UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Matemática Aplicada

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES. TEORÍA Y APLICACIONES

Emilio Defez Candel

TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Matemática Aplicada

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES. TEORÍA Y APLICACIONES

Tesis doctoral
presentada por:

Emilio Defez Candel

Dirigida por:

Dr. D. Lucas Jódar Sánchez

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Lucas Jódar Sánchez, profesor catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia

CERTIFICA: Que la presente memoria **POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES. TEORÍA Y APLICACIONES**, ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, por *D. Emilio Defez Candel*, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia la referida tesis, firmando el presente certificado en Valencia, a 4 de Marzo de 1996.

Lucas Jódar Sánchez

Índice general

Capítulo 0

Introducción y Motivación.

La teoría de polinomios ortogonales matriciales ha experimentado un desarrollo importante en las últimas décadas. El primer contacto de nuestro grupo de investigación con el tema surgió al desarrollar un método de Frobenius matricial para resolver ecuaciones diferenciales matriciales de segundo orden sin aumentar la dimensión del problema. De esta forma, aparecieron soluciones de tipo polinomial matricial de ecuaciones diferenciales matriciales que generalizaban las ecuaciones escalares clásicas de Hermite, Laguerre y Legendre. En la tesis doctoral de R. Company [3] y en los trabajos siguientes, [34], [35], [40], se introdujeron los polinomios matriciales de Laguerre, Gegenbauer y Hermite, que verificaban ciertas propiedades de ortogonalidad de naturaleza no del todo transparente.
Nos encontramos entonces, al disponer de ejemplos de clases concretas de polinomios ortogonales, sin estructurar la idea de ortogonalidad, a pesar de que ya se habían publicado, incluso en un contexto abstracto, pero próximo, resultados sobre ortogonalidad de polinomios en un álgebra no conmutativa [10], [11].
El objetivo de esta tesis es bidireccional; por una parte se trata de estructurar satisfactoriamente la idea de ortogonalidad para polinomios matriciales, pero, con la intención dirigida a conseguir la utilidad en las aplicaciones que suministran las familias clásicas de polinomios ortogonales escalares. Estamos pensando, a corto plazo, en este trabajo, en utilizar la idea de ortogonalidad de polinomios matriciales para aproximar integrales matriciales, y también, en desarrollar funciones matriciales en serie de polinomios ortogonales matriciales.
Estas ambiciones han estado influidas por el enfoque de Chihara en [5] y los trabajos de Stone [70] y Ghizzetti [29]. En la memoria se resuelven algunas de las dificultades que aparecen, y se suministran algunas respuestas, parcialmente publicadas en [36], [38], [39], [41], que no son ni mucho menos, el final de los muchos objetivos que en esta linea, pensamos se pueden conseguir. Entre las cuestiones a resolver objeto de este trabajo se encuentran:

- Definición del concepto de ortogonalidad para polinomios matriciales y funciones matriciales.
- Estructurar un espacio normado base donde yacen las funciones ortogonales matriciales.

- Estudio de la relación de la norma del espacio base y el concepto de ortogonalidad en ausencia de espacio de Hilbert.
- Solución del problema de la mejor aproximación matricial respecto a un funcional matricial definido positivo.
- Series de Fourier matriciales.
- Obtención de análogos del Lema de Riemann-Lebesgue y de la igualdad(desigualdad) de Bessel-Parseval, en ausencia de estructura hilbertiana.
- Introducción del concepto de totalidad para una familia de funciones ortogonales matriciales en ausencia de estructura hilbertiana.
- Posibilidad de desarrollo en serie de polinomios ortogonales matriciales (solamente para el caso de Hermite).
- Aplicación al desarrollo de la exponencial de una matriz.

Las materias y técnicas que se utilizan en esta memoria tienen que ver con el Análisis Matemático, Algebra Lineal, Polinomios Ortogonales, Funciones Especiales, Análisis Funcional Aplicado y Análisis Numérico. La clasificación de contenidos atendiendo a los criterios de la 1991 AMS (MOS) *Subject clasification* responde a los códigos 15A24, 32C25, 34E10, 41A10, 42C05, 42C30, 47A60.

Capítulo 1

Polinomios ortogonales matriciales respecto a un funcional matricial de momentos lineal: Teoría y aplicaciones.

1.1. Introducción.

El contenido de capítulo es el siguiente. Primero extenderemos al campo matricial el concepto de funcional de momentos desarrollado por Chihara en [5], y estableceremos la conexión entre este enfoque y los resultados obtenidos en [40] y [34], donde se introducían los polinomios ortogonales matriciales de Hermite y de Laguerre. En segundo lugar, aplicaremos los resultados teóricos para aproximar las integrales matriciales del tipo

$$\int_a^b F(x)\, W(x)\, dx \tag{1.1}$$

donde $F(x)$ toma valores en el conjunto $C^{s\times r}$ para todas las $s \times r$ matrices complejas y $W(x)$ es una función a valores en $\mathbb{C}^{r\times r}$, no necesariamente definida positiva. Las integrales matriciales del tipo (1.1) son frecuentes en variedad de problemas tales como la modelización de un sistema de partículas determinado por las leyes de la mecánica [48], la interacción de átomos y moléculas [4], en teoría cuántica de difracción [17], por ejemplo. Las integrales matriciales pueden interpretarse como una matriz de integrales escalares, sin embargo, la descomposición en componentes plantea serios inconvenientes:

(i) La consideración de (1.1) como un conjunto de integrales escalares independientes incrementa el costo computacional y desaprovecha las ventajas de los modernos lenguajes simbólicos que operan matricialmente,

(ii) el sentido físico de las magnitudes originales puede perdese al considerar (1.1) como un conjunto de integrales escalares.

Estos hechos motivan la búsqueda de métodos de cuadratura matricial.
El capítulo está organizado como sigue. En la sección 2 introducimos el concepto de funcional matricial de momentos a la derecha y sucesión de polinomios matriciales ortogonales a derecha (SPOMD) respecto al funcional matricial de momentos a la derecha. Presentamos condiciones suficientes para la existencia y construcción de SPOMD. En la sección 3 demostramos que los polinomios matriciales de Laguerre y Hermite definidos recientemente en [34] y [40] respectivamente, son ejemplos de SPOMD para un momento funcional matricial apropiado de tipo integral. También demostramos que estas sucesiones de polinomios ortogonales verifican una condición de tipo Haar que jugará un papel importante en la sección 4, donde propondremos reglas de cuadratura matricial para la aproximación numérica de integrales del tipo (1.1). El capítulo concluye con un teorema de tipo Peano matricial que proporciona cotas de error para las reglas de cuadratura propuestas.

1.2. Funcionales matriciales de momentos lineales.

Comencemos esta sección introduciendo el concepto de funcional matricial de momentos lineales a la derecha que puede considerarse como una generalización del concepto de funcional de momentos lineal estudiado en [5] para el caso escalar.

DEFINICIÓN 1 *Sea* $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de matrices en* $\mathbb{C}^{r\times r}$. *Un funcional matricial de momentos lineal a la derecha es una función*

$$\mathcal{L} : \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$$

definida por

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k\, x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, \Omega_k \quad , \tag{1.2}$$

donde A_k *está en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *para* $0 \leq k \leq n$. *La matriz* $\Omega_n = \mathcal{L}(Ix^n)$ *se dice que es el momento matricial de orden* n *para* $\mathcal{L}$.

De la definición 1, si $\mathcal{L}$ es un funcional matricial a la derecha, se tiene que

$$\mathcal{L}(\, A\, P(x)\,) = A\, \mathcal{L}(P(x))\,, \qquad A \in \mathbb{C}^{r\times r}\,, \quad P(x) \in \mathcal{P}[x] \quad . \tag{1.3}$$

DEFINICIÓN 2 *Una sucesión de polinomios matriciales* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *se dice que es una sucesión de polinomios ortogonales a la derecha (SPOMD) respecto al funcional matricial de momentos lineal a la derecha* $\mathcal{L}$ *si para todo entero no negativo n,*

(i) $P_n(x)$ *es un polinomio matricial de grado n,*

(ii) $\mathcal{L}\,(x^i\, P_n(x)) = 0$ *si* $i < n$,

(iii) $\mathcal{L}\,(x^n\, P_n(x))$ *es una matriz invertible en* $C^{r\times r}$.

Nótese que las condiciones (ii) y (iii) pueden reescribirse como la condición equivalente

$$\mathcal{L}\left(x^i\, P_n(x)\right) \;=\; \delta_{i\,n}\, K_n\,, \qquad K_n \in \mathbb{C}^{r\times r} \;\; \textit{invertible}, \quad i \le n \;\; . \tag{1.4}$$

TEOREMA 1 *Sea* $\{\, P_n(x)\,\}_{n\ge 0}$ *una SPOMD respecto al funcional matricial de momentos a la derecha* $\mathcal{L}$ *. Si* $P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} A_{nk}\, x^k$ *, entonces* A_{nn} *para* $n \ge 0$ *, y el momento matricial de orden cero* Ω_0 *son matrices invertibles en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *.*

Demostración: Usaremos el principio de inducción. Para $n \,=\, 0$, nótese que $P_0(x) \;=\; A_{0\,0}$ y $\mathcal{L}(P_0(x)) \;=\; \mathcal{L}(A_{0\,0}\, I) \;=\; A_{0\,0}\,\Omega_0$ es invertible. De aquí $A_{0\,0}$ y Ω_0 son invertibles. Para $n = 1$, se verifica

$$P_1(x) \;=\; A_{1\,1}\, x + A_{1\,0}\,, \quad \mathcal{L}(P_1(x)) \;=\; 0 \quad \textit{y} \quad \mathcal{L}(x\, P_1(x)) \quad \textit{es} \;\; \textit{invertible} \;\; . \tag{1.5}$$

De las propiedades de $\mathcal{L}$ se sigue que

$$0 \;=\; \mathcal{L}(P_1(x)) \;=\; A_{1\,1}\,\Omega_1 \;+\; A_{1\,0}\,\Omega_0\,; \quad A_{1\,0} \;=\; -\, A_{1\,1}\,\Omega_1\,\Omega_0^{-1} \;\;,$$

$$\mathcal{L}(x\, P_1(x)) \;=\; A_{1\,1}\,\Omega_2 + A_{1\,0}\,\Omega_1 \;=\; A_{1\,1}\,\Omega_2 - A_{1\,1}\,\Omega_1\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1 \;=\; A_{1\,1}\,\left(\Omega_2 \;-\; \Omega_1\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1\right) \;\; .$$

Por (1.5), se tiene que

$$A_{1\,1} \quad \textit{y} \quad \Omega_2 \;-\; \Omega_1\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1 \quad \textit{son} \;\; \textit{invertibles} \;\; . \tag{1.6}$$

Supongamos que

$$A_{k\,k} \quad \textit{es} \quad \textit{invertible} \quad \textit{para} \quad k \;=\; 0,\, 1,\; 2, \ldots, n-1 \;\; . \tag{1.7}$$

Ahora, utilizando que $\mathcal{L}(x^k\, P_n(x)) \;=\; 0$ para $0 \;\le\; k \;<\; n$ y la hipótesis de inducción (1.7) demostraremos que $A_{n\,n}$ es invertible. Dado que $\mathcal{L}(x^k\, P_n(x)) \;=\; 0$ para $k = 0$, es decir, $\mathcal{L}(P_n(x)) \;=\; 0$, se sigue que

$$0 \;=\; \mathcal{L}(P_n(x)) \;=\; \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,\Omega_k\,; \quad A_{n\,0} \;=\; -\, \sum_{k=1}^{n} A_{n\,k}\,\Omega_k\,\Omega_0^{-1} \;\; . \tag{1.8}$$

De la condición $\mathcal{L}(x\, P_n(x)) \;=\; 0$, se tiene

$$0 \;=\; \mathcal{L}(x\, P_n(x)) \;=\; \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,\Omega_{k+1} \;\; . \tag{1.9}$$

Sustituyendo la expresión de $A_{n\,0}$ dada en (1.8), en (1.9), y utilizando (1.6), se sigue que

$$A_{n\,1} \;=\; -\,\sum_{k=2}^{n} A_{n\,k}\,(\Omega_{k+1} \,-\, \Omega_k\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1)\,(\Omega_2 \,-\, \Omega_1\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1)^{-1} \tag{1.10}$$

Sustituyendo la expresión (1.10) de $A_{n\,1}$ en (1.8), podemos escribir $A_{n\,0}$ en términos de $A_{n\,2}, \ldots, A_{n\,n}$:

$$A_{n\,0} \;=\; -\,\sum_{k=2}^{n} A_{n\,k}\,\left[\,(\Omega_{k+1} \,-\, \Omega_k\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1)\,(\Omega_2 \,-\, \Omega_1\,\Omega_0^{-1}\,\Omega_1)^{-1} \,-\, \Omega_k\,\Omega_0^{-1}\,\right] \quad .$$

Por la condición $\mathcal{L}(x^2\;P_n(x)) \;=\; 0$, podemos escribir $A_{n\,0}$, $A_{n\,1}$, $A_{n\,2}$ en términos de $A_{n\,3}, \ldots, A_{n\,n}$:

$$A_{n\,0} \;=\; \sum_{k=3}^{n} A_{n\,k}\,T_{n\,0}\,, \quad A_{n\,1} \;=\; \sum_{k=3}^{n} A_{n\,k}\,T_{n\,1}\,, \quad A_{n\,2} \;=\; \sum_{k=3}^{n} A_{n\,k}\,T_{n\,2} \quad ,$$

donde $T_{n\,j}$, $j \,=\, 0,\,1,\,2$ es una expresión que involucra los momentos matriciales Ω_k. En general, usando la condición $\mathcal{L}(x^k\,P_n(x)) \;=\; 0$ para $k \,<\, n$, podemos escribir $A_{n\,0}\,, \,\ldots\,, A_{n\,k}$ en términos de $A_{n\,k+1}, \ldots, A_{n\,n}$. Siguiendo este proceso para $k = n-1$, se tiene que

$$A_{n\,j} \;=\; A_{n\,n}\,Q_{n\,j}\,, \quad 0 \le j \le n-1 \quad , \tag{1.11}$$

donde $Q_{n\,j}$ es una expresión involucrando los momentos matriciales Ω_k. Utilizando finalmente la condición $\mathcal{L}(x^n\,P_n(x))$ invertible, de (1.11), se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\,(x^n\,P_n(x)) \;&=\; \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,\Omega_{k+n} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} A_{n\,n}\,Q_{n\,k}\,\Omega_{k+n} \,+\, A_{n\,n}\,\Omega_{2n} \\
&=\; A_{n\,n}\left\{\Omega_{2n} \,+\, \sum_{k=0}^{n-1} Q_{n\,k}\,\Omega_{k+n}\right\} \qquad \textit{es invertible.}
\end{aligned}$$

De aquí, $A_{n\,n}$ es invertible. $\Box$

NOTA 1 *Si* $\{\,P_n(x)\,\}_{n\ge 0}$ *es una SPOMD para el funcional matricial de momentos lineal a la derecha* $\mathcal{L}$*, entonces de (ii) se cumple*

$$\mathcal{L}(\,P_m(x)\,P_n(x)\,) \;=\; 0\,; \quad \textit{para} \;\; m < n \quad , \tag{1.12}$$

Así, de (1.3) y de la propiedad (ii) de la definición 2, si $P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,x^k$*, con* $A_k \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $0 \le k \le n$*, se sigue que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\,P_n(x)\,P_n(x)\,) \;&=\; \mathcal{L}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,x^k\right)\;P_n(x)\right) \;=\; \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,\mathcal{L}(x^k\,P_n(x)) \\
&=\; A_{n\,n}\,\mathcal{L}(x^n\,P_n(x)) \quad .
\end{aligned}$$

Del teorema 1 , la matriz coeficiente director $A_{n\,n}$ *of* $P_n(x)$ *es invertible. Así las condiciones (iii) y (ii) de la definición 2, implican que*

$$\mathcal{L}(\, P_n(x)\, P_n(x)\,) \quad es \;\; invertible \quad . \tag{1.13}$$

Nótese que la condición (1.13) no significa en general que $\mathcal{L}(\, P_m(x)\, P_n(x)\,) \,=\, 0$ *para* $m > n$ *. En cualquier caso, si los polinomios* $P_m(x)$ *y* $P_n(x)$ *conmutan, se tiene que*

$$\mathcal{L}(\, P_m(x)\, P_n(x)\,) \,=\, \mathcal{L}(\, P_n(x)\, P_m(x)\,) \,=\, 0 \quad , \quad si \quad m \neq n \quad .$$

EJEMPLO 1 *Sea* $W(x)$ *una función integrable a valores en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *para todo* $x \in\; [a,b]$*. Entonces, la función* $\mathcal{L}_W : \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$ *definida por*

$$\mathcal{L}_W(P(x)) \,=\, \int_a^b P(x)\, W(x)\, dx \tag{1.14}$$

es un funcional matricial de momentos a derecha.

EJEMPLO 2 *Sean* W_i *matrices en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *para* $1 \leq i \leq m$ *y sean* $\{\, x_i \,\}_{i=1}^m$ *un conjunto de m puntos distintos en la recta real. Entonces la función* $\mathcal{L}_W$: $\mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$ *definida por*

$$\mathcal{L}_W(P(x)) \,=\, \sum_{j=1}^m P(x_j)\, W_j$$

es un funcional matricial de momentos a derecha.

TEOREMA 2 *Sea* $\{\, P_n(x)\,\}_{n\geq 0}$ *una SPOMD, y sea* $Q(x)$ *un polinomio matricial de grado n. Entonces, existen matrices* $\Lambda_0\,, \ldots,\, \Lambda_n$ *en* $\mathbb{C}^{r\times r}$*, univocamente determinadas por* $Q(x)$ *, tales que*

$$Q(x) \,=\, \sum_{k=0}^n \Lambda_k\, P_k(x) \quad . \tag{1.15}$$

<u>Demostración:</u> Sea $Q(x) \,=\, \sum_{k=0}^n C_k\, x^k$. Debemos encontrar matrices $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ tales que

$$C_0 \,+\, C_1\, x \,+\cdots+\, C_n\, x^n \,=\, \Lambda_0\, P_0(x) \,+\, \Lambda_1\, P_1(x) \,+\cdots+\, \Lambda_n\, P_n(x) \quad . \tag{1.16}$$

Si denotamos

$$P_m(x) \,=\, \sum_{k=0}^m A_{m\,k}\, x^k \quad , \tag{1.17}$$

sustituyendo $P_m(x)$ dado por (1.17) en (1.16) e igualando las matrices coeficientes de x^j en ambos miembros de la ecuación resultante, para $0 \leq j \leq n$, tenemos

$$\left.\begin{array}{lclclclcl} C_0 & = & \Lambda_0\, A_{0\,0} & + & \Lambda_1\, A_{1\,0} & + & \cdots & + & \Lambda_n\, A_{n\,0} \\ C_1 & = & & & \Lambda_1\, A_{1\,1} & + & \cdots & + & \Lambda_n\, A_{n\,1} \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ C_n & = & & & & & & & \Lambda_n\, A_{n\,n} \end{array}\right\} \tag{1.18}$$

que puede reescribirse como el sistema por bloques

$$\left[\begin{array}{cccc} \Lambda_0 & \Lambda_1 & \cdots & \Lambda_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} A_{0\,0} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{1\,0} & A_{1\,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n\,0} & A_{n\,1} & \cdots & A_{n\,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \end{array}\right] \ . \tag{1.19}$$

Del teorema 1, las matrices $A_{k\,k}$ son invertibles para $0 \leq k \leq n$. De aquí, el sistema (1.19) tiene una única solución, $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$, y el resultado queda demostrado. $\square$

NOTA 2 *Si la matriz coeficiente C_n del polinomio matricial $Q(x)$ es una matriz invertible, de (1.19), se tiene que $\Lambda_n\, A_{n\,n} = C_n$, y entonces Λ_n también es invertible. Los coeficientes matriciales Λ_i , para $0 \leq i \leq n$ se pueden calcular sin resolver (1.19) de la siguiente forma: Postmultiplicando ambos miembros de (1.15) por $P_n(x)$, tenemos*

$$Q(x)\, P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k\, P_k(x)\, P_n(x) \quad . \tag{1.20}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos miembros de (1.20),

$$\mathcal{L}(Q(x)\, P_n(x)) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k\, \mathcal{L}(P_k(x)\, P_n(x)) \;=\; \Lambda_n\, \mathcal{L}(P_n(x)\, P_n(x)) \quad ,$$

luego

$$\Lambda_n \;=\; \mathcal{L}(Q(x)\, P_n(x))\ [\mathcal{L}(P_n(x)\, P_n(x))]^{-1} \quad . \tag{1.21}$$

De (1.15), tenemos que

$$Q(x) \;-\; \Lambda_n\, P_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i\, P_i(x) \quad . \tag{1.22}$$

Postmultiplicando ambos miembros de (1.22) por $P_{n-1}(x)$ y aplicando $\mathcal{L}$ a la ecuación resultante, se tiene

$$\mathcal{L}(Q(x)\, P_{n-1}(x)) \;-\; \Lambda_n\, \mathcal{L}(P_n(x)\, P_{n-1}(x))$$

$$=\; \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i\, \mathcal{L}(P_i(x)\, P_{n-1}(x)) \;=\; \Lambda_{n-1}\, \mathcal{L}(P_{n-1}(x)\, P_{n-1}(x)) \quad .$$

De aquí,

$$\Lambda_{n-1} \,=\, [\mathcal{L}(Q(x)\,P_{n-1}(x)) \,-\, \Lambda_n\,\mathcal{L}(P_n(x)\,P_{n-1}(x))]\;[\mathcal{L}(P_{n-1}(x)\,P_{n-1}(x))]^{-1} \quad . \tag{1.23}$$

De (1.15), podemos escribir, para $0 \le j < n$

$$Q(x) \,-\, \Lambda_n\,P_n(x) \,-\, \cdots \,-\, \Lambda_{j+1}\,P_{j+1}(x) \,=\, \sum_{i=0}^{j} \Lambda_i\,P_i(x) \quad . \tag{1.24}$$

Postmultiplicando (1.24) por $P_j(x)$ *y aplicando* $\mathcal{L}$ *a la ecuación resultante, tenemos*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Q(x)\,P_j(x)) \,-\, \sum_{k=j+1}^{n} \Lambda_k\,\mathcal{L}(P_k(x)\,P_j(x)) \,&=\, \sum_{i=0}^{j} \Lambda_i\,\mathcal{L}(P_i(x)\,P_j(x)) \\ &=\, \Lambda_j\,\mathcal{L}(P_j(x)\,P_j(x)) \quad . \end{aligned}$$

De aquí,

$$\Lambda_j \,=\, \left[\mathcal{L}(Q(x)\,P_j(x)) \,-\, \sum_{k=j+1}^{n} \Lambda_k\,\mathcal{L}(P_k(x)\,P_j(x))\right]\,[\mathcal{L}(P_j(x)\,P_j(x))]^{-1} \;, \quad 0 \le j < n \;. \tag{1.25}$$

En particular, si los polinomios $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$ *conmutan, entonces*

$$\mathcal{L}(P_k(x)\,P_j(x)) \,=\, \mathcal{L}(P_j(x)\,P_k(x)) \,=\, 0 \quad \textit{para} \quad k > j\,,$$

y de (1.25), llegamos a la siguiente expresión más simple

$$\Lambda_j \,=\, \mathcal{L}(Q(x)\,P_j(x))\;[\mathcal{L}(P_j(x)\,P_j(x))]^{-1} \;, \quad 0 \le j \le n\,, \tag{1.26}$$

que coincide con la dada por Chihara en [5, p.9] para el caso escalar.

COROLARIO 1 *Sea* $\mathcal{L}$ *funcional matricial de momentos lineal a la derecha y sea* $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$ *una sucesión de polinomios matriciales tales que* $P_n(x)$ *es de grado* n *para* $n \ge 0$ *. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(1) $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$ *es una SPOMD para* $\mathcal{L}$ *.*

(2) $\mathcal{L}(Q(x)\,P_n(x)) \,=\, 0$ *para cada polinomio matricial* $Q(x)$ *de grado* $m < n$ *, y si* $m = n$ *y el coeficiente director de* $Q(x)$ *es invertible, entonces* $\mathcal{L}(Q(x)\,P_n(x))$ *es invertible.*

(3) $\mathcal{L}(x^n\,P_m(x)) \,=\, \delta_{m\,n}\,K_n$ *; donde* K_n *es invertible y* $m \le n$ *.*

Demostración: **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**. Dado $Q(x) \in \mathcal{P}[x]$ de grado m, del teorema 2 y nota 2, existen matrices $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ en $\mathbb{C}^{r\times r}$, tales que

$$Q(x) \,=\, \sum_{i=0}^{m} \Lambda_i\, P_i(x) \quad y \quad \Lambda_m \quad es \quad invertible \ . \tag{1.27}$$

Del teorema 1 podemos escribir

$$P_i(x) \,=\, \sum_{k=0}^{i} A_{i\,k}\, x^k\,, \qquad A_{i\,i} \quad invertible, \quad i \geq 0 \ . \tag{1.28}$$

Entonces de (1.27) y (1.28), se sigue que

$$\mathcal{L}(Q(x)\, P_n(x)) \,=\, \mathcal{L}\left(\left(\sum_{i=0}^{m} \Lambda_i\, P_i(x) \right) \, P_n(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \Lambda_i\, \mathcal{L}(P_i(x)\, P_n(x)) \,=\, \sum_{i=0}^{m} \Lambda_i \, \sum_{k=0}^{i} A_{i\,k}\mathcal{L}(x^k\, P_n(x)) \tag{1.29}$$

si $m < n$, de (1.29) y de la propiedad (ii) de la definición 2, se tiene que $\mathcal{L}(Q(x)\, P_n(x)) = 0$. Si $m = n$, entonces de (1.29), se sigue

$$\mathcal{L}(Q(x)\, P_n(x)) \,=\, \Lambda_n \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\, \mathcal{L}(x^k\, P_n(x)) \,=\, \Lambda_n\, A_{n\,n}\, \mathcal{L}(x^n\, P_n(x))$$

De la invertibilidad de $A_{n\,n}$, Λ_n y $\mathcal{L}\ (x^n \ \ P_n(x))$ se sigue la invertibilidad de $\mathcal{L}(Q(x)\, P_n(x))$. Las demostraciones de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** y **(3)** $\Rightarrow$ **(1)** son triviales. $\square$

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria para la existencia de una SPOMD para un funcional matricial de momentos lineal a la derecha $\mathcal{L}$, en terminos de su sucesión de momentos matriciales $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$.

TEOREMA 3 *Sea $\mathcal{L}$ un funcional matricial de momentos lineal a la derecha con sucesión de momentos matriciales $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$. Si la matriz de Haenkel por bloques*

$$\varphi_n \,=\, \begin{bmatrix} \Omega_0 & \Omega_1 & \cdots & \Omega_n \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \cdots & \Omega_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Omega_n & \Omega_{n+1} & \cdots & \Omega_{2n} \end{bmatrix} \,, \quad n \geq 0 \tag{1.30}$$

es invertible para $n \geq 0$, entonces la sucesión de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ definida por

$$P_n(x) \,=\, \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\, x^k\,, \quad n \geq 1\,, \quad P_0(x) \,=\, A_{0\,0} \quad invertible \tag{1.31}$$

donde

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{n\,0} & A_{n\,1} & \cdots & A_{n\,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & K_n \end{array}\right] \varphi_n^{-1}\,, \quad n \geq 1 \quad , \tag{1.32}$$

y K_n es una matriz invertible cualquiera, es una SPOMD para $\mathcal{L}$.

Demostración: Supongamos que φ_n es invertible. Debemos encontrar matrices $A_{n\,k} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ para $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$ tales que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, definida por (1.31), satisface la condición (1.4) para una matriz cualquiera K_n invertible, es decir,

$$\mathcal{L}(x^m\,P_n(x)) = \delta_{m\,n}\,K_n\,, \quad m \leq n \quad . \tag{1.33}$$

Por aplicación de $\mathcal{L}$ a ambos miembros de la ecuación

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,x^k\,, \quad n \geq 1 \quad ,$$

e imponiendo la condición (1.33), se tiene

$$\mathcal{L}(x^m\,P_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\,\Omega_{m+k} = \delta_{m\,n}\,K_n\,, \quad m \leq n \quad ,$$

que puede escribirse de la forma

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} A_{n\,0}\,\Omega_0 & + & A_{n\,1}\,\Omega_1 & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_n & = & 0 \\ A_{n\,0}\,\Omega_1 & + & A_{n\,1}\,\Omega_2 & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_{n+1} & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ A_{n\,0}\,\Omega_{n-1} & + & A_{n\,1}\,\Omega_n & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_{2n-1} & = & 0 \\ A_{n\,0}\,\Omega_n & + & A_{n\,1}\,\Omega_{n+1} & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_{2n} & = & K_n \end{array}\right\}$$

o bien

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{n\,0} & A_{n\,1} & \cdots & A_{n\,n} \end{array}\right] \varphi_n = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & K_n \end{array}\right] \quad , \quad n \geq 1 \quad . \tag{1.34}$$

De la invertibilidad de φ_n y (1.34), el resultado queda demostrado. $\square$

NOTA 3 *El sistema (1.34) puede escribirse de otra forma. Tomando*

$$A = [\Omega_n \ldots \Omega_{2n-1}] \quad ,$$

$$B = \left[\begin{array}{c} \Omega_n \\ \vdots \\ \Omega_{2n-1} \end{array}\right] \quad ,$$

lo podemos escribir como

$$[M \quad A_{n\,n}] \left[\begin{array}{cc} \varphi_{n-1} & B \\ A & \Omega_{2n} \end{array}\right] = [0 \quad K_n] \quad . \tag{1.35}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad (1.35) a la izquierda por

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{bmatrix} ,$$

se tiene

$$[M \quad A_{n\,n}] \begin{bmatrix} \varphi_{n-1} & B \\ A & \Omega_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{bmatrix} = [0 \quad K_n] ,$$

de donde

$$[M \quad A_{n\,n}] \begin{bmatrix} I & 0 \\ A\varphi_{n-1}^{-1} & \Omega_{2n} - A\varphi_{n-1}^{-1}B \end{bmatrix} = [0 \quad K_n] ,$$

luego

$$K_n = A_{n\,n}\left(\Omega_{2n} - A\varphi_{n-1}^{-1}B\right) . \tag{1.36}$$

TEOREMA 4 *Si $\pi(x)$ es un polinomio matricial mónico de grado n, y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOMD mónica, entonces*

$$|\mathcal{L}\left[\pi(x)P_n(x)\right]| = \frac{|\varphi_n|}{|\varphi_{n-1}|} .$$

Demostración: Tenemos que $\mathcal{L}\left[\pi(x)P_n(x)\right] = A_n\mathcal{L}[x^nP_n(x)]$, donde A_n es el coeficiente director de $\pi(x)$ y $\mathcal{L}[x^nP_n(x)] = K_n$. Aplicando (1.36), obtenemos

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = A_nA_{n\,n}\left(\Omega_{2n} - A\varphi_{n-1}^{-1}B\right) ,$$

como $A_n = A_{n\,n} = I$ por hipótesis, se tiene que

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = \Omega_{2n} - A\varphi_{n-1}^{-1}B . \tag{1.37}$$

Para cierta matriz S, podemos escribir (1.37) como

$$\begin{bmatrix} I & S \\ 0 & \mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n-1} & B \\ A & \Omega_{2n} \end{bmatrix} . \tag{1.38}$$

Tomando determinantes en (1.38), y aplicando que

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_{n-1} & B \\ A & \Omega_{2n} \end{bmatrix} ,$$

se obtiene el resultado. □

NOTA 4 *El concepto de funcional matricial de momentos lineal a izquierda y de sucesión de polinomios ortogonales a izquierda puede definirse de forma completamente análoga. Así, por ejemplo, una función $\mathcal{L}: \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$ se dice que es un funcional matricial de momentos a la izquierda, si la condición (1.2) se reeemplaza por la siguiente:*

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} A_k\, x^k\right] = \sum_{k=0}^{n} \Omega_k\, A_k\,; \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, x^k \quad .$$

Partiendo de esta definición, una versión a izquierda de los resultados de esta sección se obtendría fácilmente.

NOTA 5 *En el contexto más general de un álgebra no conmutativa con unidad, los conceptos de funcional lineal y de polinomio ortogonal respecto al funcional han sido estudiados en [11] con algunas diferencias respecto a nuestra restricción al caso matricial.*
La propiedad (iii) de la definición 1 queda en [11] caracterizada según la invertibilidad de la matriz de Haenkel por bloques (1.30). En la presente memoria se exige por definición. De esta forma, podemos caracterizar la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales de forma análoga a la que se demuestra en [5] para el caso escalar, y queda más clara su generalización a funcionales bilineales matriciales, llevada a término en el capítulo 2.
Propiedades como la fórmula de recurrencia de tres términos y sus generalizaciones para polinomios ortogonales se encuentran demostradas en los teoremas 3, 9 y (16) de [11], por lo que aquí no se incluyen. Si se incluye la demostración de este resultado en el capítulo 2, para funcionales bilineales, así como una versión del teorema de Favard para estos funcionales. En [11], está ausente cualquier intento de extensión a funcionales bilineales y a funcionales definidos positivos.

A continuación demostraremos que los polinomios matriciales de Laguerre y Hermite introducidos recientemente en [34] y [40] respectivamente, son SPOMD para un momento funcional matricial lineal a derecha apropiado del tipo descrito en el ejemplo 1.

EJEMPLO 3 (POLINOMIOS MATRICIALES DE HERMITE) *Sea A una matriz en $C^{r\times r}$ tal que*

$$Re\, z > 0 \quad para \quad cada \quad valor \;\; propio \quad z \quad de \quad A \ , \tag{1.39}$$

y sea $\{H_n(x,A)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios matriciales de Hermite definida en [40] por

$$H_n(x,A) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k\, n!\, \left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} \ , \quad n \geq 0 \ . \tag{1.40}$$

Consideremos el funcional matricial de momentos a derecha $\mathcal{L}_H : \mathcal{P}[x] \longrightarrow C^{r\times r}$, definido por

$$\mathcal{L}_H(P(x)) \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\, dx \;, \quad P(x) \in \mathcal{P}[x] \;. \tag{1.41}$$

De [40], la sucesión de momentos matriciales $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ *asociada a* $\mathcal{L}_H$ *, viene dada por*

$$\Omega_n \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 \;, & n \,=\, 2k+1\,, \quad k \geq 0 \;, \\ \left[\left(\frac{A}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}\right]^{-1} \Gamma(k+\frac{1}{2})\,, & n \,=\, 2k\,, \quad k \geq 0 \;, \end{cases} \tag{1.42}$$

y los polinomios matriciales de Hermite verifican la fórmula de Rodrigues matricial

$$H_n(x,A) \,=\, exp\left(\frac{A\,x^2}{2}\right)\, (-1)^n \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} D^{(n)}\left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\right] \;, \tag{1.43}$$

donde D *denota el operador derivada. La matriz coeficiente director de* $H_n(x,A)$ *es la matriz invertible* $C_n \,=\, \left(\sqrt{2A}\right)^n$*. Demostremos que*

$$\mathcal{L}_H(x^s\, H_n(x,A)) \,=\, \delta_{s\,n}\, K_n\,, \quad K_n \;\; invertible\,, \quad s \leq n \;. \tag{1.44}$$

Usando la fórmula de Rodrigues (1.43) y aplicando el método de integración por partes en la integral

$$\mathcal{L}_H(x^s\, H_n(x,A)) \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\, H_n(x,A)\, exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\, dx$$

$$= (-1)^n \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\, D^{(n)}\left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\right] dx \;, \quad 0 \leq s \leq n \;, \tag{1.45}$$

tenemos

$$\mathcal{L}_H\,(\,x^s\, H_n(x,A)\,) = (-1)^n \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \left\{ x^s\, D^{(n-1)}\left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\right] \right\}_{-\infty}^{+\infty}$$

$$-\,(-1)^n \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} s \int_{-\infty}^{+\infty} x^{s-1}\, D^{(n-1)}\left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right)\right] dx \;. \tag{1.46}$$

Del teorema 2-(i) de [40], se sigue que

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x)\, exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right) \,=\, 0\,, \quad para \;\; cada \;\; P(x) \in \mathcal{P}[x] \;. \tag{1.47}$$

De aquí

$$\left\{ x^s\, D^{(n-1)} \left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2} \right) \right] \right\}_{-\infty}^{+\infty} = 0\,, \tag{1.48}$$

y podemos escribir (1.46) en la forma

$$\mathcal{L}_H(x^s\, H_n(x,A)) = (-1)^{n+1} \left(\frac{A}{2} \right)^{-\frac{n}{2}} s \int_{-\infty}^{+\infty} x^{s-1}\, D^{(n-1)} \left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2} \right) \right] dx \quad . \tag{1.49}$$

De una forma analoga, después de aplicar $s+1$ *veces el método de integración por partes en (1.45), y aplicando (1.47), obtenemos*

$$\mathcal{L}_H(x^s\, H_n(x,A)) = 0\,, \quad 0 \le s < n \quad . \tag{1.50}$$

Aplicando el método de integración por partes n *veces en la expresión*

$$\mathcal{L}_H(x^n\, H_n(x,A)) = (-1)^{n} \left(\frac{A}{2} \right)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n}\, D^{(n)} \left[exp\left(-\frac{A\,x^2}{2} \right) \right] dx \quad , \tag{1.51}$$

y utilizando (1.47) junto con el teorema 2-(ii) de [40], tenemos

$$\mathcal{L}_H(x^n\, H_n(x,A)) = n!\, 2^{\frac{n}{2}}\, (2\,\pi)^{\frac{1}{2}}\, A^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,, \quad n \ge 0 \quad . \tag{1.52}$$

Así, (1.44) queda demostrado y $\{H_n(x,A)\}_{n\ge 0}$ *define una SPOMD para* $\mathcal{L}_H$ *.*

EJEMPLO 4 (POLINOMIOS MATRICIALES DE LAGUERRE) *Sea* A *una matriz en* $C^{r\times r}$ *tal que*

$$Re\, z > -1 \quad para \;\; cada \;\; valor \;\; propio \;\; z \;\; de \;\; A\,, \tag{1.53}$$

y sea λ *un número complejo con parte real positiva. Tomando* $W(x) = e^{-x\,\lambda}\, x^A$ *, donde* $x^A = exp\,(A \ln x)$ *para* $x > 0$ *, la función* $\mathcal{L}_W : \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$ *definida por*

$$\mathcal{L}_W(P(x)) = \int_0^{\infty} P(x)\, W(x)\, dx = \int_0^{\infty} P(x)\, e^{-x\,\lambda}\, x^A\, dx \quad , \tag{1.54}$$

es un funcional matricial de momentos a derecha. De [40], sabemos que la sucesión de momentos matriciales asociada a $\mathcal{L}_W$ *viene dada por*

$$\Omega_n = \int_0^{\infty} x^n\, W(x)\, dx = \lambda^{-A-(n+1)I}\, \Gamma(A+(n+1)I) \quad . \tag{1.55}$$

Ahora demostremos que la sucesión de polinomios matriciales de Laguerre $L_n^{(A,\lambda)}(x)$ *dada en [34], son ortogonales a derecha respecto al funcional* $\mathcal{L}_W$ *definido por (1.54). Estos polinomios matriciales están definidos por*

$$L_n^{(A,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, \lambda^k}{(n-k)!\, k!} (A+I)_n \left[(A+I)_k \right]^{-1} x^k \quad . \tag{1.56}$$

La matriz coeficiente director de $L_n^{(A,\lambda)}(x)$ *es la matriz* $\dfrac{(-1)^n\,\lambda^n\,I}{n!}$. *Demostraremos ahora que*

$$\mathcal{L}_W(x^s\,L_n^{(A,\lambda)}(x)) \;=\; \delta_{s\,n}\,K_n\,; \quad s\leq n\,,\quad K_n\in\mathcal{C}^{r\times r}\quad \textit{invertible}\quad . \tag{1.57}$$

Sea $0\leq s<n$, *entonces usando la fórmula de Rodrigues [34, p.60], se sigue que*

$$L_n^{(A,\lambda)}(x) \;=\; \frac{x^{-A}\,e^{x\lambda}}{n!}\,D^{(n)}[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}]\,,\quad n\geq 0\quad ,$$

e integrando por partes en

$$\mathcal{L}_W(x^s\,L_n^{(A,\lambda)}(x)) \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^s\,D^{(n)}\left[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}\right]\,dx\quad , \tag{1.58}$$

resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W(x^s\,L_n^{(A,\lambda)}(x)) \;=\;& \frac{1}{n!}\,\left\{x^s\,D^{(n-1)}\left[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}\right]\right\}_{x=0}^{x=\infty}\\ & -\frac{s}{n!}\int_0^{\infty} x^{s-1}\,D^{(n-1)}\left[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}\right]\,dx\quad .\end{aligned} \tag{1.59}$$

Por la fórmula de Leibniz para la derivada $(n-1)$*-ésima de un producto y las propiedades del cálculo funcional matricial, se sigue que*

$$x^s\,D^{(n-1)}\left[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}\right] \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\,\lambda^k\,(A+I)_{n-1}\,\left[(A+I)_k\right]^{-1}\,x^{A+kI}\,e^{-x\lambda}\,x^s\quad . \tag{1.60}$$

Nótese que para $0\leq k\leq n-1$, $0\leq s<n-1$, *podemos escribir*

$$x^{A+kI}\,e^{-x\lambda}\,x^s \;=\; e^{-x\lambda}\,x^{A+I}\,P(x)\;,\quad P(x)\;=\;x^{k+s}\quad ,$$

y del teorema 2.1-(i) de [34, p.56], se sigue que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{A+kI}\,e^{-x\lambda}\,x^s \;=\; 0\;,\qquad \lim_{x\to\infty} x^{A+kI}\,e^{-x\lambda}\,x^s \;=\; 0\quad . \tag{1.61}$$

De (1.59), (1.60) y (1.61), tenemos

$$\mathcal{L}_W(x^s\,L_n^{(A,\lambda)}(x)) \;=\; -\frac{s}{n!}\int_0^{\infty} x^{s-1}\,D^{(n-1)}\left[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}\right]\,dx\quad . \tag{1.62}$$

Aplicando el método de integración por partes en (1.58), se sigue que

$$\mathcal{L}_W(x^s\,L_n^{(A,\lambda)}(x)) \;=\; \frac{s\,(s-1)}{n!}\int_0^{\infty} x^{s-2}\,D^{(n-2)}\left[e^{-x\lambda}\,x^{A+nI}\right]\,dx\quad . \tag{1.63}$$

Después de aplicar $(s+1)$ *veces el método de integración por partes en (1.63), y empleando el teorema 2.1-(i) de [34], tenemos que*

$$\mathcal{L}_W(x^s\, L_n^{(A,\lambda)}(x)) \,=\, 0 \;, \quad 0 \le s < n-1 \quad . \tag{1.64}$$

Aplicando el método de integración por partes n veces en la integral

$$\mathcal{L}_W(x^n\, L_n^{(A,\lambda)}(x)) \,=\, \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n\, D^{(n)}\left[e^{-x\lambda}\, x^{A+nI}\right]\, dx \quad ,$$

y empleando el teorema 2.1 de [34], se sigue que

$$\mathcal{L}_W(x^n\, L_n^{(A,\lambda)}(x)) \,=\, (-1)^n \int_0^\infty e^{-x\lambda}\, x^{A+nI}\, dx \,=\, (-1)^n\, \lambda^{-(A+(n+1)I)}\, \Gamma(A+(n+1)I) \quad .$$

Así, queda demostrada (1.57) y $\{L_n^{(A,\lambda)}(x)\}_{n\ge 0}$ es una SPOMD para $\mathcal{L}_W$.

1.3. La condición de Haar matricial.

Es bien conocida la importancia de la condición de Haar en el desarrollo de fórmulas de cuadratura numérica para funciones escalares, [9, p.26]. El siguiente resultado demuestra que una sucesión de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$, que satisfacen una relación de recurrencia de tres términos, verifican el análogo matricial de la condición de Haar. Recordemos que de [34], los polinomios matriciales de Laguerre verifican la relación de recurrencia matricial de tres términos

$$(n+1)\, L_{n+1}^{(A,\lambda)}(x) \,=\, (A+(2n+1)I - x\lambda I)\, L_n^{(A,\lambda)} - (A+nI)\, L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x) \,, \;\; n \ge 0 \;\; , \tag{1.65}$$

con

$$L_{-1}^{(A,\lambda)}(x) \,=\, 0 \,, \quad L_0^{(A,\lambda)}(x) \,=\, I \quad .$$

y de [40], los polinomios matriciales de Hermite verifican la relación de recurrencia matricial de tres términos

$$H_{n+1}(x,A) \,=\, x\sqrt{2A}\, H_n(x,A) \,-\, 2\,n\, H_{n-1}(x,A) \,, \quad n \ge 0 \quad , \tag{1.66}$$

con

$$H_{-1}(x,A) \,=\, 0 \,, \quad H_0(x,A) \,=\, I \quad .$$

TEOREMA 5 *Sea $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$ una sucesión de polinomios matriciales que satisfacen una relación de recurrencia matricial de tres términos*

$$A_n\, P_n(x) \,=\, (Ix - B_n)\, P_{n-1}(x) \,-\, C_n\, P_{n-2}(x) \,; \quad n \ge 1 \quad , \tag{1.67}$$

$$P_0(x) \,=\, I \,, \quad P_{-1}(x) \,=\, 0 \quad ,$$

donde A_n , B_n , C_n son matrices en $\mathbb{C}^{r\times r}$ con A_n invertible para $n \ge 1$, y sea $\{x_i\}_{i=1}^N$ una sucesión de N números reales distintos. Entonces la matriz por bloques

$$P(x_1, \ldots, x_N) = \begin{bmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_N) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N-1}(x_1) & P_{N-1}(x_2) & \cdots & P_{N-1}(x_N) \end{bmatrix} \tag{1.68}$$

es invertible para $N \geq 2$ *.*

<u>Demostración:</u> De (1.67), para $N = 2, 3, 4,$ se sigue que

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ B_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ I\,x_1 & I\,x_2 \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & B_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ B_1 & I & 0 \\ C_2 & B_2\,A_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & P_0(x_3) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & P_1(x_3) \\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & P_2(x_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & I & I \\ I\,x_1 & I\,x_2 & I\,x_3 \\ I\,x_1^2 & I\,x_2^2 & I\,x_3^2 \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & A_1 & 0 \\ 0 & C_2 & B_2 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & I & 0 & 0 \\ C_2 & B_2\,A_1^{-1} & I & 0 \\ 0 & C_3\,A_1^{-1} & B_3\,A_2^{-1} & I \end{bmatrix} P(x_1, \ldots, x_4)$$

$$= \begin{bmatrix} I & I & I & I \\ I\,x_1 & I\,x_2 & I\,x_3 & I\,x_4 \\ I\,x_1^2 & I\,x_2^2 & I\,x_3^2 & I x_4^2 \\ I\,x_1^3 & I\,x_2^3 & I\,x_3^3 & I x_4^3 \end{bmatrix} .$$

En general, para $n \geq 2$, de (1.67), se tiene

$$\left\{ \prod_{p=1}^{N-2} \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ & \ddots^{(p)} & & & & 0 & \\ & & I & & & & \\ & & B_1 & A_1 & & & \\ & & C_2 & B_2 & A_2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & C_{n-p-1} & B_{n-p-1} & A_{n-p-1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} I & & & & 0 \\ B_1 & I & & & \\ C_2 & B_2 A_1^{-1} & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & C_{n-1} A_{n-3}^{-1} & B_{n-1} A_{n-2}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & & 0 \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n-1} \end{bmatrix} P(x_1, \ldots, x_N)$$

$$= \begin{bmatrix} I & \ldots & I \\ I\, x_1 & \ldots & I\, x_n \\ I\, x_1^2 & \ldots & I\, x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ I x_1^{n-1} & \ldots & I\, x_n^{n-1} \end{bmatrix} . \tag{1.69}$$

De la invertibilidad de las matrices A_i para $i \geq 1$, la invertibilidad de la matriz de Vandermonde por bloques que aparece en el segundo miembro de (1.69), y de las matrices por bloques que premultiplican a $P(x_1, \ldots, x_N)$, en el primer miembro de (1.69), se sigue que $P(x_1, \ldots, x_N)$ es invertible para $N \geq 2$. Así, el resultado queda demostrado. $\square$

En particular, si x_1, x_2, $\ldots$, x_N son N números reales distintos, de (1.65), (1.66) y del teorema 5, las siguientes matrices por bloques son invertibles para $N \geq 2$:

$$L^{(A,\lambda)}(x_1, \ldots, x_N) = \begin{bmatrix} L_0^{(A,\lambda)}(x_1) & L_0^{(A,\lambda)}(x_2) & \cdots & L_0^{(A,\lambda)}(x_N) \\ L_1^{(A,\lambda)}(x_1) & L_1^{(A,\lambda)}(x_2) & \cdots & L_1^{(A,\lambda)}(x_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{N-1}^{(A,\lambda)}(x_1) & L_{N-1}^{(A,\lambda)}(x_2) & \cdots & L_{N-1}^{(A,\lambda)}(x_N) \end{bmatrix}, \tag{1.70}$$

$$H^A(x_1, \ldots, x_N) = \begin{bmatrix} H_0(x_1, A) & H_0(x_2, A) & \cdots & H_0(x_N, A) \\ H_1(x_1, A) & H_1(x_2, A) & \cdots & H_1(x_N, A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N-1}(x_1, A) & H_{N-1}(x_2, A) & \cdots & H_{N-1}(x_N, A) \end{bmatrix}. \tag{1.71}$$

1.4. Fórmulas de cuadratura matricial y cotas de error.

Sea $W(x)$ una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$ con valores en $\mathbb{C}^{r \times r}$, denominada función peso, y sea $F(x)$ una función integrable sobre el mismo intervalo $[a, b]$ con valores en $C^{r \times r}$. Estamos interesados en la aproximación numérica de la integral

$$I(F) \,=\, \int_a^b F(x)\,W(x)\,dx\,, \tag{1.72}$$

empleando solo los valores de $F(x)$ en un conjunto de puntos $\{x_i\}_{i=1}^N$. La aproximación propuesta (fórmula de cuadratura), $Q(F)$, tiene la forma

$$Q(F) \,=\, \sum_{i=1}^N F(x_i)\,W_i \,=\, I(F) \,-\, E(F) \tag{1.73}$$

donde $E(F)$ es el error. Los puntos $\{x_i\}_{i=1}^N$ se dicen puntos de cuadratura (o nodos), y a las matrices $\{W_i\}_{i=1}^N$ se les dice pesos matriciales de cuadratura. Ellos nos proporcionan, para la función $F(x)$ en concreto, la aproximación $Q(F)$. El siguiente resultado muestra que tomando cualquier sucesión de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ tal que la matriz por bloques $P(x_1,\ldots,x_N)$ definida por (1.68) es invertible, podemos construir una fórmula de cuadratura exacta de N puntos para cualquier polinomio matricial de grado menor o igual a $N-1$.

TEOREMA 6 *Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOMD respecto al funcional matricial de momentos a la derecha $\mathcal{L}$, tal que la matriz por bloques $P(x_1,\ldots,x_N)$, definida por (1.68), es invertible con $\{x_i\}_{i=1}^N$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$. Sea M_i el momento matricial generalizado i-ésimo para la función peso matricial $W(x)$ respecto al conjunto $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$,*

$$M_i \,=\, \int_a^b P_i(x)\,W(x)\,dx\,, \quad 0\leq i\leq N-1 \quad . \tag{1.74}$$

Entonces, la fórmula de cuadratura matricial definida por

$$Q(F) \,=\, \sum_{i=1}^N F(x_i)\,W_i\,, \qquad \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix} \,=\, [\; P(x_1,\ldots,x_N)\;]^{-1} \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{bmatrix} \quad , \tag{1.75}$$

es exacta para cualquier polinomio matricial de grado menor o igual que $N-1$.

<u>Demostración:</u> Impongamos que la fórmula de cuadratura matricial (1.73) sea exacta para polinomios de grado $P_0(x)\,,\ldots,\,P_{N-1}(x)$. Los pesos matriciales de la cuadratura W_i, para $i \,=\, 1,2,\ldots,N$, deben verificar $E(P_j(x)) \,=\, 0$, para $0\leq j\leq N-1$. Esta condición puede escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^N P_j(x)\,W_i \,=\, \int_a^b P_j(x)\,W(x)\,dx \,=\, M_j\,, \quad 0\leq j\leq N-1 \quad , \tag{1.76}$$

o

$$P(x_1,\ldots,x_N) \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix} \,=\, \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{bmatrix} \quad , \tag{1.77}$$

donde $P(x_1, \ldots, x_N)$ está definido por (1.68). Ahora del teorema 2, si $W_1, \ldots, W_N$ están definidos por (1.75), la fórmula de cuadratura matricial (1.73) es exacta para cualquier polinomio matricial $Q(x)$ de grado menor o igual que $N-1$. Con esto el resultado queda demostrado. $\square$

NOTA 6 *Los pesos matriciales de cuadratura toman una expresión sencilla en el caso de que la sucesión* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *es una SPOMD respecto al funcional matricial de momentos a derecha* $\mathcal{L}_0$ *definido por*

$$\mathcal{L}_0(P(x)) = \int_a^b P(x)\, W(x)\, dx \quad . \tag{1.78}$$

De hecho, en este caso, los momentos matriciales generalizados toman la forma

$$M_0 = \int_a^b P_0(x)\, W(x)\, dx = A_0 \int_a^b W(x)\, dx ; \quad P_0(x) = A_0 \in \mathbb{C}^{r\times r} \quad ,$$

$$M_i = \int_a^b P_i(x)\, W(x)\, dx = A_0^{-1} \int_a^b A_0\, P_i(x)\, W(x)\, dx$$

$$= A_0^{-1} \int_a^b P_0(x)\, P_i(x)\, W(x)\, dx = A_0^{-1} \mathcal{L}_0(P_0(x)\, P_i(x)) = 0 , \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad . \tag{1.79}$$

Así, si hemos definido las matrices $B_i \in C^{Nr\times r}$*, para* $1 \leq i \leq N$*, de la forma*

$$B_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \ldots , \quad B_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} , \tag{1.80}$$

del teorema 6 y (1.79)-(1.80), podemos escribir

$$W_i = B_i^T \, [P(x_1, \ldots, x_N)]^{-1} \, B_1 \, M_0 \quad . \tag{1.81}$$

EJEMPLO 5 *Consideremos la fórmula de cuadratura de tres puntos*

$$Q(F) = \sum_{i=1}^{3} F(x_i)\, W_i \tag{1.82}$$

para la aproximación numérica de la integral

$$I(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp\left(-\frac{A\, x^2}{2}\right) dx \quad , \tag{1.83}$$

donde x_1, x_2, x_3 *son tres números reales distintos, y* A *es una matriz satisfaciendo la propiedad (1.39). Dado que los polinomios matriciales de Hermite* $\{H_n(x, A)\}_{n\geq 0}$ *son una SPOMD para el funcional matricial de momentos a derecha* $\mathcal{L}_H$ *definido* *por (1.41), y por el teorema 5, la matriz definida por (1.71) es invertible para* $N = 3$. *Del teorema 6, la nota 6 y el teorema 2-(ii) de [40], se sigue que*

$$H^A(x_1, x_2, x_3) \,=\, \begin{bmatrix} I & I & I \\ \\ x_1\sqrt{2A} & x_2\sqrt{2A} & x_3\sqrt{2A} \\ \\ 2(Ax_1^2 - I) & 2(Ax_2^2 - I) & 2(Ax_3^2 - I) \end{bmatrix} \quad ,$$

$$M_0 \,=\, \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{A\,x^2}{2}\right) dx \,=\, (2A)^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(1/2) \,=\, \sqrt{\pi}\,(2A)^{-\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_1' & C_1'' \\ C_2 & C_2' & C_2'' \\ C_3 & C_3' & C_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [H^A(x_1, x_2, x_3)]^{-1} \,=\, \begin{bmatrix} C_1 & C_1' & C_1'' \\ C_2 & C_2' & C_2'' \\ C_3 & C_3' & C_3'' \end{bmatrix}$$

De la ecuación

$$[H^A(x_1, x_2, x_3)]\,[H^A(x_1, x_2, x_3)]^{-1} \,=\, diag\{I, I, I\} \quad ,$$

llegamos al sistema matricial

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & I \\ \\ x_1\,C_1 & + & x_2\,C_2 & + & x_3\,C_3 & = & 0 \\ \\ x_1^2\,C_1 & + & x_2^2\,C_2 & + & x_3^2\,C_3 & = & A^{-1} \end{array}\right\} \tag{1.84}$$

Resolviendo (1.84), tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 & = & \dfrac{x_2\,(\,x_3^2\,I \,-\, A^{-1}) \,-\, x_3\,(\,x_2^2\,I \,-\, A^{-1})}{(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_1)\,(x_2 - x_1)} \\ \\ C_2 & = & \dfrac{x_3\,(\,x_1^2\,I \,-\, A^{-1}) \,-\, x_1\,(\,x_3^2\,I \,-\, A^{-1})}{(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_1)\,(x_2 - x_1)} \\ \\ C_3 & = & \dfrac{x_1\,(\,x_2^2\,I \,-\, A^{-1}) \,-\, x_2\,(\,x_1^2\,I \,-\, A^{-1})}{(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_1)\,(x_2 - x_1)} \end{array}\right\} \tag{1.85}$$

De (1.81), podemos escribir

$$W_i \,=\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C_i\,A^{-\frac{1}{2}}\,, \quad i \,=\, 1,\,2,\,3\,, \tag{1.86}$$

y de (1.85)-(1.86), todas las fórmulas de cuadratura de tres puntos de los polinomios matriciales de Hermite, para una matriz fija A *satisfaciendo (1.39), quedan de la forma*

$$Q(F) \,=\, F(x_1)\,W_1 \,+\, F(x_2)\,W_2 \,+\, F(x_3)\,W_3 \quad . \tag{1.87}$$

NOTA 7 *Los polinomios matriciales de Hermite* $\{H_n(x,A)\}_{n\geq 0}$ *pueden emplearse para la aproximación de integrales del tipo*

$$I_1(F) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dx \quad . \tag{1.88}$$

De hecho, nótese que

$$I_1(F) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, W(x)\, dx\,; \quad G(x) \;=\; F(x)\,[W(x)]^{-1} \;=\; F(x)\, \exp\left(\frac{A\,x^2}{2}\right) \quad . \tag{1.89}$$

Así, de (1.87) y (1.89), tenemos

$$Q_1(F) = Q(G) = F(x_1)\, \exp\left(\frac{A\,x_1^2}{2}\right) W_1 \;+\; F(x_2)\, \exp\left(\frac{A\,x_2^2}{2}\right) W_2$$

$$+\, F(x_3)\, \exp\left(\frac{A\,x_3^2}{2}\right) W_3 \quad ,$$

donde W_1, W_2 *y* W_3 *están definidas por (1.86). De forma análoga, podemos construir fórmulas de cuadratura de N puntos a partir de polinomios de Hermite para el cálculo de integrales del tipo (1.88).*

Concluyamos esta sección con un teorema de Peano para las fórmulas de cuadratura matriciales propuestas. Supongamos que $F(x)$ es una función a valores en $C^{s\times r}$ que tiene derivadas continuas hasta orden q, y que su derivada de orden $q+1$ es continua a trozos. Consideremos la integral

$$I(F) \;=\; \int_a^b F(x)\, W(x)\, dx \quad , \tag{1.90}$$

y una fórmula de cuadratura matricial de N puntos

$$Q(F) \;=\; \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\, W_i \quad . \tag{1.91}$$

Supongamos que $Q(F)$ definido por (1.91) es exacta para todo polinomio matricial $P(x)$ de grado menor o igual que p, y sea $r \;=\; min(p,q)$. El teorema de Taylor nos permite escribir

$$F(x) \;=\; F(a) \;+\; F'(a)\,(x-a) \;+\cdots+\; \frac{F^{(r)}(a)}{r!}\,(x-a)^r \;+\; \int_a^x F^{(r+1)}(t)\,(x-t)^r\, dt \quad . \tag{1.92}$$

Apliquemos ahora el operador lineal $E \;=\; I - Q$ a ambos miembros de la ecuación (1.92). Los primeros $r+1$ términos son nulos pues la fórmula de cuadratura Q es exacta para polinomios matriciales de grado $r < p$. Así

$$E(F) \;=\; \frac{1}{r!}\, E\left(\int_a^x F^{(r+1)}(t)\,(x-t)^r\,dt \right) \;=\; \frac{1}{r!}\, E\left(\int_a^b F^{(r+1)}(t)\,(x-t)_+^r\,dt \right) \quad , \tag{1.93}$$

donde

$$(x-t)_+^r \;=\; \begin{cases} (x-t)^r & si \quad x \geq t \quad , \\ 0 & si \quad x < t \quad . \end{cases} \tag{1.94}$$

El operador E actúa sobre la variable x y así conmuta con t; y entonces, $F^{(r+1)}(t)$ juega el papel de una matriz constante:

$$\begin{aligned} & E\left(\int_a^b F^{(r+1)}(t)\,(x-t)_+^r\,dt \right) \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b F^{(r+1)}(t)\,(x-t)_+^r\,dt \right) W(x)\,dx \;-\; \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b F^{(r+1)}(t)\,(x_i-t)_+^r\,dt \right) W_i \\ &= \int_a^b F^{(r+1)}(t) \left\{ \int_a^b (x-t)_+^r\, W(x)\,dx \right\} dt \;-\; \int_a^b F^{(r+1)}(t) \left\{ \sum_{i=1}^N (x_i-t)_+^r\, W_i \right\} dt \\ &= \int_a^b F^{(r+1)}(t) \left\{ \int_a^b (x-t)_+^r\, W(x)\,dx - \sum_{i=1}^N (x_i-t)_+^r\, W_i \right\} dt \quad . \end{aligned} \tag{1.95}$$

De (1.93) y (1.95), se sigue que

$$E(F) \;=\; \frac{1}{r!} \int_a^b F^{(r+1)}(t)\, E((x-t)_+^r\, I)\,dt \quad . \tag{1.96}$$

Si denotamos

$$M^{(i)} \;=\; \sup \left\{ \|F^{(i)}(t)\| ; \quad a \leq t \leq b \right\} \;, \qquad K_r \;=\; \int_a^b \|E(x-t)_+^r\|\,dt \quad , \tag{1.97}$$

tomando normas en (1.96), se tiene

$$\|E(F)\| \;\leq\; \frac{M^{(r+1)}}{r!}\, K_r \quad . \tag{1.98}$$

Así, queda demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 7 *Consideremos la integral* $I(F)$ *dada por (1.90) y supongamos que la fórmula de cuadratura matricial* $Q(F)$ *definida por (1.91), es exacta para polinomios matriciales de grado menor o igual que p. Sea* $F(x)$ *una función a valores en* $\mathbb{C}^{r\times r}$*, q veces continuamente diferenciable y con derivada* $q+1$ *-ésima* *continua a trozos en* $[a, b]$ *, y sea* $r = min\,(p, q)$ *. Entonces, el error* $E(F)$ *, cuando aproximamos* $I(F)$ *por* $Q(F)$ *, está acotado por (1.98), donde* K_r *y* $M^{(r+1)}$ *vienen dadas por (1.97).*

NOTA 8 *Fórmulas de cuadratura para integrales matriciales del tipo*

$$\int_a^b F(x)\,W(x)\,G(x)^T\,dx \quad , \tag{1.99}$$

se han estudiado recientemente utilizando polinomios ortogonales matriciales en [65], [66] y [15]. La fórmula de cuadratura propuesta en las citadas referencias viene dada por

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i)\Lambda_i G^T(x_i) \quad , \tag{1.100}$$

donde los nodos de cuadratura $\{x_i\}_{i=1}^k$ *son los ceros del polinomio ortogonal matricial* $P_n(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$*, y los pesos matriciales de cuadratura* Λ_i *vienen expresados en términos de los ceros y del par de Jordan* (X, J) *asociado a* $P_n(x)$*. Esta fórmula de cuadratura es exacta para polinomios* $F(x)$ *y* $G(x)$ *tales que* $grado(F(x)) + grado(G(x)) \leq 2n - 1$*, generalizando la conocida fórmula de cuadratura de Gauss escalar. En [65], se demuestra que la fórmula de cuadratura (1.100) converge al valor exacto de la integral matricial si las funciones* $F(x)$ *y* $G(X)$ *son continuas en el intervalo* $[a, b]$*, es decir*

$$\int_a^b F(x)W(x)G^T(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} F(x_i^{(n)})\Lambda_i^{(n)} G^T(x_i^{(n)}) \quad , \tag{1.101}$$

donde los valores $x_i^{(n)}$ *son los ceros del polinomio ortogonal matricial* $P_n(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$*, y* $\Lambda_i^{(n)}$ *los correspondientes pesos de cuadratura.*

Con anterioridad a estos resultados hemos obtenido las fórmulas de cuadratura que presentamos en la presente memoria, que son distintas a las presentadas por estos autores, dado que se obtienen a partir de la condición de Haar matricial y los nodos de cuadratura $\{x_i\}_{i=1}^N$ *son puntos prefijados en el intervalo* $[a, b]$*, lo que resulta de interés en diversos problemas, tales como la resolución de ecuaciones integrales e integro-diferenciales de Volterra, [52]. Estas fórmulas de cuadratura tienen menor precisión que la fórmula de cuadratura (1.100), pero no tienen el inconveniente computacional de necesitar calcular en forma exacta las raices latentes de los polinomios ortogonales y los pares de Jordan correspondientes, inconvenientes computacionales que han sido parcialmente resueltos en [67], y además se demuestran cotas del error de aproximación.*
Aunque no ha sido estudiado en esta memoria, creemos que es viable la obtención de fórmulas de cuadratura matricial que preserven las ventajas de precisión de las citadas aportaciones, y que al mismo tiempo puedan obtenerse cotas del error de aproximación.

Capítulo 2

Polinomios ortogonales matriciales respecto a un funcional matricial bilineal conjugado.

2.1. Introducción.

En el capítulo 1 los polinomios ortogonales matriciales en la recta real se estudiaban desde el punto de vista de un funcional matricial de momentos lineal. De cualquier modo, algunos resultados importantes del enfoque desarrollado por Chihara en el caso escalar en [5], no se comprenden bien empleando solo el concepto de funcional de momentos matricial lineal, por ejemplo, el concepto de producto interior matricial. Aparte de ser la generalización al campo matricial de resultados bien conocidos en el caso escalar, y tratados en parte en el capítulo 1, en este capítulo establecemos las bases para una teoría de funciones ortogonales matriciales respecto a un funcional matricial de momentos bilineal matricial conjugado.
La organización del capítulo es la siguiente. En la sección 2 incluimos algunos preliminares de algebra lineal y cálculo funcional matricial. Introducimos seguidamente el concepto de funcional matricial de momentos bilineal conjugado. A continuación, obtenemos importantes propiedades tales como la existencia de sistemas de polinomios ortogonales matriciales, una relación de recurrencia de tres términos entre estos polinomios, según sean mónicos, ortonormales o en el caso general, así como una fórmula de Christoffel-Darboux para el caso ortonormal, estudiamos los funcionales de momentos simétricos y los polinomios seudo-ortogonales, dando una versión del teorema de Favard para éstos últimos. La sección 3 está dedicada al concepto de funcional matricial de momentos bilineal conjugado definido positivo y a su caracterización en términos de una matriz de Haenkel por bloques. Terminamos el capítulo introduciendo los productos interiores matriciales.

2.2. Funcionales matriciales de momentos bilineales conjugados. Polinomios ortogonales matriciales. Propiedades.

Con el fin de facilitar la claridad de la presentación de este capítulo, en esta sección comenzaremos recordando una serie de resultados bien conocidos sobre matrices definidas positivas. Una matriz A en $C^{r\times r}$ se dice que es definida positiva si A es hermítica y $(Ay, y) > 0$ para cada vector no nulo $y \in C^r$, donde $(\,,\,)$ denota el producto interior euclídeo en $C^r \times C^r$. El siguiente teorema establece algunos resultados cuya demostración puede encontrarse en [12, p.907], [27, p.800-801] y [49, p.180].

TEOREMA 8 *Sea A una matriz hermítica. Entonces*

(i) *A es definida positiva si para cada $z \in \sigma(A)$, $z > 0$.*

(ii) *A es definida positiva si y solo si todos sus menores principales tienen determinante positivo.*

(iii) *Si B es una matriz definida positiva, entonces para cada $z \in \sigma(BA)$, z es un número real. Si A y B son matrices definidas positivas, entonces cada $z \in \sigma(BA)$ es positivo ($z > 0$).*

(iv) *Si A es definida positiva, existe una única matriz triangular inferior G con los elementos de la diagonal positivos tal que $A = GG^H$ (Factorización de Cholesky de A).*

(v) *Si A es definida positiva, entonces A admite una única raíz cuadrada definida positiva denotada por $A^{1/2}$. Además, $A^{1/2}$ conmuta con A.*

De acuerdo con la sección 5.5 de [49] diremos que dos matrices cuadradas A y B son congruentes si existe una matriz no singular P tal que

$$A = P\,B\,P^H \quad .$$

La inercia de una matriz $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$, que se escribe InA, es una terna de enteros

$$InA = \{\,\pi(A)\,,\,\nu(A)\,,\,\delta(A)\,\}\,,$$

donde $\pi(A)$, $\nu(A)$ y $\delta(A)$ denotan el número de valores propios de A, contados según su multiplicidad algebraica , que yacen en el semiplano derecho abierto, en el semiplano izquierdo abierto y sobre el eje imaginario, respectivamente. Si A es una matriz hermítica, el número $\pi(A)$ (respectivamente, $\nu(A)$) simplemente denota el número de valores propios positivos (respectivamente, negativos) contados con sus multiplicidades. Además, $\delta(A)$ es igual al número de valores propios nulos de A, y entonces A es no singular si y solo si $\delta(A) = 0$. Nótese que si A es hermítica, entonces

$$\pi(A) + \nu(A) = rango\,A \quad .$$

TEOREMA 9 (Ley de inercia de Sylvester.) *[49, p.88] Matrices hermíticas congruentes tienen los mismos carácteres de inercia.*

Ahora vamos a introducir el concepto de funcional matricial de momentos bilineal conjugado y la correspondiente ortogonalidad.

DEFINICIÓN 3 *Sea* $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de matrices en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *. Un funcional matricial de momentos bilineal conjugado* $\mathcal{L}$ *es una función*

$$\mathcal{L} : \mathcal{P}[x] \times \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$$

tal que si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$ *,* $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} B_j x^j$ *, con* $A_i \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *,* $B_j \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *,* $1 \leq i \leq n$ *,* $1 \leq j \leq m$ *, entonces*

$$\mathcal{L}[P(x), Q(x)] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_i\,\Omega_{i+j} B_j^H \quad . \tag{2.1}$$

La matriz Ω_n *se denomina momento matricial de orden n. El funcional matricial de momentos bilineal conjugado* $\mathcal{L}$ *se dice que es* **hermítico** *si cada momento matricial* Ω_n *es una matriz hermítica para* $n \geq 0$ *. En lo que sigue, "funcional matricial de momentos bilineal conjugado"lo abreviaremos "FMMBC".*

Las siguientes propiedades se prueban fácilmente de la definición 3:

(i)

$$\mathcal{L}[x^n I, x^m I] = \mathcal{L}[x^m I, x^n I] = \Omega_{n+m}\,,\ n, m \geq 0\,.$$

$$\mathcal{L}[xP(x), Q(x)] = \mathcal{L}[P(x), xQ(x)]\,, \qquad \textit{para} \qquad P(x),\, Q(x) \in \mathcal{P}[x]\,.$$

(ii) Si $\{P_i(x)\}_{i=1}^{m}$, $\{Q_i(x)\}_{i=1}^{m}$, están en $\mathcal{P}[x]$ y $\{T_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{C}^{r\times r}$, entonces

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^{m} T_i P_i(x), Q(x)\right] = \sum_{i=1}^{m} T_i \mathcal{L}[P_i(x), Q(x)] \quad ,$$

$$\mathcal{L}[P(x), \sum_{i=1}^{m} T_i Q_i(x)] = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}[P(x), Q_i(x)] T_i^H \quad .$$

(iii) Si $\mathcal{L}$ es hermítico, entonces

$$\mathcal{L}[P(x), Q(x)] = (\mathcal{L}[Q(x), P(x)])^H \ ,$$

para cada $P(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}[x]$.

EJEMPLO 6 *Sea* $W(x)$ *una función integrable con valores en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *para x en el intervalo [a,b], y sea* $\mathcal{L} : \mathcal{P}[x] \times \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$ *definido por*

$$\mathcal{L}[P(x), Q(x)] = \int_a^b P(x)W(x)Q(x)^H \, dx \quad .$$

Entonces $\mathcal{L}$ *es un funcional matricial de momentos bilineal conjugado, con sucesión de momentos matriciales* $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ *definida por*

$$\Omega_n = \int_a^b x^n W(x) \, dx \ , \quad n \geq 0 \quad .$$

Si $W(x)$ *es hermítica, es decir,* $W(x) = (W(x))^H$ *para cada* $x \in [a,b]$ *, entonces* $\mathcal{L}$ *es hermítico.*

EJEMPLO 7 *Sea* $\mathcal{L}_i : \mathcal{P}[x] \longrightarrow C^{r\times r}$ *para* $i = 1, 2$ *, dos funcionales matriciales de momentos lineales tales que*

$$\mathcal{L}_i(\, A\, P(x)\,) \ = \ A\, \mathcal{L}_i(\, P(x)\,) \ , \ A \in \mathbb{C}^{r\times r} \ , \ P(x) \in \mathcal{P}[x] \ , \ i = 1, 2 \quad .$$

Entonces $\mathcal{L} : \mathcal{P}[x] \times \mathcal{P}[x] \longrightarrow C^{r\times r}$ *definido por*

$$\mathcal{L}[P(x), Q(x)] = \mathcal{L}_1(\, P(x)\,) \ (\, \mathcal{L}_2\, (\, Q(x)\,)\,)^H \ ,$$

para $P(x), Q(x) \in \mathcal{P}[x]$ *, es un FMMBC.*

DEFINICIÓN 4 *Una sucesión* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *de elementos de* $\mathcal{P}[x]$ *se dice que es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales respecto a un funcional matricial de momentos bilineal conjugado* $\mathcal{L}$ *si para todos los enteros no negativos m y n,*

(i) $P_n(x)$ *es un polinomio matricial de grado n,*

(ii) $\mathcal{L}[P_n(x), P_m(x)] = \mathcal{L}[P_m(x), P_n(x)] = 0$ *si* $n \neq m$*,*

(iii) $\mathcal{L}[P_n(x), P_n(x)]$ *es invertible en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *.*

Si $\mathcal{L}[P_n(x), P_n(x)] = I$ *para* $n \geq 0$ *y* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales, entonces la llamaremos sucesión de polinomios matriciales* **ortonormales**. *En lo que sigue, "Sucesión de polinomios matriciales ortogonales"lo abreviaremos por "SPOM".*

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria para que una sucesión de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ sea una SPOM. Esta prueba es fácil a partir de la definición 4 y de la prueba del teorema 1 del capítulo 1.

TEOREMA 10 *Si* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *es una SPOM para un FMMBC* $\mathcal{L}$ *y* $P_n(x) = \sum_{i=0}^n A_{ni}x^i$ *, con* $A_{ni} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *, entonces* Ω_0 *y* A_{nn} *son matrices invertibles en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *para* $n \geq 0$ *.*

Del teorema 10 y de la demostración del teorema 2 del capítulo 1 es fácil demostrar que:

TEOREMA 11 *Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM y sea $P(x)$ un polinomio matricial de grado n. Entonces existen matrices $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ en $C^{r\times r}$, determinadas univocamente, tales que*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i P_i(x) \quad . \tag{2.2}$$

Además, si el coeficiente director C_n de P(x) es invertible, entonces Λ_n también es una matriz invertible.

El siguiente resultado nos proporciona algunas equivalencias de la definición 4 y puede probarse siguiendo la demostración del corolario 1 del capítulo 1.

TEOREMA 12 *Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC hermítico y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathcal{P}[x]$ tal que la matriz coeficiente director de $P_n(x)$ es invertible. Entonces equivalen:*

- **(i)** $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *es una SPOM respecto a* $\mathcal{L}$,
- **(ii)** $\mathcal{L}[P(x), P_n(x)] = 0$ *para cada polinomio matricial* $P(x)$ *de grado* $m < n$ *mientras que* $\mathcal{L}[P(x), P_n(x)]$ *es invertible si* $m = n$ *y el coeficiente director de* $P(x)$ *es invertible* ,
- **(iii)** $\mathcal{L}[\, Ix^n, P_m(x)\,] = \delta_{m\,n} K_n$ *donde* K_n *es una matriz invertible en* $\mathbb{C}^{r\times r}$, *para todo* $m \geq 0\,,\ \ n \geq 0\,.$

De los teoremas 11 y 12 es fácil demostrar las siguientes consecuencias:

COROLARIO 2 *Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM para un FMMBC hermítico $\mathcal{L}$ y sea $P(x) \in \mathcal{P}[x]$ un polinomio matricial de grado n. Entonces se sigue que*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i P_i(x)\,, \ \ \Lambda_i = \mathcal{L}[P(x), P_i(x)]\,(\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)])^{-1} \quad . \tag{2.3}$$

COROLARIO 3 *Si $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ son dos SPOM para un FMMBC hermítico $\mathcal{L}$, entonces existen matrices invertibles $C_n\,,\ \ n \geq 0\,,$ tales que*

$$Q_n(x) = C_n P_n(x)\,, \ \ n \geq 0 \quad . \tag{2.4}$$

El corolario anterior muestra que una SPOM $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ está determinada univocamente si se satisface una condición adicional que nos fije la matriz coeficiente director de cada $P_n(x)$. Una SPOM en la que la matriz coeficiente director de cada polinomio matricial $P_n(x)$ es la matriz identidad en $C^{r\times r}$ diremos que es una SPOM mónica.

Para una presentación más clara de los siguientes resultados introducimos la siguiente matriz de Haenkel por bloques en $C^{r(n+1)\times r(n+1)}$ asociada a la sucesión de matrices $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$:

$$\psi_n = \begin{bmatrix} \Omega_0 & \Omega_1 & \dots & \Omega_n \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Omega_n & \Omega_{n+1} & \dots & \Omega_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

TEOREMA 13 *Sea $\mathcal{L}$ FMMBC hermítico con sucesión de momentos matriciales $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ en $C^{r\times r}$. Una condición necesaria y suficiente para que exista una SPOM para $\mathcal{L}$ es que la matriz ψ_n, definida por (2.5), sea invertible para $n \geq 0$.*
<u>Demostración:</u> La demostración de la necesidad de la condición es análoga a la presentada en el teorema 3 del capítulo 1, para el caso de funcionales matriciales de momentos lineales. Veamos la suficiencia.
Por existir sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ respecto a $\mathcal{L}$, imponiendo la condición

$$\mathcal{L}(Ix^m, P_n(x)) = \delta_{n,m} K_n \quad , \quad m \leq n \quad ,$$

a la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ dados por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k}\, x^k \, , \quad n \geq 1 \quad ,$$

obtenemos el sistema lineal por bloques:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} A_{n\,0}\,\Omega_0 & + & A_{n\,1}\,\Omega_1 & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_n & = & 0 \\ A_{n\,0}\,\Omega_1 & + & A_{n\,1}\,\Omega_2 & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_{n+1} & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ A_{n\,0}\,\Omega_{n-1} & + & A_{n\,1}\,\Omega_n & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_{2n-1} & = & 0 \\ A_{n\,0}\,\Omega_n & + & A_{n\,1}\,\Omega_{n+1} & + & \cdots & + & A_{n\,n}\,\Omega_{2n} & = & K_n \end{array}\right\}$$

o bien

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{n\,0} & A_{n\,1} & \cdots & A_{n\,n} \end{array}\right] \varphi_n = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & K_n \end{array}\right] \quad , \quad n \geq 1 \quad . \tag{2.6}$$

La invertibilidad de φ_n quedará demostrada si demostramos que el sistema (2.6) admite solución única para cada matriz invertible K_n.
Supongamos que existen dos sucesiones de polinomios matriciales $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$, ortogonales respecto a $\mathcal{L}$, verificando

$$\mathcal{L}(Ix^n, P_n(x)) = K_n \quad , \tag{2.7}$$

y

$$\mathcal{L}(Ix^n, Q_n(x)) = K_n \quad . \tag{2.8}$$

Entonces, por el corolario 3 se verifica que

$$P_n(x) = C_n Q_n(x) \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

y por (2.7) y (2.8), se sigue que $C_n = I$ para todo n. De este modo, la solución del sistema (2.6) es única y la matriz φ_n es invertible. $\square$

2.3. Fórmula fundamental de recurrencia.

Una de las características más importantes de los polinomios matriciales ortogonales es el hecho de que cada tres polinomios matriciales consecutivos cumplen una relación muy simple que se deriva del siguiente resultado.

TEOREMA 14 (Fórmula fundamental de recurrencia) *Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC hermítico y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM mónica respecto a $\mathcal{L}$. Entonces existen matrices C_n , Λ_n en $\mathbb{C}^{r\times r}$ con Λ_n invertible para $n \geq 0$, tales que*

$$P_n(x) = (Ix - C_n)\, P_{n-1}(x) - \Lambda_n P_{n-2}(x)\,, \quad n \geq 1 \quad , \tag{2.9}$$

donde $P_{-1}(x) \equiv 0$, y Λ_n, C_n están univocamente determinadas por $\mathcal{L}$.

<u>Demostración:</u> Como $xP_n(x)$ es un polinomio matricial de grado $n+1$, por el corolario 2, podemos escribir

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} A_{n\,k} P_k(x)\,, \quad A_{n\,k} = \mathcal{L}[xP_n(x), P_k(x)] \left(\mathcal{L}[P_k(x), P_k(x)]\right)^{-1} \quad , \tag{2.10}$$

siendo $A_{n\,n+1}$ invertible. De la definición 3, y de la propiedad (i) de $\mathcal{L}$, podemos escribir

$$\mathcal{L}[P_k(x), xP_n(x)] = \sum_{j=0}^{n+1} \mathcal{L}[P_k(x), P_j(x)] A_{n\,j}^H = \mathcal{L}[P_k(x), P_k(x)] A_{n\,k}^H \quad , \tag{2.11}$$

$$\mathcal{L}[P_k(x), xP_n(x)] = \mathcal{L}[xP_k(x), P_n(x)] \quad . \tag{2.12}$$

Por el teorema 12, tenemos

$$\mathcal{L}[xP_k(x), P_n(x)] = 0 \quad , \quad si \quad k+1 < n \quad , \tag{2.13}$$

y de (2.10)-(2.13), tenemos $A_{n\,k} = 0$ para $k < n-1$, y

$$xP_n(x) = A_{n\,n-1} P_{n-1}(x) + A_{n\,n} P_n(x) + A_{n\,n+1} P_{n+1}(x)\,, \quad n \geq 1 \quad . \tag{2.14}$$

Sustituyendo n por $n-1$, tomando $P_{-1}(x) \equiv 0$ y teniendo en cuenta que $A_{n\,n+1} = I$ porque la sucesión $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es mónica, (2.14) puede escribirse en la forma

$$P_n(x) = (Ix - A_{n-1\,n-1}) P_{n-1}(x) - A_{n-1\,n-2} P_{n-2}(x)\,, \quad n \geq 2 \quad . \tag{2.15}$$

Así, (2.9) es cierta tomando $C_n = A_{n-1\,n-1}$ y $\Lambda_n = A_{n-1\,n-2}$.
Vamos a demostrar ahora que Λ_n es invertible para $n \geq 2$. De (2.15) y del teorema 12 se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[Ix^{n-2}, P_n(x)] \\ &= \mathcal{L}[Ix^{n-2}, xP_{n-1}(x)] - \mathcal{L}[Ix^{n-2}, P_{n-1}(x)]C_n^H - \mathcal{L}[Ix^{n-2}, P_{n-2}(x)]\Lambda_n^H \\ &= \mathcal{L}[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)] - \mathcal{L}[Ix^{n-2}, P_{n-2}(x)]\Lambda_n^H \quad . \end{aligned}$$

De aquí,

$$\mathcal{L}[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)] = \mathcal{L}[Ix^{n-2}, P_{n-2}(x)]\Lambda_n^H \, , \quad n \geq 2 \quad . \tag{2.16}$$

Por el teorema 12, la matriz $\mathcal{L}[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)]$ es invertible y de (2.16) se tiene que Λ_n es invertible para $n \geq 2$. Tomando $C_1 = -P_1(0)$ y Λ_1 cualquier matriz arbitraria, la fórmula (2.9) se satisface también para $n = 1$. La unicidad de las matrices Λ_n $(n \geq 2)$ y C_n , $n \geq 1$ está garantizada por la unicidad de la representación de $xP_n(x)$ dada por (2.10). $\square$

COROLARIO 4 *Sea ψ_n la matriz de Haenkel dada por (2.5) y supongamos se satisfacen las condiciones dadas en el teorema 14. Si Λ_n y C_n son las matrices dadas en el teorema 14, entonces se cumple:*

(i) $| \Lambda_{n+1}^H | = \frac{|\psi_{n-2}|\,|\psi_n|}{|\psi_{n-1}|^2} \quad , \quad n \geq 2 \quad ,$

(ii) $\Lambda_n \Lambda_{n-1} \ldots \Lambda_2 = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right]^H \mathcal{L}\left[I, P_0(x)\right]^{-H}$ *y si* $\Lambda_1 = \mathcal{L}\left[I, P_0(x)\right]^H \Rightarrow$
$\Lambda_n \Lambda_{n-1} \ldots \Lambda_2 \Lambda_1 = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right]^H \quad ,$

(iii) $C_n = \mathcal{L}\left[P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)\right]^{-H} \mathcal{L}\left[P_{n-1}(x), IxP_{n-1}(x)\right]^H \quad ,$

(iv) *El coeficiente de x^{n-1} en $P_n(x)$ es* $-\left(C_1 + C_2 + \cdots + C_n\right) \quad .$

<u>Demostración:</u> Del teorema 14 se tiene que

$$\mathcal{L}\left[Ix^n, P_n(x)\right] = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right] \Lambda_{n+1}^H \quad .$$

Trabajando como en la prueba del teorema 4 del capítulo 1, tomando determinantes en esta última expresión obtenemos (i). A la vez, sustituyendo sucesivamente en

$$\mathcal{L}\left[Ix^n, P_n(x)\right] = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right] \Lambda_{n+1}^H \quad ,$$

se sigue (ii). Calculando $\mathcal{L}\left[P_{n-1}(x), P_n(x)\right]$ obtenemos

$$C_n^H = \mathcal{L}\left[P_{n-1}(x), IxP_{n-1}(x)\right] \left(\mathcal{L}\left[P_{n-1}, P_{n-1}(x)\right]\right)^{-1} \quad ,$$

de donde se obtiene (iii).
Ahora, si D_n denota el coeficiente de x^{n-1} en $P_n(x)$, igualando coeficientes en la fórmula obtenida en el teorema 14 obtenemos

$$D_n = D_{n-1} - C_n \quad .$$

Sustituyendo sucesivamente obtenemos (iv). $\square$

En muchas aplicaciones, sin embargo, los polinomios ortogonales no son mónicos ni están necesariamente normalizados. En tales casos, las fórmula de recurrencia obtenida en (2.9) no es válida. Veamos una fórmula de recurrencia que sea válida en todos los casos en los que $\mathcal{L}$ sea hermítico.
Procediendo como en la demostración del teorema 14 , llegamos a

$$xP_n(x) = A_{n\,n+1}P_{n+1}(x) + A_{n\,n}P_n(x) + A_{n\,n-1}P_{n-1}(x)\,, \;\; n \geq 2 \quad ,$$

donde $A_{n\,n+1}$ es una matriz invertible. Cambiando n por $n-1$, agrupando términos, tenemos

$$A_nP_n(x) = (Ix - B_n)\,P_{n-1}(x) - C_nP_{n-2}(x) \quad , n \geq 1 \quad , \tag{2.17}$$

con

$$P_{-1}(x) = 0 \quad , \quad P_0(x) = I \quad ,$$

A_n invertible $\forall n \geq 1$ y C_1 arbitraria. Además, como $\mathcal{L}\left[Ix^{n-2}, A_nP_n(x)\right] = 0$, se tiene

$$\mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right] = \mathcal{L}\left[Ix^{n-2}, P_{n-2}(x)\right] C_n^H$$

de donde C_n es invertible $\forall n > 1$. Realizando los productos consecutivos, tenemos

$$C_nC_{n-1}\ldots C_2 = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right]^H \mathcal{L}\left[I, P_0(x)\right]^{-H} \quad .$$

Tomando $C_1 = \mathcal{L}\left[I, P_0(x)\right]^H$, tenemos

$$C_nC_{n-1}\ldots C_1 = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right]^H \quad ,$$

expresión análoga a la obtenida en el corolario 4.
Ahora, si l_n denota el término director invertible de $P_n(x)$, de la relación de recurrencia (2.17) se deduce que

$$A_nl_n = l_{n-1} \quad .$$

De la relación $\mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right] = \mathcal{L}\left[Ix^{n-2}, P_{n-2}(x)\right] C_n^H$, deducimos que como Ix^{n-1} y Ix^{n-2} son polinomios matriciales de grados $n-1$ y $n-2$ respectivamente, entonces, por el corolario 2 , se pueden escribir de la forma

$$Ix^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_kP_k(x) \quad , \quad \alpha_k \in C^{r\times r} \;,\; k = 0, \ldots, n-1 \quad ,$$

$$Ix^{n-2} = \sum_{l=0}^{n-2} \beta_lP_l(x) \quad , \quad \beta_l \in C^{r\times r} \;,\; l = 0, \ldots, n-2 \quad ,$$

y como $K_n = \mathcal{L}\left[P_n(x), P_n(x)\right]$, se tiene

$$\alpha_{n-1}K_{n-1} = \beta_{n-2}K_{n-2}C_n^H \quad ,$$

pero $\alpha_{n-1} = l_{n-1}^{-1}$ y $\beta_{n-2} = l_{n-2}^{-1}$, luego tenemos

$$C_n^H = K_{n-2}^{-1} l_{n-2} l_{n-1}^{-1} K_{n-1} \quad .$$

Como las matrices K_n son hermíticas para todo $n \in N$, se sigue que

$$C_n = K_{n-1} l_{n-1}^{-H} l_{n-2}^{H} K_{n-2}^{-1} = K_{n-1}\left(l_{n-2} l_{n-1}^{-1}\right)^H K_{n-2}^{-1}$$

$$= K_{n-1} A_{n-1}^H K_{n-2}^{-1} \quad .$$

Esta expresión es análoga a la dada en [68, p.42] para el caso escalar. En el caso de que los polinomios $P_n(x)$ están normalizados, y entonces $K_n = I$, tenemos $C_n = A_{n-1}^H$, con lo que la fórmula de recurrencia (2.17) quedará de la forma

$$A_n P_n(x) = \left(Ix - B_n\right) P_{n-1}(x) - A_{n-1}^H P_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad .$$

En el caso de que los polinomios $P_n(x)$ sean mónicos, y entonces $A_n = I$, la fórmula de recurrencia (2.17) quedará de la forma

$$P_n(x) = \left(Ix - B_n\right) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad .$$

que era la demostrada en el teorema 14.

Queda demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 15 *Sea $\{P_n(x)\}$ una SPOM para $\mathcal{L}$ un funcional matricial de momentos bilineal conjugado hermítico, sea $K_n = \mathcal{L}\left[P_n(x), P_n(x)\right]$ y l_n la matriz término director de $P_n(x)$, entonces se tiene:*

(i) *Los polinomios $P_n(x)$ verifican una relación de recurrencia del tipo:*

$$A_n P_n(x) = \left(Ix - B_n\right) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x) \quad , n \geq 1 \quad ,$$

Donde $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = I$, A_n es invertible para $n \geq 1$, C_n es invertible para $n > 1$, y además $C_n = K_{n-1} A_{n-1}^H K_{n-2}^{-1}$, $n > 1$, con C_1 arbitraria. Y si $C_1 = \mathcal{L}\left[I, P_0(x)\right]^H$, entonces

$$C_n C_{n-1} \ldots C_1 = \mathcal{L}\left[Ix^{n-1}, P_{n-1}(x)\right]^H \quad .$$

(ii) Si los polinomios están normalizados y no son mónicos, *es decir, $K_n = I$, entonces verifican una relación de recurrencia del tipo*

$$A_n P_n(x) = \left(Ix - B_n\right) P_{n-1}(x) - A_{n-1}^H P_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad ,$$

donde $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = I$, donde A_n es invertible para $n \geq 1$.

(iii) **Si los polinomios son mónicos, no necesariamente normalizados**, *verifican la relación de recurrencia dada por el teorema 14.*

2.4. Fórmula de Christoffel-Darboux.

NOTA 9 *La fórmula de Christoffel-Darboux se encuentra demostrada para casos particulares de sucesiones de polinomios ortogonales respecto a un funcional de tipo integral en [58] y [65], así como algunas de sus propiedades en [65], donde la denomina "núcleo reproductivo". Sin embargo, ninguna demostración para una sucesión de polinomios ortogonales matriciales respecto un funcional arbitrario ha sido presentada.*

TEOREMA 16 (Fórmula de Christoffel-Darboux) *Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC hermítico y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM no mónica pero normalizada, que verifica la relación de recurrencia dada por el teorema 15. Entonces, si B_n es hermítica para todo n, para cualquier $m \in N$ se cumple:*

$$\sum_{n=0}^{m} P_n^H(t)P_n(x) = \left(\frac{1}{(t-x)}\right)\left\{P_{m+1}^H(t)A_{m+1}^H P_m(x) - P_m^H(t)A_{m+1}P_{m+1}(x)\right\} \quad . \tag{2.18}$$

Demostración: De la fórmula de recurrencia dada para el caso normalizado pero no mónico dada por el teorema 15, tenemos

$$xP_n(x) = A_{n+1}P_{n+1}(x) + B_{n+1}P_n(x) + A_n^H P_{n-1}(x) \quad , \tag{2.19}$$

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_{n+1}P_n(t) + A_n^H P_{n-1}(t) \quad , \tag{2.20}$$

tomando hermíticas en (2.20), obtenemos

$$tP_n^H(t) = P_{n+1}^H(t)A_{n+1}^H + P_n^H(t)B_{n+1} + P_{n-1}^H(t)A_n \quad . \tag{2.21}$$

Postmultiplicando (2.21) por $P_n(x)$ y premultiplicando (2.19) por $P_n^H(t)$ y restando, obtenemos

$$(t-x)P_n^H(t)P_n(x) = \left[P_{n+1}^H(t)A_{n+1}^H P_n(x) - P_n^H(t)A_n^H P_{n-1}(x)\right] +$$

$$+ \left[P_{n-1}^H(t)A_n P_n(x) - P_n^H(t)A_{n+1}P_{n+1}(x)\right] \quad . \tag{2.22}$$

Llamando

$$K_n(t,x) = P_{n+1}^H(t)A_{n+1}^H P_n(x) \quad , \quad K_{-1}(t,x) = 0 \quad ,$$

y

$$S_n(t,x) = P_n^H(t)A_{n+1}P_{n+1}(x) \quad , \quad S_{-1}(t,x) = 0 \quad ,$$

podemos escribir

$$(t-x)P_n^H(t)P_n(x) = [K_n(t,x) - K_{n-1}(t,x)] + [S_{n-1}(t,x) - S_n(t,x)]$$

y sumando desde $n = 0$ hasta $n = m$, obtenemos (2.18). $\square$

COROLARIO 5 *Con las hipótesis del teorema 16 , se verifica*

$$P_{m+1}^H(x)A_{m+1}P_m(x) = P_m^H(x)A_{m+1}P_{m+1}(x), \quad \forall x \in R \tag{2.23}$$

y

$$\sum_{n=0}^{m} P_n^H(x)P_n(x) = \left(P'_{m+1}(x)\right)^H A_{m+1}^H P_m(x) - \left(P'_m(x)\right)^H A_{m+1}P_{m+1} \quad . \tag{2.24}$$

<u>Demostración:</u> Por el teorema 16, tenemos

$$(t-x)\sum_{n=0}^{m} P_n^H(t)P_n(x) = \left\{P_{m+1}^H(t)A_{m+1}^H P_m(x) - P_m^H(t)A_{m+1}P_{m+1}(x)\right\} \quad ,$$

haciendo $t = x$, obtenemos

$$0 = P_{m+1}^H(x)A_{m+1}^H P_m(x) - P_m^H(x)A_{m+1}P_{m+1}(x) \quad ,$$

lo que prueba (2.23).
Ahora, por (2.23), escribamos la fórmula (2.18) de la forma

$$(t-x)\sum_{n=0}^{m} P_n^H(t)P_n(x)$$

$$= \left[P_{m+1}^H(t) - P_{m+1}(x)\right] A_{m+1}^H P_m(x) - \left[P_m^H(t) - P_m^H(x)\right] A_{m+1}P_{m+1}(x)$$

$$+P_{m+1}^H(x)A_{m+1}^H P_m(x) - P_m^H(x)A_{m+1}P_{m+1}(x) \quad ,$$

que puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{m} P_n^H(t)P_n(x)$$

$$= \frac{\left[P_{m+1}^H(t) - P_{m+1}^H(x)\right]}{t-x} A_{m+1}^H P_m(x)$$

$$- \frac{\left[P_m^H(t) - P_m^H(x)\right]}{t-x} A_{m+1}P_{m+1}(x) \quad .$$

Tomando límites cuando $t \to x$ tenemos (2.24). $\square$

2.5. Funcionales matriciales de momentos bilineales conjugados simétricos.

DEFINICIÓN 5 *Diremos que un FMMBC $\mathcal{L}$ es* **simétrico** *si todos sus momentos Ω_n de orden impar son cero.*

LEMA 1 *. Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC simétrico y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM respecto a $\mathcal{L}$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left[P_m(-x), P_n(-x)\right] = \mathcal{L}\left[P_m(x), P_n(x)\right] \quad , \quad \forall m, n \in N \quad . \tag{2.25}$$

Demostración: Consideremos

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} A_{mi} x^i \quad ,$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} A_{nj} x^j \quad ,$$

dos polinomios matriciales de la SPOM, entonces

$$P_m(-x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i A_{mi} x^i \quad ,$$

$$P_n(-x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j A_{nj} x^j \quad ,$$

y por la definición 3, tenemos

$$\mathcal{L}\left[P_m(-x), P_n(-x)\right] = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i A_{mi} \left(\sum_{j=0}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right)$$

$$= \sum_{i=0(par)}^{m} (-1)^i A_{mi} \left(\sum_{j=0(par)}^{n} (-1)^j \Omega_{j+i} A_{nj}^H + \sum_{j=0(impar)}^{n} (-1)^j \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right)$$

$$+ \sum_{i=0(impar)}^{m} (-1)^i A_{mi} \left(\sum_{j=0(par)}^{n} (-1)^j \Omega_{j+i} A_{nj}^H + \sum_{j=0(impar)}^{n} (-1)^j \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right)$$

$$= \sum_{i=0(par)}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0(par)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right) + \sum_{i=0(impar)}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0(impar)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right) \quad , \tag{2.26}$$

pues los momentos Ω_{i+j} son nulos si tienen índice impar. Por otra parte

$$\mathcal{L}\left[P_m(x), P_n(x)\right] = \sum_{i=0}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right)$$

$$= \sum_{i=0(par)}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0(par)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H + \sum_{j=0(impar)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right)$$

$$+ \sum_{i=0(impar)}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0(par)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H + \sum_{j=0(impar)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right)$$

$$= \sum_{i=0(par)}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0(par)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right) + \sum_{i=0(impar)}^{m} A_{mi} \left(\sum_{j=0(impar)}^{n} \Omega_{j+i} A_{nj}^H \right) \quad , \qquad (2.27)$$

de (2.26) y (2.27) se sigue (2.25). □

TEOREMA 17 *Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC hermítico y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM mónica respecto a $\mathcal{L}$. Entonces son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{L}$ es simétrico,*

(ii) *$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, para todo $n \in N$,*

(iii) *En la fórmula de recurrencia del teorema 14, $C_n = 0$, para todo $n \in N$.*

Demostración: (i) ⇒ (ii)
Dado que $P_n(-x)$ es un polinomio matricial de grado n y coeficiente director $(-1)^n I$, $\{P_n(-x)\}_{n\geq 0}$ es un SPOM para $\mathcal{L}$ por (2.25) y por el corolario 3 del teorema 12, existen matrices invertibles C_n en $C^{r\times r}$ tales que

$$P_n(-x) = C_n P_n(x) \quad ,$$

e igualando términos directores en esta última expresión, se sigue que

$$C_n = (-1)^n I \quad ,$$

lo que demuestra (ii). □
(ii) ⇒ (iii)
La sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, por el teorema 15, verifica la relación de recurrencia :

$$P_n(x) = (Ix - C_n) P_{n-1}(x) - \Lambda_n P_{n-2}(x) \quad , \qquad (2.28)$$

cambiando x por $-x$ en (2.28) y multiplicando todos los términos por $(-1)^n$, queda

$$(-1)^n P_n(-x) = (Ix + C_n)(-1)^{n-1} P_{n-1}(-x) - (-1)^{n-2} \Lambda_n P_{n-2}(-x) \quad . \qquad (2.29)$$

Si $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ y tomamos la sucesión de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$, dada por

$$Q_n(x) = (-1)^n P_n(x) \quad ,$$

sustituyendo en (2.29), comprobamos que los polinomios $Q_n(x)$ verifican la relación de recurrencia

$$Q_n(x) = (Ix + C_n)\, Q_{n-1}(x) - \Lambda_n Q_{n-2}(x) \tag{2.30}$$

Por (ii), $P_n(x) = Q_n(x)$, y restando (2.28) y (2.30), obtenemos

$$2C_n P_{n-1}(x) = 0 \quad ,$$

luego

$$0 = \mathcal{L}\,[2C_n P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)] = 2C_n \mathcal{L}\,[P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)] = 2C_n K_{n-1} \quad ,$$

como K_{n-1} es invertible, $C_n = 0$, con lo que (iii) queda demostrado. $\square$
(iii) $\Rightarrow$ (ii)
Si $C_n = 0$, los polinomios $Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ verifican la misma fórmula de recurrencia fundamental que los $P_n(x)$, (2.28), y $Q_{-1} = P_{-1}$, luego $Q_n(x) = P_n(x)$. $\square$
(ii) $\Rightarrow$ (i)
Como $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $P_n(x)$ solo tiene potencias pares de x cuando n es par y potencias impares de x cuando n es impar. Procedamos por inducción:
Como $P_1(x) = Ix$, se tiene

$$0 = \mathcal{L}\,[I, P_1(x)] = \Omega_1 \quad , \quad \Omega_1 = 0 \quad .$$

Ahora, si $P_3(x) = Ix^3 + Ax$, entonces

$$0 = \mathcal{L}\,[I, P_3(x)] = \Omega_3 + A\Omega_1 A^H \quad , \quad \Omega_3 = 0 \quad .$$

Supongamos que $\Omega_k = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Como $P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} A_{2j+1} x^{2j+1}$, se sigue que

$$0 = \mathcal{L}\,[I, P_{2n+1}(x)] = \sum_{j=0}^{n} \Omega_{2j+1} A_{2j+1}^H = \Omega_{2n+1} A_{2n+1}^H = \Omega_{2n+1} \quad ,$$

pues $A_{2n+1} = I$. Así $\Omega_{2n+1} = 0$ y por la definición 5, $\mathcal{L}$ es simétrico . $\square$

2.6. Polinomios pseudo-ortogonales. Teorema de Favard. Polinomios de Laguerre y de Hermite matriciales.

DEFINICIÓN 6 . *Sea* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de polinomios matriciales en* $\mathcal{P}[x]$ *y sea* $\mathcal{L}$ *un funcional matricial de momentos bilineal conjugado. Diremos* *que* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión pseudo-ortogonal respecto a* $\mathcal{L}$ *si*

(i) $P_n(x)$ *es un polinomio matricial de grado n,*

(ii) $\mathcal{L}[P_n(x), P_n(x)]$ *es invertible en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *para* $n \geq 0$ *,*

(iii) $\mathcal{L}[P_m(x), P_n(x)] = 0$ *si* $m < n$ *.*

Nótese que si $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión pseudo-ortogonal de polinomios matriciales con respecto a un funcional matricial de momentos bilineal hermítico $\mathcal{L}$, entonces de la propiedad (iii) de los funcionales matriciales de momentos bilineales, se sigue que

$$\mathcal{L}\,[\,P_n(x)\,,\,P_m(x)\,] \;=\; \mathcal{L}\,[P_m(x)\,,\,P_n(x)]^H \;=\; 0 \quad ,$$

y $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es una SPOM para $\mathcal{L}$. El siguiente resultado es un teorema de Favard para el caso de funcionales matriciales de momentos bilineales.

TEOREMA 18 . *Sea* $\{\,A_n\,\}_{n\geq 1}$ *,* $\{\,B'_n\,\}_{n\geq 1}$ *y* $\{\,C'_n\,\}_{n\geq 1}$ *sucesiones de matrices en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *, donde* A_n *y* C'_n *son invertibles para* $n \geq 1$ *. Sea* $\{\,P_n(x)\,\}_{n\geq -1}$ *una sucesión de polinomios matriciales en* $\mathcal{P}[x]$ *tal que cada* $P_n(x)$ *es de grado n y satisfacen la relación de recurrencia de tres términos*

$$A_n\,P_n(x) \;=\; (Ix - B'_n)\,P_{n-1}(x) - C'_n\,P_{n-2}(x)\,, \quad n\geq 1\,, \;\; P_{-1}(x) \;=\; 0 \;\;, \;\; P_0(x) \;=\; I \;\; . \tag{2.31}$$

Entonces existe un único funcional matricial de momentos bilineal conjugado $\mathcal{L}$ *tal que* $\mathcal{L}[I,I] = C'_1$ *y* $\{\,P_n(x)\,\}_{n\geq -1}$ *es una sucesión de polinomios matriciales pseudo-ortogonales respecto a* $\mathcal{L}$ *.*

<u>Demostración:</u> De la definición de funcional matricial de momentos bilineal, será suficiente determinar la sucesión de matrices $\{\,\Omega_n\,\}_{n\geq 0}$. Definimos $\mathcal{L}[I,I] = \Omega_0 = C'_1$. Las matrices Ω_n para $n \geq 1$, las determinamos imponiendo la condición

$$\mathcal{L}[\,I\,, P_n(x)\,] \;=\; 0\,, \quad n\geq 1 \;\; . \tag{2.32}$$

Escribamos (2.31) de la forma

$$P_n(x) \;=\; \left(A_n^{-1}x \;-\; B_n\right)\,P_{n-1}(x) \;-\; C_n\,P_{n-2}(x)\,, \tag{2.33}$$

donde

$$B_n \;=\; A_n^{-1}\,B'_n\,, \quad C_n \;=\; A_n^{-1}\,C'_n \;\; . \tag{2.34}$$

De (2.33), tenemos $P_1(x) = \left(A_1^{-1}\,x \,-\, B_1\right)\,P_0(x) = A_1^{-1}\,x \,-\, B_1$ y la condición (2.32), para $n = 1$, implica que

$$0 \;=\; \mathcal{L}[\,I\,,\,P_1(x)\,] \;=\; \mathcal{L}[\,I\,,\,A_1^{-1}\,x \,-\, B_1\,] \;=\; \mathcal{L}[\,I\,,\,Ix\,]\,A_1^{-H} \;-\; \mathcal{L}[\,I\,,\,I\,] \;\; B_1^H \quad ,$$

de donde

$$\Omega_1 \;=\; \Omega_0\, B_1^H\, A_1^H \quad . \tag{2.35}$$

De (2.33), tenemos $P_2(x) \;=\; A_2^{-1}\, A_1^{-1}\, x^2 - \left(A_2^{-1}\, B_1 \;+\; B_2\, A_1^{-1} \right)\, x + (\, B_2\, B_1 \;-\; C_2\,)$ y la condición (2.32), para $n = 2$, implica que

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \mathcal{L}[I, P_2(x)] = \mathcal{L}\left[I, A_2^{-1} A_1^{-1} x^2 - \left(A_2^{-1} B_1 + B_2 A_1^{-1}\right) x + (B_2 B_1 - C_2)\right] \\ &=\; \mathcal{L}[I, I x^2]\, (A_1 A_2)^{-H} - \mathcal{L}[I, I x]\left(A_2^{-1} B_1 + B_2 A_1^{-1}\right)^H + \mathcal{L}[I, I]\, (B_2 B_1 - C_2)^H \quad , \end{aligned}$$

de donde

$$\Omega_2 \;=\; -\Omega_0\, (\, B_2\, B_1 \;-\; C_2\,)^H\, (\, A_1\, A_2\,)^H + \Omega_0\, B_1^H\, A_1^H\, \left(A_2^{-1}\, B_1 \;+\; B_2\, A_1^{-1} \right)^H (\, A_1\, A_2\,)^H \quad . \tag{2.36}$$

Supongamos de esta forma que $\Omega_0\,, \Omega_1\,, \cdots\, \Omega_m$ ya están determinadas, y ahora denotemos

$$P_m(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} A_{mi}\, x^i\,, \quad P_{m-1}(x) \;=\; \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-1\,i}\, x^i \quad . \tag{2.37}$$

De (2.33) y (2.37), podemos escribir

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) \;&=\; \left(A_{n+1}^{-1}\, x \;-\; B_{n+1} \right)\, P_n(x) \;-\; C_{n+1}\, P_{n-1}(x) \\ &=\; A_{n+1}^{-1}\, A_{nn}\, x^{n+1} \;+\; (A_{n\,n-1} \;-\; B_{n+1}\, A_{nn}\,)\; x^n \\ &+\; \sum_{i=1}^{n-1} (\, A_{n\,i-1}\, B_{n+1}\, A_{n\,i} \;-\; C_{n+1}\, A_{n-1\,i})\; x^i \;-\; (\, B_{n+1}\, A_{n\,0} \;+\; C_{n+1}\, A_{n-1\,0}\,) \quad . \end{aligned}$$

Despejando de las últimas condiciones e imponiendo que $\mathcal{L}[\, I\,,\, P_{n+1}(x)\,] \;=\; 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{-1}\, A_{n\,n}\, \Omega_{n+1} \;&=\; \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i\, (A_{n\,i-1} \;-\; B_{n+1}\, A_{n\,i} \;-\; C_{n+1}\, A_{n-1\,i})^H \\ &-\; \Omega_n\, (A_{n\,n-1} \;-\; B_{n+1}\, A_{nn})^H \;+\; \Omega_0\, (B_{n+1}\, A_{n\,0} \;+\; C_{n+1}\, A_{n-1\,0})^H \quad . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Nótese que de (2.31), la matriz coeficiente director A_{nn} de $P_n(x)$ es invertible y de (2.38) tenemos

$$\Omega_{n+1} \;=\; A_{n\,n}^{-1}\, A_{n+1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i \,(A_{n\,i-1} \,-\, B_{n+1}\, A_{n\,i} \,-\, C_{n+1}\, A_{n-1\,i})^H \right.$$

$$\left. -\; \Omega_n \;(A_{n\,n-1} \,-\, B_{n+1}\, A_{nn})^H \,+\, \Omega_0\,(B_{n+1}\, A_{n\,0} \,+\, C_{n+1}\, A_{n-1\,0})^H \right] \quad . \tag{2.39}$$

De las propiedades de los momentos funcionales bilineales matriciales tenemos

$$\Omega_{n+s} \,=\, \mathcal{L}\,[\, I\, x^n \,, I\, x^s \,] \,=\, \mathcal{L}\left[\, I \,,\, I\, x^{n+s} \right] \,=\, \mathcal{L}\left[\, I\, x^{n+s} \,,\, I \right] \quad ,$$

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^s \,,\, I\, x^k\, P(x) \right] \,=\, \mathcal{L}\left[\, I\, x^{s+k} \,,\, P(x) \right] \,, \qquad P(x) \in \mathcal{P}[x] \quad .$$

Para demostrar que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es pseudo-ortogonal con respecto a $\mathcal{L}$, debemos demostrar que

$$\mathcal{L}\,[\, P_k(x) \,,\, P_n(x) \,] \,=\, 0 \,, \quad k < n \quad . \tag{2.40}$$

De (2.31), podemos escribir

$$x\, A_{n+1}^{-1}\, P_n(x) \,=\, P_{n+1}(x) \,+\, B_{n+1}\, P_n(x) \,+\, C_{n+1}\, P_{n-1}(x) \,, \quad n \geq 0 \quad , \tag{2.41}$$

y de (2.41) y (2.32), se sigue

$$\mathcal{L}\left[\, I \,,\, x\, A_{n+1}^{-1}\, P_n(x) \right] \,=\, 0 \,, \quad n \geq 0 \quad ,$$

$$\mathcal{L}\,[\, I\, x \,,\, P_n(x) \,] \,=\, \mathcal{L}\,[\, I \,,\, x\, P_n(x) \,] \,=\, 0 \,, \quad n \geq 0 \quad .$$

Multiplicando la ecuación (2.41) por x, se tiene

$$\mathcal{L}\left[\, I \,,\, x^2\, A_{n+1}^{-1} P_n(x) \right] \,=0 \quad ,$$

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^2 \,,\, P_n(x) \right] \,=\, \mathcal{L}\left[\, I \,,\, x^2\, P_n(x) \right] \,=\, 0 \quad .$$

Procediendo inductivamente tenemos

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^k \,,\, P_n(x) \right] \,=\, 0 \,, \quad 0 \leq k < n \quad , \tag{2.42}$$

y

$$\mathcal{L}\,[\, P_k(x) \,,\, P_n(x) \,] \,=\, 0 \,, \quad k < n \quad . \tag{2.43}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.41) por x^{n-1} se sigue que

$$\mathcal{L}\left[\, I \,,\, I\, x^n\, A_{n+1}^{-1}\, P_n(x) \right] \,=\, \mathcal{L}\left[\, I \,,\, I\, x^{n-1}\, P_{n+1}(x) \right]$$

$$+\mathcal{L}\left[\, I\, x^{n-1} \,, P_n(x) \right]\, B_{n+1}^H + \mathcal{L}\left[\, I \,,\, I\, x^{n-1}\, P_{n-1}(x) \right]\, C_{n+1}^H \,=\, \mathcal{L}\left[\, I \,,\, I\, x^{n-1}\, P_{n-1}(x) \right]\, C_{n+1}^H \;.$$

Luego

$$\mathcal{L}\,[\,I\,x^n\,,\,P_n(x)\,]\;A_{n+1}^{-H}\;=\;\mathcal{L}\left[\,I\,x^{n-1}\,,\,P_{n-1}(x)\,\right]\;C_{n+1}^{H}\quad,$$

$$\mathcal{L}\,[\,I\,x^n\,,\,P_n(x)\,]\;=\;\mathcal{L}\left[\,I\,x^{n-1}\,,\,P_{n-1}(x)\,\right]\;C_{n+1}^{H}\,A_{n+1}^{H}\quad.$$

De esta forma

$$\mathcal{L}\,[\,I\,x^n\,,\,P_n(x)\,]\;=\;C_1'\,C_2^H\,A_2^H\,C_3^H\,A_3^H\,\cdots\,C_n^H\,A_n^H$$

es invertible. Si $P_l(x)\;=\;\sum_{k=0}^{l} A_{l\,k}\,x^k$, entonces se sigue que

$$\mathcal{L}\,[\,P_l(x)\,,\,P_n(x)\,]\;=\;\sum_{k=0}^{l}\mathcal{L}\left[\,A_{l\,k}\,x^k\,,\,P_n(x)\,\right]\;=\;\begin{cases}0\,, & si\quad l<n\\ A_{n\,n}\,\mathcal{L}\,[\,I\,x^n\,,\,P_n(x)\,]\,, & si\quad l=n\end{cases}$$

De la invertibilidad de A_{nn} , se tiene que $\mathcal{L}\,[\,P_n(x)\,,\,P_n(x)\,]$ es invertible. □

COROLARIO 6 *Con las hipótesis del teorema 18, si la sucesión de momentos matriciales* $\{\,\Omega_n\,\}_{n\geq 0}$ *definida por (2.39) con* $\Omega_0\;=\;C_1'$ *, son hermíticos, es decir,* $\Omega_n\;=\;\Omega_n^H$ *para* $n\geq 0$ *, entonces la sucesión* $\{\,P_n(x)\,\}_{n\geq 0}$ *definida por el teorema 18, es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto al funcional matricial de momentos bilineal* $\mathcal{L}$ *asociado a* $\{\,\Omega\,\}_{n\geq 0}$ *.*

Vamos ahora a comprobar que los polinomios matriciales de Hermite y Laguerre ya vistos en el capítulo 1 son también SPOM para cierto funcional matricial de momentos bilineal conjugado hermítico. Para proceder, necesitamos el siguiente lema:

LEMA 2 *Sea n un entero positivo. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,i^s\,(-1)^i\;=\;0\,,\qquad s\;=\;0,\,1,\cdots,\,n-1\quad. \tag{2.44}$$

<u>Demostración:</u> Tomando $x\;=\;-1$ en la ecuación

$$(\,1\,+\,x\,)^n\;=\;\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,x^i\quad, \tag{2.45}$$

tenemos $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,(-1)^i\;=\;0$. De esta forma, para $s\;=\;0$, la igualdad (2.44) se cumple. Supongamos ahora que la igualdad (2.44) se satisface para $j\;=\;0,\,1,\,\cdots\,,\,s-1$ y sea $s\leq n$. De la hipótesis se sigue que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,i^{s-1}\,(-1)^i\;=\;0\quad. \tag{2.46}$$

Tomando derivadas s -ésimas en la ecuación (2.45) se sigue que

$$n\,(n-1)\,\cdots\,(n-s+1)\,(1+x)^{n-s} \;=\; \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\, i\,(i-1)\,\cdots\,(i-s+1)\, x^{i-s} \quad .$$

De la última ecuación se tiene que

$$n\,(n-1)\,\cdots\,(n-s+1)\,(1+x)^{n-s}\, x^{s} \;=\; \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\, i\,(i-1)\,\cdots\,(i-s+1)\, x^{i} \quad , \tag{2.47}$$

y haciendo $x = -1$ en (2.46), llegamos a que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\, i\,(i-1)\,\cdots\,(i-s+1)\,(-1)^{i} \;=\; 0 \quad . \tag{2.48}$$

Denotemos

$$i\,(i-1)\,\cdots\,(i-s+1) \;=\; i^{s} \,+\, a_1\, i^{s-1} \,+\, \cdots \,+\, a_{s-1}\, i \,+\, a_s \quad . \tag{2.49}$$

Sustituyendo (2.49) en (2.48) y usando la hipótesis de inducción llegamos a

$$0 \;=\; \sum_{i=0}^{n} i^{s} \binom{n}{i} (-1)^{i} + a_1 \sum_{i=0}^{n} i^{s-1} \binom{n}{i} (-1)^{i} + \cdots + a_s \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i} \;=\; \sum_{i=0}^{n} i^{s} \binom{n}{i} (-1)^{i} \quad .$$

De esta forma el resultado queda demostrado. $\square$

EJEMPLO 8 (POLINOMIOS DE LAGUERRE MATRICIALES) *Sea A una matriz hermítica en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *tal que*

$$z \;>\; -1 \quad \textit{para} \quad \textit{cada} \quad \textit{valor propio} \quad z \quad \textit{de} \quad A\,, \tag{2.50}$$

y sea λ *un número real positivo. Entonces, los polinomios matriciales de Laguerre* $L_n^{(A,\lambda)}(x)$ *introducidos en [34] y definidos por*

$$L_n^{(A,\lambda)}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, \lambda^k}{k!\,(n-k)!}\, (A+I)_n\, \left[(A+I)_k\right]^{-1}\, x^k \;, \tag{2.51}$$

son una SPOM respecto al funcional matricial de momentos bilineal conjugado $\mathcal{L}$ *, asociado a la sucesión de momentos matriciales* $\{\,\Omega_n\,\}_{n\geq 0}$ *, definidos por*

$$\Omega_0 \;=\; I\,, \quad \Omega_n \;=\; \frac{(A+I)_n}{\lambda^n}\,, \quad n \geq 1 \quad . \tag{2.52}$$

Dado que el coeficiente director de $L_n^{A,\lambda}(x)$ *es una matriz invertible* $\frac{(-1)^n \lambda^n I}{n!}$*, de la propiedad (ii) del teorema 12, será suficiente que probemos que*

$$\mathcal{L}\left[\, I x^{s}\,,\, L_n^{A,\lambda}(x)\,\right] \;=\; \delta_{ns}\, K_n\,, \qquad K_n \in \mathbb{C}^{r\times r} \quad \textit{invertible} \quad . \tag{2.53}$$

Demostraremos (2.53) usando inducción. Para $s = 0$ se sigue que

$$\mathcal{L}\left[\, I \,,\, L_n^{A,\lambda}(x) \,\right] \;=\; \mathcal{L}\left[I \,,\, \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,(A+I)_n\,\left[(A+I)_i\right]^{-1}\, x^i \right]$$

$$= \;\; \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda_i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_i\,\left[\,(A+I)_i\,\right]^{-1}\,(A+I)_n$$

$$= \;\; \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\,(-1)^i\,\lambda^i\,\Omega_i\,\left[\,(A+I)_i\,\right]^{-1} \right] \frac{(A+I)_n}{n!}$$

$$= \;\; \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\,(-1)^i \right] \tfrac{(A+I)_n}{n!} \quad ,$$

y por el lema 2, la última ecuación es cero. Supongamos que

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^k \,,\, L_n^{A,\lambda}(x) \,\right] \;=\; 0\,, \quad 0 \le k \le s-1 \quad . \tag{2.54}$$

Utilizando ahora que $\Omega_n \;=\; \Omega_{n-1}\,\frac{(A+nI)}{\lambda}$*, podemos escribir*

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^s \,,\, L_n^{A,\lambda}(x) \,\right] \;=\; \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_{i+s}\,\left[(A+I)_i\right]^{-1} \right] (A+I)_n$$

$$= \quad \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_{i+s-1}\,\frac{(A+(i+s)I)}{\lambda}\,\left[(A+I)_i\right]^{-1} \right] (A+I)_n \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_{i+s-1}\,A\,\left[(A+I)_i\right]^{-1} \right] \frac{(A+I)_n}{\lambda} \\ + \quad & \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_{i+s-1}\,(i+s)\,I\,\left[(A+I)_i\right]^{-1} \right] \frac{(A+I)_n}{\lambda} \quad . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Empleando la hipótesis de inducción, la expresión (2.55) se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_{i+s-1}\,A\,\left[(A+I)_i\right]^{-1}$$

$$= \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\frac{(A+I)_{i+s-1}}{\lambda^{i+s-1}}\,A\,\left[(A+I)_i\right]^{-1}$$

$$= \quad A\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\,\lambda^i}{i!\,(n-i)!}\,\Omega_{i+s-1}\,\left[(A+I)_i\right]^{-1} \right] \;=\; A\,\mathcal{L}\left[\, I\, x^{s-1} \,,\, L_n^{(A,\lambda)}(x) \,\right] \;=\; 0 \quad .$$

Por otra parte, usando la hipótesis de inducción, la expresión (2.56) toma la forma

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \lambda^i}{i!\,(n-i)!}\, \Omega_{i+s-1}\,(i+s)\, I\ [(A+I)_i]^{-1} \\
= \ & \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \lambda^i\, i}{i!\,(n-i)!}\, \Omega_{i+s-1}\ [(A+I)_i]^{-1} \ + \ s \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \lambda^i}{i!\,(n-i)!}\, \Omega_{i+s-1}\ [(A+I)_i]^{-1} \\
= \ & \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \lambda^i\, i}{i!\,(n-i)!}\, \Omega_{i+s-1}\ [(A+I)_i]^{-1} \ + \ \mathcal{L}\left[\, I\, x^{s-1}\,, L_n^{(A,\lambda)}(x)\,\right] \\
= \ & \frac{1}{n!\,\lambda^{s-1}} \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} (-1)^i\, (A+I)_{i+s}\, [\, A \ + \ (i+s)\, I\,]^{-1}\ [\,(A+I)_i\,]^{-1} \\
= \ & \frac{1}{n!\,\lambda^{s-1}} \ \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} (-1)^i\ (\, A \ + \ (i+1)\, I\,) \cdots (\, A \ + \ (i+s-1)\, I\,) \quad .
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Nótese que en la expresión (2.57), el producto $(\, A \ + \ (i+1)\, I\,) \cdots (\, A \ + \ (i+s-1)\, I\,)$ *es un polinomio matricial de grado* $s-1$ *en la variable* i *, y por el lema 2, la expresión (2.57) es cero. De aquí* $\mathcal{L}\left[\, I\, x^s\,,\, L_n^{(A,\lambda)}(x)\,\right] \, = \, 0$ *. Finalmente, demostremos que* $\mathcal{L}\left[\, I\, x^n\,,\, L_n^{(A,\lambda)}(x)\,\right]$ *es invertible. De [34], los polinomios matriciales* $L_n^{(A,\lambda)}(x)$ *verifican*

$$
B_n\, L_n^{(A,\lambda)}(x) \, = \, (\, Ix \, - \, C_n\,)\, L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x) \, - \, \Lambda_n\, L_{n-2}^{(A,\lambda)}(x)\,, \quad n \geq 1\,; \quad L_{-1}^{(A,\lambda)}(x) \, = \, 0 \quad , \tag{2.58}
$$

donde

$$
B_n \, = \, \frac{-n}{\lambda} I\,, \quad C_n \, = \, \frac{A+(2n-1)I}{\lambda}\,, \quad \Lambda_n \, = \, \frac{A+(n-1)I}{\lambda} \quad . \tag{2.59}
$$

De (2.58), se sigue que

$$
0 \, = \, \mathcal{L}\left[\, Ix^{n-2}\,,\, L_n^{(A,\lambda)}(x)\right]\, B_n^H \, = \, \mathcal{L}\left[\, Ix^{n-2}\,,\, B_n\, L_n^{(A,\lambda)}(x)\right]
$$

$$
= \, \mathcal{L}\left[\, Ix^{n-2}\,,\, I\, x\, L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x)\right] - \mathcal{L}\left[\, Ix^{n-2}\,,\, L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x)\right]\, C_n^H - \mathcal{L}\left[\, Ix^{n-2}\,,\, L_{n-2}^{(A,\lambda)}(x)\right]\, \Lambda_n^H
$$

De donde

$$
\mathcal{L}\left[\, Ix^{n-1}\,,\, L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x)\right] \, = \, \mathcal{L}\left[\, Ix^{n-2}\,,\, L_{n-2}^{(A,\lambda)}(x)\right]\, \Lambda_n^H \quad ,
$$

luego

$$\begin{aligned}\Lambda_n\,\Lambda_{n-1}\,\cdots\,\Lambda_2 \;&=\; \mathcal{L}\left[\,Ix^{n-1}\,,\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x)\right]^{H}\,\mathcal{L}\left[\,I\,,\,L_0^{(A,\lambda)}(x)\right]^{-H}\\ &=\; \mathcal{L}\left[\,I\,x^{n-1}\,,\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x)\right]^{H}\,\Omega_0 \;=\; \mathcal{L}\left[\,I\,x^{n-1}\,,\,L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x)\right]^{H} \quad .\end{aligned} \tag{2.60}$$

De (2.59) y (2.60) se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\,I\,x^n\,,\,L_n^{(A,\lambda)}(x)\right]^{H} \;&=\; \Lambda_{n+1}\,\Lambda_n\,\cdots\,\Lambda_2 \;=\; \frac{(A+nI)}{\lambda}\,\frac{A+(n-1)I}{\lambda}\,\cdots\,\frac{A+I}{\lambda}\\ &=\; \frac{(A+I)_n}{\lambda^n} \;=\Omega_n \quad ,\end{aligned}$$

y de esta forma, $\mathcal{L}\left[\,I\,x^n\,,\,L_n^{(A,\lambda)}(x)\right] \;=\; \Omega_n^H \;=\; \Omega_n$ *es invertible.* $\square$

EJEMPLO 9 (POLINOMIOS DE HERMITE MATRICIALES) *Sea A una matriz hermítica definida positiva en* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *. Entonces, los polinomios matriciales de Hermite* $H_n(x,A)$ *introducidos en [40] y definidos por*

$$H_n(x,A) \;=\; \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!(\sqrt{2A})^{n-2k}}{k!(n-2k)!}x^{n-2k} \;, \tag{2.61}$$

son una SPOM respecto al funcional matricial de momentos bilineal conjugado $\mathcal{L}$ *, asociado a la sucesión de momentos matriciales* $\{\,\Omega_n\,\}_{n\geq 0}$ *, definidos por*

$$\Omega_0 \;=\; I\,, \quad \Omega_{2n} \;=\; \frac{2n!}{n!}\left(\sqrt{2A}\right)^{-2n}\,, \quad \Omega_{2n+1} \;=\; 0 \;\;, \quad n\geq 1 \;\; . \tag{2.62}$$

Dado que el coeficiente director de $H_n(x,A)$ *es la matriz invertible* $\sqrt{2A}$ *de la propiedad (ii) del teorema 12, será suficiente que demostremos*

$$\mathcal{L}\left[\,Ix^s\,,\,H_n(x,A)\,\right] \;=\; \delta_{ns}\,K_n\,, \qquad K_n\in\mathbb{C}^{r\times r} \;\; \textit{invertible} \;\; . \tag{2.63}$$

Demostraremos (2.63) por inducción. Para $s=0$ *se sigue que*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\,I\,,\,H_n(x,A)\,\right] \;&=\; \mathcal{L}\left[\,I\,,\,\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\,n!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\,x^{n-2k}\right]\\ &=\; \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\,n!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\,\Omega_{n-2k} \quad .\end{aligned} \tag{2.64}$$

Estudiemos el valor de la expresión (2.64) según sea n par o impar. Si n es impar, $n-2k$ *será impar para todo natural k, por lo que la expresión (2.64) valdrá 0.*

Si n es par, supongamos $n = 2l$, entonces de (2.64) se sigue

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\,[\,I\,,\,H_{2l}(x,A)\,] &= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}}{k!\,(2(l-k)!)}\,\Omega_{2(l-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!}{k!\,(2(l-k)!)}\frac{(2(l-k))!)}{(l-k)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{-2(l-k)}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!}{k!\,(l-k)!}\,I = \frac{(2l)!}{l!}\left[\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k\right] I \quad ,
\end{aligned}$$

y por el lema 2, la última expresión es cero. Supongamos que

$$\mathcal{L}\left[\,I\,x^k\,,\,H_n(x,A)\,\right] \;=\; 0\,, \quad 0 \le k \le s-1 \quad . \tag{2.65}$$

Calculemos $\mathcal{L}\,[\,I\,x^s\,,\,H_n(x,A)\,]$.

$$\mathcal{L}\,[\,I\,x^s\,,\,H_n(x,A)\,] \;=\; \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\,n!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\,\Omega_{n-2k+s} \quad . \tag{2.66}$$

Analicemos ahora los distintos casos que pueden darse. Si n y s tienen distinta paridad, uno de los dos par y el otro impar, entonces $n-2k+s$ será impar, por lo que (2.66) será cero. Veamos los casos en los que n y s tienen igual paridad.

Supongamos que n y s son pares, *en tal caso podemos escribir $n = 2l$ y $s = 2t$, y (2.66) quedará*

$$\mathcal{L}\left[\,I\,x^{2t}\,,\,H_{2l}(x,A)\,\right] \;=\; \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}}{k!\,(2(l-k))!}\,\Omega_{2(l-k+t)} \quad . \tag{2.67}$$

Utilizando ahora la expresión de los momentos matriciales (2.62), se tiene

$$\Omega_{2n} \;=\; 2(2n-1)\Omega_{2n-2}\left(\sqrt{2A}\right)^{-2} \quad ,$$

y podemos escribir (2.67) de la forma

$$\mathcal{L}\left[Ix^{2t}, H_{2l}(x,A)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}}{k!\,(2(l-k))!}\Omega_{2(l-k+t)}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!}{k!\,(2(l-k))!}2(2(l-k+t)-1)\Omega_{2(l-k+t-1)}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k (2l)!}{k!(2(l-k))!} \left[4l - 4k + 4t - 2\right] \Omega_{2(l-k+t-1)} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k-1)} \quad . \tag{2.68}$$

Por hipótesis, se tiene que $\mathcal{L}\left[\, I\, x^{s-2}\,,\, H_n(x,A)\,\right] = 0$*, de donde si* $n = 2l$ *y* $s = 2t$ *se tendrá*

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}\left[\, I\, x^{2t-2}\,,\, H_{2l}(x,A)\,\right] \\ &= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!}{k!\,(2(l-k))!} \Omega_{2(l-k+t-1)} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)} \quad . \end{aligned} \tag{2.69}$$

De (2.68), obtenemos

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^{2t}\,,\, H_{2l}(x,A)\,\right]$$

$$\begin{aligned} &= (4l + 4t - 2) \left[\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!}{k!\,(2(l-k))!} \Omega_{2(l-k+t-1)} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)} \right] \left(\sqrt{2A}\right)^{-2} \\ &- 4 \left[\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,k}{k!\,(2(l-k))!} \Omega_{2(l-k+t-1)} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k-1)} \right] \quad , \end{aligned} \tag{2.70}$$

y sustituyendo (2.69) en (2.70) se obtiene

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^{2t}\,,\, H_{2l}(x,A)\,\right]$$

$$= -4 \left[\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,k}{k!\,(2(l-k))!} \Omega_{2(l-k+t-1)} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k-1)} \right]$$

$$= -4 \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,k}{k!\,(2(l-k))!} \frac{(2(l-k+t)-2)!}{(l-k+t-1)!} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k-1)} \left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k-1+t)}$$

$$= -4 \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,k}{k!\,(2(l-k))!} \frac{(2(l-k+t)-2)!}{(l-k+t-1)!} \left(\sqrt{2A}\right)^{-2t} \quad . \tag{2.71}$$

Desarrollando los factoriales,

$$\frac{(2(l-k)+2t-2)!}{(l-k)+t-1)!} = \frac{(2(l-k)+2t-2)(2(l-k)+2t-3)\ldots(2(l-k)+1)(2(l-k))!}{((l-k)+t-1)((l-k)+t-2)\ldots((l-k)+1)(l-k)!} \quad ,$$

sustituyendo en (2.71) y simplificando, tenemos

$$\mathcal{L}\left[\, I\, x^{2t}\,,\, H_{2l}(x,A)\,\right]$$

$$= -4\left(\sqrt{2A}\right)^{-2t} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,k}{k!\,(2(l-k))!}\,\frac{(2(l-k)!}{(l-k)!}\,\frac{(2(l-k)+2t-2)\dots(2(l-k)+1)}{((l-k)+t-1)\dots((l-k)+1)}$$

$$= -4\left(\sqrt{2A}\right)^{-2t} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k\,(2l)!\,k}{k!\,(l-k)!}\,\frac{(2(l-k)+2t-2)\dots(2(l-k)+1)}{((l-k)+t-1)\dots((l-k)+1)} \quad . \qquad (2.72)$$

Ahora, el cociente $\frac{(2(l-k)+2t-2)\dots(2(l-k)+1)}{((l-k)+t-1)\dots((l-k)+1)}$ *lo podemos espresar, haciendo* $x = 2(l-t)$, *de la forma*

$$\frac{(2(l-k)+2t-2)\dots(2(l-k)+1)}{((l-k)+t-1)\dots((l-k)+1)} = \frac{(x+2t-2)(x+2t-3)\dots(x+1)}{(\frac{x}{2}+t-1)(\frac{x}{2}+t-2)\dots(\frac{x}{2}+1)}$$

$$= 2^t(x+(2t-3))(x+(2t-5))\dots(x+1) \quad .$$

Sustituyendo en (2.72),

$$\mathcal{L}\left[\, I\,x^{2t}\,,\, H_{2l}(x,A)\,\right]$$

$$= -4\left(\sqrt{2A}\right)^{-2t}\frac{(2l)!}{l!}\,2^t\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k\,Q \quad . \qquad (2.73)$$

Donde $Q = k((2(l-k)+(2t-3))(2(l-k)+(2t-5))\dots(2(l-k)+1)$ *es un polinomio en* k *de grado* $s-1<n$*, luego por el lema 2, (2.73) es cero.*

Supongamos ahora que n **y** s **son impares**, *y pongamos* $n = 2l+1$, $s = 2t+1$. *Se tiene entonces, procediendo de igual forma*

$$\mathcal{L}\left[\, Ix^{2t+1}\,,\, H_{2l+1}(x,A)\,\right] = \sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{2l-2k+1}}{k!\,(2l-2k+1)!}\,\Omega_{2l+2t-2k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)+1}}{k!\,(2(l-k)+1)!}\,\Omega_{2(l+t-k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!\,\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)+1}}{k!\,(2(l-k)+1)!}\,2(2(l+t-k)+1)\Omega_{2(l+t-k)}\left(\sqrt{2A}\right)^{-2}$$

$$= (4l+4t+2)\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!}{k!\,(2(l-k)+1)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}\Omega_{2(l+t-k)}$$

$$-4\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!\,k}{k!\,(2(l-k)+1)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}\;\Omega_{2(l+t-k)}\quad . \tag{2.74}$$

Aplicando que por hipótesis $\mathcal{L}\left[\,I\,x^{s-2}\,,\,H_n(x,A)\,\right]\,=\,0$, *si* $n=2l+1$ *y* $s=2t+1$ *se tiene*

$$0=\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!}{k!\,(2(l-k)+1)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)+1}\;\Omega_{2(l+t-k)}\quad , \tag{2.75}$$

luego sustituyendo (2.75) en (2.74), y desarrollando los factoriales, tenemos

$$\mathcal{L}\left[\,Ix^{2t+1}\,,\,H_{2l+1}(x,A)\,\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \;-4\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!\,k}{k!\,(2(l-k)+1)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}\;\Omega_{2(l+t-k)}\\
&= \;-4\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,(2l+1)!\,k}{k!\,(2(l-k)+1)!}\frac{(2(l-k+t))!}{(l-k+t)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{-2(l-k+t)}\left(\sqrt{2A}\right)^{2(l-k)}\\
&= \;\frac{-4(2l+1)!}{l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k\,l!\,k}{k!\,(2(l-k)+1)!}\frac{(2(l-k+t))!}{(l-k+t)!}\left(\sqrt{2A}\right)^{-2t}\\
&= \;\frac{-4(2l+1)!}{l!}2^{t-1}\left[\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k k\right]\left(\sqrt{2A}\right)^{-2t}\quad ,
\end{aligned}$$

y esta última espresión por el lema 2 es cero. Tenemos así probado que

$$\mathcal{L}\left[\,Ix^{s}\,,\,H_n(x,A)\,\right]\,=\,0\quad si\quad s<n\quad .$$

Finalmente, demostremos que $\mathcal{L}\left[\,I\,x^{n}\,,\,H_n(x,A)\,\right]$ *es invertible. De [40], los polinomios matriciales* $H_n(x,A)$ *verifican*

$$B_n\,H_n(x,A)\,=\,Ix\,H_{n-1}(x,A)\;-\;\Lambda_n\,H_{n-2}(x,A)\,,\quad n\geq 1\,;\quad H_{-1}(x,A)\,=\,0\quad , \tag{2.76}$$

donde

$$B_n\,=\,\left(\sqrt{2A}\right)^{-1}\,,\quad \Lambda_n\,=\,2(n-1)\left(\sqrt{2A}\right)^{-1}\quad . \tag{2.77}$$

Así tenemos que

$$0\,=\,\mathcal{L}\left[\,Ix^{n-2}\,,\,B_n\,H_n(x,A)\right]\,=\,\mathcal{L}\left[\,Ix^{n-2}\,,I\,x\,H_{n-1}(x,A)\right]$$

$$-\,\mathcal{L}\left[\,Ix^{n-2}\,,\,H_{n-2}(x,A)\right]\,\Lambda_n^H\quad ,$$

luego

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\,Ix^{n-2}\,,\,IxH_{n-1}(x,A)\right] &= \mathcal{L}\left[\,Ix^{n-1}\,,\,H_{n-1}(x,A)\right]\\ &= \mathcal{L}\left[\,Ix^{n-2}\,,\,H_{n-2}(x,A)\right]\,\Lambda_n^H \quad .\end{aligned}$$

Aplicando reiteradamente esta última igualdad, tenemos

$$\begin{aligned}\Lambda_n\,\Lambda_{n-1}\,\cdots\,\Lambda_2 &= \mathcal{L}\,[\,Ix^{n-1}\,,\,H_{n-1}(x,A)]^H\;\mathcal{L}\,[\,I\,,\,H_0(x,A)]^{-H}\\ &= \mathcal{L}\,[\,I\,x^{n-1}\,,\,H_{n-1}(x,A)]^H\;\Omega_0\;=\;\mathcal{L}\,[\,I\,x^{n-1}\,,\,H_{n-1}(x,A)]^H \quad ,\end{aligned} \tag{2.78}$$

por lo que

$$\mathcal{L}\,[\,I\,x^n\,,\,H_n(x,A)]^H \;=\; \Lambda_{n+1}\,\Lambda_n\,\cdots\,\Lambda_2 \;=\; n!\,2^n\,\left(\sqrt{2A}\right)^{-n} \quad \textit{es invertible} \quad .$$

Entonces, $\mathcal{L}\,[\,I\,x^n\,,\,H_n(x,A)]$ *es invertible.* $\square$

2.7. Funcionales matriciales de momentos bilineales conjugados definidos positivos.

En el campo escalar, en los casos más importantes, los polinomios ortogonales se obtienen a partir de un funcional $\mathcal{L}$ definido por una función peso no negativa o en términos de una integral Stieljes, ver [5, p.13]. En el caso en el que trabajamos con matrices, el producto interior matricial puede definirse en términos de funciones peso matriciales hermíticas [60], o en términos de funciones de distribución matriciales hermíticas, acotadas y no decrecientes, [53], [61].

DEFINICIÓN 7 . *Sea $\mathcal{L}$ FMMBC hermítico. Diremos que $\mathcal{L}$ es definido positivo si para cada polinomio matricial mónico $P(x) \in \mathcal{P}[x]$, la matriz $\mathcal{L}[P(x), P(x)]$ es definida positiva.*

Para caracterizar los FMMBC definidos positivos vamos a demostrar en el siguiente lema algunas condiciones necesarias.

LEMA 3 *Sea $\mathcal{L}$ FMMBC definido positivo. Entonces la sucesión de momentos matriciales $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ asociada a $\mathcal{L}$ verifica*

$$\Omega_{2n} \quad \textit{es definido positivo y} \quad \Omega_{2n+1} \ \textit{es hermítico para}\ n \geq 0 \quad . \tag{2.79}$$

<u>Demostración:</u> Por la definición y la hipótesis se sigue que $\mathcal{L}[Ix^n, Ix^n] = \Omega_{2n}$ es definido positivo para $n \geq 0$. Ahora demostraremos, usando el principio de inducción, que Ω_{2n+1} es hermítico. Para $n = 0$, nótese que $\mathcal{L}[I(x+1), I(x+1)]$ es definido positivo y de las propiedades de $\mathcal{L}$, se tiene que

$$\mathcal{L}[I(x+1), I(x+1)] = \mathcal{L}[Ix, Ix] + \mathcal{L}[Ix, I] + \mathcal{L}[I, Ix] + \mathcal{L}[I, I]$$

$$= \Omega_2 + 2\Omega_1 + \Omega_0 \quad .$$

Así, $\Omega_1 = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}\left[I(x+1), I(x+1)\right] - \Omega_0 - \Omega_2\right\}$ es hermítico. Supongamos que Ω_1 , Ω_3 , ... , Ω_{2n-1} son hermíticos, y escribamos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[(Ix+I)^{n+1}, (Ix+I)^{n+1}] & = & \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} Ix^k \, , \, \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} Ix^j\right] \\ & = & \sum_{k=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{j}\mathcal{L}[Ix^k, Ix^j] \\ & = & \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\Omega_{k+j}\right] \quad . \end{array} \tag{2.80}$$

Por la hipótesis de inducción, $\Omega_1, \Omega_3, \ldots, \Omega_{2n-1}$ son hermíticos, y $\mathcal{L}[(Ix+I)^{n+1}, (Ix+I)^{n+1}]$ es definido positivo, por (2.80), se sigue que Ω_{2n+1} es hermítico. $\square$

Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC definido positivo y sea $\{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de momentos matriciales asociada con $\mathcal{L}$. Por el lema 3, cada momento Ω_{2n} es definido positivo para $n \geq 0$, el momento Ω_0 es definido positivo como también Ω_0^{-1}. Por el teorema 8-(v), el polinomio matricial $Q_0(x) = \Omega_0^{-1/2}$ esta bien definido. Nótese que

$$\mathcal{L}[Q_0(x), Q_0(x)] = \Omega_0^{-1/2}\mathcal{L}[I, I](\Omega_0^{-1/2})^H = \Omega_0^{-1/2}\Omega_0\Omega_0^{-1/2} = I \quad .$$

Sea $P_0(x) = Q_0(x)$. Consideremos el polinomio matricial de grado uno, $Q_1(x) = Ix - AP_0(x)$, donde A es una matriz en $C^{r\times r}$ a determinar para que $\mathcal{L}[P_0(x), Q_1(x)] = 0$. De las propiedades de los funcionales matriciales de momentos, la condición $\mathcal{L}[P_0(x), Q_1(x)] = 0$, es equivalente a la ecuación

$$0 = \mathcal{L}[P_0(x), Q_1(x)] = \mathcal{L}[P_0(x), Ix - AP_0(x)]$$

$$= \mathcal{L}[P_0(x), Ix] - \mathcal{L}[P_0(x), P_0(x)]A^H = \mathcal{L}[P_0(x), Ix] - A^H \quad .$$

De esta forma, la matriz A debe verificar

$$A^H = \mathcal{L}[P_0(x), Ix] = \mathcal{L}[Ix, P_0(x)]^H,$$

$$A = \mathcal{L}[Ix, P_0(x)]\Omega_0^{-1/2} = \Omega_1\Omega_0^{-1/2}.$$

Luego $Q_1(x) = Ix - \Omega_1\Omega_0^{-1/2}$. Definamos $P_1(x) = \left(\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\right)^{-1/2} Q_1(x)$, donde $\left(\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\right)^{-1/2}$ es la única raíz cuadrada definida positiva de $\left(\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\right)^{-1}$. Entonces, como $\left(\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\right)^{-1/2}$ conmuta con $\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]$, se tiene que

$$\mathcal{L}[P_1(x), P_1(x)] = \left(\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\right)^{-1/2}\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\left(\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)]\right)^{-1/2}$$

$$= (\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)])^{-1/2} (\mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)])^{-1/2} \mathcal{L}[Q_1(x), Q_1(x)] = I \ \ .$$

En general, si suponemos que $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ son polinomios matriciales bien definidos tales que $P_i(x)$ es de grado i y que

$$\mathcal{L}[P_i(x), P_j(x)] = \delta_{ij} I \, , \ \ 0 \le i, j \le n \ \ , \tag{2.81}$$

definamos las matrices A_k por

$$A_k = \mathcal{L}[I x^{n+1} P_k(x)] \, , \ \ 0 \le k \le n \ \ , \tag{2.82}$$

y sea $Q_{n+1}(x) = I x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k P_k(x)$. De las propiedades de los funcionales matriciales de momentos bilineales conjugados y (2.81)-(2.82), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[P_j(x), Q_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[P_j(x), I x^{n+1}] - \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}[P_j(x), P_k(x)] A_k^H \\ &= \left(\mathcal{L}[I x^{n+1}, P_j(x)] \right)^H - A_j^H = 0 \ \ . \end{aligned} \tag{2.83}$$

Ahora, definimos

$$P_{n+1}(x) = (\mathcal{L}[Q_{n+1}(x), Q_{n+1}(x)])^{-1/2} Q_{n+1}(x) \ \ ,$$

y por los mismos argumentos utilizados para demostrar que $\mathcal{L}[P_1(x), P_1(x)] = I$, tenemos $\mathcal{L} \, [P_{n+1}(x) \ , \, P_{n+1}(x)] = I$, y de (2.83) tenemos $\mathcal{L}[P_j(x), P_{n+1}(x)] = 0$, para $0 \le j \le n$.

En resumen, el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 19 *Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC definido positivo. entonces $\mathcal{L}$ tiene un sistema de polinomios matriciales ortonormales.*

El siguiente teorema nos caracteriza los FMMBC definidos positivos en términos de la matriz de Haenkel por bloques ψ_n definida por (2.5), y puede considerarse como una versión matricial del teorema 3.4 de [5, p.15].

TEOREMA 20 . *Sea $\mathcal{L}$ un FMMBC hermítico, y sea ψ_n la matriz por bloques definida por (2.5). Entonces $\mathcal{L}$ es definido positivo, si y solo si, ψ_n es definida positiva para todo $n \ge 0$.*

<u>Demostración:</u> Supongamos que $\mathcal{L}$ es hermítico y que ψ_n es definida positiva para todo $n \ge 0$. Sea $P(x)$ un polinomio matricial mónico de grado m. Queremos demostrar que $\mathcal{L}[P(x), P(x)]$ es una matriz hermítica definida positiva. Dado que ψ_n es invertible para $n \ge 0$, por el teorema 13, existe una SPOM $\{P_n(x)\}_{n \ge 0}$ para $\mathcal{L}$, y por el teorema 11 existen matrices $C_1, C_2, \ldots, C_m$, en $\mathbb{C}^{r \times r}$, tales que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} C_i P_i(x) \, ; \quad C_m \ \ invertible \ \ . \tag{2.84}$$

Así

$$\mathcal{L}[P(x), P(x)] = \sum_{i=0}^{m} C_i \mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] C_i^H \quad . \tag{2.85}$$

Nótese que si demostramos que $\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)]$ es definido positivo para $0 \leq i \leq m$, entonces por (2.85) y la invertibilidad de C_m llegamos a que $\mathcal{L}[P(x), P(x)] > 0$. Sean $A_{n\,k}$ matrices en $C^{r\times r}$ con $A_{n\,n}$ invertible, tales que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n\,k} x^k \quad . \tag{2.86}$$

Del teorema 12 se sigue que

$$\mathcal{L}[Ix^m, P_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} \Omega_{k+m} A_{n\,k}^H = K_n \delta_{m\,n}\,, \quad para \;\; m \leq n \quad , \tag{2.87}$$

donde K_n es una matriz invertible en $C^{r\times r}$. La condición (2.87) equivale a un sistema lineal por bloques

$$\psi_n \begin{bmatrix} A_{n\,0}^H \\ \vdots \\ A_{n\,n}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_n \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

donde ψ_n esta definida por (2.5). Nótese que $\psi_0 = \Omega_0$ es definida positiva, y así $\mathcal{L}[P_0(x), P_0(x)] = A_{00}\, \Omega_0\, A_{00}^H > 0$. Sea $1 \leq i \leq m$ y nótese que $\mathcal{L}[P_i, P_i] = K_i$, es una matriz invertible. El sistema (2.88) puede escribirse de la forma

$$\begin{bmatrix} \psi_{i-1} & \vdots & A^H \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A & \vdots & \Omega_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i0}^H \\ \vdots \\ A_{ii}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_i \end{bmatrix} , \tag{2.89}$$

donde

$$A = [\,\Omega_i \;\; \Omega_{i+1} \;\; \cdots \;\; \Omega_{2i-1}\,] \qquad y \qquad \begin{bmatrix} \Omega_i \\ \Omega_{i+1} \\ \vdots \\ \Omega_{2i-1} \end{bmatrix} = A^H ,$$

porque Ω_n es hermítico para $n \geq 0$.
Premultiplicando la ecuación (2.89) por la matriz

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad ,$$

llegamos a

$$\begin{bmatrix} I & \vdots & \psi_{i-1}^{-1}A^H \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \Omega_{2i} - A\psi_{i-1}^{-1}A^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i0}^H \\ \vdots \\ A_{ii}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_i \end{bmatrix} \quad . \tag{2.90}$$

Así

$$K_i \;=\; \left(\Omega_{2i} - A\psi_{i-1}^{-1}A^H\right)\; A_{ii}^H \quad , \tag{2.91}$$

y

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi_i \;=\; \begin{bmatrix} I & \psi_{i-1}^{-1}A^H \\ 0 & K_i \end{bmatrix} \quad . \tag{2.92}$$

De la expresión $\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] = K_i$, se sigue que la ecuación (2.92) puede escribirse de la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \psi_i \;=\; \begin{bmatrix} I & \psi_{i-1}^{-1}A^H \\ 0 & \mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] \end{bmatrix} \quad . \tag{2.93}$$

Postmultiplicando ambos miembros de (2.93) por

$$\begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^H \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad ,$$

tenemos

$$D_i\psi_i \;=\; \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] \end{bmatrix} \quad , \tag{2.94}$$

con

$$D_i = \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^H \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad . \tag{2.95}$$

Nótese que la matriz D_i, definida por (2.95), es definida positiva porque

$$D_i = E_i^H E_i \,, \quad E_i \;=\; \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} , \quad E_i \;\; invertible \quad .$$

Como D_i y ψ_i son matrices definidas positivas, por el teorema 8-(iii) se sigue que

$$Para \;\; cada \;\; z \in \sigma(D_i\psi_i) \,, \quad z > 0 \quad . \tag{2.96}$$

Por (2.94) tenemos

$$\sigma(D_i\psi_i) = \sigma(\psi_{i-1}^{-1}) \bigcup \sigma(\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)]) \,, \tag{2.97}$$

y por (2.96)-(2.97), concluimos que

$$Para \;\; cada \;\; z \in \sigma(\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)]) \,, \quad z > 0 \tag{2.98}$$

Dado que $\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)]$ es hermítica por ser $\mathcal{L}$ hermítico, y satisface (2.98), por el teorema 8-(i) concluimos que $\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] > 0$. Con esto demostramos una implicación del teorema. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{L}$ es definido positivo. Por el lema 3, cada momento matricial Ω_n es hermítico y Ω_{2n} es definido positivo para $n \geq 0$. Así la matriz ψ_n es hermítica para $n \geq 0$. Para $i = 0$, $\psi_0 = \Omega_0$ es definida positiva por el lema 3. Sea $i \geq 1$ y supongamos que ψ_0, ψ_1, $\ldots$, ψ_{i-1} son definidas positivas. Como $\mathcal{L}$ es definido positivo, por el teorema 19 existe una SPOM mónica $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$. Nótese que por el teorema 8-(i), para demostrar que ψ_i es definida positiva, es suficiente demostrar que cada valor propio z de ψ_i es positivo. Por la ecuación (2.95), y por la hipótesis de inducción, la matriz D_i es definida positiva y

$$\sigma(D_i\psi_i) = \sigma(\psi_{i-1}^{-1}) \bigcup \mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] \quad . \tag{2.99}$$

Como $\mathcal{L}$ es definido positivo, se sigue que $\mathcal{L}[P_i(x), P_i(x)] > 0$, y por la hipótesis de inducción, $\psi_{i-1} > 0$, así como ψ_{i-1}^{-1}. Por (2.99), se sigue que

$$\textit{Para cada valor propio } z \textit{ de } D_i\psi_i\,, \quad z > 0 \quad . \tag{2.100}$$

Como D_i es definida positiva, por el teorema 8-(iv), existe una matriz triangular inferior, G_i, tal que

$$D_i \,=\, G_i\, G_i^H \quad .$$

Así, podemos escribir $D_i\psi_i = G_i G_i^H \psi_i$ y

$$G_i^{-1} D_i \psi_i G_i \,=\, G_i^H \psi_i G_i \quad . \tag{2.101}$$

Nótese que por (2.101), podemos escribir

$$\sigma(D_i\psi_i) = \sigma(G_i^H \psi_i G_i) \quad , \tag{2.102}$$

y por el teorema 9, (2.100) y (2.102), obtenemos que

$$\textit{Para cada valor propio } z \textit{ de } \psi_i\,, \quad z > 0 \quad ,$$

Con lo que el resultado queda demostrado. $\square$

NOTA 10 *Este resultado también se encuentra demostrado en [25], para el caso de funcionales definidos a través de integrales.*

NOTA 11 *Para construir un FMMBC definido positivo es suficiente tomar los momentos matriciales Ω_n, tales que la matriz de Haenkel por bloques ψ_n definida por (2.5), sea definida positiva para $n \geq 0$. Es frecuente tomar FMMBC cuyos momentos matriciales Ω_n son funciones analíticas de una matriz fija A. Esta situación ocurre, por ejemplo, con los polinomios de Laguerre y Hermite matriciales, introducidos en [34] y [40] respectivamente. Sea*

$$\psi_n(A) = \begin{bmatrix} \Omega_0(A) & \Omega_1(A) & \cdots & \Omega_n(A) \\ \Omega_1(A) & \Omega_2(A) & \cdots & \Omega_{n+1}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Omega_n(A) & \Omega_{n+1}(A) & \cdots & \Omega_{2n}(A) \end{bmatrix}$$

donde $\Omega_i(A)$ son funciones analíticas actuando sobre la matriz $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$. Por [69, p.107-108], si $w_i^{(k)}$ es el k-ésimo valor propio de la matriz $\Omega_i(A)$, $0 \le i \le n$, $1 \le k \le r$, entonces los valores propios de $\psi_n(A)$ vienen dados por los valores propios de las matrices

$$W(k) = \begin{bmatrix} w_0^{(k)} & w_1^{(k)} & \cdots & w_n^{(k)} \\ w_1^{(k)} & w_2^{(k)} & \cdots & w_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n^{(k)} & w_{n+1}^{(k)} & \cdots & w_{2n}^{(k)} \end{bmatrix} , \quad 1 \le k \le r \quad . \tag{2.103}$$

Así, los valores propios de $\psi_n(A)$ se pueden obtener a través de las matrices dadas en (2.103). En particular, si $\Omega_i(A)$ es hermítica para $0 \le i \le n$ y las matrices $W(k)$ definidas por (2.103) para $1 \le k \le r$ son definidas positivas, entonces $\psi_n(A)$ es definida positiva.

2.8. Producto interior matricial.

Para cada FMMBC definido positivo $\mathcal{L}$, podemos asociarle un producto interior matricial definido en el módulo a izquierda $\mathcal{P}[x]$ sobre el anillo $\mathbb{C}^{r\times r}$, satisfaciendo las propiedades requeridas en [60, p.352]. De hecho, dado $P(x)$, $Q(x)$ en $\mathcal{P}[x]$ definimos el producto interior matricial

$$< \cdot , \cdot >: \mathcal{P}[x] \times \mathcal{P}[x] \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}$$

por

$$< P(x), Q(x) > = \mathcal{L}[P(x), Q(x)] , \qquad P(x) , \ Q(x) \in \mathcal{P}[x] \quad . \tag{2.104}$$

De las propiedades de un FMMBC hermítico, es fácil demostrar que

(i) $< C_1P_1(x) + C_2P_2(x), Q(x) >= C_1 < P_1(x), Q(x) > +C_2 < P_2(x), Q(x) >$
donde $Q(x)$, $P_i(x) \in \mathcal{P}[x]$ y $C_i \in \mathbb{C}^{r\times r}$ para $i = 1, 2$.

(ii) $< P(x), Q(x) > = < Q(x), P(x) >^H$, $P(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}[x]$,

(iii) $< P(x), CQ(x) >=< P(x), Q(x) > C^H$,
donde C es una matriz en $\mathbb{C}^{r\times r}$ y $P(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}[x]$.

Demostremos que

(iv) $< P(x), P(x) >$ es semidefinido positivo para cada $P(x) \in \mathcal{P}[x]$, y que $< P(x), P(x) >= 0$ solo cuando $P(x)$ es idénticamente cero.

Sea $P(x)$ un polinomio matricial de grado n y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM mónica para $\mathcal{L}$, cuya existencia viene garantizada por el teorema 19. Por el corolario 2, existen matrices Λ_1 , Λ_2 , ... , Λ_n , univocamente determinadas por $P(x)$, tales que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k P_k \quad .$$

Por la definición de producto interior matricial y las propiedades de $\mathcal{L}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} < P(x), P(x) >= \; & \mathcal{L}[P(x), P(x)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} \Lambda_k P_k(x)\,,\, \sum_{j=0}^{n} \Lambda_j P_j(x)\right] \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k \left(\sum_{j=0}^{n} \mathcal{L}[P_k(x), P_j(x)]\Lambda_j^H\right) \\ = \; & \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k K_k \Lambda_k^H \,, \end{aligned} \tag{2.105}$$

donde $K_k = \mathcal{L}[P_k(x), P_k(x)]$, es definida positiva, y por el teorema 12 se verifica

$$\mathcal{L}[P_k(x), P_j(x)] = \delta_{kj} K_k \,, \quad 0 \leq k \leq n \quad .$$

Nótese que cada matriz de la forma $\Lambda_k K_k \Lambda_k^H$ es semidefinida positiva y por (2.105) tenemos que $< P(x), P(x) >$ es semidefinido positivo. Si suponemos que se verifica $< P(x), P(x) >= 0$, entonces por (2.105), se sigue que

$$\Lambda_k K_k \Lambda_k^H = 0 \,, \quad 0 \leq k \leq n \quad . \tag{2.106}$$

Dado que $K_k > 0$, por el teorema 8-(v), existe una única raíz cuadrada hermítica definida positiva $K_k^{1/2}$ de K_k para $0 \leq k \leq n$. De (2.106), podemos escribir

$$C_k C_k^H = \Lambda_k K_k^{1/2} K_k^{1/2} \Lambda_k^H = 0 \,, \quad C_k = \Lambda_k K_k^{1/2} > 0 \,, \quad 0 \leq k \leq n \quad . \tag{2.107}$$

De la invertibilidad de K_k y de (2.107), se sigue que las matrices Λ_1 , Λ_2 , ... , Λ_n deben ser cero. En efecto, en otro caso, para algún j con $0 \leq j \leq n$, la matriz $\Lambda_j \neq 0$. Dado que $K_j^{1/2}$ es invertible, se sigue que $C_j = \Lambda_j K_j^{1/2} \neq 0$ y por lo tanto existe un vector no nulo $z \in C^r$ tal que $y = C_j^H z \neq 0$. Así

$$\left(C_j C_j^H z, z\right) = \left(C_j^H z, C_j^H z\right) = (y, y) = \|y\|^2 > 0 \quad , \tag{2.108}$$

donde $\|y\|$ denota la norma euclídea de un vector y. Pero nótese que (2.108) contradice (2.107). En consecuencia, $\Lambda_k = 0$ para $0 \leq k \leq n$ y $P(x) \equiv 0$. Así, la propiedad (iv) está demostrada.

Capítulo 3

El problema de la mejor aproximación matricial y series de Fourier matriciales.

3.1. Funcionales matriciales definidos en $C\left([a,b], C^{r\times r}\right)$, donde $[a,b]$ es acotado.

El objetivo de esta sección es considerar funcionales matriciales actuando sobre el conjunto de las funciones continuas en un intervalo acotado $[a,b]$ de R a valores en $C^{r\times r}$. Resolveremos el problema de la mejor aproximación respecto a un funcional matricial definido positivo, estableciendo su conexión con las series de Fourier matriciales. Extenderemos al campo matricial análogos de la propiedad de Riemann-Lebesgue, la desigualdad de Bessel-Parseval y el concepto de conjunto total relativo a un funcional matricial.

La organización de esta sección es la siguiente. En la subsección 3.1.1 introducimos el concepto de funcional matricial definido positivo, actuando sobre el conjunto $C\left([a,b], C^{r\times r}\right)$ de todas las funciones continuas sobre el intervalo acotado $[a,b]$ de R a valores en $C^{r\times r}$, y resolvemos el problema de la mejor aproximación matricial. En la subsección 3.1.2 demostraremos algunos resultados importantes sobre series de Fourier matriciales, tales como la propiedad de Riemann-Lebesgue matricial y la desigualdad de Bessel-Parseval matricial. En la subsección 3.1.3 introducimos el concepto de conjunto total respecto a un funcional matricial definido positivo, y demostramos que una sucesión ortonormal de polinomios matriciales es total respecto a su funcional.
En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{P}_n[x]$ el conjunto de todos los polinomios matriciales de grado n. Para una matriz C en $C^{r\times r}$, denotaremos por $\|C\|_2$ su norma 2 definida por

$$\|C\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Cx\|_2}{\|x\|_2} \quad ,$$

donde para un vector y en C^r, $\|y\|_2$ denota la norma euclídea habitual. Denotaremos por $\sigma(C)$ el conjunto de todos los valores propios de C. Si C es una matriz hermítica, entonces $\sigma(C)$ es un subconjunto de R y denotaremos por $\lambda_{\text{mín}}(C)$ y $\lambda_{\text{máx}}(C)$ respectivamente, el mínimo y el máximo de $\sigma(C)$. Diremos que C es semidefinida positiva si C es hermítica y $(Cx, x) \geq 0$ para cualquier vector x en C^r, donde $(,)$ denota el producto interior euclídeo en $C^r \times C^r$. Si C es hermítica y $(Cx, x) > 0$ para cualquier vector no nulo x de C^r, entonces diremos que C es definida positiva. Si B y C son matrices hermíticas en $C^{r\times r}$, diremos que $B \geq C$ cuando $B - C$ es semidefinida positiva, y $B > C$ cuando $B - C$ es definida positiva. Si $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, por [28, p.57] se cumple

$$\max_{1\geq i,j\geq r} |c_{ij}| \leq \|C\|_2 \leq r \max_{1\geq i,j\geq r} |c_{ij}| \quad . \tag{3.1}$$

Recordemos que si $(z)_n$ denota la función factorial escalar, definida por $(z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1)$, $n \geq 1$, y $(z)_0 = 1$, entonces aplicando el cálculo funcional matricial a esta función, para cualquier matriz C en $C^{r\times r}$ se tiene

$$(C)_n = C(C+I)\dots(C+(n-1)I) \quad , \quad (C)_0 = I \quad , \quad n \geq 1 \quad .$$

Para x e y números complejos con parte real positiva, $Re(x) > 0$, $Re(y) > 0$, tenemos la función Beta de Euler $B(x, y)$ escalar definida por

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du \quad ,$$

véase [63, p.416]. Recordemos que por [27, p.801-802], si C es una matriz hermítica definida positiva, entonces C admite una única raíz cuadrada definida positiva que denotaremos por $C^{\frac{1}{2}}$, y que por el teorema 8, conmuta con C.

3.1.1. Funcionales matriciales y el problema de la mejor aproximación matricial.

Denotaremos por E el espacio de Banach de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to C^{r\times r}$, con la norma

$$\|f\|_\infty = \max \{\|f(x)\|_2 \,;\, a \leq x \leq b\} \tag{3.2}$$

donde $[a, b]$ es un intervalo acotado de la recta real.

DEFINICIÓN 8 . *Un funcional bilineal matricial hermítico $\mathcal{L}$ sobre E (abreviadamente FBMH) es una función*

$$\mathcal{L} : E \times E \to C^{r\times r}$$

verificando

(i) $\mathcal{L}(Af, g) = A\mathcal{L}(f, g) \quad ,$

(ii) $\mathcal{L}(f, Ag) = \mathcal{L}(f, g)A^H$,

(iii) $\mathcal{L}(f + g, h) = \mathcal{L}(f, h) + \mathcal{L}(g, h)$,

(iv) $\mathcal{L}(f, g + h) = \mathcal{L}(f, g) + \mathcal{L}(f, h)$,

(v) $\mathcal{L}(f, g) = \mathcal{L}(g, f)^H$,

para toda matriz $A \in C^{r\times r}$, y para toda $f, g, h \in E$.
Diremos que $\mathcal{L}$ es **acotado** *si existe $K > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{L}(f, g)\|_2 \leq K\|f\|_\infty\|g\|_\infty \tag{3.3}$$

Finalmente, diremos que $\mathcal{L}$ es **definido positivo**, *si $\mathcal{L}(f, f) \geq 0$ para toda $f \in E$, y*

$$\mathcal{L}(f, f) = 0 \ \ \textit{si y solo si} \ \ f = 0 \ . \tag{3.4}$$

En lo que sigue abreviaremos diciendo que $\mathcal{L}$ es un FBMHDPA para denotar que $\mathcal{L}$ es un funcional bilineal matricial hermítico definido positivo y acotado.

Supongamos que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es un sistema de polinomios matriciales **ortonormales**, es decir, tales que $\mathcal{L}(P_k, P_k) = I$, (abreviadamente SPOM) para un FBMHDPA $\mathcal{L}$. Sea $f \in E$ y denotemos por

$$C_k = \mathcal{L}(f, P_k)\,[\mathcal{L}(P_k, P_k)]^{-1} = \mathcal{L}(f, P_k) \ , \tag{3.5}$$

el k**-ésimo coeficiente de Fourier** de f respecto a $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, denotemos por

$$S(f) = \sum_{k\geq 0} C_k P_k \ , \tag{3.6}$$

la **serie de Fourier** de f respecto a $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y por

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_k P_k \ , \tag{3.7}$$

la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier (3.6).

Por razones de claridad en la presentación, empezaremos recordando el teorema de Courant-Fisher, cuya demostración puede encontrarse en [1, p.56].

TEOREMA 21 ([1]) *Sean C, D matrices hermíticas, y sean*

$$\lambda_i(C) \ \ , \ \ \lambda_i(C + D)$$

el i-ésimo valor propio de C y $C+D$ respectivamente, ordenados de forma creciente. Entonces

$$\lambda_i(C) + \lambda_{\text{mín}}(D) \leq \lambda_i(C + D) \leq \lambda_i(C) + \lambda_{\text{máx}}(D) \ . \tag{3.8}$$

El siguiente lema desempeñará un importante papel en lo que sigue.

LEMA 4 *Sean A, B matrices hermíticas, semi-definidas positivas en $C^{r\times r}$, tales que $B \geq A \geq 0$. Entonces $\|B\|_2 \geq \|A\|_2$.*

Demostración: Nótese que $B-A$ es semidefinida positiva y que $\lambda_i(B-A) \geq 0$. Tomando $C=-A$ y $D=B$, por el teorema 21 y (3.8), resulta que

$$\lambda_i(B-A) \leq \lambda_i(-A) + \lambda_{\text{máx}}(B) \quad , \tag{3.9}$$

donde λ_i denota el i-ésimo valor propio ordenado en sentido creciente. De (3.9) se sigue que

$$0 \leq \lambda_1(B-A) \leq \lambda_1(-A) + \lambda_{\text{máx}}(B) \quad . \tag{3.10}$$

Puesto que B es hermítica, por [57, p.23], se verifica que

$$\lambda_{\text{máx}}(B) = \|B\|_2 \quad . \tag{3.11}$$

De (3.10), (3.11), y por ser A hermítica, podemos escribir

$$\|B\|_2 = \lambda_{\text{máx}}(B) \geq -\lambda_1(-A) = -\text{mín}\,\{\lambda; \lambda \in \sigma(-A)\} = \lambda_{\text{máx}}(A) = \|A\|_2$$

de aquí, el resultado queda demostrado. $\square$

Ahora consideremos el siguiente problema de optimización matricial: Dada $f \in E$, encontrar un polinomio matricial $P(x)$ de grado n, que minimize el conjunto

$$\{\|\mathcal{L}(f-Q, f-Q)\|_2\,;\, Q \in \mathcal{P}_n[x]\} \quad . \tag{3.12}$$

Supongamos que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es un SPOM normalizado para $\mathcal{L}$, y sea $Q(x)$ un polinomio matricial de grado n. Por el teorema 11, existen matrices $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ en $C^{r\times r}$, determinadas univocamente, tales que

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i P_i(x) \quad . \tag{3.13}$$

De las propiedades de $\mathcal{L}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f-Q, f-Q) &= \mathcal{L}\left(f - \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i P_i(x), f - \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i P_i(x)\right) \\ &= \mathcal{L}(f,f) + \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i \Lambda_i^H - \sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}(f, P_i)\Lambda_i^H - \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i \mathcal{L}(P_i, f) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Si denotamos por C_i el i-ésimo coeficiente de Fourier de f respecto a $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$,

$$C_i = \mathcal{L}(f, P_i) = \mathcal{L}(P_i, f)^H \quad , \quad i \geq 0 \quad , \tag{3.15}$$

por (3.14)-(3.15), tenemos

$$0 \leq \mathcal{L}(f-Q, f-Q) = \mathcal{L}(f,f) + \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i \Lambda_i^H - \sum_{i=0}^{n} C_i \Lambda_i^H - \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i C_i^H \quad ,$$

$$\mathcal{L}(f-Q, f-Q) = \mathcal{L}(f,f) - \sum_{i=0}^{n} C_i C_i^H + \sum_{i=0}^{n} (C_i - \Lambda_i)(C_i - \Lambda_i)^H \geq 0 \quad . \tag{3.16}$$

Como $(C_i - \Lambda_i)(C_i - \Lambda_i)^H \geq 0$, por (3.16), el mínimo de $\mathcal{L}(f-Q, f-Q)$ se alcanza cuando $C_i = \Lambda_i$, para $0 \leq i \leq n$. Como $\mathcal{L}(f-Q, f-Q)$ es hermítica semidefinida positiva, por el lema 4, si el mínimo de $\mathcal{L}(f-Q, f-Q)$ se alcanza cuando $Q = S_n(f)$, el mínimo de $\|\mathcal{L}(f-Q, f-Q)\|_2$ se alcanza también en $Q = S_n(f)$.
En resumen, el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 22 *Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ un SPOM ortonormal respecto al funcional matricial definido positivo $\mathcal{L}$. Para cada $f \in E$ fija, y para cada entero positivo $m \geq 0$, el polinomio matricial $Q \in \mathcal{P}_m[x]$, que minimiza (3.12) viene dado por la m-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f respecto a $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$,*

$$Q = S_m(f) = \sum_{i=0}^{m} C_i(f) P_i \quad .$$

3.1.2. Series de Fourier matriciales: Propiedad de Riemann-Lebesgue matricial y desigualdad de Bessel-Parseval matriciales.

En esta subsección vamos a demostrar análogos matriciales de la propiedad de Riemann-Lebesgue y de la desigualdad de Bessel-Parseval. El siguiente resultado desempeñará un papel importante en lo que sigue.

TEOREMA 23 *Sea $\{S_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de matrices hermíticas semidefinidas positivas, tales que $0 \leq S_n \leq S_{n+1}$ y supongamos que existe una subsucesión $\{S_{k_n}\}_{n\geq 0}$, con $k_n < k_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} S_{k_n} = S \quad . \tag{3.17}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad . \tag{3.18}$$

<u>Demostración:</u> Dado $\epsilon > 0$, por (3.17), existe $n_0 > 0$ tal que

$$\|S_{k_n} - S\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq n_0 \quad , \tag{3.19}$$

y

$$\|S_{k_m} - S_{k_n}\|_2 < \frac{\epsilon}{2}, \quad m \geq n \geq n_0 \quad . \tag{3.20}$$

Sea $n_1 = k_{n_0}$ y $m \geq n_1$. Como $k_n < k_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$, existe un entero positivo i tal que

$$k_{n_0+i} \leq m \leq k_{n_0+i+1} \tag{3.21}$$

Por hipótesis, de (3.21) resulta que

$$S_{k_{n_0+i}} \leq S_m \leq S_{k_{n_0+i+1}} \quad , \tag{3.22}$$

$$S_m - S_{k_{n_0+i}} \leq S_{k_{n_0+i+1}} - S_{k_{n_0+i}} \quad . \tag{3.23}$$

Por (3.23) y el lema 4, resulta que

$$\|S_m - S_{k_{n_0+i}}\|_2 \leq \|S_{k_{n_0+i+1}} - S_{k_{n_0+i}}\|_2 \tag{3.24}$$

De (3.20) y (3.24) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|S - S_m\|_2 &\leq \|S - S_{k_{n_0+i}}\|_2 + \|S_{k_{n_0+i}} - S_m\|_2 \\
&\leq \|S - S_{k_{n_0+i}}\|_2 + \|S_{k_{n_0+i+1}} - S_{k_{n_0+i}}\|_2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

De aquí, el resultado queda demostrado. $\square$

COROLARIO 7 (Criterio de monotonía matricial) *Sea $\{S_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión creciente de matrices hermíticas semidefinidas positivas en $C^{r\times r}$, tales que $0 \leq S_n \leq S_{n+1}$ y la sucesión $\{\|S_n\|_2\}_{n\geq 0}$ está acotada. Entonces $\{S_n\}_{n\geq 0}$ converge.*

Demostración: Por (3.1), de las hipótesis, cada entrada $\{S_n(i,j)\}_{n\geq 0}$, para $1 \leq i,j \leq r$ es una sucesión acotada de números complejos que admite una subsucesión convergente. Después de tomar $r \times r$ subsucesiones, podemos asegurar que existe una subsucesión de S_n, sea $\{S_{k_n}\}_{n\geq 0}$, tal que cada una de sus entradas $\{S_{k_n}(i,j)\}_{n\geq 0}$ converge a un número complejo $S(i,j)$. Entonces, la matriz $S = (S(i,j))_{1\leq i,j\leq r}$ es el límite de la subsucesión $\{S_{k_n}\}_{n\geq 0}$. Ahora, por el teorema 23 se concluye que

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \quad ,$$

lo que demuestra el corolario 7. $\square$

Sea $f \in E$ y supongamos que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es una SPOM normalizada respecto al funcional $\mathcal{L}$. Por la demostración del teorema 22, véase (3.16), si $S_n(f)$ es la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de f respecto a $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, se tiene que

$$0 \leq \mathcal{L}(f - S_n(f), f - S_n(f)) = \mathcal{L}(f,f) - \sum_{i=0}^{n} C_i C_i^H \quad , \quad n \geq 0 \quad , \tag{3.25}$$

donde $C_i = \mathcal{L}(f, P_i)$. De esta forma

$$\sum_{i=0}^{n} C_i C_i^H \leq \mathcal{L}(f,f) \quad , \quad n \geq 0 \quad . \tag{3.26}$$

Dado que $C_i C_i^H \geq 0$, si denotamos por $T_n = \sum_{i=0}^{n} C_i C_i^H$, se tiene que $0 \leq T_n \leq T_{n+1}$, y por (3.26) y el lema 4, se tiene que

$$\|T_n\|_2 = \| \sum_{i=0}^{n} C_i C_i^H \|_2 \leq \|\mathcal{L}(f,f)\|_2 \quad , \quad n \geq 0 \quad . \tag{3.27}$$

Por el corolario 7 y (3.27), se sigue la convergencia de la serie $\sum_{i\geq 0} C_i C_i^H$ y

$$\sum_{i\geq 0} C_i C_i^H \leq \mathcal{L}(f,f) \quad . \tag{3.28}$$

En particular

$$\lim_{i\to\infty} C_i C_i^H = 0 \quad . \tag{3.29}$$

Por [57, p.23] tenemos $\|C_i C_i^H\|_2 = (\|C_i\|_2)^2$, de (3.29) se sigue que

$$\lim_{i\to\infty} C_i = 0 \quad . \tag{3.30}$$

Resumiendo, es siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 24 *Sea $\mathcal{L}$ un FBMHDP definido en $E = C\left([a,b], C^{r\times r}\right)$ y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM* **ortonormal** *respecto a $\mathcal{L}$. Si $f \in E$ y $C_k = \mathcal{L}(f, P_k)$, entonces se verifica:*

(Lema de Riemann-Lebesgue matricial)

$$\lim_{i\to\infty} C_i = 0 \quad , \tag{3.31}$$

y

(Desigualdad de Bessel matricial)

$$\sum_{k\geq 0} C_k C_k^H \leq \mathcal{L}(f,f) \quad . \tag{3.32}$$

3.1.3. Conjuntos totales respecto a un funcional matricial.

DEFINICIÓN 9 *Sea $\mathcal{L}$ un funcional matricial definido positivo sobre E, y sea $\mathcal{V}$ un subconjunto de E. Diremos que $\mathcal{V}$ es total en E con respecto a $\mathcal{L}$, si el único elemento $f \in E$, tal que $\mathcal{L}(f,g) = 0$ para todo $g \in \mathcal{V}$, es $f = 0$.*

El siguiente resultado demuestra el análogo matricial de la **identidad de Parseval**, y demuestra que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es total en E respecto a $\mathcal{L}$.

TEOREMA 25 *Sea $\mathcal{L}$ un FBMHDPA definido en $E = C\left([a,b], C^{r\times r}\right)$, y sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM* **ortonormal** *respecto a $\mathcal{L}$. Si $f \in E$ y C_i es el i-ésimo coeficiente de Fourier de f respecto a $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, $C_i = \mathcal{L}(f, P_i)$, entonces*

$$\mathcal{L}(f,f) = \sum_{k\geq 0} C_k C_k^H \quad \textit{(Identidad de Bessel-Parseval matricial)} \tag{3.33}$$

y $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es total respecto a $\mathcal{L}$.

Demostración: Sea $f \in E$ y $\epsilon = \frac{1}{n}$ para $n > 0$. Utilizando el teorema de aproximación de Weierstrass escalar, [18, p.133-135], a cada componente de f y por (3.1), podemos afirmar la existencia de un polinomio matricial $Q_{k_n}(x)$ de grado k_n tal que

$$\|f - Q_{k_n}\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{nK}} \quad , \tag{3.34}$$

donde $K > 0$ cumple (3.3). Por el teorema 22, si $S_{k_n}(f)$ denota la k_n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f respecto $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$:

$$S_{k_n} = \sum_{i=0}^{k_n} C_i P_i \quad , \tag{3.35}$$

se tiene que

$$\|\mathcal{L}(f - S_{k_n}(f), f - S_{kn}(f))\|_2 \leq \|\mathcal{L}(f - Q_{k_n}, f - Q_{k_n})\|_2 \quad . \tag{3.36}$$

Por (3.3), (3.34), se verifica

$$\|\mathcal{L}(f - Q_{k_n}, f - Q_{k_n})\|_2 \leq \frac{1}{n} \quad , \quad n > 0 \quad , \tag{3.37}$$

y por (3.36)-(3.37),

$$\|\mathcal{L}(f - S_{k_n}(f), f - S_{k_n}(f))\|_2 \leq \frac{1}{n} \quad . \tag{3.38}$$

Por la demostración del teorema 22, véase (3.16), se verifica

$$\mathcal{L}(f - S_{k_n}(f), f - S_{k_n}(f)) = \mathcal{L}(f,f) - \sum_{k=0}^{k_n} C_k C_k^H \quad , \tag{3.39}$$

y por (3.38)-(3.39),

$$\|\mathcal{L}(f,f)-\sum_{k=0}^{k_n} C_k C_k^H\|_2 < \frac{1}{n} \quad , \quad n>0 \quad . \tag{3.40}$$

De este modo la subsucesión $T_{k_n} = \sum_{i=0}^{k_n} C_i C_i^H$ de la sucesión $T_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_k^H$, converge a $\mathcal{L}(f,f)$ en $C^{r\times r}$, y por la desigualdad de Bessel-Parseval matricial, véase el teorema 24, obtenemos que la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ está acotada en $C^{r\times r}$. Por el corolario 7, concluimos que

$$\sum_{i\geq 0} C_i C_i^H = \mathcal{L}(f,f) \quad . \tag{3.41}$$

Además, si $f\in E$ y $C_i=\mathcal{L}(f,P_i)=0$ para cada $i\geq 0$, entonces por (3.54) se tiene $\mathcal{L}(f,f)=0$. Como $\mathcal{L}$ es definido positivo se sigue que $f=0$. Así, el teorema 25 queda demostrado. $\square$

EJEMPLO 10 *Sea $W:[a,b]\to C^{r\times r}$ tal que $W(x)$ es hermítica definida positiva para todo $x\in[a,b]$, $W(x)$ y $W(x)^{\frac{1}{2}}$ son integrables en $[a,b]$, y sea $\mathcal{L}$ definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: E\times E &\rightarrow C^{r\times r} \\ (f,g) &\rightarrow \int_a^b f(x)W(x)g^H(x)dx \end{aligned} \tag{3.42}$$

Es evidente que $\mathcal{L}$ esta acotado, porque

$$\|\mathcal{L}(f,g)\|_2 \leq \left(\int_a^b \|W(x)\|_2 dx\right)\|f\|_\infty \|g\|_\infty \quad .$$

Para demostrar que $\mathcal{L}$ es definido positivo, nótese que, para cualquier $f\in E$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f,f) &= \int_a^b f(x)W(x)f^H(x)dx = \int_a^b f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}W(x)^{\frac{1}{2}}f^H(x)dx \\ &= \int_a^b \left[f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right]^H dx \quad . \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sea $V(x)=\left[f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right]^H \geq 0$, por (3.43), para cualquier vector y en C^r, se tiene que

$$y^H\mathcal{L}(f,f)y = y^H\left(\int_a^b V(x)dx\right)y = \int_a^b y^H V(x)y dx \geq 0 \quad , \tag{3.44}$$

pues $y^H V(x)y\geq 0$. Además, si $f\in E$ verifica $\mathcal{L}(f,f)=0$, de (3.44) se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b y^H\left[f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right]^H y dx \\ &= \int_a^b \left[W(x)^{\frac{1}{2}}f(x)^H y\right]^H\left[W(x)^{\frac{1}{2}}f(x)^H y\right]dx \end{aligned}$$

$$0 = \int_a^b \|W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y\|^2 dx \quad , \quad y \in C^r \quad . \tag{3.45}$$

Por tanto,

$$W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y = 0 \quad , \quad y \in C^r \quad , \quad a \leq x \leq b \quad .$$

Así $W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H = 0$ *para* $a \leq x \leq b$, *y por la invertibilidad de* $W(x)^{\frac{1}{2}}$ *se concluye que* $f = 0$. *De esta forma* $\mathcal{L}$ *es definido positivo, y por la definición 8,* $\mathcal{L}$ *es un FBMHDPA.*

EJEMPLO 11 (Polinomios ortogonales matriciales de Gegenbauer) *Sea* D *una matriz hermítica en* $C^{r\times r}$ *verificando que*

$$\alpha(D) = \max\{z \quad ; \quad z \in \sigma(D)\} < -2 \quad , \tag{3.46}$$

y sea $W(x, D)$ *definido por*

$$W(x, D) = \begin{cases} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}(D+2I)} \quad , & |x| < 1 \\ \\ I \quad , & x = \pm 1 \end{cases} \tag{3.47}$$

Como D *es hermítica, para cada* x *en* $[-1, 1]$, $W(x, D)$ *es también hermítica y por [57, p.23] se tiene que*

$$\|W(x, D)\|_2 = \max\{|z| \ : \ z \in \sigma(W(x, D))\} \quad . \tag{3.48}$$

Por el teorema de la aplicación espectral [12, p.569],

$$\sigma\left(W(x, D)\right) = \left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}(z+2)} \quad ; \quad z \in \sigma(D)\right\} \quad , \quad si \quad |x| < 1 \quad . \tag{3.49}$$

De esta forma,

$$\|W(x, D)\|_2 = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}(\alpha(D)+2)} \quad , \quad |x| < 1 \quad , \tag{3.50}$$

y de forma análoga

$$\|W(x, D)^{\frac{1}{2}}\|_2 = (1-x^2)^{-\frac{1}{4}(\alpha(D)+2)} \quad , \quad |x| < 1 \quad . \tag{3.51}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \|W(x, D)\|_2 dx &= 2\int_0^1 \|W(x, D)\|_2 dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}(\alpha(D)+2)} dx \\ &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}(\alpha(D)+2)} t^{-\frac{1}{2}} dt = B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\alpha(D)}{2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.52}$$

De forma análoga, es fácil demostrar que

$$\int_{-1}^{1} \| (W(x,D))^{\frac{1}{2}} \|_2 dx = B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\alpha(D)}{4} + \frac{1}{2}\right) \quad . \tag{3.53}$$

Así, las funciones matriciales $W(x,D)$ y $W(x,D)^{\frac{1}{2}}$ son integrables en $[-1,1]$. Si se cumple la hipótesis (3.46), por (3.49) se tiene que los valores propios de $W(x,D)$ son positivos para $|x| \leq 1$. Como $W(x,D)$ es hermítica, por [1, p.106] se tiene que $W(x,D)$ es definida positiva para $|x| \leq 1$.
Sea $E = C\left([-1,1], C^{r\times r}\right)$ y consideremos el funcional matricial $\mathcal{L} : E \times E \to C^{r\times r}$, definido por

$$\mathcal{L}(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)W(x,D)g(x)^H dx \quad .$$

Por lo visto en el ejemplo 10, $\mathcal{L}$ es definido positivo, y por [35], los polinomios matriciales de Gegenbauer

$$P_n(x,D) = (-I-D)_n \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\left[(-\frac{D}{2})_k\right]^{-1} (x^2-1)^k x^{n-2k}}{k!(n-2k)!2^{2k}} \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

son ortogonales respecto a $\mathcal{L}$. Normalizando los polinomios matriciales $P_n(x,D)$ respecto a $\mathcal{L}$, se obtiene

$$Q_n(x,D) = K_n^{-1} P_n(x,D) \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

donde

$$\begin{aligned} K_n &= \mathcal{L}(P_n(x,D), P_n(x,D)) \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (-D-I)_n \Gamma\left(-\frac{1}{2}D\right) \Gamma^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right) \left(-\frac{1}{2}D + (n-\frac{1}{2}I)\right)^{-1}}{n!} \quad , \quad n \geq 0 \quad , \end{aligned}$$

Entonces $\{Q_n(x,D)\}_{n\geq 0}$ son un SPOM respecto a un FBMHDPA $\mathcal{L}$.

NOTA 12 *Con posterioridad a la demostración que aportamos en este capítulo del corolario 7 (Criterio de monotonía matricial), hemos sabido que dicho resultado está demostrado en un contexto más general (operadores positivos) en [47], y en [71] para matrices. En ambos casos la demostración es distinta de la que aportamos aquí.*

3.2. Funcionales matriciales definidos en $L^2_W(J, C^{r\times r})$.

En esta sección nos proponemos extender el concepto de serie de Fourier matricial para funciones de una clase más general que la de las continuas. Antes de su introducción recordaremos algunas propiedades elementales relacionadas con integrales matriciales. A lo largo de esta sección y de lo que sigue, la palabra integrable significa integrable en el sentido de Lebesgue.

LEMA 5 *Sea* $A : [a,b] \to C^{r\times r}$ *integrable y sea* $y \in C^r$. *Entonces se verifica:*

(i) $\left(\int_a^b A(x)dx\right)^H = \int_a^b A(x)^H dx \quad ,$

(ii) $\left(\int_a^b A(x)dx\right) y = \int_a^b (A(x)y)\, dx \quad ,$

(iii) $y^H \left(\int_a^b A(x)dx\right) = \int_a^b \left(y^H A(x)\right) dx \quad ,$

(iv) $y^H \left(\int_a^b A(x)dx\right) y = \int_a^b \left(y^H A(x) y\right) dx \quad .$

(v) *Si* $A(x) \geq 0$ *(hermítica semidefinida positiva) para todo* $x \in [a,b]$, *entonces* $\int_a^b A(x)dx \geq 0$.

Demostración: La de los apartados (i)-(iv) es inmediata trabajando componente a componente. Para demostrar (v), observese que de (iv) se sigue que

$$y^H \left(\int_a^b A(x)dx\right) y = \int_a^b \left(y^H A(x) y\right) dx \geq 0$$

y de aquí, el resultado queda demostrado. $\square$

Obsérvese que si $f, g, W : [a,b] \to C^{r\times r}$ **son integrables** , entonces la integral

$$\mathcal{L}(f,g) = \int_a^b f(x)W(x)g(x)^H dx \quad , \tag{3.54}$$

define un funcional bilineal matricial. Además, si $W(x)$ es **hermítica definida positiva** para todo $x \in [a,b]$, y $W(x)^{\frac{1}{2}}$ **es integrable** en $[a,b]$, entonces podemos escribir

$$f(x)W(x)f(x)^H = \left(f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right)\left(f(x)W(x)^{\frac{1}{2}}\right)^H \geq 0 \quad , \ \forall\, x \in [a,b] \quad .$$

Por el lema 5, resulta que

$$y^H \left(\int_a^b f(x)W(x)f(x)^H dx\right) y = \int_a^b y^H \left(f(x)W(x)f(x)^H\right) y dx \quad , \tag{3.55}$$

lo que demuestra que

$$\mathcal{L}(f,f) = \int_a^b f(x)W(x)f(x)^H dx \geq 0 \quad . \tag{3.56}$$

Además, sea f integrable en $[a,b]$ y tal que $\mathcal{L}(f,f) = 0$. Entonces

$$\int_a^b f(x)W(x)f(x)^H dx = 0 \quad . \tag{3.57}$$

Sea $y \in C^r$, entonces de (3.55) y (3.57) se sigue que

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_a^b y^H \left[f(x)W(x)f(x)^H \right] y dx \\
&= \int_a^b \left[W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y \right]^H \left[W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y \right] dx \\
&= \int_a^b \| W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y \|^2 dx \quad . \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

Puesto que para cada $y \in C^r$, $\|W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y\| \geq 0$, de (3.58) se sigue que

$$
W(x)^{\frac{1}{2}} f(x)^H y = 0 \quad , \quad \textit{casi por todas partes para} \quad x \in [a,b] \quad . \qquad (3.59)
$$

Dado que $W(x)^{\frac{1}{2}}$ es invertible para todo $x \in [a,b]$, de (3.59) resulta que para cualquier $y \in C^r$

$$
f(x)^H y = \left(y^H f(x) \right)^H = 0 \quad \textit{casi por todas partes para} \quad x \in [a,b] \quad . \qquad (3.60)
$$

De (3.60), si $\{e_i\}_{i=0}^r$ es una base de C^r, se sigue que

$$
f(x)e_i = 0 \quad \textit{casi por todas partes para} \quad x \in [a,b] \quad , \quad 1 \leq i \leq r \quad .
$$

luego $f(x)^H = 0$ casi por todas partes para $x \in [a,b]$. En consecuencia $f = 0$, en el espacio de las funciones integrables en $[a,b]$ a valores en $C^{r \times r}$.

El siguiente resultado es consecuencia directa de [57, p.21].

LEMA 6 . *Sea A una matriz hermítica definida positiva en $C^{r \times r}$. Entonces, si $A^{\frac{1}{2}}$ es la única raíz cuadrada hermítica definida positiva de A, se verifica*

$$
\left(\|A^{\frac{1}{2}}\|_2 \right)^2 = \|A\|_2 \quad . \qquad (3.61)
$$

Denotemos por

$$
L_W^2 \left([a,b] , C^{r \times r} \right)
$$

el espacio de las funciones $f : [a,b] \to C^{r \times r}$, tales que

$$
\int_a^b \|f(x)\|_2^2 \|W(x)\|_2 dx < \infty \quad , \qquad (3.62)
$$

donde $W(x)$ es hermítica definida positiva para todo $x \in [a,b]$.
Para $f \in L_W^2 \left([a,b] , C^{r \times r} \right)$ introducimos la norma

$$
\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b \|f(x)\|_2^2 \|W(x)\|_2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.63)
$$

Es fácil comprobar que con esta definición, el espacio $L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right)$ es un espacio normado. Consideremos el funcional bilineal hermítico definido positivo $\mathcal{L}$ en $L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right)$, dado por

$$\mathcal{L}: L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right) \times L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right) \to C^{r\times r} \quad ,$$

$$\mathcal{L}(f,g) = \int_a^b f(x)W(x)g(x)^H dx \quad . \tag{3.64}$$

Por ser $W(x)$ integrable en $[a,b]$, de (3.61) se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(f,g)\|_2 &= \|\int_a^b f(x)W(x)g(x)^H dx\|_2 \\ &\leq \int_a^b \|f(x)\|_2\|W(x)\|_2\|g(x)^H\|_2 dx \\ &= \int_a^b \left(\|f(x)\|_2\|W(x)\|_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(\|W(x)\|_2^{\frac{1}{2}}\|g(x)\|_2\right) dx \quad . \end{aligned} \tag{3.65}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (3.65), resulta que

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(\|f(x)\|_2\|W(x)\|_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(\|W(x)\|_2^{\frac{1}{2}}\|g(x)\|_2\right) dx \\ \leq\ &\left\{\int_a^b \|f(x)\|_2^2\|W(x)\|dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b \|g(x)\|_2^2\|W(x)\|_2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2\|g\|_2 \end{aligned}$$

De este modo tenemos

$$\|\mathcal{L}(f,g)\|_2 \leq \|f\|_2\|g\|_2 \quad , \tag{3.66}$$

para toda f,g en $L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right)$, lo que demuestra que $\mathcal{L}$ es acotado en $L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right)$. Teniendo en cuenta que para una matriz $A\in C^{r\times r}$, se verifica [28, p.57],

$$\max_{1\leq i,j\leq r} \mid a_{ij}\mid \leq \|A\|_2 \leq r \max_{1\leq i,j\leq r} \mid a_{ij}\mid \quad , \tag{3.67}$$

de (3.63) y (3.67) se sigue que

$$f\in L^2_W\left([a,b],C^{r\times r}\right) \ ,\ \textit{si y solo si}\ ,\ f_{ij}\in L^2_{\|W\|_2}\left([a,b],C\right) \ ,\ 1\leq i,j\leq r \quad , \tag{3.68}$$

y de aquí, puesto que

$$L^2_{\|W\|_2}\left([a,b],C\right) = \left\{h:[a,b]\to C\ ;\int_a^b \mid h(x)\mid^2 \|W(x)\|_2 dx < \infty\right\} \quad ,$$

es un espacio de Banach, con la norma [18, p.69]

$$\|h\|_2 = \left\{ \int_a^b \mid h(x) \mid^2 \|W(x)\|_2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Es fácil demostrar que:

$\{f_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right)$, si y solamente si para cada $1 \leq i, j \leq r$, la sucesión componente

$$\left\{(f_{ij})_n\right\}_{n\geq 0} \quad \text{es de Cauchy en} \quad L^2_{\|W\|_2}\left([a,b], C\right) \quad . \tag{3.69}$$

y que:

$\{f_n\}_{n\geq 0}$ es convergente en $L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right)$, si y solo si, para cada i, j, con $1 \leq i, j \leq r$, la sucesión componente

$$\left\{(f_{ij})_n\right\}_{n\geq 0} \quad \text{es convergente en} \quad L^2_{\|W\|_2}\left([a,b], C\right) \quad , \tag{3.70}$$

y que por tanto,

$$\left(L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right), \|\cdot\|_2\right) \quad \text{es un espacio de Banach} \quad . \tag{3.71}$$

Teniendo en cuenta que $W(x)$ **es integrable** en $[a,b]$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $f \in L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right)$, se sigue que

$$\int_a^b \|f(x)\|_2\|W(x)\|_2 dx \leq \left\{\int_a^b \|f(x)\|_2^2\|W(x)\|_2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_a^b \|W(x)\|_2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.72}$$

De este modo, si $W(x)$ es integrable en $[a,b]$ (aunque $[a,b]$ sea no acotado), se verifica

$$L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right) \subset L^1_W\left([a,b], C^{r\times r}\right) \quad . \tag{3.73}$$

El siguiente resultado puede considerarse una extensión de los teoremas 22 y 24 de la sección 1.

TEOREMA 26 *Sea $W(x)$ hermítica definida positiva para todo $x \in [a,b]$, y supongamos que W y $W^{\frac{1}{2}}$ son integrables en $[a,b]$. Sea $\mathcal{L}$ el funcional matricial definido positivo en $L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right)$ dado por (3.64), y supongamos que $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es un sistema* **ortonormal** *de polinomios respecto a $\mathcal{L}$. Si $f \in L^2_W\left([a,b], C^{r\times r}\right)$, se verifica:*

(i) *Sea $Q(x)$ un polinomio matricial de grado n y $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}(f, P_k)P_k$, entonces*

$$\|\mathcal{L}(f - S_n(f), f - S_n(f))\|_2 \quad \leq \quad \|\mathcal{L}(f - Q,\ f - Q)\|_2 \tag{3.74}$$

Si además $[a,b]$ es acotado, entonces:

(ii) *Sea* $C_k = \mathcal{L}(f, P_k)$ *, el k-ésimo coeficiente de Fourier de* f *respecto a* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$. *Entonces*

$$\sum_{k\geq 0} C_k C_k^H = \mathcal{L}(f,f) \qquad \textit{(Identidad de Parseval)} \tag{3.75}$$

$$\lim_{k\to\infty} C_k = 0 \qquad \textit{(Lema de Riemann-Lebesgue)} \tag{3.76}$$

(iii) *Si* $C_k = 0$ *para todo* $k \geq 0$ *, entonces* $f = 0$

Demostración: (i) Es análoga a la demostración del teorema 22.
(ii) Obsérvese que de (3.68) se sigue que cada componente f_{ij} de f, es una función de $L^2_{\|W\|_2}([a,b], C)$. Como los polinomios escalares son densos en $L^2_{\|W\|_2}([a,b], C)$, véase [18, p75], dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio escalar $P_{ij}(x)$ tal que

$$\|f_{ij} - P_{ij}\|_2^2 = \int_a^b \mid f_{ij}(x) - P_{ij}(x) \mid^2 \|W(x)\|_2 dx < \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^2 \tag{3.77}$$

De (3.67) y (3.77), podemos escribir

$$\|f - P\|_2 = \int_a^b \|f(x) - P(x)\|_2^2 \|W(x)\|_2 dx < \epsilon^2 \tag{3.78}$$

Ahora, por el apartado (i), de (3.74) y (3.77), si $P(x)$ es un polinomio de grado $n(\epsilon)$, se verifica

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}(f - S_{n(\epsilon)}(f)\ ,\ f - S_{n(\epsilon)}(f))\|_2 \leq \|\mathcal{L}(f - P\ ,\ f - P)\|_2 \\ = \ & \| \int_a^b [f(x) - P(x)]\,[W(x)]\,[f(x) - P(x)]^H\, dx\|_2 \\ \leq \ & \int_a^b \|f(x) - P(x)\|_2^2 \|W(x)\|_2 dx < \epsilon^2 \quad . \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\mathcal{L}(f - S_{n(\epsilon)}(f)\ ,\ f - S_{n(\epsilon)}(f))\|_2 < \epsilon^2 \tag{3.79}$$

Por otra parte, de las propiedades de los funcionales bilineales matriciales hermíticos definidos positivos sabemos que

$$0 \leq \mathcal{L}(f - S_{n(\epsilon)}(f)\ , f - S_{n(\epsilon)}(f)) = \mathcal{L}(f,f) - \sum_{k=0}^{n(\epsilon)} C_k C_k^H \tag{3.80}$$

De (3.79) y (3.80) y el teorema 21 se sigue que:

$$\textit{Para cada } \epsilon > 0 \ , \ \exists n(\epsilon) > 0 \textit{ tal que } \|\mathcal{L}(f,f) - \sum_{k=0}^{n(\epsilon)} C_k C_k^H\|_2 < \epsilon^2 \tag{3.81}$$

Puesto que $\mathcal{L}$ es definido positivo, por el corolario 7 de la sección 1 y de (3.81), se concluye la igualdad (3.75). La demostración de que $\{C_k\}_{k\geq 0}$ tiende a la matriz nula, es análoga a la realizada en el teorema 23 de la sección 1.
(iii) Es una consecuencia inmediata de (ii). $\square$

NOTA 13 *Puesto que el intervalo* $[a,b]$ *puede no ser acotado en el teorema 26, las hipótesis de integrabilidad de* $W(x)^{\frac{1}{2}}$ *y* $W(x)$ *no se pueden omitir. En* $[1,\infty[$ *,* $W(x)=x^{-2}$ *es integrable y no lo es* $W(x)^{\frac{1}{2}}=x^{-1}$*. En el intervalo* $[0,1]$ *,* $W(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ *es integrable y no lo es* $(W(x))^2=x^{-1}$*.*

La identidad de Parseval sugiere la siguiente definición:

DEFINICIÓN 10 *Sea* $\mathcal{L}$ *un FBMHDP acotado en un espacio de Banach* E*, y sea* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión en* E*. Decimos que* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *es* **total** *en* E *respecto a* $\mathcal{L}$*, si el único elemento* $f\in E$ *tal que* $\mathcal{L}(f\ ,\ f_n)=0$*, para todo* $n\geq 0$ *, es* $f=0$*.*

EJEMPLO 12 *Si* $E=\left(C\left([a,b]\,,C^{r\times r}\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ *donde* $[a,b]$ *es un intervalo acotado, y sea* $\mathcal{L}$ *un FBMHDP en* E*. Si* $\{P_k(x)\}_{k\geq 0}$ *es una SPOM normalizada, entonces por el teorema 25 de la sección 1 ,* $\{P_k(x)\}_{k\geq 0}$ *es total respecto a* $\mathcal{L}$ *en* E*.*

EJEMPLO 13 *Sea* $W(x)$ *hermítica definida positiva para todo* $x\in J$*, siendo* J *un intervalo acotado de* R*, con* $W(x)$ **y** $W(x)^{\frac{1}{2}}$ **integrables en** J *. Sea* $\mathcal{L}$ *el FBMHDP definido en* $\left(L^2_W\left(J,C^{r\times r}\right),\|\cdot\|_2\right)$ *por (3.64) y sea* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *una SPOM normalizada respecto a* $\mathcal{L}$*. Entonces por el teorema 26 se sigue que* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *es total en* $L^2_W\left(J,C^{r\times r}\right)$ *respecto a* $\mathcal{L}$*.*

NOTA 14 *La identidad de Parseval matricial no tiene el mismo significado que la identidad de Parseval en un espacio de Hilbert, donde para todo elemento del espacio, esta garantizada la convergencia en norma de su serie de Fourier-Bessel respecto a un sistema ortonormal. Sin embargo, la identidad de Parseval matricial si es una* **condición necesaria** *para la convergencia en* $\|\cdot\|_2$ *de* $L^2_W\left([a,b]\,,C^{r\times r}\right)$*. En efecto, si para* $f\in L^2_W\left([a,b]\,,C^{r\times r}\right)$ *se verifica*

$$f=\sum_{k\geq 0}\mathcal{L}(f,P_k)P_k=\sum_{k\geq 0}C_kP_k$$

entonces puesto que $\mathcal{L}$ *es* **acotado***, por continuidad se tiene que*

$$\mathcal{L}(f,f)=\mathcal{L}\left(\sum_{k\geq 0}C_kP_k\ ,\sum_{k\geq 0}C_kP_k\right)=\sum_{k\geq 0}C_k\mathcal{L}\left(P_k\ ,\sum_{i\geq 0}C_iP_i\right)=\sum_{k\geq 0}C_kC_k^H$$

Con la excepción de los apartados (ii) y (iii) del teorema 26 todas las afirmaciones hechas en esta sección son válidas tanto si el intervalo $[a,b]$ es o no acotado. Nótese que si $[a,b]$ es no acotado, entonces $W(x)=I$ no es integrable en $[a,b]$. Las conclusiones de dichos apartados no son ciertas en general, porque, **si** $[a,b]$ **es no acotado, no se**

puede afirmar que dada $f \in L^2_W([a,b], C^{r\times r})$ exista un polinomio matricial $P(x)$ tal que la norma $\|f-P\|_2$ sea tan pequeña como se quiera.
Sin embargo, aún en el caso en que $[a,b]$ es no acotado, si que se verifica una desigualdad de tipo Bessel-Parseval matricial que pasamos a demostrar.

TEOREMA 27 *Sea $W(x)$ hermítica definida positiva en $C^{r\times r}$ para todo x en un intervalo no acotado $J \subset R$ y supongamos que W* **es integrable** *en J. Sea $\mathcal{L}$ el funcional en $L^2_W(J, C^{r\times r})$ definido por*

$$\mathcal{L} : L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right) \times L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right) \to C^{r\times r} \quad ,$$

$$\mathcal{L}(f,g) = \int_J f(x)W(x)g(x)^H dx$$

sean $f \in L^2_W(J, C^{r\times r})$, $B_k \in C^{r\times r}$, $S_n(f) = \sum_{k=0}^n \mathcal{L}(f, P_k)P_k = \sum_{k=0}^n C_k P_k$, donde $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ es una SPOM **normalizada** *con respecto a $\mathcal{L}$, y sea $P(x) = \sum_{k=0}^n B_k$ $P_k(x)$ un polinomio matricial de grado $n \geq 0$.*
Entonces se verifica

(i)

$$\|\mathcal{L}(f-S_n(f), f-S_n(f))\|_2 \leq \|\mathcal{L}(f-P, f-P)\|_2 \tag{3.82}$$

(ii) *(Desigualdad de Bessel-Parseval matricial)*

$$\sum_{k=0}^n C_k C_k^H \leq \sum_{k\geq 0} C_k C_k^H \leq \mathcal{L}(f,f) \ , \ n \geq 0 \tag{3.83}$$

(iii) *(Lema de Riemann-Lebesgue matricial)*

$$\lim_{k\to\infty} C_k = 0 \tag{3.84}$$

Demostración: Es claro que $\mathcal{L}$ es un FBMHDP en $L^2_W(J, C^{r\times r})$, verificándose

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \mathcal{L}(f-P, f-P) = \mathcal{L}\left(f - \sum_{k=0}^n B_k P_k, f - \sum_{k=0}^n B_k P_k\right) \\ &= \ \mathcal{L}(f,f) + \sum_{k=0}^n B_k B_k^H - \sum_{k=0}^n \mathcal{L}(f, P_k) B_k^H - \sum_{k=0}^n B_k \mathcal{L}(P_k, f) \quad , \end{aligned}$$

que se puede escribir de la forma

$$0 \leq \mathcal{L}(f,f) - \sum_{k=0}^n C_k C_k^H + \sum_{k=0}^n (C_k - B_k)(C_k - B_k)^H \tag{3.85}$$

Puesto que $\sum_{k=0}^n C_k C_k^H$ y $\mathcal{L}(f,f)$ son matrices fijas, independientes de B_k, es decir, independiente de $P(x)$, de (3.85) se sigue que el mínimo (en el espacio de las matrices definidas positivas de tamaño $r \times r$) del segundo miembro de (3.85), se alcanza cuando $B_k = C_k$, y toma el valor

$$\mathcal{L}(f - S_n(f), f - S_n(f)) \;=\; \mathcal{L}(f,f) - \sum_{k=0}^{n} C_k C_k^H \geq 0 \quad , \quad n \geq 0 \tag{3.86}$$

En particular,

$$\mathcal{L}(f - P, f - P) \geq \mathcal{L}(f - S_n(f), f - S_n(f)) \tag{3.87}$$

Tomando $\| \cdot \|_2$ en (3.87), y teniendo en cuenta el lema 4 de la sección 1 , se sigue (3.82). Esto demuestra (i). Puesto que $C_k C_k^H \geq 0$, de (3.87) se sigue (3.82). Por el corolario 7 de la sección 1, se deduce la convergencia de la serie matricial

$$\sum_{k \geq 0} C_k C_k^H$$

A partir de aquí, la demostración de (3.83) es análoga a la análoga del teorema 23 de la sección 1. $\square$

El siguiente resultado nos proporciona una relación entre la convergencia puntual y la convergencia en $\| \cdot \|_2$ en $L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right)$, siendo J un intervalo (no necesariamente acotado) en R.

TEOREMA 28 *Sea $W(x)$ hermítica definida positiva en $C^{r\times r}$ para todo $x \in J$ intervalo de R y supongamos que W es integrable en J. Sean $\{f_n\}_{n\geq 0}$ funciones de $L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right)$, tal que $f_n \to f$ puntualmente en J, y supongamos existe Ψ en $L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right)$, tal que*

$$\|f_n(x)\|_2 \leq \|\Psi(x)\|_2 \quad , \quad x \in J \ , \ n \geq 0 \tag{3.88}$$

Entonces $f_n \to f$ en norma de $L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right)$.

Demostración: Nótese que de (3.67) y (3.88), actuando coordenada a coordenada, se sigue que

$$\|f(x)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\|_2 \leq \|\Psi(x)\|_2 \quad ,$$

de aquí

$$f \in L^2_W\left(J, C^{r\times r}\right)$$

y

$$\|f_n(x) - f(x)\|_2^2 \leq \left(\|f_n(x)\|_2 + \|f(x)\|_2\right)^2 \leq \left(2\|\Psi(x)\|_2\right)^2 \quad .$$

Por el teorema de la convergencia dominada [18, p.83], se sigue que

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_J \|f_n(x) - f(x)\|_2^2 \|W(x)\|_2 dx \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

con lo que el resultado queda demostrado. $\square$

EJEMPLO 14 (Polinomios matriciales de Hermite) . *Sea* $W : R \to C^{r\times r}$ *definido por* $W(x) = e^{-\frac{Ax^2}{2}}$ *, donde* A *es una matriz hermítica definida positiva. Entonces* $W(x)$ *es hermítica definida positiva para todo* $x \in R$ *, porque* $\sigma(e^{-\frac{Ax^2}{2}}) = \left\{ e^{-\frac{zx^2}{2}} \,;\, z \in \sigma(A) \right\} \subset]0, \infty[$.
Además, como se demostró en [40], W *es integrable en* R *y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = \left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Consideremos los polinomios de Hermite matriciales definidos en el ejemplo 9 por (2.61). Veamos que

$$\{H_n(x, A)\}_{n\geq 0} \subset L^2_W \left((-\infty, +\infty), C^{r\times r}\right) \quad . \tag{3.89}$$

Para ello, tendremos que demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|H_n(x, A)\|^2 \|W(x)\| dx < +\infty \quad , \quad n \in N. \tag{3.90}$$

Se demostró en [40] que los polinomios matriciales de Hermite verifican

$$\|H_n(x, A)\| \leq \frac{H_n\left(\frac{ix\|\sqrt{2A}\|}{2}\right)}{i^n} \quad , \quad x \in R \tag{3.91}$$

donde $H_n(x)$ *es el n-ésimo polinomio de Hermite escalar. Por otra parte, por ser* $W(x)$ *hermítica definida positiva,* $\|W(x, A)\|$ *coincide con su radio espectral [57, p.23], y por tanto*

$$\|W(x)\| = \|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|$$

$$= \max\left\{ e^{-\frac{zx^2}{2}} \,;\, z \in \sigma(A) \right\} = e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} \quad , \quad x \in R \quad , \tag{3.92}$$

donde $\beta(A) = \min\{z \,;\, z \in \sigma(A)\}$. *Luego de (3.91) y (3.92) se sigue*

$$\|H_n(x, A)\|^2 \|W(x)\| \leq P(x) e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} \quad , \tag{3.93}$$

siendo $P(x)$ *un polinomio de grado* n^2*, de donde se sigue que la sucesión de polinomios matriciales de Hermite* $\{H_n(x, A)\}_{n\geq 0}$ *está en* $L^2_W\left(]-\infty, +\infty[, C^{r\times r}\right)$*, y que por tanto los resultados obtenidos en este capítulo, son aplicables a ésta familia de polinomios matriciales.*

EJEMPLO 15 (Polinomios ortogonales matriciales de Gegenbauer) *Para facilitar la compresión de lo que sigue, recordemos brevemente algunos resultados de [35] adaptados al caso donde* D *es una matriz hermítica que verifica la condición (3.46) y* $W(x, D)$ *viene dada por (3.47). Aunque sabemos que los polinomios matriciales de Gegenbauer están en* $L^2_W\left([-1, 1], C^{r\times r}\right)$ *porque son continuos en el intervalo* $[-1, 1]$*, estamos interesados en obtener cotas de* $\|P_n(x, D)\|_2$.

Si A es una matriz en $C^{r\times r}$ tal que

$$Re(z) > 0 \quad para \quad todo \quad z \in \sigma(A) \quad , \tag{3.94}$$

entonces se puede definir $B(A, yI)$ para $Re(y) > 0$, en la forma:

$$B(A, yI) = \Gamma(A)\Gamma(yI)\Gamma^{-1}(A + yI) \quad , \tag{3.95}$$

verificándose

$$B(A, yI) = B(yI, A) \quad . \tag{3.96}$$

Dada D verificando (3.46), sea $A = -\frac{1}{2}(D + I)$, y

$$a = \max\left\{-\frac{1}{2}(1 + Re(z)) \ : \ z \in \sigma(D)\right\} > \frac{1}{2} \quad . \tag{3.97}$$

Si N es la matriz nilpotente en $C^{r\times r}$ tal que

$$G^H(2A - I)Q = \Lambda + N \quad ,$$

es la descomposición de Schur de $2A - I$, entonces de [35] se sigue que

$$\|B(A, yI)\|_2 \le B(a, \frac{1}{2}) + \pi\sum_{k=1}^{r-1}\|N\|_2^k = \gamma_2(a) \quad . \tag{3.98}$$

De aquí, de (3.50) y de [35] se sigue que si $P_n(x, D)$ es el n-ésimo polinomio matricial de Gegenbauer, entonces

$$\|P_n(x, D)\|_2 \le M_n = \gamma_2(a)\|B^{-1}\left(-\frac{1}{2}(D + I), \frac{1}{2}I\right)\|_2\frac{\|(-I - D)_n\|_2}{n!} \tag{3.99}$$

$$\|W(x, D)\|_2^2 = (1 - x^2)^{-(\alpha(D)+2)} \quad , \quad |x| < 1 \quad ,$$

$$\int_{-1}^{1}\|P_n(x, D)\|_2\|W(x, D)\|_2^2 dx = M_n B\left(\frac{1}{2}, -\alpha(D) - 1\right) \quad ,$$

con lo que $P_n(x, D)$ está en $L_W^2([-1, 1], C^{r\times r})$ y tenemos la acotación (3.99).
Si consideramos los polinomios de Gegenbauer normalizados $Q_n(x, D)$ definidos en el ejemplo 11 de este capítulo, entonces, de [35] y de (3.95) resulta que:

$$\|Q_n(x, D)\|_2$$

$$\le \gamma_2(a)\left[n + \frac{1}{2}(1 + \|D\|_2)\right]\left(\|\Gamma\left(-\frac{1}{2}D\right)\|_2\right)^2\left(\|\Gamma^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I + D)\right)\|_2\right)^2 \quad , \quad n \ge 0 \quad , \quad |x| \le 1 \quad ,$$

donde $\gamma_2(a)$ viene dado por (3.98).

NOTA 15 *Series de Fourier respecto a una sucesión de polinomios ortogonales matriciales, han sido estudiadas en [58], en un contexto diferente al problema de la mejor aproximación matricial aquí tratado. En [58] se generalizan los núcleos de Fejer, Dirichlet y de la Valle-Poussin al ámbito matricial. Sin embargo, no se estudian análogos matriciales de la propiedad de Riemann-Lebesgue, ni de la desigualdad de Bessel-Parseval. En el capítulo 4 de esta memoria, estas propiedades se utilizarán para estudiar desarrollos en serie de los polinomios de Hermite matriciales.*

Capítulo 4

Sobre los polinomios de Hermite matriciales $H_n(X, A)$, donde A es una matriz hermítica definida positiva.

4.1. Introducción.

En este capítulo nos ocupamos de una clase concreta de polinomios ortogonales matriciales introducidos recientemente en [40]. Se trata de los polinomios de Hermite matriciales que definen un sistema ortogonal respecto a un funcional matricial definido positivo de tipo integral descrito en el capítulo 3, concretamente:

$$\mathcal{L} : L^2_W \left((-\infty, +\infty) , C^{r\times r} \right) \times L^2_W \left((-\infty, +\infty) , C^{r\times r} \right) \to C^{r\times r}$$

donde

$$W(x) = e^{-\frac{Ax^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty \quad , \tag{4.1}$$

A es una matriz **hermítica definida positiva** en $C^{r\times r}$, y

$$\mathcal{L}(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} g(x)^H dx \quad . \tag{4.2}$$

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la sección 2 demostraremos que los polinomios de Hermite matriciales $\left\{ \widetilde{H}_n(x, A) \right\}_{n\geq 0}$ constituyen un sistema ortogonal total de polinomios ortogonales matriciales SPOM respecto al funcional $\mathcal{L}$ definido por (4.2). En la sección 3, introducimos las funciones matriciales de Hermite que extienden a las funciones de Hermite escalares, demostrándose que las funciones de Hermite matriciales definen un **sistema ortogonal de funciones matriciales** (no polinomios) respecto a un funcional matricial apropiado. En la sección 4 estudiaremos el comportamiento asintótico de los polinomios de Hermite matriciales y aplicaremos este desarrollo, en la sección 5, para obtener una forma nueva de calcular la matriz exponencial para matrices que cumplen determinadas propiedades espectrales, y en la sección 6, para obtener un teorema de desarrollo en serie de polinomios de Hermite.

4.2. Totalidad de los polinomios de Hermite matriciales.

Por conveniencia de notación, denotaremos por $\alpha(A)$ el radio espectral de A , que como sabemos coincide con $\max\{z; z \in \sigma(A)\}$ al ser A hermítica definida positiva. Recordemos que de [40], sabemos que los polinomios de Hermite matriciales $H_n(x, A)$ pueden expresarse en la forma:

$$H_n(x, A) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k \left(\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad , \tag{4.3}$$

donde $\sqrt{2A}$ denota la raíz cuadrada de la matriz $2A$, en el sentido del cálculo funcional holomorfo, véase [40] y $\left[\frac{n}{2}\right]$ representa la parte entera de $\frac{n}{2}$. Además, se verifica la relación de tres términos matricial

$$H_{n+1}(x, A) = x\sqrt{2A} \;\; H_n(x, A) - 2nH_{n-1}(x, A), \quad n \geq 1 \;\; , \tag{4.4}$$

En [40], se demostró que, para $W(x) = e^{-\frac{Ax^2}{2}}$, se verifica

$$\mathcal{L}(H_n(x, A), H_s(x, A)) = 0, \;\; n \neq s \;\; , \tag{4.5}$$

$$\mathcal{L}(H_n(x, A), H_n(x, A)) = 2^n n! \left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = K_n \;\; , \;\; n \geq 0 \;\; . \tag{4.6}$$

De este modo $\{H_n(x, A)\}_{n\geq 0}$ es un SPOM respecto al funcional matricial $\mathcal{L}$ definido por (4.2). Para obtener un sistema normalizado respecto a $\mathcal{L}$, consideramos los polinomios matriciales

$$\widetilde{H}_n(x, A) = K_n^{-\frac{1}{2}} H_n(x, A) = \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x, A) \;\; , \;\; n \geq 0 \;\; , \tag{4.7}$$

que definen una SPOM ortonormal con respecto a $\mathcal{L}$.
De (4.4) y (4.7) obtenemos la siguiente relación de tres términos para los polinomios matriciales de Hermite normalizados:

$$\sqrt{n} A^{-\frac{1}{2}} \widetilde{H}_n(x, A) = Ix\widetilde{H}_{n-1}(x, A) - \sqrt{(n-1)} A^{-\frac{1}{2}} \widetilde{H}_{n-2}(x, A), \;\; n \geq 1 \tag{4.8}$$

donde $\widetilde{H}_{-1}(x, A) = 0$.

Obsérvese que podemos escribir

$$H_{2n}(x,A) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)! 2^k A^k}{(2k)!(n-k)!} x^{2k} \quad ,$$

$$H_{2n+1}(x,A) = (-1)^n \sqrt{2A} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n+1)! 2^k A^k}{(2k+1)!(n-k)!} x^{2k+1} \quad .$$

A partir de aquí se sigue que

$$H'_{2n+1}(x,A) = \tfrac{d}{dx} H_{2n+1}(x,A) = (-1)^n \sqrt{2A} \;\; (2n+1) \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)! 2^k A^k}{(2k)!(n-k)!} x^{2k}$$

$$= \sqrt{2A} \;\; (2n+1) H_{2n}(x,A) \quad ,$$

$$H'_{2n}(x,A) = \tfrac{d}{dx} H_{2n}(x,A) = 2n\sqrt{2A} \left[(-1)^n \sqrt{2A} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n-1)! 2^k A^k}{(2k+1)!(n-k-1)!} x^{2k+1} \right]$$

$$= 2n\sqrt{2A} \;\; H_{2n-1}(x,A) \quad ,$$

En resumen, se verifica

$$H'_n(x,A) = n\sqrt{2A} \;\; H_{n-1}(x,A) \quad . \tag{4.9}$$

Teniendo en cuenta (4.7) y (4.9), obtenemos la correspondiente ecuación para los polinomios de Hermite normalizados:

$$\widetilde{H}'_n(x,A) = \sqrt{nA} \;\; \widetilde{H}_{n-1}(x,A) \quad . \tag{4.10}$$

Recordemos que por ser A hermítica definida positiva, se verifica que $\sigma(A) \subset]0, +\infty[$, y por el teorema de la aplicación espectral [12, p.569] se sigue que

$$\sigma\left(e^{-\frac{Ax^2}{2}}\right) = \left\{ e^{-\frac{zx^2}{2}}; z \in \sigma(A) \right\}, \quad -\infty < x < +\infty \quad .$$

Además, como $e^{-\frac{Ax^2}{2}}$ es hermítica para todo x real, por [57, p.23] se verifica que

$$\| e^{-\frac{Ax^2}{2}} \|_2 = \alpha\left(e^{-\frac{Ax^2}{2}}\right) = \text{máx}\left\{ e^{-\frac{zx^2}{2}}; z \in \sigma(A) \right\} \quad ,$$

$$\| e^{-\frac{Ax^2}{2}} \|_2 = e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty \quad , \tag{4.11}$$

donde

$$\beta(A) = \text{mín}\left\{ z; z \in \sigma(A) \right\} \quad . \tag{4.12}$$

El siguiente resultado demuestra que la sucesión de polinomios ortonormales matriciales de Hermite $\left\{ \widetilde{H}_n(x,A) \right\}_{n \geq 0}$ constituyen un sistema total respecto al funcional $\mathcal{L}$ definido por (4.2).

TEOREMA 29 *Sea* $A \in C^{r\times r}$ *una matriz hermítica definida positiva ,* $W(x) = e^{-\frac{Ax^2}{2}}$*, y sea* $\mathcal{L}$ *el FMHDP definido en* $L^2_W(R, C^{r\times r})$ *por (4.2). Entonces* $\left\{\widetilde{H}_n(x,A)\right\}_{n\geq 0}$ *es total respecto a* $\mathcal{L}$ *en* $L^2_W(R, C^{r\times r})$*.*

Demostración: Sea $f \in L^2_W(R, C^{r\times r})$ y supongamos que

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}(f, \widetilde{H}_n(.,A)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x,A)^H dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x,A) dx \quad , \quad n \geq 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Veamos ahora que

$$\|f(x)\|_2 e^{t|x|} e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} \text{ es integrable en } R \tag{4.14}$$

Téngase en cuenta que por (4.11)-(4.12) se verifica

$$\|e^{-\frac{Ax^2}{4}}\|_2^2 = e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}}$$

y que podemos escribir

$$\|f(x)\|_2 e^{t|x|} e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} = \left[\|f(x)\|_2 e^{-\frac{\beta(A)x^2}{4}}\right] \left[e^{-\frac{\beta(A)x^2}{4}} e^{t|x|}\right]$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|_2 e^{-\frac{\beta(A)x^2}{4}} e^{t|x|} e^{-\frac{\beta(A)x^2}{4}} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|_2 e^{t|x|} e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} dx \\ \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|_2^2 (e^{-\frac{\beta(A)x^2}{4}})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t|x|} (e^{-\frac{\beta(A)x^2}{4}})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|_2^2 e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}} &\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t|x|} e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \end{aligned}$$

porque $f \in L^2_W(R, C^{r\times r})$ y por (4.11).
Por ser $\mathcal{L}$ un FBMH y por el teorema (11) del capítulo 2, sabemos que si $P(x)$ es un polinomio matricial de grado n, entonces

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x) \tag{4.15}$$

De (4.15) y (4.13) resulta que

$$\mathcal{L}(f, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} P(x)^H dx = 0 \quad , \quad \forall P(x) \in P[x] \quad . \tag{4.16}$$

En particular,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}x^k dx = 0 \ , \quad \forall k \geq 0 \ \ . \tag{4.17}$$

Consideremos ahora la sucesión de funciones f_n integrables en R, definidas por

$$f_n(x) = f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} \sum_{j=0}^{n} \frac{(itx)^j}{j!} \quad . \tag{4.18}$$

Obsérvese que $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge puntualmente en R a la función

$$g(x) = f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} e^{itx} \quad , \tag{4.19}$$

y que para cada componente $(f_{ij})_n$ de f_n se verifica

$$\mid (f_{ij})_n (x) \mid \leq \|f_n(x)\|_2 = \|f(x)\|_2 e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} e^{t|x|} \quad . \tag{4.20}$$

Puesto que de (4.14) se sigue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|_2 e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}} dx < \infty \quad , \tag{4.21}$$

de (4.18),(4.20),(4.21) y el teorema de la convergencia dominada aplicado a cada componente $\left\{(f_{ij})_n\right\}_{n\geq 0}$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} e^{itx} dx \quad . \tag{4.22}$$

De (4.18) y (4.17) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} \sum_{j=0}^{n} \frac{(itx)^j}{j!} dx \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j}{j!} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} x^j dx = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.23}$$

De (4.22) y (4.23) obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} e^{itx} dx = 0 \quad . \tag{4.24}$$

De (4.24) se sigue que si llamamos $g_{p,q}$ la (p,q)-ésima componente de $f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}$, verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{p,q}(x)e^{itx} dx = 0 \quad , \quad 1 \leq p, q \leq r \quad . \tag{4.25}$$

De (4.25) y la fórmula de inversión de Fourier [18, p.220], resulta que

$$g_{p,q}(x) = 0, \quad 1 \leq p, q \leq r \text{ casi por todas partes en } \quad R \ ,$$

o equivalentemente,

$$f(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}} = 0 \text{ casi por todas partes en } \quad R \ . \tag{4.26}$$

Puesto que $e^{-\frac{Ax^2}{2}}$ es invertible para todo x, se concluye que

$$f(x) = 0 \text{ casi por todas partes en } \quad R \ ,$$

es decir, $f = 0$ en $L^2_W(R, C^{r\times r})$. $\square$

4.3. Funciones de Hermite matriciales.

Es bien conocido que en el caso escalar, la llamada ecuación de Hermite

$$Y'' - x^2 Y + \lambda Y = 0$$

desempeña un papel importante en el estudio de problemas de contorno clásicos en regiones parabólicas, véase [18, p.188] y [51].
Las funciones de Hermite escalares definidas por

$$h_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x) \ ,$$

donde $H_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Hermite, desempeñan un papel importante en mecánica cuántica, como son las funciones de onda para el estado estacionario del oscilador armónico cuántico. Para ser más precisos, las funciones de onda para el estado estacionario de una partícula cuántica moviéndose a lo largo de una linea en un potencial $V(x)$ son las soluciones en L^2 de la ecuación

$$\frac{h^2}{2m} U''(x) - V(x)U(x) + EU(x) = 0 \ , \tag{4.27}$$

donde h es la constante de Plank, m es la masa de la partícula, y el autovalor E el nivel de energía. Para un oscilador armónico el potencial es $V(x) = ax^2$ con $a > 0$, la sustitución

$$U(x) = f\left(\left[\frac{2am}{h^2}\right]^{\frac{1}{4}} x\right) \ ,$$

$$S = \left[\frac{2am}{h^2}\right]^{\frac{1}{4}} x \ ,$$

convierte la ecuación (4.27) en

$$f''(S) - S^2 f(S) + \frac{\lambda}{h}\sqrt{\frac{2m}{a}} = 0$$

De este modo, las funciones de onda estacionarias son las funciones de Hermite $h_n\left(\left[\frac{2am}{h^2}\right]^{\frac{1}{4}} x\right)$ y las correspondientes energías de nivel son

$$(2n+1)h\sqrt{\frac{a}{2m}}$$

Es conocido también , véase [18, p.187], que las funciones de hermite definen una base ortogonal para $L^2(R)$ con respecto a la función peso $W(x) = 1$.
Es esta sección nos proponemos extender estas propiedades al caso matricial suponiendo que A es una matriz hermítica definida positiva. Las funciones matriciales de Hermite las definimos por

$$T_n(x, A) = e^{-\frac{Ax^2}{4}} H_n(x, A) \tag{4.28}$$

Derivando respecto a x en (4.28) y teniendo en cuenta (4.9), podemos escribir

$$\begin{aligned} T_n'(x, A) &= e^{-\frac{Ax^2}{4}} \left\{ H_n'(x, A) - \frac{Ax}{2} H_n(x, A) \right\} \\ &= e^{-\frac{Ax^2}{4}} \left\{ n\sqrt{2A}\ H_{n-1}(x, A) - \frac{Ax}{2} H_n(x, A) \right\} \quad , \end{aligned}$$

$$T_n'(x, A) = n\sqrt{2A}\ T_{n-1}(x, A) - \frac{Ax}{2} T_n(x, A) \quad . \tag{4.29}$$

Utilizando la fórmula de tres términos de los polinomios de Hermite matriciales

$$H_{n+1}(x, A) = x\sqrt{2A}\ H_n(x, A) - 2nH_{n-1}(x, A) \quad ,$$

a partir de (4.28) se sigue que

$$T_{n+1}(x, A) = x\sqrt{2A}\ T_n(x, A) - 2nT_{n-1}(x, A) \quad . \tag{4.30}$$

Despejando $T_{n-1}(x, A)$ de (4.29) y sustituyendo en (4.30) resulta que

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x, A) &= x\sqrt{2A}\ \ T_n(x, A) - 2n \left\{ T_n'(x, A) + \frac{xA}{2} T_n(x, A) \right\} \left(n\sqrt{2A} \right)^{-1} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{2A}\ T_n(x, A) - \frac{2}{\sqrt{2A}} T_n'(x, A) \quad . \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}} T_{n+1}(x, A) = -T_n'(x, A) + \frac{Ax}{2} T_n(x, A) \quad . \tag{4.31}$$

Teniendo en cuenta (4.29) para n en lugar de $n-1$ y utilizando la expresión de $T_n(x, A)$ dada por (4.31), podemos escribir

$$
\begin{aligned}
n\sqrt{2A}\;\; T_n(x,A) &= \frac{Ax}{2}T_{n+1}(x,A) + T'_{n+1}(x,A) \\
&= \frac{Ax}{2}\left\{ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}T'_n(x,A) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}\frac{Ax}{2}T_n(x,A) \right\} \\
&+ \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}T'_n(x,A) + \frac{x}{2}\sqrt{2A}\; T_n(x,A) \right\}' \\
&= \frac{Ax}{2}\left\{ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}T'_n(x,A) + \frac{x}{2}\sqrt{2A}\; T_n(x,A) \right\} \\
&+ \left\{ \frac{\sqrt{2A}}{2}\;\; T_n(x,A) + \frac{\sqrt{2A}x}{2}T'_n(x,A) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}T''_n(x,A) \right\} \quad ,
\end{aligned}
$$

luego

$$
n\sqrt{2A}\;\; T_n(x,A) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}T''_n(x,A) + \frac{\sqrt{2A}}{2}\left\{ 1 + \frac{Ax^2}{2} \right\} T_n(x,A) \quad . \tag{4.32}
$$

De (4.32) se sigue que

$$
T''_n = \frac{A}{2}\left\{ -2n + \left(1 + \frac{Ax^2}{2} \right) \right\} T_n(x,A) \quad ,
$$

es decir, que $T_n(x,A)$ es solución de la ecuación de Hermite matricial

$$
Y'' - \frac{1}{2}\left(\frac{A^2x^2}{2} - A \right) Y + \lambda AY = 0 \quad , \tag{4.33}
$$

para $\lambda = -n$.
Además, si consideramos el funcional hermítico definido positivo

$$
\mathcal{L}_0 : L^2_I\left(R, C^{r\times r}\right) \times L^2_I\left(R, C^{r\times r}\right) \to C^{r\times r}
$$

definido por

$$
\mathcal{L}_0(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)^H dx \tag{4.34}
$$

donde $W_0(x) = I$ para todo $x \in R$, obsérvese que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(T_n(x,A), T_m(x,A)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Ax^2}{4}} H_n(x,A) e^{-\frac{Ax^2}{4}} H_m(x,A)^H dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x,A) e^{-\frac{Ax^2}{2}} H_m(x,A) dx \\
&= \mathcal{L}(H_n(x,A), H_m(x,A))
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{L}$ es el funcional definido en (4.2). En consecuencia, la sucesión $\{T_n(x,A)\}_{n\geq 0}$ es un sistema de funciones ortogonales matriciales respecto a $\mathcal{L}_0$ en $L_I^2(R, C^{r\times r})$. Además, si $f \in L_I^2(R, C^{r\times r})$ es tal que

$$\mathcal{L}_0(f(x), T_n(x,A)) = 0, \quad n \geq 0 \quad , \tag{4.35}$$

entonces (4.35) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{Ax^2}{4}} H_n(x,A)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+\frac{Ax^2}{4}} e^{-\frac{Ax^2}{2}} H_n(x,A)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} H_n(x,A)dx \\ &= \mathcal{L}(g(x), H_n(x,A)), \qquad n \geq 0 \quad , \end{aligned}$$

con

$$g(x) = f(x) e^{\frac{Ax^2}{4}} \in L_W^2\left(R, C^{r\times r}\right) \quad ,$$

$$W(x) = e^{-\frac{Ax^2}{2}} \quad . \tag{4.36}$$

Por el teorema 29, se sigue que $g(x) = 0$ en $L_W^2(R, C^{r\times r})$ y de (4.36) se concluye que

$$f(x) = 0 \text{ en } L_I^2\left(R, C^{r\times r}\right).$$

En consecuencia, $\{T_n(x,A)\}_{n\geq 0}$ es un sistema de funciones ortogonales matriciales total en $L_I^2(R, C^{r\times r})$ respecto al funcional $\mathcal{L}_0$ definido en (4.34). Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 30 *Sea A una matriz hermítica definida positiva en $C^{r\times r}$ y sea $T_n(x,A)$ la función de Hermite matricial definida en (4.28) para $n \geq 0$. Entonces $\{T_n(x,A)\}_{n\geq 0}$ es un sistema de funciones ortogonales matriciales (SFOM) total en $L_I^2(R, C^{r\times r})$ respecto al funcional $\mathcal{L}_0$ definido en (4.34).Además, se verifica:*

$$\frac{Ax}{2} T_n(x,A) + T_n'(x,A) = n\sqrt{2A}\,T_{n-1}(x,A) \quad , \tag{4.37}$$

$$\frac{Ax}{2} T_n(x,A) - T_n'(x,A) = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}} T_{n+1}(x,A) \quad , \tag{4.38}$$

$$T_n''(x,A) - \left(\frac{Ax}{2}\right)^2 T_n(x,A) + (2n-1)\frac{A}{2} T_n(x,A) = 0 \quad . \tag{4.39}$$

NOTA 16 *Para el caso $r = 1$, $A = 2$, el teorema 30 coincide con el teorema 6.14 de [18, p.187].*

4.4. Representación integral de los polinomios de Hermite matriciales. Fórmulas relacionadas.

4.4.1. Introducción.

Si $H_n(x)$ denota el n-ésimo polinomio de Hermite, las fórmulas

$$H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2ixt} t^n dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.40}$$

y

$$W(x, y, t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\left[2xyt-(x^2+y^2)t^2\right]}{(1-t^2)}} = \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n \quad , \quad |t| < 1 \quad , \tag{4.41}$$

desempeñan un papel muy importante para el estudio de teoremas de convergencia de desarrollos en serie de polinomios de Hermite, así como para el cálculo de los coeficientes de dicho desarrollo, véase [51, capítulo 4].

En el estudio del desarrollo en serie de polinomios de Hermite matriciales $H_n(x, A)$, puede ser esencial una representación integral de $H_n(x, A)$, así como la evaluación exacta de la serie matricial

$$\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x, A)H_n(y, A)}{2^n n!} t^n \quad .$$

Por ello vamos a calcular en esta sección expresiones análogas a las fórmulas (4.40)-(4.41) para los polinomios de Hermite matriciales.

Esta sección está estructurada como sigue. En la subsección 4.4.2 obtendremos una representación integral de $\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)$ para matrices en $C^{r\times r}$ cuyos valores propios están en el semiplano complejo derecho, que utilizaremos para dar una representación integral de los polinomios de Hermite matriciales. En la subsección 4.4.3 calcularemos la solución del problema de valores iniciales relativo a la ecuación diferencial matricial dada por

$$Y'(t) = B^2 t Y(t) A^{-1} \tag{4.42}$$

emplendo un método de Frobenius matricial. La ecuación (4.42) desempeñará un papel importante en la subsección 4.4.4, donde calcularemos integrales matriciales paramétricas impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx$$

en forma cerrada. Finalmente, en la subsección 4.4.5, demostraremos una fórmula matricial para la función generatriz del producto de polinomios matriciales de Hermite.

Nótese que si D percenece a $C^{r\times r}$ y $\alpha(D) = \text{máx}\{Re\, z \;\; ; \;\; z \in \sigma(D)\}$, entonces por [28, p.556] o [46], se tiene

$$\|e^{xD}\| \le e^{x\alpha(D)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|D\|x\sqrt{r}\right)^k}{k!} \quad , \quad x \ge 0 \quad . \tag{4.43}$$

4.4.2. Representación integral de los polinomios de Hermite matriciales.

Recordemos el siguiente resultado:

TEOREMA 31 ([59]) *Sea $A(t)$ una matriz cuadrada cuyas entradas son funciones analíticas en un dominio abierto Ω del plano complejo. Supongamos que $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$, para todo t_1, t_2 en Ω. Sea $f(z)$ analítica en las raíces características de $A(t)$, $t \in \Omega$. Entonces, $f(A(t))$ es una función diferenciable para t en Ω, y*

$$\frac{d}{dt} f(A(t)) = f'(A(t))A'(t)$$

TEOREMA 32 *Sea A una matriz en $C^{r\times r}$ verificando la condición*

$$Re\, z > 0 \quad para \quad cada \quad z \in \sigma(A) \quad . \tag{4.44}$$

Entonces

$$\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) = 2\left(\frac{2A^{-1}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \exp\left(-2v^2A^{-1}\right)\cos(2vx)dv \quad , \quad x \in R \quad . \tag{4.45}$$

Demostración: Consideremos la integral matricial paramétrica

$$J(x) = \int_0^\infty \exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\cos(2vx)dv \quad , \quad x \in R \quad , \tag{4.46}$$

y nótese que si $z = x + iy$, entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{|z|^2} \quad , \quad Re\left(\frac{1}{z}\right) = Re\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{1}{|z|^2}Re(z) \quad . \tag{4.47}$$

Por el teorema de la aplicación espectral [12, p.569], y (4.44), (4.47), se tiene que

$$Re\, \omega > 0 \quad para \quad cada \quad \omega \in \sigma(A^{-1}) \quad . \tag{4.48}$$

De la desigualdad 4.43 y (4.48), se desprende la convergencia absoluta de $J(x)$ definida por (4.46) para cada número real x, así como la convergencia uniforme de la integral

$$\int_0^\infty v \exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\sin(2vx)dv \quad ,$$

en cualquier entorno del x. Por el teorema de Leibnitz para la diferenciación de integrales matriciales impropias, [8, p.174], el teorema 31, e integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} J'(x) &= -\int_0^\infty 2v\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\sin(2vx)dv \\ &= \frac{A}{2}\int_0^\infty \left\{-4A^{-1}v\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\right\}\sin(2vx)dv \\ &= \frac{A}{2}\left\{\left[\sin(2vx)\exp\left(-2v^2A^{-1}\right)\right]_{v=0}^{v=\infty} - 2x\int_0^\infty \exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\cos(2vx)dv\right\} \\ &= -xAJ(x) + \frac{A}{2}\left[\sin(2xv)\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\right]_{v=0}^{v=\infty} \quad . \end{aligned}$$

Ahora, otra vez por (4.43) tenemos

$$\left[\sin(2xv)\ \exp\left(-2A^{-1}v^2\right)\right]_{v=0}^{v=\infty} = 0 \quad ,$$

y

$$J'(x) = -xAJ(x)$$

Tomando $x = 0$ en (4.46), y empleando la expresión (4.8) de [40], tenemos

$$\begin{aligned} J(0) &= \int_0^\infty \exp\left(-2A^{-1}v^2\right)dv = \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left(-A^{-1}\frac{\omega^2}{2}\right)d\omega \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-A^{-1}\frac{\omega^2}{2}\right)d\omega = \frac{1}{4}\left(2\pi A\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(\pi A)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \quad . \end{aligned}$$

Así $J(x)$ es solución del problema de valores iniciales

$$J'(x) = -xAJ(x) \quad ; \quad J(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi A}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x \in R \quad . \tag{4.49}$$

Dado que $D(x) = xA$, verifica la condición

$$D(x_1)D(x_2) = D(x_2)D(x_1) \quad ,$$

Por [45, p.600], véase también [24], [21], [22], la solución de (4.49) viene dada por

$$J(x) = \exp\left(-\int_0^x sAds\right)J(0) = \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\pi A}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.50}$$

Esto prueba la igualdad (4.45). □

Si se verifica la hipótesis (4.44), por la regla de Leibnitz para la derivación de integrales matriciales paramétricas [8, p.174], y el teorema 32, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}J(x) &= (-1)^n 2^{2n}\int_0^{\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}\cos(2vx)dv \\
&= (-1)^n 2^{2n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}\cos(2vx)dv \\
&= (-1)^n 2^{2n-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}\left(e^{2ixv}+e^{-2ixv}\right)dv \\
&= (-1)^n 2^{2n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}\,e^{2ixv}dv \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Utilizando la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite matriciales [40], se tiene que

$$
H_{2n}(x,A)=\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)^{-n}\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\right)\right] \qquad (4.52)
$$

Por (4.45), (4.52) y dado que

$$
(-i)^{2n}=(-1)^n \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}\sin(2vx)dv=0 \quad ,
$$

se obtiene que

$$
\begin{aligned}
H_{2n}(x,A) &= 2\left(\frac{2A^{-1}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)^{-n}(-1)^n 2^{2n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}e^{2ivx}dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}(-1)^n 2^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n}e^{2ivx}dv \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
H_{2n}(x,A)=\frac{\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}(-i)^{2n}2^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2v^2A^{-1}+2vixI\right)v^{2n}dv \qquad (4.53)
$$

Procediendo de forma análoga, para los índices impares se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}J(x) &= (-1)^{n+1}2^{2n+1}\int_0^{\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n+1}\sin(2vx)dv \\
&= (-1)^{n+1}2^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n+1}\left(\frac{e^{2ixv}-e^{-2ixv}}{2i}\right)dv \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{i}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n+1}e^{2ixv}dv\right. \\
&- \left.\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n+1}e^{-2ixv}dv\right\} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2A^{-1}v^2\right)v^{2n+1}\,e^{2ixv}dv \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

Por la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite matriciales [40],

$$H_{2n+1}(x,A) = -\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}\left[\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\right)\right] \quad , \qquad (4.55)$$

y por (4.45), (4.54), (4.55) y dado que $(-i)^{2n+1} = i(-1)^{n+1}$, se tiene que

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x,A) &= -2\left(\frac{2A^{-1}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}\frac{(-1)^{n+1}}{i}2^{2n} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2v^2A^{-1}\right)v^{2n+1}e^{2ixv}dv \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x,A) &= \left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+1)}\frac{(-i)^{2n+1}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)2^{2n+1} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2v^2A^{-1}+2ixvI\right)v^{2n+1}dv \qquad (4.56) \end{aligned}$$

Nótese que las fórmulas (4.53) y (4.56) pueden escribirse como una única fórmula

$$H_n(x,A) = \left(\frac{A}{2}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{2^n(-i)^n\exp\left(\frac{Ax^2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2v^2A^{-1}+2ivxI\right)v^n dv \qquad (4.57)$$

En resumen, la siguiente representación integral de los polinomios de Hermite matriciales está demostrada:

TEOREMA 33 *Sea A una matriz en $C^{r\times r}$ verificando la condición (4.44) y sea $H_n(x,A)$ el n-ésimo polinomio de Hermite matricial. Entonces la representación integral (4.57) es válida para todo $n \geq 0$ y $x \in R$.*

NOTA 17 *Para el caso $r = 1$, y $A = 2$, la expresión (4.57) coincide con la fórmula (4.40).*

4.4.3. Soluciones explicitas de una clase de ecuaciones diferenciales matriciales.

En esta subsección contruiremos soluciones explícitas de problemas de valores iniciales del tipo

$$Y'(t) = B^2tY(t)A^{-1} \;\; ; \;\; Y(0) = C_0 \;\; , \;\; Y(t) \in C^{r\times r} \;\; , \qquad (4.58)$$

donde t es un número real y B, A, $Y(t)$ son matrices en $C^{r\times r}$, con A invertible. Para resolver (4.58) utilizaremos un método de Frobenius matricial, utilizado recientemente, véanse [56], [33] y [31], para diferentes tipos de ecuaciones diferenciales matriciales.

TEOREMA 34 *Sean A, B matrices en $C^{m\times m}$ con A invertible. Entonces la solución del problema de valores iniciales*

$$Y'(t) = B^2 tY(t)A^{-1} \quad ; \quad Y(0) = C_0 \quad , \tag{4.59}$$

viene dada por

$$Y(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{B^{2n}C_0A^{-n}}{(2n)!!}\, t^{2n} \quad , \quad |t| < +\infty \quad . \tag{4.60}$$

Demostración: En primer lugar construiremos una solución formal en serie de la forma

$$Y(t) = \sum_{n\geq 0} C_n t^n \quad ; \quad C_n \in C^{m\times m} \quad . \tag{4.61}$$

Derivando formalmente en (4.61) tenemos

$$Y'(t) = \sum_{n\geq 1} nC_n t^{n-1} \quad , \tag{4.62}$$

e imponiendo que $Y(t)$ sea solución de (4.59), se obtine que

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)C_{n+1}t^n \ = \ B^2 \sum_{n\geq 0} C_n t^{n+1}A^{-1} \quad . \tag{4.63}$$

Identificando coeficientes para cada potencia de t^n en (4.63), tenemos

$$C_1 = 0 \quad , \quad C_{n+1} = \frac{B^2 C_{n-1}A^{-1}}{n+1} \tag{4.64}$$

Por tanto

$$C_{2k+1} = 0 \quad , \quad y \ \ C_{2k} = \frac{B^{2k}C_0A^{-k}}{(2k)!!} \quad , \quad k \geq 0 \tag{4.65}$$

donde $(2k)!! = 2k(2k-2)\ldots 2$. De (4.65), la solución formal de (4.59) viene dada por

$$Y(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{B^{2n}C_0A^{-n}}{(2n)!!} t^{2n} = \sum_{n\geq 0} C_{2n}t^{2n} \quad . \tag{4.66}$$

Para probar que $Y(t)$ definida por (4.64)-(4.66), es una solución rigurosa del problema (4.59), será suficiente demostrar que el radio de convergencia de la serie de potencias matricial (4.66) es $\rho = +\infty$. De hecho, nótese que

$$\|C_{2n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|B^{2n}C_0A^{-n}\|^{\frac{1}{2n}} \leq \|B\|\|C_0\|\|A^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

y

$$((2n)!!)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\frac{1}{2n}\ln(2n!!)\right) \to \infty \quad , \quad n \to \infty \quad .$$

Entonces

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\|C_n\|\right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad ,$$

y por la fórmula de Cauchy-Hadamard, la serie (4.66) es convergente para todos los valores de t en la recta real. $\square$

COROLARIO 8 *Sean A,B,Y_0 matrices que conmutan entre si en $C^{r\times r}$ con A invertible. Entonces, la solución del problema*

$$Y'(t) = B^2 t Y(t) A^{-1} \quad ; \quad Y(0) = Y_0 \quad , \quad x \in R \quad , \tag{4.67}$$

viene dada por

$$Y(t) = \exp\left(\frac{t^2 B^2 A^{-1}}{2}\right) Y_0 \tag{4.68}$$

Demostración: Por la hipótesis de conmutatividad de las matrices A, B y Y_0 y por el teorema 34, la solución del problema (4.67), queda en la forma

$$Y(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{B^{2n} Y_0 A^{-n}}{(2n)!!} t^{2n} = Y_0 \sum_{n\geq 0} \frac{\left(B^2 A^{-1}\right)^n}{(2n)!!} t^{2n} \quad , \tag{4.69}$$

y por (4.69), $Y(t)$ conmuta con A y B. Así, la ecuación (4.67) puede escribirse

$$Y'(t) = B^2 A^{-1} t Y(t) \quad ; \quad Y(0) = Y_0 \quad , \tag{4.70}$$

donde $D(t) = tB^2 A^{-1}$ verifica la propiedad

$$D(t_1) D(t_2) = D(t_2) D(t_1) \quad , \quad -\infty < t_1 \ , \ t_2 < +\infty \quad . \tag{4.71}$$

Por (4.71) y [45, p.600], la solución del problema (4.70) vendrá dada por

$$Y(t) = e^{\int_0^t D(s)ds} Y(0) = \exp\left(\frac{t^2 B^2 A^{-1}}{2}\right) Y_0$$

Así, el resultado queda demostrado. $\square$

4.4.4. Calculo exacto de ciertas integrales matriciales.

Consideremos la integral matricial

$$\mathcal{Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Bx) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx \quad , \tag{4.72}$$

donde A, B son matrices en $C^{r\times r}$ y A verifica la condición (4.44). Para calcular $\mathcal{Y}$, consideremos la integral paramétrica matricial

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx \quad , \quad t \in R \quad , \tag{4.73}$$

y nótese que bajo la condición (4.44), por (4.43), la integral matricial $Y(t)$ converge puntualmente para cada número real t, lo mismo puede aplicarse a la integral matricial

$$\mathcal{Y}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\right) dx \quad ,$$

que por el teorema 31, quedará de la forma

$$\mathcal{Y}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} Bx \exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx \quad . \tag{4.74}$$

Además, por la desigualdad (4.43) aplicada a $\exp(Bxt)$, $\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)$, la integral matricial paramétrica (4.74) converge uniformemente en todo entorno de t en la recta real. Así, por el teorema de Leibnitz para la diferenciación de integrales impropias matriciales [8, p.174], y teniendo en cuenta que A conmuta con $\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)$, se tiene que

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Bx \exp(Bxt)) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx \\ &= -B \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Bxt)) \left\{-Ax \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\right\} dx A^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{4.75}$$

Aplicando integración por partes en (4.75), obtenemos

$$\begin{aligned} Y'(t) &= -B \left\{ \left[\exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\right]_{x=-\infty}^{+\infty} \right. \\ &- \left. \int_{-\infty}^{+\infty} Bt \exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx \right\} A^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{4.76}$$

Bajo la condición (4.44), por (4.43) está claro que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) = 0 \quad , \quad t \in R \quad , \tag{4.77}$$

y por (4.76), (4.77), se cumple que

$$Y'(t) = B^2 t Y(t) A^{-1} \quad , \quad t \in R \quad . \tag{4.78}$$

Nótese que tomando $t = 0$ en (4.73), por la expresión (4.8) de [40], se tiene que

$$Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx = \left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.79}$$

Ahora, por el corolario 8, el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 35 *Sean A, B matrices que conmutan en $C^{r\times r}$ tales que A verifica la condición (4.44). Entonces, la integral matricial (4.73) vale*

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Bxt) \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right) dx = \left(2\pi A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{t^2B^2A^{-1}}{2}\right) \quad .$$

4.4.5. Función generatriz del producto de polinomios de Hermite matriciales.

En esta subsección extenderemos la fórmula (4.41) para matrices, empleando la representación integral de los polinomios de Hermite matriciales obtenida en la subsección 2. De acuerdo con (4.57), para $|t| < 1$ tenemos

$$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x,A)H_n(y,A)}{2^n\, n!} t^n$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{A}{2}(x^2+y^2)\right)}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+1)}(-1)^n(2t)^n}{n!}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)(uv)^n du dv$$

$$= \left(\frac{A}{2}\right)^{-1} \frac{\exp\left(\frac{A}{2}(x^2+y^2)\right)}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(-4tA^{-1}\right)^n}{n!}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)(uv)^n du dv \quad . \tag{4.80}$$

Nótese que por la desigualdad (4.43), para cada entero positivo n, la función matricial

$$\Phi_n(u,v) = \sum_{h=0}^{n} \frac{\left(-4tuvA^{-1}\right)^h}{h!} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2) + 2Ii(ux+vy)\right) \tag{4.81}$$

es integrable en $]-\infty,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$. Si denotamos por $\Phi(u,v)$ la función no negativa definida por

$$\Phi(u,v) = \exp\left(4|u||v|\|A^{-1}\| - 2\alpha(A^{-1})(|u|^2+|v|^2)\right) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left[2\sqrt{r}(|u|^2+|v|^2)\|A^{-1}\|\right]^k}{k!} \quad , \tag{4.82}$$

para $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, entonces, por (4.43), (4.81) y (4.82), se tiene que

$$\|\Phi_n(u,v)\|$$

$$\begin{array}{ll} \leq & \|\exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)\| \sum_{h=0}^{n} \frac{\left[4tuv\|A^{-1}\|\right]^h}{h!} \\ \leq & \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(4|u||v|\|A^{-1}\|\right)^h}{h!}\right] \exp\left(-2\alpha(A^{-1})\left[|u|^2+|v|^2\right]\right) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left[2\sqrt{r}(|u|^2+|v|^2)\|A^{-1}\|\right]^k}{k!} \\ \leq & \Phi(u,v) \quad , \quad -\infty < u < +\infty \quad , \quad -\infty < v < +\infty \quad , \quad n \geq 0 \quad . \end{array}$$

De (4.48), esta claro que la función $\alpha(A^{-1}) > 0$ y $\phi(u,v)$ es integrable en el dominio $]-\infty,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$. Por el teorema de la convergencia dominada [18, p.83], podemos permutar la suma de las integrales en (4.80), obteniendo

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x,A)H_n(y,A)}{2^n\, n!} t^n \\ &= \frac{\exp\left(\frac{A}{2}(x^2+y^2)\right)}{\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^{-(n+1)}(-1)^n(2t)^n}{n!} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)(uv)^n du dv \\ &= \left(\frac{A}{2}\right)^{-1} \frac{\exp\left(\frac{A}{2}(x^2+y^2)\right)}{\pi} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)\exp\left(-4tuvA^{-1}\right) du dv \end{aligned} \tag{4.83}$$

Utilizando el teorema de Fubini-Tonelli [19, p.65] podemos escribir

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)\exp\left(-4tuvA^{-1}\right) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}v^2 + 2ivyI\right)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}u^2 + 2u\left(ixI - 2tA^{-1}v\right)\right) du\right\} dv \end{aligned} \tag{4.84}$$

Consideremos la integral matricial

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}u^2 + 2u\left(ixI - 2tA^{-1}v\right)\right) du \quad , \tag{4.85}$$

que haciendo el cambio de variable $\omega = 2u$, podemos escribir en la forma

$$L = L(1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(B_0\omega\right)\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}A^{-1}\right) d\omega \quad , \tag{4.86}$$

donde

$$B_0 = ixI - 2tA^{-1}v \tag{4.87}$$

Dado que B_0 conmuta con A^{-1}, y bajo la hipótesis (4.44) se verifica (4.48). Por (4.86), (4.87) y el teorema 35, tomando A^{-1} por A, y 1 por t, se tiene que

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(2\pi A\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{B_0^2 A}{2}\right) = \left(\frac{\pi A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{B_0^2 A}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\pi A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\left(-x^2 I + 4t^2v^2A^{-2} - 4txviA^{-1}\right)\frac{A}{2}\right) \quad , \end{aligned}$$

$$L = \left(\frac{\pi A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\exp\left(2t^2v^2A^{-1} - 2txviI\right) \tag{4.88}$$

Por (4.88) y (4.84) se sigue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2ix(u+v)I\right)\exp\left(-4tuvA^{-1}\right) dudv$$

$$= \left(\frac{\pi A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-x^2A}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2v^2A^{-1}(1-t^2) + 2vi(y-tx)I\right) dv \quad . \tag{4.89}$$

Consideremos ahora la integral matricial

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2v^2A^{-1}(1-t^2) + 2vi(y-xt)I\right) dv \quad , \tag{4.90}$$

efectuando el cambio de variable $\omega = 2v\sqrt{1-t^2}$ en (4.90), se tiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\omega^2A^{-1}}{2} + \frac{i(y-xt)I}{\sqrt{1-t^2}}\omega\right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(B_1\omega(y-xt)\right)\exp\left(-\frac{\omega^2A^{-1}}{2}\right) d\omega \quad , \end{aligned} \tag{4.91}$$

donde

$$B_1 = \frac{iI}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.92}$$

Por (4.91), (4.92) y el teorema 35, donde tomamos A^{-1} por A, y $y - xt$ por t, se tiene que

$$S = \frac{(2\pi A)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-t^2}} \exp\left(\frac{(y-xt)^2 B_1^2 A}{2}\right) = \left(\frac{\pi A}{2(1-t^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-A(y-xt)^2}{2(1-t^2)}\right) \quad (4.93)$$

Por (4.89), (4.91) y (4.93), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2A^{-1}(u^2+v^2)\right)\exp\left(2iI(ux+vy)\right)\exp\left(-4tuvA^{-1}\right) dudv$$

$$= \frac{\pi A}{2\sqrt{1-t^2}} \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{A(y^2+x^2t^2-2yxt)}{2(1-t^2)}\right) \quad , \qquad (4.94)$$

por (4.83) y (4.94) se sigue que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x,A)H_n(y,A)}{2^n\, n!} t^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp\left(\frac{Ay^2}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left(-\frac{A(y^2+x^2t^2-2yxt)}{2(1-t^2)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left(\left[\frac{y^2A}{2}\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right) - \frac{Ax^2t^2}{2(1-t^2)} + \frac{xytA}{1-t^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left(\frac{-Ay^2t^2}{2(1-t^2)} - \frac{Ax^2t^2}{2(1-t^2)} + \frac{txyA}{1-t^2}\right) \\
&= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(A\frac{\left[xyt-\frac{1}{2}(x^2+y^2)t^2\right]}{(1-t^2)}\right)
\end{aligned}$$

En resumen, el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 36 *Sea A una matriz en $C^{r\times r}$ verificando la condición (4.44), y sea $H_n(x,A)$ el n-ésimo polinomio de Hermite matricial. Entonces, para cada valor real de t, con $|t|<1$, y cualesquiera valores reales de x,y, se cumple que*

$$\begin{aligned}
W(x,y,t,A) &= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{A}{2}\frac{\left[2xyt-(x^2+y^2)t^2\right]}{(1-t^2)}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x,A)H_n(y,A)}{2^n\, n!} t^n \quad , \quad |t|<1 \qquad (4.95)
\end{aligned}$$

NOTA 18 *Para el caso $r=1$, tomando $A=2$, la fórmula (4.95) coincide con (4.41).*

NOTA 19 *El teorema 36 permite obtener otros resultados. Por ejemplo, tomando $x = y$ en (4.95), se obtiene*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n^2(x,A)}{2^n\, n!} t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{x^2 t}{1+t} A\right) \quad , \quad |t| < 1 \quad . \tag{4.96}$$

Tomando $y = 0$ en (4.95), y dado que $H_{2n+1}(0,A) = 0$, $H_{2n}(0,A) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} I$, para todo $n \geq 0$, se tiene que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n H_{2n}(x,A)}{2^{2n} n!} t^{2n} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-Ax^2t^2}{2(1-t^2)}\right) \quad , \quad |t| < 1 \quad . \tag{4.97}$$

Si tomamos los polinomios de Hermite normalizados, sustituyendo en (4.95), obtenemos

$$\sum_{n\geq 0} \widetilde{H}_n(x,A)\widetilde{H}_n(y,A) t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{A}{2} \frac{[2xyt - (x^2+y^2)t^2]}{(1-t^2)}\right) \quad , \quad |t| < 1 \quad . \tag{4.98}$$

Tomando los polinomios de Hermite normalizados en (4.96),

$$\sum_{n\geq 0} \widetilde{H}_n^2(x,A) t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{x^2 t}{1+t} A\right) \quad , \quad |t| < 1 \tag{4.99}$$

Finalmente, tomando los polinomios de Hermite normalizados en (4.97),

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \widetilde{H}_{2n}(x,A) t^{2n} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-Ax^2t^2}{2(1-t^2)}\right) \quad , \quad |t| < 1 \quad . \tag{4.100}$$

4.5. Desarrollo asintótico de $\left\{\widetilde{H}_n(x,A)\right\}_{n\geq 0}$.

A continuación nos ocuparemos de estudiar el comportamiento asintótico de $\|H_n(x,A)\|_2$. Para ello explotaremos el comportamiento asintótico de los polinomios de Hermite clásicos y las propiedades del cálculo funcional holomorfo.
Obsérvese la expresión (4.3) de los polinomios de Hermite matriciales y escalares:

$$H_n(x,A) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (x\sqrt{2A})^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \quad ,$$

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \quad . \tag{4.101}$$

Por el teorema de la aplicación espectral [12, p.569], para cada $x \in R$ se verifica que

$$\begin{aligned}\sigma\left(H_n(x,A)\right) &= \left\{ H_n(x,a) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (x\sqrt{2a})^{n-2k}}{k!(n-2k)!} ; a \in \sigma\left(A\right) \right\} \\ &= \left\{ H_n(x\sqrt{\frac{a}{2}}); a \in \sigma(A) \right\} \quad . \end{aligned} \tag{4.102}$$

Como la matriz $H_n(x,A)$ es hermítica, ver [57, p.23] su norma $\|H_n(x,A)\|_2$ coincide con su radio espectral, y por (4.102) podemos afirmar que

$$\|H_n(x,A)\|_2 = \text{máx} \left\{ \mid H_n\left(x\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)} \right) \mid ;\ a \in \sigma(A) \right\} \quad . \tag{4.103}$$

Ahora por [64, p.324] sabemos que

$$\mid H_n(y) \mid < k_0 \sqrt{n!} 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{y^2}{2}} \quad , \quad y \in R \quad , \tag{4.104}$$

donde

$$k_0 = 1{,}086435 \quad . \tag{4.105}$$

De (4.103) y (4.104) resulta que

$$\|H_n(x,A)\|_2 < k_0 \sqrt{n!} 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\alpha(A)x^2}{4}}, \quad x \in R \quad , \tag{4.106}$$

donde $\alpha(A)$ es el radio espectral de A.
De (4.7), (4.106) y teniendo en cuenta que $\|A\|_2 = \alpha(A)$, se obtiene finalmente

$$\|\widetilde{H}_n(x,A)\|_2 \le \frac{k_0 \alpha(A)}{2\pi} e^{\frac{x^2 \alpha(A)}{4}}, \quad x \in R \quad . \tag{4.107}$$

Así mismo, teniendo en cuenta (4.107), tenemos también el siguiente desarrollo asintótico para las funciones de Hermite definidas en la sección 3 por (4.28):

$$\|T_n(x,A)\|_2 \le k_0 \sqrt{n!} 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{4}(\alpha(A) - \beta(A))} \quad , \quad x \in R \quad .$$

A continuación, veamos algunas aplicaciones del desarrollo asintótico dado por (4.107).

4.6. Aplicación al cálculo de la matriz exponencial.

Es bien conocida la importancia que en muchos campos diferentes tiene la matriz exponencial y las dificultades que su cálculo plantea, véase [54] y [55]. En esta sección proponemos una nueva expresión de la matriz exponencial e^{Bx} para matrices B, que satisfacen la condición espectral

$$|Re(z)| > |Im(z)| \quad para \quad cada \quad z \in \sigma(B) \quad . \tag{4.108}$$

Nótese que si B es una matriz en $C^{r\times r}$ satisfaciendo (4.108) y $A = \frac{1}{2}B^2$, entonces por el teorema de la aplicación espectral [12, p.569], se sigue que

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2}b^2 \, : \, b \in \sigma(B) \right\} \quad , \tag{4.109}$$

y para $b \in \sigma(B)$, por (4.108) se sigue que

$$Re\left(\frac{1}{2}b^2\right) = \frac{1}{2}\left\{(Re(b))^2 - (Im(b))^2\right\} > 0 \tag{4.110}$$

Por (4.109) y (4.110) se llega a que $\sigma(A)$ está en el semiplano derecho del plano complejo $Re(z) > 0$, y $\sqrt{2A} = \exp\left(\frac{1}{2}Log(2A)\right) = B$. Usando la función generatriz de los polinomios de Hermite, véanse las fórmulas (3.1) and (3.2) de [40], se sigue que

$$e^{x\,t\,\sqrt{2A} - t^2 I} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} H_n(x, A) t^n \quad , \quad |t| < +\infty \quad . \tag{4.111}$$

Tomando $t = 1$ en (4.111) y usando que $\sqrt{2A} = B$, tenemos

$$e^{B\,x} = e \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} H_n(x, \frac{1}{2}B^2) \quad , \quad -\infty \, < \, x \, < \, +\infty \quad . \tag{4.112}$$

Por (4.7) y (4.112) resulta

$$H_n(x, \frac{1}{2}B^2) = \sqrt{n!\, 2^{n+1}}\, (\pi)^{\frac{1}{4}}\, B^{-\frac{1}{2}} \widetilde{H}_n(x, \frac{1}{2}B^2)$$

$$e^{B\,x} = \sum_{n\geq 0} C_n \widetilde{H}_n(x, \frac{1}{2}B^2) \quad , \quad C_n = e\,(\pi)^{\frac{1}{4}}\, B^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2^{n+1}}{n!}} \quad , \tag{4.113}$$

donde el desarrollo (4.113) tiene convergencia puntual para cada número real x. Para estudiar la convergencia uniforme de (4.113), empleémos el desarrollo asintótico de $H_n(x, A)$ para una matriz hermítica definida positiva A.

$$\|\widetilde{H}_n(x, A)\| \leq \frac{k_0 \alpha(A)}{2\pi} e^{\frac{x^2 \alpha(A)}{4}}, \quad x \in R \tag{4.114}$$

Supongamos que B es una matriz en $C^{r\times r}$, tal que

$$\sigma(B) \subset (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad y \quad B^2 \quad es \quad hermítica \quad . \tag{4.115}$$

Entonces $A = \frac{1}{2}\, B^2$ es hermítica definida positiva porque $\sigma(B^2) \subset]0, +\infty[$, [1, p.86], y por (4.114), tenemos

$$\|\widetilde{H}_n(x, \frac{1}{2}B^2)\| < \frac{k_0 \alpha(\frac{1}{2}B^2)}{2\pi} e^{\frac{x^2 \alpha(\frac{B^2}{2})}{4}}, \quad x \in R \quad , \tag{4.116}$$

o

$$\|\widetilde{H}_n(x, \frac{1}{2}B^2)\| < \frac{k_0\alpha(B^2)}{4\pi} e^{\frac{x^2\alpha(B^2)}{8}}, \quad x \in R \quad , \tag{4.117}$$

Así, bajo la hipótesis (4.115), si x está en un intervalo acotado $|x| \leq c$, por (4.113) se sigue que

$$\sum_{n\geq 0} \|C_n \widetilde{H}_n(x, \frac{1}{2}B^2)\| \leq \|B^{-\frac{1}{2}}\| \frac{(\pi)^{\frac{1}{4}}}{4\pi} e^{\frac{c^2\alpha(B^2)}{8}} \sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{2^{n+1}}{n!}} \tag{4.118}$$

Donde la serie numérica $\sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{2^{n+1}}{n!}}$ es convergente, por (4.118), se concluye que la serie matricial

$$\sum_{n\geq 0} C_n \widetilde{H}_n(x, \frac{1}{2}B^2) \quad ; \quad C_n = e\,(\pi)^{\frac{1}{4}}\, B^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2^{n+1}}{n!}} \quad , \tag{4.119}$$

converge uniformemente en $|x| \leq c$. Resumiendo, el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 37 *Sea B una matriz en $C^{r\times r}$ que satisface la condición (4.108). Entonces la serie matricial dada en (4.113) es convergente puntualmente a e^{Bx} para cada número real x. Además, si B satisface la condición (4.115), la convergencia de la serie (4.119) a e^{Bx} es uniforme en cada intervalo acotado de la recta real.*

NOTA 20 *El desarrollo en serie dado en (4.112) o en (4.113) tiene una importante ventaja con respecto a la serie de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{(xB)^n}{n!}$, desde el punto de vista computacional. En efecto, la ventaja viene de que no es necesario calcular potencias B^n de la matriz B, ya que debido a la relación de tres términos que verifican los polinomios de Hermite matriciales (4.8), el valor de cualquier suma finita de la serie puede calcularse recursivamente en términos de $H_0\left(x, \frac{1}{2}B^2\right) = I$ y $H_1\left(x, \frac{1}{2}B^2\right) = xB$. Es lo que veremos en el siguiente teorema.*

TEOREMA 38 *. Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios matriciales que verifican una relación de tres términos de la forma:*

$$A_n P_n(x) = (xI - B_n)\, P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad , \tag{4.120}$$

donde

$$A_n \quad \text{invertible para todo} \quad n \geq 0 \quad .$$

Y supongamos que un polinomio matricial $Q(x)$ se escribe de la forma:

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{n} E_j P_j(x) \tag{4.121}$$

Sea $\bar{x}$ real y sea la sucesión de matrices $\{D_j\}_{j=0}^{n}$ definida como

$$D_n = E_n$$

$$D_{n-1} = E_{n-1} + D_n A_n^{-1} (\bar{x}I - B_n)$$

y para $j = n-2, \ldots, 0$

$$D_j = E_j + D_{j+1} A_{j+1}^{-1} (\bar{x}I - B_{j+1}) - D_{j+2} A_{j+2}^{-1} C_{j+2}$$

Entonces $Q(\bar{x}) = D_0 P_0(\bar{x})$.

<u>Demostración:</u> Notemos que de la definición de la sucesión $\{D_j\}_{j=0}^n$ se tiene

$$E_n = D_n \quad ,$$

$$E_{n-1} = D_{n-1} - D_n A_n^{-1} (\bar{x}I - B_n) \quad ,$$

y para $j = n-2, \ldots, 0$

$$E_j = D_j - D_{j+1} A_{j+1}^{-1} (\bar{x}I - B_{j+1}) + D_{j+2} A_{j+2}^{-1} C_{j+2} \quad .$$

Teniendo en cuenta la expresión de las matrices E_n y la fórmula de recurrencia (4.120), calculemos $Q(\bar{x})$.

$$Q(\bar{x}) = \sum_{j=0}^{n} E_j P_j(\bar{x})$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} E_j P_j(\bar{x}) + E_{n-1} P_{n-1}(\bar{x}) + E_n P_n(\bar{x})$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \left\{ D_j - D_{j+1} A_{j+1}^{-1} (\bar{x}I - B_{j+1}) + D_{j+2} A_{j+2}^{-1} C_{j+2} \right\} P_j(\bar{x})$$

$$+ \left\{ D_{n-1} - D_n A_n^{-1} (\bar{x}I - B_n) \right\} P_{n-1}(\bar{x}) + D_n P_n(\bar{x})$$

$$= D_n(P_n(\bar{x}) - P_n(\bar{x})) + D_{n-1}(P_{n-1}(\bar{x}) - P_{n-1}(\bar{x})) + \ldots + D_1(P_1(\bar{x}) - P_1(\bar{x})) + D_0 P_0(\bar{x})$$

$$= D_0 P_0(\bar{x})$$

por lo que el el resultado queda demostrado. □

NOTA 21 *Este resultado o algoritmo recurrente es análogo al que se utiliza para la evaluación de polinomios escalares verificando una relación de recurrencia de tres términos, véase por ejemplo [50].*

Veamos ahora otra aplicación del desarrollo asintótico de los polinomios de Hermite matriciales.

4.7. Desarrollo en serie de polinomios de Hermite matriciales.

TEOREMA 39 *Sea $A \in C^{r\times r}$ hermítica definida positiva tal que si $\alpha(A) =$ $\max\{a; a\in\sigma(A)\}$ y $\beta(A) = \min\{a; a\in\sigma(A)\}$, se verifica*

$$l = \beta(A) - \frac{\alpha(A)}{2} > 0 \tag{4.122}$$

Sea $F : R \to C^{r\times r}$ tres veces continuamente diferenciable, tal que

$$\|F^{(i)}\|_2 = O\left(e^{kx^2}\right) \quad , \quad 0 \le i \le 3 \quad , \quad 0 < k < \frac{\beta(A)}{4} \quad , \tag{4.123}$$

y sean

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x,A)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x,A)^H dx, \quad n \ge 0 \tag{4.124}$$

los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $F(x)$ respecto al SPOM $\left\{\widetilde{H}_n(x,A)\right\}_{n\ge 0}$. Entonces la serie

$$\sum_{n\ge 0} C_n e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x,A) \quad , \tag{4.125}$$

converge uniformemente a $F(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}$ en R , y la serie

$$\sum_{n\ge 0} C_n \widetilde{H}_n(x,A) \quad , \tag{4.126}$$

converge uniformemente a $F(x)$ en cualquier intervalo acotado de R.

<u>Demostración:</u> Obsérvese que por la hipótesis (4.123) se sigue que

$$\|F^{(i)}(x)\|_2^2 = O\left(e^{2kx^2}\right), \quad 0 \le i \le 3, \quad 0 < k < \frac{\beta(A)}{4} \quad , \tag{4.127}$$

puesto que

$$\|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|_2 = e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}}, \quad x \in R \quad , \tag{4.128}$$

de (4.127) y (4.128) tenemos

$$\|F^{(i)}(x)\|_2^2 \|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|_2 = O\left(e^{\left(2k-\frac{\beta(A)}{2}\right)x^2}\right), \quad 0 \le i \le 3, \quad 0 < k < \frac{\beta(A)}{4} \quad , \tag{4.129}$$

con lo que las funciones $F^{(i)}$ están en $L^2_W\left(R, C^{r\times r}\right)$ para $0 \le i \le 3$, con $W(x) = e^{-\frac{Ax^2}{2}}$.

Teniendo en cuenta que de (4.10) se verifica

$$\widetilde{H}_n(x,A) = \frac{A^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}}\widetilde{H}'_{n+1}(x,A) \quad ,$$

sustituyendo en (4.124) y aplicando el método de integración por partes, se sigue que

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{F(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\right\}\widetilde{H}'_{n+1}(x,A)dx\right\}A^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left\{\lim_{x\to+\infty} F(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+1}(x,A) - \lim_{x\to-\infty} F(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+1}(x,A)\right\}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{F'(x)-F(x)Ax\right\}e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+1}(x,A)dx\right\}A^{-\frac{1}{2}}$$

De (4.123) podemos afirmar que

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+1}(x,A) = 0 \quad ,$$

$$C_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+1}(x,A)dx\right\}A^{-\frac{1}{2}} \quad , \tag{4.130}$$

donde

$$F_1(x) = F'(x) - F(x)Ax \quad . \tag{4.131}$$

Puesto que F_1 es derivable y verifica también la condición

$$\lim_{x\to\pm\infty} F_1(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+2}(x,A) = 0 \quad ,$$

utilizando que

$$\widetilde{H}_{n+1}(x,A) = \frac{A^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+2}}\widetilde{H}'_{n+2}(x,A) \quad ,$$

y el método de integración por partes, de (4.130) se sigue que

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+2}(x,A)dx\right\}A^{-1} \quad , \tag{4.132}$$

donde

$$F_2(x) = F_1'(x) - F_1(x)Ax$$

$$= F''(x) - 2F'(x)Ax + F(x)\left(Ax^2 - A\right) \quad . \tag{4.133}$$

Nótese que de (4.127) y (4.133) se verifica que

$$\lim_{x\to\pm\infty} F_2(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+3}(x,A) = 0 \quad . \tag{4.134}$$

De (4.132) y (4.134), la relación

$$\widetilde{H}_{n+2}(x,A) = \frac{A^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+3}}\widetilde{H}'_{n+3}(x,A) \quad ,$$

y el método de integración por partes, podemos escribir

$$C_n = \frac{-1}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} F_3(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+3}(x,A)dx\right\}A^{-\frac{3}{2}} \quad , \tag{4.135}$$

donde

$$F_3(x) = F_2'(x) = F^{(3)}(x) + F^{(2)}(x)\left\{2A^2x^3 - 3Ax\right\} + F'(x)\left\{Ax^2 - 3A\right\}$$

$$+F(x)\left\{2Ax - A^2x^3 + A^2x\right\} \quad . \tag{4.136}$$

Obsérvese que al pertenecer $F^{(i)}$ al espacio $L^2_W\left(R, C^{r\times r}\right)$ para $0 \leq i \leq 3$, y verificarse (4.123), la función F_3 pertenece a $L^2_w\left(R, C^{r\times r}\right)$ y por el lema de Riemann-Lebesgue matricial, teorema 27, se verifica que la sucesión de matrices

$$A_{n+3}\left(F_3\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_3(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\widetilde{H}_{n+3}(x,A)dx \quad ,$$

tiende a la matriz nula en $C^{r\times r}$, y en particular existe $M > 0$ tal que

$$\|A_{n+3}\left(F_3\right)\|_2 \leq M, \quad n \geq 0 \quad . \tag{4.137}$$

De aquí, de (4.135) y utilizando que $\|A^{-\frac{3}{2}}\|_2 = [\alpha(A)]^{-\frac{3}{2}}$, se verifica

$$\|C_n\|_2 \leq \frac{(\beta(A))^{-\frac{3}{2}}M}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad n \geq 0 \quad . \tag{4.138}$$

De (4.138) y (4.107) y empleando que $\|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|_2 = e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}}$, se sigue que

$$\|C_n\widetilde{H}_n(x,A)e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|_2 \leq \frac{k_0\left[\beta(A)\right]^{-\frac{1}{2}}M}{(2\pi)(n+1)^{\frac{3}{2}}}e^{x^2\left[\frac{\alpha(A)}{4}-\frac{\beta(A)}{2}\right]}$$

$$= \frac{k_0\left[\beta(A)\right]^{-\frac{1}{2}}M}{(2\pi)(n+1)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{lx^2}{2}} \tag{4.139}$$

donde l viene dado por (4.122).
De (4.139) se sigue que la serie matricial (4.125) converge uniformemente en R a una función continua $F^*(x)$,

$$F^*(x) = \sum_{n\geq 0} C_n e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x, A) \quad , \tag{4.140}$$

y de (4.139), se verifica además

$$\|F^*(x)\|_2 \leq e^{-\frac{lx^2}{2}} \frac{k_0 \left[\beta(A)\right]^{-\frac{1}{2}} M}{2\pi} \sum_{n\geq 0} (n+1)^{-\frac{3}{2}} \quad , \tag{4.141}$$

es decir,

$$\|F^*(x)\|_2 = O\left(e^{-\frac{lx^2}{2}}\right) \quad , \tag{4.142}$$

con lo que $F^*(x)\widetilde{H}_n(x, A)$ es integrable en R.
A continuación demostraremos que

$$C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(x)\widetilde{H}_m(x, A)dx, \quad m \geq 0 \quad . \tag{4.143}$$

Obsérvese que de (4.140), podemos escribir que para $N \geq m$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(x)\widetilde{H}_m(x, A)dx - C_m$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F^*(x) - \sum_{n=0}^{N} C_n e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_n(x, A) \right\} \widetilde{H}_m(x, A)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n\geq N+1} C_n \widetilde{H}_n(x, A) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \right\} \widetilde{H}_m(x, A)dx$$

Tomando normas en la última expresión y teniendo en cuenta (4.139), podemos escribir

$$\| \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(x)\widetilde{H}_m(x, A)dx - C_m\|_2$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \| \sum_{n\geq N+1} C_n \widetilde{H}_n(x, A) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \|_2 \|\widetilde{H}_m(x, A)\|_2 dx$$

$$\leq \frac{k_0 \left[\beta(A)\right]^{-\frac{3}{2}} M}{2\pi} \sum_{n\geq N+1} (n+1)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{lx^2}{2}} \|\widetilde{H}_m(x, A)\|_2 dx \right\}$$

$$= L \sum_{n\geq N+1} (n+1)^{-\frac{3}{2}} \tag{4.144}$$

donde

$$L = \frac{k_0 \left[\beta(A)\right]^{-\frac{3}{2}} M}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{lx^2}{2}} \|\widetilde{H}_m(x, A)\|_2 dx \right\} \tag{4.145}$$

Tomando límites en (4.144) cuando $N \to \infty$, para m fijo, resulta (4.143). De (4.143) podemos escribir

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F^*(x) - F(x) e^{-\frac{Ax^2}{2}} \right\} \widetilde{H}_m(x,A) dx \quad ,$$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F^*(x) e^{\frac{Ax^2}{2}} - F(x) \right\} e^{-\frac{Ax^2}{2}} \widetilde{H}_m(x,A) dx \quad . \tag{4.146}$$

Nótese que por (4.142) se verifica

$$\|F^*(x)\|_2^2 = O\left(e^{-lx^2}\right)$$

Puesto que $\|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|_2 = e^{-\frac{\beta(A)x^2}{2}}$, tenemos

$$\|F^*(x)\|_2^2 \|e^{-\frac{Ax^2}{2}}\|_2 = O\left(e^{-\left(l+\frac{\beta(A)}{2}\right)x^2}\right) = O\left(e^{-\frac{\alpha(A)x^2}{4}}\right)$$

Así, $F^*(x)e^{-\frac{Ax^2}{2}}$ está en $L^2_W(R, C^{r\times r})$ y como $F(x)$ también está en $L^2_W(R, C^{r\times r})$, de (4.146) resulta que $F^*(x)e^{\frac{Ax^2}{2}} - F(x)$ está en $L^2_W(R, C^{r\times r})$ y es ortogonal a $\left\{\widetilde{H}_n(x,A)\right\}_{n\geq 0}$.

Por el teorema 29, $F^*(x)e^{\frac{Ax^2}{2}} = F(x)$ casi por todas partes en R, y por continuidad

$$F^*(x)e^{\frac{Ax^2}{2}} = F(x) \quad .$$

Como $F^*(x)e^{\frac{Ax^2}{2}} = \sum_{n\geq 0} C_n \widetilde{H}_n(x,A)$, resulta que

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} C_n \widetilde{H}_n(x,A)$$

uniformemente en cualquier intervalo acotado de R. $\square$

NOTA 22 *El desarrollo de una función matricial f en serie de Fourier de polinomios ortogonales matriciales respecto a un funcional de tipo integral ha sido estudiado en un contexto diferente en [58], en relación con el problema de la reconstrucción de funciones matriciales.*

Bibliografía

[1] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).

[2] S. Basu y N.K. Rose, Matrix Stieljes series and network models, *SIAM J. Math. Anal.* 14, No.2(1983), 209-222.

[3] R. Company, *Soluciones Explícitas de Ecuaciones Diferenciales Matriciales con Coeficientes Variables*, Tesis Doctoral, (Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, 1993).

[4] G.A. Cheboratev, *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, (American Elsevier, New York, 1957).

[5] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, (Gordon and Breach, New York, 1978).

[6] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, (Dover, New York, 1975).

[7] Ph. Delsarte, Y. Genin y Y. Kamp, Orthogonal polynomial matrices in the unit circle, *IEEE Trans. Circuits and Systems.* 25(1978), 145-160.

[8] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, (Academic Press, New York, 1960).

[9] L.M. Delves y J.L. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985).

[10] A. Draux, Formal orthogonal polynomials and Padé approximants in a non-negative algebra, in *Proc. of the M.T.N.S. 83, Lecture Notes in Control and Inf. Sci. 58*, Springer Verlag, Berlin (1984), 278-292.

[11] A. Draux y O. Jokung-Nguena, Orthogonal polynomials in a non-Commutative algebra. Non-Normal Case, *IMACS Annals on Computing and Appl. Maths.* 9(1991), 237-242.

[12] N. Dunford y J. Schwartz, *Linear Operators, Vol I*, (Interscience, New York, 1957).

[13] A.J. Duran, A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation, *J. of Appro. Theory.* 74 No 1 (1993), 83-109.

[14] A.J. Duran, On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures, *Canadian J. of Math.* 47 (1995), 88-112.

[15] A.J. Duran y P. López-Rodriguez, Orthogonal matrix polynomials: Zeros and Blumenthal's theorem, *J. of Appro. Theory.* 84 (1996), 96-118 .

[16] A.J. Duran y W. Van Assche, Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations, *Linear Algebra and Appl.* 219 (1995), 261-280.

[17] L.D. Faddeyeb, The inverse problem in the quantum theory of scattering, *J. Math. Physics.* 4 No.1 (1963), 72-104.

[18] G.B. Folland, *Fourier Analysis and its applications*, (Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1992).

[19] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern techniques and Their Applications*, (John Wiley, New York, 1984).

[20] T.M. Flett, *Differential Analysis*, (Cambridge Univ. Press, 1980).

[21] H.I. Freedman, Functionally conmutative matrices and matrices with constant eigenvectors, *Linear and Multilinear Algebra.* 4 (1976), 107-113.

[22] H.I. Freedman and J.D. Lawson, Systems with constant eigevectors with applications to exact and numerical solutions of ordinary differential equations, *Linear Algebra Appl.* 8 (1974), 369-374.

[23] P.A. Fuhrmann, *Orthogonal Matrix Polynomials and Systems Theory*, Preprint, 1986.

[24] F.R. Gantmacher, *Theory of Matrices*, (Chelsea Publ. Co, New York, 1959).

[25] J.S. Geronimo, Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line, *Circuits Systems Signal Process.* 1(3-4) (1982), 471-494.

[26] J.S. Geronimo, Matrix orthogonal polynomials in the unit circle, *J. Maths. Phys.* 22(7), (1981), 1359-1365.

[27] R. Godement, *Cours D'Algebre*, (Hermann, Paris, 1967).

[28] G. Golub y C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, (Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, M.A, 1989).

[29] A. Ghizzetti, Sugli sviluppi in serie di funzioni di Hermite,*Ann. Soc. Norm. Sup. Pisa.* (3), 5(1951), 29-37.

[30] G.H. Hammerlin y K.F. Hoffman, *Numerical Mathematics*, (Springer-Verlag, New York, 1991).

[31] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, (Addison-Wesley, New York, 1969).

[32] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, (Cambridge Univ.Press, 1991).

[33] L. Jódar and M. Legua, Solving second-order matrix differential equations with regular singular points avoiding the increase of the problem dimensions, *Applied Math. Comput.* 53 (1993) 191-205.

[34] L. Jódar, R. Company y E. Navarro, Laguerre matrix polynomials and systems of second order differential equations, *Appl. Numer. Maths.* 15, No.1 (1994), 53-64.

[35] L. Jódar, R. Company y E. Ponsoda, Orthogonal matrix polynomials and second order differential equations, *Differential Equations and Dynamical Systems.* 3 No.3 (1995), 269-288.

[36] L. Jódar, E. Defez y E. Ponsoda, Matrix quadrature integration and orthogonal matrix polynomials, *Congressus Numerantium.* 106 (1995), 141-153.

[37] L. Jódar y D. Goberna, Analytic numerical solution of coupled semi-infinite diffusion problem, *Computer. Math.* 30.No 12 (1995), 1-10.

[38] L. Jódar, E. Defez y E. Ponsoda, Orthogonal matrix polynomials with respect to linear matrix moment functionals: Theory and applications, *J. Approximation Theory Appl.* 12 No.1 (1996), 96-115.

[39] L. Jódar y E. Defez , Orthogonal matrix polynomials with respect to a conjugate bilinear matrix moment functional: Basic theory, *J. Approximation Theory Appl.* (1995), in print.

[40] L. Jódar y R. Company, Hermite matrix polynomials and second order matrix differential equations, *J. Approximation Theory Appl.* 12 No 2(1996).

[41] L. Jódar y E. Defez , On Hermite matrix polynomials and Hermite matrix functions. Enviado para su publicación.

[42] L. Jódar y E. Defez , Some new matrix formulas related to Hermite matrix polynomials theory. Enviado para su publicación.

[43] L. Jódar, E. Navarro y E. Defez , On the best approximation matrix problem and matrix Fourier series. Enviado para su publicación.

[44] D.C. Joula y N. Kazanjian, Bauer type factorization of positive matrices and theory of matrix polynomials on the unit circle, *IEEE Trans. Circuit and Systems.* 25(1978), 57-69.

[45] T. Kailath, *Linear Systems*, (Prentice-Hall, Inc, Englewood Chiffs, New York, 1980).

[46] B. Kagström, Bounds and perturbations bounds for the matrix exponential, *BIT.* 17(1977), 39-57.

[47] L. Kantorovich y G. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, (Macmillan, New York, 1964).

[48] R.A. LaBudde y D. Greenspan, Energy and momentum conserving methods of arbitrary order for the numerical integration of equations of motion II. Motion of a system of particles *Numer. Math.* 26(1976), 1-16.

[49] P. Lancaster y M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices, Second Ed.*, (Academic Press, New York, 1985).

[50] A.G. Law, C.N. Zhang, A. Rezazadeh y L. Jódar, Evaluation of a rational Function *Numer. Algorit.* 3(1992), 265-272.

[51] N.N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, (Dover, New York, 1972).

[52] P. Linz, Analytical and numerical methods for Volterra equations, *SIAM Studies in Applied Maths*, (Philadelphia, 1985).

[53] F. Marcellán y G. Sansigre, On a class of matrix orthogonal polynomials on the real line, *Linear Algebra Appl.* 181(1993), 97-110.

[54] C.B. Moler y C.F. Van Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Rev.* 20 (1978), 801-836.

[55] I. Najfeld y T.F. Havel, Derivaties of the matrix exponential and their computation, *Advances in Appl. Maths.* 16(1995), 321-375.

[56] E. Navarro, M.V. Ferrer y L. Jódar, A matrix method of Frobenius for solving implicit second order differential systems, *Analysis.* 13 (1993) 259-278.

[57] J.M. Ortega, *Numerical Analysis, A Second Course*, (Academic Press, New York, 1972).

[58] B.P. Osilenker, Fourier series in orthonormalized matrix polynomials, *Izvestija VUZ. Matematika.* Vol. 32 No.2(1988), 50-60.

[59] R.F. Rinehart, The derivative of a matrix function, *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956), 2-5.

[60] L. Rodman, Orthogonal Matrix Polynomials, P. Nevai Ed, in *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice*, (Kluwer Academic Publ. 1990), 345-362.

[61] M. Rosenberg, The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-Negative hermitian measure, *Duke Math. J.* 31(1964), 291-298.

[62] Yu.A. Rozanov, *Steady-State Random Processes*, (Nauka, Moscow, 1963). (In Russian).

[63] S. Saks y A. Zygmund, *Analytic Functions*, (Elsevier, Amsterdam, 1971).

[64] G. Sansone *Orthogonal functions*, (Dover Publications, INC,New York 1991).

[65] A. Sinap y W. Van Assche, Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix-valued functions, *Linear Algebra Appl.* 207(1994), 71-114.

[66] A. Sinap y W. Van Assche, Orthogonal matrix polynomials on the unit circle and applications, in *Proc. of The Workshop on Orthogonal Polynomials on the Unit Circle: Theory and Applications. (Madrid, June 27-30, 1994)*, 159-171.

[67] A. Sinap, Gaussian quadrature for matrix valued functions on the real line, in *Proc. Orthogonality, Moment Problems and Continued Fractions.(Delft, October 31-November 4, 1994).*

[68] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, (Ed. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1939). (Reprinted 1985)

[69] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Second Ed.*, (Clarendon Press, Oxford, 1978).

[70] M.H. Stone, Developments in Hermite polynomials, *Ann.Math.* (2),29(1927), 1-13.

[71] W. Wonham, On a matrix Riccati equation of stochastic control, *SIAM J. Control & Optimization*. Vol.6(1968), 681-697.