UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dinámica y caos de operadores desplazamiento

Tesis Doctoral

Presentada por:
Víctor José Galán Céspedes

Dirigida por:
Félix Martínez & Alfred Peris

Diciembre 2015

Don Félix Martínez Jiménez, Profesor Titular de la Universitat Politècnica de Valencia, y Don Alfred Peris Manguillot, Catedrático de Universidad de la Universitat Politècnica de València

CERTIFICAN

> que la presente memoria "Dinámica y caos de operadores desplazamiento" ha sido realizada bajo nuestra dirección por Víctor José Galán Céspedes y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.
>
> Y para que así conste en cumplimiento de la legislación vigente presentamos y apadrinamos ante la Escuela de Doctorado de la Universitat Politècnica de València la referida tesis firmando el presente certificado.

Valencia, diciembre de 2015

Los directores:

Félix Martínez Jiménez　　　　Alfred Peris Manguillot

Resumen

Durante el último cuarto de siglo, el estudio de operadores hipercíclicos y caóticos viene siendo un área de investigación muy activa y se ha obtenido un número considerable de resultados profundos e interesantes. También se han establecido relaciones de esta teoría con otras áreas de las matemáticas como la teoría ergódica, la dinámica compleja, la teoría de operadores, la teoría de semigrupos y aplicaciones a ecuaciones diferenciales por ejemplo. Muestra del desarrollo alcanzado es el hecho de que en el año 2000 se introdujo la nueva clasificación 47A16 de la Mathematics Subject Classification (MSC 2000) "Vectores cíclicos e hipercíclicos", cuya descripción ha cambiado en MSC 2010 a "Vectores cíclicos, operadores hipercíclicos y caóticos".

Un operador lineal y continuo definido en un espacio de Banach es hipercíclico si admite un vector con órbita densa, es decir, si existe un vector de manera que el conjunto de todas sus iteraciones a través del operador es denso en el espacio. La existencia de órbitas densas está íntimamente relacionada con el concepto dinámico conocido como transitividad topológica ya que, toda aplicación continua definida en un espacio métrico completo sin puntos aislados es topológicamente transitiva, sí y solo si, admite puntos con órbita densa. Si además, el operador admite un conjunto denso de puntos periódicos, entonces se dice que es caótico en el sentido de Devaney.

El objetivo general de esta tesis es continuar con el estudio de la dinámica caótica de los operadores desplazamiento a izquierda (operadores backward shift en inglés) definidos en espacios de sucesiones.

Esta memoria se ha estructurado en cuatro capítulos. Los dos pri-

meros proporcionan las definiciones, notaciones y técnicas básicas que se van a utilizar. Los dos últimos capítulos presentan los nuevos resultados que se han obtenido. Más detalladamente:

- En el primer capítulo se incluyen algunas definiciones y resultados, de carácter preliminar, que serán útiles en el desarrollo de la memoria. Se establecen también las notaciones a utilizar. En la primera parte del capítulo se recuerdan los conceptos básicos de dinámica topológica y, posteriormente, se describe el contexto de trabajo; que como ya se ha mencionado, será lineal e infinito dimensional.

- El Capítulo 2 está dedicado por completo al estudio de la dinámica básica del operador desplazamiento, en concreto, a la hiperciclicidad y el caos de dicho operador en espacios de sucesiones. El operador desplazamiento es sin duda el más utilizado a la hora de estudiar propiedades dinámicas. Aunque este capítulo no contiene resultados nuevos, parece procedente incluir aquí, de manera ordenada, los resultados y demostraciones básicas de la dinámica del operador desplazamiento, ya que ilustran las técnicas que se van a utilizar en capítulos posteriores.

- En el Capítulo 3 se estudian propiedades de recurrencia para operadores desplazamiento en espacios de sucesiones. Primero se prueba que el operador desplazamiento a izquierda es recurrente si y sólo si es hipercíclico, es decir, si es topológicamente transitivo. Se caracterizan también operadores desplazamiento que admiten puntos producto recurrentes no nulos como caóticos en el sentido de Devaney. Se dan ejemplos de operadores desplazamiento ponderados que admiten puntos que son recurrentes y distales, pero no producto recurrentes, en contraste con la dinámica en conjuntos compactos. Se observa también que existen operadores con vectores que son producto recurrente pero que tienen órbita no acotada. Se finaliza el capítulo generalizando los resultados probados para operadores desplazamiento definidos en espacios de Banach de sucesiones a un contexto más general, en concreto a F-espacios o espacios de Fréchet de sucesiones.

Los resultados de este capítulo han sido publicados en la revista de investigación Applied Mathematics & Information Sciences [26].

- En el Capítulo 4 se caracteriza caos para operadores de la forma $\varphi(B)$, definidos en espacios de sucesiones de Banach, donde $\varphi(z) = (az+b)/(cz+d)$ es una Transformación Fraccional Lineal y B es el operador desplazamiento a izquierda usual. Las caracterizaciones que se obtienen son "computables" ya que se expresan como condiciones que involucran sólo los cuatro números complejos que definen la transformación φ.

  Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación en la revista de investigación Topology and its Applications [37].

Summary

During the last quarter century, the study of hypercyclic and chaotic operators has been a very active area of research and there have been a considerable number of deep and interesting results. They have also been established relationships of this theory to other areas of mathematics such as ergodic theory, complex dynamics, operator theory, semigroups and applications to differential equations, for example. In fact, the development achieved is such that in 2000 the new classification 47A16 the Mathematics Subject Classification (MSC 2000) "cyclic and hypercyclic vectors" was introduced and,not very much later, the description was changed in MSC 2010 to "cyclic vectors, hypercyclic and chaotic operators".

A continuous and linear operator defined on a Banach space is hipercyclic if it supports a dense orbit, that is, if there exists a vector such that the set of all its iterations through the operator is dense in the space. The existence of dense orbits is closely related to the dynamic concept known as topological transitivity because, every continuous mapping defined on a complete metric space without isolated points is topologically transitive if and only if it admits points with dense orbit. Furthermore, if the operator supports a dense set of periodic points, then it is said to be chaotic in the sense of Devaney.

The overall objective of this PhD thesis is to continue the study of chaotic dynamics of backward shift operators defined on sequence spaces.

This PhD thesis has been structured into four chapters. The first two provide definitions, notations and basic techniques that will be used. The last two chapters present the new results we have obtained. More in

detail:

- In the first chapter some preliminary definitions and results that will be useful in the development of later chapters are included. Notations to use are also set. In the first part of the chapter some basics of topological dynamics are presented. In the second part, the context of work is clearly stated. As already mentioned, the framework will be linear and infinite dimensional.

- Chapter 2 is devoted entirely to the study of the basic dynamics of the backward shift operator, specifically to the hypercyclicity and chaos of that operator defined on sequence spaces. The backward shift operator is undoubtedly the most widely used one when studying dynamic properties in this linear setting. Although this chapter does not contain new results, it seems appropriate to be included here, in an orderly manner, the results and basic proofs of the dynamic of shift operators, since it illustrates the techniques to be used in subsequent chapters.

- In Chapter 3, we study product recurrence properties for weighted backward shifts on sequence spaces. The backward shifts that have non-zero product recurrent points are characterized as Devaney chaotic shifts. We also give an example of weighted shift that admits points which are recurrent and distal, but not product recurrent, in contrast with the dynamics on compact sets. An example of a product recurrent point with unbounded orbit is also provided. We finish this chapter generalizing the above results to the more general setting of F-spaces or Fréchet spaces of sequences.

  The results of this chapter have been accepted for publication in the research journal Applied Mathematics & Information Sciences [26].

- In Chapter 4, we characterize chaos for operators of the form $\varphi(B)$, when defined on Banach sequence spaces, where $\varphi(z) = (az + b)/(cz + d)$ is a Linear Fractional Transformation and B is the usual backward shift operator. The characterizations we obtained

are “computable” since they are expressed as conditions involving only the four complex numbers that define the transformation φ.

The results of this chapter have been accepted for publication in the research journal Topology and its Applications [37].

Resum

Durant l'última cambra de segle, l'estudi d'operadors hipercíclis i caòtics és un àrea de recerca molt activa i s'han obtingut un nombre considerable de resultats profunds i interessants. També s'han establit relacions d'aquesta teoria amb altres àrees de les matemàtiques com la teoria ergòdica, la dinàmica complexa, la teoria d'operadors, teoria de semigrups i aplicacions a equacions diferencials per exemple. Mostra del desenvolupament aconseguit és el fet que l'any 2000 es va introduir la nova classificació 47A16 de la Mathematics Subject Classification (*MSC 2000) "Vectors cíclics i hipercíclicos", la descripció dels quals ha canviat en MSC 2010 a "Vectors cíclics, operadors hipercíclics i caòtics".

Un operador lineal i continu definit en un espai de Banach és hipercíclic si admet un vector amb òrbita densa, és a dir, si existeix un vector de manera que el conjunt de totes les seues iteracions a través de l'operador és dens en l'espai. L'existència de òrbitas denses està íntimament relacionada amb el concepte dinàmic conegut com transitivitat topològica ja que, tota aplicació contínua definida en un espai mètric complet sense punts aïllats és topològicament transitiva, sí i solament si, admet punts amb òrbita densa. Si a més, l'operador admet un conjunt dens de punts periòdics, llavors es diu que és caòtic en el sentit de Devaney.

L'objectiu general d'aquesta tesi és continuar amb l'estudi de la dinàmica caòtica dels operadors desplaçament a esquerra (operadors backward shift en anglès) definits en espais de successions.

Aquesta memòria s'ha estructurat en quatre capítols. Els dos primers proporcionen les definicions, notacions i tècniques bàsiques que es van a utilitzar. Els dos últims capítols presenten els nous resultats que hem

obtingut. Més detalladament:

- En el primer capítol s'inclouen algunes definicions i resultats, de caràcter preliminar, que seran útils en el desenvolupament de la memòria. S'estableixen també les notacions a utilitzar. En la primera part del capítol es recorden els conceptes bàsics de dinàmica topològica que anem a utilitzen i, posteriorment, es descriu el context de treball, que com ja hem esmentat, serà lineal i infinit dimensional.

- El Capítol 2 està dedicat per complet a l'estudi de la dinàmica bàsica de l'operador desplaçament, en concret a la hiperciclicitat i el caos d'aquest operador en espais de successions. L'operador desplaçament és sens dubte el més utilitzat a l'hora d'estudiar propietats dinàmiques. Encara que aquest capítol no conté resultats nous, sembla procedent incloure ací, de manera ordenada, els resultats i demostracions bàsiques de la dinàmica de l'operador desplaçament, ja que il·lustren les tècniques que es van a utilitzar en capítols posteriors.

- En el Capítol 3 s'estudien propietats de recurrència per a operadors desplaçament en espais de successions. Primer es prova que l'operador desplaçament a esquerra és recurrent si i només si és hipercíclic, és a dir, si és topològicament transitiu. Es caracteritzen també operadors desplaçament que admeten punts producte recurrents no nuls com a caòtics en el sentit de Devaney. Es donen exemples d'operadors desplaçament ponderats que admeten punts que són recurrents i distales, però no producte recurrents, en contrast amb la dinàmica en conjunts compactes. S'observa també que existeixen operadors amb vectors que són producte recurrent però que tenen òrbita no fitada. Es finalitza el capítol generalitzant els resultats provats per a operadors desplaçament definits en espais de Banach de successions a un context més general, en concret a F-espais o espais de Fréchet de successions.

  Els resultats d'aquest capítol han sigut acceptats per a la seua publicació en la revista de recerca Applied Mathematics & Information Sciences [26].

- En el Capítol 4 es caracteritza caos per a operadors de la forma $varphi(B)$, definits en espais de successions de Banach, on $\varphi(z) = (az + b)/(cz + d)$ és una Transformació Fraccional Lineal i B és l'operador desplaçament a esquerra usual. Les caracteritzacions que s'obtenen són "computables" ja que s'expressen com a condicions que involucren només els quatre nombres complexos que defineixen la transformació φ.

  Els resultats d'aquest capítol han sigut acceptats per a la seua publicació en la revista de recerca Topology and its Applications [37].

Agradecimientos

Al Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD) y con él al Instituto Nacional de Formación y Capacitación Magisterial (INAFOCAM), por haberme apoyado moral y económicamente a todo lo largo del programa de doctorado que culmina con la presentación de este informe final.

A la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) y de manera muy especial al personal de la Oficina de Ayuda Internacional (OAI) de esta institución, por la ayuda y el trato tan distinguido que permanentemente me han brindado en todo el trayecto del programa. Junto a la UPV, gracias al Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC) por facilitar sus espacios y recursos para la realización de este programa académico.

A la Universidad Iberoamericana (UNIBE) y con ella al personal de su Ciclo General, en especial a Orieta y a la doctora Caraballo, por apoyarme significativamente en la realización del referido programa.

Y, finalmente, a mis tutores doctores Félix Martínez y Alfredo Peris. De manera muy especial al doctor Félix Martínez, porque siempre estuvo ahí para mi. Gracias siempre doctores, de todo corazón.

Dedicatoria

A mis padres

+ Ana Mercedes Céspedes.

+ Octavio Galán (Inmemoriam)

A mi esposa

+ Ana Mercedes Vásquez (Mery).

A mis hijos

+ Vimel.

+ Isabel (Melvi).

+ Víctor Manuel.

+ Víctor Daniel.

+ Clarisa Mercedes.

+ Vicmary.

+ Vianna Mercedes.

A todos mis hermanos.

En fín, a todos los que me han motivado y ayudado, en especial a todos los maestros dominicanos que luchan cada día por una educación de más calidad, ya que ven en ella una esperanza para un mejor país.

Índice general

Capítulo 1

Definiciones y conceptos básicos

En este primer capítulo se incluyen algunas definiciones y resultados, de carácter preliminar, que serán útiles en el desarrollo de la memoria. Se establecen también las notaciones a utilizar. Se ha tratado de organizar el contenido del capítulo haciendo énfasis en la relación de cercanía que los conceptos y propiedades trabajados en la investigación tengan con los conceptos, propiedades y teoremas considerados como aportes a la línea que sigue la referida investigación.

1.1 Sistemas dinámicos discretos

Definición 1.1. Un sistema dinámico (discreto) es un par (X, T), formado por un espacio topológico X y una aplicación continua $T : X \to X$.

Definición 1.2. Sea $T : X \to X$ un sistema dinámico. Entonces un subconjunto $Y \subset X$ se llama T-invariante o invariante bajo T, si $T(Y) \subset Y$.

A menudo se da por sentado el espacio topológico X en el que se está trabajando, de manera que simplemente se llama T al sistema dinámico o bien $T : X \to X$. También se adopta la notación usada en teoría de operadores y se escribirá Tx en lugar de $T(x)$.

Se define $T^n : X \to X$ como la iteración n-ésima de T, es decir

$$T^n = T \circ T \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ T$$

con $T^0 = I$, la aplicación identidad en X.

Definición 1.3. Sea T un sistema dinámico. Dado un punto $x \in X$, al conjunto de sus iteraciones,

$$\{x, Tx, T^2x, , \dots\} = \{T^n x \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

se le llama órbita de x respecto de T y se denota por $\mathrm{Orb}(x, T)$.

Toda teoría matemática tiene su noción de isomorfismo. ¿Cuándo se considera que dos sistemas dinámicos $T : X \longrightarrow X$ y $S : Y \longrightarrow Y$ son iguales? Debería existir un homeomorfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ tal que si a $x \in X$ se le hace corresponder $y \in Y$ vía ϕ, entonces a Tx debería poder hacersele corresponder Sy vía ϕ. En otras palabras, si $y = \phi(x)$ entonces $Sy = \phi(Tx)$. Esto es equivalente a decir que $S \circ \phi = \phi \circ T$. En muchas ocasiones es suficiente pedir que ϕ sea continua con rango denso.

Definición 1.4. Sean $T : X \longrightarrow X$ y $S : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos.

1. Se dice que S es semiconjugada de T si existe una aplicación continua $\phi : X \longrightarrow Y$ con rango denso tal que $S \circ \phi = \phi \circ T$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\downarrow \\ Y & \xrightarrow{S} & Y \end{array}$$

   conmuta.

2. Si ϕ puede elegirse de modo que sea homeomórfica, entonces se dice que S y T son conjugadas.

La conjugación es, claramente, una relación de equivalencia entre sistemas dinámicos, y los sistemas dinámicos conjugados tienen el mismo comportamiento dinámico.

Definición 1.5. Se dice que la propiedad $\mathcal{P}$ de un sistema dinámico se conserva por (semi)conjugación si se cumple lo siguiente: Si un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ entonces, todo sistema dinámico $S : Y \longrightarrow Y$ que sea (semi)conjugado de T también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

1.1.1 Transitividad topológica

Definición 1.6. Un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se dice que es topológicamente transitivo si, para cada par U, V de abiertos no vacíos de X, existe algún $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Proposición 1.7. La transitividad topológica se conserva por semiconjugación.

Observación 1.8. La transitividad topológica puede interpretarse diciendo que T conecta todas las partes no triviales de X. De hecho, si X es Hausdorff y no tiene puntos aislados, la existencia de órbitas densas implica transitividad. En efecto, sean U y V abiertos no vacíos y sea $x \in X$ un vector con órbita densa respecto de T. Entonces

$$\exists\, n \geq 0 \quad \text{tal que} \quad T^n x \in U$$

Más aún, considérese $\widetilde{V} = V \setminus \{x, Tx, \ldots, T^n x\}$. Este conjunto también es abierto y no vacío por lo que

$$\exists\, m \quad \text{tal que} \quad T^m x \in \widetilde{V} \subset V$$

Obsérvese que m es posterior a n, de lo contrario $T^m x$ pertenecería a $\{x, Tx, \ldots, T^n x\}$ y estos puntos se han quitado. Puesto que $T^{m-n}(T^n x) = T^m x$ y $T^n x \in U$, se obtiene que $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Es menos claro que, en espacios métricos completos separables, el recíproco de este resultado también es cierto: las aplicaciones transitivas deben tener una órbita densa. Este importante resultado para la teoría de sistemas dinámicos fue obtenido por Birkhoff en 1922 [11], en el contexto de las funciones continuas en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Este resultado es una consecuencia del teorema de Baire, el cual es muy importante en la teoría de espacios métricos completos y sintetiza la idea de que "un espacio métrico completo no puede representarse como la unión numerable de conjuntos cerrados *nowhere*-densos o también llamados diseminados (conjunto cuya clausura tiene interior vacío)".

Teorema 1.9 (Criterio de transitividad de Birkhoff)**.** Sea X un espacio métrico completo separable y perfecto (i. e., sin puntos aislados), y $T : X \to X$ una aplicación continua. Entonces T es topológicamente transitiva, si y sólo si, existe un $x \in X$ cuya órbita respecto a T es densa en X.

Demostración. Que la existencia de órbitas periódicas implica transitividad ya ha sido probado en la Observación 1.8. Recíprocamente, como X es un espacio métrico separable satisface el segundo axioma de numerabilidad. Se elige entonces $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como base de abiertos para la topología de X. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$G_n := \{x \in X : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } T^m x \in V_n\},$$

es decir,

$$G_n = \cup_{m=1}^{\infty}(T^m)^{-1}(V_n),$$

y por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que G_n es abierto en X.

Véase a continuación que para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n es denso en X. Sea pues $n \in \mathbb{N}$ y un abierto U de X fijos. Como T es transitiva existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^m U \cap V_n \neq \emptyset,$$

es decir, existe $x \in U$ tal que $T^m x \in V_n$, por lo que $x \in U \cap G_n$.

Como X es completo, por el Teorema de Baire se tiene que

$$G := \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

es denso en X. Obsérvese ahora que cada punto perteneciente a G tiene orbita densa en X respecto a T. Efectivamente, sean, $z \in G$ y U un abierto cualquiera de X. Por ser $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de la topología existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset U$. Por otro lado, como $z \in G \subset G_{n_0}$ se tiene que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^m z \in V_{n_0} \subset U$$

y por tanto el conjunto $\mathrm{Orb}(z, T)$ es denso en X. $\square$

Observación 1.10. El Teorema de Baire también asegura que en sistemas dinámicos topológicamente transitivos con X un espacio completo, el conjunto de los puntos con órbita densa es un conjunto G_δ denso.

Finalmente, dada la equivalencia entre transitividad y existencia de órbitas densas y dado que la transitividad topológica se conserva por semiconjugación, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 1.11. La propiedad de poseer una órbita densa se conserva por semiconjugación.

1.1.2 Caos

¿Qué es el caos? Aunque se restrinja el significado de esta palabra al caos determinista, es decir, al comportamiento caótico de un sistema dinámico, los matemáticos sugieren diferentes respuestas a esta pregunta. Según parece [4], la primera vez que se usó la palabra *caos* en matemáticas, fue en el 1975 en el artículo "Period three implies Chaos" de L. Li y J. Yorke [41], aunque el fenómeno estudiado allí no coincidía con las nociones actuales de caos. Aquí se sugiere la definición propuesta por Devaney en 1986 [20]. Esta definición exige tres requisitos que son presentados a continuación.

El primer requisito trata de recoger la idea del popular efecto mariposa; pequeños cambios en el estado inicial pueden conducir, después de cierto tiempo, a grandes discrepancias en la órbita. Con el objeto de medir tales discrepancias es necesario trabajar en espacios métricos y para poder perturbar puntos se consideran únicamente espacios sin puntos aislados.

Definición 1.12. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces, un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se dice que tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales si existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe algún $y \in X$ con $d(x, y) < \varepsilon$ tal que, para algún $n \in \mathbb{N}_0$, $d(T^n x, T^n y) > \delta$. Al número δ se le llama constante de sensibilidad de T.

El segundo requisito de caos pide que el sistema sea irreducible en el sentido de que la aplicación T conecte partes cualesquiera, no triviales, del espacio. Hemos visto en la Sección 1.1.1 que esta idea ya ha sido recogida por la noción de transitividad topológica del sistema.

El tercer requisito exige que el sistema tenga muchas órbitas con un comportamiento regular; para ser más concretos, debería existir un conjunto denso de puntos con órbita periódica.

Definición 1.13. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico.

1. Un punto $x \in X$ se dice que es un punto fijo si $Tx = x$.

2. Un punto $x \in X$ se dice que es un punto periódico si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$. Al menor de estos n se le llama el periodo de x. El conjunto de todos los puntos periódicos de periodo n se denota por $\mathrm{Per}_n(T)$ y por $\mathrm{Per}(T)$ denotará el conjunto de todos los puntos periódicos.

Un punto es periódico de periodo n si, y sólo si, es un punto fijo de T^n, pero no de T^k con $1 \leq k < n$. La siguiente proposición es fácil de demostrar.

Proposición 1.14. La propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos se conserva por semiconjugación.

Tener algunas órbitas densas confiere cierta regularidad al sistema. Pero pedir que el conjunto de puntos periódicos sea denso puede ser interpretado como señal de creciente irregularidad. En cualquier caso se va a considerar la definición de Devaney de caos.

Definición 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se dice que es caótico (en el sentido de Devaney) si satisface las siguientes condiciones:

1. T es topológicamente transitivo;

2. T tiene un conjunto denso de puntos periódicos;

3. T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

La definición que se acaba de dar presenta un contratiempo: la dependencia sensible de las condiciones iniciales no se conserva bajo conjugación. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.16. Sea $T : (1, \infty) \longrightarrow (1, \infty)$ el sistema dinámico dado por $Tx = 2x$. Puesto que $|T^n x - T^n y| = 2^n |x - y| \longrightarrow \infty$ siempre que $x \neq y$, tenemos que T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con la métrica usual en $(1, \infty)$.

Pero si definimos $d(x, y) = |\ln x - \ln y|$ entonces d es una métrica equivalente a la usual y

$$d(T^n x, T^n y) = d(2^n x, 2^n y) = |\ln(2^n x) - \ln(2^n y)| = |\ln x - \ln y| = d(x, y)$$

para todo $x, y \in (1, \infty)$, lo cual prueba que T no tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales bajo esta métrica d. Obviamente, las dos versiones de T son conjugadas tomando como homeomorfismo la identidad.

Afortunadamente varios autores (ver, por ejemplo, Banks et al. [5] y Kolyada-Snoha [39]) han probado que se puede prescindir de la dependencia sensible en la definición de Devaney porque se deduce de las otras dos condiciones.

Teorema 1.17. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Si un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es topológicamente transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con respecto a cualquier métrica que defina la topología de X.

Este resultado no sólo permite prescindir de la dependencia sensible de la definición de Devaney de caos, sino que se puede extender a espacios topológicos arbitrarios porque únicamente la dependencia sensible requería de una métrica en el espacio subyacente.

Definición 1.18 (Caos de Devaney)**.** Un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ en un espacio topológico X se dice que es caótico (en el sentido de Devaney) si satisface las siguientes condiciones:

1. T es topológicamente transitivo;

2. T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Proposición 1.19. El caos de Devaney se conserva por semiconjugación.

1.1.3 Aplicaciones mezclantes

En algunos casos se presenta una forma fuerte de transitividad: $T^n(U)$ corta a V no sólo para algún n sino para todo $n \in \mathbb{N}_0$ suficientemente grande. Esta propiedad recibe un nombre especial.

Definición 1.20. Un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se dice que es mezclante si para cualquier par U, V de abiertos, no vacíos de X, existe algún $N \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ para todo } n \geq N.$$

Proposición 1.21. La propiedad mezclante se conserva por semiconjugación.

1.1.4 Aplicaciones débil mezclantes

Sean $T : X \longrightarrow X$ y $S : Y \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas definidas en los espacios topológicos X e Y respectivamente. Se denota al espacio $X \times Y$ con la topología producto; los productos $U \times V$ de los abiertos $U \subset X$ y $V \subset Y$ forman una base de esta topología.

Se define la aplicación $T \times S$ por

$$T \times S : X \times Y \longrightarrow X \times Y, \quad (T \times S)(x, y) = (Tx, Sy).$$

Esta aplicación es continua y para las sucesivas iteraciones de $T \times S$ se tiene que

$$(T \times S)^n = T^n \times S^n.$$

Definición 1.22. Un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ se dice que es débil mezclante si $T \times T$ es topológicamente transitivo.

En otras palabras, T es débil mezclante si para cada 4-tupla $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ de abiertos no vacíos, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \;\text{ y }\; T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Obviamente, la propiedad ser débil mezclante es más fuerte que la propiedad ser topológicamente transitivo pero más débil que la propiedad ser mezclante.

Proposición 1.23. La propiedad débil mezclante se conserva por semiconjugación.

1.1.5 Recurrencia

En esta sección se van a recordar algunos conceptos básicos de recurrencia. Estos conceptos serán importantes en el Capítulo 3, donde se utilizan estos conceptos de recurrencia en el contexto de la dinámica lineal de operadores desplazamiento. El interés de las propiedades de recurrencia para la dinámica de aplicaciones continuas en conjuntos compactos fue iniciado por Furstenberg [23, 25, 24], quien obtuvo importantes caracterizaciones y resultados.

Se recuerda que nuestro contexto de trabajo sigue siendo un sistema dinámico (X, T), es decir, $T : X \to X$ es una aplicación continua y X un espacio métrico.

Puntos recurrentes y productos recurrentes

Definición 1.24. Dados $x \in X$ y cualquier subconjunto no vacío A de X, se define el conjunto de retorno de x a A como

$$N(x, A) := \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in A\},$$

es decir, es el conjunto de todos los números naturales que producen iteraciones de x bajo T que están en A.

Definición 1.25. Para subconjuntos no vacíos cualesquiera A y B de X, se define el conjunto de retorno de A a B mediante T como

$$N(A,B) := \{n \in \mathbb{N} : T^n(A) \cap (B) \neq \emptyset\},$$

es decir, el conjunto de todos los números naturales que producen iteraciones en A bajo T que intersectan a B.

Observación 1.26. Estos conjuntos son muy útiles para definir propiedades dinámicas. Por ejemplo, es trivial probar que se cumple

1. La aplicación T es transitiva si y solo si para todo U y V abiertos no vacíos de X se cumple que $N(U,V)$ es no vacío.

2. La aplicación T es mezclante si y solo si para todo U y V abiertos no vacíos de X se cumple que $N(U,V)$ es cofinito.

3. La aplicación T es débil mezclante si y solo si para cualesquiera abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1, V_2 de X se cumple que

$$N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

La idea básica sobre la que se va a trabajar es la de recurrencia, por lo que se recuerda su definición.

Definición 1.27. Un punto $x \in X$ se denomina *recurrente*, si dado cualquier entorno U de x, el conjunto $N(x,U)$ es infinito. Se denota el conjunto de todos los puntos recurrentes de un sistema dinámico (X,T) por $\mathrm{Rec}(X,T)$.

Existen varios conceptos ligados a la recurrencia de un punto que se van a considerar en este trabajo, por lo que también se recuerdan sus definiciones.

Definición 1.28. Un par de puntos $x, y \in X$ se dice *proximal*, si existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} d(T^{n_k}x, T^{n_k}y) = 0.$$

Definición 1.29. Un punto $x \in X$ se llama *distal*, si es no proximal a ningún punto contenido en el cierre de su propia órbita, excepto él mismo, es decir, si para cada $y \in \overline{\mathrm{Orb}(x,T)}$, el par x, y no es proximal. Un sistema dinámico (X,T) es distal si cada $x \in X$ lo es.

Ahora, se introduce el concepto de producto recurrencia de un punto en (X,T).

Definición 1.30. Un punto $x \in X$ se dice *producto recurrente* en (X,T), si dado cualquier punto y recurrente en cualquier sistema dinámico (Y,S) el par (x,y) es recurrente para el sistema producto $(X \times Y,\ T \times S)$.

Combinatoria aritmética (familias de Furstenberg)

A continuación se establecen algunas definiciones procedentes de combinatoria aritmética, en concreto de combinatoria aditiva, es decir, tan solo las operaciones de suma y diferencia de números enteros serán consideradas (teoría ergódica de Ramsey).

Definición 1.31. Se dice que una colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es una familia si,

i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

ii) Para cada $F_1 \in \mathfrak{F}$, si $F_2 \supset F_1$, entonces $F_2 \in \mathfrak{F}$.

La segunda condición es llamada *hereditariamente hacia arriba o superior* y la familia que la posee se dice que es una *familia de Furstenberg.*

La idea de utilizar familias de subconjuntos de N para estudiar propiedades dinámicas parece que fue utilizada por primera vez por Gottschalk y Hedlund [31], y posteriormente desarrollada por Furstenberg [24] y Akin [1, 2].

Definición 1.32. Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ se llama *thick* si para cada $n > 0$ hay un $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{i, i+1, ..., i+n\} \subset A.$$

Definición 1.33. Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ se llama *sindético* si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $[i, i+N] \cap A \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Definición 1.34. Un conjunto $F \subset \mathbb{N}$ se dice que posee *densidad positiva superior de Banach* si para $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\limsup_{n-m\to\infty} \frac{|F \cap \{m, m+1, ..., n\}|}{n-m+1} > 0,$$

(donde $|A|$ denota el cardinal del conjunto A).

Definición 1.35. Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ es un IP-conjunto si existe una sucesión $(p_i)_i$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$p_{n_1} + p_{n_2} + ... + p_{n_k} \in A,$$

siempre que $0 \leq n_1 < n_2 < ... < n_k$, con $k \geq 2$, donde $p_0 := 0$.

Definición 1.36. Un conjunto $D \subset \mathbb{N}$ es un IP*-conjunto si es la intersección de dos o más IP-conjuntos.

Es bien conocido que los IP*-conjuntos son sindéticos.

En relación con recurrencia, si x es un punto recurrente entonces $N(x, U)$ es un IP-conjunto para cada entorno U de x.

En sistemas dinámicos compactos, los puntos x producto recurrentes son exactamente aquellos tal que $N(x, U)$ es un IP*-conjunto para cualquier entorno U de x.

A las familias de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos, thick, sindéticos, que poseen densidad positiva superior de Banach y que son partes de la intersección de un conjunto thick y un conjunto sindético (piezas de un sindético), se las denota por $\mathfrak{F}_{inf}$, $\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}_s$, $\mathfrak{F}_{pubd}$ y $\mathfrak{F}_{ps}$ respectivamente.

Inspirados por el concepto de recurrencia y producto recurrencia de un punto, se puede extender estos conceptos a familias en general.

Definición 1.37. Dada una familia $\mathfrak{F}$ y un punto $x \in X$, se dice que x es $\mathfrak{F}$-recurrente si $N(x, U) \in \mathfrak{F}$, para cualquier entorno U de x.

Definición 1.38. Dada una familia $\mathfrak{F}$, se dice que un punto recurrente x en un sistema dinámico (X, T) es $\mathfrak{F}$-producto recurrente ($\mathfrak{F} - PR$) si para cualquier punto $\mathfrak{F}$-recurrente y de cualquier sistema (Y, S), se tiene que el par (x, y) es recurrente para $(X \times Y,\ T \times S)$.

1.2 Sistemas dinámicos lineales

Un sistema dinámico es lineal si está definido por una aplicación lineal. Todo el mundo que haya seguido un curso elemental de análisis conoce un ejemplo de tales sistemas. Se trata de considerar la derivada de una función. La aplicación correspondiente

$$D : f \longmapsto f'$$

es una aplicación lineal; sus iteraciones, es decir, el proceso de tomar derivadas sucesivas, son ubicuas en análisis. En el lenguaje de los sistemas dinámicos, la función exponencial, por ejemplo, es un punto fijo de D y la función coseno es un punto periódico con periodo 4.

La linealidad de la aplicación tiene sentido si el espacio, además de su estructura topológica, tiene una estructura lineal; esto es, si se trata de un espacio vectorial topológico. Algunos de los ejemplos más familiares son los espacios de Hilbert y los espacios de Banach. Sin embargo, algunos de nuestros principales ejemplos requerirán llegar un poco más lejos y se presentarán en espacios de Fréchet.

Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial X sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, dotado con una topología Hausdorff, tal que las operaciones suma, y producto por un escalar,

$$+ : X \times X \longrightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda x, y) \mapsto \lambda x,$$

sean continuas.

1.2.1 F-normas

El modo más fácil de introducir una topología en un espacio vectorial X es mediante una norma $\|\cdot\|$. Su topología es inducida por la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$. La continuidad de las operaciones vectoriales se siguen de las propiedades de la norma:

$$\|(x + y) - (x' + y')\| \le \|x - x'\| + \|y - y'\|,$$

$$\|\lambda x - \lambda' x'\| \leq |\lambda| \|x - x'\| + |\lambda - \lambda'| \|x'\|.$$

Si X es completo con la métrica dada, se dice que X es un espacio de Banach.

En algunos momentos, se necesitará trabajar con espacios más generales que los espacios de Banach, posiblemente en espacios de Fréchet cuya topología está inducida por una sucesión de seminormas. Pues bien, es menos conocido que la topología de tales subespacios puede ser inducida por una *F-norma*, la cual verifica muchas propiedades de las normas y permite dar pruebas casi como si se trabajara en un espacio de Banach.

Definición 1.39. Una F-norma en un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ es una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para todo $x, y \in X$ y $c \in \mathbb{K}$, se cumple

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
2. $\|cx\| \leq \|x\|$ si $|c| \leq 1$;
3. $\lim\limits_{c \to 0} \|cx\| = 0$;
4. $\|x\| = 0$ sólo si $x = 0$.

Obviamente, toda norma es una F-norma. La métrica inducida por una F-norma está definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Lo que hace a las F-normas especialmente interesantes es el siguiente resultado.

Teorema 1.40. La topología de cualquier espacio vectorial métrico completo puede ser inducida por una F-norma.

En muchos de nuestros ejemplos la topología del espacio X está definida por una sucesión $(\|\cdot\|_n)_n$ de seminormas con la propiedad adicional de que si $\|x\|_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$. En este caso,

$$\|x\| := \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k}$$

es una F-norma y se tiene que $x_k \longrightarrow x$ si, y sólo si, $\|x_k - x\|_n \longrightarrow 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La continuidad de las operaciones vectoriales se sigue como en el caso de las normas. Si X es completo con la métrica inducida por esta F-norma entonces X es un espacio de Fréchet.

1.2.2 Espacios vectoriales métricos completos

Un espacio vectorial topológico X se dice que es un espacio vectorial métrico completo si su topología está definida por una métrica completa d que sea invariante por traslaciones, es decir, para todo $x, y, z \in X$ se tiene que

$$d(x, y) = d(x + z, y + z).$$

Un subconjunto M de un espacio vectorial topológico Y se dice que es acotado si para cualquier entorno U de 0 existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon M \subset U$. En particular, cualquier sucesión convergente es acotada.

La familia (T_j) es equicontinua si para cualquier entorno V de 0 en Y existe un entorno U de 0 en X tal que $T_j(U) \subset V$ para cualquier $j \in I$.

Teorema 1.41 (Banach-Steinhaus)**.** Sean X un espacio vectorial métrico completo, Y un espacio vectorial topológico y $T_j : X \longrightarrow Y$, $j \in I$, operadores (lineales y continuos). Si, para cualquier $x \in X$, el conjunto $\{T_j x \ : \ j \in I\}$ es acotado, entonces la familia (T_j) es equicontinua.

1.2.3 Operadores hipercíclicos

El estudio de la hiperciclicidad podría decirse que comienza con los trabajos de Birkhoff [12] cuando probó la existencia de una función $f(z)$ cuyo conjunto de trasladadas $\{f(z+a) : a \in \mathbb{C}\}$ es denso en el espacio de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$ dotado de la topología de convergencia uniforme en conjuntos compactos. También, con los trabajos de Maclane [42] en 1952 que construyó una función entera en la que una sucesión de derivadas aproxima uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ a cualquier otra función, resultado equivalente a decir que el operador derivada $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ es hipercíclico. Más tarde, en el 1969, S. Rolewicz abordó [51] el problema de la existencia de los operadores hipercíclicos en los espacios ℓ^p, sin usar aun las notaciones y nomenclaturas actuales, dejando planteado el problema de la existencia de los operadores hipercíclicos en cualquier espacio de Banach. También probó que los múltiplos del operador desplazamiento, con constante de multiplicidad de módulo mayor que 1, son hipercíclicos en el espacio de las sucesiones absolutamente sumables. Se pasa a continuación a formalizar las definiciones y conceptos necesarios.

Definición 1.42. Un operador $T : X \longrightarrow X$ en un espacio vectorial topológico X es hipercíclico si tiene una órbita densa, es decir, si existe algún $x \in X$ cuya órbita respecto de T, definida como

$$\operatorname{Orb} x, T := \{x, Tx, T^2x, \dots\},$$

es densa en X. En tal caso se dice que x es un vector hipercíclico para T.

Como la órbita de un punto es un conjunto numeable, es inmediato observar que la separabilidad en el espacio es necesaria para la existencia de órbitas densas, así que un operador puede ser hipercíclico sólo en un espacio vectorial topológico separable X. Si, además, X es un espacio de Fréchet, por el criterio de transitividad de Birkhoff 1.9, $T : X \longrightarrow X$ es hipercíclico si y sólo si T es transitivo. Por tanto, a partir de este momento, nuestro espacio X será un **espacio vectorial métrico completo y separable**.

1.2.4 Criterio de hiperciclicidad

A continuación se van a dar algunos criterios "computables" bajo los cuales un operador es mezclante, débil mezclante y, naturalmente, hipercíclico. En primer lugar, se presenta un criterio para la propiedad mezclante debido a Kitai-Gethner-Shapiro; fue obtenido por Carol Kitai [38] en su tesis doctoral en 1982 e, independientemente, por Gethner y Shapiro [27] en 1987.

Teorema 1.43 (Criterio de Kitai)**.** Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador definido en un espacio vectorial métrico completo X. Supóngase que existen subconjuntos densos $Y_0, Y_1 \subset X$ y una aplicación $S : Y_1 \longrightarrow Y_1$ tales que

1. $T^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $x \in Y_0$,
2. $S^n y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $y \in Y_1$, y
3. $TSy = y$ para cada $y \in Y_1$,

entonces T es un operador mezclante.

A pesar de tener una cierta apariencia de tecnicidad, este criterio nos dice qué hacer:

- encontrar un conjunto denso en el cual las órbitas por T tienden a 0;
- encontrar un conjunto denso en el cual T tiene inversa por la derecha S, y tal que
- las órbitas por S, en ese conjunto, tienden a 0.

Originalmente, Kitai había probado que, bajo sus hipótesis, T es un operador hipercíclico. Ella hizo esto construyendo, mediante un proceso recursivo, un vector hipercíclico. Aunque se pueden encontrar pruebas más cortas y con mejores resultados, véase [34], la construcción de Kitai es útil en muchas otras situaciones donde los métodos más abstractos fallan.

Si se estudia cuidadosamente la prueba del criterio de Kitai-Gethner-Shapiro, se pone de manifiesto que es viable debilitar las condiciones del teorema. De hecho, es suficiente que

- las condiciones se mantengan para una subsucesión $(n_k)_k$ en lugar de hacerlo para la sucesión completa,
- las iteraciones $S^n : Y_1 \longrightarrow Y_1$ de una única aplicación puedan ser reemplazadas por una sucesión arbitraria $S_n : Y_1 \longrightarrow X$,
- la condición de inversa por la derecha "$TS = I$ en Y_1" pueda ser sustituidas por una condición asintótica "$T^n S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$ en Y_1".

Con todos estos requisitos se obtiene el criterio de hiperciclicidad debido a Bès y Peris [10] y publicado en 1999.

Teorema 1.44 (Criterio de hiperciclicidad)**.** Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador definido en un espacio vectorial métrico completo X. Si existen dos subconjuntos densos $Y_0, Y_1 \subset X$, una sucesión creciente de enteros $(n_k)_k$ y una sucesión de aplicaciones $S_k : Y_1 \longrightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$, tales que

(a) $T^{n_k}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $x \in Y_0$,

(b) $S_k y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $y \in Y_1$, y

(c) $T^{n_k}S_k y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ para cada $y \in Y_1$,

entonces T es débil mezclante.

Aquí se utilizará la versión del criterio de Kitai considerando una sucesión creciente de enteros $(n_k)_k$ para las iteraciones de T y para las iteraciones de S, en lugar de la sucesión completa de naturales. En este caso se pierde la propiedad mezclante.

Teorema 1.45. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador definido en un espacio vectorial métrico completo X. Si existen dos subconjuntos densos $Y_0, Y_1 \subset X$, una sucesión creciente de enteros $(n_k)_k$ y una aplicación $S : Y_1 \longrightarrow Y_1$ tales que

(a) $T^{n_k}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $x \in Y_0$,

(b) $S^{n_k}y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $y \in Y_1$, y

(c) $TSy = y$ para cada $y \in Y_1$,

entonces T es débil mezclante.

Este último resultado es de hecho equivalente al anterior.

1.2.5 Espacios de sucesiones de Banach

Se van a definir a continuación los espacios de sucesiones de Banach más utilizados.

Definición 1.46. Considérese para $1 \leq p < +\infty$ el espacio de Banach de las sucesiones p-absolutamente sumables, es decir,

$$\ell^p := \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Para el caso $p = 0$ se toma el espacio de Banach de las sucesiones convergentes a 0, es decir,

$$c_0 := \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{i \to \infty} x_i = 0,\ \|x\| := \sup_{i \geq 1} |x_i| \right\}.$$

Es fácil probar que estos espacios son de Banach (véase por ejemplo [22]).

Una generalización natural de los espacios ℓ^p aparece cuando "se ponderan" las sucesiones con "pesos".

Definición 1.47. Dada una sucesión de pesos estrictamente positiva $v = (v_i)_i$, para $1 \leq p < \infty$ se considera el espacio ℓ^p ponderado mediante la sucesión v como

$$\ell^p(v) := \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \, v_i \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

De manera análoga, cuando $p = 0$ se toma

$$c_0(v) := \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{i \to \infty} x_i v_i = 0,\ \|x\| := \sup_{i \geq 1} |x_i| \, v_i \right\}.$$

Proposición 1.48. Los espacios ℓ^p y $\ell^p(v)$ son isométricos.

Demostración. Considérese

$$\phi : \ell^p(v) \longrightarrow \ell^p,\ (x_i)_i \longmapsto (x_i \ v_i^{1/p}).$$

Claramente ϕ es lineal y además

$$\|x\|_{\ell^p(v)} = \|\phi(x)\|_{\ell^p}.$$

por lo que ϕ es una isometría de $\ell^p(v)$ a ℓ^p. □

1.2.6 Espacios de sucesiones de Köthe

Definición 1.49. Una matriz infinita $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ se dice que es una matriz de Köthe si para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ con $a_{j,k} > 0$ y $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$.

Para $1 \leq p < \infty$, se consideran los espacios escalonados de Köthe

$$\lambda_p(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; \|x\|_k := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j a_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty,\ \forall\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

y para $p = \infty$ y $p = 0$,

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; \|x\|_k := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\ a_{j,k} < \infty,\ \forall\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\lambda_0(A) := \left\{ x \in \lambda_\infty(A) \;:\; \lim_{j\to\infty} x_j a_{j,k} = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N} \right\};$$

todos ellos son espacios de Fréchet al dotarlos con la sucesión de seminormas $\|.\|_k$, $k \in \mathbb{N}$, definidas en cada caso.

Los espacios de Köthe son una generalización de los espacios ℓ^p clásicos (basta tomar la matriz de Köthe con todas las entradas 1), y también de los $\ell^(v)$ tomando $a_{j,k} = v_j$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$.

Los espacios de sucesiones de Köthe pueden ser utilizados para representar mediante isomorfismos la mayoría de los espacios de funciones clásicos del análisis. En algunos casos, la matriz de Köthe A puede utilizarse para describir propiedades de los espacios. En este caso se verá que puede ser utilizada para caracterizar propiedades dinámicas del operador desplazamiento. Para una descripción más exhaustiva de estos espacios puede consultarse [46].

1.2.7 Convergencia incondicional

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio vectorial topológico se dice que es incondicionalmente convergente si para cualquier biyección $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$$
converge. En un espacio vectorial métrico existen varias formas equivalentes de esta definición; se asume aquí que el espacio está dotado de una F-norma.

Teorema 1.50. Sea X un espacio vectorial métrico completo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente;
2. para cualquier sucesión $(\varepsilon_n)_n$ de ceros y unos, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge;
3. para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $F \subset \{N, N+1, N+2, \ldots\}$ tenemos
$$\|\sum_{n\in F} x_n\| < \varepsilon;$$
4. para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier sucesión $(\varepsilon_n)_n$ de ceros y unos tenemos
$$\|\sum_{n\geq N} \varepsilon_n x_n\| < \varepsilon.$$

Definición 1.51. Una sucesión $(e_n)_n$ en un espacio de Fréchet X se dice que es una base si todo $x \in X$ admite una representación única
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$
con escalares $a_n \in \mathbb{K}$, $n \geq 1$.

Definición 1.52. Una sucesión $(e_n)_n$ en un espacio de Fréchet X se dice que es una base incondicional si es una base tal que para cada $x \in X$, la representación
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$
converge incondicionalmente.

1.3 Transformaciones Fraccionales Lineales

En esta sección se presentan los aspectos básicos de las Transformaciones Fraccionales Lineales (de manera abreviada LFT's del inglés *Linear Fractional Transformations*); en geometría y análisis complejo también son llamadas Transformaciones de Möbius. Estas transformaciones jugarán un papel importante en el Capítulo 4.

Definición 1.53. La aplicación $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

se denominada *Transformación Fraccional Lineal (LFT)*. La condición sobre el determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ no nulo es para evitar que la fracción se simplifique y la transformación se reduzca a una función constante o que la transformación no esté definida.

Se necesitarán algunas propiedades de las transformaciones fraccionales lineales cuando se plantea la dinámica de operadores de la forma $\varphi(T) : X \to X$, donde $T : X \to X$ es un operador en X. Aunque se detallará en el correspondiente capítulo cómo se define el operador $\varphi(T)$, se adelanta aquí que si $-d/c$ no pertenece al espectro $\sigma(T)$ del operador T, entonces

$$cT + dI = -c(-\frac{d}{c}I - T)$$

es un operador invertible y por tanto se puede definir como

$$\varphi(T) := (aT + bI)(cT + dI)^{-1}.$$

Un estudio geométrico de las transformaciones fraccionales lineales puede encontrarse casi en cualquier libro de variable compleja (véase por ejemplo [40, §6.3]). Aquí se va a presentar tan solo una propiedad elemental que se utilizará más adelante, concretamente se verá cómo es la imagen de un círculo generalizado (círculo o línea recta) por una transformación fraccional lineal.

Proposición 1.54. Toda transformación fraccional lineal $\varphi(z)$ transforma círculos y líneas del plano complejo en círculos y líneas del plano complejo.

Demostración. En primer lugar obsérvese que $\varphi(z)$ puede descomponerse en transformaciones más sencillas.

- $\varphi_1(z) := z + \dfrac{d}{c}$ (traslación),
- $\varphi_2(z) := \dfrac{1}{z}$ (inversión),
- $\varphi_3(z) := \dfrac{bc - ad}{c^2} z$ (homotecia y rotación),
- $\varphi_4(z) := z + \dfrac{a}{c}$ (traslación),

y es un ejercicio sencillo comprobar que

$$\varphi(z) = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z).$$

Es inmediato que las traslaciones $\varphi_1(z)$ y $\varphi_4(z)$ preservan círculos y líneas. Por otro lado $\varphi_3(z)$ es una homotecia y una rotación ya que se pueden expresar como

$$\varphi_3(z) = \left| \frac{bc - ad}{c^2} \right| e^{i\alpha} z,$$

para un cierto ángulo α, y por tanto también preserva círculos y líneas. Queda por tanto probar que la inversión $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ transforma círculos y líneas en círculos y líneas. Denotando $\varphi_2(z) = \frac{1}{z} = w$, si $z = x + iy$ y $w = a + ib$, se comprueba sin dificultad que

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad a = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
$$y = \frac{-b}{a^2 + b^2}, \qquad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Sea ahora la ecuación

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

que representa un círculo o, si $A = 0$, una línea. Usando las expresiones de x e y en términos de a y b en dicha ecuación se obtiene

$$D(a^2 + b^2) + Ba - Cb + A = 0,$$

ecuación que representa un círculo o una línea. $\square$

Observación 1.55. No se entrará en los detalles de la proyección estereográfica ni en la necesidad de extender el plano complejo añadiéndole el punto del infinito para que toda transformación lineal fraccional sea un homemomorfismo de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pero sí se quiere resaltar aquí que el resultado anterior no debe entenderse en el sentido de que $\varphi(z)$ transforma círculos en círculos y líneas en líneas. Por ejemplo, todo círculo que pase por el polo $-d/c$ se transforma en una línea y $\varphi(-d/c) = \infty$.

Capítulo 2

Operadores desplazamiento

Este capítulo está dedicado por completo al estudio de la dinámica básica del operador desplazamiento, en concreto a la hiperciclicidad y el caos de dicho operador en espacios de sucesiones. El operador desplazamiento, llamado en inglés *backward shift*, es seguramente el operador favorito en el que se piensa a la hora de estudiar nuevas propiedades dinámicas.

Aunque este capítulo no contiene resultados nuevos, parece procedente incluir aquí, de manera ordenada, los resultados y demostraciones básicas de la dinámica del operador desplazamiento, ya que ilustran las técnicas que se van a utilizar en capítulos posteriores. De manera esquemática, la técnica utilizada para estudiar propiedades dinámicas del operador desplazamiento en espacios de sucesiones generales es la siguiente.

1. Estudio de la propiedad para el operador desplazamiento en espacios de sucesiones de Banach.

2. Estudio de la propiedad para el operador desplazamiento ponderado en espacios de sucesiones de Banach (a partir del caso anterior mediante una conjugación adecuada).

3. Estudio la propiedad para el operador desplazamiento en espacios generales de sucesiones (mediante la generalización de la técnica utilizada en el paso 1).

4. Estudio la propiedad para el operador desplazamiento ponderado en espacios generales de sucesiones (a partir del caso anterior mediante una conjugación adecuada).

5. Si es posible, aplicaciones de los resultados obtenidos en los pasos anteriores a operadores clásicos que se puedan representar mediante el operador desplazamiento.

Para no extender demasiado este tratamiento ya que se está hablando de resultados conocidos, aquí se van a reproducir solo los pasos 3 y 4, y se obtendrán los pasos 1 y 2 como ejemplos o casos particulares. Básicamente, estos resultados (y técnicas) se obtuvieron por primera vez en [33, 44] y también se pueden consultar en [34, Chapter 4].

2.1 Contexto y definiciones

Definición 2.1. Dado un espacio vectorial de sucesiones X, considérese la aplicación

$$B : X \ \rightarrow \ X, \quad B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

El operador B es un desplazamiento unilateral a izquierda.

Con el término “unilateral” se pretende distinguir estos desplazamientos de los bilaterales aunque, si no hay posibilidad de confusión, se prescindirá de este término. Por otra parte, mientras no se indique lo contrario, nuestros desplazamientos siempre serán “a izquierda”, por tanto diremos simplemente que B es un desplazamiento.

Rolewicz [51] probó que el múltiplo de B,

$$\lambda B : \ell^2 \ \longrightarrow \ \ell^2, \quad \lambda B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \ldots)$$

es hipercíclico si $|\lambda| > 1$ (de hecho, es caótico [30]). Parece razonable avanzar un pequeño paso y permitir que los pesos varíen de una coordenada a otra. De este modo se obtiene un desplazamiento ponderado.

Definición 2.2. Dado un espacio vectorial de sucesiones X, la aplicación

$$B_w : X \ \to \ X, \quad B_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \ldots),$$

donde $w_i \neq 0$, para todo $i \geq 2$, es un desplazamiento ponderado y la sucesión $w = (w_2, w_3, w_4, \ldots)$ se dice que es una sucesión de pesos.

El resultado de Rolewicz puede extenderse en una dirección diferente, en lugar de trabajar en el espacio de Hilbert ℓ^2 de sucesiones 2-sumables, se puede hacer en un espacio X más general. Obviamente debe ser un espacio de sucesiones, más concretamente, un espacio vectorial de sucesiones o, si se prefiere, un subespacio de $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Además se necesita que sea un espacio topológico cuya topología sea compatible con la estructura lineal de X. Se puede conseguir esto exigiendo que el embebimiento $X \hookrightarrow \omega$ sea continuo, esto es, que la convergencia en X implique convergencia coordenada a coordenada. Entonces se dirá que X es un espacio topológico de sucesiones. Si además X fuera un espacio de Banach, Fréchet, u otro, se llamaría espacio de sucesiones de Banach, Fréchet, u otro, respectivamente.

2.2 Dinámica de $B : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$

Se comienza esta sección obteniendo caracterizaciones de hiperciclicidad, mezclante y caos para el operador backward shift B en espacios $\ell^p(v)$. Se exigirá que B sea acotado en $\ell^p(v)$: se tiene que cumplir que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty. \tag{2.1}$$

Proposición 2.3. Sea el espacio $\ell^p(v)$ con v cumpliendo la condición (2.1). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\liminf_j v_j = 0$,

(ii) $B : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ satisface el criterio de hiperciclicidad,

(iii) $B : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ es hipercíclico.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Denotemos

$$M := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{v_j}{v_{j+1}}.$$

Por hipótesis, sea $\{n_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que

$$v_{n_k+k+1} < \frac{1}{kM}, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Tomemos ahora $X := \operatorname{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $S : X \to X$ aplicaciones lineales tales que $S(e_i) := e_{i+1}, i \in \mathbb{N}$. Obviamente se cumple que $B \circ S = Id_X$. Veamos que $\{B^{n_k}\}_{k\geq 1}$ y $\{S^{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergen puntualmente a 0 en X. Se tiene que $\{B^{n_k}e_i\}_{k\geq 1}$ es finalmente cero para cada $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dado $k \in \mathbb{N}$ e $i \leq k$, tenemos que

$$\|S^{n_k}e_i\| = \|e_{n_k+i}\| = v_{n_k+i} \leq M v_{n_k+k+1} < \frac{1}{k},$$

de donde se deduce que $\{S^{n_k}x\}_{k\geq 1}$ converge a cero para cada $x \in X$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ se sigue de aplicar el criterio de hiperciclicidad.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sea $x \in \ell^p(v)$ un vector hipercíclico para B. Entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es necesariamente una sucesión no acotada en $\mathbb{K}$, ya que en caso contrario tedríamos, observando la primera coordenada, que $\{B^k x\}_{k\geq 1}$ no es denso en $\ell^p(v)$. Tomamos $\{n_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión estrictamente creciente de naturales tales que $| x_{n_k} |> 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, la sucesión $\{|x_{n_k}|v_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge a cero y por tanto se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = 0$$

con lo que la demostración queda completada. □

También se puede obtener la caracterización de mezclante a través de la siguiente proposición. La demostración es similar a la de la proposición anterior.

Proposición 2.4. Sea el espacio $\ell^p(v)$ con v cumpliendo la condición (2.1). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\lim_{j\to\infty} v_j = 0$,

(ii) $B : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ es mezclante.

En el caso del caos sucede algo curioso, se puede obtener una condición que caracteriza el caos para B en términos de los pesos que definen el espacio. Pero resulta que esta condición ya se deduce de la existencia de un único punto periódico no nulo. Por tanto, sólo este hecho implica caos.

Teorema 2.5. Sea $(v_n)_n$ una sucesión en $\ell^p(v)$ con v cumpliendo la condición (2.1). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) B tiene un punto periódico no nulo,

(ii) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} v_i < \infty$.

(iii) B es caótico.

Demostración. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Suponer que B tiene un punto periódico no nulo, es decir, existen $x \in \ell^p(v)$, $N > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $B^N x = x$ y $x_{n_0} \neq 0$. Se tiene entonces que x es periódico de período N y que $\{x_{n_0+jN}\}_{j\geq 0}$ es una sucesión constante no nula.

Si $1 \leq p < \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|x_{n_0}|^p \sum_{j=0}^{\infty} (v_{n_o+jN})^p = \sum_{j=0}^{\infty} |x_{n_o+jN}|^p (v_{n_o+jN})^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p (v_i)^p < \infty,$$

de donde, teniendo en cuenta que $x_{n_0} \neq 0$, se deduce que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (v_{n_o+jN})^p < \infty.$$

Para $1 \leq r < n_0$ y $n_0 < r \leq N$ se aplica el mismo razonamiento que antes a $B^r x$ en lugar de a x, deduciendo que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (v_{n_o-r+jN})^p < \infty, \ r = 1, ..., n_0 - 1,$$

y que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(v_{n_o-r+jN})^p < \infty,\ r = 1, ..., n_0 - 1, n_0 + 1, ..., N$$

de donde se obtiene que $\sum_{i=1}^{\infty} v_i < \infty$.

$(ii) \to (iii)$. Por hipótesis, $(v_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$. Esto implica que $\lim_{i\to\infty} v_i = 0$ y por la proposición 2.3 se deduce que B es hipercíclico.

Véase que B posee un conjunto denso de puntos periódicos. En primer lugar obsérvese que si una sucesión es periódica, entonces es un punto periódico para B. Por otro lado, como $(v_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$, toda sucesión periódica pertenece a $\ell^p(v)$. Véase que

$$H := \big\{\{x_i\}_{i\geq 1} \in \mathbb{K}^N : \{x_i\}_{i\geq 1} \text{ es una sucesión periódica}\big(\big\}$$

es denso en $\ell^p(v)$. Sea e_i, $i \in \mathbb{N}$ fijo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $(v_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^p$

$$\exists\, n_k \geq i : \sum_{j=n_k+1}^{\infty} (v_j)^p < (\frac{1}{k})^p,$$

Se define $z \in H$ como

$$z_j := \begin{cases} 1, & \text{si } j \equiv i \pmod{n_k}, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Se tiene que

$$\|z - e_i\|_k^p = \sum_{j=1}^{\infty}(v_{i+jn_k})^p \leq \sum_{j=n_k+1}^{\infty} (v_j)^p < (\frac{1}{k})^p$$

y por tanto $e_i \in \bar{H}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. La afirmación hecha en este punto queda demostrada si se toma en cuenta que H es un espacio vectorial y que $\text{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es densa en $\ell^p(v)$, con lo que B es caótico.

$(iii) \to (i)$ es trivial, con lo que la demostración se completa. $\square$

2.3 Dinámica de $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$

En esta sección se va a estudiar el caso de operador desplazamiento ponderado en un espacio de Banach de sucesiones. Concretamente, se está en la situación

$$B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v),\ B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \dots),$$

con $(w_i)_i$ y $(v_i)_i$ sucesiones de pesos positivos. Tal y como se ha mencionado en la introducción, la idea es representar B_w como un operador "no ponderado". Para ello se necesita trabajar con un espacio isomorfo a $\ell^p(v)$ y construir un diagrama conmutativo. Defínase

$$a_1 := 1,\ a_i := w_2 \dots w_i,\ i > 1,$$

y considérese el espacio $\ell^p(\bar{v})$ donde

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p},\ \text{para todo } i.$$

Tome

$$\phi_a : \ell^p(v) \to \ell^p(\bar{v}),\ \phi_a(x_1, x_2, \dots) := (a_1x_1, a_2x_2, \dots)$$

y constrúyase el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell^p(v) & \xrightarrow{B_w} & \ell^p(v) \\ {\scriptstyle \phi_a}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_a}\big\downarrow \\ \ell^p(\bar{v}) & \xrightarrow{B} & \ell^p(\bar{v}) \end{array}$$

Compruébese que ϕ_a es una isometría y que el diagrama conmuta. Para esto, sea $x = (x_i)_i \in \ell^p(v)$, se tiene

$$\|\phi_a(x)\|^p = \sum_{i=0}^{\infty} |a_ix_i|^p \bar{v}_i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left| \prod_{j=2}^{i} w_j x_i \right|^p \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p} = \|x\|^p.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\phi_a \circ B_w x &= \phi_a(w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \dots) \\
&= (w_2x_2, w_2w_3x_3, w_2w_3w_4x_4, \dots), \\
B \circ \phi_a(x) &= B(a_1x_1, a_2, x_2, a_3x_3, \dots) \\
&= B(x_1, w_2x_2, w_2w_3x_3, \dots) \\
&= (w_2x_2, w_2w_3x_3, w_2w_3w_4x_4, \dots).
\end{aligned}$$

Por conjugación se pueden obtener las caracterizaciones de hiperciclicidad, mezclante y chaos de $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ a partir de las que se obtuvieron en la sección anterior para $B : \ell^p(\bar{v}) \to \ell^p(\bar{v})$. Antes de ello recuérdese que la condición que asegura que $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ es un operador acotado toma en este contexto la forma

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} w_{j+1}^p \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty. \tag{2.2}$$

Teorema 2.6. Sea $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ cumpliendo la condición (2.2).

1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) $\liminf_i \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p} = 0$,

   (ii) $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ satisface el criterio de hiperciclicidad,

   (iii) $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ es hipercíclico.

2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) $\lim_{i\to\infty} \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p} = 0$,

   (ii) $B_w : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ es mezclante.

3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) B_w tiene un punto periódico no nulo,

   (ii) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p} < \infty$.

   (iii) B_w es caótico.

2.4 Dinámica de $B : X \to X$

El siguiente paso natural es el estudio de la dinámica del operador desplazamiento B en espacios de sucesiones más generales. Se comprobará en la siguiente sección que los resultados que se obtienen para B también los verifican los desplazamientos ponderados debido a que tales desplazamientos son conjugados de B (técnica similar a la usada en el caso de espacios de sucesiones de Banach).

El siguiente resultado, un tanto técnico, ayudará a simplificar la condición que caracteriza la hiperciclicidad de B.

Lema 2.7. Sea X un espacio métrico completo, $(v_n)_n$ una sucesión en X y $v \in X$. Suponer que existe una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos tales que

$$v_{n_k - j} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe una sucesión creciente $(m_k)_k$ de enteros positivos tales que

$$v_{m_k + j} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea d la métrica en X. Se sigue de la hipótesis que, para cualquier $k \geq 1$, existe algún $N_k \geq k$ tal que

$$d(v_{N_k - j}, v) < \frac{1}{k}, \quad j = 0, \ldots k.$$

Llamando $m_k = N_k - k$, $k \geq 1$, tenemos que

$$d(v_{m_k + k - j}, v) < \frac{1}{k}, \quad j = 0, \ldots k,$$

y, por tanto,

$$d(v_{m_k + l}, v) < \frac{1}{k}, \quad l = 0, \ldots k;$$

con lo cual, se tiene la afirmación cuando se pasa a una subsucesión creciente de $(m_k)_k$, si fuera necesario. $\square$

Por e_n, $n \in \mathbb{N}$, se denotan las sucesiones unidad canónicas, es decir,

$$e_n = (\delta_{n,k})_k = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots).$$

Si los e_n están contenidos en X y generan un subespacio denso entonces se pueden definir los desplazamientos ponderados de un modo alternativo, esto es

$$B_w(e_n) = (w_n e_{n-1}), \quad n \geq 1, \qquad \text{con} \;\; e_0 := 0.$$

La sucesión $(e_n)_n$ es una base del espacio X si cada e_n, $n \in \mathbb{N}$, pertenece a X y para cada $x \in X$,

$$x = \lim_{N \to \infty} (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Teorema 2.8. Sea X un espacio de sucesiones métrico completo en el cual $(e_n)_n$ es base. Supóngase que el desplazamiento B es un operador en X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) B es hipercíclico;

(ii) B es débil mezclante;

(iii) Existe una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos tal que

$$e_{n_k} \to 0 \;\; \text{en } X, \;\; \text{si} \;\; k \to \infty.$$

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ la F-norma que induce la topología de X.

(i)$\Rightarrow$(iii) Supóngase que B es hipercíclico. Se va a probar que, dados $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe algún $n \geq N$ verificando que $\|e_n\| < \varepsilon$. Así pues, fíjese $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.

Como $(e_n)_n$ es base del espacio de sucesiones X se deduce entonces que, para cada $x \in X$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

converge en X y, por tanto, la sucesión $(x_n e_n)_n$ está acotada.

El teorema de Banach-Steinhaus aplicado a los operadores

$$X \longrightarrow X, \quad x \longrightarrow x_n e_n, \quad n \geq 1,$$

implica que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| < \delta \implies \|x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad n \geq 1. \tag{2.3}$$

Más aún, puesto que la convergencia en X implica convergencia coordenada a coordenada, existe un $\eta > 0$ tal que

$$\|x\| < \eta \implies |x_1| \leq \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Ahora, sea x un vector hipercíclico de B con

$$\|x\| < \delta. \tag{2.5}$$

Debido a la transitividad, existe un $n \geq N$ tal que

$$\|B^{n-1}x - e_1\| < \eta. \tag{2.6}$$

Por (2.3), se sigue de (2.5) que

$$\|x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por (2.4), se sigue de (2.6) que

$$|x_n - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$|x_n^{-1} - 1| \leq 1.$$

De todo ello se deduce

$$\begin{aligned} \|e_n\| &= \|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n + x_n e_n\| \\ &\leq \|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n\| + \|x_n e_n\| \end{aligned}$$

$$\leq 2\|x_n e_n\| < \varepsilon.$$

(iii)⇒(ii) Para probar esta implicación se usará el Criterio de Hiperciclicidad 1.44. Se tomará como $Y_0 = Y_1$ el conjunto de sucesiones finitas el cual, por la hipótesis de que $(e_n)_n$ es base del espacio de sucesiones, es denso en X. Para S_n considérese la n-ésima iteración del desplazamiento a derecha, esto es, $S_n = F^n : X \longrightarrow X$ donde

$$F : X \longrightarrow X,\ F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Con esta elección, las condiciones (a) y (c) del criterio de hiperciclicidad son inmediatas. Para la condición (b), obsérvese que, por la continuidad de B,

$$B^j e_{n_k} = e_{n_k - j} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

para todo $j \geq 1$. Se sigue del lema 2.7 que existe una sucesión creciente $(m_k)_k$ de enteros positivos tales que

$$S_{m_k} e_j = e_{m_k + j} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

para todo $j \geq 1$, lo cual, por linealidad, implica la condición (b).

(ii)⇒(i) Se cumple para cualquier aplicación continua en un espacio métrico completo. □

Observación 2.9. Es bueno señalar que el hecho de que B esté bien definido y sea continuo es parte de las hipótesis. Es sencillamente una propiedad de X, es decir, si $Bx \in X$ para cada $x \in X$, entonces B es continuo en X. En otras palabras, para que B esté bien definido y sea continuo en X es suficiente comprobar que $(x_{i+1})_i$ pertenece a X para toda $(x_i)_i$ de X. Esto es fácil de comprobar para la mayoría de los casos concretos interesantes.

Usando el mismo razonamiento que en la prueba del Teorema 2.8, pero utilizando el criterio de Kitai (1.43) en lugar del criterio de hiperciclicidad (1.44), se obtiene una caracterización de la propiedad mezclante para B.

Teorema 2.10. Sea X un espacio de sucesiones métrico completo en el cual $(e_n)_n$ es base. Supóngase que el desplazamiento B es un operador en X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) B es mezclante;

(ii) $e_n \to 0$ en X, si $n \to \infty$.

En el caso del caos en este contexto más general también sucede como en el caso de los espacios $\ell^p(v)$. Procediendo como allí, pero con unas hipótesis ligeramente más fuertes sobre el espacio X, se obtiene fácilmente una condición que caracteriza el caos para B. Pero resulta que esta condición ya se deduce de la existencia de un único punto periódico no nulo.

Para el siguiente resultado es necesario que $(e_n)_n$ sea una base incondicional, es decir, que sea una base de X tal que para cualquier $(x_n)_n \in X$ y cualquier sucesión de ceros y unos $(\varepsilon_n)_n$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n e_n$$

converja en X (véase 1.52).

Teorema 2.11. Sea X un espacio de sucesiones métrico completo en el cual $(e_n)_n$ es una base incondicional. Supóngase que el desplazamiento B es un operador en X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) B es caótico;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ converge en X;

(iii) las sucesiones constantes pertenecen a X;

(iv) B tiene un punto periódico no nulo.

Demostración. (i)$\Longrightarrow$(iv) es trivial.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Sea $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \neq 0$ un punto periódico para B, es decir, una sucesión periódica. Sea N su periodo. Entonces existe algún $j \leq N$ tal que $x_j \neq 0$, y se tiene que $x_{j+\nu N} = x_j$ para $\nu \geq 0$. Escribiendo cero en todas las coordenadas con índices distintos de $j + \nu N$, por la incondicionalidad de las bases se tiene que

$$(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots) \in X$$

y, por tanto (dividiendo por x_j), también

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in X$$

donde las entradas no nulas se encuentran a distancia N.

Aplicando $(N-1)$ veces el operador desplazamiento B a dicha sucesión, y sumando los resultados, se ve que

$$(1, 1, 1, \ldots) \in X$$

de lo cual se deduce (iii).

(iii)$\Longrightarrow$(ii) es obvio.

(ii)$\Longrightarrow$(i) En primer lugar, la condición 2 implica que $e_n \longrightarrow 0$, por tanto, por el teorema 2.8, B es hipercíclico.

Ahora, puesto que $(1, 1, 1, \ldots) \in X$, la incondicionalidad de las bases implica que toda sucesión periódica de ceros y unos pertenece a X por tanto, por linealidad, toda sucesión periódica está en X. Pero estas sucesiones son precisamente los puntos periódicos de B. Queda por probar que éstos forman un conjunto denso en X.

Para ver esto, sea $x = (x_n)_n \in X$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que $(e_n)_n$ es una base, existe algún $N \geq 1$ tal que

$$\tilde{x} := \sum_{n=1}^{N} x_n e_n = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots)$$

se encuentra a una distancia de x menor que $\varepsilon/2$. La sucesión periódica asociada

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\nu N+n} e_{\nu N+n} =$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N, x_1, x_2, \ldots, x_N, x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots)$$

pertenece a X. La incondicionalidad de la base implica que existe algún $m \geq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{\nu=m}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{\nu N+n} x_{\nu N+n} e_{\nu N+n} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualquier sucesión de ceros y unos $(\varepsilon_n)_n$ (véase la sección 1.2.7). En particular tenemos que

$$\left\| \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\mu m N+n} e_{\mu m N+n} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto prueba que el punto periódico

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\mu m N+n} e_{\mu m N+n} =$$

$$(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0, x_1, \ldots),$$

con bloque repetidos de $(m-1)N$ ceros, se encuentra a una distancia de $\tilde{x}$ menor que $\varepsilon/2$ y, por tanto, a una distancia de x menor que ε. $\square$

2.5 Dinámica de $B_w : X \to X$

Ahora es sencillo trasladar los resultados obtenidos hasta este momento a desplazamientos ponderados arbitrarios mediante una conjugación apropiada. Sea B_w un operador desplazamiento ponderado en un espacio topológico de sucesiones X. Se definen nuevos pesos v_n como

$$v_n = \left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu \right)^{-1}, \; n \in \mathbb{N},$$

y considérese el espacio de sucesiones

$$X_v = \{(x_n)_n; \; (x_n v_n)_n \in X\}.$$

La aplicación

$$\phi_v : X_v \to X, \quad (x_n)_n \mapsto (x_n v_n)_n,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Se puede entonces introducir una topología en X_v transfiriéndola de la de X vía ϕ_v: un conjunto U es abierto en X_v si, y sólo si, $\phi_v(U)$ es abierto en X. Entonces ϕ_v es un homeomorfismo.

Más aún, para $(x_n)_n \in X_v$,

$$\begin{aligned} B_w(\phi_v(x_n)_n) &= B_w(v_n x_n)_n \\ &= (w_{n+1} v_{n+1} x_{n+1})_n \\ &= (v_n x_{n+1})_n \\ &= \phi_v(B(x_n)_n), \end{aligned}$$

es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_v \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\phi_v"'] & X_v \arrow[d, "\phi_v"] \\ X \arrow[r, "B_w"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta. Así pues, $B_w : X \to X$ y $B : X_v \to X_v$ son aplicaciones conjugadas. Obsérvese que X_v hereda de X la propiedad de que $(e_n)_n$ sea una base.

Por conjugación, utilizando las caracterizaciones de hiperciclicidad, mezclante y caos de la sección anterior, para $B_w : X \to X$ quedan de la siguiente manera.

Teorema 2.12. Sea X un espacio de sucesiones métrico completo en el cual $(e_n)_n$ forma una base y sea $B_w : X \to X$ un operador desplazamiento ponderado en X.

1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) B_w es hipercíclico;

   (ii) B_w es débil mezclante;

(iii) existe una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos tales que

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } X.$$

2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) B_w es mezclante;

(ii) la sucesión

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } X.$$

3. Si, además, la base $(e_n)_n$ es incondicional, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) B_w es caótico;

(ii) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n$$

converge en X;

(i) B_w tiene un punto periódico no nulo.

Observación 2.13. No se quiere finalizar la sección sin hacer un comentario acerca del motivo por el que se han estudiado desplazamientos a izquierda y no a derecha. La razón es que los desplazamientos a derecha no son hipercíclicos. De hecho, si $F_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, w_1x_1, w_2x_2, \ldots)$ entonces la primera coordenada de cada punto de la órbita de $(x_n)_n$ puede ser x_1 o 0. Puesto que la convergencia del espacio implica convergencia coordenada a coordenada, ninguna órbita puede ser densa.

2.6 Ejemplos y aplicaciones

En esta sección se presentan diversos ejemplos y aplicaciones. Se comienza con varios ejemplos que son casi una aplicación directa de las caracterizaciones anteriores, y se describen algunas aplicaciones más elaboradas como el caso del operador y espacio de Bergman y del operador derivada en el espacio de Fréchet de las funciones enteras y en espacios de funciones enteras de Hilbert.

2.6.1 Casos concretos

Ejemplo 2.14. El operador $B : \ell^1 \to \ell^1$ tiene norma 1 por lo que no puede ser hipercíclico.

Si se pondera el espacio mediante la sucesión

$$(v_i)_i = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots)$$

se tiene que $B : \ell^1(v) \to \ell^1(v)$ es hipercíclico pero no mezclante ni caótico.

Si se pondera el espacio mediante la sucesión

$$(v_i)_i = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

se tiene que $B : \ell^1(v) \to \ell^1(v)$ es mezclante pero no caótico.

Si se pondera el espacio mediante la sucesión

$$(v_i)_i = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots)$$

se tiene que $B : \ell^1(v) \to \ell^1(v)$ es caótico.

Ejemplo 2.15. En el espacio $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, toda serie $\sum_n a_n e_n$ converge. Así pues, todo desplazamiento ponderado $B_w : \omega \to \omega$ es caótico.

Ejemplo 2.16. Sea B_w un desplazamiento ponderado en un espacio de sucesiones ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ ó $p = 0$. Entonces, las respectivas caracterizaciones para que B_w sea hipercíclico, mezclante o caótico en ℓ^p son las siguientes:

$$\sup_{n\geq 1}\prod_{\nu=1}^{n}|w_\nu| = \infty; \quad \lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}|w_\nu| = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|w_\nu|^p} < \infty.$$

Obsérvese que únicamente la tercera condición depende del parámetro p.

Ejemplo 2.17. Véase que el Teorema 2.11 no se cumple si se prescinde de la hipótesis de incondicionalidad de la base $(e_n)_n$. Sea X el espacio de Banach de todas las sucesiones $(x_n)_n$ satisfaciendo

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1}\right| < \infty \text{ y } \frac{x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

El desplazamiento B es hipercíclico (incluso mezclante) en X porque satisface las condiciones del teorema (2.10). Además, cumple las cuatro condiciones del teorema (2.11); sin embargo, no es caótico porque los únicos puntos periódicos son las sucesiones constantes.

En efecto, supóngase que $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \neq 0$ sea un punto periódico, de periodo N. Entonces existe un $j \leq N$ tal que $x_j \neq 0$ y, para $\nu \geq 1$, se cumple $x_{j+\nu N} = x_j$. Con lo cual,

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N}|x_k - x_{k+1}|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{jN+k+1} + \\ &\quad \sum_{k=1}^{N}|x_k|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(jN+k)(jN+k+1)}\end{aligned}$$

converge si, y sólo si,

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \cdots = |x_N - x_1| = 0,$$

es decir, si y sólo si,

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_N.$$

Ejemplo 2.18. Sea $\lambda_p(A)$, $1 \leq p < \infty$ ó $p = 0$, el espacio escalonado de Köthe donde $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ es una matriz de Köthe y sea $w = (w_n)_n$ una sucesión de pesos. Entonces B_w es un operador en $\lambda_p(A)$ si, y sólo si, la matriz A y la sucesión w satisfacen

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n : \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_{j+1}| \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty.$$

Aplicando las caracterizaciones anteriores a $B_w : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A)$, y teniendo en cuenta que su topología viene definida por una sucesión de seminormas que 'proceden' de la matriz de Köthe A, se tiene que

1. B_w es hipercíclico si, y sólo si,
$$\text{para cada } k \in \mathbb{N},\ \liminf_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,k}}{|w_2 \cdots w_j|} = 0$$

2. B_w es mezclante si, y sólo si,
$$\text{para cada } k \in \mathbb{N},\ \lim_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,k}}{|w_2 \cdots w_j|} = 0$$

3. B_w es caótico si, y sólo si,
$$\text{para cada } k \in \mathbb{N},\ \left(\frac{a_{j,k}}{|w_2 \cdots w_j|}\right)_j \in \ell^p$$
$$\text{(resp. } \left(\frac{a_{j,k}}{|w_2 \cdots w_j|}\right)_j \in c_0 \text{ si } p = 0).$$

2.6.2 Espacios de Bergman generalizados

Para una función $\beta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ se considera el espacio $H^2(\beta)$ que consiste en todas las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n,$$

donde

$$\|f\|_\beta^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \beta(n) < \infty.$$

Si la sucesión $\beta(n)$ se fija en la constante 1, es decir, si $\beta(n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $H^2(\beta)$ es el espacio usual de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ de las funciones holomórfas en el disco unitario.

Si $\beta(n) = \frac{1}{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}_0$ a $H^2(\beta)$ se le llama espacio de Bergman, el cual se denota usualmente por A^2.

Se denota por T el operador desplazamiento hacia atrás de Bergman definido en $H^2(\beta)$ de manera tal que

$$T(z^{n+1}) = z^n, \;\; n \in \mathbb{N}_0, \;\; T(1) = 0.$$

Extendido por linealidad y sobre funciones $f(z)$ toma la forma

$$Tf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n+1) z^n = \frac{1}{z}(f(z) - f(0)).$$

Para que T sea un operador acotado en $H^2(\beta)$ es necesario y suficiente que

$$\sup_{n \geq 0} \frac{\beta(n+1)}{\beta(n)} < \infty. \tag{2.7}$$

Debido a que algunos operadores pueden ser representados como un operador desplazamiento B definido sobre un espacio de sucesiones adecuado, se pueden utilizar las caracterizaciones de hiperciclicidad, mezclante y caos de operadores desplazamiento en dichos espacios, para estudiar la dinámica de $T : H^2(\beta) \to H^2(\beta)$. Para tal fin se va a tomar el espacio $\ell^2(v)$ en el cual $v_i = \beta(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. A continuación se define la aplicación

$$\phi : H^2(\beta) \to \ell^2(v),$$

tal que

$$\phi(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Se tiene que ϕ es obviamente lineal y biyectiva, además

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n\|_{H^2(\beta)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\beta(n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 v_n\\ &= \|(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^2(v)}^2.\end{aligned}$$

es decir, ϕ es una isometría entre $H^2(\beta)$ y $\ell^2(v)$. Se construye el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^2(\beta) & \xrightarrow{T} & H^2(\beta)\\ {\scriptstyle\phi}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\Big\downarrow\\ \ell^2(v) & \xrightarrow{B} & \ell^2(v)\end{array}$$

el cual es conmutativo ya que

$$\begin{aligned}\phi\circ T(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n) &= \phi(T(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n))\\ &= \phi(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)Tz^n))\\ &= \phi(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n+1)z^n))\\ &= (\hat{f}(n+1))_{n\in\mathbb{N}_0},\\ \beta\circ\phi(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n) &= B(\phi(\sum_{n=0}^{\infty})\hat{f}(n)z^n)\\ &= B(\hat{f}(n))\\ &= (\hat{f}(n+1))_{n\in\mathbb{N}_0}.\end{aligned}$$

Este resultado muestra que el diagrama es conmutativo. En esta situación se cumple que T es hipercíclico, mezclante o caótico en $H^2(\beta)$ si y solo si, B es hipercíclico, mezclante o caótico en $\ell^2(v)$. Trasladando la correspondiente condición para $B : \ell^2(v) \to \ell^2(v)$ a $T : H^2(\beta) \to H^2(\beta)$ se tiene que

1) T es hipercíclico en $H^2(\beta)$ si y solo si, $\liminf_{n\to\infty} \beta(n) = 0$

2) T es mezclante en $H^2(\beta)$ si y solo si, $\lim_{n\to\infty} \beta(n) = 0$

3) T es caótico en $H^2(\beta)$ si y solo si, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) < \infty$

2.6.3 Operador derivada en espacios de Hilbert de funciones enteras

Sea $\gamma(z)$ una función de comparación admisible, esto es, los $\gamma_i > 0$ para toda $i \in N_0$ son los coeficientes de Taylor de $\gamma(z)$ y la sucesión

$$(\frac{i\gamma_i}{\gamma_{i-1}})_{i\geq 1}$$

es monótonamente decreciente.

Considérese el espacio de Hilbert $E^2(\gamma)$ formado por las funciones enteras

$$g(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i)z^i$$

para las cuales

$$\|g\|_\gamma^2 := \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{g}(i)|^2\gamma_i^{-2} < \infty.$$

En este espacio se considera el operador derivada D, es decir,

$$D(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i)z^i) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\hat{g}(i+1)z^i.$$

La condición de que $(\frac{i\gamma_i}{\gamma_{i-1}})_{i\geq 1}$ sea una sucesión monótona decreciente asegura que D es un operador acotado.

Considérese el espacio $\ell^2(v)$ donde $v_i = \frac{1}{\gamma_i^2}$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$. Si ahora se define

$$\phi : E^2(\gamma) \to \ell^2(v)$$

tal que

$$\phi(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i)z^i) = (\hat{g}(i))_{i\geq 0}$$

Se tiene que ϕ es lineal, biyectiva y, además, una isometría ya que

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{E^2(\gamma)} &= \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{g}(i)|^2 \gamma_i^{-2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{g}(i)|^2 u_i \\
&= \|(\hat{g}(i))_{i\geq 0}\|^2_{\ell^2(v)}.
\end{aligned}$$

Ahora considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
E^2(\gamma) & \xrightarrow{D} & E^2(\gamma) \\
{\scriptstyle\phi}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\Big\downarrow \\
\ell^2(v) & \xrightarrow{B_w} & \ell^2(v)
\end{array}$$

donde $B_w : \ell^2(v) \to \ell^2(v)$ es el operador desplazamiento ponderado

$$B_w(x_0, x_1, x_2, ...) = (w_1x_1, w_2x_2, w_3x_3, ...)$$

con $w_i = i$ para $i \geq 1$. Se tiene que el diagrama es conmutativo ya que

$$\begin{aligned}
\phi \circ D(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i)z^i) &= \phi(D(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i)z^i)) \\
&= \phi(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\hat{g}(i+1)z^i) \\
&= ((i+1)\hat{g}(i+1))_{i\geq 0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_w \circ \phi(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i) z^i) &= B_w(\phi\ (\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(i) z^i)) \\ &= B_w(\hat{g}(i))_{i\geq 0} \\ &= (i+1)\hat{g}(i+1)_{i\geq 0}. \end{aligned}$$

Por conjugación topológica se concluye que la dinámica del operador D en $E^2(\gamma)$ coincide con la de B_w en $\ell^2(v)$, por lo tanto

1) D es hipercíclico en $E^2(\gamma)$ si y solo si, $\liminf_{n\to\infty} \gamma(n) = 0$

2) D es mezclante en $E^2(\gamma)$ si y solo si, $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = 0$

3) D es caótico en $E^2(\gamma)$ si y solo si, $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma(n) < \infty$.

2.6.4 Operador derivada $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Considérese el espacio de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de todas las funciones enteras, dotado con la topología de la convergencia uniforme en conjuntos compactos. Aunque este espacio puede ser descrito como un espacio escalonado de Köthe, en esta ocasión se van a aplicar las caracterizaciones obtenidas para F-normas.

La topología de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ está inducida por las seminormas

$$p_n(f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|,\ n \geq 1$$

y, entonces, también por la correspondiente F-norma.

Identificando una función entera

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

con la sucesión de sus coeficientes de Taylor en 0

$$(a_k)_{k\geq 0}$$

se puede considerar $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ como un espacio de sucesiones. Nótese que los elementos de la base canónica e_n en el espacio de sucesiones corresponden a los monomios z^n en el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si además se toma en cuenta la fórmula del radio de convergencia de las series de Taylor, se tiene que una sucesión $(a_n e_n)_n$ converge a 0 si y solo si $a_n z^n$ converge a 0 en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, si y solo si $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n < \infty$ para todo $R > 0$, si y solo si $|a_n|^{1/n}$ converge a 0. Es decir, el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ puede ser representado como el espacio de sucesiones

$$\left\{(a_n)_{n\geq 0} : \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0\right\} = \left\{(a_n)_{n\geq 0} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty,\ R \geq 1\right\}.$$

Es fácil probar que el operador desplazamiento ponderado B_w es continuo en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ si y solo si $\sup_{n\geq 1} |w_n|^{1/n} < \infty$.

El Teorema 2.12 prueba que un desplazamiento ponderado B_w en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es mezclante si, y sólo si, es caótico, y que las condiciones que caracterizan la hiperciclicidad y el caos/mezclante son, respectivamente,

$$\sup_{n\geq 1} \left(\prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu|\right)^{1/n} = \infty; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu|\right)^{1/n} = \infty.$$

En particular, para el operador derivada en el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ se tiene que

$$D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

de modo que D es un desplazamiento ponderado con la sucesión de pesos $w_n = n$, $n \geq 0$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} \infty,$$

se tiene que D es hipercíclico; de hecho es también mezclante y caótico.

Sin embargo, para probar que D es caótico es suficiente, como ya se ha visto, dar un punto periódico no nulo; el ejemplo más fácil es la función $f(z) = e^z$, que es obviamnete un punto fijo para el operador derivada. Abusando del lenguaje, se podría decir que la función exponencial hace que D sea caótico.

Capítulo 3

Recurrencia para operadores desplazamiento

3.1 Resumen

En este capítulo se estudian propiedades de recurrencia para operadores desplazamiento en espacios de sucesiones. Primero se prueba que el operador desplazamiento a izquierda es recurrente si y sólo si es hipercíclico, es decir, si es topológicamente transitivo. Se caracterizan también operadores desplazamiento que admiten puntos producto recurrentes no nulos como caóticos en el sentido de Devaney. Se dan ejemplos de operadores desplazamiento ponderados que admiten puntos que son recurrentes y distales, pero no producto recurrentes, en contraste con la dinámica en conjuntos compactos. Se observa también que existen operadores con vectores que son producto recurrente pero que tienen órbita no acotada. Se finaliza el capítulo generalizando los resultados probados para operadores desplazamiento definidos en espacios de Banach de sucesiones a un contexto más general, en concreto a F-espacios o espacios de Fréchet de sucesiones.

Los resultados de este capítulo, a excepción de las generalizaciones incluidas en la Sección 3.5, han sido publicados en la revista de investigación Applied Mathematics & Information Sciences [26].

3.2 Introducción y preliminares

El interés en el estudio de propiedades recurrentes en la dinámica de aplicaciones en conjuntos compactos fue comenzado por Furstenberg [23, 24, 25] en los años 60 cuando se obtuvieron importantes resultados y caracterizaciones. Más información sobre resultados posteriores, generalizaciones, etcétera pueden encontrarse en las referencias [1, 21, 28, 35, 49, 50]. En el contexto de la dinámica lineal se han producido también avances recientes en [14, 18, 53]).

Aunque ya han sido citadas en el capítulo de conceptos básicos, se incluyen aquí brevemente algunas de las definiciones que serán utilizadas más adelante. Dado un espacio métrico (X, d), una aplicación continua $f : X \to X$, un punto $x \in X$, y un subconunto $A \subset X$, se denotará el conjunto de recurrencia o retorno de x a A por

$$N(x, A) = \{n \geq 0 \ ; \ f^n x \in A\}.$$

Un punto $x \in X$ se dice que es *recurrente* si $N(x, U)$ es infinito para cada entorno U de x. Cuando el espacio X es compacto, un punto $x \in X$ se dice que es *producto recurrente* si dado cualquier punto recurrente y de cualquier sistema dinámico (Y, g), con Y un espacio métrico compacto, se cumple que el par (x, y) es un punto recurrente para el sistema dinámico producto $(X \times Y, f \times g)$.

Un par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se dice que es *proximal* si existe una sucesión creciente de naturales $(n_k)_k$ tal que

$$\lim_k d(f^{n_k} x_1, f^{n_k} x_2) = 0.$$

Un punto $x \in X$ se dice que es *distal* si no es proximal a ningún punto de la clausura de su órbita, a excepción obviamente de sí mismo.

Furstenberg [24] probó que, en un espacio métrico compacto, los puntos que son producto recurrentes coinciden con los puntos recurrentes que son distales. Actos después, Auslander y Furstenberg preguntaron en [3] sobre puntos x que fueran recurrentes en pares con cualquier otro punto y uniformemente recurrente (i.e. puntos y tales que $N(y, U)$ es sindético para todo entorno U de x), en cualquier sistema dinámico definido sobre un espacio métrico compacto. Todavía no se conoce una descripción completa de cómo son dichos puntos x, sin embargo se sabe que dichos puntos no tienen porqué ser distales. Este hecho fue probado por Haddad y Ott y de hecho x no tiene ni siquiera porqué ser uniformemente recurrente [35]. Más tarde, otras condiciones suficientes para este tipo de producto recurrencia fueron probadas en [21] y [49].

El contexto del trabajo a partir de ahora son los espacios vectoriales topológicos metrizables y completos, es decir, estamos interesados en la dinámica de operadores lineales y continuos $T : X \to X$, donde X es un espacio vectorial topológico metrizable y completo (F-espacio). Es bien sabido que X nunca puede ser un espacio compacto, ni siquiera en el caso finito dimensional ya que es fácil probar que en esta situación X es topológicamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$, el producto finito del cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.

El concepto de recurrencia es perfectamente válido en este contexto, pero el concepto de producto recurrencia necesita ser adaptado, y la siguiente definición parece ser la adaptación natural. Un vector $x \in X$ es *producto recurrente* con respecto al operador T si (x, y) es recurrente para $(X \times Y, T \times R)$ para cualquier vector recurrente $y \in Y$ con respecto a cualquier operador $R : Y \to Y$ definido en un F-espacio Y.

Se finaliza con los preliminares necesarios con algunas nociones básicas de combinatoria que serán utilizadas más adelante.

i. Un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ es *grueso* si para cada $n > 0$ existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que
$$\{i, i + 1, ..., i + n\} \subset A.$$

ii. Un subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ es *sindético* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$[i, i + N] \cap S \neq \emptyset.$$

iii. Un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ es un *IP-conjunto* si existe una sucesión $(p_i)_i$ en $\mathbb{N}$ tal que
$$p_{n_1} + \cdots + p_{n_k} \in A,$$
siempre que $0 \leq n_1 < \cdots < n_k$, $k \geq 2$, donde $p_0 := 0$.

iv. Un subconjunto $D \subset \mathbb{N}$ es un *IP*-conjunto* si intersecta cualquier IP-conjunto.

Se sabe que los IP*-conjuntos son sindéticos. Furstenberg también probó que cada conjunto grueso contiene un IP-conjunto (véase [24, Lemma 9.1]). En conexión con el concepto de recurrencia, si x es un punto recurrente, entonces $N(x, U)$ es un IP-conjunto para todo entorno U de x (véase [24, Theorem 2.17]). Además, dado cualquier IP-conjunto A, podemos encontrar un punto recurrente y para la aplicación desplazamiento a izquierda definida en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (conjunto de las sucesiones de 0's y 1's), tal que $N(y, V) \subset A$ para algún entorno V de y (véase este hecho en la prueba de [24, Theorem 2.17]). Para consultar más propiedades de los IP-conjuntos y sus conexiones con la recurrencia puede consultarse la monografia [24].

Como la aplicación desplazamiento a la izquierda definida en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ se puede 'inscrustar' de manera natural en el operador desplazamiento a izquierda definido en el espacio de sucesiones ponderado $X = \ell^p(v)$ (o $X = c_0(v)$) con sucesión de ponderación $(v_i)_i$ de manera que sea caótico en el sentido de Devaney (véase por ejemplo [6, 48]), resulta que la observación anterior sigue siendo cierta para operadores lineales. es decir, se tiene que sistemas dinámicos compactos o para dinámica lineal de operadores en F-espacios, los puntos x producto recurrentes son exactamente aquellos para los que $N(x, U)$ es un IP*-conjunto para todo entorno U de x.

3.3 Producto recurrencia de B en ℓ^p y c_0

En esta sección se obtienen caracterizaciones para operadores desplazamientos a izquierda que admiten puntos (distintos de cero) recurrentes y puntos producto recurrentes; cuando dichos operadores están definidos en los espacios de sucesiones de Banach $X = \ell^p(v)$ y $c_0(v)$, se verá que la existencia de puntos recurrentes y puntos producto recurrentes para dichos operadores es respectivamente equivalente a la transitividad y al caos de Devaney.

Se recuerda que el operador desplazamiento a izquierda ponderado sobre un espacio de sucesiones está definido como

$$B_w(x_1, x_2, \dots) = (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots),$$

y que se escribe B en el caso $w = (1)_i$. En esta sección se considera B_w definido en alguno de los espacios

$$\ell^p(v) := \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\| := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \, v_i \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

o

$$c_0(v) := \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{i \to \infty} |x_i| \, v_i = 0, \; \|x\| := \sup_i |x_i| \, v_i \right\},$$

y que el operador B_w está acotado en dichos espacios si y solo si se satisface la condición

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \left| w_{i+1}^p \right| \frac{v_i}{v_{i+1}} < \infty. \tag{3.1}$$

Se comienza observando la equivalencia entre recurrencia y transitividad del operador B. Este resultado ya fue probado en [14, 53] y se incluye aquí una demostración distinta en aras de presentar los resultados de manera completa y natural.

Teorema 3.1. Sea $B : X \to X$ el desplazamiento a izquierda sobre $X = \ell^p(v)$ o $c_0(v)$ satisfaciendo la condición (3.1). Entonces B admite un punto $x \neq 0$ recurrente, si y sólo si, B es transitivo.

Demostración. Supóngase que $0 \neq x \in X$ es un punto recurrente para B. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq 0$ y fijemos $U := \{y \in X : |y_i| > \frac{|x_i|}{2}\}$; conjunto que es, obviamente, un entorno de x. Dado que $N(x, U)$ deberá ser infinito, se puede encontrar una sucesión creciente $(n_k)_k$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$B^{n_k} x \in U, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

En otras palabras, $|x_{i+n_k}| > \frac{|x_i|}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Supóngase que estamos en el caso $X = \ell^p(v)$. Dado que $x \in X$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} v_{i+n_k} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} v_{i+n_k}\,|x_{i+n_k}|^p\,\frac{1}{|x_{i+n_k}|^p}\\ &\leq \frac{2^p}{|x_i|^p}\sum_{k\in\mathbb{N}}|x_{i+n_k}|^p v_{i+n_k}\\ &\leq \frac{2^p}{|x_i|^p}\|x\|^p < \infty.\end{aligned}$$

En particular, $\lim_k v_{i+n_k} = 0$ y esto implica que B es transitivo (caracterizaciones para transitividad de operadores desplazamientos a izquierda sobre X son bien conocidas y se han incluido en el Capítulo I (1) o también pueden consultarse en [33] y [34].

En el caso en que $X = c_0(v)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{k\in\mathbb{N}} v_{i+n_k} &= \lim_{k\in\mathbb{N}} v_{i+n_k}\,|x_{i+n_k}|\,\frac{1}{|x_{i+n_k}|}\\ &\leq \frac{2}{|x_i|}\lim_{k\in\mathbb{N}} v_{i+n_k}\,|x_{i+n_k}| = 0.\end{aligned}$$

Recíprocamente, si B es transitivo, entonces es hipercíclico, es decir, admite vectores con órbita densa. Obviamente, todo vector hipercíclico es recurrente. $\square$

Observación 3.2. Antes de probar el siguiente resultado que caracteriza producto recurrencia se sugiere observar que si x es un punto recurrente para cierto operador T, y existe un entorno U de x tal que $N(x, U)$ no es un conjunto sindético entonces, como se dijo al introducir este capítulo, uno puede construir un IP-conjunto $J \subset \mathbb{N}\backslash N(x, U)$ y un punto recurrente y para el desplazamiento a izquierda B en, por ejemplo, $\ell^1(v)$ con $v_k = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $N(y, V) \subset J$ para algún entorno V de y. Se tiene entonces que x no puede ser producto recurrente para el operador T.

Teorema 3.3. Sea $B : X \to X$ el desplazamiento a izquierda sobre $X = \ell^p(v)$ o $c_0(v)$ satisfaciendo la condición (3.1). Entonces B admite un punto $x \neq 0$ producto recurrente, si y sólo si, B es Devaney caótico.

Demostración. Supóngase que $0 \neq x \in X$ es un punto producto recurrente para B. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq 0$ y tómese $U := \{y \in X : |y_i| > \frac{|x_i|}{2}\}$, conjunto que es entorno de x. Por la Observación 3.2 se tiene que $N(x, U)$ es necesariamente un conjunto sindético. Sea $l > i$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\subset N(x, U) - [0, l] \\ &:= \{m - n : m \in N(x, U),\ n \in \{0, 1, \dots, l\}\}.\end{aligned}$$

Se encuentra entonces una sucesión creciente $(n_k)_k$ en $\mathbb{N}$ tal que $n_k - n_{k-1} \leq l$ y $|x_{n_k}| > \frac{|x_i|}{2}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, donde $n_0 := 1$.

Supóngase que estamos en el caso $X = \ell^p(v)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathbb{N}} v_j &\leq \sum_{s=0}^{l} \sum_{k=1, n_k > s}^{\infty} v_{n_k - s} \\ &< \frac{2}{|x_i|^p} \sum_{s=0}^{l} \sum_{k=1, n_k > s} |x_{n_k}|^p v_{n_k - s} \\ &\leq \frac{2}{|x_i|^p} \sum_{s=0}^{l} \|B^s x\|^p < \infty.\end{aligned}$$

Esto implica que B es Devaney caótico (como en la demostración anterior, dichas caracterizaciones pueden consultarse en el Capítulo I (1) o en [33, 34]).

Como en la prueba del teorema (3.1) el caso en que $X = c_0(v)$ es análogo usando la norma suprema.

Recíprocamente, si B es caótico entonces admite puntos periódicos no nulos, puntos que son producto recurrentes. □

Para terminar esta sección se plantea la situación más general en la que se tenga un operador desplazamiento ponderado definido en un espacio ℓ^p también ponderado. El enunciado de esta situación más general es conveniente ya que es útil para aplicarlo a operadores que pueden ser representados como operadores desplazamiento ponderados en espacios ℓ^p ponderados. Otra ventaja de estas caracterizaciones generales es que se enuncian en términos de las sucesiones de ponderación del operador y del espacio. La técnica para obtener el correspondiente resultado será mediante el uso de un diagrama de conjugación; esta técnica ya ha sido explicada en la Sección 2.3 del Capítulo 2 (véase también [34, Chapter 4]).

Sea pues un operador desplazamiento ponderado

$$B_w(x_1, x_2, x_3, ...) := (w_2 x_2, w_3 x_3, ...),$$

definido sobre un espacio ponderado $\ell^p(v)$.

La clave en esta situación está en observar que este caso puede ser reducido al anterior vía una conjugación topológica. Para ello se define

$$a_1 := 1; \quad a_i := w_2 ... w_i, \quad i > 1,$$

y se considera el espacio $\ell^p(\bar{v})$ donde la sucesión de pesos $\bar{v}$ viene dada por

$$\bar{v_i} = \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p}, \ \forall i.$$

Ahora se toma la transformación $\phi_a : \ell^p(v) \to \ell^p(\bar{v})$ definida como

$$\phi_a(x_1, x_2, ...) := (a_1 x_1, a_2 x_2, ...)$$

y con ella se construye el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \ell^p(v) & \xrightarrow{B_w} & \ell^p(v) \\ {\scriptstyle \phi_a}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_a}\Big\downarrow \\ \ell^p(\bar{v}) & \xrightarrow{B} & \ell^p(\bar{v}) \end{array}$$

es decir, $\phi_a \circ B_w = B \circ \phi_a$. Se cumple que ϕ_a es una isometría, es decir

$$\|x\|_{\ell^p(v)} = \|\phi(x)\|_{\ell^p(\bar{v})},$$

y entonces por conjugación topológica se tiene que $\varphi(B)$ es transitivo (Devaney caótico) sobre $\ell^p(\bar{v})$ si y sólo si $\varphi(B_w)$ es transitivo (Devaney caótico) sobre $\ell^p(v)$. Notar que

$$B^n = (\phi_a o B_w o \phi_a^{-1})^n = \phi_a o B_w^n o \phi_a^{-1},$$

es decir, el diagrama también conmuta para cualquier iteración de los operadores.

Corolario 3.4. Para un operador desplazamiento a izquierda ponderado acotado B_w definido en $X = \ell^p(v)$, con $1 \leq p < \infty$, (respectivamente, en $X = c_0(v)$) satisfaciendo la condición (3.1). Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\text{ínf}_{i\in\mathbb{N}} \frac{v_i}{\prod_{j=1}^{i} |w_j^p|} = 0.$

ii) B_w admite un punto recurrente;

iii) B_w es topológicamente transitivo.

También, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{\prod_{j=1}^{i} |w_j^p|} < \infty$ (respectivamente, $\text{lím}_{i\to\infty} \frac{v_i}{\prod_{j=1}^{i} |w_j|} = 0$).

ii) B_w admite un punto producto recurrente.

iii) B_w es Devaney caótico.

Resultados similares al anterior en un contexto todavía más general son también ciertos y se obtienen en la Sección 3.5.

3.4 Producto recurrencia de $B : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Esta sección está dedicada al estudio particular del operador desplazamiento cuando se considera definido en el producto numerable del cuerpo de escalares $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En este caso el principal problema es que la mayor parte de las técnicas utilizadas para los sistemas dinámicos compactos no se pueden utilizar en este contexto, ya que incluso puede aparecer la situación de encontrar órbitas no acotadas. Este hecho también afecta la distalidad de los puntos. Los siguientes dos ejemplos ilustran este tipo de fenómeno.

Ejemplo 3.5. Sea $B : X \to X$ el desplazamiento a izquierda definido en el espacio de las sucesiones $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, producto numerable del cuerpo de escalares. Se recuerda aquí que (X, d) es un espacio métrico completo con la métrica

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

Existen puntos x distales y producto recurrentes cuya órbita es no acotada. En efecto, considérense los bloques

$$\begin{aligned} P_1 &= (1),\\ &\vdots\\ P_{n+1} &= (n+1, P_1, \dots, P_n),\ n\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

y el vector

$$x=(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots),$$

esto es

$$\begin{aligned} P_1 &= (1)\\ P_2 &= (2,1)\\ P_3 &= (3,1,2,1)\\ P_4 &= (4,1,2,1,3,1,2,1)\\ &\vdots\\ x &= (1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1,\\ &\quad 5,1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1,\dots). \end{aligned}$$

Como la convergencia en el espacio X coincide con la convergencia coordenada a coordenada, se tiene que la clausura de la $\mathrm{Orb}(x)$ coincide con la $\mathrm{Orb}(x)$ en sí misma. De lo contrario, se tendría una sucesión de vectores tal que para algún índice las coordenadas correspondientes no están acotadas, por lo que la sucesión de vectores no podría converger. Por lo tanto, el hecho de que x es un punto distal es una consecuencia fácil de ver.

Además, por la construcción de x se tiene que, para cada entorno U de x, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $m\mathbb{N}\subset N(x,U)$. En particular, $N(x,U)$ es un IP*-conjunto y por lo tanto x es producto recurrente.

Ejemplo 3.6. Como antes, sea $B : X \to X$ el desplazamiento a izquierda definido en el espacio de las sucesiones $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, producto numerable del cuerpo de escalares, y considere en X la misma métrica del Ejemplo 3.5.

Véase que existen puntos distales y que no son producto recurrentes. Se modifica ligeramente la construcción anterior de manera que

$$\begin{aligned} P_1 &= (1), \\ &\vdots \\ P_{n+1} &= (n+1, \overset{(n)}{\ldots}, n+1, P_1, \ldots, P_n), \;\; n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde la cantidad de $n+1$'s al comienzo del bloque P_{n+1} es igual a n, y definimos el vector

$$y = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots)$$

que es,

$$\begin{aligned} P_1 &= (1) \\ P_2 &= (2, 1) \\ P_3 &= (3, 3, 1, 2, 1) \\ P_4 &= (4, 4, 4, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1) \\ &\vdots \\ y &= (1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 4, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, \\ &\quad 5, 5, 5, 5, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 4, 1, 2, 1, 3, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Como antes, la clausura de $\mathrm{Orb}(y)$ coincide con la misma $\mathrm{Orb}(y)$, e y es un punto distal. Pero ahora $N(x, U)$ no es sindético para, por ejemplo, $U := \{z \in X : |z_1| < 2\}$. Por la Observación 3.2 se tiene que y no es producto recurrente.

Observación 3.7. Téngase en cuenta que si (X, T) es un sistema dinámico compacto y $x \in X$ es un punto distal, entonces x es producto recurrente. Por esta razón, en el Ejemplo 3.6, es esencial el hecho de que $\mathrm{Orb}(y)$ no sea un conjunto compacto.

3.5 Producto recurrencia de B en espacios de sucesiones generales

A partir de estos primeros resultados, el estudio de la recurrencia y la producto recurrencia se generaliza al contexto de los espacios de Fréchet y los F-espacios de sucesiones. En esta sección se prueban los resultados equivalentes en este contexto general, es decir, que la existencia de puntos recurrentes diferentes de cero es equivalente a la transitividad para desplazamientos a izquierda en F-espacios de sucesiones y la existencia de puntos diferentes de cero producto recurrentes es equivalente al caos de Devaney para desplazamientos a izquierda en espacios Fréchet de sucesiones en que la base canónica de vectores unitarios $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional (para más detalles sobre el manejo de esta técnica, véase la Sección 2.4 o [34, Chapter 4]).

3.5.1 Recurrencia y transitividad

Teorema 3.8. Sea X un F-espacio de sucesiones en el cual $(e_n)_n$ es una base. Sea $B : X \to X$ el operador desplazamiento a izquierda continuo. Entonces B admite un vector x no nulo recurrente, si y sólo si, B es transitivo.

Demostración. Sea $\|.\|$ la F-norma que induce la topología del espacio X. Supóngase que $0 \neq x \in X$ es un vector recurrente de B. Como $x \neq 0$, sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq 0$ y tómese el entorno de x

$$U := \{y \in X : |y_i| > \frac{|x_i|}{2}\}.$$

Dado que el conjunto de retorno $N(x, U)$ es infinito, se puede encontrar una sucesión creciente $(n_k)_k$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$B^{n_k}x \in U, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que

$$|x_{i+n_k}| > \frac{|x_i|}{2}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, por las equivalencias de transitividad para el operador B en F-espacios (Teorema 2.8), es suficiente probar que dados $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n > N$ tal que $\|e_n\| < \varepsilon$.

Fijemos pues $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ converge a x en X, cuando $n \to \infty$, se tiene que el término general de la sucesión $(x_j e_j)_j$ tiende a cero, luego existe un $M > N$ tal que

$$\|x_j e_j\| < \varepsilon \frac{|x_i|}{2 + |x_i|}, \ \forall j \geq M.$$

Tomando n_k tal que $i + n_k \geq M$, $n := i + n_k$ y aplicando propiedades de F-normas se obtiene

$$\begin{aligned}
\|e_n\| &= \|e_{i+n_k}\| \\
&= \left\| \frac{1}{x_{i+n_k}} x_{i+n_k} e_{i+n_k} \right\| \\
&\leq \left(\frac{1}{|x_{i+n_k}|} + 1 \right) \|x_{i+n_k} e_{i+n_k}\| \\
&\leq \left(\frac{2}{|x_i|} + 1 \right) \|x_{i+n_k} e_{i+n_k}\| \\
&< \left(\frac{2}{|x_i|} + 1 \right) \varepsilon \frac{|x_i|}{2 + |x_i|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si B es transitivo, entonces es hipercíclico y todo vector hipercíclico es recurrente. □

Teniendo en cuenta las equivalencias ya conocidas para hiperciclicidad de B en F-espacios de sucesiones y que recurrencia y transitividad son equivalentes en nuestro contexto, se puede enunciar el siguiente resultado.

Corolario 3.9. Sea X un F-espacio de sucesiones en el cual $(e_n)_n$ es una base. Sea $B : X \to X$ el operador desplazamiento a izquierda continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B admite un vector x no nulo recurrente.

ii) B es transitivo.

iii) B es hipercíclico.

iv) B es débil mezclante.

v) Existe una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos tal que $e_{n_k} \to 0$ en X, cuando $k \to \infty$.

Ahora, con un proceso similar al mostrado en la Sección 2.5 para la conjugación topológica y considerando las equivalencias para la recurrencia y la transitividad se obtiene el resultado correspondiente para operadores desplazamientos a izquierda ponderados en F-espacio de sucesiones. Se puede plantear entonces el siguiente corolario.

Corolario 3.10. Sea X un F-espacio de sucesiones en el cual $(e_n)_n$ es una base. Sea $B_w : X \to X$ el operador desplazamiento a izquierda ponderado continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B_w admite vector x no nulo recurrente.

ii) B_w es transitivo.

iii) B_w es hipercíclico.

iv) B_w es débil mezclante.

v) Existe una sucesión creciente $(n_k)_k$ de enteros positivos tal que

$$\left(\prod_{v=1}^{n} w_v\right)^{-1} e_{n_k} \to 0,$$

en X, cuando $k \to \infty$.

3.5.2 Producto recurrencia y caos de Devaney

De manera similar a como se ha hecho antes se va a obtener ahora las caracterizaciones generales de la existencia de puntos producto recurrentes del operador desplazamiento definido en espacios de sucesiones de Fréchet.

Teorema 3.11. Sea X un espacio de Fréchet de sucesiones en el que $(e_n)_n$ es una base incondicional y sea $B : X \to X$ el operador desplazamiento a izquierda continuo. Entonces B admite un vector x no nulo producto recurrente, si y solo si, B es Devaney caótico.

Demostración. COMPLETAR CUANDO ALFRED ME PASE LOS DETALLES □

Teniendo en cuenta ahora las equivalencias ya conocidas para caos de B en espacios de Fréchet de sucesiones (Teorema 2.11), y que caos y producto recurrencia son equivalentes en nuestro contexto, se puede enunciar el siguiente resultado.

Corolario 3.12. Sea X un espacio de sucesiones de Fréchet en el que $(e_n)_n$ es una base incondicional. Sea $B : X \to X$ el operador desplazamiento a izquierda continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B admite un vector x no nulo producto recurrente.

ii) B es Devaney caótico.

iii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ converge en X.

iv) Las sucesiones constantes pertenecen a X.

v) B posee un punto periódico no cero.

Finalmente, con un diagrama de conjugación similar al considerado en las equivalencias para la recurrencia y la transitividad se obtiene el resultado correspondiente para operadores desplazamientos a izquierda ponderados en espacio de sucesiones de Fréchet.

Corolario 3.13. Sea X un espacio de sucesiones de Fréchet en el cual $(e_n)_n$ es una base incondicional. Sea $B_w : X \to X$ el operador desplazamiento a izquierda ponderado continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B_w admite un vector x no nulo producto recurrente.

ii) B_w es Devaney caótico.

iii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{v=1}^{n}\right)^{-1} e_n$ converge en X.

iv) B_w contiene punto periódico no cero.

Capítulo 4

Caos para Transformaciones Fraccionales Lineales de operadores desplazamiento

4.1 Resumen

En este capítulo se caracteriza caos para operadores de la forma $\varphi(B)$, definidos en espacios de sucesiones de Banach, donde φ es una Transformación Fraccional Lineal y B es el operador desplazamiento a izquierda usual. Las caracterizaciones que se obtienen son “computables” debido a que ellas involucran sólo los cuatro números complejos que definen la transformación φ.

Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación en la revista de investigación Topology and its Applications [37].

4.2 Preliminares

4.2.1 Motivación

En 1969, Rolewicz [51] probó que los múltiplos λB del operador desplazamiento $B(x_1, x_2, ...) := (x_2, x_3, ...)$ son hipercíclicos sobre el espacio de sucesiones absolutamente sumable ℓ^1, si y sólo si, $|\lambda| > 1$; de hecho ellos son caóticos. De alguna manera, los operadores desplazamiento (ponderados) definidos sobre espacios de sucesiones son un contexto natural para el estudio de la dinámica lineal. La hiperciclicidad para operadores desplazamiento ponderados definidos sobre ℓ^p fue caracterizada más tarde por Salas, que probó también que cualquier perturbación de la identidad por un operador desplazamiento ponderado es siempre hipercíclica (ver [52]). Siguiendo esta dirección, caracterizaciones para desplazamientos ponderados hipercíclicos y caóticos definidos sobre espacios generales de sucesiones han sido obtenidas en [33] y [44], y caracterizaciones para perturbaciones caóticas de la identidad por desplazamientos ponderados son dadas también en [44].

Otra fuente de motivación para este trabajo es el excelente resultado de Godefroy y Shapiro [30], estableciendo que cualquier operador diferencial $P(D)$ que no es múltiplo de la identidad es caótico en el espacio de las funciones enteras $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, dotado de la topología natural compacta abierta. En otras palabras, prueban que $P(D)$ es caótico en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, donde D es el operador derivada y $P(z)$ es cualquier polinomio no constante.

Otros resultados de dinámica lineal de operadores de la forma $P(T)$, donde $P(z)$ es un polinomio ó una función más general, pueden ser encontrados en [8, 16, 19, 36, 45, 47].

DeLaubenfels y Emamirad prueban que para un polinomio no constante $P(z)$, $P(B)$ es caótico sobre ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, siempre que $P(\mathbb{D})$ intersecte la circunferencia unidad, donde $\mathbb{D}$ es el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$ (ver [19], teorema 2.8). Además, para $a, b \in \mathbb{C}$, ellos demostraron que $aI + bB$ es caótico si y sólo si, $|b| > |1 - |a||$. Adicionalmente, han sido dadas condiciones de suficiencia para el caos de $P(B)$ en términos de los coeficientes del polinomio en [16].

Por todo lo anterior, se entiende que es interesante continuar la búsqueda de condiciones "computables" para el caos de $f(B)$, donde $f(z)$ es una función analítica. En este caso, se trabaja con una Transformación Fraccional Lineal, que es una transformación compleja de la forma $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Aquí se prueba que $\varphi(B)$ es caótica sobre ℓ^p si y sólo si,

$$\big|\, |d|^2 - |c|^2 - |b\bar{d} - a\bar{c}| \,\big| < |bc - ad|.$$

Como concecuencia de esto, se caracterizan desplazamientos ponderados caóticos sobre espacios ℓ^p ponderados, resultados que permiten conocer qué operadores de la forma $\varphi(D)$ son caóticos sobre ciertos operadores de Banach de funciones analíticas, donde D es el operador diferencial. A pesar de que se mostrará más adelante, se señala aquí que los operadores considerados en este trabajo son de hecho operadores de Toeplitz y que expresados matricialmente en la base canónica, su matriz asociada es triangular superior.

4.2.2 Algunos resultados previos

Para obtener caos para $\varphi(B)$ sobre ℓ^p se emplea el bien conocido Criterio de Caos de Godefroy y Shapiro [30], el cual está basado en la "abundancia" de valores propios. Puede consultarse también cualquiera de las monografías [7, 34] para una prueba de este resultado y [30, 13, 19, 45, 16] para ver ejemplos en los que se usa este criterio. Se recuerda que dicho criterio se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 4.1 (Criterio de los valores propios para caos)**.** Sea $T : X \to X$ un operador definido en un espacio de Banach complejo y separable X. Supóngase que los subespacios

i) $X_0 := \text{span}\{x \in X;\ Tx = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| < 1\}$;

ii) $Y_0 := \text{span}\{x \in X;\ Tx = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| > 1\}$;

iii) $Z_0 := span\{x \in X;\ Tx = e^{\alpha\pi\imath} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}$;

son densos en X. Entonces el operador T es caótico en X.

Utilizando este criterio y para el caso de funciones holomorfas es posible afinar más y deLaubenfels y Emamirad obtienen la siguiente caracterización.

Teorema 4.2 ([19, Theorem 2.3])**.** Supóngase que $f(z)$ es una función holomorfa no constante en un entorno de $\bar{\mathbb{D}}$. Entonces el operador $f(B)$ es caótico en ℓ^p si y solo si $f(\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$.

A continuación se enumeran un par de resultados para ilustrar y aclarar qué se quiere decir con "condiciones computables" para el caos de $P(B)$. Uno de ellos ya ha sido citado anteriormente y, por simplicidad, se enuncian en el contexto del espacio de sucesiones ℓ^p.

Proposición 4.3 ([19, Corollary 2.11])**.** Sean a y b valores complejos no nulos. Entonces $a + bB$ es caótico en ℓ^p si y solo si $|1 - |a|| < |b|$.

Teorema 4.4 ([16, Theorem 1])**.** Sea $1 \leq p < \infty$ y $P(z) = p_0 + p_1 z + ... + p_n z^n$ un polinomio complejo con $\sum_{k=0}^{n} |p_k|^2 > 1$.

(i) Si $|p_0| - |p_n| < 1$ entonces $P(B)$ es caótico en ℓ^p.

(ii) $P(B)$ es caótico en ℓ^p si y solo si $|P(a)^{m+1}| < (1 - |a|)^m \left|\det T_{P(a)}^{(m)}\right|$ para algún $a \in \mathbb{D}$ y algún $m \in \mathbb{N}_0$.

En particular, si

$$\left|p_0^{m+1}\right| < \left|\det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & & & p_m \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ddots & & \\ 0 & p_0 & p_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & p_3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & p_2 \\ 0 & & & 0 & p_0 & p_1 \end{pmatrix}\right|,$$

para algún $m \in \mathbb{N}$ (se toma $p_i = 0$ para $i > n$), entonces $P(B)$ es caótico en ℓ^p.

En el resultado anterior la notación matricial utilizada es la siguiente: para una función analítica $f(z)$ en a, se denota

$$T_{f(a)}^{(0)} := (1),$$

$$T_{f(a)}^{(m)} := \begin{pmatrix} \frac{f'(a)}{1!} & \frac{f''(a)}{2!} & \frac{f'''(a)}{3!} & & & \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \\ f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \frac{f''(a)}{2!} & \ddots & & \\ 0 & f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{f'''(a)}{3!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{f''(a)}{2!} \\ 0 & & & 0 & f(a) & \frac{f'(a)}{1!} \end{pmatrix} \text{ para } m \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, para $m = 1$ y $m = 2$ se tiene

$$T_{f(a)}^{(1)} = \big(f'(a)\big)\,,\ T_{f(a)}^{(2)} = \begin{pmatrix} f'(a) & \frac{f''(a)}{2} \\ f(a) & f'(a) \end{pmatrix}.$$

4.3 Caos para LFT's de operadores desplazamiento (caso ℓ^p)

Se inicia esta parte recordando nuestro contexto de trabajo. Para una sucesión de pesos estrictamente positiva $v := (v_n)_n$, sea

$$\ell^p(v) := \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \|x\|^p := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n < \infty\}, 1 \leq p < \infty;$$

el espacio ℓ^p asociado. Es fácil ver que la condición

$$\sup_i \frac{v_i}{v_{i+1}} < \infty \tag{4.1}$$

caracteriza el que $B : \ell^p(v) \to \ell^p(v)$ sea un operador acotado. Se asume que esta condición se cumple siempre. Si la sucesión v de ponderación del espacio es la sucesión de unos, el espacio correspondiente lo denotamos como ℓ^p.

El objetivo aquí es ver el comportamiento caótico de $\varphi(B)$ sobre ℓ^p, donde φ es una Transformación Fraccional Lineal (de manera abreviada LFT). Con la intención de evitar el caso trivial donde $\varphi(z)$ se reduce a un polinomio constante o de grado 1, se asume que $ad-cb\neq 0$ y $c\neq 0$. Por lo tanto, decir que φ es una Transformación Fraccional Lineal significará

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{C},\quad ad-cb\neq 0,\quad c\neq 0. \tag{4.2}$$

Hay varias maneras para describir cómo se define el operador $\varphi(B)$ pero aqui sólo se hablará de dos de ellas. La primera implica recordar que el espectro de B (es decir, el conjunto de $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\lambda I+B$ es no invertible) es el disco cerrado unitario $\bar{\mathbb{D}}$. Ahora, si se supone que $|\frac{d}{c}|>1$ se tiene $\varphi(B)=(aB+bI)(cB+dI)^{-1}$ es un operador bien definido y acotado sobre ℓ^p. El segundo enfoque definiendo a $\varphi(B)$ es usar la serie de Taylor de φ, que concretamente toma la forma

$$\frac{b}{d}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ad-bc}{cd}\left(\frac{c}{d}\right)^n z^n.$$

Si $|\frac{d}{c}|>1$, entonces para cada $x\in\ell^p$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^n\|B^n x\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^n\|x\|<\infty.$$

Por lo tanto la serie

$$\frac{b}{d}I+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ad-bc}{cd}\left(\frac{c}{d}\right)^n B^n.$$

converge puntualmente en ℓ^p y si se denota el operador limite como $\varphi(B)$, el teorema de Banach-Steinhauss asegura que dicho operador es acotado (ver por ejemplo, apendice A en [34]).

En este punto hay varias observaciones que hacer:

i) La teoría general del cálculo funcional asegura que con ambos enfoques se obtiene el mismo operador.

ii) El primer enfoque es más directo, pero con el segundo es fácil observar que si $\lambda\in\mathbb{C}$ es un valor propio de B, entonces $\varphi(\lambda)$ es un valor propio de $\varphi(B)$. Este hecho es crucial para usar el Criterio de caos de Godefroy y Shapiro.

iii) El segundo enfoque también muestra que $\varphi(B)$ es un operador Toeplitz con matriz canónica

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{d} & -\frac{ad-bc}{cd}\frac{c}{d} & \frac{ad-bc}{cd}\left(\frac{c}{d}\right)^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{b}{d} & -\frac{ad-bc}{cd}\frac{c}{d} & \frac{ad-bc}{cd}\left(\frac{c}{d}\right)^2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{b}{d} & -\frac{ad-bc}{cd}\frac{c}{d} & \frac{ad-bc}{cd}\left(\frac{c}{d}\right)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

En este contexto, tomando el espectro puntual del operador B (es decir, el conjunto de sus valores propios) $\sigma_p(B) = \mathbb{D}$, el Criterio se interpreta como $\varphi(B)$ es caótico en ℓ^p si y sólo si $\varphi(\mathbb{D})$ interseca el circulo unitario. El siguiente resultado da una descripción geométrica completa de $\varphi(\mathbb{D})$ cuando los polos de φ se encuentran fuera del disco unitario cerrado. Este resultado ya es conocido y usado en la caracterización de una LFT transforma el disco unitario en sí mismo (ver [17] y [43]). Se da aqui una prueba geométrica elemental que no usa teoría de LFT's.

Lema 4.5. Sea φ una LFT como en (4.2) y $|d| > |c|$. Entonces $\varphi(\mathbb{D})$ es el disco $P + r\mathbb{D}$ con centro en P y radio r dados por

$$P = \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{|d|^2 - |c|^2},$$
$$r = \frac{|bc - ad|}{|d|^2 - |c|^2}.$$

Demostración. Primero se recuerda que las aplicaciones LFT transforman círculos y rectas en círculos y rectas. Debido a que $\bar{\mathbb{D}}$ es, obviamente, un conjunto convexo y acotado, y el polo $-\frac{d}{c}$ se encuentra fuera del disco unitario, se tiene que $\varphi(\bar{\mathbb{D}})$ es, necesariamente, también convexo y acotado por lo que $\varphi(\bar{\mathbb{D}})$ es un circulo cuya frontera es $\varphi(\partial\mathbb{D})$. Ahora, tómense tres puntos distintos en el circulo unitario, por ejemplo, $z_1 = 1, z_2 = -1$ y $z_3 = i$. Debido a que φ es una transformación uno a uno, se tiene que $A := f(z_1)$, $B := f(z_2)$ y $C := f(z_3)$ son tres puntos distintos en la circunferencia $\varphi(\partial\mathbb{D})$, que es, la circunferencia que circunscribe al triángulo formado por los puntos A, B y C. De hecho, esta circunferencia coincide con $\varphi(\partial\mathbb{D})$. Sólo se necesita probar que

$$|A-P| = |B-P| = |C-P| = r.$$

Usando las conocidas ecuaciones $|z|^2 = z\bar{z}$ y $|c+d| = |\bar{c}+\bar{d}|$, se tiene

$$\begin{aligned}
|A-P| &= \left|\frac{a+b}{c+d} - \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{|d|^2-|c|^2}\right| \\
&= \frac{1}{|d|^2-|c|^2}\left|\frac{(a+b)(|d|^2-|c|^2)-(b\bar{d}-a\bar{c})(c+d)}{c+d}\right| \\
&= \frac{1}{|d|^2-|c|^2}\left|\frac{ad\bar{d}-bc\bar{c}-bc\bar{d}+ad\bar{c}}{c+d}\right| = r.
\end{aligned}$$

Análogamente, observando que $|d+ci| = |\bar{c}+\bar{d}i|$, se consigue

$$\begin{aligned}
|B-P| &= \left|\frac{-a+b}{-c+d} - \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{|d|^2-|c|^2}\right| \\
&= \frac{1}{|d|^2-|c|^2}\left|\frac{(-a+b)(|d|^2-|c|^2)-(b\bar{d}-a\bar{c})(-c+d)}{-c+d}\right| \\
&= \frac{1}{|d|^2-|c|^2}\left|\frac{-ad\bar{d}-bc\bar{c}+bc\bar{d}+ad\bar{c}}{-c+d}\right| = r. \\
|C-P| &= \left|\frac{ai+b}{ci+d} - \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{|d|^2-|c|^2}\right| \\
&= \frac{1}{|d|^2-|c|^2}\left|\frac{(ai+b)(|d|^2-|c|^2)-(b\bar{d}-a\bar{c})(ci+d)}{ci+d}\right| \\
&= \frac{1}{|d|^2-|c|^2}\left|\frac{ad\bar{d}i-bc\bar{c}-bc\bar{d}i+ad\bar{c}}{ci+d}\right| = r.
\end{aligned}$$

Y, de manera similar,

$$|C-P| = \left|\frac{ai+b}{ci+d} - \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{|d|^2-|c|^2}\right|$$

$$= \frac{1}{|d|^2 - |c|^2} \left| \frac{(ai+b)(|d|^2 - |c|^2) - (b\bar{d} - a\bar{c})(ci+d)}{ci+d} \right|$$
$$= \frac{1}{|d|^2 - |c|^2} \left| \frac{ad\bar{d}i - bc\bar{c} - bc\bar{d}i + ad\bar{c}}{ci+d} \right| = r.$$

□

Observación 4.6. En la demostración del lema anterior aparece la pregunta natural de cómo se han obtenido las expresiones de P y de r. Una vez conocidas dichas expresiones la demostración del lema es sencilla tal y como se ha podido comprobar. A continuación se detallan las operaciones y argumentos que pueden ser utilizados para calcular las citadas expresiones de P y r. Las operaciones son sencillas pero el proceso algebraico de manipulación y simplificación de las expresiones es tedioso, por dicha razón se ha incluido como un appéndice separado al final de la memoria.

Ahora, se demuestra el caos de $\varphi(B)$ a través del siguiente teorema.

Teorema 4.7. Sea φ una LFT como en (4.2) y $|d| > |c|$. El operador $\varphi(B)$ es caótico sobre ℓ^p si y sólo si

$$\left| |d|^2 - |c|^2 - \left| b\bar{d} - a\bar{c} \right| \right| < |bc - ad| \, .$$

Demostración. Como en el lema previo, tómese a $\varphi(\mathbb{D}) = P + r\mathbb{D}$. Se tiene que $\varphi(\mathbb{D})$ es caótico si y sólo si, $P + r\mathbb{D}$ intersecta al circulo unitario. Para ello existen dos posibilidades: si el centro P se encuentra en el interior del disco unitario, entonces debe cumplirse que $|P| + |r| > 1$; por otro lado, si P se encuentra en el exterior del disco unitario cerrado, entonces debe cumplirse que $|P| - |r| < 1$. Ambas condiciones llevan a

$$-|r| < 1 - |P| < |r|,$$

y la conclusión se obtiene sustituyendo los valores de P y r y simplificando las expresiones algebraicas. □

El resultado anterior puede ser utilizado en situaciones más generales en las que la LFT se compone con otra transformación, con la condición de que la imagen del disco unidad por dicha transformación coincida con el disco unidad. El siguiente corolario recoge un ejemplo en el que se da esta posibilidad.

Corolario 4.8. Sea φ una LFT como en (4.2), con $|d| > |c|$ y sea $g(z) = z^n$ con n un entero positivo. Consideremos la composición

$$\varphi \circ g(z) = \frac{az^n + b}{cz^n + d}.$$

Entonces el operador $\varphi \circ g(B)$ es caótico sobre ℓ^p si y sólo si

$$|\, |d|^2 - |c|^2 - |b\bar{d} - a\bar{c}|\, | < |\, bc - ad \,| \,.$$

Demostración. Sólo se necesita observar que $\varphi(\mathbb{D})$ intersecta el círculo unitario, si y sólo si, también lo hace $\varphi \circ g(\mathbb{D})$. $\square$

4.4 Caos para LFT's de operadores desplazamiento (caso $\ell^p(v)$)

Lo próximo que se quiere estudiar es el caos para $\varphi(B)$ definido sobre espacios ponderados $\ell^p(v)$. Es fácil ver que

$$\varrho\mathbb{D} \subset \sigma_p(B), \text{ donde } \varrho^p = \liminf_i v_i^{-\frac{1}{i}}.$$

Desafortunadamente, en este contexto, el caos de $\varphi(B)$ no es equivalente a la condición $\varphi(\varrho\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$, incluso no lo es para el caso simple en que $f(z) = z$. Para verlo, basta tomar los espacios ℓ^1, $\ell^1(\frac{1}{n})$ y $\ell^1(\frac{1}{n^2})$ (haciendo un uso un poco abusivo de la notación, $\ell^1(\frac{1}{n}) = \ell^1(v)$ y $\ell^1(\frac{1}{n^2}) = \ell^1(v')$, donde $v := (\frac{1}{n})_n$ y $v' := (\frac{1}{n^2})_n$), respectivamente). En los tres casos $\varrho = 1$ y $f(\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$. Sin embargo B no es hipercíclico sobre ℓ^1, B es hipercíclico pero no caótico sobre $\ell^1(\frac{1}{n})$ y B es caótico en $\ell^1(\frac{1}{n^2})$ (ver por ejemplo, Chapter 4 en [34]). A pesar de la situación anterior, el Criterio de valores propios asegura que si $\varphi(\varrho\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$, entonces $\varphi(B)$ es caótico sobre $\ell^p(v)$.

Antes de enunciar el teorema probando caos para $\varphi(B)$ sobre $\ell^p(v)$, es de lugar matizar que necesariamente se cumple que $\varrho < \infty$. Para verlo, primero recuérdese que la sucesión de pesos cumple la condición (4.1), condición que implica que existe $M > 0$ tal que para cada $i \geq 2$ se tiene $v_i > \frac{v_{i-1}}{M}$. De manera inductiva puede obtenerse $v_i > v_1 M^{1-i}$ para todo $i > 1$ y por lo tanto $\varrho^p \leq M < \infty$.

También se descarta el caso en que $\varrho = 0$. Para ver la razón primero se escribe a $\varphi(B) = \varphi(0)I + \phi(B)$, donde ϕ es una función holomorfa con $\phi(0) = 0$. Por el Criterio de los valores propios, el operador $T = \varphi(B)$ tiene posibilidad de ser hipercíclico sólo si $|\varphi(0)| = |\frac{b}{d}| = 1$. Como $\varrho = 0$, resulta que el operador $\varphi(B)$ es en realidad una perturbación compacta de $(\frac{b}{d})I$ (es decir, $T = (\frac{b}{d})I + K$, donde $K(Bx)$ es relativamente compacta), que es nunca caótica (ver [44], proposición 6.1). En realidad, si T admite un conjunto denso de puntos periódicos, entonces el único valor propio de T es $\frac{b}{d}$ y debe ser una raíz $n-$ésima de la unidad, así $T^n = I + K'$ para cierto operador compacto K', y T^n admite un conjunto denso de dos puntos periódicos, cosa esta que contradice ([44], proposición 6.1).

Teorema 4.9. Sea $v = (v_i)_i$ una sucesión de pesos que satisface la condición (4.1). Sea $\varrho^p = \liminf_i v_i^{-\frac{1}{i}}$ y sea φ una LFT como en (4.2) con $|d| > \varrho|c|$. Si

$$| \, |d|^2 - \varrho^2|c|^2 - |b\bar{d} - \varrho^2 a\bar{c}| \, | < \varrho|bc - ad|,$$

entonces el operador $\varphi(B)$ es caótico sobre $\ell^p(v)$.

Demostración. Debido a que $\varrho\mathbb{D} \subset \sigma_p(B)$, se tiene que comprobar que $\varphi(\varrho\mathbb{D})$ corta al circulo unitario. Considérese la homtecia $g(z) = \varrho z$ y obsérvese que $\varphi(\varrho\mathbb{D}) = \varphi \circ g(\mathbb{D})$. Ahora, aplicando el Lema 4.5 a la composición

$$\varphi \circ g(z) = \frac{\varrho a z + b}{\varrho c z + d}$$

y siguiendo un razonamiento similar al del Teorema 4.7 se concluye la prueba. □

Al finalizar esta sección se observa que se puede enunciar una versión más general del resultado principal de este capítulo. En esta versión se permite que el operador sea ponderado y también que lo sea el espacio de sucesiones y es un resultado muy útil porque algunos operadores pueden ser representados como un operador desplazamiento ponderado

$$B_w(x_1, x_2, x_3, ...) := (w_2 x_2, w_3 x_3, ...),$$

definido sobre un espacio ponderado $\ell^p(v)$.

La clave en esta situación está en observar que este caso puede ser reducido al anterior vía una conjungación topológica. Para ello se define

$$a_1 := 1; \quad a_i := w_2...w_i, \quad i > 1,$$

y considérese el espacio $\ell^p(\bar{v})$ donde la sucesión de pesos $\bar{v}$ viene dada por

$$\bar{v_i} = \frac{v_i}{\prod_{j=2}^{i} w_j^p}, \ \forall i.$$

Ahora se toma la transformación $\phi_a : \ell^p(v) \to \ell^p(\bar{v})$ definida como

$$\phi_a(x_1, x_2, ...) := (a_1 x_1, a_2 x_2, ...)$$

y con ella se construye el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \ell^p(v) & \xrightarrow{B_w} & \ell^p(v) \\ {\scriptstyle \phi_a}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_a}\big\downarrow \\ \ell^p(\bar{v}) & \xrightarrow{B} & \ell^p(\bar{v}) \end{array}$$

es decir, $\phi_a \circ B_w = B \circ \phi_a$. Se cumple que ϕ_a es una isometría, es decir

$$\|x\|_{\ell^p(v)} = \|\phi(x)\|_{\ell^p(\bar{v})},$$

y entonces por conjungación topológica se tiene que $\varphi(B)$ es caótico sobre $\ell^p(\bar{v})$ si y sólo si $\varphi(B_w)$ es caótico sobre $\ell^p(v)$. Notar que

$$B^n = (\phi_a \circ B_w \circ \phi_a^{-1})^n = \phi_a \circ B_w^n \circ \phi_a^{-1},$$

y que esta propiedad también se puede utilizar en la serie de Taylor de φ.

4.5 LFT's de operadores diferenciales sobre espacios de Hilbert de funciones enteras

En esta sección se va a presentar un ejemplo en el que se aplican resultados de este capítulo al caso concreto de tomar una transformación fraccional lineal del operador derivada en el contexto de espacios de Hilbert de funciones enteras. Véase [15] para más resultados en este contexto.

Sea $\gamma(z)$ una función entera de comparación admisible, esto es, los coeficientes de Taylor $\gamma_j > 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$ y la sucesión

$$\left(\frac{j\gamma_j}{\gamma_{j-1}}\right)_{j\geq 1}$$

es monótonamente decreciente. Considérese el espacio de Hilbert $E(\gamma)$ de las series de potencias

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{g}(j) z^j,$$

para las cuales

$$\|g\|_{2,\gamma}^2 := \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^{-2} |\hat{g}(j)|^2 < \infty.$$

Chan y Shapiro demuestran que para $a \neq 0$ el operador traslación T_a es hipercíclico sobre $E^2(\gamma)$ (ver [15], teorema 2.1). Ellos probaron que $T_a = \sum_{n>0} \frac{a^n}{n!} D^n$, donde D es el operador de diferenciación. Puntualizaron que la hiperciclicidad de T_a es de hecho la hiperciclicidad de $\varphi(D)$ para el caso particular de $\varphi(z) = e^{az}$. Estos autores también preguntan sobre la dinámica de "otros" operadores. Se consideran aquí operadores de la forma $\varphi(D)$, donde $\varphi(z)$ es una LFT.

Es claro que $E^2(\gamma)$ es isométrico a $\ell^2(v)$ con $v = (v_j)_{j\in\mathbb{N}_0} = (\gamma_j^{-2})_{j\in\mathbb{N}_0}$ y con la identificación $f \mapsto \left(\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right)_{j\geq 0}$. Por otra parte, el operador de diferenciación D se puede representar como un operador desplazamiento ponderado con los pesos $w = (w_j)_{j\geq 1} = (j)_{j\geq 1}$ o, equivalentemente, como un operador desplazamiento definido sobre $\ell^2(\bar{v})$, donde

$$\bar{v}_j = \frac{1}{(\gamma_j j!)^2},\ j \geq 0.$$

Debido a que $\gamma(z)$ es una función entera de comparación admisible, es fácil observar que la condición de los pesos (4.1) se satisface y $\varphi(B)$ es un operador acotado sobre $\ell^2(\bar{v})$ para cualquier LFT φ con $|d| > \varrho|c|$ (esto es equivalente a decir que $\varphi(D)$ es un operador acotado sobre $E^2(\gamma)$ para cualquier LFT φ con $|d| > \varrho|c|$).

Considérense ahora sólo aquellos espacios para los cuales $\lim_{j\to\infty} \frac{j\gamma_j}{\gamma_{j-1}} > 0$. Debido a que el limite de las raíces sucesivas coincide con el limite de los cocientes sucesivos se tiene que $\varrho = \lim_{j\to\infty} \frac{j\gamma_j}{\gamma_{j-1}} > 0$, y el Teorema 4.7 puede ser aplicado a las LFT's φ con $|d| > \varrho|c|$

Para fijar ideas se va a considerar un ejemplo concreto tomando $\gamma(z) = e^{\alpha z}$ con $\alpha > 0$. Es claro que $\varrho = \alpha$. Aplicando lo anterior se obtiene que si

$$|\ |d|^2 - \alpha^2|c|^2 - |b\bar{d} - \alpha^2 a\bar{c}|\ | < \alpha|bc - ad|,$$

entonces $\varphi(D)$ es caótico sobre $E^2(e^{\alpha}z)$, donde φ es una LFT con $|d| > \varrho|c|$.

4.6 Operadores desplazamiento en espacios de funciones analíticas

Considérense espacios consistentes en series de potencia formales

$$\phi(z) := \Sigma_{j=0}^{\infty} \hat{f}_j z^j,$$

para las cuales la sucesión $(\hat{f}_j)_j$ pertenece a $\ell^p(v)$ para cierta sucesión de pesos $v = (v_j)_j$. Por ejemplo, el espacio de Hardy H^2 es obtenido para $v = (1)_j$, el espacio de Bergman A^2 para $v = (\frac{1}{1+j}_j$ y el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$ para $v = (j+1)_j$. Para la base ortogonal $(z^j)_{j\geq 0}$, el operador desplzamiento toma la forma $B(z^j) := z^{j-1}$ para $j \in \mathbb{N}$ y $B(1) = 0$. Ahora, si φ es una LFT con $|d| > |c|$, debido a que $\varrho^2 = \liminf_i v_i^{-\frac{1}{i}} = 1$ para los espacios H^2, A^2, D, caos de $\varphi(B)$ se puede obtener mediante el empleo del teorema 4.7.

Observación 4.10. En este trabajo sólo se considera la noción de caos en el sentido de Devaney, pero existen otras formas del caos, como la relacionada al concepto de mazclante referida a la medida de probabilidad invariante con soporte completo (para ver más sobre el tema revisar [32, 48]), o el caos distribucional (ver [9]), entre otros, pueden también darse en las mismas condiciones que se presentan aquí para el caos de Devaney.

4.7 Líneas de trabajo futuras

En este capítulo se han estudiado condiciones suficientes para el caos de $\varphi(B)$ en espacios de sucesiones. Lo anterior puede verse como una parte del siguiente contexto general: para funciones holomorfas $f(z)$ en $\alpha\mathbb{D}$ para algún $\alpha > 1$, el Cálculo Funcional de Riesz define un operador acotado $f(B)$ en ℓ^p. Se sabe que para funciones holomorfas no constantes, el operador $f(B)$ es caótico en ℓ^p si y solo si $f(\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$ (véase [19, Theorem 2.3]). Resulta que el obtener una descripción geométrica completa de la imagen $f(\mathbb{D})$ puede ser difícil en general y por tanto sería deseable tener condiciones "computables" al menos para ciertas clases de funciones.

El caso de que $f(z)$ sea una función meromorfa parece la continuación natural del que aquí se ha estudiado. Una formulación concreta puede ser la siguiente: Supóngase que $f(z) = P(z)/Q(z)$ donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios complejos y todas las raíces de $Q(z)$ están fuera del disco unidad cerrado, esto es, las raíces de $Q(z)$ no pertenecen al espectro de B. Esta propiedad asegura que $f(B)$ es un operador acotado en ℓ^p. La pregunta sería ¿qué condiciones han de cumplir los coeficientes de P y Q para asegurar caos del operador $f(B)$?

Apéndice A

Cálculo analítico del centro de $\varphi(\bar{\mathbb{D}})$

Tal y como se ha comentado después de la prueba del Lema 4.5, se incluyen en esta sección las operaciones que muestran que para una LFT dada por

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ a,b,c,d \in \mathbb{C}, \ ad-cb \neq 0, \ c \neq 0, |d| < |c|,$$

las coordenadas del centro P del círculo $\varphi(\bar{\mathbb{D}})$ vienen dadas por

$$P = \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{|d|^2 - |c|^2}.$$

Como ya se mencionó en la demostración del lema, si se toma

$$z_1 = 1, z_2 = -1 \text{ y } z_3 = i,$$

y se denota

$$A := f(z_1), B := f(z_2) \text{ y } C := f(z_3),$$

se tiene que el punto P buscado es el centro del círculo que circunscribe al triángulo formado por los puntos A, B y C. Identificando ahora $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ y denotando las coordenadas de A, B y C como (A_x, A_y), (B_x, B_y) y

(C_x, C_y) respectivamente, se tiene que las coordenadas (P_x, P_y) buscadas vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
P_x = {} & \frac{1}{D}\times \\
& \left((A_x^2 + A_y^2)(B_y - C_y) + (B_x^2 + B_y^2)(C_y - A_y) + (C_x^2 - C_y^2)(A_y - B_y)\right), \\
P_y = {} & \frac{1}{D}\times \\
& \left((A_x^2 + A_y^2)(C_x - B_x) + (B_x^2 + B_y^2)(A_x - C_x) + (C_x^2 - C_y^2)(B_x - A_x)\right),
\end{aligned}
$$

donde

$$D = 2(A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)).$$

Teniendo en cuenta ahora que las corrdenadas x e y de cada punto son la parte real e imaginaria respectivamente se obtiene

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Re} P = \\
& \qquad \frac{\operatorname{Im}\left(|A|^2(B - C) + |B|^2(C - A) + |C|^2(A - B)\right)}{2(\operatorname{Re} A \operatorname{Im}(B - C) + \operatorname{Re} B \operatorname{Im}(C - A) + \operatorname{Re} C \operatorname{Im}(A - B))},
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Im} P = \\
& \qquad \frac{\operatorname{Re}\left(-|A|^2(B - C) - |B|^2(C - A) - |C|^2(A - B)\right)}{2(\operatorname{Re} A \operatorname{Im}(B - C) + \operatorname{Re} B \operatorname{Im}(C - A) + \operatorname{Re} C \operatorname{Im}(A - B))}.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Sustituyendo $A = \frac{a+b}{c+d}$, $B = \frac{-a+b}{-c+d}$, and $C = \frac{ai+b}{ci+d}$; y simplificando las expresiones algebraicas se obtiene

$$
\begin{aligned}
& |A|^2(B - C) + |B|^2(C - A) + |C|^2(A - B) \\
& \qquad = \left|\frac{a+b}{c+d}\right|^2 \left(\frac{-a+b}{-c+d} - \frac{ai+b}{ci-d}\right) \\
& \qquad\quad + \left|\frac{-a+b}{-c+d}\right|^2 \left(\frac{ai+b}{ci+d} - \frac{a+b}{c+d}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left|\frac{ai+b}{ci+d}\right|^2 \left(\frac{a+b}{c+d} - \frac{-a+b}{-c+d}\right) \\
&= \left|\frac{a+b}{c+d}\right|^2 \left(\frac{(-a+b)(ci+d)-(ai+b)(-c+d)}{(-c+d)(ci+d)}\right) \\
&\quad + \left|\frac{-a+b}{-c+d}\right|^2 \left(\frac{(ai+b)(c+d)-(a+b)(ci+d)}{(ci+d)(c+d)}\right) \\
&\quad + \left|\frac{ai+b}{ci+d}\right|^2 \left(\frac{(a+b)(-c+d)-(-a+b)(c+d)}{(c+d)(-c+d)}\right) \\
&= \left|\frac{a+b}{c+d}\right|^2 \left(\frac{-(ad-bc)(1+i)}{(-c+d)(ci+d)}\right) \\
&\quad + \left|\frac{-a+b}{-c+d}\right|^2 \left(\frac{(ad-bc)(i-1)}{(ci+d)(c+d)}\right) \\
&\quad + \left|\frac{ai+b}{ci+d}\right|^2 \left(\frac{2(ad-bc)}{(c+d)(-c+d)}\right) \\
&= (ad-bc)\left(\left|\frac{a+b}{c+d}\right|^2 \left(\frac{-(1+i)}{(-c+d)(ci+d)}\right)\right. \\
&\qquad\qquad + \left|\frac{-a+b}{-c+d}\right|^2 \left(\frac{(i-1)}{(ci+d)(c+d)}\right) \\
&\qquad\qquad \left. + \left|\frac{ai+b}{ci+d}\right|^2 \left(\frac{2}{(c+d)(-c+d)}\right)\right) \\
&= (ad-bc)\left(\left(\frac{|a+b|^2(-1-i)\overline{(-c+d)(ci+d)}}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right)\right. \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{|-a+b|^2(i-1)\overline{(ci+d)(c+d)}}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right) \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{2|ai+b|^2\overline{(c+d)(-c+d)}}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right)\right) \\
&= (ad-bc)\frac{1}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \Big((a+b)\overline{(a+b)}(-1-i)\overline{(-c+d)(ci+d)}\\
&+(-a+b)\overline{(-a+b)}(i-1)\overline{(ci+d)(c+d)}\\
&+2(ai+b)\overline{(ai+b)(c+d)(-c+d)}\Big)\\
=(ad-bc)&\left(\frac{4i(\overline{ad-bc})(a\bar{c}-b\bar{d})}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right)\\
=&\left(\frac{4i|ad-bc|^2(a\bar{c}-b\bar{d})}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, se observa que

$$
\begin{aligned}
D &= 2(\operatorname{Re} A \operatorname{Im}(B-C)+\operatorname{Re} B \operatorname{Im}(C-A)+\operatorname{Re} C \operatorname{Im}(A-B))\\
&= 2\operatorname{Im}\{\operatorname{Re} A(B-C)+\operatorname{Re} B(C-A)+\operatorname{Re} C(A-B)\}\\
&= 2\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}(A+\bar{A})(B-C)+\frac{1}{2}(B+\bar{B})(C-A)+\frac{1}{2}(C+\bar{C})(A-B)\right\}\\
&= \operatorname{Im}\big\{(A+\bar{A})(B-C)+(B+\bar{B})(C-A)+(C+\bar{C})(A-B)\big\}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo otra vez los valores de A, B, y C se tiene

$$
\begin{aligned}
&(A+\bar{A})(B-C)+(B+\bar{B})(C-A)+(C+\bar{C})(A-B)\\
&\qquad= \left(\frac{a+b}{c+d}+\overline{\frac{a+b}{c+d}}\right)\left(\frac{-a+b}{-c+d}-\frac{ai+b}{ci+d}\right)\\
&\qquad\quad+\left(\frac{-a+b}{-c+d}+\overline{\frac{-a+b}{-c+d}}\right)\left(\frac{ai+b}{ci+d}-\frac{a+b}{c+d}\right)\\
&\qquad\quad+\left(\frac{ai+b}{ci+d}+\overline{\frac{ai+b}{ci+d}}\right)\left(\frac{a+b}{c+d}-\frac{-a+b}{-c+d}\right)\\
&\qquad= \left(\frac{(a+b)\overline{(c+d)}+\overline{(a+b)}(c+d)}{(c+d)\overline{(c+d)}}\right)\left(\frac{-(ad-bc)(1+i)}{(-c+d)(ci-d)}\right)\\
&\qquad\quad+\left(\frac{(-a+b)\overline{(-c+d)}+\overline{(-a+b)}(-c+d)}{(-c+d)\overline{(-c+d)}}\right)\\
&\qquad\quad\times\left(\frac{(ad-bc)(i-1)}{(ci+d)(c+d)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{(ai+b)\overline{(ci+d)}+\overline{(ai+b)}(ci+d)}{(ci+d)\overline{(ci+d)}}\right)\\
&\times\left(\frac{2(ad-bc)}{(c+d)(-c+d)}\right)\frac{1}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\\
&\times\Big((a+b)\overline{(c+d)}(-ad+bc)(1+i)\overline{(-c+d)(ci+d)}\\
&\quad+\overline{(a+b)}(c+d)(-ad+bc)(1+i)\overline{(-c+d)(ci+d)}\\
&\quad+(-a+b)\overline{(-c+d)}(ad-bc)(i-1)\overline{(ci+d)(c+d)}\\
&\quad+\overline{(-a+b)}(-c+d)(ad-bc)(i-1)\overline{(-c+d)(ci+d)}\\
&\quad+2(ai+b)\overline{(ci+d)}(ad-bc)\overline{(c+d)(-c+d)}\\
&\quad+2\overline{(ai+b)}(c+d)(ad-bc)\overline{(c+d)(-c+d)}\Big)\\
=&\ \frac{2(ad-bc)(i-1)^2(d\bar{d}-c\bar{c})\overline{(ad-bc)}}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\\
=&\ \frac{-4i|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}.
\end{aligned}
$$

Esto da

$$
D=\operatorname{Im}\left\{\frac{-4i|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right\}=\frac{-4|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}.
$$

Sustituyendo en (A.1) y (A.2) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}P&=\operatorname{Im}\left(\frac{4i|ad-bc|^2(a\bar{c}-b\bar{d})}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right):\frac{-4|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\\
&=\frac{4|ad-bc|^2\operatorname{Re}(a\bar{c}-b\bar{d})}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}:\frac{-4|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\\
&=\frac{\operatorname{Re}(b\bar{d}-a\bar{c})}{|d|^2-|c|^2},\\
\operatorname{Im}P&=\operatorname{Re}\left(\frac{-4i|ad-bc|^2(a\bar{c}-b\bar{d})}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\right):\frac{-4|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}\\
&=\frac{-4|ad-bc|^2\operatorname{Im}(a\bar{c}-b\bar{d})}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}:\frac{-4|ad-bc|^2(|d|^2-|c|^2)}{|c+d|^2|-c+d|^2|ci+d|^2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\operatorname{Im}(b\bar{d} - a\bar{c})}{|d|^2 - |c|^2}.$$

Bibliografía

[1] E. Akin, *Recurrence in topological dynamics*, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1997, Furstenberg families and Ellis actions.

[2] E. Akin, *Lectures on Cantor and Mycielski sets for dynamical systems*, Chapel Hill Ergodic Theory Workshops, Contemp. Math., vol. 356, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 21–79.

[3] J. Auslander and H. Furstenberg, *Product recurrence and distal points*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), no. 1, 221–232.

[4] F. Balibrea Gallego, *Caos y atractores extraños. dos problemas no lineales en matemáticas*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **2** (1999), 99–116.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332–334.

[6] S. Bartoll, F. Martínez-Giménez, and A. Peris, *The specification property for backward shifts*, J. Difference Equ. Appl. **18** (2012), no. 4, 599–605.

[7] F. Bayart and É. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 179, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[8] T. Bermúdez and V. G. Miller, *On operators T such that $f(T)$ is hypercyclic*, Integral Equations Operator Theory **37** (2000), no. 3, 332–340.

[9] N. C. Bernardes, Jr., A. Bonilla, V. Müller, and A. Peris, *Distributional chaos for linear operators*, J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 9, 2143–2163.

[10] J. Bès and A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. **167** (1999), no. 1, 94–112.

[11] G. D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Math. **43** (1922), no. 1, 1–119.

[12] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoréme elémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[13] J. Bonet, F. Martínez-Giménez, and A. Peris, *Linear chaos on Fréchet spaces*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003), no. 7, 1649–1655.

[14] K. Chan and I. Seceleanu, *Hypercyclicity of shifts as a zero-one law of orbital limit points*, J. Operator Theory **67** (2012), no. 1, 257–277.

[15] K. C. Chan and J. H. Shapiro, *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), no. 4, 1421–1449.

[16] J. A. Conejero and F. Martínez-Giménez, *Chaotic differential operators*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **105** (2011), no. 2, 423–431.

[17] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, M. J. Martín, and D. Vukotić, *Holomorphic self-maps of the disk intertwining two linear fractional maps*, Topics in complex analysis and operator theory, Contemp. Math., vol. 561, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 199–227.

[18] G. Costakis, A. Manoussos, and I. Parissis, *Recurrent linear operators*, Complex Anal. Oper. Theory **8** (2014), no. 8, 1601–1643.

[19] R. deLaubenfels and H. Emamirad, *Chaos for functions of discrete and continuous weighted shift operators*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 5, 1411–1427.

[20] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, second ed., Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[21] P. Dong, S. Shao, and X. Ye, *Product recurrent properties, disjointness and weak disjointness*, Israel J. Math. **188** (2012), 463–507.

[22] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8, Springer-Verlag, New York, 2001.

[23] H. Furstenberg, *The structure of distal flows*, Amer. J. Math. **85** (1963), 477–515.

[24] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981, M. B. Porter Lectures.

[25] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[26] V. J. Galán, F. Martínez-Giménez, P. Oprocha and A. Peris, *Product recurrence for weighted backward shifts*, Appl. Math. Inf. Sci. **9** (2015), No. 5, 2361-2365.

[27] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 2, 281–288.

[28] E. Glasner, *Classifying dynamical systems by their recurrence properties*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **24** (2004), no. 1, 21–40.

[29] E. Glasner and B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions*, Nonlinearity **6** (1993), no. 6, 1067–1075.

[30] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), no. 2, 229–269.

[31] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund, *Topological dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 36, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1955.

[32] S. Grivaux and É. Matheron, *Invariant measures for frequently hypercyclic operators*, Adv. Math. **265** (2014), 371–427.

[33] K.-G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, Studia Math. **139** (2000), no. 1, 47–68.

[34] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear chaos*, Universitext, Springer, London, 2011.

[35] K. Haddad and W. Ott, *Recurrence in pairs*, Ergodic Theory Dynam. Systems **28** (2008), no. 4, 1135–1143.

[36] G. Herzog and C. Schmoeger, *On operators T such that $f(T)$ is hypercyclic*, Studia Math. **108** (1994), no. 3, 209–216.

[37] R. R. Jiménez-Munguía, V. J. Galán, F. Martínez-Giménez, and A. Peris, *Chaos for linear fractional transformations of shifts*, Topology Appl., to appear.

[38] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Ph.D. thesis, University of Toronto, 1982.

[39] S. Kolyada and L. Snoha, *Some aspects of topological transitivity—a survey*, Iteration theory (ECIT 94) (Opava), Grazer Math. Ber., vol. 334, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1997, pp. 3–35.

[40] S. G. Krantz, *Handbook of complex variables*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[41] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), no. 10, 985–992.

[42] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72–87.

[43] M. J. Martín, *Composition operators with linear fractional symbols and their adjoints*, Proceedings of the First Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis, Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville, 2006, pp. 105–112.

[44] F. Martínez-Giménez and A. Peris, *Chaos for backward shift operators*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **12** (2002), no. 8, 1703–1715.

[45] F. Martínez-Giménez, *Chaos for power series of backward shift operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1741–1752.

[46] R. Meise and D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1997, Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors.

[47] V. Müller, *On the salas theorem and hypercyclicity of $f(t)$*, Integr. Equ. Oper. Theory **67** (2010), 439–448.

[48] M. Murillo-Arcila and A. Peris, *Strong mixing measures for linear operators and frequent hypercyclicity*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), no. 2, 462–465.

[49] P. Oprocha, *Weak mixing and product recurrence*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **60** (2010), no. 4, 1233–1257.

[50] P. Oprocha and G. Zhang, *On weak product recurrence and synchronization of return times*, Adv. Math. **244** (2013), 395–412.

[51] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17–22.

[52] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 3, 993–1004.

[53] I. Seceleanu, *Hypercyclic operators and their orbital limit points*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010, Thesis (Ph.D.)–Bowling Green State University.