Resumen

Durante el último cuarto de siglo, el estudio de operadores hipercíclicos y caóticos viene siendo un área de investigación muy activa y se ha obtenido un número considerable de resultados profundos e interesantes. También se han establecido relaciones de esta teoría con otras áreas de las matemáticas como la teoría ergódica, la dinámica compleja, la teoría de operadores, la teoría de semigrupos y aplicaciones a ecuaciones diferenciales por ejemplo. Muestra del desarrollo alcanzado es el hecho de que en el año 2000 se introdujo la nueva clasificación 47A16 de la Mathematics Subject Classification (MSC 2000) "Vectores cíclicos e hipercíclicos", cuya descripción ha cambiado en MSC 2010 a "Vectores cíclicos, operadores hipercíclicos y caóticos".

Un operador lineal y continuo definido en un espacio de Banach es hipercíclico si admite un vector con órbita densa, es decir, si existe un vector de manera que el conjunto de todas sus iteraciones a través del operador es denso en el espacio. La existencia de órbitas densas está íntimamente relacionada con el concepto dinámico conocido como transitividad topológica ya que, toda aplicación continua definida en un espacio métrico completo sin puntos aislados es topológicamente transitiva, sí y solo si, admite puntos con órbita densa. Si además, el operador admite un conjunto denso de puntos periódicos, entonces se dice que es caótico en el sentido de Devaney.

El objetivo general de esta tesis es continuar con el estudio de la dinámica caótica de los operadores desplazamiento a izquierda (operadores backward shift en inglés) definidos en espacios de sucesiones.

Esta memoria se ha estructurado en cuatro capítulos. Los dos pri-

meros proporcionan las definiciones, notaciones y técnicas básicas que se van a utilizar. Los dos últimos capítulos presentan los nuevos resultados que se han obtenido. Más detalladamente:

- En el primer capítulo se incluyen algunas definiciones y resultados, de carácter preliminar, que serán útiles en el desarrollo de la memoria. Se establecen también las notaciones a utilizar. En la primera parte del capítulo se recuerdan los conceptos básicos de dinámica topológica y, posteriormente, se describe el contexto de trabajo; que como ya se ha mencionado, será lineal e infinito dimensional.

- El Capítulo 2 está dedicado por completo al estudio de la dinámica básica del operador desplazamiento, en concreto, a la hiperciclicidad y el caos de dicho operador en espacios de sucesiones. El operador desplazamiento es sin duda el más utilizado a la hora de estudiar propiedades dinámicas. Aunque este capítulo no contiene resultados nuevos, parece procedente incluir aquí, de manera ordenada, los resultados y demostraciones básicas de la dinámica del operador desplazamiento, ya que ilustran las técnicas que se van a utilizar en capítulos posteriores.

- En el Capítulo 3 se estudian propiedades de recurrencia para operadores desplazamiento en espacios de sucesiones. Primero se prueba que el operador desplazamiento a izquierda es recurrente si y sólo si es hipercíclico, es decir, si es topológicamente transitivo. Se caracterizan también operadores desplazamiento que admiten puntos producto recurrentes no nulos como caóticos en el sentido de Devaney. Se dan ejemplos de operadores desplazamiento ponderados que admiten puntos que son recurrentes y distales, pero no producto recurrentes, en contraste con la dinámica en conjuntos compactos. Se observa también que existen operadores con vectores que son producto recurrente pero que tienen órbita no acotada. Se finaliza el capítulo generalizando los resultados probados para operadores desplazamiento definidos en espacios de Banach de sucesiones a un contexto más general, en concreto a F-espacios o espacios de Fréchet de sucesiones.

Los resultados de este capítulo han sido publicados en la revista de investigación Applied Mathematics & Information Sciences [26].

- En el Capítulo 4 se caracteriza caos para operadores de la forma $\varphi(B)$, definidos en espacios de sucesiones de Banach, donde $\varphi(z) = (az+b)/(cz+d)$ es una Transformación Fraccional Lineal y B es el operador desplazamiento a izquierda usual. Las caracterizaciones que se obtienen son "computables" ya que se expresan como condiciones que involucran sólo los cuatro números complejos que definen la transformación φ.

  Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación en la revista de investigación Topology and its Applications [37].