahora que $\pi_X(U_p)$ es normalmente inmerso en X para $X = A, B$. Entonces $\pi_X(U_p) \in Syl_p(\langle \pi_X(U_p)^X \rangle)$, es decir $\pi_X(U_p) \in Syl_p([\pi_X(U_p), X]\pi_X(U_p))$. Sin embargo, $[\pi_X(U_p), X] = [U_p, X]$ y por *a)* $\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] = U_p \cap [\pi_X(U_p), X]$. Por tanto:

$$|[\pi_X(U_p), X]\pi_X(U_p) : \pi_X(U_p)| = |[\pi_X(U_p), X] : \pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X]| =$$

$$|[U_p, X] : U_p \cap [U_p, X]| = |[U_p, X](U_p \cap X) : U_p \cap X|$$

es un p'-número. Por la Proposición 2.2.5 *c)* se tiene que U_p es normalmente inmerso en G.

□

Teorema 2.2.9. *Sea $U \leq G = A \times B$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) U es normalmente inmerso en G.

b) Para $X = A, B$, son ciertos los siguientes enunciados:

1) $\pi_X(U)$ es normalmente inmerso en X, y

2) $\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] \leq U_p$, para cada $U_p \in Syl_p(U)$ y para todo primo p.

Demostración. Supongamos que U es normalmente inmerso en G. Entonces $(b.1)$ es cierto. Además, para $X = A, B$, tenemos $[U_p, X] = [\pi_X(U_p), X]$ y

$$U_p \cap [\pi_X(U_p), X] = U_p \cap X \cap [\pi_X(U_p), X] \leq \pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X].$$

Pero $U_p \cap [U_p, X]$ y $\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X]$ son p-subgrupos de Sylow de $[U_p, X]$. Por tanto $\pi_X(U_p) \cap [\pi_X(U_p), X] \leq U_p$ y $b)2$ queda probado.
La otra implicación se deduce de la Proposición 2.2.8 ya que U_p es normalmente inmerso en G para cada primo p y $U_p \in Syl_p(U)$. Por tanto U es normalmente inmerso en G. □

Nota 2.2.10. Esta claro que si $\pi_X(U) \cap [\pi_X(U), X] \leq U$, entonces la propiedad $(b2)$ en el Teorema 2.2.9 se cumple. Sin embargo no es una condición necesaria para que un subgrupo U sea normalmente inmerso, a menos que U sea un p-grupo para algún primo p. Para ver esto, consideramos $A = B = SL(2, 3) = QC$, donde Q es el grupo cuaternio de orden 8 y C es el grupo cíclico de orden 3. Sea $G = A \times B$ y $U = D(Z(Q)C)$. Notemos que U es normalmente inmerso en G.

Sin embargo, notemos que $Z(X) \leq \pi_X(U) \cap [\pi_X(U), X]$ para $X = A, B$. Entonces el subgrupo $\pi_X(U) \cap [\pi_X(U), X]$ no está contenido en U para $X = A$ o $X = B$.

2.3. Subgrupos normalmente inmersos de productos directos de grupos resolubles

Para grupos resolubles se pueden combinar los resultados de las dos secciones anteriores. Se mantendrá la notación de la sección 1 en relación a sistemas de Hall.

Teorema 2.3.1. *Sea U un subgrupo de un grupo resoluble $G = A \times B$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) U es normalmente inmerso en G.

b) G tiene un sistema de Hall Σ tal que:

$$U = (U \cap A)(U \cap B)N_U(\Sigma) \text{ y } U \cap X \perp \Sigma \cap X \text{ para } X = A, B \tag{2.1}$$

$$[U \cap G_p, G_p] \leq (U \cap A)(U \cap B) \text{ para todo } p \in \sigma(G) \tag{2.2}$$

c) G tiene un sistema de Hall Σ tal que $\Sigma \searrow U$ y (2.1) y (2.2) se dan para Σ.

d) Si Σ es un sistema de Hall de G tal que $\Sigma \searrow U$, entonces (2.1) y (2.2) son ciertas para Σ.

Demostración. a) $\leftrightarrow$ *b)* Por la Proposición 1.3.19, U es normalmente inmerso en G si y sólo si existe un sistema de Hall Σ de G tal que $U \perp \Sigma$ y $U_p = U \cap G_p \trianglelefteq G_p$, para todo primo $p \in \sigma(U)$. La Proposición 2.1.5 establece que $U \perp \Sigma$ es equivalente a (2.1). Además, para un primo p, es fácil ver que cada uno de los siguientes enunciados es equivalente a su sucesor:

$$U_p = U \cap G_p \trianglelefteq G_p = A_p \times B_p \text{ donde } X_p = X \cap G_p \text{ para } X = A, B;$$

$$[U_p, X_p] = [\pi_X(U_p), X_p] \leq U_p \cap X_p, \text{ para } X = A, B;$$
$$[U_p, G_p] = [U_p, A_p] \times [U_p, B_p] \leq (U_p \cap A_p)(U_p \cap B_p);$$
$$[U_p, G_p] \leq (U \cap A)(U \cap B) \cap G_p \leq (U \cap A)(U \cap B).$$

Es decir que $U_p = U \cap G_p \trianglelefteq G_p$, para cada primo p, es equivalente a (2.2).

b) $\leftrightarrow$ *c)* Primero sea Σ un sistema de Hall de G que satisface las condiciones (2.1) y (2.2). Por la Proposición 2.1.5, la propiedad (2.1) es equivalente al hecho de que $\Sigma \perp U$. Por tanto $\Sigma \searrow U$ y tenemos *c)*. La otra implicación es obvia.

c) $\leftrightarrow$ *d)* La implicación *d)* $\rightarrow$ *c)* es clara. Veamos el recíproco. Sea Σ un sistema de Hall de G que reduce en U y sea Σ_1 el sistema de Hall de *c)*. Como U es normalmente inmerso en un grupo resoluble, es pronormal y por 1.3.5 existe $g \in N_G(U)$ tal que $\Sigma = \Sigma_1^g$. Por tanto

$$U = U^g = (U^g \cap A)(U^g \cap B)(U \cap N_G(\Sigma_1^g))$$

$$= (U \cap A)(U \cap B)(U \cap N_G(\Sigma)),$$

Por otra parte, como $U \cap X \perp \Sigma_1 \cap X$, se sigue que $U \cap X = (U \cap X)^g \perp (\Sigma_1 \cap X)^g = \Sigma_1^g \cap X^g = \Sigma \cap X$.
Además si $G_p \in \Sigma_1$,

$$[U \cap G_p^g, G_p^g] = [U \cap G_p, G_p]^g \leq (U \cap A)^g(U \cap B)^g = (U \cap A)(U \cap B),$$

esto es, (2.1) y (2.2) se dan para Σ y queda probado el teorema.

$\square$

Nota 2.3.2. a) Notar que la Proposición 2.1.5 da condiciones equivalentes a (2.1) en el Teorema 2.3.1 y ellas caracterizan la permutabilidad con sistemas. Por otra parte (2.2) en el Teorema 2.3.1 es equivalente a $U \cap G_p \trianglelefteq G_p \ \forall p \in \sigma(U)$.

b) Si H es un subgrupo normalmente inmerso en un grupo resoluble G, entonces H es pronormal en G. En consecuencia, por Proposición 1.3.7, si Σ es un sistema de Hall de G tal que $\Sigma \searrow H$, entonces $N_G(\Sigma) \leq N_G(H)$. Por tanto podemos sustituir (2.1) del Teorema 2.3.1 por

$$U \trianglelefteq (U \cap A)(U \cap B)N_G(\Sigma) \tag{2.3}$$

y también

$$[\pi_X(U), N_X(\Sigma \cap X)] \leq U \cap X, \text{ para } X = A, B, \tag{2.4}$$

por la caracterización de subgrupos normales en productos directos ya que,

$$N_G(\Sigma) = N_A(\Sigma \cap A) \times N_B(\Sigma \cap B).$$

La siguiente nota muestra como pueden ser construidos los subgrupos normalmente inmersos de un producto directo de dos grupos resolubles.

Nota 2.3.3. Para construir subgrupos normalmente inmersos de un producto directo resoluble $G = A \times B$, podemos proceder de la siguiente manera:

Consideremos un subgrupo H_X normalmente inmerso de X para $X = A, B$, y un sistema de Hall Σ de G que reduce en H_AH_B. Entonces $H_AH_BN_G(\Sigma)$ es un subgrupo de G porque $N_G(\Sigma)$ normaliza H_AH_B. Sea U un subgrupo de G tal que $H_AH_B \leq U \trianglelefteq H_AH_BN_G(\Sigma)$ y $U \cap G_p \trianglelefteq G_p$, para todo primo $p \in \sigma(G)$. Por el Teorema 2.3.1, U es normalmente inmerso en G y todo subgrupo normalmente inmerso puede construirse de esa forma.

Corolario 2.3.4. *Si U es un subgrupo tipo-diagonal de un grupo resoluble $G = A \times B$, entonces U es normalmente inmerso en G si y sólo si para todo sistema de Hall Σ de G tal que $\Sigma \searrow U$, se tiene $U \leq Z(N_G(\Sigma))$ y $U \cap G_p \leq Z(G_p)$ para todo primo p.*

Nota 2.3.5. Ni la propiedad c) ni la propiedad d) del Teorema 2.3.1 2.2 son suficientes para garantizar que un subgrupo U sea normalmente inmerso en un grupo resoluble de un producto directo $G = A \times B$, incluso con la hipótesis adicional de que U sea subgrupo tipo-diagonal y $\pi_X(U)$ sea abeliano, para $X = A, B$.

Por ejemplo, sea $G = A \times B$ donde $A = B = Sym(4)$. Sea Σ un sistema de Hall de G, sea Σ_A el sistema de Hall $\Sigma \cap A$ de A, y sea $U = D(N_A(\Sigma_A), i)$, con i la inclusión de $N_A(\Sigma_A)$ en $A = B$. Entonces $U \leq Z(N_G(\Sigma))$ y por tanto c) se cumple, pero U no es normalmente inmerso en G.

Capítulo 3

Subgrupos pronormales de productos directos de grupos

3.1. Subgrupos abnormales de productos directos

En esta sección se da una caracterización de los subgrupos abnormales en productos directos en el caso de que uno de los factores directos sea resoluble. Los subgrupos abnormales en grupos no necesariamente resolubles han sido también estudiados (ver por ejemplo [9] y [17]).

La primera observación se comprueba directamente a partir de la definición de subgrupo abnormal.

Proposición 3.1.1. *Sea X un subgrupo abnormal de A e Y un subgrupo abnormal de B. Entonces $X \times Y$ es un subgrupo abnormal de $A \times B$.*

En nuestro estudio sobre productos directos observamos que el subgrupo diagonal en el producto directo de un grupo simple consigo mismo es un subgrupo maximal no normal y, por tanto, abnormal. Por contraposición, como veremos a continuación, cuando uno de los factores del producto directo es resoluble, los únicos subgrupos abnormales son los factorizados.

Nota 3.1.2. S es simple si y sólo si el subgrupo diagonal $U = \{(s,s) : s \in S\}$ de $S \times S$ es maximal.

Demostración. Supongamos S simple, $H \leq S \times S$ un subgrupo que contenga el subgrupo diagonal y algún $(s_1, s_2) \in H$ con $s_1 \neq s_2$. Sea $N \leq S$ el subgrupo con elementos n tal que $(1, n) \in H$ que es no trivial ya que $(1, s_1^{-1}s_2) \in H$. Por tanto $N \trianglelefteq S$ ya que si $(1, n) \in H$, entonces $(s^{-1}, s^{-1})(1, n)(s, s) = (1, s^{-1}ns) \in H$. Por ser

S simple se tiene $N = S$. Así, $(1, s) \in H$, $\forall s \in S$. Idénticamente $(s, 1) \in H$, $\forall s \in S$, y por tanto $H = S \times S$.
Supongamos ahora que S no es simple. Entonces existe un subgrupo propio normal N. Sea $H = \{(s, ns) : s \in S, n \in N\}$ que es subgrupo de S ya que si $s, s' \in S$ y $n, n' \in N$ se tiene: $(s, ns)(s', n's') = (ss', nsn's') = (ss', nsn's^{-1}ss') \in H$ ya que $ss' \in S$ y $nsn's^{-1} \in N$ y, además $(s, ns)^{-1} \in H$. Es decir H contiene el subgrupo diagonal y este no es maximal. $\square$

Ejemplo 3.1.3. Si S es un grupo simple no-abeliano, y $U = \{(s, s) : s \in S\} \leq S \times S$, entonces U es subgrupo maximal de $S \times S$. Puesto que un subgrupo maximal es normal o abnormal (pero no ambos) y S es simple tenemos que U es abnormal.

Notar que $\pi_S(U) = S$ es abnormal en S (para ambas componentes), U es abnormal en $S \times S$, pero U no es un subgrupo factorizado de $S \times S$.

Proposición 3.1.4. *Sea $G = A \times B$ con A o B resolubles, y sea M un subgrupo maximal de G con $N_G(M) = M$. Entonces $M = \pi_A(M) \times \pi_B(M)$ y $\pi_A(M) = A$ o $\pi_B(M) = B$.*

Demostración. Demostraremos el contrarecíproco. Supongamos $\pi_A(M) \neq A \cap M$. Notar que por el teorema de Goursat esto es equivalente a suponer que $\pi_B(M) \neq B \cap M$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es resoluble. Como M es maximal en G y $M < \pi_A(M) \times \pi_B(M)$, se sigue $\pi_X(M) = X$ para $X = A, B$. Consecuentemente $M \cap X \trianglelefteq \pi_X(M) = X$ para $X = A, B$. Veamos que $A \cap M$ es normal maximal en A. Sea $A \cap M < W \trianglelefteq A$, entonces, como W no está contenido en M, $G = MW$. Por tanto $A = A \cap MW = (A \cap M)W = W$.
Ahora como A es resoluble, $A/A \cap M$ es abeliano y por tanto $B/B \cap M$ también es abeliano. Por tanto, $[M, X] = [\pi_X(M), X] \leq M \cap X$ es decir, $M \trianglelefteq G$. Es decir $N_G(M) = G \neq M$, lo que concluye la prueba. $\square$

Proposición 3.1.5. *Sea $G = A \times B$ con A o B resoluble y supongamos U abnormal en G. Entonces $U = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$ y $\pi_X(U)$ es abnormal en X para $X = A, B$.*

Demostración. Como para $X = A, B$, $\pi_X : G \to X$ es un homomorfismo suprayectivo, $\pi_X(U)$ es abnormal en X para $X = A, B$ por 1.3.10c). Ahora utilizamos inducción sobre $|G|$ para ver que $U = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$. Sea M un subgrupo maximal de G que contiene a U. Por 1.3.10 a) $N_G(M) = M$ y por la Proposición 3.1.4, $M = \pi_A(M) \times \pi_B(M)$. Ahora como $U \leq M$, por 1.3.10 a) U es abnormal en M y $|M| < |G|$. Por inducción $U = \pi_{\pi_A(M)}(U) \times \pi_{\pi_B(M)}(U) = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$. $\square$

Finalmente se obtiene una conclusión definitiva.

Proposición 3.1.6. *Sea $G = A \times B$ con A o B resoluble y supongamos $U \leq G$. U es abnormal en G si y sólo si $\pi_X(U)$ es abnormal en X para $X = A, B$ y $U = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$.*

Demostración. La primera implicación es consecuencia directa de la Proposición 3.1.5. Y la segunda, por la Proposición 3.1.1 tenemos que $U = \pi_A(U) \times \pi_B(U)$ es abnormal en $A \times B$ y por tanto U es abnormal en G. $\square$

3.2. Subgrupos pronormales de productos directos

Como ya se ha dicho los subgrupos normales y abnormales son pronormales. Ejemplos menos obvios son los subgrupos de Sylow de un subgrupo normal. Como ya se ha mencionado en la introducción, la pronormalidad es comúnmente más estudiada en grupos resolubles. En esta sección, igual que en la sección anterior, continuaremos suponiendo solamente que una de las componentes del producto directo sea resoluble. No obstante en la siguiente sección se considerará la pronormalidad, y también la abnormalidad, para subgrupos resolubles y se estudiará su comportamiento en productos directos de grupos resolubles.

Proposición 3.2.1. *Sea $U \leq G = A \times B$. Supongamos que se dan las siguientes condiciones:*

a) $\pi_X(U)$ es pronormal en X para $X = A, B$;

b) $N_G(U) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$.

Entonces U es pronormal en G.

Demostración. Supongamos el resultado falso. Sea G un grupo con de orden minimal tal que posee un subgrupo no pronormal U que satisface las condiciones a) y b) de la hipótesis. Además supongamos que U posee el mayor orden posible de los subgrupos no pronormales de G que satisfacen las condiciones a) y b). Sea $N \trianglelefteq A$. Entonces $N \trianglelefteq G$, y $\pi_A(UN) = \pi_A(U)N$ es pronormal en A por la hipótesis a) junto con el Lema 1.3.3. Además, puesto que $N \leq A$, $\pi_B(UN) = \pi_B(U)$ es pronormal en B. Por tanto UN satisface a) de la hipótesis.
Además como $\pi_A(U)$ es pronormal en A, utilizando el Lema 1.3.3 se sigue que $N_A(\pi_A(U)N) = N_A(\pi_A(U))N$. Entonces

$$N_G(UN) \leq N_A(\pi_A(UN)) \times N_B(\pi_B(UN)) = N_A(\pi_A(U)N) \times N_B(\pi_B(UN)) =$$

$$= N_A(\pi_A(U))N \times N_B(\pi_B(U)) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))N = N_G(U)N \leq N_G(UN)$$

por la hipótesis b) aplicada a U. Entonces UN satisface b) de la hipótesis.
Si $N \trianglelefteq A$, entonces $N \leq U$ o $UN \neq U$. Si $N \leq U$ para todo $N \trianglelefteq A$, entonces $A \subseteq U$

y entonces $U = A \times \pi_B(U)$ y fácilmente U es pronormal en G, en contradicción con nuestra hipótesis.
Es decir existe $N \trianglelefteq A$ con $UN \neq U$. Por tanto UN es pronormal en G.
Ahora, $UN \trianglelefteq G$ o $N_G(UN) < G$. Supongamos $N_G(UN) < G$. Como UN satisface *b*), $N_G(UN) = A \cap N_G(UN) \times B \cap N_G(UN)$ es un producto directo y U satisface *a*) y *b*) en $N_G(UN)$. Consecuentemente, U es pronormal $N_G(UN)$. Sin embargo, el resultado de Gaschütz, Lema 1.3.4, dice que entonces U es pronormal en G.
Entonces, $UN \trianglelefteq G$. Tenemos que $\pi_B(UN) = \pi_B(U) \trianglelefteq B$.
Este argumento es simétrico respecto a A y B y por tanto podemos concluir también que $\pi_A(U) \trianglelefteq A$.
Pero *b*) nos dice que $N_G(U) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U)) = A \times B$. Es decir, $U \trianglelefteq G$, que vuelve a contradecir nuestra hipótesis.
Por tanto no hay contraejemplos y el resultado queda probado. □

Como dicta el Ejemplo 3.1.3, para que las condiciones a) y b) de la Proposición 3.2.1 caractericen los subgrupos pronormales de un producto directo se requiere un hipótesis adicional.

Proposición 3.2.2. *Sea $U \leq G = A \times B$ con A o B resoluble. Entonces U es pronormal en G si y sólo si $\pi_X(U)$ es pronormal en X para $X = A, B$, y $N_G(U) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$.*

Demostración. Supongamos U pronormal en G. Por el Lema 1.3.3 e), $\pi_X(U)$ es pronormal en X para $X = A, B$. Y por el Lema 1.3.11 $N_G(U)$ es abnormal en G. Ahora por la Proposición 3.1.5 tenemos que $N_G(U) = \pi_A(N_G(U)) \times \pi_B(N_G(U))$. Notar que $\pi_X(N_G(U)) \cap U = X \cap U$ para $X = A, B$ y que $\pi_X(U) \leq \pi_X(N_G(U))$ para $X = A, B$. Ahora, utilizando el Lema 1.2.16, como $U \trianglelefteq N_G(U) = \pi_A(N_G(U)) \times \pi_B(N_G(U))$ se tiene que $\pi_X(U)/\pi_X(N_G(U)) \cap U = \pi_X(U)/X \cap U$ es abeliano. Por tanto $U \trianglelefteq \pi_A(U) \times \pi_B(U)$. Así, $U \trianglelefteq \trianglelefteq N_G(\pi_A(U) \times \pi_B(U)) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$. Además por ser U pronormal en G, lo es en $N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$. Por el Lema 1.3.3 b) $N_G(U) \geq N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$. Y puesto que $\pi_X(N_G(U)) \leq N_X(\pi_X(U))$ para $X = A, B$ se tiene que $N_G(U) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$. La otra implicación se sigue de la Proposición 3.2.1. □

Notar que el siguiente resultado acerca de la estructura de los subgrupos pronormales en productos directos aparece en la demostración del resultado anterior.

Corolario 3.2.3. *Sea $U \leq A \times B = G$ con A o B resoluble. Si U es pronormal en G, entonces $\pi_X(U)/(U \cap X)$ es abeliano para $X = A, B$. En particular U es normal en $\pi_A(U) \times \pi_B(U)$.*

Nota 3.2.4. 1. El recíproco del Corolario 3.2.3 no es cierto. Es suficiente considerar $A = B \cong Sym(3)$ el grupo simétrico de orden 3 y $G = A \times B$. Sea

$S = O_3(A) = O_3(B)$ y $D = \{(x, x) \in G : x \in S\}$. Entonces $\pi_X(D)/(D \cap X) = \pi_X(D) = S$ es abeliano, para $X = A, B$, pero D no es pronormal en G.

2. Si ninguno de los factores A o B del grupo $G = A \times B$ es resoluble, el Corolario 3.2.3 no es cierto. El Ejemplo 3.1.3 nos muestra esto.

Recordando la definición de $C_X = \{x \in X : [x, \pi_X(U)] \leq X \cap U\}$, enunciamos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5. *Sea $U \leq A \times B = G$ con A o B resoluble. Entonces U es pronormal en G si y sólo si $\pi_X(U)$ es pronormal en X y $N_X(\pi_X(U)) \leq C_X$ para $X = A, B$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.2, es suficiente ver que $N_G(U) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$ si y sólo si $N_X(\pi_X(U)) \leq C_X$ para $X = A, B$.
Supongamos primero que $N_X(\pi_X(U)) \leq C_X$ para $X = A, B$. Notemos que por la Proposición 1.2.15,

$$N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U)) \leq N_G(U) \leq$$
$$\pi_A(N_G(U)) \times \pi_B(N_G(U)) \leq N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U)).$$

Si $N_G(U) = N_A(\pi_A(U)) \times N_B(\pi_B(U))$, entonces por la Proposición 1.2.15, tenemos que $C_X = N_G(U) \cap X = N_X(\pi_A(U))$. □

Nota 3.2.6 (Construcción de subgrupos pronormales de un producto directo de grupos $G = A \times B$ con uno de los factores A o B resoluble)**.** Primero elegimos R pronormal en A y S pronormal en B. Consideramos

$$I_A = \{I : [R, N_A(R)] \leq I \leq R\}$$

y

$$I_B = \{J : [S, N_B(S)] \leq J \leq S\}$$

Entonces para $I \in I_A$, $J \in I_B$ tal que $R/I \cong S/J$, por el Teorema de Goursat, se puede construir un subgrupo U de $A \times B$, que por el Corolario 3.2.5 es pronormal en $A \times B$, tal que $\pi_A(U) = R, \pi_B(U) = S, U \cap A = I, U \cap B = J$. El Corolario 3.2.5 implica que cualquier subgrupo pronormal de $A \times B$ es de esta forma.

3.3. Caracterización de subgrupos pronormales y abnormales en productos directos de grupos resolubles

En esta sección se investiga como dos de las conocidas caracterizaciones de pronormalidad y abnormalidad en grupos resolubles pueden ser modificada en un producto directo. La primera de ellas es debida a T.A. Peng [20]. Se recuerda el concepto de argumento de Frattini débil de [8].

Definición 3.3.1. Un subgrupo X de un grupo Y se dice que satisface el *argumento de Frattini débil* en Y si $Y = KN_Y(X)$ para cualesquiera $X \leq K \trianglelefteq Y$. Si esto sucede se denota por $X \in WFA(Y)$.

Proposición 3.3.2. *(Peng [20]) Si X es un subgrupo de un grupo resoluble Y, entonces X es pronormal en Y si y sólo si $X \in WFA(L)$, para cualesquiera $X \leq L \leq Y$.*

Demostración. La primera implicación es consecuencia de la Proposición 1.3.3. Sea M un subgrupo normal de Y. Si $K/M, L/M$ son subgrupos de Y/M tal que

$$XM/M \leq K/M \leq L/M$$

y $K/M \triangleleft L/M$, entonces $X \leq K \trianglelefteq L$. Por hipótesis se tiene que $L = KN_L(X)$. Ahora, puesto que

$$L/M = KN_L(X)/M \leq N_L(XM)K/M = N_{L/M}(XM/M)K/M \leq L/M,$$

se tiene que $XM/M \in WFA(L/M)$. Probaremos el teorema por inducción sobre $|G|$. Sea M subgrupo normal minimal de Y. Puesto que XM/M satisface la hipótesis en Y/M, es pronormal en Y/M por hipótesis de inducción. Por tanto XM es pronormal en Y. Sea $x \in Y$. Entonces existe un elemento $y \in \langle XM, X^x M\rangle = \langle X, X^x\rangle M$ tal que $X^{xy}M = XM$. Podemos suponer $y \in \langle X, X^x\rangle$. Sea $L = N_Y(XM)$. Entonces por hipótesis $L = N_L(X)M$, ya que $X \leq XM \trianglelefteq L \leq Y$. Si L es un subgrupo propio de Y, entonces X es pronormal en L por hipótesis de inducción. Como $xy \in L$, existe un elemento $z \in \langle X^{xy}, X\rangle$ tal que $X^{xy} = X^z$. Puesto que

$$\langle X, X^{xy}\rangle \leq \langle X, X^x, y\rangle = \langle X, X^x\rangle,$$

se tiene que $X^x = X^{zy^{-1}}$ con $zy^{-1} \in \langle X, X^x\rangle$. Luego X es pronormal en Y. Podemos entonces suponer que $L = Y$, es decir, $N_Y(X)M = Y$. Por tanto x puede expresarse como $x = uv$ con $u \in N_Y(X)$ y $v \in M$. Pero entonces se tiene

$$X^x = X^{uv} = X^v \leq XM.$$

Si XM es un subgrupo propio de Y, entonces X es pronormal en XM por hipótesis de inducción. Se tiene que existe un elemento $w \in \langle X, X^v\rangle = \langle X, X^x\rangle$ tal que $X^w = X^v = X^x$. Entonces X es pronormal en Y. Sólo queda una posibilidad, $XM = Y$. Puesto que M es un subgrupo normal minimal de Y, X tiene que ser o bien Y o bien un subgrupo maximal de G. En cualquier caso, X es pronormal en Y lo que completa la prueba. $\square$

Un ejemplo de Feldman en [16] muestra que la resolubilidad es necesaria en el resultado de Peng. Es siempre cierto que los grupos pronormales cumplen el argumento de Frattini. Para productos directos, esta caracterización de subgrupos pronormales puede ser refinada considerando únicamente subgrupos intermedios que estén factorizados.

Lema 3.3.3. *Un subgrupo H de un grupo resoluble $G = A \times B$ es pronormal si y sólo si H satisface las siguientes condiciones:*

a) $H \trianglelefteq \pi_A(H) \times \pi_B(H)$;

b) *Siempre que* $H \leq K \trianglelefteq L \leq G$ *tal que* $K = \pi_A(K) \times \pi_B(K)$ *y* $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$, *entonces* $L = N_L(H)K$.

Demostración. Si H es pronormal, por el Corolario 3.2.3 y por la Proposición 3.3.2 se tiene que se cumplen las condiciones *a*) y *b*). Para la otra implicación, si $A = 1$ o $B = 1$, entonces se sigue el resultado por la Proposición 3.3.2. Supongamos $A \neq 1$ y $B \neq 1$ y veamos la demostración por inducción sobre el orden de G. Sea $1 \neq N \trianglelefteq A$. Veamos que HN/N satisface *a*) y *b*) en $G/N = A/N \times BN/N$. Sean $K/N, L/N$ subgrupos de G/N tal que

$$HN/N \leq K/N \leq L/N$$

y $K/N \lhd L/N$, entonces $H \leq K \trianglelefteq L$. Por hipótesis se tiene que $L = N_L(H)K$. Ahora, puesto que

$$L/N = N_L(H)K/N \leq N_L(HN)K/N = N_{L/N}(HN/N)K/N \leq L/N,$$

se tiene que $L/N = K/NN_{L/N}(HN/N)$.

Así HN/N verifica *b*). Además HN/N verifica *a*) claramente. Entonces por hipótesis de inducción HN/N es pronormal en G/N y por el Lema 1.3.3 HN es pronormal en G. Supongamos $A \times N_B(\pi_B(H)) < A \times B$. Notemos que $H \leq \pi_A(H) \times \pi_B(H) \leq A \times N_B(\pi_B(H))$ y H satisface *a*) y *b*) respecto a $A \times N_B(\pi_B(H))$. Por hipótesis de inducción H es pronormal en $A \times N_B(\pi_B(H))$. Pero $H \leq N_G(HN) \leq N_G(\pi_B(HN)) = N_G(\pi_B(H)) = A \times N_B(\pi_B(H))$ luego H es pronormal en $N_G(HN)$. Por la Proposición 1.3.4 H es pronormal en G. Supongamos ahora que $B = N_B(\pi_B(H))$, es decir, $\pi_B(H) \trianglelefteq B$, y que $\pi_A(H) \trianglelefteq A$. Las condiciones *a*) y *b*) implican $G = (\pi_A(H) \times \pi_B(H))N_G(H) = N_G(H)$ lo que concluye la prueba. □

Lema 3.3.4. *Supongamos $A \cong B$ y sea H un subgrupo diagonal principal de $G = A \times B$, es decir, $\pi_X(H) = X$ y $H \cap X = 1$ para $X = A, B$. Entonces $N_G(H) = HZ(G)$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.15 se tiene que $N_G(H) \cap X = C_X(X) = Z(X)$ para $X = A, B$. Además, puesto que H es un subgrupo diagonal principal de G, se sigue que $H \cong X$ y $Z(H) = H \cap Z(G)$, lo que implica que

$$|X/Z(X)| = |H/H \cap Z(G)| \text{ para } X = A, B.$$

Por tanto $|N_G(H)/Z(G)| = |N_G(H)/(Z(A) \times Z(B))| = |\pi_X(N_G(H))/Z(X)| \geq |\pi_X(H)/Z(X)| = |X/Z(X)| = |H/H \cap Z(G)| = |HZ(G)/Z(G)|$, para $X = A, B$. Así $|N_G(H)/Z(G)| = |HZ(G)/Z(G)|$, es decir, $|N_G(H)| = |HZ(G)|$ y por tanto $N_G(H) = HZ(G)$ como queríamos. □

Proposición 3.3.5. *Un subgrupo H de un grupo resoluble $G = A \times B$ es pronormal en G si y sólo si $H \in WFA(L)$, siempre que $H \leq L \leq G$ tal que $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$.*

Demostración. La primera implicación se sigue de la Proposición 3.3.2. Por tanto supongamos $H \in WFA(L)$, siempre que $H \leq L \leq G$ tal que $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$. Argumentaremos por inducción sobre $|G|$. Supongamos que $\pi_A(H) \times B$ es un subgrupo propio de G. Entonces por hipótesis de inducción H es pronormal en $\pi_A(H) \times B$ lo que implica $H \trianglelefteq \pi_A(H) \times \pi_B(H)$ por el Corolario 3.2.3. Por lo tanto H es pronormal en G por el Lema 3.3.3. Entonces podemos suponer que $\pi_A(H) = A$ y análogamente $\pi_B(H) = B$. En particular, $H \cap X \trianglelefteq X$ para $X = A, B$. Si $H \cap X \neq 1$ para $X \in \{A, B\}$, entonces $H/H \cap X$ es pronormal en $G/H \cap X$ por hipótesis de inducción y por tanto H es pronormal en G por el Lema 1.3.3. Estamos en condiciones de suponer que $H \cap A = H \cap B = 1$, lo que implica que $A = \pi_A(H)/H \cap A \cong \pi_B(H)/H \cap B = B$ y H es un subgrupo diagonal principal de G.
Sea α un isomorfismo de A en B tal que $H = \{aa^\alpha : a \in A\}$. Si G es abeliano, está claro que H es pronormal en G. En otro caso existe un subgrupo normal maximal M de A que contiene a $Z(A)$. Sea $N = M^\alpha$ y consideremos $A = \dot{\bigcup}_{t \in T} Mt$, siendo T un transversal a derecha de M en A. Entonces $K := (M \times N)\{tt^\alpha : t \in T\}$ es un subgrupo propio, normal de G y $H \leq K$. Por hipótesis, $G = KN_G(H)$. Pero $Z(G) \leq K$ y por el Lema 3.3.4 tenemos que $KN_G(H) = KZ(G)H = K = G$, lo que es una contradicción, y por tanto concluye la prueba. □

Nota 3.3.6. Por el Lema 3.3.3 cabe preguntarse si un subgrupo H de un grupo resoluble $G = A \times B$, es pronormal si y sólo si $L = N_L(H)K$ para cualesquiera $H \leq K \trianglelefteq L \leq G$ tal que $K = \pi_A(K) \times \pi_B(K)$ y $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$. Esto no es cierto. Para comprobarlo consideramos $G = A \times B$ con $A = B \cong Sym(3)$ y $H = \{(x, x) \in G : x \in A = B\}$. Entonces H no es pronormal en G pero si que satisface la condición mencionada.

Se consideran ahora los criterios de pronormalidad y abnormalidad para grupos resolubles obtenido por G.J. Wood [25]. Estos criterios consideran condiciones que son persistentes en subgrupos intermedios.

Proposición 3.3.7. *Si X es un subgrupo de un grupo resoluble Y, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) X es pronormal en Y;

b) $N_L(X)$ es abnormal en L, siempre que $X \leq L \leq Y$;

c) $N_L(X)$ *contiene un sistema normalizador de* L, *siempre que* $X \leq L \leq Y$.

Proposición 3.3.8. *Sea* X *un subgrupo de un grupo resoluble* Y. *Para cada subgrupo* L *de* Y *se elige* D_L *algún sistema normalizador de* L. *Si* X *es pronormal en* $\langle X, D_L\rangle$ *para cada subgrupo* L *con* $X \leq L \leq Y$, *entonces* X *es pronormal en* Y.

Proposición 3.3.9. *Para un subgrupo* X *de un grupo resoluble* Y, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) X *es abnormal en* Y;

b) X *contiene un sistema normalizador de* L, *siempre que* $X \leq L \leq Y$;

c) *Siempre que* $X < L \leq Y$, *existe algún sistema normalizador* D_L *de* L *con* $\langle X, D_L\rangle < L$.

Para productos directos estos criterios se extienden considerando únicamente subgrupos intermedios que estén factorizados.

Lema 3.3.10. *Un subgrupo* H *de un grupo resoluble* $G = A \times B$ *es pronormal si y sólo si* H *satisface las siguientes condiciones:*

a) $H \trianglelefteq \pi_A(H) \times \pi_B(H)$;

b) $N_L(H)$ *contiene algún normalizador de sistema de* L, *siempre que* $H \leq L \leq G$ *tal que* $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$.

Demostración. Por el Corolario 3.2.3 y la Proposición 3.3.7, un subgrupo pronormal satisface a) y b). Para la otra implicación argumentaremos como en el Lema 3.3.3. En particular, utilizaremos inducción sobre el orden de G para probar que las condiciones a) y b) implican que H sea pronormal en G. si $A = 1$ o $B = 1$, entonces se sigue el resultado por la Proposición 3.3.7. Supongamos entonces $A \neq 1$ y $B \neq 1$. Sea $1 \neq N \trianglelefteq A$. Es fácil ver que HN/N satisface a) y b) en $G/N = A/N \times BN/N$. Entonces por hipótesis de inducción HN/N es pronormal en G/N y por el Lema 1.3.3, HN es pronormal en G. Supongamos $A \times N_B(\pi_B(H)) < A \times B$. Notemos que $H \leq \pi_A(H) \times \pi_B(H) \leq A \times N_B(\pi_B(H))$ y H satisface a) y b) respecto a $A \times N_B(\pi_B(H))$. Por hipótesis de inducción H es pronormal en $A \times N_B(\pi_B(H))$. Pero $H \leq N_G(HN) \leq N_G(\pi_B(HN)) = N_G(\pi_B(H)) = A \times N_B(\pi_B(H))$, es decir, H es pronormal en $N_G(HN)$. Por el Lema 1.3.4 H es pronormal en G. Supongamos ahora que $B = N_B(\pi_B(H))$, es decir, $\pi_B(H) \trianglelefteq B$, y que $\pi_A(H) \trianglelefteq A$. Por a) podemos suponer sin perder generalidad que $\pi_A(H)$ es un subgrupo propio de A. Entonces sea M un subgrupo normal maximal de A que contiene a $\pi_A(H)$. Por hipótesis de inducción tenemos ahora que H es pronormal en $M \times B$. Además $H \trianglelefteq \pi_A(H) \times \pi_B(H) \trianglelefteq G$, lo que implica que $H \trianglelefteq M \times B$. Por otra parte, por b) existe un normalizador de sistema D de G tal que $D \leq N_G(H)$. Pero $G = (M \times B)D$ por 1.1.34 y por tanto $H \trianglelefteq G$, lo que concluye la prueba. $\square$

Proposición 3.3.11. *Para subgrupo H de un grupo resoluble $G = A \times B$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *H es pronormal en G;*

b) *$N_L(H)$ es abnormal en L, siempre que $H \leq L \leq G$ tal que $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$;*

c) *$N_L(H)$ contiene algún normalizador de sistema de L, siempre que $H \leq L \leq G$ tal que $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$.*

Demostración. Que *a*) implica *b*) y que *b*) implica *c*) se sigue de la Proposición 3.3.9. Por tanto sólo nos queda probar que *c*) implica *a*). Supongamos pues que $N_L(H)$ contiene algún normalizador de sistema de L, siempre que $H \leq L \leq G$ tal que $L = \pi_A(L) \times \pi_B(L)$ y probaremos que H es pronormal en G. Argumentaremos como en 3.3.5, en particular por inducción sobre $|G|$. Supongamos que $\pi_A(H) \times B$ es un subgrupo propio de G. Entonces por hipótesis de inducción H es pronormal en $\pi_A(H) \times B$ lo que implica $H \trianglelefteq \pi_A(H) \times \pi_B(H)$ por el Corolario 3.2.3. Por lo tanto H es pronormal en G por el Lema 3.3.10. Entonces podemos suponer que $\pi_A(H) = A$ y análogamente $\pi_B(H) = B$. En particular, $H \cap X \trianglelefteq X$ para $X = A, B$. Si $H \cap X \neq 1$ para $X \in \{A, B\}$, entonces $H/H \cap X$ es pronormal en $G/H \cap X$ por hipótesis de inducción y por tanto H es pronormal en G por el Lema 1.3.3. Estamos en condiciones de suponer que $H \cap A = H \cap B = 1$, lo que implica que $A = \pi_A(H)/H \cap A \cong \pi_B(H)/H \cap B = B$ y H es un subgrupo diagonal principal de G. Por hipótesis existe un normalizador de sistema D de G tal que $D \leq N_G(H)$. Pero $D = D_A \times D_B$, donde D_X es un sistema normalizador de X para $X = A, B$. Entonces por la Proposición 1.2.15, $D_X \leq N_G(H) \cap X = C_X(X) = Z(X)$ para $X = A, B$. Esto significa que $D \leq Z(G)$ y por el teorema 1.1.32, $G = \langle D^G \rangle$, esto es, G es abeliano y por tanto H es pronormal en G. □

Proposición 3.3.12. *Sea H un subgrupo de un grupo resoluble $G = A \times B$. Para cada subgrupo L de G tal que $H \leq L = \pi_A(L) \times \pi_B(L) \leq G$ elegimos D_L algún normalizador de sistema de L. Si H es pronormal en $\langle H, D_L \rangle$ para cada subgrupo L tal que $H \leq L = \pi_A(L) \times \pi_B(L) \leq G$, entonces H es pronormal en G.*

Demostración. Por la Proposición 3.3.11 y argumentando por inducción sobre el orden de G, es suficiente probar que $N_G(H)$ contiene algún normalizador de sistema de G. Definimos $C := \langle H, D_G \rangle$ con D_G el normalizador de sistema de G elegido. Si $C = G$, entonces H es pronormal en G por hipótesis. En otro caso, existe un subgrupo maximal M de G que contiene a C. Puesto que $D_G \leq M$ tenemos que M es abnormal en G pero entonces, por la Proposición 3.1.6, $M = \pi_A(M) \times \pi_B(M)$. Por hipótesis de inducción $N_M(H)$ contiene algún normalizador de sistema de de M. Pero un normalizador de sistema de M contiene un normalizador de sistema de G, lo que concluye la prueba. □

Proposición 3.3.13. *Para un subgrupo H de un grupo resoluble $G = A \times B$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) H es abnormal en G;

b) H contiene un normalizador de sistema de L, siempre que $H \leq L = \pi_A(L) \times \pi_B(L) \leq G$;

c) siempre que $H < L = \pi_A(L) \times \pi_B(L) \leq G$, entonces existe D_L, algún normalizador de sistema de L, con $\langle H, D_L \rangle < L$.

Demostración. De nuevo sabemos que a) implica b) y que b) implica c), por la Proposición 3.3.9. Supongamos c) cierta, podemos suponer que en particular $\langle H, D_G \rangle < G$ con D_G un normalizador de sistema de G. Argumentando por inducción sobre el orden de G tenemos que H es pronormal en cualquier subgrupo L tal que $H \leq L = \pi_A(L) \times \pi_B(L) < G$. Sea M un subgrupo maximal de G que contiene a $D_G \leq \langle H, D_G \rangle$. Entonces M es abnormal en G y por la Proposición 3.1.6, $M = \pi_A(M) \times \pi_B(M)$. Entonces H es abnormal en M lo que implica que $H = \pi_A(H) \times \pi_B(H)$ y $\pi_X(H)$ es abnormal en $\pi_X(M)$ para $X = A, B$. Sin perder generalidad podemos suponer $\pi_A(M) = A$ y en particular $\pi_A(H)$ es abnormal en A. Además $\pi_B(H)$ contiene un normalizador de sistema de B porque contiene un normalizador de sistema de $\pi_B(M)$ que es abnormal en B. Podemos deducir ahora que $\pi_B(H)$ es abnormal en B lo que implica finalmente que H es abnormal en G por la Proposición 3.1.6. $\square$

3.4. Subgrupos localmente pronormales de productos directos

En un grupo arbitrario no es necesario que el conjunto de subgrupos localmente pronormales este contenido en el de subgrupos pronormales ni viceversa. Sin embargo, como ya hemos comentado, para un grupo resoluble G, un subgrupo localmente pronormal en G es pronormal en G.
Puesto que los subgrupos localmente pronormales están directamente relacionados con los subgrupos de Sylow, es natural considerar la relación entre ser localmente pronormal y normalmente inmerso. De hecho los subgrupos normalmente inmersos son localmente pronormales. Más información acerca de estas propiedades y la conexiones entre ellas se puede consultar en [10, Sections 6 and 7].
En esta sección se investigarán los subgrupos localmente pronormales de productos directos. De la sección 3.2 se obtiene el siguiente resultado inmediato.

Proposición 3.4.1. *Sea $U \leq G = A \times B$ donde A o B es resoluble. Entonces U es localmente pronormal en G si y sólo si para cada primo p y $P \in Syl_p(U)$, $\pi_X(P)$ es pronormal en X para $X = A, B$, y $N_G(P) = N_A(\pi_A(P)) \times N_B(\pi_B(P))$.*

Sería esperable que la estructura impuesta por el producto directo hiciese posible una caracterización que en principio fuera más débil. Tal como ocurre en resultados previos de la teoría (ver por ejemplo [3] y [10, VIII.3 exercise 4]) se ha obtenido un resultado positivo bajo la hipótesis adicional de que el grupo sea nilpotente.

Proposición 3.4.2. *Sea $U \leq G = A \times B$ donde A o B es resoluble y U es nilpotente. Si U es pronormal en G y $\pi_X(U)$ es localmente pronormal en X para $X = A, B$, entonces U es localmente pronormal en G.*

Demostración. Supongamos que la proposición es falsa, G es un contraejemplo de orden minimal y $P \in Syl_p(U)$, para algún primo p, tal que P no es pronormal en G. Entonces:

1. $\pi_X(P) \trianglelefteq X$ para $X = A, B$, y consecuentemente $P \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

   Para ver esto supongamos $N_A(\pi_A(P)) < A$ o $N_B(\pi_B(P)) < B$. Entonces $W := N_A(\pi_A(P)) \times N_B(\pi_B(P)) < G$, y $U \leq N_G(P) \leq W$ satisface la hipótesis, y así P es pronormal en W. Puesto que P es un p-grupo deducimos que $P \trianglelefteq\trianglelefteq \pi_A(P) \times \pi_B(P) \trianglelefteq W$, lo que implica que $P \trianglelefteq W$ y entonces $N_G(P) = W = N_A(\pi_A(P)) \times N_B(\pi_B(P))$. De la Proposición 3.2.2 se deduce que P es pronormal en G, en contradicción con nuestra elección. Entonces $\pi_X(P) \trianglelefteq X$ para $X = A, B$. Y puesto que P es un p-grupo se sigue que $P \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

2. Si $N \trianglelefteq G$ con $N \neq 1$, y $N \leq A$ o $N \leq B$, entonces $PN \trianglelefteq G$.

   Los casos $N \leq A$ y $N \leq B$ son simétricos. Argumentaremos el caso en el que $N \leq A$.
   Entonces $UN/N \leq G/N \cong A/N \times B$, UN/N es pronormal en G/N y la hipótesis sobre las proyecciones se satisface. Entonces $PN/N \in Syl_p(UN/N)$ y PN/N es pronormal en G/N. Por 1) PN/N también es subnormal en G/N y por tanto $PN \trianglelefteq G$.

3. $O_{p'}(G) = 1$.

   Si $O_{p'}(G) \neq 1$, existe un p'-subgrupo normal no trivial N de A o B. Entonces P es un p-subgrupo de Sylow subnormal de $PN \trianglelefteq G$. P es característico en PN y consecuentemente es normal en G, en contradicción con nuestra elección.

4. $\pi_A(U) = A$ o $\pi_B(U) = B$.

   Supongamos que $\pi_A(U) < A$. Como $U \leq \pi_A(U) \times B$ y satisface la hipótesis del enunciado en este grupo, la elección de G implica que P es pronormal en $\pi_A(U) \times B$ y entonces $\pi_A(U) \times B \leq N_G(U)$. Si $\pi_B(U) < B$, el mismo argumento nos lleva a que $A \times \pi_B(U) \leq N_G(P)$ y, entonces, $P \trianglelefteq G$. Esto contradice nuestra elección.

5. Contradicción final

   Supongamos $\pi_B(U) = B$. Sin embargo U es nilpotente y, por 3), $O_{p'}(B) = 1$ y entonces $\pi_B(U) = B$ es un p-grupo.
   Como U es pronormal en G, tenemos que $P \neq U$ y entonces existe $1 \neq Q \in Syl_q(U)$ para $q \neq p$. Entonces $\pi_B(Q) = 1$ y $Q = \pi_A(Q) \in Syl_q(\pi_A(U))$. Por tanto Q es pronormal en A. Por 1) $\pi_A(P) \trianglelefteq A$ y entonces $C_A(\pi_A(P)) \trianglelefteq A$. Puesto que U es nilpotente, $Q \leq C_A(\pi_A(P))$. Por el Lema 1.3.3 *c*), $A = C_A(\pi_A(P))N_A(Q)$.
   Notemos que como $O_{p'}(G) = 1, N_A(Q) < A$. Además, puesto que U es nilpotente, $U \leq N_A(Q) \times B$ y la hipótesis es válida aquí. Por tanto $P \trianglelefteq N_A(Q) \times B$. Puesto que $C_A(\pi_A(P)) \leq N_G(P)$, se sigue que $C_A(\pi_A(P))(N_A(Q) \times B) = A \times B = N_G(P)$.
   Y esta última contradicción demuestra que no hay contraejemplos.

$\square$

Corolario 3.4.3. *Sea $G = A \times B$ es un grupo resoluble y $U \leq G$ con U nilpotente. Entonces U es localmente pronormal en G si y sólo si U es pronormal en G y $\pi_X(U)$ es localmente pronormal en X para $X = A, B$.*

Ejemplos 3.4.4. a) [10, Problem 15, p.250] Un subgrupo cíclico pronormal de G no necesariamente es localmente pronormal en G incluso cuando G es metabeliano (grupo cuyo subgrupo conmutador es abeliano).

b) Si $U \leq G = A \times B$ y U no es nilpotente, puede ocurrir que U no sea localmente pronormal aunque U sea pronormal en G, $\pi_X(U)$ sea localmente pronormal en X para $X = A, B$, y G' sea nilpotente.

Demostración. Sea $P = \langle a, b : a^3 = b^3 = [a,b]^3 = 1 = [a,b,b] = [a,b,a] \rangle$ el grupo extraespecial de orden 27 y exponente 3.

a) Es fácil ver que $\beta : \begin{matrix} a \to a^{-1} \\ b \to b \end{matrix}$ induce un automorfismo en P. Sea $G = P\langle \beta \rangle$, el correspondiente producto semidirecto. Sea $E = \langle b, \beta \rangle$. Entonces E es un subgrupo cíclico de G de orden 6. Puesto que $G' = \langle [a,b], a \rangle$ y $G = G'E$, se puede ver que E es un subgrupo de Carter (nilpotente y autonormalizante).

Por tanto, E es pronormal en G. Sin embargo, $\langle b\rangle$ es subnormal pero no normal en P y entonces E no es localmente pronormal en G.

b) Para este ejemplo utilizamos la notación de producto directo externo. En P, sea $z = [a, b]$.
Sea $V \leq P \times P$, $V = \langle (a, 1), (1, a), (z, 1), (1, z), (b, b^{-1})\rangle$. Notemos que $P \times P$ tiene un automorfismo $\alpha : (x, y) \to (y, x)$ para $x, y \in P$, y V es invariante bajo α.
Sea $A = V\langle\alpha\rangle$, el correspondiente producto semidirecto. Sea $D = \langle (z, z), (a, a)\rangle$ y $\bar{D} = \langle (z, z^{-1}), (a, a^{-1})\rangle$. Ambos D y $D\bar{D}$ son subgrupos de A normalizado por α. D y $\bar{D}$ son isomorfos a $C_3 \times C_3$. También, $\alpha \in C_A(D)$.
Sea$U_A = D\bar{D}\langle\alpha\rangle \leq A$. Notar que $D\bar{D} \in Syl_3(U_A)$ y $D\bar{D} \trianglelefteq A$. También $\langle\alpha\rangle \in Syl_3(A)$ y entonces U_A es localmente pronormal en A. Se puede ver que U_A es un subgrupo maximal de A pero $(b, b^{-1}) \neq N_A(U_A)$. Por tanto $U_A = N_A(U_A)$.
Ahora $\bar{D} \trianglelefteq U_A$ y $U_A \leq C_A(U_A/\bar{D})$ con $U_A/\bar{D} \cong C_3 \times C_3 \times C_2$.
Sea $\theta : U_A \to C_3 \times C_3 \times C_2 = B$ un epimorfismo con $ker\theta = \bar{D}$. $U = \{(x, y) \in A \times B : x \in U_A$ y $x^\theta = y\}$. Por la Nota 3.2.6, U es pronormal en $A \times B$. $\pi_A(U) = U_A$ es localmente pronormal en A por lo anterior. Ciertamente, $\pi_B(U) = B$ es localmente pronormal en B.
Sin embargo, $D\bar{D} = \pi_A(T)$, para un $T \in Syl_3(U)$, y $T \cap A = \bar{D}$. Ahora $A = N_A(D\bar{D})$ pero $A \neq N_A(\bar{D})$ ya que $(b, b^{-1}) \in N_A(D\bar{D})$. De nuevo por la Nota 3.2.6, T no es pronormal en $A \times B$. Por tanto U no es localmente pronormal en $A \times B$.

□

Bibliografía

[3] W. Anderson, Injectors in finite solvable groups, *J. Algebra* **36** (1975) 333-338.

[5] B. Brewster, A. Martínez-Pastor, M.D. Pérez-Ramos, Normally embedded subgroups in direct products, *J. Group Theory* **9** (2006) 323-339.

[6] B. Brewster, A. Martínez-Pastor, M.D. Pérez-Ramos, Pronormal subgroups in direct products of groups, *J. Algebra* **321** (2009) 1734-1745.

[7] B. Brewster, A. Martínez-Pastor, M.D. Pérez-Ramos, Embedding properties in direct products, in: Groups-St. Andrews 2005, in: *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. **339**, 2007, pp. 246-255.

[8] B. Brewster, S. Sehgal, The Frattini argument and t-groups,*Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987) 239-245.

[9] B. Brewster, M. Ward, Q. Zhang, On self-normality and abnormality in the alternating groups, *Arch. Math.* **77** (2001) 449-455.

[10] K.Doerk and T.Hawkes *Finite soluble groups* (de Gruyter, 1992).

[11] J. Evan, Permutability in direct products of finite groups, Dissertation, Binghamton University, 2000.

[12] J. Evan, Permutability of subgroups of $G \times H$ that are direct products of subgroups of the direct factors. *Arch. Math.* (Basel)**77**(2001) , 449-455.

[13] J. Evan, Permutable diagonal-type subgroups of $G \times H$. *Glasgow Math. J.* **45** (2003) ,73-77.

[14] J. Evan, Permutable subgroups of a direct product. *J. Algebra* **265** (2003), 734-743.

[15] J. Evan, On characterizing permutability in direct products, *Publ. Math. Debrecen* **71** (2007) 439-448.

[16] A. Feldman, A non-abnormal subgroup contained only in self-normalizing subgroups in a finite group, *Arch. Math.* **70** (1998) 9-10.

[17] P. Hauck. Subnormal subgroups in direct products. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **42** (1987), 147-172.

[20] T.A. Peng, Pronormality in finite groups, *J. London Math. Soc.* (2)3(1971) 301-306.

[21] J. Petrillo. CAP-subgroups in a direct product of finite groups, *J. Algebra* **306** (2006) 432-438.

[22] J. Petrillo. The cover-avoidance property in the finite groups. Ph. D. Dissertation. Bringhamton University (2003).

[24] R. Schmidt. *Subgroup lattices of groups* (de Gruyter, 1994).

[25] G. J. Wood. On pronormal subgroups of finite soluble groups. *Arch. Math. (Basel)* **25** (1974), 578-588.