UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

DETERMINACIÓN Y PROPIEDADES DE H–MATRICES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

José Antonio Scott Guilleard

Directores:

Dr. Rafael Bru García
Dra. María Teresa Gassó Matoses
Dra. Isabel Giménez Manglano

Valencia, noviembre de 2015

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

DETERMINACIÓN Y PROPIEDADES DE H–MATRICES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

JOSÉ ANTONIO SCOTT GUILLEARD

DIRECTORES:

DR. RAFAEL BRU GARCÍA
DRA. MARÍA TERESA GASSÓ MATOSES
DRA. ISABEL GIMÉNEZ MANGLANO

Trabajo subvencionado por los proyectos MTM2010-18674 y MTM2014-58159-P con la participación de FEDER.

Valencia, noviembre de 2015.

Dedicatoria

A mis padres: Adina Virginia Guilleard Payne y John Aaron Scott Shaw, quienes me engendraron y me acompañaron durante la primera parte de mi vida, transmitiéndome su inmarcesible ejemplo de dignidad, honestidad y dedicación y amor al trabajo.

A mi esposa: Altagracia Josefina Rodríguez Matos, compañera de toda una vida, que siempre me ha apoyado en este esfuerzo personal a lo largo de estos últimos años.

A mi hija sabia y hermosa: Ingrid Eileen, quien ha seguido, orgullosamente la senda del estudio y del trabajo tesonero.

A mi hermana: Princess Elizabeth, quien no ha dudado un segundo en contribuir desinteresadamente con la finalización exitosa de este proyecto.

Agradecimientos

Deseo dar mi agradecimiento en primer lugar a mi equipo de asesores/tutores, dirigido magistralmente por el Dr. Rafael Bru García y constituido, además, por las Doctoras María Isabel Giménez Manglano y María Teresa Gassó Matoses. Es innegable que su dedicación, empeño y amor por las Matemáticas han sido decisivos para el logro de esta proeza.

En segundo lugar, quiero reconocer el papel estelar desempeñado por las instituciones que me apoyaron a lo largo de todo el programa:

- Universidad Politécnica de Valencia (UPV).
- Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC).
- Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).
- Instituto Tecnológico de las Américas (ITLA).

Aprovecho, una vez más, para agradecer a mis padres por los grandes valores que me inculcaron. En igual medida a mi esposa y mi hija por todos los grandes momentos que hemos compartido, así como también a mi hermana y hermanos que de seguro disfrutarán tanto como yo los logros alcanzados.

Quiero dar las gracias a mis profesores de la Universidad Politécnica de Valencia y al personal de la Oficina de Acción Internacional de esta misma universidad por la muy valiosa colaboración que me brindaron a todo lo largo del desarrollo del programa doctoral.

Finalmente, quiero agradecer el apoyo obtenido por el Ministerio de Economía y Competitividad, ya que parte de este trabajo se ha hecho con la ayuda de los proyectos MTM2010-18674 y MTM2014-58159-P con la participación de FEDER.

Rafael Bru García, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, María T. Gassó Matoses, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, e Isabel Giménez Manglano, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia,

CERTIFICAN:

Que Don José Antonio Scott Guilleard, Magister en Física Teórica, ha realizado bajo nuestra dirección el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universidad Politécnica de Valencia para que cumpla los trámites correspondientes.

Y para que así conste a efectos legales presentan dicha memoria, firmando este certificado en Valencia, a 1 de septiembre de 2015.

Rafael Bru García

María T. Gassó Matoses

Isabel Giménez Manglano

Resumen

El tema esencial de esta memoria es el estudio de las H–matrices tal y como fueron introducidas por Ostrowski y más adelante ampliadas y desarrolladas por diferentes autores.

En ese estudio se destacan tres vertientes: 1) la determinación iterativa o automática de las H–matrices, 2) las propiedades inherentes a las H–matrices y 3) las matrices relacionadas con las H–matrices.

Las H–matrices adquieren cada vez mayor relevancia debido a que surgen en numerosas aplicaciones tanto en la ciencia Matemática como en la Industria. Entre esas aplicaciones podemos citar las siguientes: 1) en la discretización de ciertas ecuaciones parabólicas no lineales, 2) en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, asegurando su presencia la convergencia de métodos iterativos clásicos y 3) en la resolucion de problemas de contorno libre en Análisis de Fluidos.

Si el producto de Hadamard, es decir, el producto elemento a elemento de dos matrices se realiza entre una matriz y su matriz inversa traspuesta, entonces la matriz producto, denominada Matriz Combinada, puede ser una H–matriz bajo determinadas condiciones de la matriz original. Dado que la suma de cada fila y de cada columna de una matriz combinada es exactamente igual a 1, en aquellos casos en que la matriz combinada sea no negativa, $C(A)$ es una matriz doblemente estocástica y por tanto puede ser de gran utilidad en Estadística y Probabilidad.

La memoria está estructurada por capítulos de la siguiente manera. En cada uno de ellos se presentan las aportaciones de la misma.

En el Capítulo 1, luego de la introducción, se da la notación y se definen los conceptos básicos y, además, se enuncian los resultados previos de ámbito general desarrollados por otros autores y que van a ser utilizados en gran parte de la memoria.

En el Capítulo 2 se presentan y analizan diferentes algoritmos que han sido propuestos con el objetivo de determinar cuándo una matriz dada es o

no es una H–matriz. Se hace hincapié en el estudio de aquellos algoritmos que han resultado ser los más eficientes y en la parte más relevante de este capítulo se presenta un nuevo algoritmo de menor coste computacional que los anteriores y más sencillo de programar, que resulta ser un aporte a la literatura de los algoritmos para la determinación o identificación de las H–matrices, así como de su carácter y también determina los bloques diagonales irreducibles.

En el Capítulo 3 se estudia ampliamente la matriz combinada de H–matrices no singulares y se obtienen también nuevos e importantes resultados sobre las propiedades de la matriz combinada de H–matrices. Se demuestra que la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es también H–matriz de la misma clase. Además, se prueba que la matriz combinada de una H–matriz de la clase mixta no singular es también H–matriz.

En el Capítulo 4 se calcula la matriz combinada de matrices diagonalmente dominantes equipotentes. En particular, se demuestra que la matriz combinada de una H–matriz, denominada DmP es siempre una H–matriz de la clase mixta pero singular. Para otras H–matrices que no son DmP se prueba que su matriz combinada es H–matriz de la clase invertible.

En el Capítulo 5 se recogen, a modo de resumen, los principales logros alcanzados durante el desarrollo de esta memoria y, además, se enumeran los trabajos sobre los cuales ya se está trabajando y se esbozan algunas de las principales líneas de investigación para el futuro próximo.

Por último, en los apéndices se presentan, en formato MATLAB, diferentes algoritmos estudiados en el Capítulo 2 y la codificación del nuevo algoritmo propuesto.

Resum

El tema essencial d'aquesta memòria és l'estudi de les H–matrius tal com van ser introduïdes per Ostrowski i més endavant ampliades i desenvolupades per diferents autors.

En aqueix estudi es destaquen tres vessants: 1) la determinació iterativa o automàtica de les H–matrius, 2) les propietats inherents a les H–matrius i 3) les matrius relacionades amb les H–matrius.

Les H–matrius adquireixen cada vegada major rellevància a causa que sorgeixen en nombroses aplicacions tant en la ciència Matemàtica com en la Indústria. Entre aqueixes aplicacions podem citar les següents: 1) en la discretització de certes equacions parabòliques no-lineals, 2) en la resolució de sistemes d'equacions lineals, assegurant la seua presència la convergència de mètodes iteratius clàssics i 3) en la resolució de problemes de contorn lliure en Anàlisi de Fluids.

Si el producte de Hadamard, és a dir, el producte element a element de dues matrius es realitza entre una matriu i la seua matriu inversa trasposada, llavors la matriu producte, denominada Matriu Combinada, pot ser una H–matriu sota determinades condicions de la matriu original. A més, atès que la suma de cada fila i de cada columna d'una matriu combinada és exactament igual a 1, en aquells casos en què la matriu combinada siga no negativa, $C(A)$ és una matriu doblement estocàstica i per tant pot ser de gran utilitat en Estadística i Probabilitat.

La memòria està estructurada per capítols de la següent manera. En cadascun d'ells es presenten les aportacions de la mateixa.

En el Capítol 1, després de la introducció, es dóna la notació i es defineixen els conceptes bàsics i , a més, s'enuncien els resultats previs d'àmbit general desenvolupats per altres autors i que van a ser utilitzats en gran part de la memòria.

En el Capítol 2 es presenten i analitzen diferents algorismes que han sigut proposats amb l'objectiu de determinar quan una matriu donada és

o no és una H–matriu. Es posa l'accent en l'estudi d'aquells algorismes que han resultat ser els més eficients i en la part més rellevant d'aquest capítol es presenta un nou algorisme de menor cost computacional que els anteriors i mes senzill de programar, que resulta ser una aportació a la literatura dels algorismes per a la determinació o identificació de les H–matrius, així com del seu caràcter i també determina els blocs diagonals irreductibles.

En el Capítol 3 s'estudia àmpliament la matriu combinada d'H–matrius no singulars i s'obtenen també nous i importants resultats sobre les propietats de la matriu combinada d'H–matrius. Es demostra que la matriu combinada d'una H–matriu de la classe invertible és també H–matriu de la mateixa classe. A més, es prova que la matriu combinada d'una H–matriu de la classe mixta no singular és també H–matriu.

En el Capítol 4 es calcula la matriu combinada de matrius diagonalment dominants equipotents. En particular, es demostra que la matriu combinada d'una H–matriu, denominada DmP és sempre una H–matriu de la classe mixta però singular. Per a altres H–matrius que no són DmP es prova que la seua matriu combinada és H–matriu de la classe invertible.

En el Capítol 5 s'arrepleguen, a manera de resum, els principals assoliments aconseguits durant el desenvolupament d'aquesta memòria i, a més, s'enumeren els treballs sobre els quals ja s'està treballant i s'esbossen algunes de les principals línies de recerca per al futur pròxim.

Finalment, en els apendix es presenten, en format MATLAB, diferents algorismes estudiats al Capítol 2 i el nou algorisme proposat.

Abstract

The essential topic of this memory is the study of H–matrices as they were introduced by Ostrowski and hereinafter extended and developed by different authors.

In this study three slopes are outlined: 1) the iterative or automatic determination of H–matrices, 2) the properties inherent in the H–matrices and 3) the matrices related to H–matrices.

H–matrices acquire every time major relevancy due to the fact that they arise in numerous applications so much in Mathematics, since in the Industry between. Between these applications we can mention the following ones: 1) in the discretization of certain parabolic non-linear equations, 2) in the system resolution of linear equations, assuring his presence the convergence of iterative classic methods and 3) in the resolution of problems of free contour in Analysis of Fluids.

If the Hadamard's Product, that is to say, the product element to element of two matrices is done between a matrix and its inverse transpose then this matrix product is called combined matrix. The combined matrix is an H–matrix under certain conditions of the original H–matrix. In addition, provided that the sum of every row and of every column is equal to one, in those cases in which the combined matrix is not negative, C(A) is a doubly stochastic matrix and therefore it is of great usefulness in the Statistical Theory.

The present memory is structured of the following way.

In the first chapter, after the introduction, we present the notation, the basic concepts and previous results developed by other authors and that are going to be used largely in the memory.

In Chapter 2 we present and analyze different algorithms that have been proposed by the aim to determine when a given matrix is or is not an H–matrix. It is emphasized in the study of those algorithms that have turned out to be the most efficient and in the most relevant part of this chapter we

present a new algorithm that turns out to be a contribution to the literature of the algorithms for the determination or identification of H–matrices, as well as of his character.

In Chapter 3 we widely studied the combined matrix of a nonsingular H–matrices and we obtain new and important properties of the combined matrix of H–matrices. We prove that the combined matrix of an H–matrix of the invertible class is an H–matrix of the same class. In addition, we prove that the combined matrix of H–matrices of the mixed class is an H–matrix.

In Chapter 4 we calculate the combined matrix of diagonally dominant and equipotent matrices. In particular, we prove that the combined matrix of H–matrices denoted DmP. When the H–matrix is not DmP then we prove that its combined matrix is always an H–matrix of the invertible class.

In Chapter 5, like summary, we outline the principal achievements reached during the development of this memory and, in addition, enumerate the works on which already we are working and also we present some of the principal lines of investigation for the near future.

Finally, in the appendices we present, in format MATLAB, different algorithms studied in Chapter 2 and the codification of the new proposed algorithm.

Índice general

1. Introducción, notación, definiciones y resultados previos **1**

1.1. Introducción 1

1.2. Notación 5

1.3. Algunas matrices 5

1.4. Reducibilidad y forma normal de Frobenius 8

1.5. Clases de H–matrices 9

1.5.1. Las H–matrices de la clase invertible 13

1.5.2. Las H–matrices de la clase mixta 13

1.5.3. Las H–matrices de la clase singular 14

1.5.4. Resumen de las características de las H–matrices . . 15

1.6. No-H–matrices 16

1.7. La matriz combinada 17

1.8. Estructura de la memoria 18

2. Determinación iterativa de H–matrices **21**

2.1. Introducción 21

2.2. Algunos algoritmos previos 23

2.3. El algoritmo de Alanelli y Hadjidimos 32

2.4. El algoritmo de Bru, Giménez y Hadjidimos 36

2.5. Algoritmo propuesto: BGS 40

2.6. Conclusiones 54

3. Matrices combinadas de H–matrices **57**

3.1. Introducción 57

3.2. Notaciones y Definiciones 58

3.3. Matrices Combinadas de H–matrices 59

3.3.1. Matrices combinadas de H–matrices de la clase invertible 59

3.3.2. Matrices combinadas de subclases de H–matrices . . 61

3.3.3. Matrices combinadas de H–matrices invertibles de la clase mixta 61

3.4. Conclusiones 66

4. Matrices combinadas de matrices diagonalmente dominantes equipotentes **67**

4.1. Introducción 67

4.2. Definiciones y resultados previos 69

4.3. Matriz combinada de matrices DmP 71

4.4. Matriz combinada de matrices DDE que no son DmP 75

4.5. Conclusiones 86

5. Conclusiones y líneas futuras **89**

5.1. Conclusiones 89

5.2. Líneas futuras 90

Apéndices **92**

A. Programación en Matlab de algunos algoritmos **93**

A.1. Algunos algoritmos anteriores 94

A.1.1. Algoritmo de Li (2002), [31] 94

A.1.2. Algoritmo de Alanelli y Hadjidimos: AH1, [1] 96

A.1.3. Algoritmo ABGH, [11] 97

A.1.4. Algoritmo IRR, [11] 98
A.1.5. Algoritmo BD, [11] 99
A.1.6. Algoritmo HC, [11] 100
A.1.7. Algoritmo ModAH 101
A.2. Algoritmo propuesto: BGS 102
A.2.1. Algoritmo IRRS 103
A.2.2. Algoritmo IDB 104
A.2.3. Algoritmo CHBDI 105

Bibliografía **106**

Capítulo 1

Introducción, notación, definiciones y resultados previos

1.1. Introducción

El tema esencial de esta memoria es el estudio de las H–matrices tal y como fueron introducidas por Ostrowski en [36] y más adelante ampliadas y desarrolladas por diferentes autores (ver [3], [6], [7], [14], [33] y [43]).

En este estudio se destacan tres líneas fundamentales de investigación y análisis de las H–matrices.

- La determinación de las H–matrices, es decir, el establecer cuándo una matriz dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es o no es H–matriz. Este problema lleva consigo asociada la tarea de especificar, además, a qué clase de H–matriz o de no-H–matriz pertenece la matriz dada. En vista de que no es una tarea sencilla la de identificar a las H–matrices, sobre todo si se trata de matrices de grandes dimensiones, se han propuesto diferentes métodos y algoritmos iterativos que poseen diferentes grados de eficiencia y de complejidad para acometer la tarea de identificar las H–matrices.

- Las propiedades de las H–matrices, es decir, las características que distinguen a estas matrices de otras matrices similares y del resto de matrices y que hacen posible desarrollar nuevos métodos para su determinación. Si bien las H–matrices se han estudiado ampliamente, todavía es un tema inacabado que requiere del esfuerzo y dedicación de la comunidad Matemática para descubrir nuevas propiedades, nuevas subclases o nuevos métodos y/o algoritmos de cálculo de las H–matrices.

- Las matrices relacionadas con las H–matrices, es decir, matrices que devienen en H–matrices por la acción de alguna operación matricial o matrices importantes que resultan de la aplicación de operaciones matriciales sobre las H–matrices.

Podemos señalar que se han obtenido diferentes resultados a lo largo del desarrollo de esta memoria, entre los cuales se destacan:

1. El desarrollo de un algoritmo eficiente para la determinación de H–matrices y no-H–matrices.

2. El desarrollo, puesta en funcionamiento y análisis de eficiencia del nuevo algoritmo utilizando un lenguaje de programación de bajo nivel.

3. La determinación de nuevas propiedades de las H–matrices. En particular, el resultado fundamental del Capítulo 3 que establece que la matriz combinada de una H–matriz invertible siempre es una H–matriz, extendiendo el resultado de la clase invertible a las H–matrices invertibles de la clase mixta.

4. El descubrimiento de que la combinada de las matrices diagonalmente equipotentes estudiadas en el Capítulo 4 verifican al menos una de las siguientes propiedades:

   - poseen al menos una fila que es estrictamente diagonal dominante
   - en algunos casos pueden ser matrices doblemente estocásticas.

Las M–matrices y la clase más general de las H–matrices han sido utilizadas en numerosos problemas de las Matemáticas y de otras ciencias. Una de las aplicaciones más importantes de este tipo de matrices es en el Algebra Lineal Numérica; específicamente en la solución de sistemas lineales utilizando la factorización LU y el complemento de Schur, así como también en la construcción de precondicionadores.

Particularmente las H–matrices constituyen una clase que contiene a las M–matrices y se utilizan hoy día debido a que surgen en numerosas aplicaciones como por ejemplo:

- cuando se discretizan ciertas ecuaciones parabólicas no lineales.

- cuando se resuelven sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, el carácter de H–matriz de la matriz de coeficientes es una condición suficiente para asegurar la convergencia de los métodos iterativos clásicos como el de Jacobi o el de Gauss-Seidel.
- cuando la matriz de coeficientes en un Problema de Complementariedad Lineal (LCP) es una H–matriz con diagonal positiva la solución es única (ver [11]).
- cuando se resuelven problemas de contorno libre en Análisis de Fluidos, la solución del problema es única si la matriz de los coeficientes es H–matriz de la clase invertible (ver [11]).
- Cuando se quiere determinar regiones que localizan los valores propios de una matriz invertible (ver [12]).

Los conceptos de M–matriz no singular y H–matriz fueron introducidos por Ostrowski en [36] y [38] en el estudio de la convergencia de un proceso iterativo y en la teoría espectral, donde los nombres hacen referencia a Minkowsky y Hadamard respectivamente. Más tarde, estas definiciones fueron extendidas por Fiedler y Ptak a M–matrices singulares en [19] y H–matrices singulares en [20]. En la segunda mitad del siglo XX, el estudio de las M–matrices y las H–matrices invertibles fue ampliado significativamente (ver [3], [5], [6] y [7]).

En los últimos años, el conjunto $\mathcal{H}$ de las H–matrices generales, a la hora de distinguir las propiedades que diferencian el caso singular del invertible, ha sido ampliamente estudiado y se ha concluido una subdivisión, no en dos tipos, singular/invertible, sino en tres diferentes clases (ver [5]), mutuamente excluyentes y con diferentes propiedades (ver [6]): la clase invertible, $\mathcal{H}_I$, en donde todas las H–matrices son invertibles; la clase singular, $\mathcal{H}_S$, constituida sólo por H–matrices singulares, y la clase mixta, $\mathcal{H}_M$, en la cual coexisten tanto H–matrices invertibles como singulares.

Las H–matrices invertibles poseen diferentes propiedades cuando pertenecen a una de las clases $\mathcal{H}_I$ o $\mathcal{H}_M$. Algo similar se aplica a las H–matrices que son singulares y pertenecen a la clase $\mathcal{H}_M$ o a la clase $\mathcal{H}_S$.

Dentro de las H–matrices de la clase invertible se han identificado y estudiado varias subclases que son útiles en varios campos de estudio del Álgebra Lineal tales como la estimación de determinantes, la localización de valores propios y la estimación de la raíz de Perron utilizando los elementos de la matriz dada. Entre esas subclases de las H–matrices invertibles se pueden citar las matrices S-SDD, las matrices de Ostrowski, las matrices α, $\alpha 1$ y $\alpha 2$, así como también las matrices de Gudkov, las de Nekrasov, las S-Gudkov , las S-Nekrasov y otras más (ver [13], [12] y [37]).

La tendencia actual no es sólo la de caracterizar a las H–matrices, sino también la de calcularlas e identificar sus clases (ver [11]) por medio de algoritmos con sus respectivos programas iterativos. Justamente, uno de los objetivos de esta monografía es el de analizar y mejorar significativamente uno de estos programas iterativos para calcular e identificar la clase de las H–matrices y de las que no son H–matrices.

En este trabajo vamos a estudiar la matriz combinada de H–matrices invertibles. La matriz combinada de una matriz invertible ha sido estudiada inicialmente en diversos trabajos como [14], [15] y [17]. Un estudio exhaustivo sobre la matriz combinada desde un punto de vista de aplicación lineal se da en [28]. En la última década, nuevas propiedades de la matriz combinada se han presentado en los trabajos [18] y [16]. En este último trabajo es donde el nombre de matriz combinada aparece por primera vez.

En la matriz combinada, $C(A)$, de una matriz cuadrada e invertible A, es conocido que la suma de cada fila y de cada columna es exactamente 1. En consecuencia, si $C(A) \geq O$, la matriz combinada será doblemente estocástica. Este hecho motiva, por ejemplo, que en [8] y [9], se estudie cuando la matriz combinada de algunas clases de matrices es no negativa. En particular, se estudia la no negatividad de la matriz combinada de matrices totalmente positivas (no negativas) y matrices totalmente negativas (no positivas) además de las matrices signo-regulares.

Es conocido el interés de la matriz combinada por su uso en Control de procesos, inicialmente llamada RGA en relación a "Relative Gain Array". Esta descripción proviene del trabajo de Bristol [4]: si la matriz de ganancia A describe la relación entre las entradas y las salidas en un proceso de control multivariable, la matriz combinada, $C(A) = A \circ A^{-T}$, describe la matriz de ganancia relativa del proceso; este método es conocido como método Bristol. Un estudio detallado de la matriz RGA se da en [28] y se pueden encontrar diversas aplicaciones en [34] y [41]).

Relacionado con este trabajo, recordemos que Fiedler demuestra en [14] que la matriz combinada de una M–matriz invertible es también una M–matriz invertible. En esta monografía extendemos este resultado para las H–matrices invertibles. En el apartado 3.1 se prueba que la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es también H–matriz de la misma clase. Además, en el apartado 3.2, se obtiene que la matriz combinada de una H–matriz invertible de la clase mixta es también H–matriz.

Con el fin de iniciar el estudio formal de las H–matrices, matrices relacionadas y matrices combinadas de ellas, presentamos en este primer capítulo las definiciones, teoremas y resultados previos sobre este tema que necesitaremos más adelante para desarrollar los contenidos de los capítulos posteriores.

1.2. Notación

A no ser que se indique lo contrario, en esta monografía todas las matrices son complejas de dimensión $n \times n$.

1. Dada una matriz A de dimensión $n \times n$, denotamos por N el conjunto de índices $\{1, \ldots, n\}$.
2. Dada una matriz A de dimensión $n \times n$, denotamos por $|A|$ la matriz cuyos elementos son los elementos de A en módulo.
3. S representa cualquier subconjunto propio de N y $\bar{S} = N \setminus S$ su complemento.
4. $A(i|j)$ denota la submatriz obtenida de A al eliminar la fila i y la columna j y A_{ij} denota su determinante.
5. El índice $k \in \mathbb{N}$ se usa para expresar que un número entero n es par o impar, escribiendo $n = 2k$ o $n = 2k - 1$, respectivamente.
6. El símbolo $\mathrm{sign}\,(d)$, para $d \in \mathbb{R}$, denota el signo de la cantidad d, que puede ser $+1$, -1 ó 0.
7. Por $\mathrm{diag}(A)$ se representa una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los de la matriz inicial A. Esta matriz diagonal se representa también por D_A.
8. Abusando de la notación, también denotamos por $D = \mathrm{diag}(d_i)$ a una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los elementos d_i $i = 1, 2, \ldots, n$.
9. El símbolo $nnz(A)$ representa el número de elementos no nulos de la matriz A.

1.3. Algunas matrices

En esta monografía consideraremos sólo matrices cuadradas. En general, los elementos de estas matrices son complejos y se especificará cuando esos elementos sean reales.

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se definen los siguientes conceptos:

Definición 1.3.1. *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una **matriz monomial** si posee exactamente un único elemento no nulo en cada fila y exactamente un único elemento no nulo en cada columna.*

Las matrices monomiales se convierten en matrices de permutación cuando sus elementos no nulos son iguales a la unidad.

Cualquier matriz monomial es el producto de una matriz de permutación y una matriz diagonal.

Las matrices monomiales se convierten en matrices diagonales por medio de una permutación.

Definición 1.3.2. *La matriz de **comparación** de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathcal{M}(A)$, se define como la matriz constituida por los números reales $m_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $m_{ii} = |a_{ii}|$, y $m_{ij} = -|a_{ij}|$, siendo $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$.*

Definición 1.3.3. *Dos matrices complejas A y B son matrices **equimodulares** si se cumple que $|A| = |B|$, que es equivalente a la relación*

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A).$$

*El **conjunto** de matrices equimodulares asociadas con una matriz dada A ([44]) se denota por*

$$\Omega(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n\times n} \;:\; |B| = |A|\}.$$

Definición 1.3.4. *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para la cual los elementos: $a_{ij} \le 0$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ es una **M–matriz** si A admite la partición $A = sI - B$, siendo B una matriz no negativa e I la matriz identidad y de forma que*

$$s \ge \rho(B) \tag{1.1}$$

siendo $\rho(B)$ el radio espectral de B.

Ahora estamos en condiciones de introducir el concepto más esencial de este trabajo, el concepto de H–matriz.

Definición 1.3.5. *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una **H–matriz** si su matriz de comparación $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz.*

Nótese que, si A es una H–matriz, todas las matrices del conjunto $\Omega(A)$ son también H–matrices y, en particular, $\mathcal{M}(A)$ es M–matriz.

Obsérvese que, para que la matriz B en la Definición 1.3.4 sea no negativa, es necesario que el parámetro s sea mayor o igual que todos los elementos diagonales de A. También se concluye que los elementos diagonales de A son no negativos. Entonces, si A es una M–matriz, se tiene que $A = \mathcal{M}(A)$.

También es importante señalar que la definición tomada de M–matriz es la más general pues incluye el caso en que la matriz $\mathcal{M}(A)$ es **singular**: cuando $s = \rho(B)$, pudiendo contener, además, elementos diagonales nulos. Por el contrario, si $s > \rho(B)$, se obtiene que $\mathcal{M}(A)$ es invertible, todos los elementos diagonales de A son positivos y su matriz inversa es no negativa, resultado que destacamos a continuación por ser, quizás, el que ha provocado el amplio estudio de las M–matrices.

Una matriz real A de dimensión $n \times n$ tal que $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ es una M–matriz invertible si y sólo si $A^{-1} \geq 0$.

Las M–matrices han sido estudiadas con mucho interés desde que fueron introducidas por Ostrowski en 1937 ([36]) y luego fueran ampliadas por Schneider en 1953 con el nuevo concepto de M–matriz singular ([39]). En particular, Berman y Plemmons en [3] recopilan una larga colección de caracterizaciones de M–matriz no singular. Entre ellas debemos destacar las que se refieren a dominancia diagonal y a la matriz de Jacobi.

Definición 1.3.6. *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **diagonalmente dominante (DD)** si*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si todas las desigualdades anteriores son estrictas, se dice **estrictamente diagonal dominante (SDD)**, mientras que, si todas las desigualdades son identidades, puede llamarse matriz **dominante diagonalmente equipotente (DDE)** ([47]).

Definición 1.3.7. *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **diagonalmente dominante generalizada (GDD)** si existe una matriz diagonal $D = diag(d_i)$, con $d_i > 0$, tal que AD es diagonalmente dominante, es decir,*

$$|a_{ii}|d_i \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Si todas las desigualdades anteriores son estrictas, entonces la matriz A se denomina **estrictamente diagonal dominante generalizada (GSDD)**. Por el contrario, si todas las desigualdades son igualdades, entonces la matriz A se denomina **dominante diagonalmente equipotente generalizada (GDDE)**.*

Teorema 1.3.1 (Theorem 2.3 (M35), [3])**.** *Una matriz A tal que $A = \mathcal{M}(A)$ es una M–matriz no singular si, y sólo si, A es GSDD.*

No obstante, encontrar la matriz diagonal D tal que AD sea SDD no es tarea sencilla.

Definición 1.3.8. *Si $D_A = \mathrm{diag}(A)$ es invertible, la* **matriz de iteración de Jacobi** *asociada con A se define como $J_A = I - D_A^{-1}A$. En este caso existe, además la matriz de iteración de Jacobi asociada con $\mathcal{M}(A)$ y es la matriz no negativa*

$$J_{\mathcal{M}(A)} = |D_A^{-1}A| - I = |J_A|. \tag{1.2}$$

Otra manera de construir la matriz de Jacobi es la siguiente. Si $A = \mathcal{M}(A)$, dada la partición $A = D - (L + U)$, donde D representa la matriz diagonal de A y $-L$ y $-U$, las matrices estrictamente triangular inferior y estrictamente triangular superior de A, entonces

$$J_{\mathcal{M}(A)} = D^{-1}(L + U).$$

En relación con M–matrices se tiene el siguiente conocido resultado.

Teorema 1.3.2 (Theorem 5.14, [3])**.** *Si $A = \mathcal{M}(A)$, entonces A es una M–matriz no singular si, y sólo si,*

$$\rho(J_{\mathcal{M}(A)}) < 1$$

Como detallaremos posteriormente, es interesante observar que, aunque los primeros intentos de buscar un algoritmo para la determinación de H–matrices están basados fundamentalmente en la dominancia diagonal generalizada, el algoritmo de Alanelli y Hadjidimos ([1]) utiliza la caracterización definida por la matriz de Jacobi, y veremos que sus resultados son mucho más favorables.

1.4. Reducibilidad y forma normal de Frobenius

Las matrices cuadradas y complejas con las que trabajamos a lo largo de esa monografía pueden ser reducibles o irreducibles. A continuación se introducen los conceptos de reducibilidad e irreducibilidad.

Definición 1.4.1. *Una matriz A de dimensión n es* ***reducible*** *si*

- $n = 1$ *y* $A = [0]$

  o

- *existe una permutación P tal que*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R & T \\ O & S \end{bmatrix},$$

en donde R y S son matrices cuadradas de dimensión menor que n.

*En otro caso, la matriz se denomina **irreducible**.*

Cuando una matriz A es reducible, admite una descomposición por medio de una permutación en una matriz triangular superior por bloques denominada *Forma normal de Frobenius (Fnf)* como se muestra a continuación

$$PAP^T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1q} \\ O & F_{22} & \cdots & F_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & F_{qq} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

en donde $F_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ para $i \in Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ tal que $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$ y en donde cada F_{ii} es una matriz irreducible o un bloque nulo de dimensión 1×1.

Observe que la estructura 1.3 podría ser triangular inferior.

La siguiente es una caracterización de las matrices irreducibles que se utilizan en nuestro trabajo.

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ es irreducible } \Leftrightarrow nnz(|A| + I)^m = n^2 \tag{1.4}$$

para algún $m \leq n$.

1.5. Clases de H–matrices

Aunque en el estudio de M–matrices hay una clara división, tanto en caracterizaciones como en propiedades, entre las que son singulares y las que no lo son, en los siguientes ejemplos damos una muestra de cómo la singularidad o no de ciertas H–matrices no es absolutamente determinante. Esto dará lugar, como posteriormente detallaremos, a una división del conjunto de H–matrices en 3 diferentes tipos.

Ejemplo 1.5.1. *Considere la siguiente matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

no singular. Su determinante es igual a

$$det(A) = 2(-2) - (-2)(-2) = -8 \neq 0$$

Su matriz de comparación, $\mathcal{M}(A)$ *es singular:*

$$\det(\mathcal{M}(A)) = 2(2) - (-2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

y es M–matriz porque:

$$\mathcal{M}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \quad 2I - B = 2I - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde hemos tomado $s = 2$ *y el radio espectral de la matriz no negativa* B *es también 2 por ser 2 y -2 sus valores propios. Concluimos entonces que la matriz* A *es una H–matriz no singular. Pero no verifica ninguna de las propiedades anunciadas en el Teorema 7.5.14 de la referencia [3].*

Es entonces importante resaltar este error comentado ya en [5] pues de la no singularidad de una H–matriz no se puede concluir la no singularidad de su matriz de comparación, aunque, no obstante, la no singularidad de $\mathcal{M}(A)$ sí que implica la no singularidad de todas las H–matrices en $\Omega(A)$. También es de observar que el mismo ejemplo muestra que la singularidad de $\mathcal{M}(A)$ no implica la singularidad de todas las H–matrices en $\Omega(A)$. Más aún, si A es una H–matriz tal que $\mathcal{M}(A)$ es una matriz no singular, entonces es sabido que todos los elementos de la diagonal de A son diferentes de cero. Sin embargo, hay H–matrices con algunos elementos nulos en su diagonal.

Ejemplo 1.5.2. *Las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}$$

son H–matrices singulares para todo $a, b \neq 0$ *y algunos de los elementos de la diagonal son nulos.*

Las tres matrices del ejemplo 1.5.2 poseen matrices de comparación singulares y, de hecho, todas las matrices equimodulares son singulares, y las tres matrices son reducibles. Se observa, además, que sólo la matriz B puede ser diagonal dominante generalizada (GDD) si $|b| > |a|$. Por último, debido a la existencia de elementos diagonales nulos, no es posible calcular sus matrices de iteración de Jacobi.

A continuación veremos la división del conjunto de H–matrices en tres tipos diferentes construida en [5].

Definición 1.5.1. *La matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece a la* ***Clase Invertible*** *$\mathcal{H}_I$ si y sólo si $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz no singular.*

Definición 1.5.2. *La matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece a la* ***Clase Mixta*** *$\mathcal{H}_M$ si y sólo si $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz singular y sus elementos diagonales son diferentes de cero.*

Si $A \in \mathcal{H}_M$ y $n \neq 1$, se tiene que alguna matriz equimodular a A, $B \in \Omega(A)$, es una H–matriz invertible. (Ver ejemplo 1.5.1.)

Definición 1.5.3. *La matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pertenece a la* ***Clase Singular*** *$\mathcal{H}_S$ si y sólo si $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz singular con al menos un elemento diagonal nulo.*

Si $A \in \mathcal{H}_S$, A y todas sus matrices equimodulares $B \in \Omega(A)$ son singulares y, además, reducibles. (Ver Ejemplo 1.5.2.)

Los siguientes teoremas, lemas y definiciones caracterizan las H–matrices y servirán de fundamento teórico para clasificar las H–matrices y especificar las propiedades de todas las clases de H–matrices que se logren.

Teorema 1.5.1 (Theorem 2, [5]). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $a_{ii} \neq 0$, para i = 1, 2, ..., n. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es una H–matriz*
2. $\rho(J_{\mathcal{M}(A)}) \leq 1$
3. *Para toda matriz $B \in \Omega(A)$, se cumple que $\rho(J_B) \leq 1$.*

Nótese que este resultado caracteriza todas las H–matrices con diagonal invertible, es decir, todas aquéllas para las que es posible calcular la matriz de Jacobi asociada a su matriz de comparación.

Teorema 1.5.2 (Theorem 3, [5]). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una H–matriz irreducible. Entonces $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Corolario 1.5.1. *Todas las H–matrices que posean algún elemento diagonal nulo, es decir, las matrices de la clase $\mathcal{H}_S$, son matrices reducibles.*

Así mismo, un resultado que será de utilidad en el desarrollo del algoritmo, es el recíproco.

Corolario 1.5.2. *Una matriz irreducible con un elemento diagonal nulo nunca es una H–matriz.*

Teorema 1.5.3 (Theorem 5, [5]). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz reducible. Entonces, A es una H–matriz si y sólo si en la forma normal de Frobenius de A dada en (1.3), $PAP^T = [F_{ij}]$, cada bloque diagonal F_{ii} es una H–matriz.*

La relación entre H–matrices generales y dominancia diagonal proporciona los siguientes resultados, pero no caracteriza todas las H–matrices.

Teorema 1.5.4 (Theorem 4, [5]). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz irreducible. Entonces, A es una H–matriz si y sólo si A es una matriz diagonal dominante generalizada.*

Teorema 1.5.5 (Theorem 6,[5]). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si A es GDD, entonces A es una H–matriz.*

Por último, en relación con las H–matrices que contienen algún elemento diagonal nulo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.6 (Theorem 7, [5]). *Sea A una H–matriz. Entonces A posee algunos elementos nulos en su diagonal principal si y sólo si B es singular para toda matriz $B \in \Omega(A)$.*

Si se observa la demostración del resultado anterior [5], la conclusión de que todas las matrices equimodulares a una H–matriz con algún elemento diagonal nulo son singulares proviene de la siguiente observación: este tipo de H–matrices son reducibles y los elementos diagonales nulos no pueden formar parte de un bloque diagonal irreducible de la forma normal de Frobenius de la matriz de comparación de A; constituyen por tanto bloques diagonales nulos de dimensión 1×1.

Corolario 1.5.3. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $a_{ii} = 0$ para p valores de i. Entonces, A es una H–matriz si, y sólo si, en la forma normal de Frobenius $PAP^T = [F_{ij}]$, p bloques diagonales son matrices nulas 1×1 y el resto de bloques diagonales son H–matrices irreducibles.*

Con los resultados anteriores, el conjunto de todas las H–matrices se divide en tres clases ([5]):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_I \cup \mathcal{H}_M \cup \mathcal{H}_S.$$

Cuando $n = 1$, $A = [x]$ siempre es H–matriz:

- Si $x > 0$, A es M–matriz invertible.

- Si $x < 0$, A es H–matriz de la clase invertible.
- Si $x = 0$, A es M–matriz singular.

En los dos primeros casos $A \in \mathcal{H}_I$ y en el tercero $A \in \mathcal{H}_S$, es decir que para $n = 1$ no hace falta añadir una "tercera " clase.

Recordemos algunas propiedades de cada una de estas clases.

1.5.1. Las H–matrices de la clase invertible

La primera clase, $\mathcal{H}_I$, contiene a todas las H–matrices tales que su matriz de comparación es una matriz invertible.

Estas H–matrices son invertibles y se caracterizan por ser matrices estrictamente diagonal dominantes generalizadas o por ser matrices para las cuales la matriz de Jacobi correspondiente posee radio espectral menor que la unidad, además de todas las caracterizaciones de las M–matrices no singulares que podemos encontrar en [3]. Esta clase de H–matrices se denomina: *Clase Invertible.*

Teorema 1.5.7. *Si la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es de la clase invertible, entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{M}(\mathcal{A})^{-1} \geq 0$
2. $a_{ii} \neq 0$ *para todo* $i \in N$
3. *A es GSDD*
4. $\rho(J_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}) < 1$.

Hay que observar que, si bien esta clase sólo contiene H–matrices no singulares, no contiene a todas las matrices no singulares, aunque sí contiene a todas las M–matrices no singulares.

1.5.2. Las H–matrices de la clase mixta

La segunda clase, $\mathcal{H}_M$, se denomina: *Clase Mixta* y se caracteriza porque:

- $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz singular

  y

- D_A es invertible.

Y se pueden obtener también las siguientes propiedades para $A \in \mathcal{H}_M$:

- El conjunto de las matrices equimodulares $\Omega(A)$ contiene tanto matrices singulares como invertibles.
- $s = \rho(B)$ en la Definición 1.3.4.
- $\rho(|J_A|) = 1$.

Un resultado relacionado con dominancia diagonal es el siguiente.

Teorema 1.5.8. *Si la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es de la clase mixta y es irreducible, entonces A es GDD.*

En esta clase existen H–matrices singulares, pero también existen H–matrices no singulares. Estas H–matrices podrán ser reducibles o irreducibles. En [6] hay un interesante resultado sobre H–matrices de esta clase.

Teorema 1.5.9 (Corollary 4, [6])**.** *Sea A una H–matriz irreducible de la Clase Mixta. Entonces, A es singular si, y sólo si, A es diagonalmente equivalente a su matriz de comparación, es decir, existen matrices diagonales, D_1 y D_2, con elementos diagonales de módulo 1 tales que $A = D_1\mathcal{M}(A)D_2$.*

Es entonces comparativamente mucho mayor el número de H–matrices no singulares en la Clase Mixta frente al de H–matrices singulares.

1.5.3. Las H–matrices de la clase singular

La tercera clase, $\mathcal{H}_S$, llamada *Clase Singular*, viene determinada por:

- la matriz diagonal D_A es singular y
- la matriz de comparación $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz singular.

A partir del Corolario 1.5.3 podemos concluir que todas las H–matrices de esta clase son reducibles y en su forma normal hay tantos bloques nulos 1×1, como elementos diagonales nulos tenga, y el resto serán H–matrices de cualquiera de las otras dos clases.

Teorema 1.5.10. *Si la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una H–matriz de la clase singular, entonces A es reducible. Además, para cada elemento diagonal nulo de A, $a_{ii} = 0$, existe un bloque diagonal 1×1, F_{kk}, en la Fnf de A tal que $F_{kk} = [a_{ii}]$.*

1.5.4. Resumen de las características de las H–matrices

En la siguiente tabla de [5] se recogen las principales propiedades para cada una de las clases de H–matrices y, además, se indican con negritas las propiedades exclusivas que determinan cada clase.

Clase:	Invertible $\mathcal{H}_I$	Mixta $\mathcal{H}_M$	Singular $\mathcal{H}_S$
$\mathcal{M}(A) = sI - B$	$\rho(B) < s$	$\rho(B) = s$	$\rho(B) = s$
$\mathcal{M}(A)$	**Invertible**	Singular	Singular
Elementos: a_{ii}	$a_{ii} \neq 0$	$a_{ii} \neq 0$	$\exists \mathbf{a_{ii}} = \mathbf{0}$
$B \in \Omega(A)$	Invertible	-	Singular
Reducible?	-	-	Sí
Diag. dominante?	**GSDD**	Irred. $\Rightarrow$ **GDDE**	-
$J = J_{\mathcal{M}(A)}$	$\rho(J) < \mathbf{1}$	$\rho(J) = \mathbf{1}$	J no existe

Tabla 1.1: Características de cada clase de H–matriz

A partir de la Tabla 1.1, para la determinación de H–matrices y sus clases podríamos utilizar los siguientes criterios.

1. Atendiendo a la partición $\mathcal{M}(A) = sI - B$ y determinando el radio espectral $\rho(B)$, podemos concluir que A que no es H–matriz si $\rho(B) > s$, o está en $\mathcal{H}_I$ si $\rho(B) < s$ o, cuando $\rho(B) = s$, está en $\mathcal{H}_M$ o en $\mathcal{H}_S$ según sea invertible o no la matriz diagonal respectivamente.

2. Atendiendo a la matriz de Jacobi (última fila de la Tabla 1.1) se pueden determinar H–matrices de las clases Invertible y Mixta.

   - Si $\rho(J) > 1$, A no es H–matriz.
   - Si $\rho(J) = 1$, $A \in H_M$.
   - Si $\rho(J) < 1$, $A \in H_I$.

   Pero, para determinar si una matriz con elementos diagonales nulos es H–matriz o no, deberemos estudiar también la reducibilidad de la matriz y su posible forma normal de Frobenius para determinar si el total de bloques diagonales irreducibles son H–matrices o no lo son.

Teorema 1.5.11. *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no es una H–matriz en una de las dos situaciones siguientes:*

1. *Si la diagonal de una submatriz irreducible principal posee elementos nulos.*

2. *Si el radio espectral de la matriz de comparación de una submatriz irreducible principal, $F = A_{ii}$, es mayor que la unidad: $\rho(|J_F|) > 1$.*

Más adelante se dará una clasificación detallada de las no-H–matrices (p.55).

En general, si una H–matriz es reducible, entonces todos los bloques diagonales de su forma normal son H–matrices y los bloques no diagonales no son determinantes para especificar si la matriz dada pertenece a una u otra clase. Es decir, si $PAP^T = (F_{ij})$ es la forma normal de Frobenius de la matriz reducible A, la matriz diagonal por bloques:

$$D = \operatorname{diag}(F_{ij})$$

es una H–matriz de la misma clase que A, y todas las matrices triangulares por bloques que posean la misma diagonal por bloques D son H–matrices de la misma clase.

En particular, atendiendo sólo a la matriz diagonal D, podemos concluir que:

Teorema 1.5.12. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz reducible. Si $PAP^T = [F_{ij}]$ es su forma normal de Frobenius y $D = \operatorname{diag}(F_{ij})$ es la matriz diagonal por bloques entonces,*

1. *$A \in \mathcal{H}_I$ si, y sólo si, D y $F_{ii} \in \mathcal{H}_I$ para todo i.*
2. *$A \in \mathcal{H}_M$ si, y sólo si, existe al menos un bloque diagonal $F_{ii} \in \mathcal{H}_M$ y el resto de bloques diagonales pertenecen a $\mathcal{H}_M$ o a $\mathcal{H}_I$.*
3. *$A \in \mathcal{H}_S$ si, y sólo si, $D \in \mathcal{H}_S$. Es decir, $A \in \mathcal{H}_S$ si, y sólo si, existen bloques diagonales*
$$F_{ii} = [0] \in \mathcal{H}_S$$
y el resto de bloques diagonales pertenecen a $\mathcal{H}_M$ o a $\mathcal{H}_I$.

Por lo tanto, para analizar el carácter de H–matriz y su clase, basta con analizar la matriz D.

1.6. No-H–matrices

En forma similar debemos introducir la partición del conjunto de las matrices cuadradas que no son H–matrices en tres clases. A estas matrices las denominaremos **no-H–matrices** y se denotarán por el símbolo, ${}_n\mathcal{H}$.

Definición 1.6.1 (matrices de ${}_n\mathcal{H}$ ***con diagonal no singular***)**.** $\mathbf{A} \in {}_{\mathbf{n}}\mathcal{H}^{\emptyset} \Leftrightarrow D_A$ *es no singular y* $\rho(|J_A|) > 1$.

El conjunto complementario de ${}_n\mathcal{H}^{\emptyset}$ en ${}_n\mathcal{H}$ se denota por ${}_n\mathcal{H}^0$ y contiene las no-H–matrices con diagonal singular. Además, la clase ${}_n\mathcal{H}^0$ puede ser subdividida en dos clases diferentes:

Definición 1.6.2 (matrices de ${}_n\mathcal{H}^0$ ***con bloques diagonales nulos de dimensión*** 1×1). $\mathbf{A} \in {}_\mathbf{n}\mathcal{H}^\mathbf{0}_\mathbf{S} \Leftrightarrow$ *D_A es singular y A es reducible en donde cada elemento diagonal nulo forma un bloque diagonal de dimensión 1×1 en la Fnf de A y, por lo menos existe un bloque diagonal irreducible tal que $\rho\left(|J_{F_{kk}}|\right) > 1$.*

Definición 1.6.3 (matrices de ${}_n\mathcal{H}^0$ ***con diagonal singular en un bloque irreducibe***). $\mathbf{A} \in {}_\mathbf{n}\mathcal{H}^\mathbf{0}_\mathbf{N} \Leftrightarrow$ *la diagonal de al menos un bloque diagonal irreducible F_{kk} en la Fnf de A es singular (si A es irreducible, $F_{kk} = A$).*

Las matrices de esta clase pueden ser singulares y reducibles o no.

Finalmente, una matriz pertenece a ${}_n\mathcal{H}^0_N$ si $a_{ii} = 0$ y $\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}a_{ki}| > 0$ para por lo menos algún $i \in N$.

1.7. La matriz combinada

Otras matrices esenciales en la presente memoria son las matrices combinadas. Estas matrices se definen de la siguiente forma.

Definición 1.7.1. *Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{\Bbbk\times\Bbbk}$, su **matriz combinada**, denotada por $C(A)$ se define por la relación*

$$C(A) = A \circ A^{-T}$$

en donde el símbolo "$\circ$" representa el producto de Hadamard o producto elemento por elemento de los elementos correspondientes de las matrices involucradas.

Recordando que

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}A_{ji}\right]$$

se obtiene que

$$C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}\right]$$

Las propiedades que utilizaremos en el estudio de la matriz combinada de matrices son las siguientes (ver [26]):

Teorema 1.7.1. *Sea A una matriz $n \times n$ invertible y sea $C(A) = [c_{ij}]$ su matriz combinada. Entonces:*

1. *La suma de sus filas y columnas satisface las siguientes relaciones:*

$$\sum_j c_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \quad y \quad \sum_i c_{ij} = 1, \quad \forall j \in N. \tag{1.5}$$

2. *Si D es una matriz diagonal invertible:*

$$C(DA) = C(AD) = C(A) \tag{1.6}$$

es decir, el producto por matrices diagonales invertibles no cambia la matriz combinada.

3. *Si P y Q son matrices de permutación:*

$$C(PAQ) = PC(A)Q. \tag{1.7}$$

4. *Si A es una matriz reducible, entonces $C(A)$ es equivalente a una matriz diagonal por bloques. Concretamente, si $PAP^T = [F_{ij}]$ es la forma normal de Frobenius de A, entonces*

$$C(A) = P \begin{bmatrix} C(F_{11}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(F_{22}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C(F_{kk}) \end{bmatrix} P^T. \tag{1.8}$$

Obsérvese que entonces, para estudiar la matriz combinada de una matriz reducible, basta con estudiar la matriz combinada de los bloques diagonales. Como, además, los bloques diagonales son irreducibles (porque una matriz con bloques diagonales nulos 1×1 es siempre singular), combinando esta propiedad junto con la expuesta sobre permutaciones, nos permite concluir que, para estudiar la matriz combinada de cualquier matriz cuadrada invertible basta con estudiar cómo es la matriz combinada de una matriz cuadrada, invertible e irreducible.

1.8. Estructura de la memoria

La memoria está organizada de la siguiente forma. En el Capítulo 1 se presenta la notación y simbología general de los conceptos y expresiones que se utilizarán en por lo menos dos capítulos, reservando para la introducción y el desarrollo de cada capítulo posterior los conceptos y símbolos menos generales que se utilizarán en ese capítulo. Además, en este Capítulo 1 se introducen definiciones y propiedades básicas, así como también los resultados más relevantes de otros autores que se relacionan con esta memoria.

El Capítulo 2 se dedica, fundamentalmente, a la presentación de un nuevo algoritmo para la determinación y caracterización tanto de las H–matrices, como de las no-H–matrices. Con el objetivo de ilustrar la experiencia previa sobre la creación de algoritmos y, a su vez, destacar las bondades del nuevo algoritmo en comparación con los previos, se presentan algunos de los algoritmos anteriores más eficientes y abarcadores en la determinación y caracterización de las H–matrices y no-H–matrices. Además se muestran los resultados de algunas iteraciones de nuestro algoritmo para grandes matrices obtenidas del sitio Matrix Market (math.nist.gov/MatrixMarket/) de la red de internet.

El Capítulo 3 se dedica al estudio de las matrices combinadas de las H–matrices. Este estudio se enfoca en el estudio específico de las matrices combinadas de dos de las clases de H–matrices con la propiedad de invertibilidad, así como también de las diferentes subclases de H–matrices.

En el Capítulo 4 se continúa con el estudio de las matrices combinadas de una de las clases de H–matrices a las que se le han impuesto algunas características adicionales. Estas H–matrices son del interés nuestro debido a que su matriz combinada resulta ser, en algunos casos, doblemente estocástica, y por tanto relaciona nuestro estudio fundamental con la Probabilidad y Estadística, y en particular, con las cadenas de Markov.

En el Capítulo 5 recordamos las conclusiones más importantes obtenidas en esta memoria y damos algunos de las posibles líneas futuras de trabajo.

En el Apéndice 1 se presenta la forma computacional en lenguaje MatLab del nuevo algoritmo que ya fue introducido en el Capítulo 2 y también de otros algoritmos ya estudiados en esta memoria.

Capítulo 2

Determinación iterativa de H–matrices

2.1. Introducción

La determinación del carácter de H–matriz o de no-H–matriz de la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales es una tarea de gran importancia tanto teórica, como práctica, a partir del hecho de que ya son muchas las aplicaciones de las H–matrices tanto en ciencia, como en ingeniería. Sin embargo, esta no es una tarea trivial, sobre todo en aquellos casos en los que el número de filas y de columnas es significativamente grande.

Para hacer frente a esta situación se han propuesto diferentes algoritmos, algunos directos y otros iterativos, que se diferencian, además, por los distintos niveles de eficiencia o rapidez con que logran el objetivo de establecer de manera automática si la matriz dada es o no es una H–matriz, y en el caso de que sea una H–matriz, determinar a qué clase de H–matriz pertenece.

Desde hace tiempo se han realizado diversos intentos para conseguir la determinación automática de las H–matrices. En ese sentido, en diversos trabajos (ver por ejemplo [22], [24], [30], [29], [31] y [35]) se recogen algunos intentos para establecer si una matriz dada A es, o no es, una H–matriz a partir de la condición de ser GSDD, esto es, el proceso se basa en encontrar iterativamente una matriz diagonal D de forma que, si M representa la matriz de comparación de la matriz original A, entonces se obtenga que MD es SDD o, recíprocamente, MD no consigue la dominancia diagonal en ninguna de sus filas. Así pues, este tipo de algoritmo no es aplicable a

H–matrices de las clases Mixta y Singular.

El análisis del carácter SDD de una matriz tampoco es consistente con matrices reducibles. Por ejemplo, si

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

siendo A_1 y A_3 de distinto carácter, es decir, siendo una de ellas M–matriz y la otra no, no puede encontrarse ninguna matriz diagonal D que obtenga la dominancia diagonal de A_1, ni puede negar la de A_3. Concretamente, si A_2 es una matriz nula, este tipo de proceso se estancará y si no es nula, puede conducir a un resultado erróneo: si A_1 es M–matriz invertible y A_3 es M–matriz singular pero con diagonal invertible, la singularidad de M puede no ser detectada y es fácil que el proceso aumente el valor absoluto de los elementos de la matriz A_2 de forma que las filas correspondientes a A_1 y A_2 dejen de ser DD y se concluya que A no es H–matriz.

Además de eso, este tipo de algoritmos no suele venir acompañado de una demostración rigurosa de su convergencia, el repetido producto por matrices diagonales puede incrementar/reducir desmedidamente el valor de las entradas y es fácil encontrar matrices para las que el proceso presenta fallos, como indicaremos más adelante.

No obstante, gracias quizás a esas primeras tentativas, en 2006, Alanelli y Hadjdimos en [1] construyen un nuevo algoritmo y prueban su convergencia para H–matrices irreducibles de la clase Invertible. Una diferencia interesante de este algoritmo es que, en cada iteración, realizan el producto $D^{-1}MD$ que mantiene la relación de dominancia diagonal, pero evita el posible "overflow" antes mencionado. Esta modificación permite, además, encontrar la relación con el radio espectral de la matriz de Jacobi que da consistencia a los resultados. Posteriormente, los mismos autores en [2] realizan una variante del mismo algoritmo para incluir el caso reducible.

Así mismo, el último autor junto con Bru y Giménez proponen en [11] un algoritmo utilizando la técnica presentada en [1] pero realizando un proceso previo para determinar la irreducibilidad o la forma normal de Frobenius, en su caso, para poder abarcar todos los casos (reducible y singular) y con el que se puede concluir, además, a cuál de las 3 clases pertenece la H–matriz.

Así pues, aunque el algoritmo propuesto en [11] es eficaz, en este capítulo se va a realizar alguna modificación del mismo para darle más claridad, una más fácil manera de programarlo y, principalmente, reducir el número de operaciones/cálculos para hacerlo más rápido. Además, debido a que la reducibilidad y la Fnf de ciertas matrices reducibles se determina sólo parcialmente en [11], se propondrá una modificación para que la determinación sea completa para cualquier matriz reducible. Es decir, el nuevo algoritmo propuesto, además de determinar el carácter de H–matriz y la clase a la que pertenece, proporcionará el carácter reducible y los subconjuntos de índices para obtener la Fnf de cualquier matriz reducible.

En la Sección 2.2 se discuten diversos algoritmos previos: se indica su algoritmo, el tipo de fallos que pueden presentar y se dan ejemplos para mostrar sus irregularidades. En la Sección 2.3 se estudia el algoritmo de [1] incluyendo el teorema de convergencia. En la Sección 2.4 se analiza con detalle el algoritmo de [11] y se señalan las posibles mejoras del mismo. Finalmente, en la Sección 2.5 se proponen y analizan las modificaciones planteadas: se describe el nuevo algoritmo, se compara con el algoritmo inicial, se garantiza su convergencia y se muestran las ventajas obtenidas con diferentes ejemplos para cada una de sus partes y del algoritmo completo. También se indica el resultado obtenido con diversas matrices conocidas de mayor dimensión.

En definitiva, en este capítulo se analizan seis de los trabajos desarrollados desde 1992 en relación con el tema de este capítulo, el presentado por Alanelli y Hadjidimos en [1] y por Bru, Giménez y Hadjidimos en [11]. Se establecen modificaciones al último de los algoritmos y se analizan los resultados con diferentes ejemplos. Al final de la memoria, en el Apéndice (página 93 y siguientes) se incluye la implementación de los algoritmos en formato Matlab.

2.2. Algunos algoritmos previos

Aportación de Gao y Wang [22]. Entre los trabajos consultados sobre la determinación automática de H–matrices, el primero que aporta una posible determinación de H–matrices es el trabajo de Gao y Wang en [22].

Básicamente el trabajo contiene tres resultados interesantes sobre caracterización de matrices GDD:

Teorema 2.2.1. *(Teorema 1 de [22]) Sean* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $J = \{i \in N : |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\}$.

Si existen $N_1 \subset J \neq \emptyset$ *y* $N_2 = N \backslash N_1$ *de forma que*

$$(|a_{ii}| - \alpha_i)(|a_{jj}| - \beta_j) > \beta_i \alpha_j \quad \forall i \in N_1, \quad j \in N_2 \tag{2.1}$$

siendo $\alpha_i = \sum_{j\neq i,\ j\in N_1} |a_{ij}|$ *y* $\beta_j = \sum_{j\neq i,\ j\in N_2} |a_{ij}|$*, entonces* A *es GDD y* $M(A)$ *es una M–matriz no singular.*

Teorema 2.2.2. *(Teorema 3 de [22]) Con las mismas condiciones que en el teorema anterior pero substituyendo la desigualdad* (2.1) *por su contraria:*

$$(|a_{ii}| - \alpha_i)(|a_{jj}| - \beta_j) \leq \beta_i \alpha_j \quad \forall i \in N_1, \quad j \in N_2 \tag{2.2}$$

se obtiene que A no es GDD y $M(A)$ no es una M–matriz invertible.

El segundo teorema (Teorema 2, [22]) de este trabajo es la variante "irreduciblemente diagonalmente dominante" del Teorema 2.2.1: cuando A es irreducible, se puede substituir la desigualdad estricta de (2.1) por no estricta pero habiendo al menos una de ellas que sea estricta.

Con estos resultados, es evidente que una posibilidad es, para una matriz dada, tomar $N_1 = J$ y comprobar si verifica (2.1) o (2.2), que es la técnica propuesta en un trabajo previo ([21]). Si no es así, la modificación en este trabajo reside precisamente en elegir $N_1 \subset J$ pero $N_1 \neq J$. El problema principal está en que no hay ninguna descripción de cómo elegir ese conjunto N_1. Además, basado en la demostración de los teoremas, el trabajo incluye, usando dos ejemplos, una forma de calcular la matriz diagonal D para conseguir que AD sea SDD, aunque no hay tampoco una descripción de cómo construir esa matriz D en general. Posteriormente, los mismos autores en [23] obtienen resultados más ajustados de los teoremas anteriores, pero ya no incluyen resultados numéricos ni un algoritmo para determinar el conjunto de índices N_1.

En muchos trabajos posteriores se incluye como referencia este trabajo y sus teoremas pero, en general, no utilizan ni los resultados ni las técnicas propuestas aquí, sino que proponen alguna técnica concreta para obtener la matriz diagonal D que garantiza que la matriz original es GDD o no lo es.

Los trabajos que aportan nuevas maneras de determinar H–matrices, comúnmente referenciados, son los siguientes:

Algoritmo de Harada, Usui y Niki. En [24] se afirma que se ha propuesto un nuevo algoritmo, que es convergente y que se ha comparado con otro algoritmo, pero el algoritmo no viene explicitado directamente. En realidad, el método propuesto por Harada, Usui y Niki, no es un método iterativo sino un método directo: primero se escala la matriz para que su diagonal sea de unos, es decir, se premultiplica por $\operatorname{diag}(A)^{-1}$, después se permuta simétricamente la matriz para que la suma por filas de la matriz de comparación, $S_i = 1 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, aparezca en orden descendente, PAP^T. A continuación se van tomando unos elementos diagonales para crear una matriz diagonal: $d_1 = \sum_{j \neq 1} |a_{1j}|$, y se crea la matriz diagonal $D_1 = \operatorname{diag}(d_1, 1, 1, \ldots, 1)$ completada con 1s. Se calcula el producto $A^{(1)} = AD_1$ y se realiza un proceso similar con la fila 2: $d_2 = \sum_{j \neq 2} |a_{2j}^{(1)}|$, $D_2 = \operatorname{diag}(1, d_2, 1, 1, \ldots, 1)$,

$A^{(2)} = A^{(1)}D_2$. Continuando con el resto de filas hasta que la matriz $A^{(m)}$ sea DD. El teorema que incluyen en el artículo (Teorema 2, [24]) concluye que el proceso da lugar a una matriz DD (y por tanto la matriz original sin escalar y sin permutar será GDD) cuando todos los d_i verifiquen $d_i \leq 1$ para todo $i \in N$. No obstante, no se indica si la obtención de algún $d_i > 1$ implica que la matriz A no es GDD o de cómo modificar el proceso para proseguir.

Para mostrar un ejemplo de este caso irregular, hemos modificado uno de los ejemplos de [24] (Example 1) haciéndola menos DD (se han incrementado los elementos a_{45} y a_{54}):

Ejemplo 2.2.1. *Considérese la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.03 & 0.1 & 0.06 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.42 & 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en la que ya se tiene que $D_A = I$ y la sucesión de sumas $S_i = 1 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ es decreciente.

Inicialmente las filas 1, 2 y 3 son SDD pero las filas 4 y 5 no. Utilizando la primera fila se obtiene $d_1 = 0.21 < 1$ y $A^{(1)} = A\,\mathrm{diag}(d_1, 1, 1, 1, 1)$ sigue fallando en las filas 4 y 5; usando la fila 2 de $A^{(1)}$ se obtiene $d_2 = 0.542 < 1$ y $A^{(2)}$ sigue fallando en las mismas filas; usando la fila 3 de $A^{(2)}$, $d_3 = 0.5486 < 1$ y $A^{(3)}$ vuelve a fallar. Al usar la fila 4 de $A^{(3)}$ se tiene que $d_4 = 1.0095 > 1$ con lo que el proceso no puede seguir.

Si calculamos, no obstante, $A^{(4)}$, se obtiene que ahora falla también la fila 3. Nótese que si calculamos d_5, se obtiene $d_5 = 1.3746 > 1$ y el resultado para $A^{(5)}$ no es favorable puesto que, aunque cuatro filas ya no son DD, se mantiene la dominancia diagonal en la segunda fila, luego no se puede concluir tampoco que no es GDD la matriz original.

Nota: aunque para calcular d_2 se ha de multiplicar la matriz inicial A por la matriz diagonal $D_1 = \mathrm{diag}(d_1, 1, \ldots, 1)$, y así sucesivamente hasta calcular la matriz $A^{(n)}$, la conclusión final es que $A^{(n)}$ coincide con AD siendo D la matriz diagonal

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Es decir, cuando A es una H–matriz (de la clase invertible), el proceso obtiene la matriz diagonal D tal que AD es DD. Así pues, aunque puede tener interés este método directo estudiando el caso “no-GDD”, todavía no es concluyente.

Algoritmo de Li, Li, Harada, Niki y Tsatsomeros. El algoritmo presentado en [30] por Li, Li, Harada, Niki y Tsatsomeros es el primero que incluye un algoritmo detallado (Algoritmo H) para la determinación de H–matrices. Su desarrollo se dice que es un intento de mejora del algoritmo de [24], pero el resultado está en la línea de lo que hemos indicado anteriormente como común objetivo de este tipo de algoritmos: encontrar una matriz diagonal D tal que, o AD es SDD, o AD no cumple la dominancia diagonal en ninguna de sus filas.

El Algoritmo H hace uso de un parámetro $\epsilon > 0$ que se ha de introducir, así como la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a estudiar. Indicamos a continuación el algoritmo tal y como viene en [30].

Algoritmo H
1. If $N_1(A) = \emptyset$ or $a_{ii} = 0$ for some $i \in N$, “A is not an H–matrix”, STOP; otherwise
2. Set $A^{(0)} = A$, $D^{(0)} = I$, $m = 1$
3. Compute $A^{(m)} = A^{(m-1)}D^{(m-1)} = [a_{ij}^{(m)}]$
4. If $N_1(A^{(m)}) = N$, “A is an H–matrix ”, STOP; otherwise
5. Set $d = [d_i]$, where

$$d_i = \begin{cases} \frac{S_i(A^{(m)})+\epsilon}{|a_{ii}|^{(m)}+\epsilon} & i \in N_1(A^{(m)}) \\ 1 & i \in N_2(A^{(m)}) \end{cases} \tag{2.3}$$

6. Set $D^{(m)} = \operatorname{diag}(d)$, $m = m + 1$; Go to step 3.

siendo $N_1(A) = \{i \in \mathbb{N} \ : \ |a_{ii}| > S_i(A) = \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$ el conjunto de índices de filas SDD y $N_2 = N\backslash N_1$.

Un problema evidente de este algoritmo es que sólo termina cuando $N_1(A) = \emptyset$ al principio o cuando A es H–matriz. Es decir, si A no es H–matriz pero tiene inicialmente algún índice en $N_1(A)$, el proceso no termina.

El proceso se puede resumir de la siguiente manera: *si una fila es SDD, $|a_{ii}| > S_i$, se multiplica la columna i por la cantidad $d_i = \frac{S_i+\epsilon}{|a_{ii}|+\epsilon} < 1$, así se mantiene la fila i como SDD y el resto de filas mejoran su dominancia diagonal al haber hecho menor en valor absoluto un término no diagonal, a_{ji}, pero sólo para aquellas filas j en las que $a_{ji} \neq 0$.*

Un dato sorprendente sobre la convergencia de este algoritmo es que, aunque [30] contiene un teorema (Theorem 2.1) que afirma que A es H–matriz sí y sólo si el Algoritmo H termina en un número finito de pasos produciendo una matriz SDD, en [31] se da un ejemplo (Example 2) para el que el Algoritmo H es divergente.

Algoritmo de Li, Niki y Sasanabe. El algoritmo propuesto por Li, Niki y Sasanabe en [32] es bastante simple. Consiste en buscar la matriz diagonal

D tal que AD sea DD. La propuesta se resume en el siguiente paso para cada índice $i \in N$: si $S_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii}$, multiplicar la columna i-ésima por $d_i = \frac{S_i}{a_{ii}}$ y repetir el proceso si la matriz A ha cambiado, y detener el proceso cuando $S_i < |a_{ii}|$ para todo i o cuando (sorprendentemente no el caso contrario) $S_i > |a_{ii}|$ para todo i. Evidentemente, tal cual lo proponen puede no tener fin puesto que la fila a la que se le aplica el escalamiento de la columna podría cumplir $S_i = |a_{ii}|$ después de multiplicarla por D (esto ocurre cuando sólo hay una fila DD en algún momento del proceso o cuando los elementos correspondientes a otras filas DD sean nulos).

Hemos implementado este algoritmo en formato MatLab y arreglado el caso indefinido poniendo que acabe el proceso cuando $S_i \geq |a_{ii}|$. En los experimentos no se observa ninguna mejora respecto a cualquiera de los métodos estudiados. También es un poco sorprendente que, para resolver el eterno problema de que la matriz sea reducible, sugieran substituir los ceros por una cantidad $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña.

Algoritmo de Kohno, Niki, Sawami y Gao. Kohno, Niki, Sawami y Gao propusieron en [29] un algoritmo similar al Algoritmo H, el Algoritmo B, substituyendo el cálculo de los elementos diagonales dado en (2.3), por el siguiente:

$$d_i^{(m)} = \frac{\sum_j |a_{ij}^{(m)}|}{|a_{ii}^{(m)}|} = 1 + \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(m)}|}{|a_{ii}^{(m)}|} \quad \forall i \in N$$

y establecieron que si su algoritmo termina después de un número finito de iteraciones, entonces

1. cuando $d_i^{(m)} < 2$ para todo i, A es una H–matriz no singular
2. cuando $d_i^{(m)} \geq 2$ para todo i, A no es una H–matriz no singular.

Obsérvese que el resultado establecido es trivial: $d_i < 2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$ $\Leftrightarrow \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = S_i < |a_{ii}|$; es decir, $d_i < 2$ para todo i significa que A es SDD. No obstante, la conclusión dada para el caso contrario, $d_i^{(m)} \geq 2$ para todo i no es correcta puesto que $d_i^{(m)} = 2$ para todo i significa que $A \in \mathcal{H}_M$, es decir, A es una H–matriz y puede ser no singular. Así pues, la conclusión que se puede dar es que $A \notin \mathcal{H}_I$. Veamos el conflicto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. *Dadas las matrices*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 10 & 15 \\ 1 & 6 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

se tiene que ambas son matrices reducibles (con diferencias sólo en el bloque correspondiente a la parte triangular superior de su Fnf) y pertenecen a la clase Mixta puesto que el primer bloque diagonal 2×2*,* F_{11}*, es SDD, por tanto* $F_{11} \in \mathcal{H}_I$*, y el segundo bloque diagonal* 2×2*,* F_{22}*, es DDE, por tanto* $F_{22} \in \mathcal{H}_M$*. Es decir,* $A_k \in \mathcal{H}_M$ *para* $k =$ *1 y 2.*

Al aplicar el Algoritmo B de [29] se obtiene, para ambas matrices, que A_j*,* $j =$ *1 y 2, no es H–matriz con los siguientes detalles.*

Para A_1 *realiza* 64 *iteraciones de forma que en la última iteración se ha obtenido* $d_i = 2$ *para todo* i*, pero la matriz diagonal obtenida para probar que* A *no es GSDD es*

$$D = 10^{18}\,\mathrm{diag}(7.8736, 8.9984, 9.2234, 9.2234)$$

que muestra que el resultado es poco fiable: se multiplica la matriz A *sucesivamente por una matriz diagonal en la que los elementos diagonales son próximos a 2, por tanto la dominancia diagonal del primer bloque, que no puede desaparecer, va "difuminándose" hasta llegar a ser imperceptible.*

Para A_2 *concluye a la primera iteración puesto que* $d_1 = 4.7143 > 2$*,* $d_2 = 9.5 > 2$ *y* $d_3 = d_4 =$ *2. Es decir, en este caso no se ve ninguna influencia del hecho de que el bloque* F_{11} *es una matriz SDD.*

Algoritmo de Li [31]. A continuación se presenta el algoritmo de Lei Li con la secuencia original de pasos. Este algoritmo tiene por objetivo la determinación de la matriz diagonal D que asegura la dominancia diagonal generalizada de la matriz dada, en el caso de que sea H–matriz, o, por el contrario, niega la dominancia diagonal en cada una de sus filas. Posteriormente discutiremos sus características y fallos.

Este algoritmo utiliza un parámetro $\epsilon > 0$ que se elige desde un principio. A partir de la introducción de la matriz a estudiar, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tal que $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, se realizan los siguientes pasos:

Algoritmo 1

1. Compute $S_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Set $t = 0$. For $i = 1, 2, \ldots, n$, if $|a_{ii}| > S_i$ then set $t = t + 1$.
3. If $t = 0$, then print "A is not a GDD": END.
4. If $t = n$, then print " A is a GDD": END.
5. For $i = 1, 2, \ldots, n$, compute

$$d_i = \frac{S_i + \epsilon}{|a_{ii}| + \epsilon} \tag{2.4}$$

$$a_{ji} = a_{ji} d_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

6. Go to step 1.

Como podemos observar, el objetivo de este algoritmo es conseguir que todas las filas sean estrictamente diagonal dominantes o no lo sea ninguna de ellas, realizando repetidamente el producto de la matriz por una matriz diagonal. Los elementos de la matriz diagonal D de cada iteración son mayores que 1 cuando una fila no es diagonalmente dominante. Entonces, si una fila no es diagonalmente dominante, la correspondiente columna se multiplica por un número mayor que uno y con ello aumenta el elemento de la diagonal principal y puede que llegue a ser diagonalmente dominante, aunque otras filas, a cambio, pueden dejar de serlo. Por el contrario, en las filas SDD se obtiene $d_i < 1$, luego su producto por la columna produce el efecto contrario. Así pues, es difícil prever hacia donde puede conducir el producto AD.

Observe que el cálculo de elementos diagonales para filas SDD es idéntico al de [30], aunque no coincide en las filas no-SDD. También coincide con el Algoritmo B de [29] si se tomara $\epsilon = 0$ que aquí no se acepta.

En [31] se afirma que el proceso siempre concluye determinando si una matriz A es una H–matriz o no, sin embargo esta afirmación no es cierta como se puede observar con la siguiente matriz diagonal por bloques:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

con uno de los bloques diagonalmente dominante y el otro no. Por ejemplo, si:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

todas las matrices $D^{(m)}$ serían iguales y el proceso se repetiría indefinidamente.

Un simple análisis del algoritmo permite concluir lo siguiente:

1. Este algoritmo puede no finalizar cuando la matriz es reducible.
2. Con este algoritmo no se puede estudiar el caso de las H–matrices singulares.
3. La matriz $A^{(m)}$ puede crecer o decrecer sin control.

Obviamente, el principal problema reside en que la convergencia depende de la matriz de entrada como se muestra en [1].

Además, no se establece un criterio para elegir el parámetro ϵ y por tanto esa selección se realiza al azar, conduciendo a muy diferentes resultados como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.2.3. *Si estudiamos la siguiente matriz*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

se observa que la elección $\epsilon = 0.1$ *produce un desbordamiento o crecimiento desmesurado de* d_i*, (la elección* $\epsilon = 0$ *produciría un estancamiento en el cálculo de* D*:* d_1 *y* d_2 *se alternan los valores 2 y 3/4 repetidamente y el proceso es interminable). Sin embargo, para otros valores del parámetro, el proceso puede concluir que la matriz* A *no es una* H*–matriz en pocas iteraciones. Por ejemplo, para* $\epsilon = 0.2$*, el algoritmo de Li requiere de 7 iteraciones para concluir el proceso y para* $\epsilon = 1$ *en la primera iteración se obtiene la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1.6 \\ 4.5 & 3.2 \end{bmatrix}$$

que satisface la condición de no ser GDD.

Un último trabajo con una nueva propuesta de algoritmo es el que analizamos a continuación.

Algoritmo de Ojiro, Niki y Usui [35]. En [35], Ojiro, Niki y Usui redefinen los cocientes de dominancia diagonal d_i que se introdujeron en el algoritmo de Kohno et al. como t_i:

$$t_i = \frac{\sum_{k \neq i} |a_{ik}|}{|a_{ii}|}, \quad i \in \mathbb{N}$$

y proponen un algoritmo similar a los anteriores.

Para cada iteración se calculan los cocientes t_i y se descartan los casos triviales:

1. $t_i \leq 1 \; \forall i$, siendo al menos una desigualdad estricta: A es una H–matriz.
2. $t_1 \geq 1 \; \forall i$: A no es una H–matriz. (Nota: aquí también debería incluirse la condición de que al menos una sea estricta pues, en el caso de que todos los cocientes sean iguales a 1, se trataría de una H–matriz de la clase mixta.)

En caso contrario se determina el mínimo cociente[1]

$$t_l = \text{mín}\{t_i \neq 0\}$$

[1]Aunque no está indicado, en el cálculo del mínimo se ha de guardar su valor pero también el índice l para el que se alcanza el cociente mínimo, pues se necesita en la construcción de D.

para construir la matriz diagonal D con sólo un término diagonal distinto de 1

$$D = \mathrm{diag}(d_i) \text{ siendo } d_l = t_l \text{ y } d_i = 1 \text{ para todo } i \neq l.$$

Finalmente se calcula la matriz A con el producto por D: $A = AD$.

Es decir, el algoritmo modifica sólo una columna de la matriz en cada iteración y, obviamente utiliza el cociente mínimo con la intención de acelerar el proceso sin aumentar el número de operaciones. Lo que hay que valorar en ejemplos es si el número de iteraciones crece mucho o no.

En principio, como en todos los algoritmos de este tipo, el proceso es correcto: el t_l mínimo corresponde a una fila SDD porque $t_l < 1$; al multiplicar la columna por t_l su dominancia se reduce pero se queda a 1; a cambio, en el resto de filas aumenta la dominancia al reducirse el tamaño de un elemento no diagonal. Así pues, si A es H–matriz, parece que el proceso puede conducir a obtener $t_i \leq 1$ en todas las filas. No obstante, en todos los elementos nulos de la columna l no se producen cambios, esto puede ralentizar el proceso en gran manera. Y, obviamente, si la matriz es reducible, el proceso puede estancarse sin remedio.

Cuando A no sea H–matriz puede ser bastante lento: pongamos que la fila 1 es la del mínimo (ella es SDD y las otras no). A la primera iteración la fila 1 pasa a tener $t_1 = 1$ y puede provocar que la fila 2 (por ejemplo) pase a ser SDD y sea la del mínimo. En la segunda iteración la fila 2 pasa a tener $t_2 = 1$, pero entonces la fila 1 pasa a ser SDD otra vez. Si es la mínima, en la tercera iteración la fila 1 vuelve a tener $t_1 = 1$, pero entonces la fila 2 pasa a ser SDD. Total, que el proceso podría repetirse indefinidamente.

Ejemplo 2.2.4. *Si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$*, el último algoritmo necesita 85 iteraciones para concluir que la matriz* $B = AD = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2.25 \\ 0.5714 & 1 & 0.4286 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *no es DD: en la primera fila* $a_{11} < S_1$*, y en el resto* $a_{ii} = S_i$ *para* $i = 2$ *y* 3.

Con esta misma matriz, aplicando los algoritmos construidos en [29] y [31] se obtiene el mismo resultado, el primero con 4 iteraciones y el segundo, dependiendo del valor del parámetro $\epsilon > 0$ *elegido, necesita de 5 a 12 iteraciones.*

Una observación importante es que, aunque el trabajo de Gao y Wang [22] tiene una fuerte sustentación matemática y se distingue el caso irreducible del reducible, dando incluso un ejemplo para el caso reducible, en los otros trabajos aquí estudiados han quedado casos sin determinar y, cuando la matriz es reducible es muy fácil encontrar ejemplos para los que el proceso no puede terminar o su conclusión es errónea. Además, todos ellos descartan el caso en que D_A es singular. En definitiva, el resultado es satisfactorio para matrices GSDD (incluyendo posiblemente el caso reducible) y para matrices no-GDD irreducibles. No se pueden determinar H–matrices de las clases $\mathcal{H}_M$ y $\mathcal{H}_S$.

En conclusión, se ha hecho un repaso de los diferentes algoritmos propuestos para la determinación automática de H–matrices que, aún siendo interesantes opciones para obtener una matriz diagonal D de forma que la matriz AD sea SDD, lo cual demuestra que la matriz original A es H–matriz (de la clase invertible), pueden no obtener ningún resultado definitivo para diversos tipos de matrices: matrices con diagonal singular (incluyendo H–matrices de la clase singular), H–matrices no singulares de la clase mixta, matrices reducibles (tanto H–matrices como no-H–matrices) e incluso alguno de ellos falla con multitud de no-H–matrices (aunque sean irreducibles). En líneas generales, de los 6 trabajos estudiados hasta aquí, sólo el primero tiene una conclusión consistente; el problema reside en que no hay una propuesta de cómo elegir los conjuntos de índices que conducen a la determinación de una H–matriz. El segundo es un intento de concretar el anterior pero es incompleto pues no obtiene respuesta para una no-H–matriz. El tercero, Algoritmo H, aunque sin demostraciones válidas, sienta las bases de cómo obtener la matriz diagonal D. Los siguientes presentan alternativas al cálculo de la matriz diagonal pero no justifican que su método mejore los anteriores salvo con simples ejemplos. Tampoco hay ninguna referencia a la mejora en estabilidad o rapidez del algoritmo presentado.

2.3. El algoritmo de Alanelli y Hadjidimos

Un nuevo grupo de algoritmos se desarrolla utilizando una nueva técnica de cálculo que utiliza la fórmula de Collatz-Wielandt para mejorar la convergencia y la estabilidad de las iteraciones.

Teorema 2.3.1 (Fórmula de Collatz-Wielandt, [45]). *El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz irreducible y no negativa A satisface la ecuación*

$$\min_i S_i(x) < \rho(A) < \max_i S_i(x) \tag{2.5}$$

o esta otra ecuación

$$\min_i S_i(x) = \rho(A) = \max_i S_i(x) \tag{2.6}$$

para cualquier vector $x > 0$, en donde $S_i(x) = \sum_j \frac{a_{ij}x_j}{x_i}$.

A partir de una matriz dada A que suponemos irreducible, se calcula la matriz de Jacobi $B^{(0)} = J_{\mathcal{M}(A)}$ que, como sabemos, es no negativa, es irreducible y se implementa el siguiente proceso iterativo: si $x^{(k)}$ para $k = 1, 2, \ldots$ son vectores positivos, se calcula

$$B^{(k+1)} = \left(\frac{b_{ij}^{(k)} x_j^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right).$$

Sea $B^{(0)} = [b_{ij}]$ la matriz inicial y $S_i^{(k)}$ denota la suma por fila i de la matriz $B^{(k)}$, $S_i^{(k)} = \sum_{j \neq i} b_{ij}^{(k)}$, como

$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij} \frac{x_j^{(1)} x_j^{(2)} \cdots x_j^{(k)}}{x_i^{(1)} x_i^{(2)} \cdots x_i^{(k)}} = b_{ij} \frac{d_j}{d_i}$$

entonces

$$\min_i S_i^{(k)} \leq \rho \leq \max_i S_i^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Si D_k denota la matriz diagonal

$$D_k = \operatorname{diag}(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$B^{(k+1)} = D_k^{-1} B^{(k)} D_k = D^{-1} B^{(0)} D$$

en donde $D = D_1 D_2 \cdots D_k$ es una matriz no negativa con diagonal positiva. Entonces se puede determinar si la matriz A es una H–matriz como se indica a continuación.

Teorema 2.3.2. *Con la notación anterior, si existen vectores positivos* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ *tales que* $\min_i S_i^{(k)} = \max_i S_i^{(k)} = 1$, *entonces* , $\rho = 1$ *y la matriz* A *es singular. En otro caso,*

- *Si* $\max_i S_i^{(k)} \leq 1$, *entonces* $\rho < 1$ *y* A *es una H–matriz.*
- *Si* $\min_i S_i^{(k)} \geq 1$, *entonces* $\rho > 1$ *y* A *no es una H–matriz.*

Alanelli y Hadjidimos proponen en [1] un nuevo algoritmo, AH1, para establecer si una matriz dada A es irreducible y de la clase invertible, $\mathcal{H}_I$, o no lo es. Utiliza un cálculo diferente para construir la matriz diagonal de cada iteración, no utiliza parámetros auxiliares y el producto diagonal se realiza simétricamente. Este algoritmo calcula varias aproximaciones del radio espectral de la matriz de Jacobi asociada a la matriz de comparación de la matriz dada, $J_{\mathcal{M}(A)}$, en el supuesto de que no hay elementos diagonales nulos.

En base a la fórmula de Collatz-Wielandt, puesto que $J_{\mathcal{M}(A)} = [b_{ij}]$ es una matriz no negativa, para un vector positivo $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ se cumple que

$$\sum_{j \neq i} \frac{b_{ij} x_j}{x_i} \leq \rho \leq \sum_{j \neq k} \frac{b_{kj} x_j}{x_k} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Es decir, este algoritmo calcula en cada iteración un vector positivo x con el objetivo de obtener uno de los siguientes tres resultados:

1. $\sum_{j \neq i} \frac{b_{ij} x_j}{x_i} > 1$ para todo i. Luego, A no es una H–matriz.
2. $\sum_{j \neq i} \frac{b_{ij} x_j}{x_i} < 1$ para todo i. Luego $A \in \mathcal{H}_I$.
3. $\sum_{j \neq i} \frac{b_{ij} x_j}{x_i} = 1$ para todo i. Luego [2] $A \in \mathcal{H}_M$.

De esta manera, cualquiera de las tres salidas indicadas anteriormente del algoritmo AH1 es correcta siempre que la matriz cuadrada original no posea elementos diagonales nulos. Si A es irreducible y posee al menos un elemento diagonal igual a cero (en este caso no existe la matriz de Jacobi), la salida del algoritmo AH1 "A no es una H–matriz", es también correcta. El algoritmo AH1 conduce a resultados correctos en un número finito de iteraciones si A es irreducible y $\mathcal{M}(A)$ es no singular. Sin embargo, el problema surge cuando A pertenece a $\mathcal{H}_M$ puesto que en ese caso a menudo no se obtiene la igualdad 3. Entonces se puede asumir que $\rho(J) = 1$, es decir $\sum_{j \neq i} \frac{b_{ij} x_j}{x_i} \approx 1$, solamente si A es irreducible.

Algoritmo AH1

- En este algoritmo, $s_i^{(k)}$ representa la suma de los valores absolutos de los elementos de la fila k, excluyendo al elemento de la diagonal y
- $S^{(k)}$ representa la mayor de las sumas $s_i^{(k)}$.

ENTRADA: Una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$

SALIDA: Si A es, o no es, H–matriz, y una matriz diagonal D, según la caracterización dada en (1.2).

1. Si $a_{ii} = 0$ para algún $i \in N$, A no es H–matriz, STOP; en otro caso:

[2] La conclusión que se obtiene en [1] es que $\mathcal{M}(A)$ es singular.

2. Hacer $A^{(1)} = |\text{diag}(A)^{-1}A - I|$, $D^{(1)} = I$, $k = 1$

3. Calcular para $i = 1, 2, \ldots, n : s_i^{(k)} = \sum |a_{ij}^{(k)}|$,

$$s^{(k)} = min(s_i^{(k)}), \quad S^{(k)} = max(s_i^{(k)}) \tag{2.7}$$

4. Si $s^{(k)} > 1$, A no es H–matriz , STOP; en otro caso:

5. Si $S^{(k)} < 1$, A es H–matriz, STOP; en otro caso:

6. Si $S^{(k)} = s^{(k)}$, $\mathcal{M}(A)$ es una matriz singular , STOP; en otro caso:

7. Hacer $d_i = \frac{1+s_i^{(k)}}{1+S^{(k)}}$, $\quad D^{(k)} = \text{diag}(d_i)$, $\quad k = k+1$

8. Calcular $D = DD^{(k-1)}$ y $A^{(k)} = (D^{(k-1)})^{-1}A^{(k-1)}D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$

9. Ir al paso 3

Obsérvese que no son aceptadas las H–matrices de la Clase Singular, ni las H–matrices de la Clase Mixta: pasos 1 y 6. Nótese que las conclusiones de los pasos 4, 5 y 6 son correctos puesto que si $\rho = \rho(J)$, entonces $s^{(k)} \leq \rho \leq S^{(k)}$. Concluyéndose, además que, en el paso 6, $\rho = s^{(k)} = S^{(k)} = 1$ y, por tanto, se podría concluir que A pertenece a $\mathcal{H}_M$.

Las dificultades de este algoritmo son las siguientes:

- No se puede aplicar este algoritmo si existe algún elemento diagonal nulo en la matriz inicial A, es decir cuando: $a_{ii} = 0$.
- No se sabe con certeza que ocurrirá si la matriz dada A es reducible.
- Es dudoso conseguir que $S^{(k)} = s^{(k)}$. Más exactamente: pretender obtener la igualdad puede conducir a, necesariamente, un alto número de iteraciones, y esto, a su vez, puede provocar un error de precisión y, posiblemente, una conclusión errónea.

Más adelante, en [2], estos mismos autores mejoran el algoritmo anterior (AH1) introduciendo un nuevo algoritmo (AH2) que analiza el caso de matriz reducible que había quedado inconcluso en el algoritmo anterior. Este nuevo algoritmo está basado en una modificación del Método de Potencia ([46] y [25]) aplicado a una matriz no negativa, irreducible y primitiva de dimensiones $n \times n$ e introduciendo los conjuntos: $N_0^{(k)} = \{i \in N : \ |s|_i^{(k)} \geq 1\}$ y su cardinal $n_0^{(k)}$, es decir, el número de elementos del conjunto $N_0^{(k)}$ y cuyo objetivo es obtener la colección de índices $N_0^{(k)}$ que determinan una submatriz principal que no es H–matriz, y sólo en el caso en que el proceso normal, AH1, ha alcanzado el máximo de iteraciones sin haber concluido el carácter de la matriz dada.

En otras palabras, este algoritmo calcula una submatriz principal de la matriz de Jacobi $J_{\mathcal{M}(A)}$ de tal forma que todas las sumas en el paso (2.7) del Algoritmo AH1 sean mayores que la unidad, lo que probaría que A no es una H–matriz. En [2] se prueba que el algoritmo concluye en un número finito de iteraciones si $\mathcal{M}(A)$ es una matriz no singular.

En resumen, podemos señalar lo siguiente sobre el algoritmo AH2.

1. Determina la naturaleza de una H–matriz irreducible o reducible dada cuando ésta pertenece a la clase invertible $\mathcal{H}_I$.
2. Determina la naturaleza de una matriz reducible que no es una H–matriz encontrando una submatriz principal que no sea una H–matriz.
3. No es seguro que se puedan identificar a las H–matrices reducibles que pertenecen a la clase mixta $\mathcal{H}_M$.
4. No puede identificar a las H–matrices que pertenecen a la clase singular $\mathcal{H}_S$.

2.4. El algoritmo de Bru, Giménez y Hadjidimos

A partir del algoritmo de Alanelli y Hadjidimos, los investigadores Bru, Giménez y el mismo Hadjidimos [11] desarrollan un algoritmo, ABGH, más avanzado que

1. identifica la naturaleza de una H–matriz dada: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sea ésta singular y/o reducible.
2. determina a cuál de las tres clases de H–matrices pertenece la matriz A, en caso de que lo sea.
3. distingue tres nuevas clases de matrices que no son H–matrices y determina a cuál de ellas pertenece la matriz A, en caso de que no sea una H–matriz.

Como ya hemos dicho en el Teorema 1.5.12, para determinar a cuál de las clases de H–matrices pertenece una matriz reducible dada A, es suficiente estudiar las submatrices diagonales irreducibles que resultan de la forma normal de Frobenius. El algoritmo ABGH utiliza sólo los bloques diagonales de la Fnf sin necesidad de calcular la forma normal de Frobenius completa. En este algoritmo se destacan tres partes esenciales.

1. Se determina si la matriz dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es irreducible o reducible en base al teorema (2.4.1). En esta parte, las matrices no H–matrices de ${}_n\mathcal{H}_N^0$ son determinadas y el proceso completo finaliza.

2. Para las matrices reducibles se calcula una permutación con la que se obtienen los bloques diagonales de la forma normal de Frobenius de la matriz dada A. Con esta parte, los bloques diagonales 1×1 que se obtengan ya son clasificados como H–matrices de las clases $\mathcal{H}_S$ o $\mathcal{H}_I$ según que el elemento diagonal correspondiente sea nulo o no lo sea, respectivamente.

3. Se aplica el algoritmo AH1 a los bloques diagonales irreducibles, F_{ii}, de más de una fila/columna para obtener una aproximación r del radio espectral de la matriz de Jacobi de $\mathcal{M}(A)$. Así, se deduce el carácter de H–matriz con el siguiente esquema:

   - Si $r > 1$, entonces $F_{ii} \in {}_n\mathcal{H}^{\emptyset}$.
   - Si $r < 1$, entonces $F_{ii} \in \mathcal{H}_I$.
   - Si $r = 1$, entonces $F_{ii} \in \mathcal{H}_M$.

Y, finalmente, se concluye si la matriz dada es o no es una H–matriz y a cuál de las 6 clases pertenece según la pertenencia de los bloques diagonales.

Obsérvese que, además, si para algún bloque diagonal F_{ii} se obtiene el resultado 1, la matriz completa no es H–matriz y el proceso finaliza sin necesidad de analizar el resto de bloques diagonales. Como el algoritmo AH1 se aplica sucesivamente a los bloques diagonales irreducibles de la Fnf con dimensiones mayor que 1, en lugar de aplicársela a la misma matriz A, el número de operaciones que se requieren para ejecutar la tercera parte del algoritmo ABGH se reduce drásticamente, pudiendo ocurrir incluso que la naturaleza de no-H–matriz del primer bloque permita finalizar el algoritmo. Además, el algoritmo ABGH puede arribar a una conclusión sobre la naturaleza de la matriz dada A sin recurrir al algoritmo AH1 en las siguientes dos situaciones:

1. Si la Fnf de la matriz A es triangular. La matriz A pertenecerá a la clase $\mathcal{H}_I$ o a la clase $\mathcal{H}_S$, dependiendo de si la matriz DA no es singular o sí es singular, respectivamente.

2. Si la matriz A posee una matriz principal irreducible con, por lo menos un elemento diagonal igual a cero. En este caso $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$ y el proceso finaliza en su primera parte.

Finalmente, a la hora de aplicar el algoritmo AH1 sobre los bloques diagonales irreducibles (e incluso si A es irreducible), la conclusión: $A \in \mathcal{H}_M$ puede ser admitida sin que la igualdad $m = M$ sea exacta debido a la irreducibilidad del bloque. La mayor dificultad de este algoritmo es el costo de la primera parte cuando se desea establecer si la matriz dada es irreducible o no. Una ventaja adicional de este algoritmo es que determina la reducibilidad/irreducibilidad de la matriz, salvo cuando $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$ y se podría llegar a obtener la forma normal de Frobenius de una matriz reducible añadiendo un pequeño proceso al algoritmo. A continuación se muestra el algoritmo completo ABGH.

Algoritmo Completo ABGH: Este algoritmo contiene tres procesos principales:

1. Una primera parte, el algoritmo IRR, que establece si la matriz dada es reducible o irreducible. Si la matriz es irreducible el proceso pasa directamente a la tercera parte, es decir, aplica el algoritmo AH1 a la matriz completa A. Esta primera parte realiza el análisis sobre la reducibilidad o irreducibilidad de la matriz dada en base al Teorema 6.2.24b de [25] que establece lo siguiente:

   Teorema 2.4.1. *Si la matriz* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es irreducible, entonces* $(I + |A|)^{n-1} > 0$.

2. Una segunda parte, el algoritmo BD, que se utiliza cuando la matriz dada es reducible, y que tiene por objetivo calcular los bloques diagonales irreducibles de la forma normal de Frobenius. Para lograr este objetivo, Bru, Giménez y Hadjidimos definen las funciones de permutación con las cuales determinan los índices de los bloques diagonales de la forma normal de Frobenius. ([11]). Es importante señalar aquí que los cálculos con esas funciones de permutación resultan muy tediosos y que justamente esta es una de las dos partes del algoritmo ABGH que hemos modificado en el nuevo algoritmo que estudiaremos más adelante.

3. Una tercera y última parte que consiste en aplicar el algoritmo AH a cada bloque diagonal irreducible.

ENTRADA: $A \in C^{n\times n}$

1. **(Primera Parte ABGH, Algoritmo IRR)** Se aplica el algoritmo IRR a la matriz A.

   Las salidas iniciales de este algoritmo son:

   - el conjunto de índices de las filas con elemento diagonal nulo Z_D,
   - el número de elementos en el conjunto Z_D: $s = card(Z_D) \in [0, n]$,
   - la variable temporal NH (con valor inicial igual 0).

   La SALIDA principal es IRR (con valor inicial igual a -1). De aquí se obtienen los resultados particulares siguientes:

   - $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0 \Leftrightarrow$ NH= 1. END de todo el programa.
   - A es una matriz reducible $\Leftrightarrow$ IRR= 0. En este caso, la matriz más densa, $C = ones(|A| + I)^{2^m}$ obtenida en el proceso iterativo es parte fundamental de la SALIDA.
   - A es una matriz irreducible $\Leftrightarrow$ IRR= 1. (Cuando IRR= 1 no se considera la matriz C.)

   (Recordamos que $ones(R)$ hace referencia a un comando de MatLab que produce una matriz con elementos iguales a 1 en las posiciones no nulas de la matriz R.)

2. **(Segunda Parte ABGH, Algoritmo BD)** Si NH $=0$ e IRR $=$ 0, se aplica el algoritmo BD utilizando como **ENTRADA** tanto a C, como a Z_D. La SALIDA consiste en los vectores **perm** y **orbs** para determinar los bloques diagonales de la Fnf de A con el siguiente esquema: si la dimensión del vector orbs es q, la Fnf tendrá q bloques diagonales; la dimensión del i-ésimo bloque diagonal F_{ii} será la i-ésima entrada de $orbs$, $orbs_i$, de forma que $\sum_i orbs_i = n$; el vector $perm$ es una permutación del conjunto N de índices que contiene en primer lugar los índices del primer bloque diagonal F_{11}, en segundo lugar los del segundo bloque F_{22}, y así sucesivamente hasta contener los índices del último bloque diagonal F_{qq}.

   Si NH $=$0 e IRR $=1$, entonces:

$$perm = (1, 2, \ldots, n) \quad \text{y} \quad orbs = n$$

$$F_{11} = A$$

3. **(Tercera Parte ABGH, Algoritmo ModAH)** Si NH $=0$, se toma SH=s y MH $=0$ y se determina la naturaleza de los sucesivos bloques F_{ii} siguiendo la regla: si $orbs_i > 1$ aplique el algoritmo ModAH (una ligera modificación de AH1) a F_{ii} y calcule el valor del parámetro $r_i \approx \rho(J)$ siendo J la matriz de Jacobi de $\mathcal{M}(F_{ii})$. Entonces

- IF $r_i > 1 : NH = 2$. END de todo el programa
- IF $r_i = 1 : MH = 1$

SALIDAS de ABGH: Con los valores de NH, MH y SH se especifica a cuál clase de H–matriz o no-H–matriz pertenece la matriz dada A :

1. Si NH $= 0$: A es una H–matriz y
   - $A \in \mathcal{H}_I$ si y sólo si SH $= 0$ y MH $= 0$
   - $A \in \mathcal{H}_M$ si y sólo si SH $= 0$ y MH $= 1$
   - $A \in \mathcal{H}_S$ si y sólo si SH > 0
2. Si NH > 0 : A no es una H–matriz y
   - $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$ si y sólo si NH $= 1$
   - $A \in {}_n\mathcal{H}^{\emptyset}$ si y sólo si NH $= 2$ y SH $= 0$
   - $A \in {}_n\mathcal{H}_S^0$ si y sólo si NH $= 2$ y SH > 0

En el Apéndice final se ha incluido el Algoritmo ABGH en formato MatLab donde se pueden ver los detalles particulares del mismo.

2.5. Algoritmo propuesto: BGS

El algoritmo ABGH constituyó la mejor propuesta de determinación iterativa de las H–matrices y no-H–matrices. Es un algoritmo que funciona muy bien con excepción de tres aspectos que justamente son los que mejoramos con nuestro algoritmo. A saber:

1. reducción del número de operaciones para establecer la reducibilidad/irreducibilidad de la matriz original,
2. determinación de los bloques diagonales irreducibles con la posibilidad de construir la forma normal de Frobenius de cualquier matriz irreducible y
3. creación de un algoritmo más claro y más simple de programar.

Con ello, este nuevo algoritmo consigue:

- Establecer si la matriz dada es o no es irreducible con un costo computacional significativamente menor.

- Determinar los bloques diagonales irreducibles de la forma normal de Frobenius con la posibilidad de obtener ésta cuando la matriz original es reducible.
- Determinar si la matriz dada es o no es H–matriz y a qué clase de H–matriz o no-H–matriz pertenece, según sea el caso.

Nuestro algoritmo consta de tres partes similares a las del Algoritmo ABGH que presentamos a continuación. (Ver Actas del Congreso CEDYA 2015 [40].)

Primera parte: Determinación de la reducibilidad/irreducibilidad

En la primera parte queremos obtener la matriz más densa $B = ones(|A| + I|)^{2^m}$ sin calcular los productos matriciales $C^2, C^4, \ldots, C^{2^m}$.

La nueva técnica propuesta se basa en el siguiente resultado (Teorema 6.2.24e de [25]):

Teorema 2.5.1. *Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{\ltimes\times\ltimes}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *A es irreducible.*
- *para cada pareja de índices distintos*[3] *p y q con $1 \leq p,\ q \leq n$, existe una secuencia de números reales distintos: $k_1 = p,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_{m-1}$, $k_m = q, \quad 1 < m \leq n \quad$ tales que:*

$$(a_{k_1k_2})(a_{k_2k_3})\ldots(a_{k_{m-1}k_m}) \neq 0. \tag{2.8}$$

Se trata entonces de determinar qué elementos nulos de la matriz A pertenecen a partes irreducibles de la misma por estar 'conectados' a otros elementos no nulos. Evidentemente, igual que se hace en el Algoritmo ABGH, en lugar de trabajar con la matriz A, simplificamos los cálculos utilizando la matriz $B = ones(A)$, y se trata de ir construyendo la matriz más densa asignando el valor 1 a cada elemento originalmente nulo en B que está conectado a elementos no nulos. Además, supuesto que tenemos una secuencia como en (2.8), por ser $(a_{k_1k_2})(a_{k_2k_3}) \neq 0$, se puede hacer $b_{k_1k_3} = 1$ y, análogamente, muchos otros términos: $b_{k_2k_4} = 1,\ \ldots,\ b_{k_{m-2}k_m} = 1$ en un primer repaso de la matriz B. Así, la cadena que conecta los términos p y q se habrá reducido por lo menos una mitad. Repitiendo este razonamiento, obtendríamos que, por ser $b_{k_1k_3}b_{k_3k_5} \neq 0$, se puede hacer $b_{k_1k_5} = 1$ y sucesivas parejas de términos conectados. Como este proceso se puede repetir sucesivamente,

[3]Nótese que los elementos diagonales pueden ser nulos o no nulos sin que afecte al hecho de ser A una matriz irreducible.

se llegará a una secuencia de longitud 2 no nula: $b_{k_1k_j}b_{k_jk_m} \neq 0$, de forma que se puede concluir $b_{k_1k_m} = b_{pq} = 1$.

Esta primera parte de nuestro algoritmo utiliza entonces el razonamiento anterior y tiene la siguiente estructura:

- Inicialmente $B = ones(A)$ y $q = nnz(B)$.
- Realizar el siguiente proceso repetidamente:
  - Analizar los elementos nulos de B.
  - Para cada uno de ellos, es decir, si $b_{ij} = 0$, verificar, si se cumple que $b_{ik}b_{kj} \neq 0$ para algún $k \neq i, j$. En ese caso, b_{ij} se iguala a uno y el número de elementos no nulos de la matriz B aumenta en una unidad: $q = q + 1$.
  - Una vez recorrido todos los elementos nulos de B el proceso puede haber finalizado si:
    1. El número q de elementos no nulos de B ha alcanzado la cifra máxima: en este caso la matriz es irreducible.
    2. El número de elementos no nulos de B no ha aumentado: la matriz A es reducible y la matriz B es ya la matriz más densa buscada.
  - En otro caso, la matriz B ha cambiado y debemos repetir el proceso.

Nótese que si se ha obtenido $b_{ii} = 1$ para algún i del conjunto Z_D, en este caso sabemos ya que A no es H–matriz, $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$. En este caso el Algoritmo ABGH finalizaba el proceso. Sin embargo, nuestro algoritmo continua para determinar el carácter reducible o irreducible de la matriz:

Se quita el índice i del conjunto Z_D y se añade a un nuevo conjunto de índices RZD.

Si la conclusión es que la matriz es irreducible (caso 1), se pasa a la tercera parte del algoritmo. Por último (caso 2) la matriz B ya no cambia sin llegar a estar completamente llena, es decir, la matriz es reducible. Este resultado es el que conduce a la realización de la segunda parte del algoritmo y guardar la matriz B es fundamental.

La descripción detallada de esta parte del algoritmo, llamada 'IRRS', es la siguiente.

Algoritmo IRRS

1. ENTRADA: A

2. $B = ones(A)$, $ZD = \{i : a_{ii} = 0\}$, $RZD = \emptyset$, $IRR = 0$, $RED = 0$, $p = nnz(B)$, $q = p$

3. Repetir hasta que $IRR + RED = 1$

   - Para i, j de 1 a n:

     Si $b_{ij} = 0$ y $b_{ik}b_{kj} = 1$ para algún $k \neq i, j$: hacer $b_{ij} = 1$, $q = q + 1$

   - Si $b_{ii} \neq 0$ para algún $i \in ZD$: agregar el índice i a RZD y borrarlo de ZD.
   - Si $q = n^2$: hacer $IRR = 1$
   - Si $p = q$: hacer $RED = 1$
   - Si no: hacer $p = q$

4. SALIDA: IRR, RED, B, ZD, RZD

Este algoritmo determina si la matriz de entrada A es irreducible ($IRR = 1$) o no ($RED = 1$). Si A es irreducible, entonces la matriz B es una matriz completa con todos sus elementos iguales a la unidad. Si la matriz A es reducible, entonces este algoritmo ha calculado la matriz más densa $B = ones(|A| + |A|^2 + \cdots + |A|^k)$. Obsérvese que los elementos correspondientes a los bloques diagonales irreducibles son iguales a la unidad. Los elementos nulos originales que corresponden a los bloques diagonales nulos de dimensión 1×1 permanecen iguales a cero (los índices ZD), pero esos mismos elementos se convierten en elementos diferentes de cero si ellos pertenecen a un bloque diagonal irreducible (los índices RZD).

A continuación presentaremos varios ejemplos numéricos para ilustrar como funciona la primera parte de este nuevo algoritmo.

Ejemplo 2.5.1. *Consideremos la siguiente matriz:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 8 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A partir de ella se obtiene la matriz de unos sustituyendo los elementos no nulos de A_1 por unidades

$$B = ones(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz más densa calculada por el algoritmo IRRS en la primera iteración es la siguiente:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que b_{41} es el único elemento que cambia debido a que se verifica que: $b_{42}b_{21} \neq 0$.

Las salidas para este ejemplo son las siguientes:

- $IRR = 0$ *y* $RED = 1$*:* A_1 *es una matriz reducible.*
- $ZD = \emptyset$ *y* $RZD = \emptyset$*:* D_{A_1} *es una matriz no singular.*
- $B = B_1$.

Ejemplo 2.5.2. *A continuación consideremos la siguiente matriz compleja*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3+4i & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0.5 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

La matriz de unos correspondiente es igual a

$$B = ones(A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz más densa calculada por el algoritmo IRRS es igual a:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hay que observar que el elemento b_{21} cambia porque $b_{23}b_{31} \neq 0$.

Para este ejemplo se obtienen lo siguientes resultados, según el algoritmo IRRS

- $IRR = 1$ *y* $RED = 0$*:* A_2 *es una matriz irreducible.*
- $ZD = \emptyset$ *y* $RZD = \emptyset$*:* D_{A_2} *es una matriz no singular.*

- $B = B_2$.

Ejemplo 2.5.3. *Inmediatamente vamos a estudiar la siguiente matriz*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

La matriz de unos es igual a

$$B = ones(A_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz más densa que se obtiene con el algoritmo IRSS es igual a

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso se obtienen los siguientes resultados

- $IRR = 1$ *y* $RED = 0$*:* A_3 *es una matriz irreducible.*
- $ZD = \emptyset$ *y* $RZD = \{2\}$*:* D_{A_3} *es una matriz singular. Además no es H-matriz (*$A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$*)*
- $B = B_3$.

Ejemplo 2.5.4. *Veamos a continuación la siguiente matriz:*

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

La matriz de unos es igual a

$$B = ones(A_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz más densa que resulta luego de aplicar el algoritmo IRRS es igual a

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(permanece inalterada) y los resultados obtenidos son los siguientes:

- $IRR = 0$ *y* $RED = 1$*:* A_4 *es una matriz reducible.*
- $ZD = \{1\}$*, y* $RZD = \emptyset$*:* D_{A_4} *es una matriz singular*
- $B = B_4$.

Por último analizamos una matriz de mayor dimensión.

Ejemplo 2.5.5.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1.12 & 0.68 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.52 & 0.44 & 0 \\ 0 & 1.52 & 0 & 0.37 & 0 & 0.15 & 0.89 & 0.17 & 0.46 & 0.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46 & 0.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.28 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.3 & 0.98 & 0 & 0.23 & 0.95 & 0.74 & 0.89 \\ 0 & 0 & 0.66 & 0.7 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0.97 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 0 & 0 & 0 & 0.19 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.34 \\ 1.12 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0.48 & 0 & 1.64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.54 & 0 & 0 & 0 & 0.27 & 0 & 0.81 \end{bmatrix}$$

La matriz correspondiente de unos es igual a

$$B = ones(A_5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz más densa que se obtiene para este ejemplo es:

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los resultados del algoritmo se muestran a continuación:

- $IRR = 0$ *y* $RED = 1$*:* A_5 *es una matriz reducible.*
- $ZD = \{1\}$*, y* $RZD = \emptyset$*:* D_{A_5} *es una matriz singular*
- $B = B_5$.

Se observa que inicialmente $nnz(A) = 40$*; y ya en la tercera iteración:* $nnz(B) = 67$ *y luego no hay más elementos nuevos. El elemento diagonal nulo de* A *permanece nulo en* B.

En esta primera parte, es decir, en el algoritmo IRSS, se determina si la matriz de entrada A es o no es reducible y, en caso de serlo, se obtiene la matriz más densa

$$B = ones(|A| + |A|^2 + \cdots + |A|^k).$$

Ahora vamos a estudiar el algoritmo que constituye la segunda parte del algoritmo propuesto con el fin de obtener los bloques diagonales de la Fnf de la matriz.

Segunda parte: Determinación de los bloques diagonales

Cuando la matriz A es reducible se obtienen los bloques diagonales de la Fnf de A basándonos en la segunda parte del algoritmo ABGH aunque con una mejora introducida en nuestro algoritmo consistente en simplificar la obtención de los sucesivos índices que determinan la Fnf de A.

A partir de la matriz B obtenida en la primera parte del algoritmo, el algoritmo IRRS, y del hecho de que la forma normal de las matrices A y B puede obtenerse con la misma matriz de permutación, utilizaremos la matriz B y la siguiente notación. Si $PBP^T = [B_{kl}]$, con $k, l = 1, 2, \ldots, p$, es la forma normal de B, cada bloque diagonal B_{kk} viene determinado por el subconjunto de índices I_k, es decir, $B_{kk} = [b_{ij}]$ con $i, j \in I_k$.

Por ser B la matriz más densa entre las potencias de $I + |A|$, los bloques diagonales B_{kk}: o son matrices llenas o son bloques nulos 1×1. Estos bloques nulos vienen determinados por cada uno de los índices que permanecen en Z_D. Quitando entonces en primer lugar los índices de Z_D, es decir, que si en Z_D quedan s índices, ya se han obtenido s bloques diagonales de la Fnf y podemos anular de B las filas y columnas correspondientes a esos s índices. Cuando decimos que esos bloques diagonales son matrices llenas es que son simétricamente no nulos, mientras que el resto de entradas no nulas de B pertenecen a bloques no diagonales y, por tanto, sus partes simétricas son nulas, es decir, los bloques no diagonales B_{kl} con $k > l$ son matrices nulas por ser la PBP^T una matriz triangular por bloques. Entonces, sobre las submatrices B_{kl} se puede concluir que:

1. $B_{kk} > 0 \quad si \quad card(I_k) > 1$.
2. B_{kl} con $k > l$ es una matriz nula, aunque B_{lk} puede contener entradas nulas y no nulas.
3. Si $b_{ij}b_{ji} \neq 0$ para algún $i \neq j$, entonces existe algún k tal que $i, j \in I_k$.

Es decir, los elementos pertenecientes a los bloques diagonales irreducibles de la forma normal de Frobenius de la matriz B son los únicos elementos diferentes de cero que poseen elementos simétricos diferentes de cero también. Así que, en primer lugar, se sustituye la matriz B por la matriz simétrica que se obtiene al eliminar los elementos diferentes de cero cuyo simétrico es nulo, es decir, cuando $b_{ij}b_{ji} = 0$. Esta matriz se denota por $\mathbf{sim}(B)$.

En segundo lugar, para determinar el conjunto de índices I_k que determinan un bloque diagonal irreducible se toma un elemento diagonal no nulo de $sim(B)$, b_{ii}, y se crea I_k tomando todos los índices de los elementos no nulos de la i-ésima fila de $sim(B)$.

Cuando se hayan aplicado las dos primeras partes del algoritmo propuesto a la matriz A, resulta entonces que: se han determinado p subconjuntos de índices I_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, para formar los bloques diagonales de la Fnf de A, $F_{kk} = [a_{ij}]$ para $i, j \in I_k$. Y ya sabemos que cada bloque F_{kk} es:

- una matriz irreducible o
- una matriz nula de dimensión 1×1.

A continuación presentamos este algoritmo al que denominamos: IDB.

Algoritmo IDB

1. Si $IRR = 1$: $nbd = 1$. Ir al la Parte 3.
2. ENTRADA: B, ZD
3. $N = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad B = sim(B)$
4. Para k desde 1 hasta $card(ZD)$
   - $IB[k] = ZD[k], \quad SB[k] = 1$ y eliminar los índices $IB[k]$ del conjunto N

5. Repetir hasta que: $card(N) = 0$:
   - $k = k + 1, \quad i = N(1), \quad IB[k] = \{j : b_{ij} \neq 0\}, \quad SB[k] = card(IB[k])$ y eliminar los índices $IB[k]$ del conjunto N
6. SALIDA: $nbd = k$ (número de bloques diagonales), $IB[j]$ y $SB[j]$, para $j = 1, 2, \ldots, k$ (índices y dimensión, respectivamente, de cada bloque diagonal)

A continuación mostraremos algunos ejemplos numéricos.

Ejemplo 2.5.6. *Considere las matrices reducibles de los Ejemplos 2.5.1, 2.5.4 and 2.5.5.*

Aplicando el algoritmo IDB a la matriz A_1 del Ejemplo 2.5.1 se obtiene que

$$sim(B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los resultados en este caso son los siguientes:

- $k = 2$.
- $IB[1] = \{1, 3\}$ *y* $SB[1] = 2$.
- $IB[2] = \{2, 4\}$ *y* $SB[2] = 2$.

Observe que la Fnf de A_1 es una matriz con dos bloques diagonales, cada uno de ellos de dimensión 2×2.

$$PA_1P^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para la matriz A_4 del Ejemplo 2.5.4

$$sim(B_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso las salidas son:

- $k = 3$.

- $IB[1] = \{1\}$ *y* $SB[1] = 1$.
- $IB[2] = \{2\}$ *y* $SB[2] = 1$.
- $IB[3] = \{3\}$ *y* $SB[3] = 1$.

Hay que señalar aquí que la Fnf de la matriz A_4 *es igual a:*

$$PA_4P^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para la matriz A_5 *del ejemplo 2.5.5 resulta que:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$sim(B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El algoritmo IDB concluye que $k = 4$ *y los índices de los bloques diagonales de la Fnf son los siguientes:*

$IB[1] = \{6\}$, $IB[2] = \{1, 2, 5, 7, 9\}$, $IB[3] = \{3\}$, $IB[4] = \{4, 8, 10\}$.

Tercera Parte: Determinación del carácter de H–matriz.

Esta parte es similar a la tercera parte del algoritmo ABGH aunque con diferentes variables para obtener resultados.

En primer lugar, se analiza si RZD permanece vacío. Si no es así, ya no hace falta realizar más cálculos pues se ha obtenido que $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$ ya desde el algoritmo IRRS.

En segundo lugar, se analiza si ZD es vacío. Si no es así, los elementos diagonales nulos correspondientes a cada uno de los índices en ZD definen bloques diagonales nulos de dimensión 1×1 de la Fnf de la matriz A (los s primeros bloques determinados por el algoritmo IDB). Estos bloques son H–matrices de la clase singular y podemos apuntar este dato tomando $SH = s$ y así sabemos cuántos bloques diagonales nulos tiene A. La matriz A puede pertenecer a $\mathcal{H}_S$ o a ${}_n\mathcal{H}_S^0$ en vista de que la tercera opción, $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$ ya ha sido descartada y la conclusión definitiva dependerá de que el resto de bloques diagonales sean H–matriz de cualquiera de las clases restantes o que no lo sea al menos uno de ellos.

En tercer y último lugar, puesto que el resto de bloques diagonales que quedan son irreducibles y tienen la diagonal no singular, se puede aplicar una ligera modificación del algoritmo AH1, llamado ModAH, a cada uno de estos bloques para saber si: son una H–matriz de $\mathcal{H}_I$, una H–matriz de la clase $\mathcal{H}_M$ o no son H–matriz. El algoritmo ModAH hace un cálculo aproximado de $\rho(|J_{F_{ii}}|)$. Si resulta que $\rho(|J_{F_{ii}}|) > 1$, entonces el proceso culmina y sólo debemos establecer si la matriz A pertenece a ${}_n\mathcal{H}_S^0$ o a ${}_n\mathcal{H}^\emptyset$ de acuerdo con ZD. En caso contrario se cumple que: $\rho(|J_{F_{ii}}|) \leq 1$ para todos los bloques diagonales, y la matriz A pertenece a $\mathcal{H}_I$, $\mathcal{H}_M$ o a $\mathcal{H}_S$, según la definición de las clases de H–matrices.

A continuación presentamos este algoritmo en MatLab.

Algoritmo CHBDI

1. Si RZD$\neq \emptyset$: Fin del proceso
2. Hacer: nbd = size(BS), SH= 0, MH= 0, NH= 0
3. Para i desde 1 hasta nbd:
4. Si SB[i] $= 1$:
5. Si IB[i] $= \{k\}$ y $a_{kk} = 0$: SH= $SH + 1$.
6. Si no: aplicar el algoritmo ModAH sobre $F_{ii} = [a_{jk}]\ :\ j, k \in$IB[$i$] para obtener ρ.
   - Si $\rho > 1$: NH=1. Fin del proceso
   - Si $\rho \approx 1$: MH=1

CLASIFICACIÓN. A partir de los valores de las variables obtenidas en este algoritmo CHBDI, la determinación del carácter de H–matriz/no-H–matriz y la clase a la que pertenece viene determinado por las siguientes condiciones en el orden indicado:

1. Si RZD$\neq \emptyset$: $A \in {}_n\mathcal{H}_N^0$
2. Si NH=1 y SH=1: $A \in {}_n\mathcal{H}_S^0$
3. Si NH=1 (y SH=0): $A \in {}_n\mathcal{H}^{\emptyset}$
4. Si SH+MH+NH= 0: $A \in \mathcal{H}_I$
5. Si SH+NH= 0 y MH=1: $A \in \mathcal{H}_M$
6. (Si NH= 0 y SH=1): $A \in \mathcal{H}_S$

Ejemplo 2.5.7. *Los resultados finales para las matrices en los Ejemplos 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3 , 2.5.4 y 2.5.5 son los siguientes:*

- A_1 *es una matriz reducible con dos bloques diagonales de dimensión* 2×2. *En vista de que* $\rho(|J_{F_{11}}|) = 1$ *y* $\rho(|J_{F_{22}}|) > 1$, *se tiene que NH=1, MH=1, y el resto de variables permanecen nulas, entonces* $A_1 \in {}_n\mathcal{H}^{\emptyset}$.
- A_2 *es una matriz irreducible tal que* $\rho(|J_A|) < 1$. *Las variables permanecen nulas y entonces,* $A_2 \in \mathcal{H}_I$.
- *Para la matriz* A_3, *se tiene que* $RZD \neq \emptyset$, *entonces* $A_3 \in {}_n\mathcal{H}_N^0$.
- A_4 *es una matriz reducible con tres bloques diagonales de dimensión* 1×1. *Estos bloques siempre son H–matrices, pero uno de ellos es igual a cero y por lo tanto,* $A_4 \in \mathcal{H}_S$.
- *Para la matriz del Ejemplo 2.5.5 se obtiene que:* $F_{11} = [0] \in \mathcal{H}_S$, *por tanto, SH=1;* $F_{33} = [a_{33}]$ *pertenece a* $\mathcal{H}_I$ *y no altera las variables. Aplicando el algoritmo ModAH a los bloques:* F_{22} *y* F_{44} *se obtiene que:*

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 1.12 & 0.68 & 0 & 0 & 0.44 \\ 0 & 1.52 & 0 & 0.89 & 0.46 \\ 0 & 0.01 & 0.98 & 0.23 & 0.74 \\ 0 & 0.83 & 0 & 1.6 & 0 \\ 1.12 & 0 & 0.98 & 0.48 & 1.64 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_M$$

luego MH=1, y como

$$F_{44} = \begin{bmatrix} 0.74 & 0 & 0.28 \\ 0 & 0.4 & 0.34 \\ 0.54 & 0.27 & 0.81 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_I$$

entonces la matriz original A_5 es una H–matriz de la clase singular. Obsérvese que:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} F_{22} & X & X & X \\ 0 & [0] & X & X \\ 0 & 0 & F_{44} & X \\ 0 & 0 & 0 & [1] \end{bmatrix} \quad \text{es la forma normal de } A_5.$$

Otros ejemplos con matrices de mayor tamaño. Se ha aplicado el nuevo algoritmo BGS a diferentes matrices de la colección ofrecida por Matrix Market (math.nist.gov/MatrixMarket/). A continuación mostramos resultados seleccionando matrices de esta colección que nuestro algoritmo IRRS ha determinado reducibles.

Ejemplo 2.5.8. *Matriz ARC: $n = 130$ con diagonal no singular y 1037 elementos no nulos. IRRS obtiene que ARC es reducible, IDB obtiene que hay 2 bloques diagonales: uno de dimensión 1 y el otro de dimensión 129; por último, CHBDI obtiene que ambos bloques diagonales son H–matrices de la clase invertible. Luego la matriz ARC pertenece a $\mathcal{H}_I$. Calculando el radio espectral aproximado, usando la rutina correspondiente de MatLab, hemos obtenido que $\rho \approx 0.12$, lo cual confirma los resultados.*

Ejemplo 2.5.9. *Matriz BFW: $n = 398$ con 3678 elementos no nulos. IRRS obtiene que BFW es reducible, IDB obtiene dos bloques de dimensiones 129 y 209, respectivamente. Aunque la diagonal es no singular, CHBDI obtiene que ambos bloques no son H–matrices y pertenecen a la clase ${}_n\mathcal{H}^{\emptyset}$ por tener un radio espectral mayor que la unidad. De hecho, el radio espectral del primer bloque es aproximadamente 1.18 y el otro 1.21.*

Ejemplo 2.5.10. *Matriz JPWH: $n = 991$ con 6027 elementos no nulos y diagonal no singular. Nuevamente se obtienen 2 bloques diagonales de dimensiones 145 y 846, respectivamente y ambos son H–matrices de la clase invertible. El mayor radio espectral es aproximadamente 0.98.*

Ejemplo 2.5.11. *Matriz RAEF6: $n = 3402$ con 130371 elementos no nulos y diagonal no singular. IRRS obtiene que A es reducible e IDB obtiene 2 bloques diagonales, uno de dimensión 43 y el otro 3359. Ambos bloques diagonales pertenecen a la clase invertible: el mayor radio espectral que se obtiene es aproximadamente 10^{-5}.*

Ejemplo 2.5.12. *Matriz POLI: $n = 4008$ con sólo 8188 elementos no nulos. IRRS obtiene que A es reducible e IDB obtiene 3943 bloques diagonales. De ellos, 3905 son de dimensión 1×1 y el resto de dimensiones de 2 a 5, todos ellos en la clase invertible.*

2.6. Conclusiones

Hemos construido un algoritmo basado en el algoritmo ABGH de [11] con el que se consigue determinar para cualquier matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ las siguientes características:

- la irreducibilidad o reducibilidad de la matriz dada,
- la agrupación de índices para poder determinar los bloques diagonales y la forma normal de Frobenius de la matriz A cuando ésta es reducible, y
- el carácter de H–matriz o de no-H–matriz de la matriz dada y a cuál de las tres posibles clases pertenece.

A la luz de los resultados de la aplicación de este nuevo algoritmo BGS se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. El número total de operaciones que requiere la primera parte del nuevo algoritmo BGS, el algoritmo IRRS, para revisar los elementos nulos de la matriz dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y obtener la matriz $B = ones(I + |A|)^{n-1}$ es igual a: $nnz(A) \cdot (n-1)$, a diferencia del número n^3 que requiere la parte correspondiente del algoritmo ABGH por cada iteración. Es decir que el nuevo algoritmo disminuye significativamente el costo de la primera parte del proceso.
2. El proceso para determinar los bloques diagonales de la forma normal de Frobenius de A propuesto en el nuevo algoritmo IDB es de sencilla programación y aporta más claridad al algoritmo mismo. El proceso no contiene tampoco operaciones complicadas pues se trata tan solo de encontrar elementos no nulos de filas y borrar elementos del conjunto de índices.
3. Es interesante notar que el algoritmo presentado BGS determina el carácter reducible o irreducible de todas las matrices y en el caso de ser reducible, los índices de los bloques diagonales de la forma normal de Frobenius.

Un resumen de los tres tipos de H–matrices y de no-H–matrices determinados por nuestro algoritmo y sus principales características se muestran en la siguiente Tabla. Recuérdese que el conjunto de H–matrices generales está dividido en tres clases y el de no-H–matrices en otras tres:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_I \cup \mathcal{H}_M \cup \mathcal{H}_S, \qquad {}_n\mathcal{H} = {}_n\mathcal{H}^{\emptyset} \cup {}_n\mathcal{H}_S^0 \cup {}_n\mathcal{H}_N^0$$

<table>
<tr><td colspan="3">$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $PAP^T = [F_{ij}]$ es la Fnf de A
$\mathcal{M}(A) = sI - B$, $s = \text{máx}_i |a_{ii}|$, $B \geq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">H–matrices : $A \in \mathcal{H}$</td></tr>
<tr><td>$s > \rho(B)$</td><td colspan="2">$s = \rho(B)$</td></tr>
<tr><td>$A \in \mathcal{H}_I$</td><td>$A \in \mathcal{H}_S$</td><td>$A \in \mathcal{H}_M$</td></tr>
<tr><td>A invertible</td><td>A singular y reducible</td><td>A mixta</td></tr>
<tr><td>$\exists\ J_A$
$\rho(|J_A|) < 1$</td><td>$\nexists\ J_A$</td><td>$\exists\ J_A$
$\rho(|J_A|) = 1$</td></tr>
<tr><td>$a_{ii} \neq 0\ \forall i$</td><td>$\exists F_{ii} = [0]$</td><td>$a_{ii} \neq 0\ \forall i$</td></tr>
<tr><td>$\rho(|J_{F_{ii}}|) < 1$
para todo i</td><td>$\rho(|J_{F_{ii}}|) \leq 1$
para todo
$F_{ii} \neq [0]$</td><td>$\rho(|J_{F_{ii}}|) \leq 1$
para todo i, y
$\exists \rho(|J_{F_{jj}}|) = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">no-H–matrices : $A \in {}_n\mathcal{H}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$s < \rho(B)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A \in {}_n\mathcal{H}^0$</td><td>$A \in {}_n\mathcal{H}^\emptyset$</td></tr>
<tr><td>$A \in {}_n\mathcal{H}^0_N$</td><td>$A \in {}_n\mathcal{H}^0_S$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>A singular
y reducible</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\nexists\ J_A$</td><td>$\rho(|J_A|) > 1$</td></tr>
<tr><td>$\exists a_{ii} = 0$</td><td>$\exists F_{ii} = [0]$</td><td>$a_{ii} \neq 0\ \forall i$</td></tr>
<tr><td>$\exists F_{jj}$
con diagonal
principal
singular</td><td>$\exists J_{F_{jj}}$
para todo
$F_{jj} \neq [0]$, y
$\exists \rho(|J_{F_{kk}}|) > 1$</td><td>$\rho(|J_{F_{kk}}|) > 1$
para al menos
un índice k</td></tr>
</table>

Tabla 2.1: Clases de H–matrices y de no-H–matrices generales

Capítulo 3

Matrices combinadas de H–matrices

3.1. Introducción

En este capítulo estudiamos la matriz combinada de H–matrices no singulares. Estas matrices pueden pertenecer a dos clases diferentes de H–matrices: a la más común, que es la clase invertible y a la clase mixta.

Las matrices combinadas han sido estudiadas en diferentes trabajos. Ver [14], [15] y [17]. Un estudio completo de las matrices combinadas en donde se muestran sus aplicaciones lineales se puede ver en [28].

En la última década, se han obtenido nuevas propiedades de las matrices combinadas [18] y [16]. Es justamente en esta última referencia en donde surgió por primera vez la denominación de matriz combinada.

Es conocido el hecho de que la suma tanto por filas, como por columnas de los elementos de la matriz combinada de una matriz no singular A, $C(A)$, es exactamente igual a 1. Luego, si $C(A) \geq 0$, la matriz combinada es doblemente estocástica. En los artículos [8] y [9] los investigadores estudiaron las condiciones bajo las cuales la matriz combinada de ciertas clases de matrices es no negativa. En particular, los autores investigaron la no negatividad de la matriz combinada de las matrices totalmente positivas y de las matrices totalmente negativas, así como también la no negatividad de las matrices signo-regulares.

La matriz combinada tiene diferentes aplicaciones. En un problema de control de un proceso, si la matriz A representa la relación entre las entradas y las salidas, la matriz combinada de A representa la matriz de ganancia relativa del proceso. Esta interpretación fue planteada en [4] y fue aplicada en Química [34]. En Matemáticas, se utiliza en [15] para calcular los valores propios de A.

En [20] y [33] se presentan varios resultados que involucran al producto de Hadamard. El resultado según el cual la matriz combinada de una M–matriz no-singular es también una M–matriz no-singular lo obtuvo Fiedler en [14]. El mismo resultado se deduce de los trabajos [19] y [27] tal y como señalaron Fiedler y Markham en [17]. En el presente capítulo extendemos este último resultado a las H–matrices no-singulares. En primer lugar, recordamos las propiedades de las H–matrices no-singulares y su relación con la dominancia diagonal. En el apartado 3.3.1 se demuestra que la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es también una H–matriz de la misma clase. Más adelante, en el apartado 3.3.5 se obtienen propiedades tanto de la diagonal dominancia de la matriz inversa, como la matriz combinada de H–matrices no-singulares que pertenecen a la clase mixta y se concluye que la matriz combinada de una H–matriz no-singular de la clase mixta es también una H–matriz. previamente en la Sección 3.2 recordamos algunas notaciones y definiciones.

3.2. Notaciones y Definiciones

Trabajaremos con matrices cuadradas de dimensión $n \times n$. Las matrices son complejas excepto en la sección 3 donde son reales.

Empezamos por recordar la noción de matriz combinada dada en la Definición 1.7.1 de la página 17.

Para ello, notemos que $A \circ B$ representa el **producto de Hadamard** de las matrices A y B, es decir, el producto elemento por elemento:

$$(A \circ B)_{ij} = a_{ij} b_{ij}.$$

A este producto se le conoce también con el nombre de **producto de Schur** [33].

La **matriz combinada** de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (Definición 1.7.1) viene dada por

$$C(A) = A \circ \left(A^{-1}\right)^T.$$

En consecuencia el elemento (i, j) de $C(A)$ viene dado por

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij}}{\det A}. \qquad (3.1)$$

de acuerdo con la notación anterior.

Puesto que en este capítulo trabajamos con H–matrices invertibles vamos a recordar propiedades de H–matrices relacionadas con la invertibilidad o la singularidad.

- Todas las H–matrices en $\mathcal{H}_I$ son no singulares.
- En $\mathcal{H}_M$ existen H–matrices no singulares y singulares. Si la matriz con la que estamos trabajando A es irreducible, todas las H–matrices singulares son diagonalmente equivalentes a la matriz singular $\mathcal{M}(A)$ ([6]).
- Todas las H–matrices en $\mathcal{H}_S$ son singulares y reducibles.

A continuación recordemos algunos resultados conocidos (ver [44] y [5]) que utilizaremos en los temas a desarrollar en lo inmediato.

Teorema 3.2.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces*

- *$A \in \mathcal{H}_I$ si y sólo si es GSDD.*
- *Si A es GDD entonces es H–matriz.*
- *Si $A \in \mathcal{H}_M$ y es irreducible entonces es GDD.*

3.3. Matrices Combinadas de H–matrices

En esta sección vamos a extender a H–matrices no singulares reales el siguiente resultado (ver [19] y [27]) que hemos comentado en la sección anterior. En esta sección todas las matrices consideradas son matrices reales.

Teorema 3.3.1. *La matriz combinada de una M–matriz invertible es también una M–matriz invertible.*

En realidad vamos a demostrar la diagonal dominancia de la matriz combinada de una H–matriz invertible.

3.3.1. Matrices combinadas de H–matrices de la clase invertible

Empezamos por las H–matrices de la clase invertible.

Teorema 3.3.2. *Sea $A \in \mathcal{H}_I$. Entonces su matriz combinada es estrictamente diagonal dominante.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, puesto que $C(AD) = C(A)$, podemos suponer que A es una matriz diagonalmente dominante en sentido estricto (SDD), es decir que:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \in N. \tag{3.2}$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 2.5.12 de ([26]), sabemos que si la matriz A es SDD, entonces su matriz inversa $A^{-1} = [\alpha_{ij}]$ cumple la desigualdad estricta:

$$|\alpha_{ii}| > |\alpha_{ji}| \qquad \forall j \neq i. \tag{3.3}$$

Los elementos de la matriz combinada de A, $C(A) = [c_{ij}]$ son de la forma

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}}{\det A}.$$

Nótese que con esta misma notación, los elementos de la matriz inversa son

$$\alpha_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A}$$

y la desigualdad (3.3) se expresa en la forma

$$|A_{ii}| > |A_{ij}|, \qquad \forall j \neq i. \tag{3.4}$$

Entonces, teniendo en cuenta las desigualdades (3.2) y (3.4) se tiene

$$|a_{ii}||A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}||A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}||A_{ij}|$$

y por tanto

$$|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$$

lo que implica que la matriz combinada de la matriz A, $C(A)$, es SDD. □

Corolario 3.3.1. *Si $A \in \mathcal{H}_I$, entonces $C(A) \in \mathcal{H}_I$.*

Demostración. Como $A \in \mathcal{H}_I$, entonces existe una matriz diagonal invertible no negativa D tal que AD es SDD. Aplicando el Teorema 3.3.2 a AD se tiene que $C(AD) = C(A)$ es SDD. Por tanto $C(A) \in \mathcal{H}_I$. □

3.3.2. Matrices combinadas de subclases de H–matrices

Es conocido que la clase de H–matrices tiene diferentes subclases tales como α_1, α_2–matrices, S-SDD, etc. (ver [7], [12]). Como todas las matrices estrictamente diagonal dominantes pertenecen a estas subclases, podemos establecer el siguiente corolario general.

Corolario 3.3.2. *Sea $\mathcal{S}$ una subclase de H–matrices de la clase invertible que contiene a todas las matrices SDD, es decir,*

$$\left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A \text{ es SDD}\right\} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_I.$$

Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $C(A)$ pertenece también a dicha subclase $\mathcal{S}$.

Demostración. Por el Teorema 3.3.2, $C(A)$ es SDD y por tanto $C(A)$ pertenece a la subclase considerada. □

Nótese que también podemos obtener el Teorema 3.3.1 como consecuencia del Teorema 3.3.2.

Corolario 3.3.3. *Si A es una M–matriz invertible, entonces $C(A)$ es una M–matriz invertible.*

Demostración. Primero recordemos que $A \in \mathcal{H}_I$, luego $C(A)$ es SDD. Puesto que $A^{-1} \geq 0$, $C(A)$ repite los signos de A, luego es M–matriz invertible. □

3.3.3. Matrices combinadas de H–matrices invertibles de la clase mixta

Vamos a estudiar los resultados anteriores para las H–matrices de la clase mixta. Para ello necesitamos extender dos resultados de [26], pag.125, sobre matrices SDD, a matrices DD invertibles.

Como hemos dicho en el Capítulo 1 denotamos por $\operatorname{sgn}(x)$ el signo del número real x.

Lema 3.3.1. *Si A es diagonal dominante y no singular, entonces*

$$\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(\prod_i a_{ii}).$$

Demostración. Como A es DD y no singular entonces $a_{ii} \neq 0$ para todo i.

Supongamos primero que $a_{ii} > 0$ para todo i. Dado $\epsilon \in [0, 1[$ construimos la matriz:

$$A_\epsilon = D + \epsilon(A - D)$$

en donde $D = \mathrm{diag}(A)$.

Como $A_\epsilon = \epsilon A + D(1-\epsilon)$ es SDD por ser la suma de una DD y una SDD y $\mathrm{diag}(A_\epsilon) = \mathrm{diag}(A) = D$, entonces (ver [26], página 125) $\mathrm{sgn}(\det A_\epsilon) = \mathrm{sgn}(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})$ y, por tanto, $\det A_\epsilon > 0$. Puesto que el determinante es una función multilineal se tiene que es continua, y como $\lim_{\epsilon\to 1^-} A_\epsilon = A$, se tiene que $\det A \geq 0$. Es decir,

$$\mathrm{sgn}(\det A) = \mathrm{sgn}(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}) > 0.$$

Supongamos ahora que existan elementos diagonales negativos. Construimos la matriz diagonal de los signos de la diagonal de A:

$$\bar{D} = \mathrm{sgn}(\mathrm{diag}(D)) = \mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(a_{ii}))$$

Entonces, la matriz $B = A\bar{D}$ tiene los elementos diagonales positivos y sigue siendo DD, por tanto estamos en el caso anterior y $\det B > 0$.

Como $\det B = \det A \det \bar{D} = \det A \prod_i \mathrm{sgn}(a_{ii})$, concluimos que

$$\mathrm{sgn}(\det A) = \mathrm{sgn}\left(\prod_i \mathrm{sgn}\, a_{ii}\right) = \mathrm{sgn}\left(\prod_i a_{ii}\right).$$

□

Nótese que si A es singular y DD entonces el signo del determinante puede no coincidir con el signo del producto de los elementos diagonales. Esto es, puede ocurrir que $\det A = 0$ pero $\prod_i a_{ii} \neq 0$. Además, si $\prod_i a_{ii} = 0$ entonces A tendría, al menos, una fila nula.

El Lema 3.3.1 se puede extender a matrices GDD.

Lema 3.3.2. *Si la matriz A es diagonal dominante generalizada y no singular, entonces*

$$\mathrm{sgn}(\det A) = \mathrm{sgn}\left(\prod_i a_{ii}\right).$$

Demostración. Se deduce sin más que observar que si $D = \mathrm{diag}(d_i)$ es la matriz, diagonal, invertible y no negativa, que convierte AD en matriz diagonal dominante, entonces $\det(AD) = (\det A)(\det D) = (\det A)(\prod_i d_i)$ y los elementos diagonales de AD son de la forma $a_{ii}d_i$. □

El siguiente resultado es fundamental para obtener los resultados buscados.

Teorema 3.3.3. *[10] Si A es diagonalmente dominante y verifica que $D = \operatorname{diag}(A)$ es invertible, es decir, $a_{ii} \neq 0$, $i \in N$, entonces el adjunto diagonal domina a los de su fila, es decir,*

$$|A_{ii}| \geq |A_{ij}|, \quad \forall j \neq i. \tag{3.5}$$

Demostración. Comencemos suponiendo que $a_{ii} > 0$ para todo i. Para probar las desigualdades (3.5), consideremos sin pérdida de generalidad que $i = 1$ y $j = 2$. Vamos a probar que $A_{11} \pm A_{12} \geq 0$. Hacemos la siguiente notación,

$$\begin{aligned} A_{11} \pm A_{12} = \ & \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \pm a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \pm a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pm a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ = \ & \det \begin{bmatrix} \pm a_{21} + a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \pm a_{31} + a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pm a_{n2} + a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det B. \end{aligned}$$

Veamos que esta matriz auxiliar B es DD.

En su primera fila, como A es DD, sabemos que

$$a_{22} = |a_{22}| \geq \sum_{k \neq 2} |a_{2k}|$$

en particular $a_{22} \geq |a_{21}|$ y por tanto

$$a_{22} \pm a_{21} = |a_{22} \pm a_{21}| \geq a_{22} - |a_{21}| \geq \sum_{k \neq 1,2} |a_{2k}|$$

Para el resto de filas:

$$|a_{j2} \pm a_{j1}| + \sum_{k \neq 1,2,j} |a_{jk}| \leq |a_{j2}| + |a_{j1}| + \sum_{k \neq 1,2,j} |a_{jk}| \leq a_{jj}$$

Como B es DD y, además, sus elementos diagonales son no negativos, se puede aplicar el Lema 3.3.1 y concluimos que $\det B \geq 0$. En consecuencia $A_{11} \pm A_{12} \geq 0$, es decir, $A_{11} = |A_{11}| \geq |A_{12}|$.

Por último, en el caso general, con signos cualesquiera en los elementos diagonales, construimos la matriz de signos $\bar{D} = \operatorname{sgn}(\operatorname{diag}(D))$ de forma que la matriz $C = A\bar{D}$ es DD y sus elementos diagonales son todos positivos. Aplicando el resultado de la primera parte de la demostración a la matriz C concluimos que $|C_{ii}| \geq |C_{ij}|$ para todo $j \neq i$. Finalmente, puesto que

$$C_{ij} = A_{ij} \prod_{j \neq i} \mathrm{sgn}(a_{jj})$$

concluimos que

$$|A_{ii}| = |C_{ii}| \geq |C_{ij}| = |A_{ij}|$$

para todo $j \neq i$.

□

Como consecuencia obtenemos una generalización del Teorema 2.5.12 de [26] a matrices no SDD.

Teorema 3.3.4. *[10] Sea A una matriz invertible y diagonalmente dominante. Entonces $A^{-1} = [\alpha_{ij}]$ es diagonalmente dominante de sus columnas, es decir*

$$|\alpha_{ii}| \geq |\alpha_{ji}| \quad \forall j \neq i. \tag{3.6}$$

Demostración. Ya sabemos que una matriz DD e invertible no puede tener elementos diagonales nulos. Entonces, podemos aplicar el Teorema 3.3.3 a A y reconvertir las desigualdades (3.5) sobre adjuntos de cada fila en las desigualdades (3.6) sobre las columnas de A^{-1}. □

El Teorema 3.3.3 no se puede extender a matrices GDD (y tampoco a matrices GSDD) ya que las desigualdades no se obtienen debido a que $(AD)_{ii} = A_{ii}D_{ii}$ pero $(AD)_{ij} = A_{ij}D_{jj}$. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 3.3.1. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 10 & -3 \\ 1 & 4 & -24 \end{bmatrix}$$

es GSDD puesto que, al multiplicarla por la matriz diagonal $D =$ $\mathrm{diag}(1, 1/2, 1/4)$ se obtiene la matriz SDD:

$$AD = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3/4 \\ 4 & 5 & -3/4 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Aunque la matriz inversa de AD sí que satisface la desigualdad (3.6), A^{-1} no la satisface puesto que $\alpha_{12} = -84/\det A$ y $\alpha_{22} = -69/\det A$; $\alpha_{13} = 18/\det A$ y $\alpha_{33} = 14/\det A$. Es decir, $|\alpha_{22}| < |\alpha_{12}|$ y $|\alpha_{33}| < |\alpha_{13}|$.

Ya casi estamos en condiciones de extender el resultado sobre la matriz combinada de H–matrices invertibles.

Teorema 3.3.5. *Sea $A \in \mathcal{H}_M$ una matriz invertible e irreducible. Entonces $C(A)$ es diagonalmente dominante.*

Demostración. Puesto que $\det A \neq 0$, tenemos que probar que

$$|a_{ii}A_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||A_{ij}|, \quad \forall i \in N. \tag{3.7}$$

Como A es una H–matriz irreducible de la clase mixta, sabemos que A es GDD. Como $C(AD) = C(A)$ podemos suponer entonces que A es DD, es decir,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in N. \tag{3.8}$$

De acuerdo con el Teorema 3.3.3:

$$|A_{ii}| \geq |A_{ij}|, \ \forall i, j \in N.$$

Utilizando este resultado en la desigualdad (3.8) se obtiene

$$|a_{ii}||A_{ii}| \geq |a_{ij}||A_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||A_{ij}|, \quad \forall i \in N$$

y en consecuencia la matriz combinada es DD, es decir que $C(A)$ es una matriz diagonalmente dominante. □

Corolario 3.3.4. *Si A es una H–matriz invertible, entonces su matriz combinada $C(A)$ es DD y por tanto es H–matriz.*

Demostración. Si $A \in \mathcal{H}_I$ sabemos por el Teorema 3.3.2 que $C(A)$ es SDD, y por tanto H–matriz de la clase invertible. Si $A \in \mathcal{H}_M$ y es irreducible, por el teorema anterior sabemos que $C(A)$ es DD. Por último si $A \in \mathcal{H}_M$ y es reducible, utilizamos su forma normal y la ecuación (1.8) para $C(A)$. Aplicando el teorema anterior a los bloques diagonales irreducibles R_{ii}, se obtiene que $C(A)$ es DD. □

Ejemplo 3.3.2. *Consideremos la H–matriz reducible A no singular de la clase mixta:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow C(A) = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 13 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & 30 \end{bmatrix}$$

La matriz combinada $C(A)$ es también H–matriz de la clase mixta puesto que es DD pero no SDD. Obsérvese que, además, $C(A)$ es singular. Concretamente, A se ha escrito en su forma normal donde el primer bloque 2×2, es de la clase mixta y tiene como matriz combinada una H–matriz singular, el primer bloque diagonal 2×2 de $C(A)$, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Por el contrario, el segundo bloque diagonal de A es 3×3 y pertenece a la clase invertible, por eso se obtiene que, en su combinada, el segundo bloque diagonal de $C(A)$, pertenece a $\mathcal{H}_I$.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se han obtenido diferentes resultados nuevos relacionados con la diagonal dominancia de la matriz inversa y con la matriz combinada de H–matrices no singulares. En realidad se ha podido determinar que:

- la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es estrictamente diagonal dominante.
- la combinada de una H–matriz de la clase invertible es también una H–matriz de la clase invertible.
- la matriz combinada de las matrices que son subclases de la clase de las H–matrices de la clase invertible son H–matrices que pertenecen a la misma subclase de la matriz original.
- como consecuencia de las dos primeras conclusiones, se puede demostrar también que la matriz combinada de una M–matriz invertible es también una M–matriz invertible.
- el adjunto diagonal de una matriz diagonalmente dominante y con elementos diagonales distintos de cero domina a los adjuntos de su fila.
- para las matrices diagonalmente dominantes e invertibles su matriz inversa es diagonalmente dominante de sus columnas.
- la matriz combinada de una H–matriz invertible de la clase mixta es una H–matriz. Este último resultado es una extensión del ya conocido resultado para M–matrices.

Capítulo 4

Matrices combinadas de matrices diagonalmente dominantes equipotentes

4.1. Introducción

Como ya hemos visto en el capítulo 3 sobre las matrices combinadas de H–matrices, se obtuvieron dos resultados notables:

1. En primer lugar, se obtuvo que la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es también una H–matriz de la misma clase (Corolario 3.3.1).

2. En segundo lugar, se obtuvo que la matriz combinada de una H–matriz de la clase mixta es DD y por tanto H–matriz (Corolario 3.3.4).

De este segundo resultado se deduce que la matriz combinada de una matriz de la clase mixta puede ser:

- una H–matriz de la clase invertible o bien
- una H–matriz de la clase mixta también.

En el segundo caso, aún existe la pregunta de saber si la matriz combinada será singular o invertible y en que casos se diferencian. Los siguientes ejemplos ilustran estas posibilidades.

Ejemplo 4.1.1. *Sea B la H–matriz invertible de la clase mixta.*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Si calculamos $C(B)$ se obtiene que

$$C(B) = \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 78 & 14 & 20 \\ 1 & 84 & 27 \\ 33 & 14 & 65 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

es una H–matriz de la clase invertible.

Ejemplo 4.1.2. *Sea C la H–matriz invertible de la clase mixta.*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Si calculamos $C(C)$ se obtiene que

$$C(C) = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 13 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & 30 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

es una H–matriz de la clase mixta y singular.

En el presente capítulo veremos en la Sección 4.3 una subclase de H–matrices de la clase mixta cuyas matrices combinadas pertenecen también a la clase mixta y además son singulares. En la Sección 4.4 estudiaremos algunas H–matrices tales que su matriz combinada es una H–matriz de la clase invertible. Por el Teorema 3.2.1, podemos concluir que si A es una H–matriz irreducible, entonces A no puede pertenecer a la clase singular y por tanto quedan dos opciones:

- A es de la clase invertible si y sólo si es GSDD o
- A es de la clase mixta si y sólo si es GDDE.

4.2. Definiciones y resultados previos

A continuación recordemos algunos resultados conocidos sobre las M–matrices.

Teorema 4.2.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\mathcal{M}(A)$ es una M–matriz invertible si y sólo si A es GSDD. En este caso,* $\det A > 0$ *y* $a_{ii} > 0$ *para todo* i.

Como consecuencia: $A \in \mathcal{H}_I$ si y sólo si A es GSDD. Además, A es invertible y todos sus elementos diagonales son no nulos.

Teorema 4.2.2. *Sea $A \in \mathcal{H}_M$ e irreducible y sea $M = \mathcal{M}(A)$ su matriz de comparación. Entonces los adjuntos de M son constantes en cada fila, es decir,*

$$M_{ii} = M_{ij} \quad \forall i, j \in N.$$

Demostración. Debido a que A es de la clase mixta e irreducible, M es irreducible y singular. Dado $i \in N$, por ser A DDE se verifica que, $|a_{ii}| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ y por ser M singular,

$$-|a_{i1}|M_{i1} - |a_{i2}|M_{i2} - \cdots + |a_{ii}|M_{ii} - \cdots - |a_{in}|M_{in} = 0.$$

Entonces,

$$M_{ii}|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|M_{ij} = 0$$

y por tanto,

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|(M_{ii} - M_{ij}) = 0.$$

Como M es DDE, $M_{ii} - M_{ik} \geq 0$ para todo k, luego concluimos que

$$|a_{ij}|(M_{ii} - M_{ij}) = 0$$

Por tanto, $M_{ii} - M_{ij} = 0$ para todo j tal que $a_{ij} \neq 0$.

Cuando el elemento $a_{ik}, k \neq i$ de la fila i es nulo, construimos la nueva matriz $\overline{M}$ cuyos elementos son idénticos a los de M exceptuando que en la fila i-ésima, al elemento diagonal le sumamos 1 y al de la columna k le restamos 1, es decir: $\overline{m_{ii}} = |a_{ii}| + 1$, $\overline{m_{ik}} = |a_{ik}| - 1$ y para el resto de columnas y filas, $\overline{m_{rs}} = m_{rs}$.

La matriz $\overline{M}$ sigue siendo exactamente DDE, es irreducible y es una matriz de comparación, por tanto es singular. Razonando con $\overline{M}$ del mismo modo que con M, concluimos que $\overline{M}_{ii} - \overline{M}_{ik} = 0$ porque $\overline{m_{ik}} \neq 0$. Observando que los adjuntos de la fila i-ésima de M y $\overline{M}$ son idénticos, hemos obtenido que $M_{ii} = M_{ik}$ también cuando $a_{ik} = 0$.

□

Es conocido el siguiente resultado a partir de un artículo de Miroslav Fiedler (ver en [14]).

Teorema 4.2.3. *Si $M(A) = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una M–matriz irreducible, sus elementos diagonales son no nulos y A es GDD.*

Teorema 4.2.4. *Si A es irreducible, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) A es GDDE,

ii) $M(A)$ es M–matriz singular sin elementos diagonales nulos,

iii) $A \in \mathcal{H}_M$.

Demostración. Un resultado de [6] es que ii) $\Leftrightarrow$ iii).

i) $\Rightarrow$ iii): Si A es GDDE, A es GDD, por tanto A es H–matriz. Como no es GSDD, no es de $\mathcal{H}_I$ por el Teorema 3.2.1, y como es irreducible, no es de $\mathcal{H}_S$, por tanto $A \in \mathcal{H}_M$.

ii) $\Rightarrow$ i): a partir del Teorema 6.4.16 de [3], se tiene que existe un vector positivo x tal que $M(A)x = 0$. Llamando m_{ij} a los elementos de la matriz $M(A)$, tenemos que

$$\sum_j m_{ij}x_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

y como $m_{ii} = |a_{ii}|$ y $m_{ij} = -|a_{ij}|$, obtenemos que

$$|a_{ii}x_i| = \sum_{j\neq i} |a_{ij}x_j| \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Tomando la matriz diagonal $D = \text{diag}(x_i)$, la ecuación (4.5) indica que AD es DDE y por tanto, A es GDDE. □

Así pues, combinando los resultados dados en los Teoremas 3.2.1 y 4.2.4 podemos establecer que en el conjunto de H–matrices irreducibles, tenemos las caracterizaciones siguientes: $A_1 \in \mathcal{H}_I \Leftrightarrow A_1$ es GSDD y $A_2 \in \mathcal{H}_M \Leftrightarrow A_2$ es GDDE.

Además, la matriz combinada de una matriz reducible A es una matriz reducible que admite una forma normal de Frobenius diagonal por bloques, siendo cada bloque diagonal la matriz combinada de un bloque diagonal irreducible de A. Entonces podemos deducir a qué clase de H–matrices pertenece $C(A)$ sin más que observar a qué clase pertenece la matriz combinada de cada bloque diagonal irreducible de la forma normal de A. Concretamente, $C(A) \in \mathcal{H}_I$ si y sólo si todos los bloques diagonales irreducibles de A obtienen su combinada en $\mathcal{H}_I$. Recíprocamente, $C(A) \in \mathcal{H}_M$ si y sólo si algún bloque diagonal irreducible de A tiene su combinada en $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Como los bloques diagonales de $\mathcal{H}_I$ tienen su combinada en $\mathcal{H}_I$ (ver Corolario 3.3.1), sólo queda estudiar cuando un bloque diagonal irreducible e invertible de $\mathcal{H}_M$ tiene su combinada en $\mathcal{H}_M$ o en $\mathcal{H}_I$.

4.3. Matriz combinada de matrices DmP

Vamos a estudiar la matriz combinada de un tipo de H–matrices invertibles e irreducibles de la clase $\mathcal{H}_M$. Aunque no se incluye en la definición de este tipo de matrices, ya que no es necesario, en esta sección consideramos que todas las matrices A con las que vamos a trabajar son H–matrices invertibles de la clase mixta.

Definición 4.3.1. *Sea $A \in R^{n\times n}$ e irreducible. Se dice que la matriz A es **DmP** si es suma de una matriz diagonal invertible D y de una matriz monomial irreducible M con elementos diagonales nulos, es decir, A admite una partición de la forma*

$$A = D + M.$$

Como trabajamos con matrices DmP que son H–matrices invertibles e irreducibles de la clase mixta, entonces A es GDDE (ver Teorema 4.2.4) luego existe una matriz D_1 diagonal e invertible tal que

$$A_1 = AD_1$$

es DDE. Obsérvese que este cambio mantiene $C(A) = C(A_1)$ por la propiedad de matriz combinada (1.6) de la página 18.

Por otra parte, la matriz combinada de una matriz permutada tiene la propiedad (1.7), vamos a construir una permutación simétrica de nuestra matriz inicial A basándonos en la siguiente observación.

Observación. Mediante una permutación simétrica, la matriz monomial e irreducible M se puede escribir de la siguiente forma

$$PMP^T = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1} \\ m_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

en donde $m_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces, como

$$A_2 = PA_1P^T = PDP^T + PMP^T$$

la estructura de A, cuyos elementos denotamos por $A_2 = [a_{ij}]$ abusando de la notación, está basada en la estructura (4.6), es decir, será de la forma

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

en donde todos los a_{ij} indicados en (4.7) son no nulos.

Recordar que $C(A_2) = PC(A_1)P^T = PC(A)P^T$, de acuerdo con la propiedad (1.7). También es importante recordar que el carácter de H–matriz y la clase a la que pertenece también es invariable con permutaciones simétricas.

Como A es GDDE, A_1 y A_2, son DDE. Entonces se tiene que $|a_{ii}| = |a_{i,i+1}|$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ y $|a_{n1}| = |a_{nn}|$ en la expresión (4.7) de A_2. Como todos los elementos diagonales son no nulos por ser de $\mathcal{H}_M$, podemos construir la matriz diagonal invertible $D_2 = \text{diag}(1/a_{ii})$ con lo cual $A_3 = D_2A_2$ tiene la forma

$$A_3 = D_2A_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

donde $|x_i| = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Hemos explicado estas tres simplificaciones de una matriz DmP, es decir, hemos realizado permutaciones simétricas y escalamiento de sus filas y columnas obteniendo una matriz DmP de la forma (4.8) ya que buscamos obtener propiedades de su matriz combinada y podemos utilizar las propiedades de matrices combinadas dadas en (1.7) y (1.6) página 18) que se basan en las operaciones que hemos realizado a la matriz original para obtener $C(A)$ a partir de $C(A_3)$, mediante la relación $C(A) = P^T C(A_3) P$.

A partir de la forma particular dada en (4.8) de una matriz DmP de la clase mixta, vamos a poder concluir, en el resultado siguiente, que su matriz combinada está completamente determinada y además es singular.

Teorema 4.3.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible de la clase $\mathcal{H}_M$ y DmP. Entonces $C(A)$ es una H–matriz singular e irreducible de la clase $\mathcal{H}_M$, y admite una permutación simétrica en la forma*

$$PC(A)P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Demostración. Como ya hemos razonado anteriormente, podemos suponer que nuestra matriz A es de la forma (4.8), donde $|x_i| = 1$ para todo i.

Primero notemos que

$$\det A = 1 + \operatorname{sgn}\{2, 3, \dots, n, 1\} \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{4.10}$$

donde la signatura de la permutación $\{2, 3, \dots, n, 1\}$ vale

$$s = \operatorname{sgn}\{2, 3, \dots, n, 1\} = \begin{cases} +1, & \text{si } n = 2k+1 \\ -1, & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Nótese que

$$\det A = \begin{cases} 2, & \text{si s y t tienen signos iguales.} \\ 0, & \text{si s y t tienen signos distintos.} \end{cases}$$

siendo $t = \prod_{i=1}^{n} x_i$ de (4.10).

En el resto de la demostración consideramos sólo el caso donde $\det A = 2$ ya que A es invertible. Señalemos que por la definición de matriz combinada un elemento nulo en A produce el correspondiente elemento nulo en $C(A)$.

El adjunto del elemento que ocupa la posición $(1,1)$ es fácil de calcular ya que el menor corresponde al determinante de una matriz triangular con todos los elementos diagonales iguales a uno. En consecuencia

$$c_{11} = \frac{a_{11}(-1)^{1+1}A_{11}}{\det A} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, como la matriz combinada satisface la condición (1.5) (la suma por filas y por columnas es 1), y teniendo en cuenta la estructura no nula de $C(A)$ se deduce fácilmente que $c_{n1} = c_{12} = \frac{1}{2}$. Razonando recursivamente, obtenemos que todos los términos no nulos de $C(A)$ son exactamente iguales a $1/2$. Por lo tanto la matriz combinada $C(A)$ es una permutación simétrica de la matriz (4.9) y en consecuencia singular. Luego es DDE y por tanto H–matriz singular de la clase $\mathcal{H}_M$.

$\square$

Ejemplo 4.3.1. *Dada la matriz*

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

veamos que es H–matriz invertible de la clase mixta y DmP y comprobaremos que su matriz combinada es singular y del tipo (4.9)*.*

Obsérvese que es GDDE ya que

$$Q_1 = QD_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

es DDE, donde

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora podemos permutarla simétricamente para obtener la matriz

$$Q_2 = PQ_1P^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

en donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finamente, construimos la matriz con la estructura (4.8)

$$Q_3 = D_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Recordando que

$$C(Q_3) = C(Q_2)$$

y de acuerdo con los resultados del Teorema (4.3.1), $C(Q)$ *tendrá una estructura basada en la expresión* (4.9). *Además,*

$$C(Q) = C(Q_1) = P^T C(Q_2) P$$

es decir,

$$C(Q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

4.4. Matriz combinada de matrices DDE que no son DmP

Nuestro estudio de la matriz combinada de una H–matriz de la clase mixta se ha realizado comenzando con la H–matriz irreducible que menos elementos no nulos tiene, una matriz DmP y añadiendo, paso a paso, más elementos no nulos. Después de estudiar las matrices DmP vamos a considerar matrices con un elemento más no nulo como definimos a continuación.

Definición 4.4.1. *Sea* $A \in R^{n \times n}$. *Se dice que la matriz* A *es* ***DmPm1*** *si es una matriz DmP y tiene además un sólo elemento no nulo más en cualquier otra posición de la matriz.*

Estas matrices se pueden escribir con la siguiente partición

$$A = D + M + E_{ij}$$

donde como antes D es diagonal e invertible, M es monomial, irreducible y con diagonal nula, y E_{ij} es una matriz que sólo tiene el elemento (i, j) diferente de cero, siendo esta posición (i, j) n diagonal $(i \neq j)$ y distinta de las posiciones no nulas de M. Es decir, la matriz A tiene exactamente $2n + 1$ posiciones no nulas.

Como en la sección anterior, las matrices DmPm1 que consideramos son H–matrices invertibles de la clase mixta. De la definición se deduce que son matrices irreducibles. Sin embargo, su matriz combinada no lo es siempre, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.1. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es una H–matriz irreducible de la clase mixta.

Sin embargo, su matriz combinada es

$$C(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular y por tanto no es irreducible.

Se pueden considerar dos tipos de matrices DmPm1.

- *Tipo A*: tienen el elemento nuevo no nulo en la parte triangular superior o por encima de la diagonal.
- *Tipo B*: tienen el elemento no nulo nuevo en la parte triangular inferior o por debajo de la diagonal.

Vamos a hacer, en primer lugar, el estudio con las matrices del Tipo A.

Como nuestra finalidad es estudiar la matriz combinada $C(A)$ y sabemos que

$$C(PAP^T) = PC(A)P^T$$

por la propiedad (1.7) dada en la página 18, donde P es una matriz permutación, entonces

$$A_2 = PA_1P^T = D + PMP^T + PE_{ij}P^T$$

puede tener la estructura

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

donde denotamos todos los elementos no nulos por a_{ij}. Hemos puesto, sin pérdida de generalidad, el elemento nuevo en la esquina superior derecha por claridad. Igualmente, como A_1 es GDDE, se tiene que existe la matriz diagonal e invertible D_1 tal que $A_2 = A_1 D$ es DDE.

Al igual que en la sección anterior, debido a que la matriz combinada tiene la propiedad $C(DA) = C(A)$ de acuerdo con (1.6), podemos considerar la matriz

$$A_3 = D_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & 1 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

donde

$$|x| + |y| = 1 \text{ y } |x_i| = 1, \; i = 2, 3, \dots, n. \tag{4.13}$$

Esta matriz se ha obtenido al premultiplicar la matriz A_2 por la matriz

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{n-1,n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Veamos, en primer lugar, cuántas clases de matrices podemos obtener con la estructura (4.12) en función del valor de su determinante que está determinado por los signos de los términos no nulos.

Teorema 4.4.1. *Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ DDE de la forma* (4.12)*. Entonces el determinante viene dado por la expresión*

$$\det(A) = 1 \pm |x| \pm |y|. \tag{4.14}$$

Demostración. Una forma de obtener este resultado es a partir de la expresión general del determinante de una matriz cuadrada A con elementos a_{ij}, es decir,

$$\det(A) = \sum_{\sigma(i)\in P_n} \operatorname{sgn}\{\sigma(i)\} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \tag{4.15}$$

en donde P_n representa el conjunto de todas las permutaciones que se pueden construir con los números $1, 2, 3, \ldots, n$ y $\sigma(i)$ denota la i-ésima permutación.

Observando y estudiando la estructura de la matriz (4.12) y calculando las diferentes permutaciones posibles, la fórmula general (4.15) se reduce en nuestro caso a la expresión

$$\det(A) = 1 + \operatorname{sgn}\{2, 3, \ldots, n, 1\} x \prod_{i=2}^{n} x_i + \operatorname{sgn}\sigma(i) y \tag{4.16}$$

donde $\sigma(i)$ es la permutación que contiene al elemento $(1, n)$. Como las signaturas pueden valer ± 1 al igual que el término $\prod_{i=2}^{n} x_i$, se tiene que

$$\det(A) = 1 \pm |x| \pm |y|. \tag{4.17}$$

$\square$

Observación

Se puede observar que sólo hay cuatro tipos de matrices DmPm1 con la estructura (4.12) que comentamos a continuación.

1. **Primer caso**: $\det A = 2|x|$. Este caso se presenta, por ejemplo, cuando $x = +|x|$, $y = -|y|$ y $x_i = -1$ para $i = 2, 3, \ldots, n$.

   A partir del resultado (4.17) se obtiene lo siguiente:

   $$\det A = 1 + |x| - |y|$$

   es decir
   $$\det A = 2|x|.$$

2. **Segundo caso**: $\det A = 2|y|$. Este caso surge cuando $x = -|x|$, $y = +|y|$ y $x_i = -1$ para $i = 2, 3, \ldots, n$. En forma similar al caso anterior, del resultado (4.17) se obtiene lo siguiente:

   $$\det A = 1 - |x| + |y|$$

   de donde resulta que
   $$\det A = 2|y|.$$

3. **Tercer caso**: $\det A = 2$. Este caso se presenta cuando $x = +|x|$, $y = +|y|$ y $x_i = -1$ para $i = 2, 3, \ldots, n$. De nuevo, recurriendo al resultado (4.17) se obtiene lo siguiente.

$$\det A = 1 + |x| + |y|$$

   y por tanto

$$\det A = 2.$$

4. **Cuarto caso**: $\det A = 0$. Este caso se presenta cuando $x = -|x|$, $y = -|y|$ y $x_i = -1$ para $i = 2, 3, \ldots, n$. Una vez más, utilizando el resultado (4.17) se obtiene que

$$\det A = 1 - |x| - |y|$$

   de donde

$$\det A = 0.$$

En consecuencia trabajaremos sólo con los tres primeros casos en los que la matriz es invertible.

Observación.

Así pues, dentro de las matrices DmPm1 de Tipo A, hemos obtenido otra subdivisión en 4 casos según el valor de $\det(A)$, $2|x|$, $2|y|$, 2 y 0. No obstante, si $|x| = |y|$, los dos primeros casos se confunden y ya veremos que se obtiene un resultado particular.

Además, el resultado del Teorema 4.4.1

$$\det(A) = 1 \pm |x| \pm |y|$$

es evidentemente válido para cualquier matriz DmPm1 de Tipo A que tenga la nueva posición no nula por encima de la diagonal, ya sea en cualquier columna de la primera fila, como en cualquiera otra fila puesto que las relaciones (4.13) se mantienen, es decir, las variables x e y están en la misma fila y el resto de entradas de la matriz M valen 1 y -1.

A continuación, prestemos nuestra atención al estudio de la matriz combinada de una matriz del tipo (4.12).

Teorema 4.4.2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible de la clase $\mathcal{H}_M$ y DmPm1 del Tipo A. Entonces su matriz combinada $C(A)$ es:*

- *GSDD*
- *H–matriz de la clase $\mathcal{H}_I$.*

Demostración. En primer lugar, recordemos que $C(A)$ es una H–matriz por el Corolario 3.3.4 dado en la página 65. Sin pérdida de generalidad, suponemos que A es de la forma (4.12) con las condiciones (4.13).

1. **Primer caso**: $\det A = 2|x|$.

   Vamos a calcular algunos elementos c_{ij} de la matriz combinada, $C(A)$.

   El adjunto del elemento a_{11} es igual a:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   que es una matriz triangular y por tanto $A_{11} = 1$. Luego, $c_{11} = \frac{1}{\det A}$.

   En vista de que $c_{n1} = 1 - c_{11}$, debido a la propiedad (1.5), resulta que

$$c_{n1} = 1 - \frac{1}{\det A} = \frac{2|x| - 1}{2|x|} = \frac{2|x| - (|x| + |y|)}{\det A}$$

   de donde

$$c_{n1} = \frac{|x| - |y|}{\det A}.$$

   Con el mismo razonamiento aplicado a la fila n-ésima se obtiene que

$$c_{nn} = 1 - c_{n1} = \frac{1}{\det A}$$

   Si se analiza entonces la última fila de la matriz $C(A)$ se observa que es SDD puesto que

$$|x| - |y| < 1$$

   dado que

$$|x| + |y| = 1.$$

   Por el Teorema 3.3.5 sabemos que $C(A)$ es diagonalmente dominante. Como ahora hemos comprobado que al menos una fila es SDD, podremos concluir que $C(A)$ es GSDD. Para llegar a esta conclusión debemos distinguir que $C(A)$ sea irreducible o no lo sea. Y para esto debemos calcular el resto de elementos no nulos de $C(A)$.

Si desarrollamos el determinante de A usando los adjuntos de la primera fila, tenemos que

$$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + (-1)^{1+n}a_{1n}A_{1n} = (1 + c_{12} + c_{1n})\det(A) \tag{4.18}$$

y, atendiendo a la expresión general del determinante de una matriz DmPm1 (4.16) y al caso que nos ocupa en el que $\det(A) = 1+|x|-|y|$, concluímos que $c_{12} = \frac{|x|}{\det(A)}$ y $c_{1n} = \frac{-|y|}{\det(A)}$.

Conocido c_{12} y aplicando la propiedad (1.5) a la columna 2, obtenemos que $c_{22} = \frac{1-|y|}{\det(A)}$. Aplicando la misma propiedad ahora a la fila 2 obtenemos el valor de c_{23}. Repitiendo este proceso con el resto de filas y columnas, concluímos que la matriz combinada de A posee la siguiente estructura:

$$C(A) = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & |x| & 0 & 0 & \dots & 0 & -|y| \\ 0 & 1-|y| & |x| & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-|y| & |x| \\ |x|-|y| & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

siendo $\det A = 2|x|$.

Notar que cualquier fila interior de $C(A)$ no es SDD porque

$$1 - |y| = |x|$$

y lo mismo pasa en la primera fila en donde

$$1 = |x| + |y|.$$

Nótese también que todos los elementos escritos distintos de 0 en (4.19) son no nulos excepto, a lo sumo, el elemento $c_{n1} = |x| - |y|$ que es nulo si y solo si $|x| = |y|$. Tenemos entonces ya distinguidos los casos irreducible y reducible.

- Si $|x| \neq |y|$, $C(A)$ es irreducible. Luego $C(A)$ es irreducible diagonal dominante con todos los elementos diagonales diferentes de cero. Esto mismo ocurre con la matriz comparación $\mathcal{M}(C(A))$ de $C(A)$. Entonces, por un resultado de Taussky [42] se tiene que $\mathcal{M}(C(A))$ es invertible. Por tanto, por la definición de H–matriz de la clase invertible (ver Definición 1.5.1 de la página 11) se deduce que $C(A)$ es una H–matriz de $\mathcal{H}_I$, que además es GSDD, consecuencia de la conclusión del Teorema 4.2.1.

- Si $|x| = |y|$, $C(A)$ es una matriz triangular con diagonal invertible. Entonces, tanto $C(A)$ como su matriz de comparación son matrices invertibles y, en consecuencia, $C(A) \in \mathcal{H}_I$.

2. **Segundo caso**: $\det A = 2|y|$.

   En este caso, siguiendo un análisis similar al del caso anterior, la matriz (4.19) se transforma en

$$C(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 1 & -|x| & 0 & \dots & 0 & |y| \\ 0 & 1+|y| & -|x| & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \dots & 1+|y| & -|x| \\ -|x|+|y| & 0 & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   y tanto la última fila, en donde se cumple que

$$-|x| + |y| < 1$$

   puesto que

$$|x| + |y| = 1$$

   y cualquier fila interior, en donde se cumple que

$$1 + |y| > |x|$$

   son SDD.

   Usando el mismo razonamiento que en primer caso se deduce que $C(A)$ está en $\mathcal{H}_I$ y es GSDD, tanto en el caso en que $C(A)$ es irreducible ($|x| \neq |y|$) como en el que es triangular ($|x| = |y|$).

   También se puede notar que la primera fila no es SDD porque

$$1 = |x| + |y|.$$

3. **Tercer caso**: $\det A = 2$. En este último caso la matriz (4.19) se transforma en

$$C(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 1 & |x| & 0 & 0 & \dots & 0 & |y| \\ 0 & 1+|y| & |x| & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+|y| & |x| \\ |x|+|y| & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, sólo las filas interiores son SDD porque

$$1 + |y| = |x|.$$

Razonando como en los dos casos anteriores se deduce que $C(A)$ es una H-matriz de $\mathcal{H}_I$ y por tanto es GSDD.

En la primera fila ocurre que

$$1 = |x| + |y|$$

y en la última fila también, por tanto estas filas no son SDD.

En este último caso, la matriz $C(A)$ es siempre irreducible.

□

El mismo resultado se puede obtener con matrices del tipo B. De hecho la demostración del siguiente resultado es totalmente similar al resultado de las matrices de tipo A.

Teorema 4.4.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible de la clase $\mathcal{H}_M$ y DmPm1 del Tipo B. Entonces su matriz combinada $C(A)$ es:*

- *GSDD*
- *H–matriz de la clase $\mathcal{H}_I$.*

Demostración. Con un proceso demostrativo similar al desarrollado para las matrices DmPm1 del Tipo A, se logra demostrar el enunciado de este teorema.

□

A continuación mostramos diversos ejemplos de matrices con más de un elemento adicional y observamos que los resultados son similares a los obtenidos con las matrices DmPm1 que contienen un sólo elemento adicional.

Ejemplo 4.4.2. *Consideremos la matriz*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 14 & -14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

en donde se han añadido 2 elementos adicionales que se ubican en la tercera fila.

La matriz combinada de A_1 es

$$C(A_1) = \begin{bmatrix} 0.571 & 0.429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.571 & 0.429 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.571 & -0.071 & 0.143 & 0.357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.071 & -0.071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.929 & 0.071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.571 & 0.429 \\ 0.429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.571 \end{bmatrix}.$$

Se observan las mismas regularidades que ya hemos detectado en las matrices DmPm1:

- La matriz combinada es DD y posee seis filas estrictamente diagonal dominantes (al menos una) y por tanto es una H–matriz.
- La fila en donde se ubican todos los elementos adicionales no es estrictamente diagonal dominante.

Ejemplo 4.4.3. *Considere la siguiente matriz*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 14 & 13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

que contiene 3 elementos adicionales ubicados en posiciones irregulares, tanto de la parte triangular inferior como superior y con todos sus elementos no negativos.

La matriz combinada de A_2 es

$$C(A_2) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.464 & 0 & 0 & 0 & 0.036 & 0 \\ 0 & 7.786 & -6.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.250 & 8.286 & -0.036 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.036 & -0.036 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.036 & -0.036 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Se ha obtenido un resultado similar: $C(A)$ es DD siendo la desigualdad estricta en 4 filas y equipotente en las otras 3 filas.

Ejemplo 4.4.4. *Creamos la matriz A_3 cambiando signos en la matriz A_2:*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 14 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

y ahora su matriz combinada es

$$C(A_3) = \begin{bmatrix} 0.935 & 0.030 & 0 & 0 & 0 & 0.035 & 0 \\ 0 & 0.502 & 0.498 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.467 & 0.535 & -0.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.002 & -0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.002 & -0.002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.032 & 0 & 0 & 0.967 & 0.065 \\ 0.065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.935 \end{bmatrix}$$

que es una matriz SDD.

Estos ejemplos muestran que con matrices obtenidas añadiendo más elementos no nulos a una matriz DmP, es decir, con más de un elemento no nulo en cualquier otra posición de una matriz DmP, se ha observado que el resultado es el mismo, es decir, su matriz de comparación es siempre de la clase $\mathcal{H}_I$. Para este tipo de matrices, digamos DmPmk, no se pueden dividir en sólo dos Tipos A y B puesto que los elementos adicionales pueden estar en ambas partes triangulares.

Conjetura Para matrices obtenidas añadiendo k términos no nulos a una matriz DmP, es decir, matrices DmPmk con $k = 1, 2, \ldots, n^2 - 2n$, conjeturamos que el resultado para $C(A)$ será el mismo, es decir, que todas las matrices DmPmk invertibles poseen matriz combinada que es H–matriz de la clase $\mathcal{H}_I$.

Además, dada una matriz irreducible con m elementos no nulos, si $m = 2n$, la matriz es DmP y su matriz combinada es singular de la clase mixta. En otro caso, si $m > 2n$ (porque, si no, sería reducible), la matriz sería DmPmk, siendo $k = m - 2n$ y, por tanto, su matriz combinada sería de la clase invertible.

En definitiva, obtendríamos el siguiente resultado general:

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una H–matriz irreducible y no singular, $C(A) \in \mathcal{H}_I$ excepto en el caso en que $A \in \mathcal{H}_M$ y A es DmP donde se obtiene que $C(A) \in \mathcal{H}_M$ y es singular puesto que siempre se obtiene la matriz combinada en la forma (4.9).

4.5. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado el carácter de H–matriz de la matriz comparación $C(A)$ de una H–matriz dada invertible. Detallamos a continuación las principales conclusiones.

En primer lugar se han dado resultados sobre M–matrices y H–matrices que pueden ser útiles para demostrar los resultados importantes. Se ha probado que los adjuntos de la matriz comparación de una H–matriz irreducible y diagonalmente dominante equipotente son todos iguales en cada fila (Teorema 4.2.2). Además se ha caracterizado que si la H–matriz irreducible es diagonalmente dominante generalizada equipotente entonces pertenece a la clase $\mathcal{H}_M$ y en consecuencia si es estrictamente diagonal dominante generalizada es equivalente a decir que está en la clase $\mathcal{H}_I$ (Teorema 4.2.4).

Como ya sabemos por el capítulo anterior que la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es de la clase invertible, se ha estudiado a continuación la matriz combinada de H–matrices invertibles e irreducibles de la clase mixta. Dos importantes casos se han descubierto.

En primer lugar, se ha estudiado la matriz combinada de las H–matrices denominadas DmP (Definición 4.3.1). Se ha visto que todas estas matrices, que son suma de una matriz diagonal invertible y de una matriz monomial irreducible con elementos diagonales nulos, tienen la propiedad que su matriz combinada es una H–matriz de la clase mixta y es singular e irreducible. Además siempre coincide con una permutación simétrica de la matriz (4.9), de acuerdo con el Teorema 4.3.1.

En segundo lugar, se ha estudiado la matriz combinada de una matriz del tipo DmPm1 (Definición 4.4.1). Estas matrices que sólo tienen un elemento no nulo más que las anteriores DmP, tienen una matriz de comparación totalmente diferente a las anteriores. Puede ser irreducible o no como se indica en el Ejemplo 4.4.1. Sin embargo, siempre la matriz comparación es invertible y GSDD, es decir, pertenece a la clase $\mathcal{H}_I$, de acuerdo con los Teoremas 4.4.2 y 4.4.3. Sin embargo, la estructura de cada una de ellas es diferente.

Por último, se conjetura que todas las H–matrices irreducibles de la clase mixta que no son DmP deben tener la propiedad que su matriz combinada es una H–matriz invertible de la clase $\mathcal{H}_I$.

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras

5.1. Conclusiones

Ya hemos agrupado las conclusiones de cada capítulo al final del mismo. Sin embargo, además, queremos resaltar aquí las conclusiones más relevantes de toda la memoria.

En el Capítulo 2 hemos presentado un algoritmo denominado BGS que determina el carácter de H–matriz o no, de una matriz dada. Para ello, obtiene primero la irreducibilidad o no de la matriz. En el segundo caso, construye los bloques diagonales irreducibles de la forma normal de Frobenius. Todo este algoritmo está basado en el Algoritmo ABGH dado en [11] que contiene tres partes y se ha concluido que la parte primera denotada por IRRS es computacionalmente menos costoso y mucho más sencilla que la parte correspondiente del ABGH. Además la segunda parte de nuestro algoritmo, denominada IDB, es también mucho más sencilla que la correspondiente parte del algoritmo anterior ABGH.

En el Capítulo 3 hemos estudiado la matriz combinada de las H–matrices invertibles. En particular, hemos demostrado que la matriz combinada de una H–matriz de la clase invertible es SDD y por tanto una H–matriz de la clase invertible (Teorema 3.3.1 y Corolario 3.3.1). Este resultado extiende de algún modo los resultados para M-matrices que recordamos en el Teorema 3.3.1. Respecto de las matrices invertibles de la clase mixta podemos decir que su matriz combinada es DD y una H–matriz, pero sin definir a que clase pertenece (Teorema 3.3.5 y Corolario 3.3.4).

En el Capítulo 4 se ha dado un paso importante en la determinación de a que clase de H–matriz pertenece la matriz combinada de una matriz invertible de la clase mixta. Para ello, se ha trabajado siempre con matrices irreducibles, pues en el caso reducible, se trabajaría con cada uno de los bloques irreducibles de la forma normal de Frobenius. En particular, se ha detectado que las matrices DmP definidas en 4.3.1 tienen todas ellas su matriz combinada singular y en la clase mixta (Teorema 4.3.1). Por otra parte, las matrices irreducibles que no son DmP y que hemos trabajado con el nombre de DmPm1 (ver Definición 4.4.1) tienen que sus matrices combinadas son SDD y por tanto H–matriz invertible de la clase invertible (Teorema 4.4.2 y Teorema 4.4.3). Parece ser, que todas las H–matrices irreducibles que no son DmP tienen sus matrices combinadas con esta propiedad, es decir, pertenecen a la clase invertible. Esta es la conjetura que dejamos en nuestro trabajo.

5.2. Líneas futuras

A continuación comentamos algunos problemas abiertos, relacionados con los temas y resultados de esta memoria, que se pueden estudiar en el futuro.

1.- En el Capítulo 2 se ha dado un algoritmo para determinar si una matriz dada, reducible o no, es H–matriz. Para ello, se determina primero la irreducibilidad y en el caso reducible se determinan los índices de filas y columnas que completan cada bloque irreducible de la forma normal de Frobenius. Sin embargo, dicha forma normal no se calcula en el algoritmo. Por ello, un problema a trabajar es adecuar nuestro algoritmo para que no sólo dé los bloques irreducibles sino que produzca como salida del mismo la forma normal de Frobenius.

2.- En los Capítulos 3 y 4 se han mostrado H–matrices cuya matriz combinada es no negativa y distinta de la identidad (ver por ejemplo el resultado del Teorema 4.9). Este teorema dice que la matriz combinada de una H–matriz de la clase mixta que es DmP es siempre una H–matriz de la clase mixta y singular. Además es una matriz fija sea cual sea la matriz original y es positiva. Por tanto, un problema abierto es estudiar que tipo de H–matrices tiene la propiedad de que su matriz combinada es no negativa. En este sentido, cabe primero estudiar las H–matrices de la clase invertible, y luego tratar de extender estos resultados a las H–matrices invertibles de la clase mixta.

3.- Los resultados del Capítulo 4 admiten diversas extensiones. Por ejemplo, estudiar la matriz combinada de H–matrices en el campo complejo.

4.- El resultado de los Teoremas 4.4.2 y 4.4.3 para matrices DmPm1 se puede extender a las matrices con más elementos no nulos como se ha conjeturado. Por tanto, una línea de trabajo es demostrar la conjetura del Capítulo 4.

Apéndice A

Programación en Matlab de algunos algoritmos

En este Apéndice incluimos los listados en formato Matlab de algunos algoritmos estudiados y propuestos en el Capítulo 2 de esta memoria. Todos ellos han sido comprobados y utilizados para realizar los experimentos a modo de ejemplo del mismo capítulo. Para alguno de ellos se incluyen comentarios sobre las variables y los cálculos que allí se realizan.

No se ha realizado una programación literal de cada uno de ellos sino que se ha buscado alguna manera más simple, rápida o clara de obtener los resultados. Aún así, la conclusión que obtienen es similar a la que se obtendría con una programación más ajustada a la propuesta realizada en los trabajos por los autores de cada algoritmo.

En la Sección A.1 se dan los listados de los algoritmos ya propuestos con anterioridad. En particular se recogen los programas correspondientes a los algoritmos de Li [31] en la Sección A.1.1, de Alanelli y Hadjidimos [1] en la Sección A.1.2 y de Bru, Giménez y Hadjidimos [11] en la Sección A.1.3. Este último realiza llamadas a otros subprogramas de los cuales indicamos también la programación completa en formato Matlab.

En la Sección A.2 se da el listado del nuevo algoritmo propuesto en el Capítulo 2, el algoritmo BGS. Este algoritmo también llama a otros subprogramas mencionados allí como partes 1, 2 y 3 del algoritmo completo, los algoritmos IRRS, IDB y CHBDI, que están completamente desarrollados, junto con una operación auxiliar, programa ERASE que también desarrollamos. No obstante, el algoritmo CHBDI llama al programa ModAH (ya incluido en la Sección A.1.3) que hemos modificado para que pueda ser utilizado tanto para el algoritmo previo ABGH como para el nuevo algoritmo

BGS.

A.1. Algunos algoritmos anteriores

Entre los algoritmos para la determinación de H–matrices analizados en el Capítulo 2 hemos seleccionado tres que son de diferente ámbito.

El primero es el de Lei Li, propuesto en [31]. Sus resultados no son especialmente atrayentes pues no es útil, en general, ni para matrices reducibles, ni para matrices con diagonal singular, ni para posibles H–matrices de la clase Mixta. Pero contiene un parámetro adicional ϵ que puede dar lugar a ligeras ventajas en la reducción del número de iteraciones para alcanzar la conclusión sobre el carácter de una matriz dada.

El segundo es el propuesto por Alanelli y Hadjidimos en [1] que es el que tiene garantizada la convergencia para matrices irreducibles con diagonal no singular. Hemos modificado ligeramente las conclusiones del mismo pues, cuando la matriz dada está en la clase $\mathcal{H}_M$, el algoritmo puede concluirlo.

El tercero es el propuesto por Bru, Giménez y Hadjidimos en [11] que es el primero que consigue obtener, no sólo el carácter de H–matriz, sino también la clase a la que pertenece, incluyendo también la determinación de la clase para H–matrices. Es también el primero que puede obtener resultados para cualquier matriz cuadrada dada, aunque sea reducible y/o tenga diagonal singular.

Los programas correspondientes a los tres algoritmos seleccionados se indican a continuación.

A.1.1. Algoritmo de Li (2002), [31]

```
function [es,cont,MD]=li2002(A,ep,maxit)
n=size(A,1); D=diag(A); fin=0; es=-1; cont=0; MD=ones(n,1);
if any(D==0)
    es=3;                          % 'A no tiene diagonal invertible'
end
while (es<0) and (cont<maxit)
    t=0;
    for i=1:n
```

```
    S(i)=sum(abs(A(i,:)))-(abs(A(i,i)));
    if abs(A(i,i))>S(i)
        t=t+1;
    end
  end
  cont=cont+1;
  if t==0
    es=0;                          %'A no tiene ninguna fila SDD'
  elseif t==n
    es=1;                          % 'A es una H-matriz GSDD'
  else
    for i=1:n
        D(i)=(S(i)+ep)/(abs(A(i,i))+ep); A(:,i)=A(:,i)*D(i);
    end
    MD=MD.*D;
  end
end
if cont>=maxit
  'increase maxit'
end
```

El proceso necesita las variables entrada: A es la matriz a estudiar, 'ep' es el parámetro particular de este algoritmo $\epsilon > 0$ (habitualmente entre 0 y 1) y 'maxit' que es un parámetro de control para parar el algoritmo si con un máximo de iteraciones no se alcanza el fin del programa. Las variables de salida consideradas son: 'es' que en formato numérico indica el carácter de la matriz A, concretamente, es=1 significa que A es H–matriz, es=0 significa que no lo es y es=-1 significa que el proceso no ha obtenido el carácter; además, MD es un vector v de forma que, creando la matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(v)$, se tiene que AD es SDD o no es DD estricta en ninguna de sus filas según que es=1 o es=0 respectivamente; cont es un contador de iteraciones para saber en qué iteración se obtiene el resultado.

A.1.2. Algoritmo de Alanelli y Hadjidimos: AH1, [1]

```
function [tmin,tmax,it,df]=AH1(A, maxit)
n=size(A,1); it=1; df=ones(n,1);
if (1-all(diag(A)))
    fin=1; tmin=0; tmax=Inf; it=0; df=[];            % Diagonal singular
end
if (fin == 0)                         % (Creamos la matriz de Jacobi de M(A))
    J=abs(A); d=diag(J); J=diag(d)\ J;               % (D_A^{-1}A)
    for i=1:n
      J(i,i)=0;                                      % (J = D_A^{-1}A - I)
    end
end
while (fin == 0) and (it <maxit+1)
    t=sum(J,2); tmin=min(t); tmax=max(t);
    if tmin >1
      fin=1;                          % mín(t) > 1 ⇒ ρ(J) > 1
    elseif tmax <1
      fin=1;                          % máx(t) < 1 ⇒ ρ(J) < 1
    elseif tmin==tmax
      fin=1;      % mín(t) = máx(t) ⇒ ρ(J) = 1 “to the Matlab precision”
    else
      d=(1+t)/(1+tmax);J=diag(d)\ J*diag(d); % (J = D^{-1}JD)
      it=it+1; df=df.*d;
    end
end
if (it==maxit+1) and (fin ==0)
    dd=[];df=[];                      % 'Inconclusive: increase maxit'
end
```

A.1.3. Algoritmo ABGH, [11]

```
function [Cl,IH,MH,SH,NH,irr,nb,IB,SB,ZD,inh]=ABGH(A,tol,it)
n=size(A,1); IH=0; MH=0; SH=0; Cl=-1;nb=-1;IB=-1;SB=-1;
[irr,B,ZD,nnde,NH,inh]=IRR(A);
if NH==1
    Cl=0.1;            % A ∈ nH^0_N: ∃F_ii irreducible con diagonal singular
elseif irr==0
    [perm,nb,SB,IB,SH,IH]=BD(B,ZD,nnde);
elseif irr==1
    nb=1; IB=[1:n]; SB=n;
end
if NH==-1
    [NH,MH,IH]=HC(A,tol,it,nb,IB,SB,nnde,SH,IH,NH);
end
if NH==-1
    'algún bloque no se ha definido, incremente it'
elseif (NH==3) and (SH==0)
    Cl=0.3;            % A ∈ nH^∅: para algún bloque ρ(J) > 1
elseif (NH==3) and (SH>0)
    Cl=0.6;            % A ∈ nH^0_S: para algún bloque ρ(J) > 1 y ∃F_jj = [0]
elseif SH>0
    Cl=1;              % A ∈ H_S
elseif MH>0
    Cl=2;              % A ∈ H_M
elseif NH==0
    Cl=3;              % A ∈ H_I
end
```

Este programa llama a los tres siguientes programas:

A.1.4. Algoritmo IRR, [11]

```
function [irr,B,ZD,nnde,NH,inh]=IRR(A)
n=size(A,1); ZD=find(diag(A)==0); nnde=size(ZD,1); irr=-1; NH=-1;
inh=[];
for j=1:nnde
    i=ZD(j);
    if any(A(i,find(A(:,i))))
      NH=1; B=0; inh=[inh,i];                % A es no-H–matriz tipo 1
    end
end
if (NH==-1) and (irr==-1)
    C=spones(spones(A)+speye(n)); q=[0,nnz(C)];
end
while (NH==-1) and (irr==-1)
     B=C*C; q=[q(2),nnz(B)];
    if any(diag(B(ZD,ZD))>1)
      NH=1; inh=ZD(find(diag(B(ZD,ZD))>1)); B=0;
    end
    if q(2)==n^2
      irr=1;                                 % A es IRREDUCIBLE
      if nnde>0
           NH=1; B=0; inh=ZD;
      end
    elseif q(2)==q(1)
      irr=0;                                 % A es REDUCIBLE
    else
      C=spones(B);
    end
end
```

A.1.5. Algoritmo BD, [11]

```
function [perm,nb,SB,IB,SH,IH]=BD(B,ZD,nnde)
n=size(B,1); DB=diag(B); nb=0; perm=[1:n]; SB=zeros(n,1); lp=1;
IB=zeros(n,1); SH=0; IH=0;                  % PRIMERO LOS DE ZD:
if nnde>0
    q=nnde; nb=q; lp=q+1; SH=q; DB(ZD)=0;
    for j=1:q
      i=ZD(j); perm=Prt(j,i,perm); SB(j)=1; IB(j,1)=i;
    end
end                                         % LUEGO LOS DE DIMENSION 1:
unos=find(DB(perm)==1); q=size(unos,1);
if q>0
    for j=1:q
      i=unos(j); perm=Prt(lp,i,perm); SB(lp)=1; IB(lp,1)=perm(lp);
lp=lp+1;
    end
    nb=nb+q; IH=q;
end                                         % Y AHORA EL RESTO:
B=spones(B); E=B+B';
while lp<n
    j=perm(lp); nb=nb+1; sb=DB(j); SB(nb)=sb;
    if lp+sb==n+1              % último bloque, no hace falta permutar
      lp=n; IB(nb,1:sb)=perm(end-sb+1:end);
    else
      w=find(E(j,perm)==2); IB(nb,1)=j; lp=lp+1;
      for i=2:sb
           k=w(i); perm=Prt(lp,k,perm); IB(nb,i)=perm(lp);lp=lp+1;
      end
    end
end
```

Este algoritmo llama al programa Prt que intercambia dos posiciones de un vector y que describimos a continuación.

Programa auxiliar: Prt

```
function v=Prt(i,j,v)
k=v(i);v(i)=v(j);v(j)=k;
```

A.1.6. Algoritmo HC, [11]

```
function [NH,MH,IH]=HC(A,tol,it,nb,IB,SB,SH,IH,NH)
MH=0;i=SH+IH+1;
if SH+IH==nb
    NH=0;                          % 'La Fnf de A es triangular'
end
while (NH==-1) and ( i<nb+1)
    if SB(i)>1
      I=IB(i,1:SB(i)); F=A(I,I); r=ModAH(F,it,tol);
      if r>1
          NH=3;
      elseif r<1
          IH=IH+1; i=i+1;
      elseif r==1
          MH=MH+1; i=i+1;
      else
          'Aumenta iteraciones: el bloque:',i,'no está determinado',i=nb+1;
      end
    end
end
if SH+IH+MH==nb
    NH=0;                          % Todo son H–matrices
end
```

Este algoritmo llama al programa ModAH (versión reducida del algoritmo AH1 de [1] pues se aplica sobre bloques diagonales que son irreducibles y sin elementos diagonales nulos) que describimos a continuación.

A.1.7. Algoritmo ModAH

```
function r=ModAH(F,Maxit,Tol)
r=-1; it=0; n=size(F,1);
J=abs(diag(diag(F))\F);
for i=1:n
    J(i,i)=0;                              % (J = D_A^{-1} A - I)
end
while (r<0) and (it<Maxit)
    S=sum(J,2); m=min(S); M=max(S); it=it+1;
    if m>1
      r=m;              % 'este bloque es no-H–matriz'
    elseif M<1
      r=M;              % 'este bloque es H–matriz de la clase Invertible'
    elseif M-m<Tol
      r=1;              % 'este bloque es H–matriz de la clase Mixta'
    else
      D=diag(1+S)/(1+M); J=D\J*D;
    end
end
```

A.2. Algoritmo propuesto: BGS

```
function [Cl,IH,MH,SH,irr,nb,IB,SB,ZD,RZD]=BGS(A,Tol,It)
n=size(A,1); IH=0; MH=0; SH=0; Cl=-1; nb=-1; IB=-1; SB=-1;
[irr,B,ZD,RZD]=IRRS(A);
if irr==0                                      % A es reducible
    [nb,IB,SB]=IDB(B,ZD);
elseif irr==1                                  % A es irreducible
    nb=1; IB=[1:n], SB=n;
end
[NH,SH,MH,IH]=CHBDI(A,Tol,It,nb,IB,SB,ZD,RZD);
if NH==-1
    'algún bloque no se ha definido, incremente It'
elseif NH==1         % Este caso corresponde a que RZD no está vacío
    Cl=0.1;          % A tiene un bloque irreducible con diagonal singular
elseif (NH==3) and (SH==0)
    Cl=0.2;          % A tiene diagonal invertible y un bloque con ρ(J) > 1
elseif (NH==3) and (SH>0)
    Cl=0.3;          % A tiene un bloque con ρ(J) > 1 y un bloque nulo
elseif SH>0
    Cl=1.3;          % A es H–matriz pero tiene un bloque nulo
elseif MH>0
    Cl=1.2;          % A es H–matriz pero tiene un bloque en la clase Mixta
else
    Cl=1.1;          % A y todos los bloques están en la clase Invertible
end
```

Este programa llama al programa ModAH ya descrito y a los siguientes nuevos programas:

A.2.1. Algoritmo IRRS

```
function [irr,B,ZD,RZD]=IRRS(A)
n=size(A,1); B=spones(A); ZD=find(diag(A)==0)'; RZD=[];
irr=0; red=0; p=nnz(B); s=size(ZD,2); r=0;
while irr+red<1
    q=p;
    for i=1:n
      for j=1:n
           if (B(i,j)==0) and (any(B(i,find(B(:,j)'))))
                B(i,j)=1;
                if i==j
                     RZD=[RZD,i]; ZD=erase(ZD,i); s=s-1; r=r+1;
                else
                     p=p+1;
                end
           end
      end
    end
    if p+s+r==n^2
      irr=1; B=0;                                   % A es irreducible
    elseif q==p
      red=1;                                        % A es reducible (irr=0)
    end
end
```

A.2.2. Algoritmo IDB

```
function [nb,IB,SB]=IDB(B,ZD)
n=size(B,1); nnde=size(ZD,2); nb=0; SB=0; IB=0; IN=[1:n];
if nnde>0                          % Primero los bloques nulos 1x1:
    IN=erase(IN,ZD); IB(1:nnde)=ZD; SB(1:nnde)=1;
    nb=nnde; B(ZD,:)=0; B(:,ZD)=0;
end                         % Para el resto de bloques se calcula sim(B):
E=B+B'; sim=E-spones(E); suma=sum(sim,1);
while size(IN,2)>0
    j=IN(1); nb=nb+1; SB(nb)=suma(j); IB(nb,1:suma(j))=find(sim(j,:));
    IN=erase(IN,IB(nb,1:suma(j)));
end
```

Nota: este algoritmo remplaza el Algoritmo BD de ABGH. Allí, la matriz B proviene del Algoritmo IRR y corresponde al último producto B^2 que ya no ha aumentado el número de elementos no nulos. Por esa razón, el valor de los elementos diagonales de B coincide con el número de elementos simétricamente no nulos de A y, por tanto, indica la dimensión del bloque diagonal al que pertenece ese elemento diagonal. Por el contrario, en la matriz B que recibe este nuevo algoritmo el valor de todos sus elementos no nulos es exactamente 1. Así, para crear la matriz $sim(B)$ realizamos la suma $B + B^T$ de forma que los elementos simétricamente no nulos valdrán 2 y el resto 1 ó 0, y, al hacer la resta E-spones(E), se obtiene la matriz $sim(B)$ buscada. Para obtener la dimensión de los bloques basta entonces con sumar las filas de la matriz $sim(B)$.

Los dos algoritmos anteriores, IRRS e IDB, llaman a un programa auxiliar, ERASE, que borra valores particulares de un vector de índices como describimos a continuación.

Programa auxiliar: ERASE

```
function v=ERASE(v,w)
for i=1:size(w,2)
    k=find(v==w(i));v=[v(1:k-1),v(k+1:end)];
end
```

A.2.3. Algoritmo CHBDI

```
function [NH,SH,MH,IH]=CHBDI(A,tol,it,nb,IB,SB,ZD,RZD)
if size(RZD,2)>0
   NH=1; i=nb+2; SH=[]; MH=[]; IH=[];
else
   nnde=size(ZD,2); i=nnde+1; SH=nnde; NH=0; MH=0; IH=0;
end
while (NH==0) and (i<nb+1)
   if SB(i)==1
     IH=IH+1; i=i+1;
   else
     I=IB(i,1:SB(i)); F=A(I,I); r=ModAH(F,it,tol);
     if r>1
          NH=3;
     elseif r<1
          IH=IH+1; i=i+1;
     elseif r==1
          MH=MH+1; i=i+1;
     else
          'Aumenta iteraciones: el bloque:',i,'no está determinado'; NH=-1;
     end
   end
end
```

Nota: Este último algoritmo es básicamente similar al Algoritmo HC usado en ABGH, pero debemos realizar uno nuevo porque algunas variables de entrada y de salida no coinciden: aqcarácter se determina que no es H–matriz de tipo 1 analizando si el conjunto RZD no es vacío y se catalogan como H–matrices en $\mathcal{H}_S$ o $\mathcal{H}_I$ los bloques de dimensión 1, mientras que en ABGH las no H–matrices de tipo 1 se catalogan en el algoritmo IRR y las de dimensión 1 en el algoritmo BD. Para el resto de bloques diagonales irreducibles, ambos algoritmos realizan el mismo proceso.

Bibliografía

[1] M. Alanelli y A. Hadjidimos. A new iterative criterion for H–matrices. *SIAM Journal Matrix Anal. Appl.*, 99:160–176, 2006.

[2] M. Alanelli y A. Hadjidimos. A new iterative criterion for H–matrices: The reducible case. *Linear Algebra and its Applications*, 428:2761–2777, 2008.

[3] A. Berman y R. Plemmons. *Nonnegative matrices in Mathematical Sciences*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[4] E. Bristol. Measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-11:133–134, 1966.

[5] R. Bru, C. Corral, I. Giménez y J. Mas. Classes of general H–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 429:2358–2366, 2008.

[6] R. Bru, C. Corral, I. Giménez y J. Mas. Schur complement of general H–matrices. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 16:935–947, 2009.

[7] R. Bru, L. Cvetković, V. Kostić y F. Pedroche. Characterization of alpha 1 and alpha 2-matrices. *Central European Journal of Mathematics*, 8(1):32–40, 2010.

[8] R. Bru, M. Gassó, I. Giménez y M. Santana. Nonnegative combined matrices. *Journal of Applied Mathematics*, 2014:5 pages, Article ID 182354, 2014.

[9] R. Bru, M. Gassó, I. Giménez y M. Santana. Combined matrices of sign regular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, DOI: 10.1016/j.laa.2014.12.010, 2015.

[10] R. Bru, M. Gassó, I. Giménez y J. Scott. The Hadamard product of a nonsingular general H–matrix and its inverse transpose is diagonaly dominant. *Journal of Applied Mathematics*, 2015:6 pages, Article ID 264680, 2015.

[11] R. Bru, I. Giménez y A. Hadjidimos. Is A in $C^{n\times n}$ a general H–matrix? *Linear Algebra and its Applications*, 436:364–380, 2012.

[12] L. Cvetković. H-matrix theory vs. eigenvalue localization. *Numerical Algorithms*, 42:229–245, 2006.

[13] L. Cvetkovic, V. Kostic y S. Rauski. A new subclass of H–matrices. *Applied Mathematics and Computation*, 208:206–210, 2009.

[14] M. Fiedler. Relations between the diagonal entries of an M–matrix and of its inverse (Russian). *Matematicko-Fyzikalny Casopis*, 12:123–128, 1962.

[15] M. Fiedler. Relations between the diagonal elements of two mutually inverse positive definite matrices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 14 (89):39–51, 1964.

[16] M. Fiedler. Notes on Hilbert and Cauchy matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 432:351–356, 2010.

[17] M. Fiedler y L. Markham. An inequality for the Hadamard product of an M–matrix and an inverse M–matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 101:1–8, 1988.

[18] M. Fiedler y T.L. Markham. Combined matrices in special classes of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 435:1945–1955, 2011.

[19] M. Fiedler y V. Ptak. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 12 (87):382–400, 1962.

[20] M. Fiedler y V. Ptak. Diagonally dominant matrices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 17 (92):420–433, 1967.

[21] Y. Gao. Criteria of the generalized diagonally dominant and nonsingular matrices (ii). *J. Engrg. Math. 3:12–17*, 248:339–353, 1988.

[22] Y. Gao y X. Wang. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 169:257–268, 1992.

[23] Y. Gao y X. Wang. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M–matrices. II. *Linear Algebra and its Applications*, 248:339–353, 1996.

[24] M. Harada, M. Usui y H. Niki. An extension of the criteria for generalized diagonally dominant matrices. *Int. J. Comp. Math.*, 60:115–119, 1996.

[25] R.A. Horn y C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[26] R.A. Horn y C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[27] C.R. Johnson. A Hadamard product involving M–matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 4:261–264, 1977.

[28] C.R. Johnson y H. Shapiro. Mathematical aspects of the relative gain array. *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*, 7:627–644, 1986.

[29] T. Ko, H. Ni, H. Sa y Y. Ga. An extension of the criteria for generalized diagonally dominant matrices. *J. Comp. Appl. Math.*, 115:349–355, 2000.

[30] B. Li, L. Li, M. Harada, H. Niki y M. Tsatsomeros. An iterative criterion for h–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 271:179–190, 1998.

[31] L. Li. On the iterative criterion for generalized diagonally dominant matrices. *SIAM Journal Matrix Anal. Appl.*, 24:17–24, 2002.

[32] L. Li, H. Niki y M. Sasanabe. A non-parameter criterion for generalized diagonally dominant matrices. *Int. J. Comp. Math.*, 71:267–275, 1999.

[33] M.S. Lynn. On the Schur product of H–matrices and non-negative matrices, and related inequalities. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 60(3):425–431, 1964.

[34] T.J. McAvoy. Some results on dynamic interaction analysis of complex control system. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 22:42–49, 1983.

[35] K. Ojiro, H. Ni y M. Usui. A new criterion for H–matrices. *J. Comp. Appl. Math.*, 150:293–302, 2003.

[36] A. Ostrowski. Uber die determinanten mit uberwiegender hauptdiagonale. *Comment. Math. Helv.*, 10:69–96, 1937.

[37] A. Ostrowski. Sur les conditions générales pour la régularité des matrices. *Rend. Mat. Appl. ser. V*, X:156–168, 1951.

[38] A. Ostrowski. Note on bounds for some determinants. *Duke Math. Journal*, XXII:95–102, 1955.

[39] H. Schneider. An inequality for latent roots applied to determinants with dominant principal diagonal. *J. Lond. Math. Soc.*, 28:8–20, 1953.

[40] J. Scott, R. Bru, M. Gassó y I. Giménez. Iterative determination of H–matrix character and reducibility. *Proceedings del XIV Congreso CEDYA 2015*, 1:751–756, 2015.

[41] S. Skogestad y M. Morari. Variable selection for decentralized control. *Modeling, Identification and Control*, 13:113–125, 1992.

[42] O. Taussky. A recurring theorem on determinants. *American Mathematical Monthly*, 56:672–676, 1949.

[43] R. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[44] R. Varga. On recurring theorems on diagonal dominance. *Linear Algebra and its Applications*, 13:1–9, 1996.

[45] R. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Springer Heidelberg, London New York, 2000.

[46] J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1962.

[47] C. Zhang, C. Xu y Y. Li. The eigenvalue distribution on schur complements of h–matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 422:250–264, 2007.