

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación

Departamento de Comunicaciones

TESIS DOCTORAL

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS
COMPLEJOS MEDIANTE ANÁLISIS CIRCUITAL
GENERALIZADO**

**ALEJANDRO VALERO NOGUEIRA
DIRECTOR: MIGUEL FERRANDO BATALLER**

VALENCIA, JUNIO 1997

A mi mujer, Aída

Agradecimientos

Los años transcurridos desde que llegué a la Escuela de Telecomunicación de Valencia han sido muy enriquecedores en el terreno profesional y ello debido especialmente a Miguel Ferrando a quien quiero agradecer no sólo haberme dirigido en esta tesis sino también todo lo que he aprendido y espero seguir aprendiendo en su compañía.

Quiero hacer mención también a mis compañeros del Departamento de Comunicaciones, Javier Martí, Felipe Peñaranda, Mariano Baquero, Vicente Boria, Juan Vicente Balbastre, Luis Nuño, José Oscar Romero, por sus consejos y aportaciones en distintas fases de la elaboración de este trabajo.

Finalmente quiero agradecer a mis padres y hermanos su apoyo incondicional, y especialmente a Aída y a mis amigos, que me recuerdan Quien da consistencia a las cosas.

“Me gusta compararme con un vagabundo de las montañas, que, sin conocer el sendero, trepa lenta y fatigosamente y, a menudo, debe volver sobre sus pasos, porque no puede ir más allá.

Luego, conscientemente, o por fortuna, encuentra una nueva senda que lo lleva más arriba, hasta que alcanza la cima y se da cuenta, con vergüenza, que existe un precioso camino maestro, desde donde habría podido subir, con sólo haber tenido la suerte de encontrar la aproximación adecuada.

En mis trabajos, naturalmente, no le digo al lector nada de todos mis errores, sino que describo tan sólo aquel camino principal por el cual él puede ahora subir las mismas alturas sin dificultad.”

Hermann Von Helmholtz

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1 MÉTODOS NUMÉRICOS EN ELECTROMAGNETISMO	7
1.1 MODELOS ANALÍTICOS	8
<i>a) Operadores integrales</i>	9
<i>b) operadores diferenciales</i>	9
1.2 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOS MODELOS ANALÍTICOS	9
1.2.1 El Método de los Momentos	10
<i>a) Funciones base y peso</i>	12
<i>b) Obtención de la Solución en Ecuaciones Integrales</i>	13
<i>c) Mejoras Análíticas de los Modelos</i>	14
2 ECUACIONES BÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO	7
2.1 LA ECUACIÓN DE ONDA	9
2.2 REGIONES LIBRES DE FUENTES	22
2.3 SOLUCIONES MODALES EN REGIONES LIBRES DE FUENTES	23
2.3.1 La Ecuación de Helmholtz en Cartesianas	23
2.3.2 La Ecuación de Helmholtz en Cilíndricas	24
2.4 REGIONES CON FUENTES. FUNCIÓN DE GREEN	27
3 LA MATRIZ DE ADMITANCIAS GENERALIZADAS	29
3.1 EL CONCEPTO DE IMPEDANCIA DE ONDA	30
3.2 LA MATRIZ DE ADMITANCIAS GENERALIZADAS (MAG)	34
3.3 ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO BASADAS EN LA FUNCIÓN DE GREEN	38
3.3.1 Otras Integrales de Contorno	41
3.3.2 Utilización de Funciones de Green Especializadas	43
3.4 ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO BASADA EN LA FUNCIÓN DE ONDA	44
3.5 OBTENCIÓN DE LA MAG MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO	47
3.6 OBTENCIÓN DE LA MAG A PARTIR DE SOLUCIONES MODALES	49

3.7 LA MAG A PARTIR DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	51
3.8 CONCLUSIONES	56
4 LA TEORÍA DE CIRCUITOS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS	57
4.1 SEGMENTACIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS	58
4.1.1 Formulación Circuitual Generalizada	59
4.1.2 Caracterización de Regiones con N Accesos	63
4.2 SEGMENTACIÓN SIN IMPOSICIÓN DE CONDUCTORES EN LOS ACCESOS	66
4.3 MATRIZ DE DISPERSIÓN GENERALIZADA [S]	67
4.3.1 Cálculo de las Admitancias Características	70
4.4 CONEXIÓN DE REGIONES EN CASCADA	70
4.4.1 Matriz de Transmisión Generalizada [T]	70
4.4.2 Conexión en Cascada de Regiones Arbitrarias	71
4.5 ACOPLAMIENTO MÚLTIPLE ENTRE REGIONES	73
4.5.1 Matriz de Acoplamientos	74
4.5.2 Realimentación Modal	76
5 SOLUCIÓN A ALGUNOS PROBLEMAS ELECTROMAG. MEDIANTE MODELADO CIRCUITAL	81
5.1 REFLECTOR DIÉDRICO	82
5.1.1 El Reflector Diédrico como Elemento Difractante	83
<i>a) Incidencia TM_z</i>	<i>85</i>
<i>b) Incidencia TE_z</i>	<i>101</i>
5.1.2 El Reflector de Esquina como Antena	109
5.1.3 Caso Particular: La Placa Metálica	116
5.1.4 Discusión de los Resultados	121
5.2 CILINDROS CONDUCTORES DE SECCIÓN POLIGONAL	127
<i>a) Incidencia TM_z</i>	<i>127</i>
<i>b) Incidencia TE_z. Método de los Modos Projectados</i>	<i>141</i>
5.3 CILINDRO HUECO RANURADO	149
5.4 INTERACCIÓN MÚLTIPLE	167

5.5 ANÁLISIS DE POSTES PASANTES EN GUÍA RECTANGULAR	169
6 ANÁLISIS DE FUENTES FINITAS JUNTO A ESTRUCTURAS CILÍNDRICAS	179
6.1 FUENTES Y CAMPOS EN EL DOMINIO TRANSFORMADO.....	181
6.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE FUENTES REALES DE CORRIENTE EN ESPACIO LIBRE	186
6.3 ANÁLISIS ESPECTRAL DEL DIPOLO FRENTE A UN CILINDRO CONDUCTOR DE SECCIÓN CIRCULAR	190
6.4 CARACTERIZACIÓN ESPECTRAL DE CILINDROS DE SECCIÓN ARBITRARIA	192
6.5 APLICACIÓN DEL MÉTODO ESPECTRAL AL CÁLCULO DE LA Z_{IN} DE DIPOLOS FRENTE A CILINDROS	194
CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS	197
APÉNDICE I: Funciones de Bessel	201
APÉNDICE II: Matriz de Acoplamiento Múltiple del Reflector Diédrico. Modos TM_z y TE_z	205
APÉNDICE III: Algunas Operaciones Frecuentes con Matrices	211
REFERENCIAS	215

Introducción

Desde que en 1901 Marconi realizara con éxito las primeras experiencias de comunicación vía radio, la Teoría Electromagnética ha sido una continua fuente de aplicaciones de toda índole. Probablemente sean los sistemas de comunicación los que han gozado de un mayor impulso, pero junto con ellos hay otras aplicaciones, tales como los sistemas radar, los sistemas de radionavegación, los sistemas de radiolocalización, las aplicaciones biomédicas de las microondas, etc., que se han visto beneficiadas de las propiedades del fenómeno electromagnético. El creciente interés en el desarrollo de nuevos sistemas y en la mejora de los ya existentes, lleva aparejado un conocimiento cada vez más profundo de esta rama de la física, así como de la matemática asociada.

A medida que se ha ido incrementando el grado de complejidad de los dispositivos y las estructuras presentes en un sistema, la descripción a priori de su comportamiento, mediante modelos matemáticos y herramientas precisas de cálculo se ha ido convirtiendo en una exigencia, ya que en muchos casos no resulta práctico ni económico ajustar un dispositivo después de fabricarlo.

Centrándonos en el terreno de las estructuras pasivas de microondas, la observación de la bibliografía existente pone de manifiesto el esfuerzo realizado en el modelado de los fenómenos electromagnéticos, así como los avances logrados en la elaboración de las herramientas numéricas que los describen. Resulta imposible enumerar todos los métodos disponibles. Cada uno permite resolver algún problema concreto, algún aspecto de la realidad, de la forma más eficiente. En particular, algunos métodos gozan ciertamente de mayor popularidad dada su versatilidad y su sencillez; pero en general, cuando se trata de analizar una estructura concreta uno tiene que elegir el método más apropiado a dicha estructura de entre los existentes, o desarrollar uno nuevo.

Tradicionalmente, al hablar de problemas electromagnéticos, se suelen distinguir dos categorías: en una de ellas se encuentran los llamados problemas abiertos, en los que tanto la fuente como la estructura analizada se disponen en espacio libre; en la otra, se engloban los problemas cerrados, asociados a la transmisión guiada de las ondas por distintos medios.

Entre los primeros se encuentran por ejemplo los problemas de difracción, la influencia de estructuras arbitrarias sobre el diagrama y la impedancia de las antenas, la detección remota, etc. Entre los segundos se recogen dispositivos como filtros, circuladores, cavidades, líneas de transmisión con distintas tecnologías, problemas de interconexión, discontinuidades entre tramos de líneas, entre otros. Obviamente también pueden presentarse situaciones intermedias en donde es posible distinguir unas regiones abiertas junto a otras cerradas o guiadas, como es el caso de las antenas de bocina, por ejemplo.

Aunque tanto los problemas abiertos como los cerrados responden a las mismas leyes, sintetizadas en las ecuaciones de Maxwell, sin embargo, las características geométricas asociadas a cada categoría determinan la conveniencia de aplicar en cada una, unas técnicas de análisis frente a otras. Algunos de estos métodos son comunes a ambos tipos de problemas y otros son más exclusivos. Sin duda son los problemas cerrados, dada la variedad de configuraciones existentes, los que han dado lugar a la aparición de un mayor número de técnicas y métodos de análisis específicos. Además, desde un punto de vista conceptual la extensión en los años 50 de la teoría de circuitos al tratamiento de redes de microondas ha favorecido su rápido desarrollo, dotando a este campo de un grado de sistematicidad en el tratamiento de estructuras arbitrarias, del que probablemente carecen los problemas abiertos. De esta forma, un problema cerrado complejo, expresado en términos de ondas electromagnéticas y donde se pueden presentar variados fenómenos tales como difracciones, ondas de superficie, energía almacenada en las esquinas, ondas reflejadas, resonancias, etc., se puede expresar en términos de tensiones, corrientes e impedancias. Entonces, cada elemento de una red queda definido por un parámetro característico, ya sea su impedancia, su admitancia o sus parámetros de dispersión; posteriormente estos elementos se conectan y el circuito resultante se resuelve siguiendo reglas algebraicas. Este planteamiento es atractivo en sí mismo, pero lo es aún más si observamos que cada elemento de la red puede ser caracterizado de forma independiente al resto de circuito (como se demostrará más adelante) y empleando aquel método de análisis que se considere más apropiado a sus características físicas y geométricas particulares. La teoría de circuitos es capaz de reunir las distintas técnicas susceptibles de caracterizar una estructura mediante los parámetros citados,

y por lo tanto puede considerarse como un método híbrido. La exactitud de los resultados vendrá limitada lógicamente por la precisión del método menos eficiente de entre los utilizados para caracterizar el problema.

La teoría de circuitos puede considerarse entonces como la base sobre la que se asienta el análisis de problemas cerrados en microondas y milimétricas. Habitualmente un único método suele ser suficiente para afrontar el análisis de una red. Sin embargo la creciente complejidad de los circuitos está introduciendo la necesidad de combinar varios métodos de análisis, por lo que sólo en la bibliografía reciente se encuentran algunos ejemplos de estas técnicas híbridas, como tendremos ocasión de ir comentando a lo largo de esta tesis.

Los problemas abiertos por el contrario no se suelen afrontar teniendo presente la teoría de circuitos. En muchos casos no resulta inmediato en ese tipo de problemas reconocer regiones susceptibles de caracterizarse mediante impedancias o admitancias, y el análisis se realiza directamente aplicando el mejor método de entre los disponibles. Sin embargo, al igual que ocurre con los problemas cerrados, cada vez es más necesario combinar distintas técnicas para explicar eficientemente el comportamiento de una estructura compleja.

El primer objetivo de esta tesis se centra precisamente en extender el tratamiento circuital característico de los problemas cerrados al análisis de problemas abiertos. Las ventajas que se derivan de tal extensión son las mismas que encontramos en un problema cerrado: la sistematicidad en el tratamiento de los problemas, la facilidad para combinar distintas técnicas y el poder disponer de una caracterización unitaria de cada estructura e independiente de la excitación aplicada.

En la actualidad, el Departamento de Comunicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia posee una sólida experiencia en el análisis de problemas electromagnéticos mediante el método de los elementos finitos [1]. Se está en disposición de resolver complejas estructuras tanto cerradas como abiertas en medios anisótropos e inhomogéneos. Paralelamente se dispone de un extenso conocimiento de las técnicas de transformación espectral, que permiten las conversiones entre las distintas soluciones de la ecuación de onda homogénea [2]. Este departamento cuenta además con capacidad para el análisis de circuitos y estructuras radiantes en tecnología impresa [3], así como para el tratamiento de circuitos en guía [4]. Al mismo tiempo se está realizando un importante esfuerzo en el campo de las aplicaciones industriales de las microondas en terrenos como el alimenticio, el de la cerámica o el del caucho. Todas estas capacidades dispersas, encuentran en el

modelado circuital que introducimos la posibilidad de integración y el consiguiente ensanchamiento del espectro de problemas que el departamento estaría en condiciones de abordar.

Para alcanzar este objetivo es necesario revisar los métodos de caracterización empleados comúnmente en problemas cerrados y estudiar su aplicabilidad a los problemas abiertos. Concretamente, un aspecto importante es el que concierne al tamaño eléctrico de una estructura. Buena parte de las técnicas numéricas emplean considerables recursos informáticos cuando se aplican a problemas cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda. Esto hace que debamos fijar nuestra atención en aquellos métodos que se muestren eficientes también en la caracterización de estructuras eléctricamente grandes, ya que son comunes en problemas abiertos. En particular los métodos modales, basados en las soluciones de la ecuación de onda homogénea, proporcionan una rápida convergencia, constituyendo un compromiso razonable entre precisión y coste numérico, en el análisis de una región homogénea.

A la vista de las interesantes propiedades de los métodos modales, el segundo objetivo que se plantea este trabajo es la caracterización circuital de regiones homogéneas de sección arbitraria mediante estas técnicas, a menudo restringidas a problemas con geometrías separables.

La combinación de las técnicas existentes con la que aquí proponemos nos va a permitir resolver eficientemente problemas arbitrarios como el mostrado en la figura 1a, donde se combinan situaciones muy diversas. A cada región se le asocia una red que la caracteriza, construyéndose el circuito de la figura 1b, cuya resolución sigue reglas algebraicas.

Con el fin de presentar estos dos objetivos hemos dividido la exposición en seis capítulos.

El primer capítulo es introductorio y pretende exponer brevemente las alternativas existentes en el modelado numérico de un problema electromagnético. Lejos de enumerar todos y cada uno de los métodos existentes, se comentan los métodos más versátiles empleados en la resolución de las ecuaciones de Maxwell.

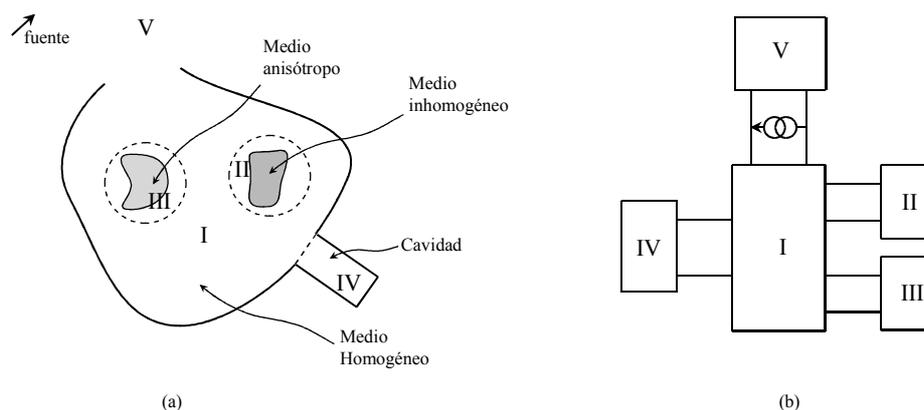


figura 1 La figura (a) muestra esquemáticamente un problema arbitrario, cuyo circuito equivalente se muestra en la figura (b).

En el segundo capítulo se recogen aquellos aspectos básicos de la teoría electromagnética que servirán de referencia para los capítulos posteriores. Tales fundamentos son esencialmente los relacionados con las soluciones de la ecuación de onda homogénea en cartesianas y cilíndricas.

El concepto de impedancia de onda y la definición de la matriz de admitancias generalizadas es el objeto del tercer capítulo. A partir del teorema de unicidad y del principio de equivalencia se justifica que es posible caracterizar un recinto cerrado definiendo una inmitancia (impedancia o admitancia) generalizada que relacione las componentes de campo eléctrico y magnético en su contorno. Se demuestra además, que para efectuar esta caracterización basta con conocer el operador asociado al recinto, pudiendo ser este diferencial o integral; y éste último a su vez puede estar basado en la función de Green o incluso en la función de onda. Además la caracterización es independiente del medio externo.

En el capítulo cuarto se considera la problemática de la segmentación de un problema complejo. Se analizan las posibles vías de segmentación apoyándose en las tres modalidades del principio de equivalencia. Una vez caracterizados los recintos, se analizan las distintas posibilidades de interconexión entre ellos, empleando matrices de inmitancia o de dispersión generalizadas.

El capítulo quinto se dedica a la aplicación del modelado circuital a una serie de problemas bidimensionales representativos, tanto abiertos como cerrados. Se combinan las distintas técnicas y se valora la precisión y la eficiencia numérica del método frente a otras técnicas.

Finalmente en el capítulo seis el modelado circuital se extiende a una clase de problemas tridimensionales. Se trata de aquellos en los que una fuente finita se encuentra junto a una estructura cilíndrica infinita de sección arbitraria. En ese caso el modelado circuital aporta una solución sencilla y eficiente a un problema que de otro modo sólo encuentra soluciones aproximadas. Comprobaremos que este problema tridimensional se puede descomponer en un espectro de problemas bidimensionales cuyo análisis es inmediato con las técnicas empleadas en los capítulos precedentes.

- [1] Juan Vicente Balbastre Tejedor, *“Solución de Problemas Electromagnéticos Cerrados y Abiertos Mediante el Método de los Elementos Finitos, Incluyendo Materiales Anisótropos e Inhomogéneos”*, Tesis Doctoral presentada en la U.P.V., Julio 1996.
- [2] Mariano Baquero Escudero, *“Transformaciones Espectrales y Aplicaciones a Síntesis de Ondas, Medida de Antenas y Difracción”*, Tesis Doctoral presentada en la U.P.V., Abril 1994.
- [3] David Sánchez-Hernández, *“Active Microstrip Patch Antennas for Monolithic Microwave Integrated Circuits (MMICs)”*, Tesis Doctoral presentada en el King’s College, University of London, Dic. 1995.
- [4] Vicente Boria, *“Análisis de Problemas Electromagnéticos Mediante Métodos Modales y Matrices Generalizadas. Aplicaciones”*, Tesis Doctoral presentada en la UPV, Junio, 1997.

1

Métodos Numéricos en Electromagnetismo

El continuo crecimiento de la capacidad de procesamiento de los ordenadores en los últimos tiempos está permitiendo abordar problemas electromagnéticos que hace algunos años se consideraban inalcanzables. Los métodos numéricos han experimentado paralelamente un grado de maduración notable, tanto en el modo de formularse, como en la eficiencia con que explotan los recursos informáticos.

Clásicamente, la solución a los problemas de contorno en electromagnetismo, se basaba en técnicas analíticas, buscando soluciones cerradas. Estas soluciones sin embargo sólo están disponibles para una clase limitada de problemas con geometrías canónicas. Los métodos numéricos amplían el espectro de las soluciones conocidas que, si bien deben considerarse aproximadas, en muchos casos puede seleccionarse el grado de precisión con que los resultados calculados describen la realidad física que se analiza.

No es intención de este capítulo introductorio realizar una exposición exhaustiva de este extenso campo, pero sí reseñar las grandes líneas de estudio para situar las aportaciones de esta tesis en su contexto.

El electromagnetismo trata de las fuentes eléctricas y magnéticas y de los campos que éstas producen. Las ecuaciones de Maxwell son precisamente las que describen el modo en que se relacionan las fuentes y los campos. El modelado de un problema electromagnético debe ser capaz de describir esa relación en el contexto de una geometría y un medio determinados, es decir, de unas condiciones de contorno.

Para describir un problema electromagnético podemos hablar entonces de una función de transferencia, deducida partiendo de las ecuaciones de Maxwell y las propiedades eléctricas y geométricas del problema. Esta función de transferencia, a partir de una excitación en forma de corrientes o campos, proporciona como resultado, otras corrientes inducidas o nuevos campos.

La formalización del modelo o función de transferencia es un paso previo inevitable para formular cualquier método numérico. Existen, no obstante distintas formas de plantear un mismo problema, si bien unas se adaptan mejor a unas situaciones que a otras. Podríamos distinguir cuatro tipos de modelos

- 1) *Expansiones modales*: Son las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en un determinado sistema coordenado sujetas a unas condiciones de contorno por imponer.
- 2) *Operador integral*: Es una ecuación integro-diferencial basada en la función de Green de espacio libre u otra más especializada.
- 3) *Operador diferencial*: Son las ecuaciones rotacionales de Maxwell, o su formulación integral.
- 4) *Descripción óptica*: El modelo se establece en forma de rayos y de coeficientes de difracción.

1.1 MODELOS ANALÍTICOS

Nos detendremos brevemente en el modo de obtener los operadores integrales o diferenciales dado que han recibido mayor atención desde el punto de vista numérico.

a) Operadores integrales

El punto de partida para generar una ecuación integral en electromagnetismo, radica en seleccionar una función de Green apropiada al problema considerado. Resulta habitual emplear la de espacio libre por ser la más sencilla en su formulación, además de facilitar la discretización del modelo. La función de Green junto con el teorema de Green nos conducen a una ecuación integral [1] de la cual se obtiene el campo en un recinto cerrado en términos de integrales sobre las

superficies que lo envuelven, e integrales de volumen extendidas a las fuentes en su interior.

El operador integral obtenido se caracteriza por un núcleo que puede incluir también operadores diferenciales actuando sobre la fuente o el campo incógnita. Las ecuaciones integrales que se obtienen son de dos tipos, conocidos como de Fredholm de primera y segunda especie. En el primero la incógnita aparece únicamente debajo de la integral, mientras que en el segundo también aparece fuera de ella.

b) Operadores diferenciales

Los modelos basados en operadores diferenciales requieren menos esfuerzo en su deducción que los modelos concebidos a partir de una ecuación integral. Sin embargo, la implementación numérica del modelo diferencial puede diferir notablemente de la seguida en el modelo integral. En primer lugar el operador diferencial es local a diferencia del operador integral que es global. Esto supone que para describir el comportamiento del campo es necesario tomar muestras en todas las dimensiones que considere el problema. El operador integral por el contrario permite considerar una dimensión menos. Una segunda diferencia importante es el hecho de que el operador integral incluye explícitamente la condición de radiación. Por otro lado el operador diferencial posee la capacidad de tratar más directamente todo tipo de inhomogeneidades y no linealidades, frente al operador integral. Finalmente, conviene señalar que un modelo basado en las ecuaciones diferenciales da lugar a una matriz más grande, aunque dispersa, mientras que las matrices que se generan tras un modelado integral son menores, pero también densas, lo que influirá en el modo de obtener sus respectivas soluciones.

1.2 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOS MODELOS ANALÍTICOS

La idea central asociada al análisis numérico de un modelo matemático radica en aproximar las cantidades de interés mediante la sustitución de éstas por un conjunto discreto de funciones, a menudo polinomios, cuya suma ponderada converja a la solución. De esta forma los operadores integrales se sustituyen por sumas finitas, mientras que los operadores diferenciales son sustituidos por diferencias finitas.

1.2.1 El Método de los Momentos

La idea básica comentada encuentra su expresión más elaborada en el Método de los Momentos. Este procedimiento de análisis numérico fue descrito inicialmente por Harrington [2] y constituye la herramienta computacional más utilizada en electromagnetismo en los últimos 30 años [3,4].

Cuando los modelos analíticos se expresan mediante ecuaciones funcionales de la forma

$$L(f) = g \quad (1.1)$$

el primer paso es aproximar la función incógnita f por una combinación lineal de funciones base, \mathbf{b}_n

$$f \approx \sum_n^N F_n \mathbf{b}_n \quad (1.2)$$

donde F_n son muestras de la discretización de f , y son las incógnitas del problema a resolver. Si sustituimos (1.2) en (1.1)

$$\sum_n F_n \cdot L(\mathbf{b}_n) = g_a \approx g \quad (1.3)$$

La expresión (1.3) sigue siendo una ecuación funcional donde ahora la incógnita no es una función sino un conjunto discreto de valores numéricos F_n . Ahora, para que exista una buena solución, una combinación lineal de las funciones $L(\mathbf{b}_n)$ debe aproximarse a g , de manera que se minimice el error o residuo.

$$R = g - g_a = g - \sum_n F_n \cdot L(\mathbf{b}_n) \quad (1.4)$$

La ecuación funcional (1.3) puede convertirse en un sistema de ecuaciones haciendo nulo el residuo, tras ponderarlo por unas funciones peso, \mathbf{w}_m

$$\langle \mathbf{w}_m, R \rangle = 0 \quad (1.5)$$

La ponderación se realiza aplicando el producto simétrico definido como

$$\langle F, G \rangle = \int_D F^* \cdot G dD \quad (1.6)$$

El sistema de ecuaciones resultante es

$$\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{g} \rangle = \sum_n^N F_n \langle \mathbf{w}_m, \mathbf{b}_n \rangle \quad (1.7)$$

que matricialmente se expresa como

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1.8)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{g} \rangle]_{M \times 1} \\ \mathbf{x} &= [F_n]_{N \times 1} \\ \mathbf{A} &= [\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{b}_n \rangle]_{M \times N} \end{aligned} \quad (1.9)$$

En el caso de las ecuaciones integrales de campo eléctrico

$$\mathbf{L}(\mathbf{J}) = \mathbf{E} \quad (1.10)$$

La matriz de coeficientes \mathbf{A} se suele conocer como matriz de impedancias ya que su multiplicación por un vector de corrientes incógnita I_n , origina un vector de campos eléctricos o voltajes, V_n . Su inversa por tanto se suele llamar matriz de admitancia, y su multiplicación por el vector campos eléctricos o voltajes proporciona el vector de corrientes. La formulación matricial, junto con la interpretación circuital permite ver el problema como una red de N accesos, cada uno de los cuales resulta excitado por un generador de tensión de valor V_n . Los coeficientes de la matriz de impedancias

son entonces las impedancias mutuas entre los accesos de esta red que aproxima el problema modelado. Entonces, si las funciones base escogidas son de dominio discreto, estas impedancias representan interacciones espaciales entre las N puertas del modelo. Por el contrario, si las funciones base son de dominio completo las impedancias indican interacciones modales.

Se podrían realizar comentarios similares para los modelos basados en operadores diferenciales, aunque los coeficientes de la representación multipuerto ahora describen interacciones locales en lugar de globales. Dado que el modelo diferencial conduce a matrices dispersas no se suele calcular su inversa para obtener la solución. En el análisis numérico de los operadores diferenciales, hay dos enfoques principales, uno conocido como método de las Diferencias Finitas y otro como Método de los Elementos Finitos [5,6]. Los métodos difieren principalmente en el modo en que se aproximan los operadores diferenciales y en cómo se satisfacen las ecuaciones diferenciales. El método de los elementos finitos suele ser más apropiado para modelar problemas con geometrías complicadas, las cuales pueden aproximarse por funciones lineales a trozos.

a) Funciones base y peso

La elección de las funciones base y peso de las que hablábamos juega un papel decisivo en la precisión y en la eficiencia del modelo numérico resultante. Esta elección no es trivial ya que, si bien existe una gran variedad de funciones, el conjunto elegido limita implícitamente la geometría y el tamaño eléctrico del problema considerado. A priori, el conjunto de funciones base ideal es aquel que más se asemeja a la función incógnita, proporcionando una solución convergente con el mínimo número de elementos de la expansión, y en el menor tiempo posible. Sin embargo, un conjunto así, es necesariamente poco flexible y limita el ámbito de aplicación de un modelo numérico.

Las funciones base se clasifican en tres grandes grupos: funciones de dominio discreto, de dominio completo y mixtas. Las funciones de dominio discreto se definen sobre un subdominio del operador integral y se anulan en el resto. Entre ellas se incluyen los pulsos, los triángulos y las funciones sinusoidales a trozos. Cuando las funciones base se extienden a todo el dominio del operador integral, se dice que son de dominio completo. Ejemplos son las series de Fourier o los polinomios de Legendre o Hermite.

Tradicionalmente las funciones de dominio discreto se han visto favorecidas dada su flexibilidad para amoldarse a la geometría del problema, y porque facilitan la evaluación de las integrales resultantes. También hay que señalar en su contra que es necesario emplear aproximadamente diez funciones base por cada longitud de onda de función incógnita, ya sea corriente o campo. Esto conduce a grandes sistemas de ecuaciones, incluso en problemas ligeramente por encima de la región de resonancia.

Las funciones de dominio completo por su parte hacen más difícil la evaluación de las integrales involucradas, a no ser que la geometría del problema sea canónica, es decir, se genere a partir de un sistema coordenado separable. Estas funciones no son apropiadas para cuerpos pequeños o para describir fenómenos muy localizados. Sin embargo, cuando la estructura del problema es eléctricamente grande, éste puede resolverse con relativamente pocas incógnitas. Además, en ocasiones es posible asociar una interpretación física a las funciones base como expansiones modales. Numéricamente, una correcta elección de las funciones base y peso permite obtener matrices bien condicionadas.

Los conjuntos de funciones mixtos pueden compensar los inconvenientes y las limitaciones propias de unos y otros como se sostiene en [7].

Recientemente están apareciendo nuevos enfoques en la elección de las funciones base que simplifican el cálculo de las ecuaciones integrales, conservando su flexibilidad. Así, James [8] utiliza series de Fourier como funciones globales extendidas al contorno, lo que le permite llegar a la solución sin calcular integrales para obtener los coeficientes de la matriz y apoyándose únicamente en la FFT. Otra técnica especialmente prometedora introduce la transformada basada en *wavelets* en la solución de ecuaciones integrales [9-14]. Esta técnica se adapta a problemas que contienen zonas en las que la incógnita varía suavemente y a la vez zonas en las que la variación es más rápida. Las *wavelet* pueden adaptarse a estas regiones dando lugar a matrices dispersas.

b) Obtención de la solución en ecuaciones integrales

Para obtener la solución al sistema de ecuaciones en (1.8) es necesario seguir tres pasos. El primero nos proporciona los coeficientes de la matriz de impedancias que, en un caso unidimensional, son de la forma general

$$z_{ij} = \int w_i(s) \left[\int b_j(s') K(s, s') ds' \right] ds \approx \sum p_m q_n w_i(s_n) b_j(s'_m) K(s_n, s'_m) \quad (1.11)$$

donde $K(s, s')$ es el núcleo de la ecuación integral y s_n y s'_m son las posiciones n -ésima y m -ésima del punto de observación y de la fuente, respectivamente. Los elementos de la matriz se obtienen como sumas, ponderadas por los coeficientes p_m y q_n resultantes de las integraciones numéricas efectuadas.

Una vez obtenida la matriz de impedancias, existen varias posibilidades para obtener la matriz de admitancias solución. Directamente mediante inversión, factorizando o empleando métodos iterativos. La solución final es inmediata tras multiplicar la matriz de admitancias por el vector excitación.

Una cuestión importante desde el punto de vista práctico es el tamaño de la matriz impedancia. Ciertamente, a medida que se incrementa el tamaño eléctrico del problema el número de incógnitas a resolver aumenta en relación directa. Análogamente, resulta más costoso, computacionalmente hablando, considerar un problema tridimensional que uno bidimensional, y éste a su vez lo es más respecto al unidimensional. Todo ello nos sugiere la necesidad de reducir el tiempo de procesado introduciendo mejoras tanto desde el punto de vista analítico como numérico.

c) Mejoras Analíticas de los Modelos

A continuación se recogen algunos de los procedimientos analíticos propuestos en los últimos años para reducir el coste asociado a la solución de problemas electromagnéticos mediante el método de los momentos [15].

i) Funciones de Green Especializadas

La función de Green más comúnmente empleada es la de espacio libre por su sencillez y flexibilidad. Sin embargo esta función sólo satisface la condición de contorno de radiación, $r \rightarrow \infty$, y fuerza al modelo a situar corrientes incógnita en todo el contorno del volumen considerado. Las funciones de Green especializadas satisfacen condiciones de contorno adicionales, reduciendo así el número de fuentes incógnita. Aunque sólo se conocen unas pocas funciones de Green para geometrías separables, éstas pueden aplicarse a un buen número de problemas de interés práctico, tales como fuentes en presencia de planos, cilindros, esferas, etc. Sin

embargo, al mismo tiempo que se reduce el número de incógnitas, el núcleo de la ecuación integral se vuelve más complejo. Aún así, las ventajas de estas funciones especializadas representan una interesante alternativa. Como ejemplos, en [16] se recoge su empleo para un cilindro, en [17] para un sector cilíndrico y en [18] para una esfera.

ii) Métodos Híbridos

Un ejemplo de método híbrido lo constituye la combinación del Método de los Momentos (MM) con la Teoría Geométrica de la Difracción (GTD) recogida en [19] y más recientemente en [20]. La técnica de GTD tiene la atractiva propiedad de que el tiempo de procesado es independiente del tamaño eléctrico del problema, a diferencia del Método de los Momentos. Por otro lado, el aumento de la complejidad del problema obliga a trazar más rayos y a calcular más coeficientes de difracción, limitando la aplicabilidad de la GTD. La combinación de los métodos puede explotar las ventajas de ambos, proporcionando un modelo notablemente mejor que cualquiera de los dos en solitario.

Otra técnica híbrida, conocida como Método del Unimomento [21], consiste en combinar un operador diferencial con una expansión modal. Esta técnica modela un cuerpo cilíndrico mediante un operador diferencial extendido al círculo que lo contiene y posteriormente acopla la solución interior con el espacio exterior en donde la solución viene expresada mediante una expansión modal.

Finalmente podemos apuntar otra técnica híbrida que combina el Método de los Momentos con la función de Green asociada a una geometría concreta [22]. Este método puede resolver así problemas en los que un objeto arbitrario se encuentra en un medio donde la función de Green es conocida. El objeto arbitrario se sustituye por unas corrientes incógnita y la ecuación integral se obtiene convolucionando estas corrientes con la función de Green del problema. Este método aún la flexibilidad del método de los momentos con el ahorro en el número de incógnitas que proporciona una función de Green especializada.

iii) Otros Métodos

Existen otros métodos analíticos para simplificar la formulación y el consiguiente procesado, aunque asumiendo ciertas aproximaciones. La condición de impedancia de contorno (IBC) [23] supone que los campos eléctrico y magnético en

la superficie de un objeto pueden relacionarse mediante una impedancia superficial z_{sup} , tal que $\mathbf{E}_{tan} = -z_{sup} \hat{n} \times \mathbf{H}_{tan}$, donde \hat{n} es un vector normal a la superficie y $z_{sup} = (1 + j)\omega \mu \delta/2$ siendo δ la profundidad de la película superficial. Con esta suposición, el número de incógnitas necesarias para modelar el objeto se reduce a la mitad.

Del mismo modo que la condición IBC reduce el número de incógnitas a la mitad, la aproximación de óptica física elimina el resto de incógnitas. Para ello suponemos que la corriente superficial se puede expresar directamente en términos del campo incidente. Para un conductor perfecto basta con imponer que $\mathbf{J} = 2\hat{n} \times \mathbf{H}^i$. De este modo evitamos calcular la matriz de impedancias.

Los métodos recogidos son sólo una pequeña muestra de los continuos esfuerzos que se han venido realizando para plantear los problemas electromagnéticos de manera más eficiente a la vez que más exacta. Como hemos podido comprobar, unos modelos son más flexibles que otros. Ciertos métodos por el contrario son muy exclusivos en cuanto al tipo de problema que pueden resolver. La teoría de circuitos aplicada a la solución de problemas electromagnéticos puede ser una vía atractiva para combinar distintos métodos. La bibliografía especializada recoge un sinfín de técnicas, algunas de las cuales sólo se diferencian entre sí en pequeños matices. Sin embargo todas ellas pueden incluirse en alguna de las cuatro categorías establecidas al comienzo de este capítulo. Esta observación lejos de reducir el valor de estas técnicas, pretende poner de manifiesto la viabilidad de su utilización combinada. Dejando a un lado los métodos asintóticos (GTD, UTD), demostraremos que las técnicas diferenciales, integrales o modales son susceptibles de proporcionar una matriz de caracterización asociada a cada recinto. Entonces, en líneas generales un problema arbitrario se segmenta en recintos donde se aplica el modelo más apropiado a sus características. La conexión de los recintos y su resolución algebraica proporciona la solución, siendo esta tan precisa como lo sean los modelos parciales aplicados a cada región. Esta es la propuesta que se recoge en esta tesis.

MÉTODOS NUMÉRICOS EN ELECTROMAGNETISMO.....	7
1.1 MODELOS ANALÍTICOS	8
a) Operadores integrales.....	8
b) Operadores diferenciales.....	9
1.2 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOS MODELOS ANALÍTICOS.....	9
<i>1.2.1 El Método de los Momentos.....</i>	<i>10</i>
a) Funciones base y peso.....	12
b) Obtención de la solución en ecuaciones integrales	13
c) Mejoras Analíticas de los Modelos	14

2

Ecuaciones Básicas del Electromagnetismo

Las ecuaciones de Maxwell nos proporcionan el punto de partida en el estudio de cualquier problema electromagnético. Junto a ellas contamos, además, con ciertos principios y teoremas tales como los de superposición, reciprocidad, equivalencia, unicidad, etc. que las desarrollan y facilitan su interpretación. En este capítulo hemos tomado de [24] y [25] aquellos aspectos básicos que se consideran relevantes para orientar la exposición hacia los propósitos expuestos en la introducción. Asimismo servirá como referencia para las formulaciones de los capítulos posteriores y para establecer la nomenclatura a utilizar.

Se formula la ecuación de onda y se recogen sus soluciones en coordenadas cartesianas y cilíndricas para el caso homogéneo. Posteriormente se comenta de forma general la solución de la ecuación de onda en presencia de fuentes.

Las ecuaciones que ligan los campos eléctricos y magnéticos con las fuentes que los producen, en forma diferencial, son

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} - \mathcal{M} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = \rho_m \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_e \quad (2.4)$$

a las que se suelen añadir las ecuaciones de continuidad

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (2.5)$$

y

$$\nabla \cdot \mathcal{M} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad (2.6)$$

aunque éstas se pueden deducir de las anteriores. En estas ecuaciones las variables que intervienen son:

- \mathcal{E} : intensidad de campo eléctrico (V/m)
- \mathcal{H} : intensidad de campo magnético (A/m)
- \mathcal{D} : densidad de flujo eléctrico (C/m²)
- \mathcal{B} : densidad de flujo magnético (Wb/m²)
- \mathcal{J} : densidad de corriente eléctrica (A/m²)
- \mathcal{M} : densidad de corriente magnética (V/m²)
- ρ_e : densidad de carga eléctrica (C/m³)
- ρ_m : densidad de carga magnética (Wb/m³)

Como es sabido, las cargas y corrientes magnéticas (ρ_m , \mathcal{M}) no tienen sentido físico. Esto no impide sin embargo que dichas cantidades se puedan introducir en las ecuaciones de Maxwell. Desde un punto de vista matemático la simetría de estas ecuaciones admite su presencia y como tendremos ocasión de comprobar en el capítulo 3, el empleo de unas corrientes magnéticas ficticias facilita la interpretación de numerosos problemas.

Si asumimos una variación armónica para los campos, entonces el análisis matemático se simplifica usando cantidades complejas, de tal forma que el campo instantáneo \mathcal{E} y el nuevo campo complejo $\mathbf{E}^{(1)}$ se relacionan mediante

$$\mathcal{E} = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} e^{j\omega t}) \quad (2.7)$$

⁽¹⁾ A lo largo de la exposición emplearemos los caracteres en negrita para indicar que se trata de funciones vectoriales.

Si además de suponer que estamos en régimen sinusoidal nos limitamos a estudiar problemas electromagnéticos en regiones homogéneas e isotrópicas la permitividad (ε) y la permeabilidad (μ) serán constantes escalares y podremos poner las ecuaciones de Maxwell como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

y las ecuaciones de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho_e \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -j\omega \rho_m \quad (2.13)$$

2.1 LA ECUACIÓN DE ONDA

Tratemos a continuación de desacoplar las ecuaciones diferenciales (2.8) y (2.9) para que en ellas aparezcan exclusivamente el campo eléctrico o magnético. Tomando el rotacional en (2.8) y (2.9) y tras algunas manipulaciones llegamos a

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{M} - j\omega\mu \mathbf{J} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} - j\omega\varepsilon \mathbf{M} - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) \quad (2.15)$$

donde $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$.

El método habitual para resolver estas ecuaciones pasa por la definición de unas funciones vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{F} llamadas potencial vector magnético y eléctrico, respectivamente.

En una región donde sólo existan fuentes eléctricas ($\mathbf{J} \neq 0$, $\mathbf{M} = 0$) se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; por lo tanto, dado que la divergencia del rotacional es cero, podemos afirmar que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.16)$$

introduciéndolo en (2.8)

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0 \quad (2.17)$$

lo cual sólo es posible si

$$\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A} = -\nabla\phi \quad (2.18)$$

donde ϕ es un potencial escalar arbitrario.

Si ahora tomamos el rotacional en (2.16) e introducimos en ella (2.9) y (2.17) obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu \varepsilon \phi) \quad (2.19)$$

Ahora bien, la divergencia de \mathbf{A} aún no ha sido definida. Para simplificar (2.19) podemos definir

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu \varepsilon \phi \quad (2.20)$$

que se conoce como condición de Lorentz. Con ella, (2.19) queda como

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.21)$$

y el campo eléctrico en (2.18) se puede expresar en función de \mathbf{A} como

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega \mu \varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.22)$$

De forma dual podríamos suponer ahora una región donde sólo existiesen fuentes magnéticas, $\mathbf{M} \neq 0$ y $\mathbf{J} = 0$, lo que llevaría a que \mathbf{D} fuera solenoidal, pudiendo definir

$$\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{F} \quad (2.23)$$

procediendo de forma análoga al caso anterior

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\varepsilon \mathbf{M} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2.26)$$

Por superposición de los dos casos particulares obtenemos las expresiones generales de los campos en función de los potenciales \mathbf{A} y \mathbf{F} :

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - j\omega \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2.28)$$

2.2 REGIONES LIBRES DE FUENTES

En una región libre de fuentes, las ecuaciones de onda (2.21) y (2.24) pasan a ser ecuaciones diferenciales vectoriales homogéneas

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0 \quad (2.30)$$

Se puede demostrar [24] que un campo arbitrario en una región homogénea libre de fuentes puede descomponerse en suma de dos funciones vectoriales independientes. Una de ellas está definida por los vectores potenciales $\mathbf{A} = \hat{t} \psi^a$ y $\mathbf{F} = 0$ y que se caracteriza porque $H_t = 0$. A este campo se le conoce como transversal magnético a \hat{t} (TM_t). La otra función de campo se caracteriza porque $\mathbf{A} = 0$ y $\mathbf{F} = \hat{t} \psi^f$. Ahora es la componente de campo eléctrico según \hat{t} la que se anula, $E_t = 0$, y la función de campo se llama transversal eléctrica a \hat{t} (TE_t).

Tanto ψ^a como ψ^f cumplen la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.31)$$

Así pues, para definir totalmente el campo en una región libre de fuentes basta con conocer dos soluciones escalares, ψ^a y ψ^f , y la dirección \hat{t} a la que están asociadas.

[†] \hat{t} es un vector unitario arbitrario.

2.3 SOLUCIONES MODALES EN REGIONES LIBRES DE FUENTES

En el punto anterior se puso de manifiesto que la descripción de un problema electromagnético en una región homogénea libre de fuentes pasa por la obtención de las soluciones de la ecuación de onda escalar en (2.31). con ellas es inmediato conocer los potenciales \mathbf{A} y \mathbf{F} y posteriormente el campo con (2.27) y (2.28).

Las soluciones a esta ecuación diferencial, también conocida como de Helmholtz, se obtienen mediante el método de separación de variables. Hay distintos sistemas coordenados respecto a los cuales se puede plantear la resolución de la ecuación, sin embargo los más frecuentes son el cartesiano y el cilíndrico (sobre todo en problemas bidimensionales). Comentaremos brevemente las soluciones en ambos sistemas ya que constituyen uno de los polos sobre los que girará el análisis de los capítulos posteriores. Nos apoyaremos en las soluciones que obtiene Harrington en [24].

2.3.1 La Ecuación de Helmholtz en Cartesianas

La ecuación de onda escalar en cartesianas es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.32)$$

El método de separación de variables busca soluciones de la forma

$$\psi = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.33)$$

Tras sustituir (2.33) en (2.32) y dividir por (2.33) es posible identificar tres ecuaciones independientes

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2 \quad (2.34)$$

cuya suma debe satisfacer

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2.35)$$

siendo k_x , k_y y k_z constantes independientes de x , y y z .

Las tres ecuaciones en (2.34) son iguales y por tanto sus soluciones son de la misma forma. Las funciones solución son del tipo

$$h(k_x x) = \text{sen } k_x x, \quad \text{cos } k_x x, \quad e^{jk_x x}, \quad e^{-jk_x x} \quad (2.36)$$

Se trata de funciones linealmente independientes también conocidas como *modos* cuya combinación lineal es también solución de la ecuación de onda. Nótese la dependencia del modo con x y con k_x . Debemos tener presente que k_x en (2.36) es también una variable cuyos valores vienen impuestos por las condiciones de contorno del problema considerado. No obstante, de los tres k_i , sólo dos son independientes entre sí, como vemos en (2.35). La solución más general que podemos plantear a la ecuación de onda considera la adición (integración) de las soluciones para cada k_i :

$$\psi = \int \int_{k_x, k_y} f(k_x, k_y) h(k_x x) h(k_y y) h(k_z z) dk_x dk_y \quad (2.37)$$

siendo $f(k_x, k_y)$ una función analítica.

Observamos entonces que en general existen infinitas soluciones o modos para la ecuación de onda en cartesianas. No obstante, dado que los valores de k_i están condicionados por las condiciones de contorno, existen ciertas situaciones (guía rectangular por ejemplo) donde las soluciones se limitan a un conjunto discreto de modos.

2.3.2 La Ecuación de Helmholtz en Cilíndricas

La resolución de un problema electromagnético está íntimamente ligada a su geometría y, paralelamente, está condicionada por el sistema coordenado escogido para describirla. Ciertamente la solución de la ecuación de onda es única y se puede alcanzar sea cual sea el sistema coordenado elegido. Sin embargo una correcta elección de éste facilita considerablemente la convergencia de la solución. En el caso de problemas abiertos, y sobre todo si son bidimensionales, el sistema más conveniente es el cilíndrico. En ese caso, la ecuación de Helmholtz se expresa como

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.38)$$

El método de separación de variables permite encontrar soluciones de la forma

$$\psi = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \quad (2.39)$$

Así, tras algunas manipulaciones podemos identificar las tres ecuaciones siguientes

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left[(k_\rho \rho)^2 - n^2 \right] R = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (2.42)$$

donde además ahora se cumple que

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2.43)$$

La solución a (2.40) es una combinación lineal de funciones de Bessel (ver apéndice I); por ejemplo

$$B(k_\rho \rho) = A_1 J_n(k_\rho \rho) + B_1 Y_n(k_\rho \rho) \quad (2.44)$$

Las ecuaciones (2.41) y (2.42) se solucionan con combinaciones lineales de funciones armónicas,

$$h(n\phi) = A_2 e^{jn\phi} + B_2 e^{-jn\phi} \quad (2.45)$$

y

$$h(k_z z) = A_3 e^{jk_z z} + B_3 e^{-jk_z z} \quad (2.46)$$

Dado que la coordenada ϕ es periódica, la variable n está formada por un conjunto discreto de valores. Dichos valores serán enteros o fraccionarios en función

de las condiciones de contorno. Por su parte k_z es un conjunto continuo de valores reales, como en cartesianas.

Así pues, la solución a un problema en coordenadas cilíndricas, en su forma más general puede expresarse como

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{k_z} f_n(k_z) B_n(k_\rho, \rho) h(n\phi) h(k_z z) dk_z \quad (2.47)$$

Ahora, para expresar el campo electromagnético en términos de la función de onda ψ , podemos en primer lugar descomponerlo en suma de un modo TE y otro TM transversales a \hat{t} . En cilíndricas es habitual escoger $\hat{t} = \hat{z}$ ya que \hat{z} es invariante con la posición, a diferencia de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$.

Si hacemos $\mathbf{A} = \hat{z}\psi^a$ y $\mathbf{F}=0$, y sustituimos en (2.27) y (2.28)

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \psi^a}{\partial \rho \partial z} & H_\rho &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^a}{\partial \phi} \\ E_\phi &= \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^a}{\partial \phi \partial z} & H_\phi &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \psi^a}{\partial \rho} \\ E_z &= \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi^a & H_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

que constituyen las componentes de campo eléctrico y magnético del modo TM_z .

Análogamente, haciendo $\mathbf{A}=0$ y $\mathbf{F} = \hat{z}\psi^f$ obtenemos, para el modo TE_z ,

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^f}{\partial \phi} & H_\rho &= \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \psi^f}{\partial \rho \partial z} \\ E_\phi &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \psi^f}{\partial \rho} & H_\phi &= \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^f}{\partial \phi \partial z} \\ E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi^f \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.4 REGIONES CON FUENTES. FUNCIÓN DE GREEN

Para obtener la solución completa a las ecuaciones (2.27) y (2.28) es necesario resolver la ecuación de onda vectorial debido a las fuentes en el interior de la región bajo estudio. Las soluciones obtenidas en 2.3 corresponden únicamente al campo creado en esta región por unas hipotéticas fuentes exteriores a ella. El problema de las regiones con fuentes se considera en detalle en los capítulos 3 y 4, por lo que aquí sólo se recogen las ideas generales.

Las ecuaciones a resolver son

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.50)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = -\varepsilon \mathbf{M} \quad (2.51)$$

La solución a una ecuación como la (2.50) no es en general sencilla y depende tanto de la geometría del problema como de la orientación de la fuente. Supongamos por simplicidad, que el problema viene descrito por una o más ecuaciones escalares como la siguiente

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (2.52)$$

para una excitación impulsional situada en \mathbf{r}' quedará como

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.53)$$

Donde $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se conoce como función de Green.

Haciendo uso de la segunda identidad escalar de Green [25] se puede demostrar que la solución a (2.34) es

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_S [\psi(\mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \psi(\mathbf{r}')] dS' \quad (2.54)$$

donde V es el volumen de la región bajo estudio y S la superficie que lo envuelve.

La expresión (2.54) permite disponer de una solución integral a una ecuación del tipo (2.52), a partir de la respuesta impulsional del problema, $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. La

obtención de la función de Green es no obstante, un problema en sí mismo y depende fundamentalmente de la geometría.

En problemas más generales como los definidos por (2.50) y (2.51), la función de Green deja de ser escalar para convertirse en diádica, es decir, un tensor de funciones de Green [25,26].

ECUACIONES BÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO	17
2.1 LA ECUACIÓN DE ONDA.....	19
2.2 REGIONES LIBRES DE FUENTES.....	22
2.3 SOLUCIONES MODALES EN REGIONES LIBRES DE FUENTES	23
<i>2.3.1 La Ecuación de Helmholtz en Cartesianas</i>	<i>23</i>
<i>2.3.2 La Ecuación de Helmholtz en Cilíndricas</i>	<i>24</i>
2.4 REGIONES CON FUENTES. FUNCIÓN DE GREEN.....	27

3

La Matriz de Admitancias Generalizadas

El análisis circuital que se pretende abordar se asienta sobre el concepto de impedancia de onda (o admitancia de onda). Este parámetro, que establece la relación entre los campos eléctrico y magnético en cada punto del espacio, nos habla de la interacción entre los campos electromagnéticos y el medio. El concepto de impedancia, asociado a cada punto, puede extenderse a la caracterización de todo un volumen mediante la introducción de la llamada *matriz de admitancias¹ generalizadas* (MAG). Su empleo nos va a permitir segmentar el espacio y asociar a cada una de las regiones resultantes una de estas matrices, cuya posterior interconexión constituirá el modelo circuital del problema. Pero para llegar a obtener la MAG es necesario establecer primero las condiciones de su existencia, para lo cual nos serviremos del teorema de unicidad. Posteriormente nos apoyaremos en el principio de equivalencia con el fin de formular los operadores integrales que determinan la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{H} en una región homogénea arbitraria. Finalmente la MAG se obtendrá como resultado de la discretización de los operadores mediante alguno de los procedimientos disponibles, tales como los métodos modales, el método de los elementos de contorno, o el método de los elementos finitos; este último especialmente apropiado para regiones inhomogéneas.

¹ Por lo general hablaremos preferentemente de admitancia generalizada frente a impedancia generalizada por la conveniencia de su manejo en la segmentación de problemas. No obstante ambas están ligadas dado que una es la inversa de la otra.

3.1 EL CONCEPTO DE IMPEDANCIA DE ONDA

Tal y como introdujo S.A. Schelkunoff en los años 30 y como recoge Harrington en [24], en la teoría electromagnética, los cocientes entre componentes de \mathbf{E} y componentes de \mathbf{H} se denominan impedancias de onda. Similarmente podemos hablar de admitancias de onda cuando planteamos el cociente entre componentes de \mathbf{H} y componentes de \mathbf{E} . La impedancia de onda tiene como unidades los ohmios al ser $E(\text{V/m})$ y $H(\text{A/m})$. En principio estas definiciones son puntuales; es decir, asocian al campo en cada punto un valor de inmitancia (impedancia o admitancia). Si el medio es lineal, este valor es único e independiente de la intensidad del propio campo.

La descomposición modal de las soluciones de la ecuación de onda, descrita en el capítulo anterior, permite extender el concepto de inmitancia a superficies en lugar de puntos. Estas superficies se hacen coincidir con los frentes de fase de los modos. Entonces, dada una superficie imaginaria, el cociente entre las componentes del campo eléctrico y las de campo magnético tangenciales a esta superficie, proporciona la impedancia de onda superficial de cada modo, asociada a su propagación en la dirección normal a la superficie. El sentido de propagación del modo dicta el sentido de su impedancia de onda según la regla de la mano derecha aplicada de \mathbf{E} a \mathbf{H} . Así pues, cuando el concepto de impedancia se liga al de modo aparece la idea de impedancia característica como la oposición que ofrece un medio a la propagación de ese modo por él. Dicha impedancia caracteriza todo un frente de fase y por lo tanto una superficie. Veámoslo sobre unos ejemplos.

a) *Guía rectangular.*

Supongamos que por una guía rectangular como la mostrada en la figura 3.1 se propagan M modos TM_{m0}^z . La función de onda es [25]

$$A_z = \sum_{m=1}^M (a_m e^{-jk_x x} + b_m e^{jk_x x}) \text{sen} \left[\frac{m\pi}{2a} (y + a) \right] \quad (3.1)$$

donde $k_x = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2}$

el campo magnético transversal a la dirección de propagación es

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(-jk_x)e^{-jk_x x} + b_m(jk_x)e^{jk_x x}] \text{sen} \left[\frac{m\pi}{2a}(y+a) \right] \quad (3.2)$$

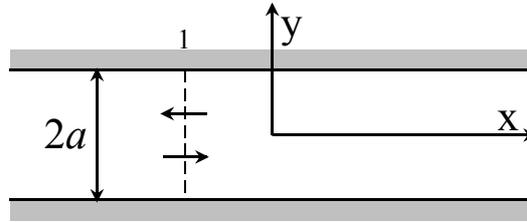


figura (3.1) Sección de guía rectangular.

Si entendemos por ondas incidentes (i) las que se propagan de izquierda a derecha, la admitancia característica relaciona el campo eléctrico y magnético de cada modo según

$$y_{0m}^i = -\frac{H_y^i(m)}{E_z^i(m)} \quad (3.3)$$

donde

$$H_y^i(m) = j \frac{1}{\mu} a_m k_x e^{-jk_x x} \text{sen} \left[\frac{m\pi}{2a}(y+a) \right] \quad (3.4)$$

y

$$E_z^i(m) = \frac{k^2}{j\omega \mu \epsilon} A_z^i(m) = \frac{k^2}{j\omega \epsilon} a_m e^{-jk_x x} \text{sen} \left[\frac{m\pi}{2a}(y+a) \right] \quad (3.5)$$

El cociente entre (3.4) y (3.5) nos proporciona la admitancia característica de cada modo

$$y_{0m}^i = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{k_x}{k} \quad (3.6)$$

Actuando de forma análoga sobre la onda que se propaga de derecha a izquierda (r), obtenemos

$$y_{0m}^r = -\frac{1}{\eta} \frac{k_x}{k} \quad (3.7)$$

Estas admitancias son válidas en cualquier sección transversal de la guía, puesto que no dependen de la variable longitudinal x .

En problemas cuyas soluciones sean del tipo TE_{m0}^z las admitancias características serían

$$y_{0m}^i = \frac{1}{\eta} \frac{k}{k_x} \quad (3.8)$$

$$y_{0m}^r = -\frac{1}{\eta} \frac{k}{k_x} \quad (3.9)$$

b) Guía radial

Otro ejemplo de medio guiado lo constituye el mostrado en la figura 3.2

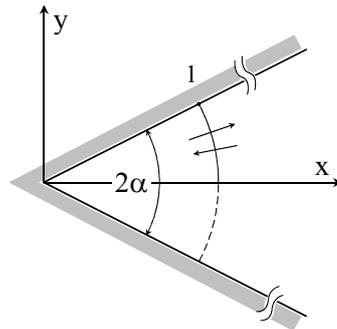


figura (3.2) Guía radial.

En esta situación la función de onda para el caso TM_z es [25]

$$A_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{\nu} J_{\nu}(k\rho) + b_{\nu} H_{\nu}^{(2)}(k\rho) \right] \text{sen}[\nu(\phi + \alpha)] \quad (3.10)$$

donde $\nu = \frac{m\pi}{2\alpha}$

Ahora el campo magnético transversal es

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -k \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_\nu J_\nu'(k\rho) + b_\nu H_\nu^{(2)}(k\rho) \right] \text{sen}[\nu(\phi + \alpha)] \quad (3.11)$$

Entendiendo por ondas incidentes aquellas que se propagan hacia el origen, es decir, las asociadas a las funciones de Bessel de primera especie, ahora el campo magnético asociado a estas ondas es

$$H_\phi^i(m) = -kJ_\nu'(k\rho) \text{sen}[\nu(\phi + \alpha)] \quad (3.12)$$

y el campo eléctrico

$$E_z^i(m) = \frac{k^2}{j\omega \mu \epsilon} A_z^i(m) = \frac{k^2}{j\omega \mu \epsilon} J_\nu(k\rho) \text{sen}[\nu(\phi + \alpha)] \quad (3.13)$$

El cociente entre (3.12) y (3.13) permite obtener la impedancia característica asociada a cada modo incidente como

$$y_{0m}^i = -\frac{1}{j\eta} \frac{J_\nu'(k\rho)}{J_\nu(k\rho)} \quad (3.14)$$

y para las ondas que se propagan emergiendo del origen

$$y_{0m}^r = \frac{1}{j\eta} \frac{H_\nu^{(2)'}(k\rho)}{H_\nu^{(2)}(k\rho)} \quad (3.15)$$

Como se puede observar, a diferencia de la guía rectangular, la admitancia característica depende de la variable ρ .

Para el caso TE_z , las admitancias características son

$$y_{0m}^i = \frac{1}{j\eta} \frac{J_\nu(k\rho)}{J_\nu'(k\rho)} \quad (3.16)$$

$$y_{0m}^r = -\frac{1}{j\eta} \frac{H_\nu^{(2)}(k\rho)}{H_\nu^{(2)'}(k\rho)} \quad (3.17)$$

Las admitancias características consideradas en los ejemplos nos hablan de la oposición que ejerce el medio a la propagación de los modos por él. Estas definiciones, si bien tienen aplicación en medios guiados, por lo general son de escasa utilidad en la caracterización de recintos con geometrías arbitrarias. No es posible servirse de las admitancias características anteriormente definidas para determinar la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{H} en un contorno arbitrario. Para ello es necesario introducir el concepto de admitancia generalizada.

3.2 LA MATRIZ DE ADMITANCIAS GENERALIZADAS (MAG)

Si la admitancia de onda caracteriza al medio en cada punto mediante una relación unívoca entre \mathbf{E} y \mathbf{H} , la admitancia generalizada caracteriza a todo un volumen V libre de fuentes mediante la relación que se establece entre \mathbf{E} y \mathbf{H} en la superficie S que lo envuelve. La admitancia generalizada también es única aunque para comprobarlo debemos servirnos del teorema de unicidad [24]. Este teorema establece que el campo en el interior de una región cerrada y con pérdidas queda completamente definido por el conocimiento de las fuentes en su interior, junto con las componentes de campo eléctrico o magnético tangenciales a la superficie ficticia que envuelve dicha región. En la figura 3.3 se muestra esquemáticamente esta situación. En esta misma figura, observamos que la región 2 está libre de fuentes. En ella, el teorema de unicidad nos garantiza que para conocer \mathbf{E} y \mathbf{H} de forma unívoca en cualquier punto no es necesario disponer de las fuentes reales situadas en la región 1. En realidad es suficiente con disponer de \mathbf{E}_t sobre la superficie S para conocer el valor de \mathbf{E} y \mathbf{H} (incluido \mathbf{H}_t). Análogamente bastaría con conocer \mathbf{H}_t sobre S para obtener el valor de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} (incluido \mathbf{E}_t), en la región 2.

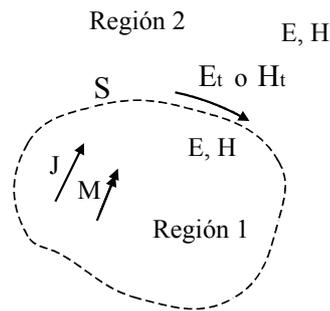


figura (3.3) La superficie S encierra las fuentes \mathbf{J} y \mathbf{M} .

Observamos entonces que ciertamente debe existir una relación entre \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t . Además esta relación debe ser única para garantizar el cumplimiento del teorema de unicidad. Por otra parte, si esta relación es única, su conocimiento basta para tener completamente caracterizada una región (la región 2 en este caso).

Ahora bien, como apuntamos en el capítulo 2, las ecuaciones de Maxwell establecen relaciones entre fuentes y campos. Por ello, si queremos obtener un operador que relacione componentes de campo \mathbf{E}_t con componentes de campo \mathbf{H}_t , el principio de equivalencia va a ser de gran utilidad.

El teorema de equivalencia [24] es un principio por el cual las fuentes reales se sustituyen por otras equivalentes. Así, retomando el ejemplo de la figura 3.3, los campos en el interior de una superficie cerrada como la región 2 se obtienen igualmente eliminando las fuentes reales \mathbf{J} y \mathbf{M} de la región 1, y situando unas fuentes equivalentes \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s sobre S, tales que se cumplan las condiciones de contorno del problema original. Si elegimos $\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}_t$ y $\mathbf{M}_s = \mathbf{E}_t \times \hat{n}$, siendo \hat{n} un vector unitario entrante en el volumen bajo estudio (figura 3.4), entonces el campo en la región 1 es cero, pero en la región 2 la solución es idéntica a la de partida.

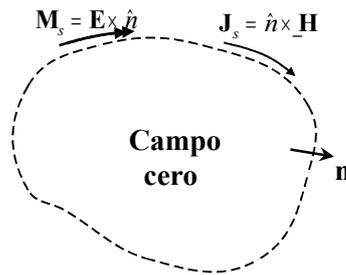


figura (3.4) Las corrientes equivalentes producen el mismo campo exterior a S que las fuentes originales

Ahora es posible plantear un operador $\mathbf{E}_t(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s)$, tal que a partir de las corrientes equivalentes proporcione el campo eléctrico sobre S. Del mismo modo podríamos considerar otro operador, $\mathbf{H}_t(\mathbf{J}_s, \mathbf{M}_s)$, para obtener el campo magnético en S partiendo de las mismas corrientes. En este punto conviene enfatizar que ambos operadores, si bien son distintos, conducen a la misma caracterización de la región 2. Además debemos recordar en primer lugar que \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s no son independientes entre sí; y en segundo lugar que, numéricamente, \mathbf{H}_t y \mathbf{J}_s por un lado, y \mathbf{E}_t y \mathbf{M}_s por otro, describen el mismo valor de campo. En definitiva ambos operadores relacionan esencialmente \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t .

Justificada la existencia de un operador, podemos ahora adelantar que para obtener una relación numérica entre \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t será necesario discretizar dicho operador. Para ello, ambas componentes deben expresarse como una combinación lineal de funciones base

$$\mathbf{E}_t = \sum_{n=1}^N E_n \mathbf{e}_n \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{n=1}^N H_n \mathbf{h}_n \quad (3.19)$$

Ahora, la relación entre ambas componentes de campo se establece mediante una matriz. Cuando esta matriz proporciona los pesos de la expansión de \mathbf{H}_t a partir de los pesos de la expansión de \mathbf{E}_t , hablamos de una *matriz de admitancias generalizadas*, $\bar{\bar{Y}}^1$.

$$\bar{H} = \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{E} \quad (3.20)$$

¹ En adelante la doble raya servirá para designar matrices en general $M \times N$, y la raya sencilla a las matrices columna, $N \times 1$.

donde

$$\bar{H} = [H_n]_{N \times 1}$$

$$\bar{E} = [E_n]_{N \times 1}$$

$$\bar{Y} = [y_{mn}]_{N \times N}$$

La formulación matricial permite ver la región delimitada por la superficie S como una red de N accesos. Los coeficientes de la matriz de admitancias son las admitancias mutuas de esta red que aproxima la región modelada. Entonces, si las funciones base escogidas son de dominio discreto, las admitancias representan interacciones espaciales entre las N puertas del modelo. Si por el contrario las funciones base son de dominio completo las admitancias indican interacciones modales.

La discusión del problema que nos ocupa no quedaría completa si no matizáramos que los operadores anteriormente propuestos no son los únicos. En realidad no es necesario disponer de las corrientes \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s simultáneamente para generar un operador. Volviendo a la figura 3.4, el teorema de equivalencia nos hace observar que, dado que se ha forzado campo cero en la región interior, el medio en ella puede cambiarse sin que afecte al problema externo. En particular, si rellenamos la región interior con un conductor perfecto como muestra la figura 3.5, la corriente \mathbf{J}_s resulta cortocircuitada, conservándose \mathbf{M}_s . Del mismo modo, si la región interior se rellena con un hipotético conductor magnético, la corriente \mathbf{M}_s se anula, actuando sólo \mathbf{J}_s .

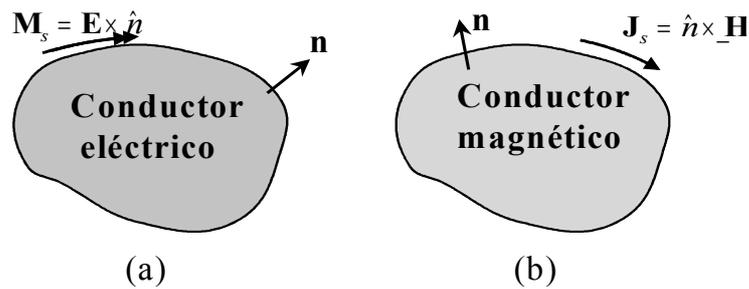


figura (3.5) El campo fuera de las regiones sombreadas es el mismo en (a) y en (b).

En el primer caso debemos encontrar un nuevo operador, $\mathbf{H}_t(\mathbf{M}_s)$, que proporcione el campo magnético sobre S a partir de \mathbf{M}_s únicamente, y en presencia del conductor eléctrico. La matriz de admitancias generalizadas que se obtenga como resultado de la discretización de este operador es la misma¹ que con los operadores anteriores. Similarmente, en el segundo caso debemos obtener un operador $\mathbf{E}_t(\mathbf{J}_s)$ que proporcione el campo eléctrico sobre S a partir de \mathbf{J}_s exclusivamente, y estando presente el conductor magnético. La discretización del operador proporciona ahora una matriz de impedancias generalizadas, $\overline{\overline{Z}}$, cuya inversa coincide con las definidas con anterioridad.

Disponemos en definitiva de varias alternativas a la hora de formular la relación entre \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t en el contorno de un recinto arbitrario. Nuestro interés se centra ahora en formular las distintas vías que nos conducirán hasta la matriz de admitancias generalizadas.

3.3 ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO BASADAS EN LA FUNCIÓN DE GREEN

Veamos como podemos formular matemáticamente la relación entre \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t como un problema de contorno.

¹ En este punto conviene recordar que las únicas formulaciones que proporcionan una solución única a todas las frecuencias son aquellas que involucran las corrientes equivalentes eléctrica y magnética simultáneamente; de lo contrario las soluciones presentan singularidades a aquellas frecuencias que se corresponden con las de resonancia del resonador resultante de situar un conductor perfecto en el contorno de la región [27].

Sea un problema general como el mostrado en la figura 3.6. Se distinguen en él dos regiones. La región 1 de permitividad y permeabilidad complejas (ϵ_1, μ_1) está delimitada por la superficie de infinito y la superficie S. En esta región hay unas corrientes impresas \mathbf{J}_1 y \mathbf{M}_1 . La región 2, cuyos parámetros eléctricos son (ϵ_2, μ_2) , está encerrada en S y contiene las fuentes impresas \mathbf{J}_2 y \mathbf{M}_2 .

Las ecuaciones de Maxwell en las regiones 1 y 2 son:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{M}_1 - j\omega \mu_1 \mathbf{H}_1 \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_1 + j\omega \epsilon_1 \mathbf{E}_1 \end{cases} \quad \text{en } V_1 \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{M}_2 - j\omega \mu_2 \mathbf{H}_2 \\ \nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2 + j\omega \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \end{cases} \quad \text{en } V_2 \quad (3.22)$$

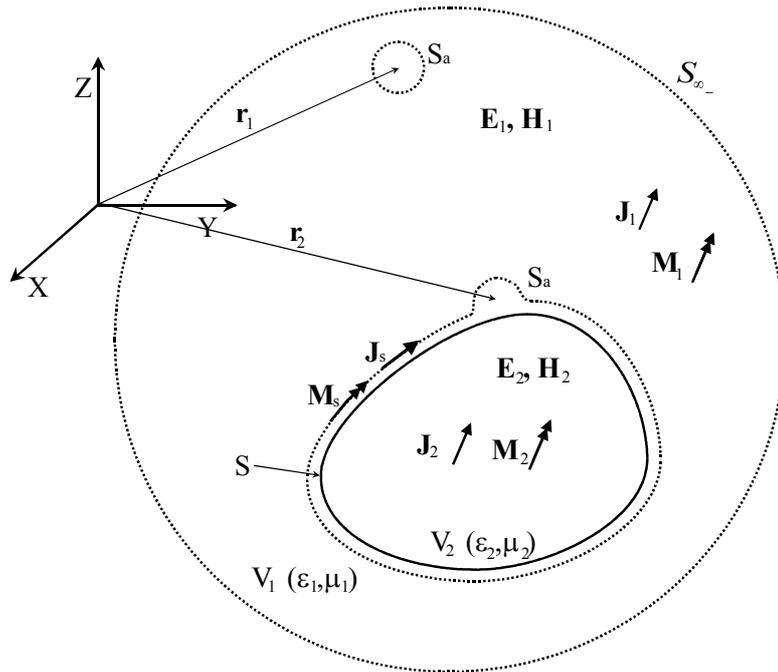


figura (3.6) Geometría del problema: La región 2, de volumen V_2 , está delimitada por la superficie S y tiene como parámetros eléctricos (ϵ_2, μ_2) y contiene a las fuentes $(\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2)$. Está rodeada por la región 1 con un volumen infinito V_1 , parámetros eléctricos (ϵ_1, μ_1) y fuentes $(\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1)$. $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ es el campo electromagnético en V_1 y $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ en V_2 .

Consideremos la región 1 y apliquemos el segundo teorema de Green en su forma vectorial [24]:

$$\int_{V_1} (\mathbf{Q} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) dv' = \int_S (\mathbf{Q} \times \nabla' \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \nabla' \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{s} \quad (3.23)$$

donde \mathbf{Q} y \mathbf{P} son dos funciones vectoriales continuas en V_1 hasta su segunda derivada. S es la superficie total que encierra V_1 .

Escogemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}') \quad (3.24)$$

y \mathbf{Q} es una función de Green que cumpla las condiciones de contorno en la región 1,

$$\mathbf{Q} = \hat{a} \phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.25)$$

En estas ecuaciones \mathbf{r}' apunta a una fuente arbitraria y \mathbf{r} indica el punto de observación. $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}')$ es el campo eléctrico en \mathbf{r}' y \hat{a} es un vector unitario constante.

Sustituimos (3.24) y (3.25) en (3.23) y la fuente de ϕ_1 , situada en \mathbf{r}' , se rodea con una esfera infinitesimal S_a . Manipulamos sus términos [1] y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \left[-j\omega \mu_1 \mathbf{J}_1 \phi_1 - \mathbf{M}_1 \times \nabla' \phi_1 + \frac{\rho_1}{\epsilon_1} \nabla' \phi_1 \right] dv' = \\ = \int_{S+S_\infty+S_a} [j\omega \mu_1 (\hat{n} \times \mathbf{H}) \phi_1 + (\mathbf{E}_1 \times \hat{n}) \times \nabla' \phi_1 - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_1) \nabla' \phi_1] ds' \end{aligned} \quad (3.26)$$

Se puede demostrar que

$$\int_{S_a} [] ds' = 4\pi \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \quad (3.27a)$$

$$\int_{S_\infty} [] ds' = 0 \quad (3.27b)$$

con lo que (3.26) se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \left[-j\omega \mu_1 \mathbf{J}_1 \phi_1 - \mathbf{M}_1 \times \nabla' \phi_1 + \frac{\rho_1}{\epsilon_1} \nabla' \phi_1 \right] dv' + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S [j\omega \mu_1 \phi_1 \mathbf{J}_S + \mathbf{M}_S \times \nabla' \phi_1 - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_1) \nabla' \phi_1] ds' \end{aligned} \quad (3.28)$$

siendo $\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}_1$ y $\mathbf{M}_S = \mathbf{E}_1 \times \hat{n}$.

El significado físico de (3.28) es el siguiente: el campo eléctrico en el interior de V_1 , $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_1)$ se debe a las fuentes impresas (\mathbf{J}_1 , \mathbf{M}_1) en V_1 y a las corrientes superficiales equivalentes (\mathbf{J}_S , \mathbf{M}_S) sobre S . Por su parte las características del medio 2 se sustituyen por las del medio 1 y las fuentes (\mathbf{J}_2 , \mathbf{M}_2) se suprimen.

El razonamiento sobre el medio 2 sería totalmente análogo, y las expresiones finales iguales, intercambiando el subíndice 1 por el 2. Por ello nos centraremos en esta región para obtener las expresiones que la caracterizan.

Particularicemos el estudio de la expresión (3.28) a una región bidimensional, homogénea y libre de fuentes caracterizada por (ϵ, μ) . Para ello resulta conveniente descomponer el problema en dos modos ortogonales; en particular escogemos TM_z y TE_z . Como función de Green tomamos la bidimensional de espacio libre, que en cilíndricas se expresa como

$$\phi(\rho, \rho') = -\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) \quad (3.29)$$

Así, para el caso TM_z se obtiene que el campo eléctrico $E_z(\rho)$ es

$$\hat{z}E_z(\rho) = \oint_C [j\omega \mu \phi \mathbf{J}_S + \mathbf{M}_S \times \nabla' \phi] ds' \quad (3.30)$$

y para TE_z , el campo magnético $H_z(\rho)$

$$\hat{z}H_z(\rho) = \oint_C [j\omega \epsilon \phi \mathbf{M}_S + \mathbf{J}_S \times \nabla' \phi] ds' \quad (3.31)$$

siendo C el contorno que envuelve a la región bidimensional bajo estudio.

Si ahora situamos el punto de observación, ρ , sobre el propio contorno, obtenemos una expresión donde sólo intervienen componentes de campo eléctrico y magnético tangenciales al mismo, ya que $\mathbf{M}_S = \hat{z}E_z(C)$ en (3.30) y $\mathbf{J}_S = \hat{z}H_z(C)$ en (3.31).

Podemos concluir que la función de green nos ha permitido formular una ecuación integral relacionando las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético en el contorno. Las expresiones (3.30) y (3.31) serán de aplicación en problemas bidimensionales.

3.3.1 Otras Integrales de Contorno

Este tipo de relaciones integrales pueden formularse también mediante los otros dos modelos del principio de equivalencia; es decir, sin emplear ambos tipos de corrientes ficticias simultáneamente.

En (3.30) y (3.31) se obtuvieron las relaciones entre \mathbf{J}_S y \mathbf{M}_S para problemas TM_z y TE_z respectivamente. Centrándonos en el caso bidimensional, si imponemos ahora un conductor eléctrico perfecto en el contorno, la corriente \mathbf{J}_S se cortocircuita, resultando

$$\hat{z}E_z(\rho) = \oint_C \mathbf{M}_S \times \nabla' \phi_2 ds \quad (3.32)$$

para TM_z , y

$$\hat{z}H_z(\rho) = j\omega \varepsilon \oint_C \phi_2 \mathbf{M}_S ds \quad (3.33)$$

para TE_z . En (3.33) se observa una relación sencilla entre H_z y \mathbf{M}_S que se puede expresar en forma de matriz de admitancia. Sin embargo en (3.32) es necesario aplicar el rotacional a la igualdad y seleccionar la componente tangencial del campo magnético:

$$\hat{t}H_t = -\frac{1}{j\omega \mu} \hat{n} \times \left[\nabla \times \left(\oint_C \mathbf{M}_S \times \nabla' \phi_2 ds \right) \right] \quad (3.34)$$

donde \hat{t} es un vector unitario tangencial al contorno C .

El modelo restante del principio de equivalencia impone un conductor magnético perfecto en el contorno. Por tanto ahora, aplicando dualidad sobre (3.33),

$$\hat{z}E_z = j\omega\mu \oint_C \phi_3 \mathbf{J}_s ds \quad (3.35)$$

para TM_z , y análogamente sobre (3.34)

$$\hat{i}H_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \hat{n} \times \left[\nabla \times \left(\oint_C \mathbf{J}_s \times \nabla' \phi_3 ds \right) \right] \quad (3.36)$$

para TE_z . Como ya se apuntó en 3.2, los tres modelos del principio de equivalencia nos conducen a la misma solución. Sin embargo, el operador integral en cada caso es distinto como se ha querido reflejar con los subíndices de las funciones de Green, ϕ . La función de Green válida para (3.30) y (3.31) es diferente de las que se ajustan a (3.32) y (3.34) o a (3.35) y (3.36): en estos dos últimos casos, las fuentes equivalentes radian en presencia de los conductores eléctrico o magnético del contorno.

3.3.2 Utilización de Funciones de Green Especializadas

La combinación del principio de equivalencia y las funciones de Green especializadas puede ampliar notablemente el conjunto de soluciones conocidas. La formulación obtenida en (3.28) es general y la función de Green empleada puede ser cualquiera con tal que cumpla las condiciones de contorno del recinto considerado. La obtención de la función de Green de un problema concreto no obstante, no siempre es una tarea sencilla y sólo se conocen estas funciones para ciertos casos muy particulares.

Consideremos por ejemplo el problema de la figura 3.7a. Se trata de una cuña de extremo irregular. Además cuenta con una apertura en una de sus caras y una zona rugosa en la otra. La función de Green de este problema no es conocida, pero la aplicación del principio de equivalencia permite sustituir la configuración original por la mostrada en la figura 3.7b. Desde el punto de vista de la región V , limitada por S_1 , S_2 , las paredes metálicas de la cuña y la superficie de infinito, ambos problemas son idénticos. Además, las características de los medios V_1 y V_2 pueden ser sustituidas por las propias de V (ϵ, μ). Ahora, la función de Green del problema de la figura 3.7b sí es conocida [25, pag. 635].

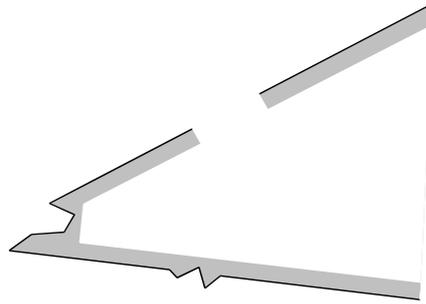


figura (3.7a) La cuña de extremo irregular tiene una apertura en una de sus caras y una zona rugosa en la otra.

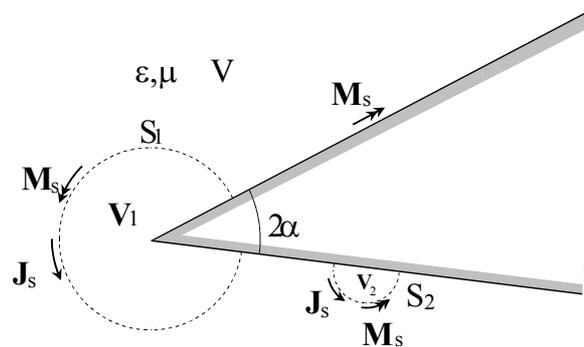


figura (3.7b) Las zonas irregulares de la cuña pueden rodearse con circunferencias ficticias sobre las que circulan corrientes equivalentes. Ahora se puede emplear la conocida función de Green para la cuña metálica.

Por tanto, particularizando la expresión obtenida en (3.28) para el caso bidimensional, y utilizando la función de Green propia del problema de la figura 3.7b, tendremos como incógnitas únicamente las corrientes eléctricas y magnéticas ficticias que se han impuesto rodeando los elementos irregulares. La discretización de la ecuación integral permite caracterizar la región V como una red de tres accesos como se justificará en 3.5. El número de incógnitas a resolver es manifiestamente menor al que requiere la aplicación de la función de Green de espacio libre. Sin embargo el ahorro de incógnitas citado se logra a costa de complicar, notablemente en muchos casos, el núcleo de la ecuación integral.

3.4 ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE ONDA

Dado que, en muchos casos, se trata de caracterizar regiones homogéneas libres de fuentes, cabe plantearse si fuera posible establecer una relación entre \mathbf{J}_s y

\mathbf{M}_S a partir de la función de onda, que es la solución de la ecuación de onda homogénea, en lugar de emplear la función de Green, solución de la ecuación de onda inhomogénea.

La formulación desarrollada en 3.3 nos permitió establecer la relación entre \mathbf{J}_S y \mathbf{M}_S y para ello nos apoyamos fundamentalmente en la función de Green, ya fuera la de espacio libre u otra especializada a una geometría concreta. El empleo de la función de Green presenta en ocasiones problemas de singularidades. Asimismo el empleo de funciones de Green específicas hacen que el núcleo de la ecuación integral se complique en exceso, dificultando su tratamiento. Por supuesto, todos estos inconvenientes se ven reforzados cuando en la solución numérica de la ecuación empleamos funciones de expansión de dominio completo para las incógnitas. La idea de emplear la función de onda en una ecuación integral fue originalmente propuesta por Kishi y Okoshi [28,29], y a pesar de las favorables implicaciones que de ella se derivan, no ha recibido gran atención en la bibliografía. La función de onda puede ser más sencilla que la función de Green. Además este planteamiento carece de la presencia de singularidades en las ecuaciones integrales.

Originalmente la formulación del método, tal y como se recoge en [28], utiliza una familia muy particular de soluciones de la ecuación de onda homogénea, lo que hace que las expresiones que se obtienen sean aplicables a una clase restringida de problemas. Al mismo tiempo la relación entre \mathbf{J}_S y \mathbf{M}_S en el contorno no aparece recogida de forma explícita. Sin embargo, como comprobaremos a continuación, cualquier solución de la ecuación de onda es susceptible de ser utilizada en esta integral de contorno. Además, llegaremos a formular una relación entre \mathbf{J}_S y \mathbf{M}_S con la que posteriormente podremos hablar de una admitancia generalizada asociada a la región bajo estudio.

Consideremos una región homogénea y libre de fuentes de la que se conoce su función de onda ψ . Inicialmente supondremos que el problema es TM_z por lo que disponemos de una función potencial $\mathbf{A} = \hat{z}\psi$. Tomemos un recinto R rodeado por un contorno ficticio C (ver figura 3.8). En todo punto del espacio considerado se cumple que

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3.37)$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.38)$$

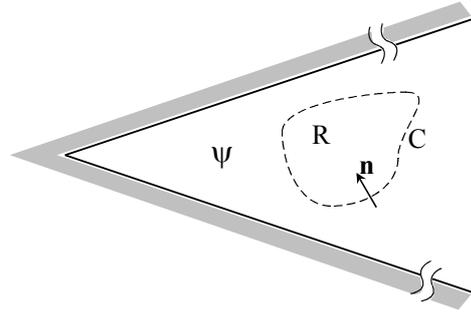


figura (3.8) En una región cualquiera del espacio caracterizada por una determinada función de onda ψ , se define un recinto arbitrario R.

Si aplicamos la segunda identidad de Green sobre \mathbf{A} y \mathbf{E} en la región R

$$\oint_C \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{A}) dC = \iiint_S [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})] dS \quad (3.39)$$

Dado que en R se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, entonces

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \quad (3.40)$$

Al mismo tiempo, al tratarse de un problema TM_z , $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, y

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A} \quad (3.41)$$

introduciendo (3.40) y (3.41) en (3.39) la integral de superficie se anula. Por otra parte, reordenando la integral de contorno e introduciendo la definición de las corrientes equivalentes, obtenemos

$$\oint_C (j\omega \mu \psi \mathbf{J}_S + \mathbf{M}_S \times \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{z}} dC = 0 \quad (3.42)$$

y aplicando dualidad se obtiene una expresión análoga para el caso TE_z ($\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \psi$)

$$\oint_C (j\omega \varepsilon \psi \mathbf{M}_S + \mathbf{J}_S \times \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{z}} dc = 0 \quad (3.43)$$

Este nuevo procedimiento de caracterización de regiones homogéneas mediante la matriz de admitancias generalizada no sustituye al desarrollado en 3.3. En realidad la integral de contorno basada en la función de Green puede

proporcionar la admitancia de cualquier configuración. Por el contrario, esta ecuación integral basada en la función de onda requiere que dicha función sea conocida en todo el contorno de la región analizada. Esta condición impide además la aplicación de aquellos otros modelos del principio de equivalencia que imponen un conductor eléctrico o magnético sobre el contorno. Es inmediato comprobar que si se cortocircuita la corriente \mathbf{J}_s o \mathbf{M}_s en (3.42) o (3.43), no es posible establecer una relación en forma de admitancia. El método propuesto, sin embargo complementa a las técnicas apuntadas y es un enfoque más directo y sencillo que éstas, en muchos casos. En el capítulo 5 se plantean varios ejemplos de aplicación tanto en problemas abiertos como cerrados que nos darán la medida de la utilidad del método.

3.5 OBTENCIÓN DE LA MAG MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

La matriz de admitancias generalizadas se puede obtener discretizando los operadores obtenidos en (3.30) (3.31) mediante el método de los elementos de contorno [30-33]. Se trata de una técnica que combina los métodos basados en integrales de contorno con las técnicas de discretización propias de los elementos finitos. En el caso bidimensional la discretización del operador se suele realizar expandiendo la incógnita mediante funciones pulso. A continuación la técnica de colocación o point-matching proporciona las ecuaciones necesarias para despejar la incógnita. Sin embargo, esta técnica no se puede aplicar directamente sobre integrales como la (3.30) o la (3.31) ya que cada vez que $\rho=\rho'$ la función de Green presenta una singularidad. Kagami y Fukai presentan en [29] los pasos a seguir para resolver dicha singularidad, dando como resultado para la expresión (3.30),

$$M_s(i) = \oint_C \left[\left(-\frac{jk}{2} \right) \cos \theta_{ij} H_1^{(2)}(kr_{ij}) \cdot M_s(j) + \left(-\frac{\omega \mu}{2} \right) H_0^{(2)}(kr_{ij}) J_z(j) \right] ds_j \quad (3.44)$$

siendo $r_{ij}=|\rho_i - \rho_j|$ y $J_z = (\hat{n} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{z}$.

La figura 3.9 muestra el modo en que se discretiza el contorno sobre el que se aplica (3.44)

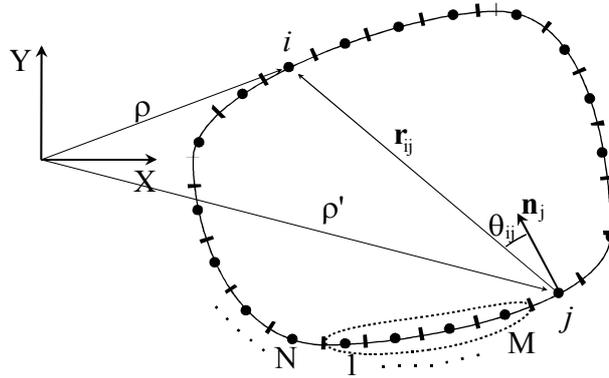


figura (3.9) El MEC bidimensional discretiza el contorno en N segmentos sobre los que se sitúan fuentes ficticias. Los segmentos 1..M representan la puerta de acceso al recinto.

Ahora, la discretización del contorno antes citada convierte la ecuación integral (3.44) en una ecuación matricial de la forma:

$$\overline{\overline{H}} \overline{\overline{J}}_z = \overline{\overline{U}} \overline{\overline{M}}_s \quad (3.45)$$

donde los elementos de las matrices $\overline{\overline{H}}$ y $\overline{\overline{U}}$ vienen dados por

$$u_{ij} = \delta_{ij} + \frac{jk}{2} \int_{w_j} \cos \theta_{ij} H_1^{(2)} \left(k \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) ds \quad (3.46)$$

$$h_{ij} = -\frac{\omega \mu}{2} \int_{w_j} H_0^{(2)} \left(k \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right) ds \quad (3.47)$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker.

Reordenando la igualdad (3.45) obtenemos

$$\overline{\overline{J}}_z = \overline{\overline{Y}} \overline{\overline{M}}_s \quad (3.48)$$

donde la matriz de admitancias es

$$\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{H}}^{-1} \overline{\overline{U}} \quad (3.49)$$

Concluimos por tanto que posible establecer una relación numérica entre las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} en el contorno. Tal relación se efectúa a través de una matriz conocida como *matriz de admitancias generalizadas*. En esta matriz de dimensiones $N \times N$, el elemento y_{ij} relaciona el campo eléctrico (M_s) en el punto j con el campo magnético (J_z) en el punto i del contorno.

Desde el punto de vista de la caracterización de una región de una sola puerta, como la mostrada en la figura 3.9, sólo interesa la relación M - J entre los puntos $i, j = \{1, 2, \dots, M\}$ de la apertura. La matriz $M \times M$ que caracteriza la apertura $\overline{\overline{Y}}_{ap}$ se obtiene de la matriz completa $\overline{\overline{Y}}$, para lo cual es necesario imponer las condiciones de continuidad apropiadas en el resto de los puntos $N-M$ del contorno según el problema de que se trate. Por ejemplo, si se trata de paredes eléctricas perfectas, $E_z = 0$ en $i = M+1, \dots, N$ y la extracción de $\overline{\overline{Y}}_{ap}$ es inmediata.

Esta caracterización circuital basada en el método de los elementos de contorno (MEC) fue introducida por Ling para el tratamiento de cavidades bidimensionales en [34,35] y fue extendida por Wang y Ling al caso tridimensional en [36].

Pero el MEC, tal y como se ha expuesto (y como se aplica habitualmente), presenta ciertas limitaciones prácticas que reducen su campo de aplicación. Como hemos visto, la función de Hankel de segunda especie y orden cero es singular en $r_{ij} = 0$, lo que ha dificultado la solución directa de la ecuación. Además la discretización de la integral mediante pulsos limita su aplicación a problemas eléctricamente pequeños, sobre todo si tenemos en cuenta que el empleo de la función de Green de espacio libre nos obliga a discretizar todo el contorno.

3.6 OBTENCIÓN DE LA MAG A PARTIR DE SOLUCIONES MODALES

Para obtener la MAG mediante soluciones modales podemos partir de las ecuaciones integrales formuladas en 3.4 y que relacionan las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} en un contorno ficticio, conocida la función de onda. Como se apuntó en 2.3, la solución más general de la ecuación de onda homogénea se compone de una combinación lineal de modos ψ_i linealmente independientes. Dado que las relaciones (3.42) y (3.43) deben cumplirse para cada una de estas soluciones,

podemos disponer de un conjunto de N ecuaciones integrales. Si a continuación expandimos las fuentes incógnita como combinación lineal de funciones base

$$\mathbf{J}_s = \sum_{j=1}^N J_j \mathbf{j}_j \quad (3.50)$$

$$\mathbf{M}_s = \sum_{j=1}^N M_j \mathbf{m}_j \quad (3.51)$$

Podemos convertir el operador integral en otro matricial de la forma

$$\overline{\overline{\mathbf{H}}} \cdot \overline{\mathbf{J}} = \overline{\overline{\mathbf{U}}} \cdot \overline{\mathbf{M}} \quad (3.52)$$

donde, para el caso TM_z , los elementos de las matrices $\overline{\overline{\mathbf{H}}}$ y $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ son

$$h_{ij} = j\omega\mu \oint_C \psi_i \mathbf{j}_j \cdot \hat{\mathbf{z}} dC \quad (3.53)$$

$$u_{ij} = -\oint_C (\mathbf{m}_j \times \nabla \psi_i) \cdot \hat{\mathbf{z}} dC \quad (3.54)$$

y posteriormente

$$\overline{\mathbf{J}} = \overline{\overline{\mathbf{Y}}} \cdot \overline{\mathbf{M}} \quad (3.55)$$

siendo

$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}} = \overline{\overline{\mathbf{H}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{U}}} \quad (3.56)$$

la matriz de admitancias generalizadas buscada.

Pero el anterior no es el único procedimiento que, partiendo de la función de onda proporciona una MAG. Cuando el recinto considerado es canónico, es decir, su geometría se genera a partir de un sistema coordinado separable, podemos imponer una pared eléctrica en el contorno. Entonces, la función de onda es conocida en el interior, las condiciones de contorno son fáciles de imponer y es posible prescindir de las relaciones integrales anteriores. Para proceder al cálculo de la MAG se

requiere además imponer una corrientes magnéticas equivalentes sobre la pared eléctrica que garanticen la continuidad eléctrica con el problema externo. Posponemos la descripción detallada de este procedimiento al capítulo 4, en el contexto de la segmentación de problemas electromagnéticos.

3.7 LA MAG A PARTIR DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Otro procedimiento numérico que puede proporcionar una matriz de admitancias generalizadas es el método de los elementos finitos (MEF). El método de los elementos finitos ha sido ampliamente utilizado en electromagnetismo desde principios de la década de los 70 revelándose como una herramienta potente y versátil para la solución de numerosos problemas electromagnéticos.

El MEF presenta ciertas ventajas respecto a los métodos de contorno estudiados por cuanto permite manejar cualquier tipo de inhomogeneidad e incluir el efecto de pérdidas en los materiales sin una complicación adicional de su formulación característica. No es el propósito de este trabajo ahondar en las particularidades de esta técnica y tan sólo vamos a recoger brevemente las ideas fundamentales del método con el fin de reforzar la tesis en favor de la segmentación de problemas electromagnéticos y su interpretación circuital. En [37-39] se pueden encontrar estudios más rigurosos y detallados de este método.

El método de los elementos finitos permite convertir un problema diferencial en un problema algebraico. El primer paso es formular una ecuación integral equivalente a la ecuación diferencial de partida. Una vez convertido en problema integral, el recinto R en el que está definida la solución se descompone en N subrecintos o elementos, y en cada uno de ellos la función incógnita es interpolada mediante determinadas funciones base, procedimiento característico del método de los elementos finitos. La interpolación de la incógnita conduce finalmente al problema algebraico equivalente al problema diferencial original.

En general, el problema diferencial que se pretende resolver es de la forma

$$L(\mathbf{u}) = g \quad (3.57)$$

donde L es un operador diferencial que actúa sobre cierta familia de funciones \mathbf{u} , definidas en un dominio R . La función g representa la excitación. En la periferia, se especifican las condiciones de contorno que debe satisfacer la solución del problema y que en general son de la forma

$$L_c(\mathbf{u}) + \alpha \mathbf{u} = u_0 \quad (3.58)$$

Así por ejemplo, en la ecuación de onda

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.59)$$

el operador es

$$L = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \right) - k^2 \epsilon_r \quad (3.60)$$

y las condiciones de contorno son del tipo

$$\hat{n} \times \mathbf{E} \Big|_{C_1} = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E} + \alpha \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{E}) \Big|_{C_2} = 0 \quad (3.62)$$

con $C = C_1 \cup C_2$.

Para obtener la ecuación integral equivalente, se multiplica (3.57) por una función peso w arbitraria, y se integra en el dominio, dando lugar a

$$\int_R w [L(u) + g] dR = 0 \quad (3.63)$$

En general las funciones peso e incógnita se suelen tomar dentro del mismo espacio de funciones H

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i \quad (3.64)$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N W_i \phi_i \quad (3.65)$$

y lo mismo con la función excitación

$$g = \sum_{i=1}^N G_i \phi_i \quad (3.66)$$

La característica fundamental del método de los elementos finitos es la forma en que se construyen las funciones base ϕ_i .

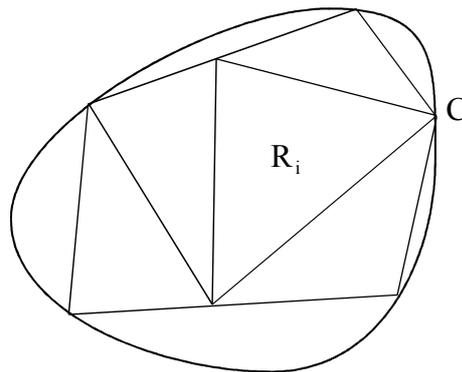


figura (3.10) El recinto R se subdivide en R_e subrecintos.

Para ello el dominio R se divide en N_E subdominios R_e llamados elementos y que cumplen

$$\begin{aligned} R &= \bigcup R_e & e = 1, 2, \dots, N_E \\ R_i \cap R_j &= \emptyset & \forall i \neq j \end{aligned} \quad (3.67)$$

lo que nos permite discretizar (3.63) y así, introduciendo (3.64), (3.65) y (3.66) en (3.63) y tras algunas manipulaciones, obtenemos una ecuación algebraica

$$[A][U] = [G] \quad (3.68)$$

de donde obtenemos las incógnitas U_i . En el caso de tratarse de la ecuación (3.59), la solución sería el campo eléctrico \mathbf{E} .

El MEF proporciona así el campo eléctrico o magnético en cada punto de la región R .

La caracterización circuital del recinto requiere sin embargo, la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{H} en el contorno. Un método eficiente de obtenerla se basa en el método del unimomento [21,40-42]. Este método surgió como un intento de extender a problemas de difracción en espacio libre el método de los elementos finitos, tradicionalmente restringido a problemas cerrados dada su naturaleza: un recinto de dimensiones infinitas requeriría infinitas incógnitas para su solución.

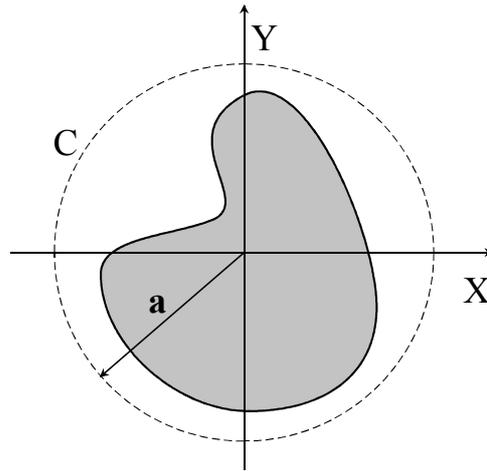


figura (3.11) El contorno arbitrario se encierra en una circunferencia de radio a .

Por el contrario, el método del unimomento encierra un objeto difractante arbitrario en un recinto ficticio. En un problema bidimensional como el de la figura 3.11, un cilindro de sección arbitraria es rodeado por una circunferencia de radio a . Si suponemos por sencillez una excitación de tipo TM_z , el campo magnético en el exterior del cilindro será

$$\mathbf{E}_e = E_z^i \hat{z} + E_z^d \hat{z} \quad (3.69)$$

los campos incidente y difractado pueden expresarse en términos de las funciones de Bessel y de Hankel,

$$E_z^i = \sum_n a_n J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3.70a)$$

$$E_z^d = \sum_n b_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3.70b)$$

podemos imponer entonces que el campo en $\rho = a$ es de la forma

$$E_z^a = \sum_n c_n e^{jn\phi} \quad (3.71)$$

Cada función excitación $e_n(\phi) = e^{jn\phi}$ impone el valor del campo en los elementos de arista del contorno. Una vez establecidas las condiciones de contorno, el problema se resuelve mediante elementos finitos, proporcionando como resultado el campo magnético $H_n(\phi)$ sobre el contorno. Esta función se puede expandir como

$$H_n(\phi) = \sum_m H_{nm} \cdot h_m(\phi) \quad (3.72)$$

Dado que el campo eléctrico en el contorno está normalizado, los coeficientes del desarrollo coinciden con los elementos de la matriz $\bar{\bar{Y}}$ buscada

$$Y_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_n(\phi) e^{-jm\phi} d\phi \quad (3.73)$$

De esta forma, la matriz $\bar{\bar{Y}}$ caracteriza una región de una puerta y es por tanto, una admitancia de carga. El concepto de matriz de admitancia generalizada enriquece al método del unimomento, inicialmente concebido para resolver problemas de difracción, y lo hace aplicable a situaciones más variadas donde se consideran regiones con más de una puerta. Buen ejemplo de ello lo representa el trabajo recogido en [38] donde estas ideas se desarrollan en profundidad.

3.8 CONCLUSIONES

A lo largo del capítulo hemos podido comprobar que es posible formular una relación entre las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético en el contorno de un recinto cerrado. Tal relación tiene las características de una admitancia asociada al propio recinto. Antes de proseguir debemos establecer las siguientes conclusiones:

- 1) La admitancia asociada a una región libre de fuentes es única y depende exclusivamente de su forma geométrica y de sus propiedades eléctricas.
- 2) La admitancia no resulta condicionada por las propiedades eléctricas del medio circundante o del propio contorno.
- 3) Para obtener la admitancia asociada a un recinto es posible partir tanto de una función de Green (ϕ), como de una función de onda (ψ), o un operador integral extendido a su volumen (MEF).

Estas conclusiones resultarán de gran utilidad en el proceso de segmentación de un problema arbitrario, como veremos en los capítulos 4 y 5.

4

La Teoría de Circuitos en la Solución de Problemas Electromagnéticos

Si nos enfrentamos a un problema electromagnético arbitrario formado por distintos medios, elementos conductores, etc., abordar su solución directamente puede resultar inviable desde un punto de vista computacional. Por el contrario la segmentación del problema en regiones, y la caracterización matricial de cada región por separado, traduce los conceptos electromagnéticos a otros matemáticos asociados a la teoría de circuitos [24,43]. En el capítulo anterior hemos tenido ocasión de repasar un buen número de métodos que han permitido caracterizar un problema confinado en una región del espacio mediante la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{H} en su contorno. La caracterización efectuada es totalmente independiente de la naturaleza del medio circundante y se ha materializado en forma de matriz de admitancias. Ahora, todos los conceptos matemáticos asociados al análisis matricial de circuitos son aplicables, y van a facilitar incluso, en muchos casos, la interpretación de los propios fenómenos electromagnéticos.

La teoría de circuitos, no obstante, ha sido ampliamente empleada en ingeniería de microondas en las cuatro últimas décadas en el tratamiento de problemas cerrados y en menor medida, en problemas abiertos. En este capítulo se van a analizar con detalle los pasos a seguir en la extensión de la teoría de circuitos a problemas electromagnéticos arbitrarios. Para ello se consideran los criterios que se siguen para su segmentación y posterior análisis individualizado de cada recinto. Se estudiarán las distintas posibilidades de interconexión y se introducirá la conocida matriz de dispersión dada su utilidad en configuraciones guiadas.

4.1 SEGMENTACIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS

Las conclusiones extraídas en el capítulo 3 apuntan a la posibilidad de segmentar un problema en un conjunto de recintos que puedan analizarse de forma independiente unos de otros. La solución global, considerando las interacciones entre las distintas regiones, se obtendría tras la caracterización de cada una y tras imponer las necesarias condiciones de continuidad en las superficies de contacto entre las regiones.

Históricamente fue Harrington [44] quien primero introdujo el concepto de segmentación en un problema electromagnético, y lo hizo para el análisis de aperturas en estructuras conductoras. En líneas generales Harrington cierra la apertura con un conductor eléctrico, dividiendo el problema en dos regiones (en su caso una de estas regiones es cerrada y la otra abierta). Posteriormente fuerza la continuidad de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} imponiendo la presencia de unas corrientes magnéticas equivalentes a ambos lados de la apertura e igualando los campos magnéticos tangenciales. Tal operación desemboca en una ecuación integral cuya incógnita es el campo eléctrico en la apertura. Esta técnica se conoce como *Formulación Circuitual Generalizada* y ha sido ampliamente secundada, sobretodo en el estudio de cavidades alimentadas a través de pequeñas aperturas o en el análisis del acoplamiento a través de ranuras [45,46]. Recientemente este procedimiento ha empezado a introducirse como una herramienta sistemática para el tratamiento multimodal de diversos problemas en guía, tales como transiciones o codos [47-50].

Por las conclusiones vertidas en el capítulo 3 sabemos que no es necesario encerrar una región con un conductor eléctrico para poder caracterizarla mediante su admitancia generalizada. De hecho cada problema sugiere la conveniencia de aplicar un modelo u otro del principio de equivalencia. Sin embargo la Formulación Circuitual Generalizada permite describir el procedimiento de segmentación de un modo más intuitivo puesto que las regiones aparecen claramente independizadas por el conductor que las separa. Por ello nos apoyaremos en esta técnica para describir cómo se convierte un problema electromagnético en otro circuitual o algebraico.

4.1.1 Formulación Circuital Generalizada

La figura 4.1 muestra un problema general de acoplamiento entre dos regiones a y b . En la región a hay unas fuentes impresas \mathbf{J}^i , \mathbf{M}^i y la región b se supone libre de fuentes sin pérdida de generalidad. El caso más general con fuentes en ambas regiones se puede tratar mediante la superposición de dos problemas, uno con fuentes únicamente en la región a , más otro con fuentes sólo en la región b . Cada región está limitada por un conductor eléctrico.

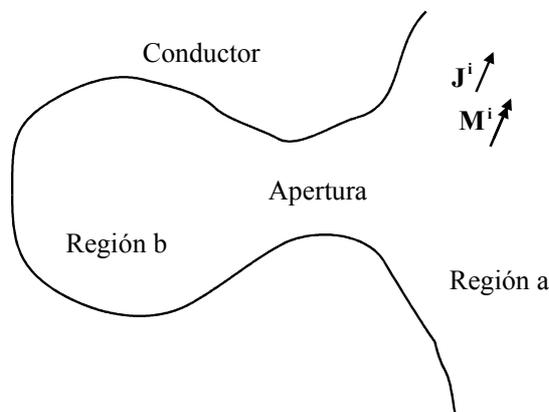


figura (4.1) Las regiones a y b están comunicadas a través de una zona común llamada apertura.

Mediante el principio de equivalencia ya citado el problema puede dividirse en dos problemas equivalentes como muestra la figura 4.2. El campo producido en la región a es resultado de las fuentes \mathbf{J}^i , \mathbf{M}^i más la corriente magnética equivalente $\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \hat{n}$ sobre la superficie de la apertura. Ésta ha sido cubierta con un conductor eléctrico, por lo que no es necesario el empleo de las corrientes eléctricas equivalentes (\mathbf{J}). En la región b el campo es el creado por una corriente magnética equivalente $-\mathbf{M}$ únicamente. Esta corriente se encuentra también sobre el conductor eléctrico que cubre la superficie de la apertura. Teniendo en cuenta que el vector \hat{n} , normal a la superficie de la apertura es el mismo para los dos subproblemas, las corrientes magnéticas equivalentes deben tener signos opuestos para garantizar la continuidad del campo eléctrico tangencial en la apertura.

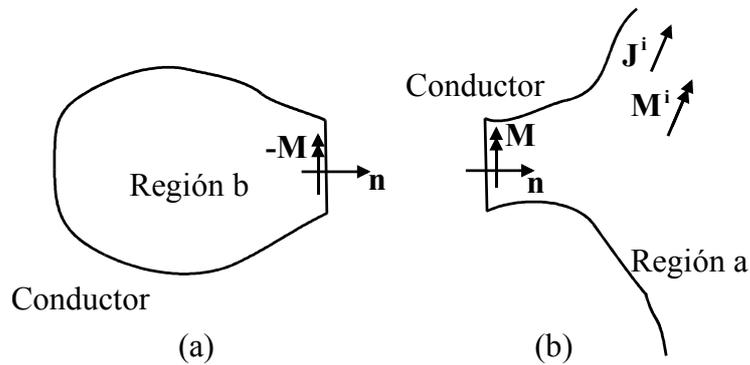


figura (4.2) Los problemas(a) y (b) pueden estudiarse de forma independiente

Para que el problema quede completamente planteado es necesario imponer también la continuidad en el campo magnético tangencial.

El campo magnético tangencial total sobre la apertura en la región a , \mathbf{H}_t^a , es la suma del debido a las corrientes impresas, \mathbf{H}_t^i , más el debido a las fuentes equivalentes \mathbf{M} , $\mathbf{H}_t^a(\mathbf{M})$, es decir

$$\mathbf{H}_t^a = \mathbf{H}_t^i + \mathbf{H}_t^a(\mathbf{M}) \quad (4.1)$$

Nótese que \mathbf{H}_t^i y $\mathbf{H}_t^a(\mathbf{M})$ se calculan ambas con el conductor cubriendo la apertura. De forma similar podemos establecer que el campo magnético tangencial en la región b , \mathbf{H}_t^b se debe ahora exclusivamente a las fuentes magnéticas equivalentes $-\mathbf{M}$. Por tanto

$$\mathbf{H}_t^b = \mathbf{H}_t^b(-\mathbf{M}) \quad (4.2)$$

Igualando ambas componentes

$$\mathbf{H}_t^a(\mathbf{M}) - \mathbf{H}_t^b(\mathbf{M}) = -\mathbf{H}_t^i \quad (4.3)$$

La expresión (4.3) representa la ecuación básica que permite calcular \mathbf{M} supuesto conocido el operador que liga los campos con las fuentes en cada región.

Cuando no es posible obtener la solución exacta de (4.3), podemos obtener una solución aproximada aplicando el método de los momentos [2].

Para ello expresamos la fuente incógnita \mathbf{M} como suma de un conjunto de funciones de expansión $\{\mathbf{m}_n\}$

$$\mathbf{M} = \sum_n V_n \mathbf{m}_n \quad (4.4)$$

donde los coeficientes V_n están por determinar. Si sustituimos (4.4) en (4.3) y aprovechamos la linealidad de los operadores \mathbf{H}_t , obtenemos

$$\sum_n V_n \mathbf{H}_t^a(\mathbf{m}_n) + \sum_n V_n \mathbf{H}_t^b(-\mathbf{m}_n) = -\mathbf{H}_t^i \quad (4.5)$$

Definamos ahora un producto simétrico

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \iint_{\text{apertura}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dS \quad (4.6)$$

y un conjunto de funciones peso $\{\mathbf{w}_n\}$, en general distinto de las funciones de expansión. Aplicando el producto simétrico entre (4.5) y cada una de las funciones peso \mathbf{w}_m , y aprovechando la linealidad del producto simétrico, se culmina en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_n V_n \langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_t^a(\mathbf{m}_n) \rangle - \sum_n V_n \langle \mathbf{w}_m, -\mathbf{H}_t^b(\mathbf{m}_n) \rangle = -\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_t^i \rangle \quad (4.7)$$

la ecuación (4.7) puede ponerse en notación matricial definiendo una matriz de admitancia para la región a

$$[y^a] = \left[\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_t^a(\mathbf{m}_n) \rangle \right]_{N \times N} \quad (4.8)$$

y otra para la región b

$$[y^b] = \left[-\langle \mathbf{w}_m, -\mathbf{H}_t^b(\mathbf{m}_n) \rangle \right]_{N \times N} \quad (4.9)$$

Además definimos un vector fuente como

$$\bar{I}^i = -[\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_t^i \rangle]_{N \times 1} \quad (4.10)$$

y un vector de coeficientes

$$\bar{V} = [V_n]_{N \times 1} \quad (4.11)$$

y así la ecuación (4.7) en forma matricial resulta

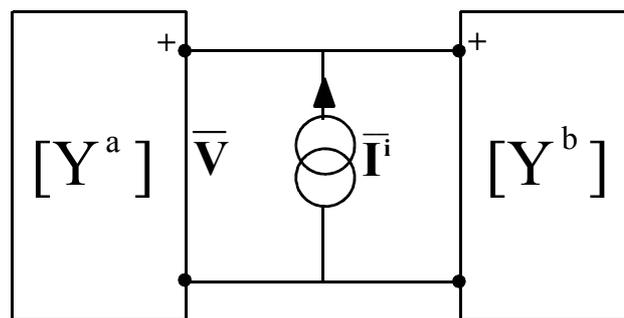
$$[y^a + y^b] \bar{V} = \bar{I}^i \quad (4.12)$$

y el vector solución es

$$\bar{V} = [y^a + y^b]^{-1} \bar{I}^i \quad (4.13)$$

con el que obtenemos \mathbf{M} de acuerdo con la expansión (4.4).

La ecuación (4.12) tiene una interpretación circuital evidente puesto que representa dos redes de una puerta caracterizadas por las matrices $\bar{Y}_a = [y^a]$ e $\bar{Y}_b = [y^b]$, dispuestas en paralelo con una fuente de corriente \bar{I}_a^i , como se muestra en la figura 4.3.



figura(4.3) El circuito equivalente asociado al problema consiste en dos matrices de admitancia conectadas en paralelo con la fuente .

En este punto podemos retomar algunas de las conclusiones, así como establecer ciertas consideraciones de método:

En el cálculo de $\overline{\overline{Y}}_a$ solamente es necesario considerar la región a , del mismo modo que para el cálculo de $\overline{\overline{Y}}_b$ sólo intervienen las características propias de la región b . Es decir, el problema ha quedado dividido en dos partes cuyas formulaciones son *independientes*. Además el cálculo de estas admitancias se realiza suprimiendo las fuentes impresas y manteniendo las fuentes equivalentes en la superficie.

Así, una vez que las regiones han sido caracterizadas por su matriz de admitancias generalizadas, las fuentes presentes en el problema se incorporan a éste en el punto y con la orientación espacial que imponga el problema. Constituyen el elemento excitador y su efecto es independiente de la caracterización de las regiones.

4.1.2 Caracterización de Regiones con N Accesos

El problema considerado anteriormente involucraba dos regiones con una superficie de contacto entre ellas. Empleando el mismo método, resulta inmediato extender la teoría a situaciones en las que se considere apropiado segmentar el problema en más de dos regiones, alguna de las cuales puede tener dos o más accesos. Sea por ejemplo la situación de la figura 4.4a. Supongamos que fuera conveniente separar el problema en tres regiones tal y como muestra la figura 4.4b. Las regiones se independizan imponiendo planos metálicos en las puertas y las correspondientes corrientes magnéticas por determinar. Las zonas a y c quedan definidas como ya se razonó en el apartado anterior. Fijémonos pues en la región b .

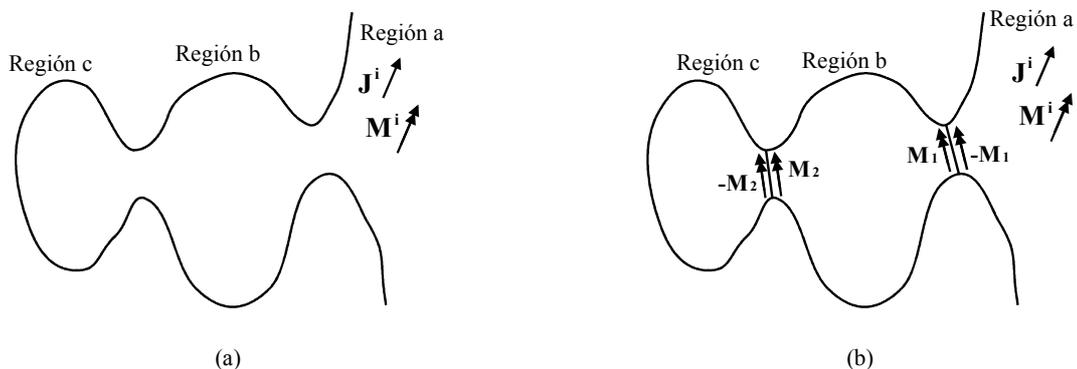


figura (4.4) Un problema puede segmentarse en más de dos regiones, alguna de las cuales puede tener dos o más accesos

El conocimiento del operador integral que relaciona fuentes con campos y la aplicación del principio de superposición, permiten definir una matriz de admitancias en la región b .

$$\begin{pmatrix} \overline{H}_1 \\ \overline{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

donde

$$\overline{Y}_{11} = \left[\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_1(\mathbf{M}_1) \rangle \right]_{\mathbf{M}_2=0} \quad (4.15a)$$

Representa el campo magnético tangencial en la puerta 1 debido a \mathbf{M}_1 cuando $\mathbf{M}_2=0$ y cuyo cálculo es análogo al realizado en el apartado anterior.

$$\overline{Y}_{12} = \left[\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_1(\mathbf{M}_2) \rangle \right]_{\mathbf{M}_1=0} \quad (4.15b)$$

Es el campo magnético tangencial en la puerta 1 debido a \mathbf{M}_2 cuando $\mathbf{M}_1=0$.

$$\overline{Y}_{21} = \left[\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_2(\mathbf{M}_1) \rangle \right]_{\mathbf{M}_2=0} \quad (4.15c)$$

$$\overline{Y}_{22} = \left[\langle \mathbf{w}_m, \mathbf{H}_2(\mathbf{M}_2) \rangle \right]_{\mathbf{M}_1=0} \quad (4.15d)$$

Un caso especialmente importante es el que se refiere a la caracterización de recintos con formas canónicas. Como se comentó en 3.6, estos recintos pueden caracterizarse sin necesidad de utilizar operadores integrales, empleando las soluciones modales del propio recinto tras cortocircuitar el contorno. En efecto, si consideramos el ejemplo de la figura 4.5, procediendo como en el ejemplo de la figura 4.4, el recinto canónico se aísla del exterior mediante un conductor eléctrico. Al mismo tiempo se imponen corrientes magnéticas en cada uno de los accesos al mismo. Aplicando superposición, como en el ejemplo anterior, se van considerando sucesivamente los campos magnéticos $\mathbf{H}_i(\mathbf{M}_j)$ en cada uno de los accesos (ver figura 4.5). La relación $\mathbf{H}_i\text{-}\mathbf{M}_j$, que da lugar a la admitancia \overline{Y}_{ij} se establece de forma sencilla mediante la función de onda solución del recinto. Dado que éste es de geometría separable, las condiciones de contorno son inmediatas de imponer ($E=0$ en

el contorno excepto en el acceso j) y la única incógnita resultante se resuelve precisamente obteniendo $\mathbf{H}_i(\mathbf{M}_j)$. En el capítulo 5 consideraremos en detalle varios ejemplos de aplicación de esta técnica.

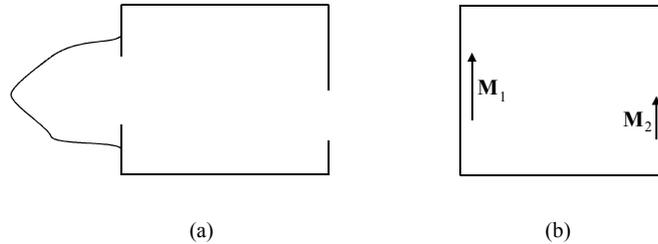


figura (4.5) La figura (a) muestra un problema donde se distinguen tres zonas. La figura (b) muestra la región central tras cerrar las puertas con un conductor e imponer las corrientes magnéticas

Una vez conocidas las matrices de admitancia de cada región por alguna de estas técnicas, podemos caracterizar el conjunto de regiones sin fuentes (en este caso las regiones b y c) por una única admitancia de entrada; la relación entre \mathbf{M}_2 y \mathbf{H}_2 en la región c es

$$\overline{H}_2 = -\overline{Y}_c \cdot \overline{M}_2 \tag{4.16}$$

donde el signo menos se debe a que la corriente de excitación en esta región es $-\mathbf{M}_2$ para forzar la continuidad del campo eléctrico tangencial. Introduciendo (4.16) en (4.14), el circuito de la figura 4.6, que esquematiza el conjunto de las regiones b y c presenta una admitancia global dada por

$$\overline{Y}_{in} = \overline{Y}_{11} - \overline{Y}_{12} \cdot (\overline{Y}_{22} + \overline{Y}_c)^{-1} \cdot \overline{Y}_{21} \tag{4.17}$$

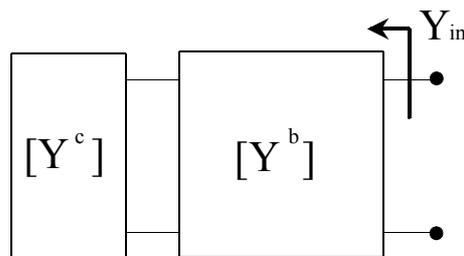


figura (4.6) El conjunto de las regiones b y c presenta una admitancia global dada por Y_{in} .

Ahora el problema ha quedado reducido a dos regiones y su solución, siguiendo los pasos dados en 4.1.1, nos proporcionará \mathbf{M}_1 y a partir de ella \mathbf{M}_2 .

Este procedimiento es generalizable a un conjunto de N regiones con $N-1$ puertas. Las $N-1$ regiones libres de fuentes se agrupan formando una red. Dicha red se resuelve usando la teoría de circuitos dando como resultado una admitancia de entrada. Forzando la continuidad de \mathbf{H}_t en la frontera entre esta región y la región con fuentes obtenemos la corriente magnética en la puerta 1 y, recursivamente, en las $N-2$ puertas restantes a partir de ella.

4.2 SEGMENTACIÓN SIN IMPOSICIÓN DE CONDUCTORES EN LOS ACCESOS

Cuando no se imponen las paredes conductoras no es posible aplicar el principio de superposición y el problema de contorno debe formularse globalmente, proporcionando como resultado todas las admitancias mutuas conjuntamente.

Como ya se comentó en el punto 4.1 la segmentación de un problema no exige la imposición de paredes conductoras en los contornos de separación. La segmentación da lugar a recintos encerrados por un conjunto de superficies, algunas son ficticias (impuestas) y otras son reales. Algunas de estas superficies hacen las veces de accesos o puertas que los “conectan” con otros recintos adyacentes. Estos recintos cerrados pueden caracterizarse como tales mediante una MAG empleando cualquiera de las relaciones integrales formuladas en el capítulo 3 sin necesidad de imponer paredes conductoras. Sin embargo, el empleo de estas paredes ha permitido aplicar el principio de superposición para obtener de forma independiente cada una de las admitancias \bar{Y}_{ij} de una red multiacceso.

Consideremos el ejemplo de la figura 4.7. En ella una guía rectangular se ha segmentado con dos contornos ficticios, C_1 y C_2 .

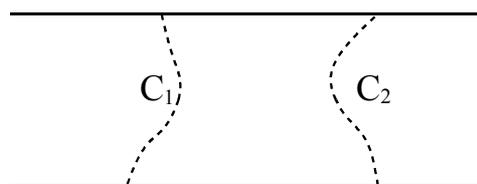


figura (4.7) Segmento de guía rectangular limitado por dos accesos arbitrarios C_1 y C_2 .

Apliquemos, por ejemplo, la ecuación integral basada en la función de onda. Debemos plantear que

$$\oint_{C_1+C_2} (j\omega\mu\psi\mathbf{J}_s + \mathbf{M}_s \times \nabla\psi)\hat{z} dC = 0 \quad (4.18)$$

Tras discretizar el operador como se detalla en 3.6 obtenemos

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Ahora, todas las admitancias mutuas \bar{Y}_{ij} de la red multiacceso se han obtenido con una sola operación a diferencia del procedimiento descrito en 4.1. Esta circunstancia, sin embargo, tiene como contrapartida el aumento de la matriz involucrada en la inversión.

Podemos concluir finalmente que a la hora de segmentar un problema se dispone de varias alternativas. Tales alternativas se pueden incluso combinar buscando favorecer el empleo del operador mas beneficioso en cada recinto, ya sea mediante la imposición de superficies conductoras, por el conocimiento de su función de onda, o incluso por disponer de una función de Green especializada.

4.3 MATRIZ DE DISPERSIÓN GENERALIZADA [S]

Si bien gran parte de la teoría de circuitos se puede expresar en términos de la matriz de admitancias [Y] o de impedancias [Z], a menudo es más conveniente emplear otras matrices que resalten el carácter de guíaonda en las puertas de la región a caracterizar. Cuando dicha región está conectada a guías, ya sean éstas rectangulares o radiales, como las que muestra la figura 4.8,

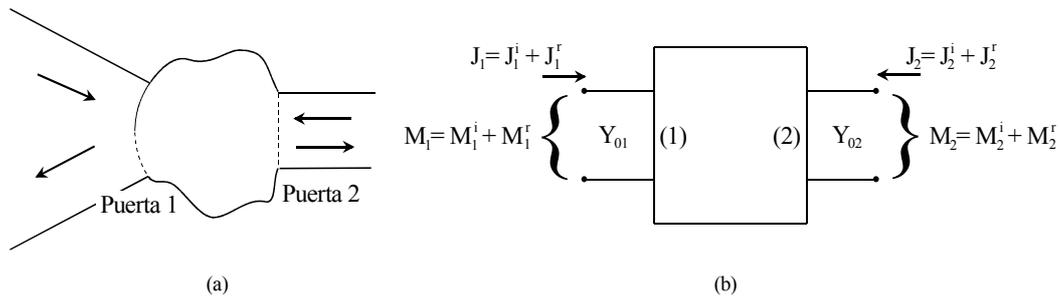


figura (4.8) En la figura (a) una región con forma arbitraria esta conectada a una guía rectangular y otra radial. En la figura (b) el campo en las puertas se ha descompuesto en incidente y reflejado.

las tensiones \bar{M} y las corrientes \bar{J} en las puertas pueden considerarse como la superposición de las componentes incidente y reflejada en cada puerta.

Así, en la puerta 1 de la figura 4.8

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_1^i + \bar{M}_1^r \quad (4.20)$$

$$\bar{J}_1 = \bar{J}_1^i + \bar{J}_1^r = \bar{Y}_{01}^i \bar{M}_1^i + \bar{Y}_{01}^r \bar{M}_1^r$$

donde \bar{Y}_{01}^i e \bar{Y}_{01}^r son las admitancias características asociadas a las ondas incidente y reflejada respectivamente. En la puerta 2 se cumplen unas relaciones similares. Con esta descomposición podemos definir la matriz de dispersión para una red de dos puertas como:

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_1^r \\ \bar{M}_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_1^i \\ \bar{M}_2^i \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Donde \bar{S}_{11} es el coeficiente de reflexión en la puerta 1 cuando la onda incidente por la puerta 2 es nula. \bar{S}_{22} tiene una interpretación análoga. Por su parte \bar{S}_{21} representa el coeficiente de transmisión de la puerta 1 a la 2 en la región caracterizada.

La matriz de dispersión (o scattering) así definida, está relacionada con la matriz de admitancias:

$$\begin{pmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Dado que $\bar{M}_1^r = \bar{S}_{11} \bar{M}_1^i \Big|_{\bar{M}_2=0}$ y $\bar{M}_2^r = \bar{S}_{21} \bar{M}_1^i \Big|_{\bar{M}_2=0}$, podemos introducir (4.20) en (4.22) y obtener \bar{S}_{11} y \bar{S}_{21} conjuntamente de las expresiones:

$$\bar{J}_1 = \bar{Y}_{01}^i \bar{M}_1^i + \bar{Y}_{01}^r \bar{M}_1^r = \bar{Y}_{11} (\bar{M}_1^i + \bar{M}_1^r) + \bar{Y}_{12} \bar{M}_2^r \quad (4.23)$$

$$\bar{J}_2 = \bar{Y}_{02}^r \bar{M}_2^r = \bar{Y}_{21} (\bar{M}_1^i + \bar{M}_1^r) + \bar{Y}_{22} \bar{M}_2^r$$

Así,

$$\bar{S}_{11} = - \left[\bar{Y}_{01}^r - \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12} (\bar{Y}_{02}^r - \bar{Y}_{22})^{-1} \bar{Y}_{21} \right]^{-1} \cdot \left[\bar{Y}_{01}^i - \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12} (\bar{Y}_{02}^r - \bar{Y}_{22})^{-1} \bar{Y}_{21} \right] \quad (4.24)$$

$$\bar{S}_{21} = (\bar{Y}_{02}^r - \bar{Y}_{22})^{-1} \cdot \bar{Y}_{21} \cdot (\bar{I} + \bar{S}_{11}) \quad (4.25)$$

donde \bar{I} es la matriz identidad.

Análogamente para \bar{S}_{22} y \bar{S}_{12} ,

$$\bar{S}_{22} = - \left[\bar{Y}_{02}^r - \bar{Y}_{22} (\bar{Y}_{01}^r - \bar{Y}_{11})^{-1} \bar{Y}_{12} \right]^{-1} \cdot \left[\bar{Y}_{02}^i - \bar{Y}_{22} - \bar{Y}_{21} (\bar{Y}_{01}^r - \bar{Y}_{11})^{-1} \bar{Y}_{12} \right] \quad (4.26)$$

$$\bar{S}_{12} = (\bar{Y}_{01}^r - \bar{Y}_{11})^{-1} \cdot \bar{Y}_{12} \cdot (\bar{I} + \bar{S}_{22}) \quad (4.27)$$

En el caso particular, aunque frecuente, de las redes de una puerta, la matriz de dispersión se reduce únicamente a un coeficiente de reflexión y las expresiones anteriores se simplifican, resultando:

$$\bar{\Gamma} = (\bar{Y} - \bar{Y}_0)^{-1} (\bar{Y}_0^i - \bar{Y}) \quad (4.28)$$

4.3.1 Cálculo de las Admitancias Características $\overline{\overline{Y}}_0^i, \overline{\overline{Y}}_0^r$

Es bien sabido que cada guía puede caracterizarse por una admitancia de onda que se obtiene a partir de su geometría y sus dimensiones. Dicha admitancia afecta de forma diferente a cada solución o modo que se propaga por la guía. Por tanto, en un tratamiento multimodal como el que nos ocupa, la admitancia de onda vendrá dada por una matriz diagonal.

Los ejemplos considerados en 3.1 son dos casos bidimensionales muy habituales. El primero de ellos hace referencia a una guía rectangular. En ese caso las matrices de admitancia asociadas a las ondas progresiva (i) y regresiva (r) de los modos TM_{m0}^z relacionan el campo eléctrico y magnético de cada modo según $\overline{\overline{J}}^i = \overline{\overline{Y}}_0^i \overline{\overline{M}}^i$ y $\overline{\overline{J}}^r = \overline{\overline{Y}}_0^r \overline{\overline{M}}^r$

donde

$$\overline{\overline{Y}}_0^i = \text{diag} \left(\frac{1}{\eta} \cdot \frac{k_x}{k} \right)_{m=1}^N \quad (4.29)$$

$$\overline{\overline{Y}}_0^r = \text{diag} \left(-\frac{1}{\eta} \cdot \frac{k_x}{k} \right)_{m=1}^N \quad (4.30)$$

4.4 CONEXIÓN DE REGIONES EN CASCADA

La necesidad de segmentar una región en cascada se presenta especialmente en problemas cerrados: discontinuidades en guía [47] o cavidades con formas arbitrarias [33], entre otros.

4.4.1 Matriz de Transmisión Generalizada [T]

Como vimos en el punto anterior, la matriz de dispersión podía resultar muy conveniente para definir problemas como el mostrado en la figura 4.8 en el que los accesos al recinto se realizan a través de contornos rectos o circulares y donde es posible hablar de ondas incidentes y reflejadas conforme a una determinada función

de onda. Cuando tenemos varias regiones con tales características conectadas en cascada, resulta aún más conveniente emplear la matriz de transmisión $[T]$, definida por [24]

$$\begin{pmatrix} \overline{M}_2^r \\ \overline{M}_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{T}_{11} & \overline{T}_{12} \\ \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{M}_1^i \\ \overline{M}_1^r \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Con esta definición, la conexión de redes de dos puertas como las mostradas en la figura 4.9, se realiza de forma sencilla, ya que la matriz de transmisión global es

$$[T] = [T_N][T_{N-1}] \cdots [T_2][T_1] \quad (4.32)$$

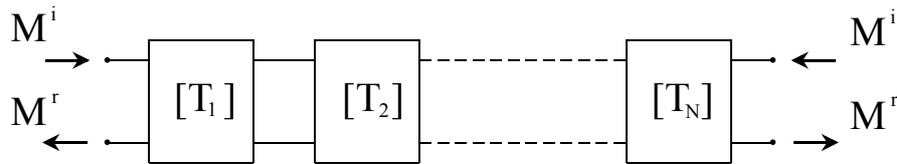


figura (4.9) La matriz $[T]$ es apta para la conexión de diferentes guías en cascada.

La matriz de transmisión se relaciona con la de dispersión mediante

$$\begin{aligned} \overline{T}_{11} &= \overline{S}_{21} - \overline{S}_{22} \overline{S}_{12}^{-1} \overline{S}_{11} \\ \overline{T}_{12} &= \overline{S}_{22} \overline{S}_{12}^{-1} \\ \overline{T}_{21} &= -\overline{S}_{12}^{-1} \overline{S}_{11} \\ \overline{T}_{22} &= \overline{S}_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.4.2 Conexión en Cascada de Regiones Arbitrarias

La geometría de las zonas en que se segmenta un problema electromagnético no tiene por qué cumplir las condiciones comentadas en el punto anterior, y que nos permitirían emplear la matriz de dispersión o de transmisión. De hecho en problemas

arbitrarios la conectividad tiene que hacerse a partir de la propia matriz de admitancias. Un ejemplo de ello lo representa la cavidad de la figura 4.10

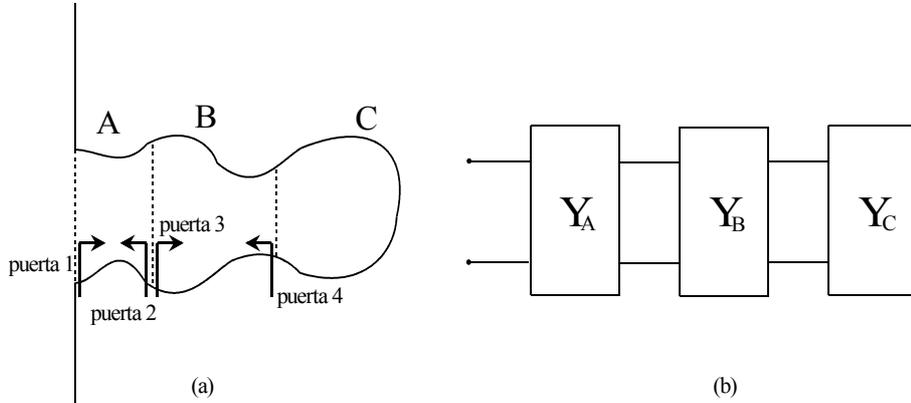


figura (4.10) La figura (a) muestra una cavidad con forma arbitraria que se segmenta en 3 partes. La figura (b) muestra esquemáticamente la división efectuada.

Si dividimos el problema en N regiones, cada una definida por su matriz de admitancias, podemos conectarlas en cascada. Para obtener la matriz de admitancias del conjunto, podemos obtener primero la matriz equivalente de las dos primeras y proceder iterativamente con el resto.

Así, si la matriz $\overline{\overline{Y}}_A$ relaciona los puertos 1 y 2 de la figura:

$$\begin{bmatrix} \overline{J}_1 \\ \overline{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_{11} & \overline{\overline{Y}}_{12} \\ \overline{\overline{Y}}_{21} & \overline{\overline{Y}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

y la matriz $\overline{\overline{Y}}_B$ los puertos 3 y 4,

$$\begin{bmatrix} \overline{J}_3 \\ \overline{J}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_{33} & \overline{\overline{Y}}_{34} \\ \overline{\overline{Y}}_{43} & \overline{\overline{Y}}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{M}_3 \\ \overline{M}_4 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

podemos conectarlas imponiendo las condiciones de continuidad en las superficies comunes a las regiones A y B. Los campos eléctrico y magnético son continuos en estas aperturas. Dado que los vectores normales a esas superficies son entrantes en cada región, las corrientes equivalentes \mathbf{J}_S y \mathbf{M}_S definidas a partir de ellas deben ser opuestas:

$$\begin{aligned}\bar{J}_2 &= -\bar{J}_3 \\ \bar{M}_2 &= -\bar{M}_3\end{aligned}\quad (4.36)$$

Introduciendo (4.36) en (4.34) y (4.35) obtenemos la matriz de admitancias resultante del conjunto consistente en las cuatro submatrices siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{Y}'_{11} &= \bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{12} \left(\bar{Y}_{33} - \bar{Y}_{22} \right)^{-1} \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}'_{12} &= \bar{Y}_{21} \left(\bar{Y}_{33} - \bar{Y}_{22} \right)^{-1} \bar{Y}_{34} \\ \bar{Y}'_{21} &= -\bar{Y}_{43} \left(\bar{Y}_{33} - \bar{Y}_{22} \right)^{-1} \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}'_{22} &= \bar{Y}_{44} - \bar{Y}_{43} \left(\bar{Y}_{33} - \bar{Y}_{22} \right)^{-1} \bar{Y}_{34}\end{aligned}\quad (4.37)$$

Si la región B fuera el elemento final de la cadena, \bar{Y}_B constituiría la admitancia terminal. En ese caso la admitancia total del conjunto vendría dada por:

$$\bar{Y}' = \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12} \left(\bar{Y}_{22} - \bar{Y}_B \right)^{-1} \bar{Y}_{21}\quad (4.38)$$

4.5 ACOPLAMIENTO MÚLTIPLE ENTRE REGIONES

Siempre que tras la segmentación de un problema electromagnético identifiquemos dos o más regiones que están interactuando entre sí, tenemos que hablar de la existencia de un acoplamiento múltiple entre ellas. Ésta es la situación más general. En ella las distintas regiones tienen varios accesos y el circuito no se ajusta a ninguno de los prototipos repasados. El problema, no obstante, tiene solución y para obtenerla se debe proceder planteando las condiciones de continuidad en todas las superficies de contacto y operar algebraicamente hasta proporcionar una matriz de admitancias para el conjunto o hasta despejar alguna de las corrientes equivalentes incógnita.

4.5.1 Matriz de Acoplamientos

Consideremos a modo de ejemplo el problema de la figura 4.11. Se trata de un cilindro conductor de sección triangular. Con el fin de segmentarlo para su estudio como elemento difractante, lo más conveniente es inscribirlo en una circunferencia ficticia.

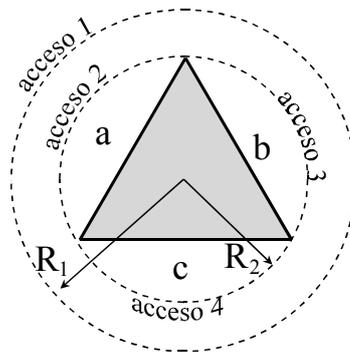


figura (4.11) Segmentación de un cilindro de sección triangular. El anillo central tiene cuatro accesos y caracteriza el acoplamiento mutuo entre las regiones a, b y c.

De este modo podemos distinguir tres zonas (a, b y c) delimitadas por cada una de las caras del triángulo y dicha circunferencia. Para considerar la interacción múltiple entre las tres zonas es necesario imponer una segunda circunferencia más externa. La corona circular limitada por ambas circunferencias puede considerarse como una red de acoplamientos de una entrada, la circunferencia exterior, y tres salidas, cada uno de los arcos de circunferencia limitado por los vértices del triángulo. Las tres salidas de la red están cargadas por las correspondientes admitancias terminales, como se muestra en la figura 4.12. Dichas admitancias caracterizan a cada una de las tres regiones limitadas por el cilindro triangular y la circunferencia más interior.

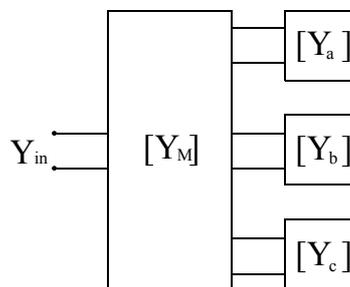


figura (4.12) Esquema de conexión de las regiones entorno al cilindro triangular.

La matriz de acoplamientos $\overline{\overline{Y}}_M$ es por tanto 4×4 ,

$$\begin{pmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 \\ \bar{J}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{13} & \bar{Y}_{14} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \bar{Y}_{23} & \bar{Y}_{24} \\ \bar{Y}_{31} & \bar{Y}_{32} & \bar{Y}_{33} & \bar{Y}_{34} \\ \bar{Y}_{41} & \bar{Y}_{42} & \bar{Y}_{43} & \bar{Y}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{M}_4 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

En las zonas a, b y c se cumple que

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= \bar{Y}_a \bar{M}_2 \\ \bar{J}_3 &= \bar{Y}_b \bar{M}_3 \\ \bar{J}_4 &= \bar{Y}_c \bar{M}_4 \end{aligned} \quad (4.40)$$

introduciendo (4.39) en (4.40) y operando, obtenemos la relación entre \bar{J}_1 y \bar{M}_1 que constituye la admitancia de entrada del conjunto

$$\bar{Y}_{in} = \left(\bar{Y}_{11} - \left(\bar{Y}_{12} \bar{Y}_{13} \bar{Y}_{14} \right) [A]^{-1} \cdot \left(\bar{Y}_{21} \bar{Y}_{31} \bar{Y}_{41} \right)^t \right) \quad (4.41)$$

donde

$$[A] = \begin{pmatrix} \bar{Y}_{22} - \bar{Y}_a & \bar{Y}_{23} & \bar{Y}_{24} \\ \bar{Y}_{32} & \bar{Y}_{33} - \bar{Y}_b & \bar{Y}_{34} \\ \bar{Y}_{42} & \bar{Y}_{43} & \bar{Y}_{44} - \bar{Y}_c \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

La configuración circuital resuelta representa tan solo un ejemplo de los muchos que se pueden presentar en el marco de la interacción múltiple. No obstante, la resolución de cualquier otro problema sigue la línea genérica establecida al inicio de este punto que obliga la continuidad en todas las superficies, y que nos permite asegurar la existencia de solución, por complicado que sea el circuito.

4.5.2 Realimentación Modal

En ocasiones la interacción múltiple se resuelve de forma más eficiente si los elementos que componen el problema se pueden caracterizar por sus coeficientes de reflexión. Tal sería el caso, por ejemplo, de un conjunto de elementos difractantes separados, ya sea en espacio libre o en el interior de una guía. Entonces el planteamiento se hace en términos de las ondas incidentes y reflejadas en cada uno de ellos, empleando técnicas de realimentación modal [32]. Esta técnica se apoya en la teoría de grafos [43] y basa su eficiencia en la aplicación de un algoritmo de realimentación modal sobre dos de los elementos difractantes que forman el problema. Posteriormente el resto de los elementos se van añadiendo de uno en uno, aplicando el algoritmo recursivamente.

El anterior, no obstante, no es el único enfoque que cabe adoptar desde el punto de vista de la realimentación modal. A continuación se propone un acercamiento circuital basado en [51] y que permite obtener directamente la solución al problema completo.

Consideremos la configuración que se muestra en la figura 4.13. En ella se observa un número N de elementos difractantes de sección arbitraria que interactúan entre sí. Cada elemento está caracterizado por un coeficiente de reflexión que relaciona los espectros de las ondas incidentes y reflejadas (a_i, b_i) referidas a un sistema centrado en el propio elemento. Además se considera un sistema de referencia también para la fuente.

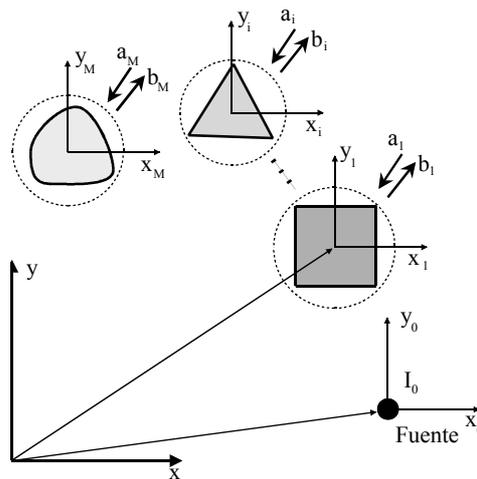


figura (4.13) La figura describe una situación en la que una serie de cilindros de sección arbitraria están iluminados por una fuente puntual.

A diferencia de lo que ocurría en problemas como el contemplado en 4.3.1, ahora no se segmenta imponiendo superficies sobre las que forzar continuidad

eléctrica y magnética entre las regiones resultantes. Además, cada elemento posee su propio sistema de referencia. Ahora el elemento circuital que mejor explica esta situación es el transformador. El circuito equivalente se detalla en la figura 4.14. En él, la interacción entre los elementos se realiza mediante el acoplamiento entre los transformadores. Las relaciones de transformación describen la traslación de las soluciones modales entre los distintos sistemas de referencia. Veamos cómo plantear la solución.

Si suponemos conocidos los coeficientes de reflexión de cada elemento, se debe cumplir que la relación entre los pesos de las ondas incidente y reflejada es

$$\bar{b}_i = \bar{R}_i \bar{a}_i \tag{4.43}$$

Al mismo tiempo la onda incidente sobre el elemento i -ésimo abarca la contribución de la fuente así como la de los campos difractados por el resto de elementos

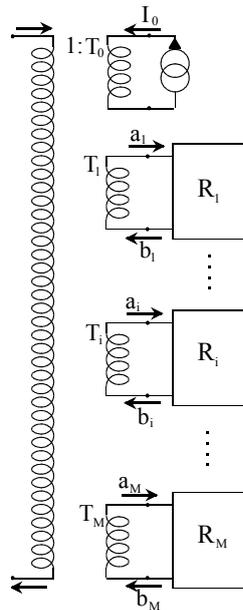


figura (4.14) Habiendo definido cada elemento por su coeficiente de reflexión la interacción múltiple entre ellos es equivalente a la presencia de un transformador en un circuito. Ahora las relaciones de transformación representan la traslación de las soluciones entre los sistemas de referencia

$$\bar{a}_i = \bar{T}_{0i} \cdot \bar{I}_0 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^M \bar{T}_{mi} \cdot \bar{b}_m \quad (4.44)$$

donde \bar{I}_0 es el vector fuente referido a su origen y \bar{T}_{ji} es la matriz de transformación (o traslación) de las ondas emergentes referidas al sistema j , en ondas incidentes referidas al sistema i .

Introduciendo (4.44) en (4.43) y reordenando los términos

$$-\bar{R}_i \cdot \bar{T}_{0i} \cdot \bar{I}_0 = -\bar{b}_i + \bar{R}_i \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^M \bar{T}_{mi} \cdot \bar{b}_m \quad (4.45)$$

Si forzamos el cumplimiento de (4.45) en cada uno de los M elementos que componen el problema, obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los vectores \bar{b}_i , es decir, las ondas reflejadas por cada elemento, referidas a su sistema de referencia en presencia de todos los demás.

Matricialmente podemos expresar el sistema como

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \cdot \bar{T}_{01} \\ \vdots \\ \bar{R}_i \cdot \bar{T}_{0i} \\ \vdots \\ \bar{R}_M \cdot \bar{T}_{0M} \end{bmatrix} \bar{I}_0 = \begin{bmatrix} \bar{I} & \cdots & -\bar{R}_1 \cdot \bar{T}_{i1} & \cdots & -\bar{R}_1 \cdot \bar{T}_{M1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\bar{R}_i \cdot \bar{T}_{1i} & \cdots & \bar{I} & \cdots & -\bar{R}_i \cdot \bar{T}_{Mi} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{R}_M \cdot \bar{T}_{1M} & \cdots & -\bar{R}_M \cdot \bar{T}_{iM} & \cdots & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_M \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

donde \bar{I} es la matriz identidad.

En el sistema de ecuaciones (4.46) las incógnitas son los espectros \bar{b}_i . Su solución proporciona estos espectros. Sin embargo debemos recordar que cada uno de ellos está referido a su propio origen. Para extraer alguna utilidad del cálculo realizado debemos referirlos todos a su origen común y sumar sus contribuciones. Por ejemplo podemos tomar como referencia la posición de la fuente, y expresar el espectro total como

$$\bar{b}_T = \left[\bar{T}_{10} \cdots \bar{T}_{i0} \cdots \bar{T}_{M0} \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_M \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

donde ahora las matrices \bar{T}_{i0} realizan la transformación de los espectros centrados en el origen i -ésimo en espectros referidos al origen 0.

5

Solución a Algunos Problemas Electromagnéticos Mediante Modelado Circuitual

En los capítulos precedentes se han repasado las distintas alternativas disponibles para caracterizar un recinto por su matriz de admitancias generalizadas. Se ha descrito también el procedimiento a seguir en la segmentación de un problema y en la posterior interconexión de los elementos resultantes. Se ha destacado la gran diversidad de configuraciones circuitales posibles y se han contemplado diversas vías genéricas para su resolución.

Corresponde a continuación plantear algunas situaciones que nos permitan evaluar las prestaciones numéricas del modelado circuitual; es decir, su sistematicidad, precisión, consumo de recursos, versatilidad, etc.

Inicialmente se consideran estructuras conductoras abiertas. El primer ejemplo es un reflector de esquina. Ésta, es una estructura especialmente sencilla de tratar dada su geometría, ya que puede segmentarse en regiones canónicas cuya caracterización es inmediata a partir de la función de onda. De hecho el método que se propone puede considerarse como la extensión de la técnica de *mode-matching* a problemas abiertos. Seguidamente se plantea la caracterización de cilindros conductores de sección poligonal. En este caso las regiones obtenidas como resultado de la segmentación no tienen una geometría separable y será necesario emplear los procedimientos integrales descritos en el capítulo 3. En particular, se aplicará la ecuación integral basada en la función de onda, lo que nos permitirá optimizar el tamaño de las matrices involucradas.

El cilindro hueco ranurado es otro de los elementos que se caracterizan en este capítulo. En este caso los parámetros escogidos son los de dispersión, lo que nos facultará para analizar problemas complejos con varios cilindros anidados de forma sencilla.

Finalmente, se plantea un problema cerrado: el análisis de postes en guía rectangular. Este ejemplo permitirá evaluar la capacidad de caracterizar regiones con varios accesos y contornos que no se ajustan a una geometría separable. Será necesario además combinar desarrollos modales planos y cilíndricos con el fin de abordar de forma eficiente la presencia del poste.

Sin duda los casos que se contemplan son una mínima parte de los que se pueden plantear pero abordan un buen número de situaciones que suelen presentarse de forma recurrente en casi todos los problemas, tales como la presencia de esquinas, la presencia de obstáculos o los acoplamientos múltiples.

5.1 REFLECTOR DIÉDRICO

El reflector diédrico, o reflector de esquina, es una estructura compuesta por dos paneles conductores unidos por uno de sus extremos formando un diedro. Cuando se sitúa un dipolo en el interior del reflector, con la posición y orientación adecuadas, es posible mejorar considerablemente las características de radiación de éste. Esta propiedad junto con su sencillez de fabricación, han hecho del reflector de esquina un elemento ampliamente valorado como elemento radiante, desde que Kraus lo diseñara en la década de los 30 [52]. Por otra parte, la presencia de esquinas y bordes en el reflector hacen de éste un elemento interesante en la evaluación de los fenómenos de difracción múltiple. En ese caso el reflector es un elemento pasivo que recibe una onda lejana, que a su vez es difractada por él.

Sin duda las ecuaciones integrales de campo eléctrico (EFIE) o magnético (MFIE) son los métodos más exactos en el estudio del reflector, tanto en modo antena como actuando de elemento difractante. Sin embargo, los reflectores eléctricamente grandes imponen ciertas limitaciones a la aplicación de estos métodos dado el gran número de incógnitas que es necesario plantear. Los métodos conocidos como de alta frecuencia (GTD, UTD) son lo que se sugieren en estos casos. Balanis [53-55] ha estudiado el reflector de esquina empleando estas técnicas y ha recurrido a coeficientes de difracción de orden superior, obteniendo resultados aceptables en algunos casos.

Existe también otro enfoque que aprovecha la convolución presente en la ecuación integral para introducir la transformada discreta de Fourier en el cálculo numérico (Shen [56]). El método proporciona unos resultados comparables al método de los momentos y es eficiente incluso con reflectores eléctricamente grandes.

Veamos a continuación cómo caracterizar este elemento circuitalmente tanto en problemas de radiación como de difracción.

5.1.1 El reflector diédrico como elemento difractante

En el análisis del reflector como elemento difractante, la fuente se supone situada lejos del objeto. En este caso la segmentación que se propone es la mostrada en la figura 5.1a

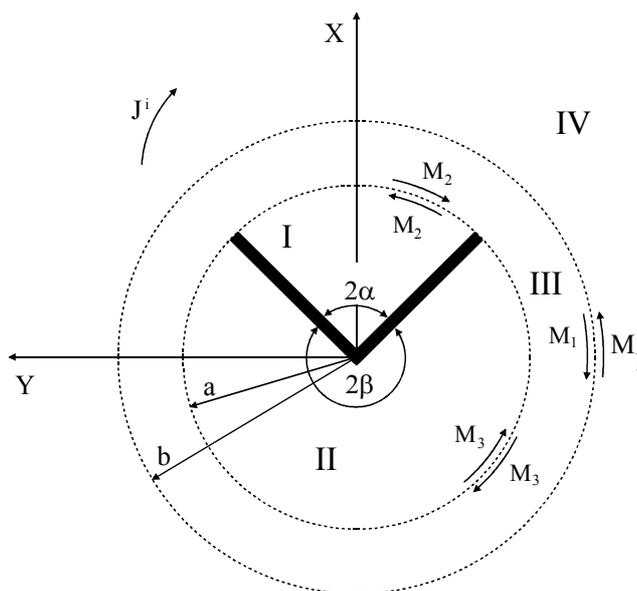


figura (5.1a) El reflector se encierra en una circunferencia de radio a . Además se impone una segunda circunferencia de referencia de radio b .

Esquemáticamente el problema considerado adopta el modelo de la figura 5.1b

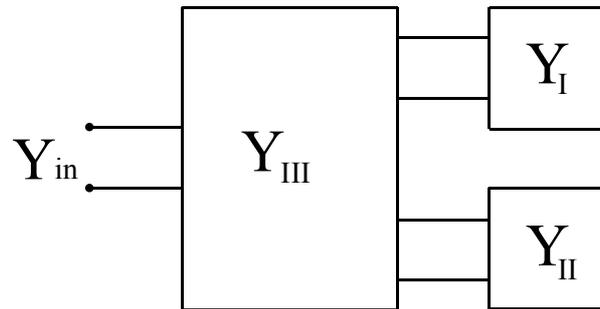


figura (5.1b) El anillo central es una red de tres accesos que conecta las dos caras del reflector entre sí , y éstas con el espacio libre.

Como se puede ver, el anillo central puede considerarse como una red que conecta las dos caras del reflector. Para la caracterización de cada una de las regiones podemos imponer unas paredes eléctricas en las superficies $\rho=a$ y $\rho=b$. La continuidad del campo eléctrico en dichas superficies se obtiene forzando la existencia de corrientes magnéticas equivalentes a ambos lados de la pared eléctrica. Estas corrientes deben ser iguales y de sentido contrario para garantizar la continuidad del campo eléctrico.

Las regiones I, II y III en la figura 5.1.a están delimitadas por superficies canónicas con $\rho=cte$ y $\phi=cte$, de manera que la función de onda es conocida en cada una de ellas. Utilizaremos esta función de onda para obtener las matrices de admitancias asociadas a cada región.

Debemos distinguir dos casos, según la iluminación de la onda incidente sea TM_z o TE_z .

a) *Incidencia TM_z*

- Caracterización de las regiones I y II

Las regiones I y II pueden considerarse como cavidades en forma de sector circular (figura 5.2)

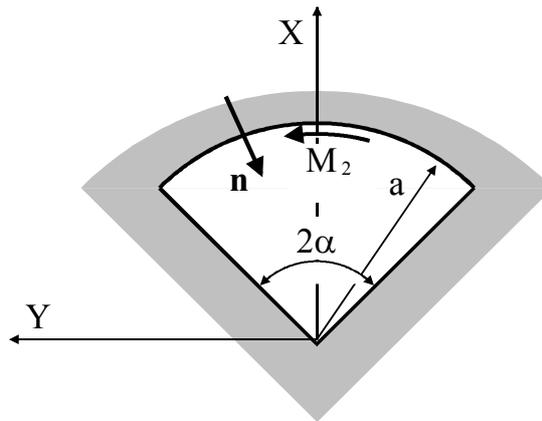


figura (5.2) Las regiones I y II se encierran con un conductor perfecto en $\rho=a$, sobre el que se sitúa la corriente magnética \mathbf{M} .

En ellas, la función de onda solución es

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(k\rho) \text{sen}[v(\phi + \alpha)] \quad (5.1)$$

siendo $v = \frac{n\pi}{2\alpha}$.

La caracterización de las regiones I y II pasa por la obtención de una relación entre \mathbf{M} y \mathbf{H} en $\rho=a$. Las corrientes magnéticas \mathbf{M} están asociadas al campo eléctrico en $\rho=a$, ya que $\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a$.

En esta ocasión $\hat{n} = -\hat{\rho}$ y \mathbf{E}^a sólo tiene componente según \hat{z} . Es decir, $M_\phi = -E_z^a$.

Las expresiones en (2.48) nos permiten afirmar que

$$E_z^a = \frac{k^2}{j\omega \mu \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(ka) \text{sen}[v(\phi + \alpha)] \quad (5.2)$$

y

$$H_\phi^a = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -\frac{k}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n'(ka) \text{sen}[v(\phi + \alpha)] \quad (5.3)$$

el campo eléctrico E_z^a en (5.2) aparece como un desarrollo en serie de funciones $F = \left\{ f_n \mid f_n = \text{sen}[v(\phi + \alpha)], \text{ con } v = \frac{n\pi}{2\alpha} \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ ortogonales en el intervalo $[-\alpha, \alpha]$, lo que permite escribir

$$a_n = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{j\omega \mu \varepsilon}{k^2} \frac{1}{J_n(ka)} \int_{-\alpha}^{\alpha} E_z^a(\phi') \text{sen}[v(\phi' + \alpha)] d\phi' \quad (5.4)$$

introduciendo (5.4) en (5.3), obtenemos la relación buscada entre M_ϕ y H_ϕ

$$H_\phi^a = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'(ka)}{J_n(ka)} \cdot \text{sen}[v(\phi + \alpha)] \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} M_\phi(\phi') \text{sen}[v(\phi' + \alpha)] d\phi' \quad (5.5)$$

En este caso es obvio que tanto $M_\phi(\phi)$ como $H_\phi^a(\phi)$ pueden expandirse como combinación lineal de las funciones del conjunto de funciones F anteriormente definido:

$$M_\phi = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \text{sen}[v_l(\phi + \alpha)] \quad (5.6)$$

$$H_\phi^a = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \text{sen}[v_q(\phi + \alpha)] \quad (5.7)$$

introduciendo (5.6) y (5.7) en (5.5) y aplicando el producto interno definido en (4.6) a ambos lados de (5.5)

$$\langle H_\phi^a, \mathbf{f}_q \rangle = \langle H_\phi^a(M_\phi), \mathbf{f}_q \rangle \quad (5.8)$$

obtenemos

$$H_q = \begin{cases} \frac{j}{\eta} M_l \cdot \frac{J_{\nu'}'(ka)}{J_\nu(ka)}, & q = l = n \\ 0 & q \neq l \end{cases} \quad (5.9)$$

Por tanto la matriz de admitancias de carga para la región I es diagonal y sus elementos son

$$y_{ql}^I = \frac{H_q}{M_l} = \frac{j}{\eta} \cdot \frac{J_{\nu'}'(ka)}{J_\nu(ka)}, \quad q = l = n \quad (5.10)$$

De forma análoga en la región II se obtiene

$$y_{ql}^{II} = \frac{j}{\eta} \cdot \frac{J_{\nu'}'(ka)}{J_{\nu'}(ka)}, \quad q = l = n \quad (5.11)$$

aunque ahora $\nu' = \frac{n\pi}{2\beta}$

Antes de proseguir, conviene hacer algunas consideraciones acerca de la elección de las funciones base y peso asociadas a \mathbf{E} y \mathbf{H} , respectivamente. En problemas sencillos como este, la propia función de onda sugiere la elección de estas funciones. Sin embargo en la mayoría de los casos, es necesario escoger conjuntos de funciones ortogonales más generales. En los casos que se analizan en este capítulo las funciones base y peso que se emplean son desarrollos en serie de Fourier ortogonales en el dominio que en cada momento constituye el acceso a caracterizar. Formulemos de nuevo la caracterización de la región I con un conjunto de funciones base y peso más general, con el fin de resaltar la influencia de su elección. Así, en esta región, las funciones incógnita H_ϕ^a y M_ϕ , se pueden expandir también como

$$M_\phi = \sum_{l=1}^L M_l^o \mathbf{g}_l^o + \sum_{l=0}^L M_l^e \mathbf{g}_l^e \quad (5.12a)$$

y

$$H_\phi^a = \sum_{q=1}^Q H_q^o \mathbf{g}_q^o + \sum_{q=0}^Q H_q^e \mathbf{g}_q^e \quad (5.12b)$$

siendo

$$\mathbf{G}^o = \left\{ \mathbf{g}_n^o \mid \mathbf{g}_n^o = \text{sen} \frac{n\pi}{\alpha} \phi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \phi \in [-\alpha, \alpha] \right\} \quad (5.13a)$$

un conjunto de funciones impares, y

$$\mathbf{G}^e = \left\{ \mathbf{g}_n^e \mid \mathbf{g}_n^e = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2\alpha} \phi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \phi \in [-\alpha, \alpha] \right\} \quad (5.13b)$$

un conjunto de funciones pares escogidas junto con las impares para cumplir las condiciones de contorno de este reflector en $\pm\alpha$.

Al mismo tiempo, en ciertos casos la simetría del problema nos puede llevar a afirmar que las soluciones par e impar de \mathbf{M} y \mathbf{H} en los contornos están desacopladas, lo que permite obtenerlas de forma independiente entre sí. Esto puede aprovecharse desde un punto de vista computacional para reducir a la mitad el número de incógnitas involucradas en el cálculo, ya que se formulan dos problemas independientes formalmente idénticos (par e impar), pero con la mitad de incógnitas cada uno. Este es el caso del reflector diédrico, donde se pueden definir matrices de admitancia par e impar asociadas a estas familias de funciones así definidas.

Sean \mathbf{m}_l^e y $\mathbf{h}_q^e \in \mathbf{G}^e$ las funciones base y peso del problema par y \mathbf{m}_l^o y $\mathbf{h}_q^o \in \mathbf{G}^o$ las funciones base y peso del problema impar.

Ahora la expresión (5.5) se puede dividir en dos. La componente par de H_ϕ^a se debe únicamente a la componente par de M_ϕ , y análogamente con la componente impar. Podemos formular ambas relaciones con una única expresión como

$$H_{\phi}^e(\phi) = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^N \frac{J_v'(ka)}{J_v(ka)} \cdot \text{sen}[v(\phi + \alpha)] \sum_{l=1}^L M_l^e \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} m_l^e(\phi') \text{sen}[v(\phi' + \alpha)] d\phi' \quad (5.14)$$

aplicando de nuevo el producto interno a ambos lados de la igualdad como en (5.8) ,

$$H_q^e = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^N \frac{J_v'(ka)}{J_v(ka)} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} h_q^e(\phi) \cdot \text{sen}[v(\phi + \alpha)] d\phi \cdot \sum_{l=1}^L M_l^e \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} m_l^e(\phi') \text{sen}[v(\phi' + \alpha)] d\phi' \quad (5.15)$$

La relación entre M_{ϕ} y H_{ϕ} para los casos par e impar puede entonces expresarse matricialmente como

$$\overline{\overline{Y}}_I^e = \overline{\overline{W}}^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0I}^a \cdot \overline{\overline{G}}^e \quad (5.16)$$

donde los elementos de cada matriz son

$$w_{qn}^e = \frac{2}{\alpha} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} h_q^e(\phi) \cdot \text{sen}[v(\phi + \alpha)] d\phi \quad (5.17)$$

$$g_{nl}^e = \frac{2}{\alpha} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} m_l^e(\phi') \text{sen}[v(\phi' + \alpha)] d\phi' \quad (5.18)$$

en ellos, el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna.

$$\overline{\overline{Y}}_{0I}^a = \text{diag} \left(\frac{j}{\eta} \cdot \frac{J_v'(ka)}{J_v(ka)} \right)_{n=1}^N \quad (5.19)$$

Para la obtención de las matrices Y_{II}^e , asociadas a la región II, basta con sustituir α por β en (5.17), (5.18) y (5.19).

La relación (5.16) nos permite profundizar en la comprensión de las admitancias que estamos definiendo. La matriz $\overline{\overline{Y}}_{0I}^a$ representa la admitancia característica en $\rho=a$ tal y como se definió en 3.1. Los coeficientes contenidos en las

matrices $\overline{\overline{W}}$ y $\overline{\overline{G}}$ representan la interacción o acoplamiento entre cada una de las funciones expansión de M_ϕ y H_ϕ , y la función de onda ψ asociada al problema.

En lo sucesivo adoptaremos este enfoque más general, en la obtención de las matrices de admitancia.

- Caracterización de la región III

Esta región es un anillo circular en el que se distinguen tres accesos. Uno constituido por la circunferencia exterior y los otros dos en la circunferencia interior como se observa en la figura 5.3. La matriz que caracteriza la región está compuesta por nueve submatrices que consideran todas las interacciones posibles entre las tres puertas.

$$\overline{\overline{Y}}_{III}^e = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_{11}^e & \overline{\overline{Y}}_{12}^e & \overline{\overline{Y}}_{13}^e \\ \overline{\overline{Y}}_{21}^e & \overline{\overline{Y}}_{22}^e & \overline{\overline{Y}}_{23}^e \\ \overline{\overline{Y}}_{31}^e & \overline{\overline{Y}}_{32}^e & \overline{\overline{Y}}_{33}^e \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Tal y como se detalla en 4.1.2 las submatrices de la primera columna corresponden al campo magnético creado por la corriente magnética \mathbf{M}_1 en cada una de las tres puertas, cuando las puertas 2 y 3 están en cortocircuito, $\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_3=0$.

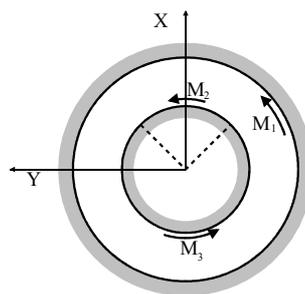


figura (5.3) En el anillo central se distinguen tres accesos. Uno constituido por la circunferencia exterior y los otros dos por sendas porciones de la circunferencia interior

La función de onda en términos de las funciones de Hankel de primera o segunda especie es

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(H_n^{(1)}(k\rho) + R_n^a H_n^{(2)}(k\rho) \right) e^{jn\phi} \quad (5.21)$$

siendo

$$R_n^a = -\frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \quad (5.22)$$

el coeficiente de reflexión del cilindro conductor interior.

Ahora, la relación entre la corriente magnética \mathbf{M}_1 y el campo eléctrico en b es $M_{1\phi} = -E_z^b$. Dado que $M_{1\phi}$ se extiende a un dominio de 2π radianes, las funciones base y peso asociadas a esta puerta, \mathbf{m}_{1l}^e y \mathbf{h}_{1q}^e , pertenecen a los conjuntos $F^e = \left\{ \mathbf{f}_n^e \mid \mathbf{f}_n^e = \cos n\phi, n = 0, 1, \dots \right\}$ y $F^o = \left\{ \mathbf{f}_n^o \mid \mathbf{f}_n^o = \sin n\phi, n = 1, 2, \dots \right\}$.

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado *a*) podemos escribir que

$$\overline{\overline{Y}}_{11}^e = \overline{\overline{W}}_1^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^b \cdot \overline{\overline{G}}_1^e \quad (5.23)$$

donde

$$w_{qn}^e = \frac{1}{\varepsilon_q \pi} \int_0^{2\pi} h_{1q}^e(\phi) e^{jn\phi} d\phi, \quad \varepsilon_q = \begin{cases} 1 & q \neq 0 \\ 2 & q = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$g_{nl}^e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_{1l}^e(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \quad (5.25)$$

$$\overline{\overline{Y}}_{0III}^b = \text{diag} \left(\frac{j H_n^{(1)'}(kb) + R_n^a H_n^{(2)'}(kb)}{\eta H_n^{(1)}(kb) + R_n^a H_n^{(2)}(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.26)$$

La definición de la matriz $\overline{\overline{Y}}_{21}^e$ es muy similar. Ahora el campo magnético de interés es el inducido en la puerta 2, por lo que las funciones peso \mathbf{h}_{2q}^e pertenecen a los conjuntos definidos en (5.13a) y (5.13b):

$$\overline{\overline{Y}}_{21}^e = \overline{\overline{W}}_2^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^a \cdot \overline{\overline{G}}_1^e \quad (5.27)$$

donde

$$w_{qn}^e = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} h_{2q}^e(\phi) e^{jn\phi} d\phi \quad (5.28)$$

y

$$\overline{\overline{Y}}_{0III}^a = \text{diag} \left(\frac{j H_n^{(1)'}(ka) + R_n^a H_n^{(2)'}(ka)}{\eta H_n^{(1)}(kb) + R_n^a H_n^{(2)}(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.29)$$

Para definir la matriz $\overline{\overline{Y}}_{31}^e$ basta con cambiar la matriz asociada a las funciones peso en (5.27). Ahora estas funciones, h_{3q}^e , se definen a partir de los conjuntos (5.13a) y (5.13b), sustituyendo α por β .

$$\overline{\overline{Y}}_{31}^e = \overline{\overline{W}}_3^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^a \cdot \overline{\overline{G}}_1^e \quad (5.30)$$

donde los coeficientes de $\overline{\overline{W}}_3^e$ son

$$w_{qn}^e = \frac{1}{\beta} e^{jn\pi} \int_{-\beta}^{\beta} h_{3q}^e(\phi) e^{jn\phi} d\phi \quad (5.31)$$

Los seis elementos restantes de la matriz $\overline{\overline{Y}}_{III}^e$ se construyen de manera similar. Su definición se recoge en el apéndice II.1 para agilizar la solución.

Una vez caracterizadas las tres regiones, la admitancia total $\overline{\overline{Y}}_{in}^e$, que considera el acoplamiento entre todas ellas, se calcula mediante las expresiones (4.41) y (4.42). En ellas se utiliza la corriente eléctrica equivalente en la puerta i , \mathbf{J}_i , en lugar del campo magnético tangencial \mathbf{H}_i . Sin embargo ambas están relacionadas mediante $\mathbf{J}_i = \hat{n} \times \mathbf{H}_i$.

En un problema de difracción como el analizado, la fuente está a una cierta distancia del objeto, lo que permite caracterizarlo por un coeficiente de reflexión. Para ello es conveniente convertir las matrices $\overline{\overline{Y}}_{in}^e$ e $\overline{\overline{Y}}_{in}^o$, definidas a partir de los conjuntos F^e y F^o , respectivamente, en una única matriz global asociada a la familia de funciones $\{f_n | f_n = e^{jn\phi}, n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}$, más apropiada para problemas de propagación en espacio libre. Conocida la nueva matriz de admitancias (apéndice III.1), el coeficiente de reflexión se obtiene según se indica en 4.3

$$\overline{\overline{\Gamma}} = \left(\overline{\overline{Y}}_{in} - \overline{\overline{Y}}_0 \right)^{-1} \cdot \left(\overline{\overline{Y}}_0 - \overline{\overline{Y}}_{in} \right) \quad (5.32)$$

siendo $\overline{\overline{Y}}_0^i$ e $\overline{\overline{Y}}_0^r$ las admitancias características de las ondas incidente y reflejada, respectivamente

$$\overline{\overline{Y}}_0^i = \text{diag} \left(\frac{j J_n'(kb)}{\eta J_n(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.33)$$

$$\overline{\overline{Y}}_0^r = \text{diag} \left(\frac{j H_n^{(2)'}(kb)}{\eta H_n^{(2)}(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.34)$$

• Resultados obtenidos

Para verificar la exactitud del método circuitual se ha calculado la sección recta radar monoestática del reflector diédrico. Este parámetro se define como

$$\sigma_{2D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(2\pi\rho \frac{|\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} \right) \quad (5.35)$$

Consideremos que el campo incidente es una onda plana polarizada linealmente según \hat{z} que se propaga en la dirección ϕ_0 .

$$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (5.36)$$

donde su espectro a_n es

$$a_n = e^{jn\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right)} \quad (5.37)$$

La onda dispersada por el reflector se expresa en términos de funciones de Hankel de segunda especie como

$$E_z^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (5.38)$$

cuyo espectro b_n , se calcula a partir del coeficiente de reflexión obtenido en (5.32), mediante

$$b_n = \left[\text{diag}\left(H_n^{(2)}(kb)\right)^{-1} \cdot \bar{\Gamma} \cdot \text{diag}\left(J_n(kb)\right) \right] \cdot a_n \quad (5.39)$$

En las figuras que se incluyen a continuación se muestra la sección recta radar monoestática para distintos reflectores según el ángulo de apertura de estos. Los resultados aparecen comparados con los que proporciona una ecuación integral de campo eléctrico tradicional, en la que la incógnita es la corriente superficial sobre el conductor.

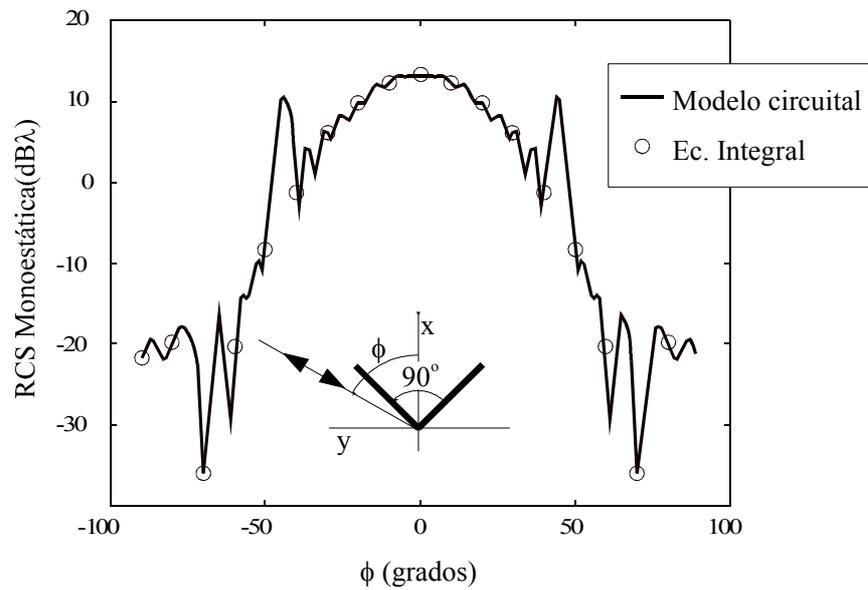


figura (5.4) La gráfica muestra la sección recta radar monoestática de un reflector diédrico de 90°. Las placas que lo forman tienen una longitud de 5.6088λ . Los resultados obtenidos se comparan con los que proporciona una ecuación integral tradicional.

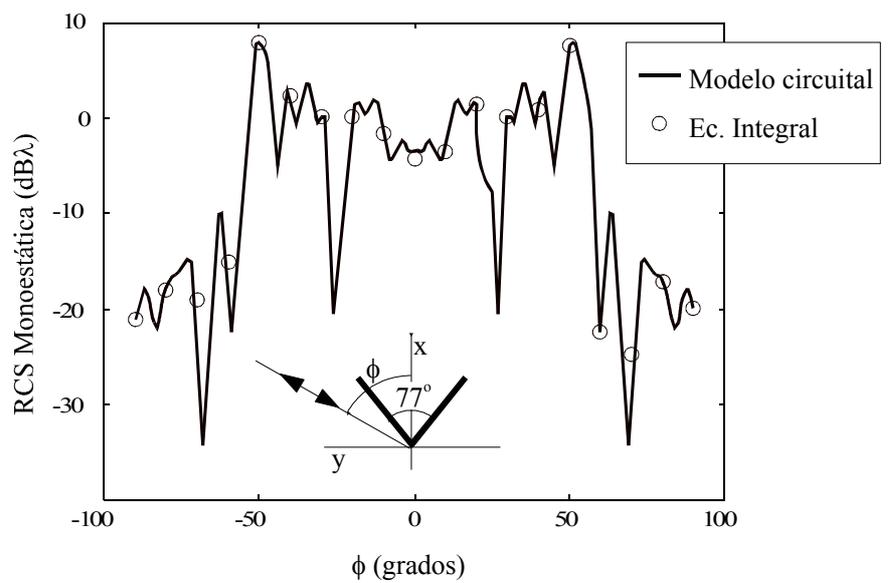


figura (5.5) La gráfica muestra ahora la sección recta radar monoestática de un reflector diédrico de 77°. Las placas que lo forman tienen una longitud de 5.6088λ .

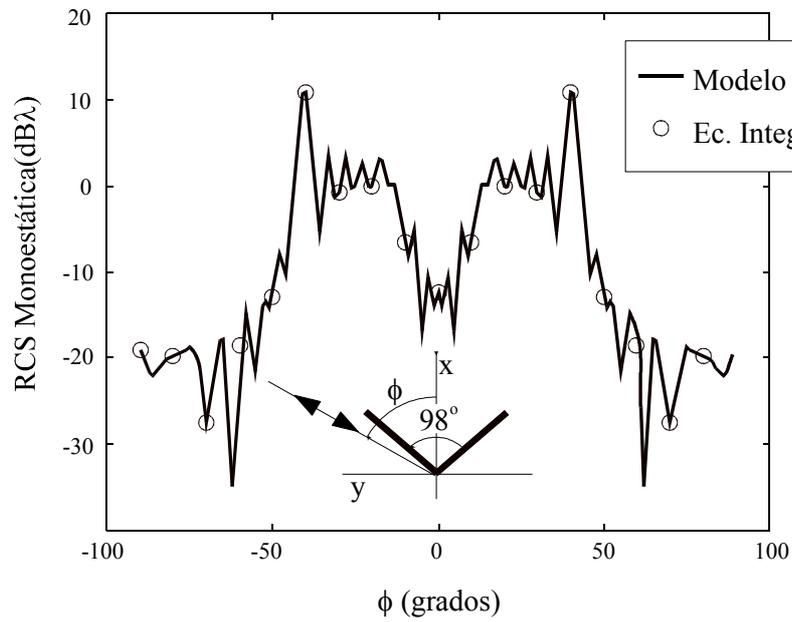


figura (5.6) La gráfica muestra la sección recta radar monoestática de un reflector diédrico de 98°. Las placas que lo forman tienen una longitud de 5.6088λ .

En las figuras siguientes se puede observar también el campo próximo en el interior del reflector para dos tamaños distintos de éste.

figura (5.7)

figura (5.8)

ESTA HOJA ESTA
INTENCIONADAMENTE EN BLANCO

figura (5.9)

figura (5.10)

ESTA HOJA ESTA
INTENCIONADAMENTE EN BLANCO

b) Incidencia TE_z • Caracterización de las regiones I y II

Volviendo sobre la figura 5.2, ahora la función de onda para el modo TE_z se expresa como

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_n(k\rho) \cos[\nu(\phi + \alpha)] \quad (5.40)$$

$$\text{con } \nu = \frac{m\pi}{2\alpha}$$

La admitancia en la superficie $\rho=a$ es ahora la relación entre las componentes H_z y E_ϕ del campo. Las corrientes magnéticas equivalentes son $M_z = E_\phi$. Operando de forma idéntica al caso TM_z

$$\overline{\overline{Y}}_I^e = \overline{\overline{W}}^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0I}^a \cdot \overline{\overline{G}}^e \quad (5.41)$$

Ahora no obstante, la admitancia característica es diferente:

$$\overline{\overline{Y}}_{0I}^a = \text{diag} \left(\frac{-j J_\nu(ka)}{\eta J'_\nu(ka)} \right)_{n=0}^N \quad (5.42)$$

y los elementos de las matrices base y peso se expresan mediante

$$g_{nl}^e = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} m_l^e(\phi) \cos[\nu(\phi + \alpha)] d\phi \quad (5.43)$$

$$w_{qn}^e = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} h_q^e(\phi) \cos[\nu(\phi + \alpha)] d\phi \quad (5.44)$$

donde ahora las familias de funciones asociadas a M_z y H_z que cumplen las condiciones de contorno en los extremos son $\left\{ f_n^e | f_n^e = \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} \phi\right), n = 0, 1, \dots \right\}$ para las soluciones pares y $\left\{ f_n^o | f_n^o = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\alpha} \phi\right), n = 1, 2, \dots \right\}$ para las soluciones impares.

- Caracterización de las región III

Los elementos de la matriz $\overline{\overline{Y}}_{III}^e$ se calculan como sus homólogos para el modo TM_z por lo que su desarrollo se puede seguir en el apéndice II.2.

El nuevo coeficiente de reflexión del reflector se obtiene también con (5.32), pero ahora las admitancias características son

$$\overline{\overline{Y}}_0^i = \text{diag} \left(\frac{-j J_n(kb)}{\eta J_n'(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.45)$$

$$\overline{\overline{Y}}_0^r = \text{diag} \left(\frac{-j H_n^{(2)}(kb)}{\eta H_n^{(2)'}(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.46)$$

- Resultados obtenidos

Considerando ahora la incidencia de una onda plana uniforme cuyo campo magnético esté polarizado linealmente según \hat{z} ,

$$H_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(k\rho) e^{jn(\phi-\phi_0)} \quad (5.47)$$

el campo magnético difractado por el reflector será

$$H_z^d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (5.48)$$

donde ahora

$$b_n = \left[\text{diag} \left(H_n^{(2)'}(kb) \right)^{-1} \cdot \bar{\Gamma} \cdot \text{diag} \left(J_n'(kb) \right) \right] \cdot a_n \quad (5.49)$$

A continuación se muestran varias gráficas con la sección recta radar monoestática del reflector diédrico para distintos ángulos de apertura de este.

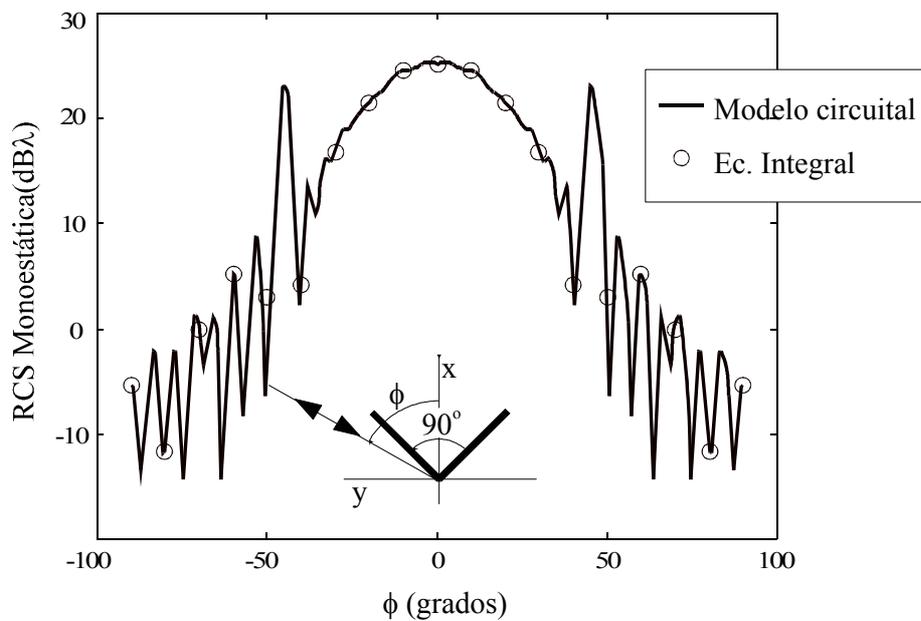


figura (5.11) La gráfica muestra ahora la sección recta radar monoestática de un reflector diédrico de 90°. Las placas que lo forman tienen una longitud de 5.6088λ . La incidencia es TE_z .

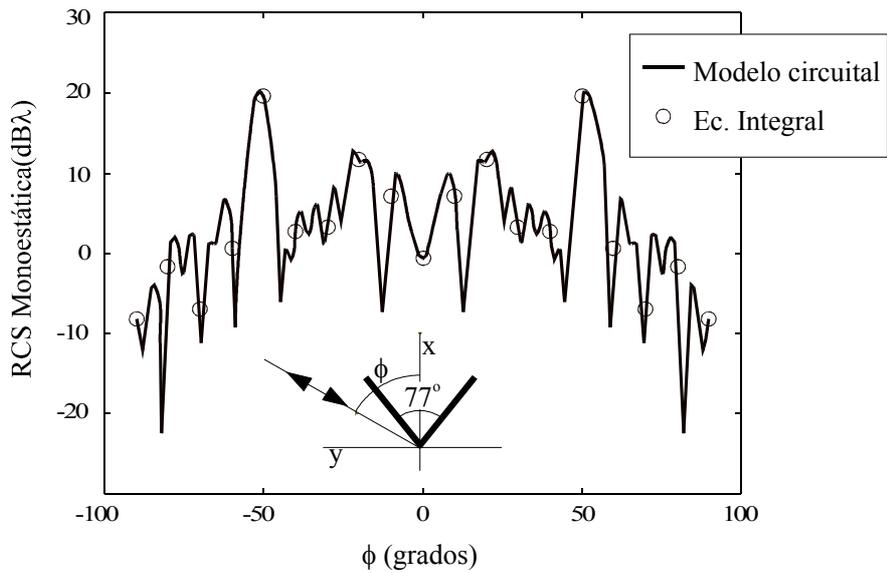


figura (5.12) La gráfica muestra la sección recta radar monoestática de un reflector diédrico de 77°. Las placas que lo forman tienen una longitud de 5.6088λ . La incidencia es TE_z .

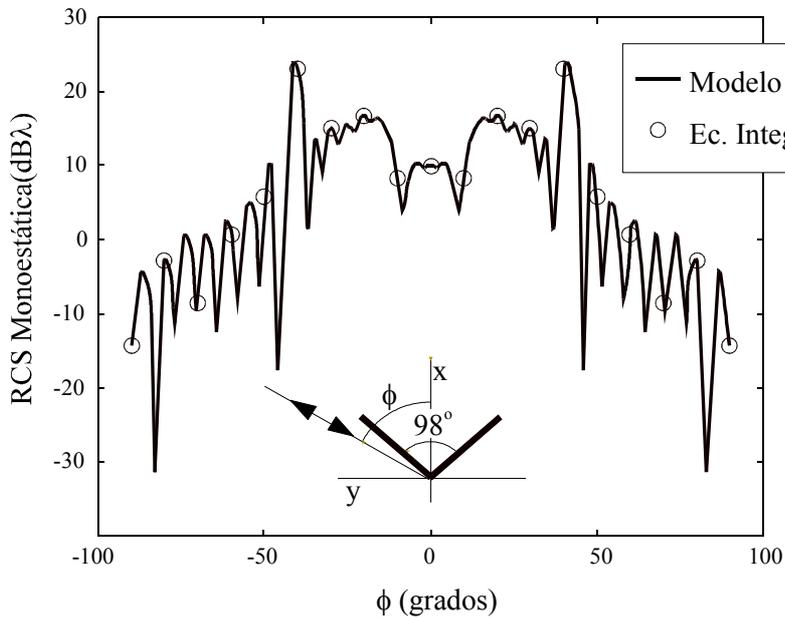


figura (5.13) La gráfica muestra la sección recta radar monoestática de un reflector diédrico de 98°. Las placas que lo forman tienen una longitud de 5.6088λ . La incidencia es TE_z .

También se puede observar la distribución de la componente H_z del campo próximo para distintos ángulos de incidencia.

figura (5.14)

figura (5.15)

ESTA HOJA ESTA
INTENCIONADAMENTE EN BLANCO

figura (5.16)

figura (5.17)

ESTA HOJA ESTA
INTENCIONADAMENTE EN BLANCO

5.1.2 El reflector de esquina como antena

El análisis del reflector diédrico no se agota con el estudio de sus características como elemento difractante. Como se comentó anteriormente, este elemento cumple una interesante función cuando se utiliza para mejorar la directividad de un dipolo aislado. El modelado circuitual bidimensional nos permite analizar las características de esta antena en lo que se refiere a su diagrama plano-H.

Ahora la configuración a considerar difiere de la vista en 5.1.1 en cuanto a la posición de la fuente. En la figura 5.18 se puede observar la situación de ésta, así como la segmentación aplicada.

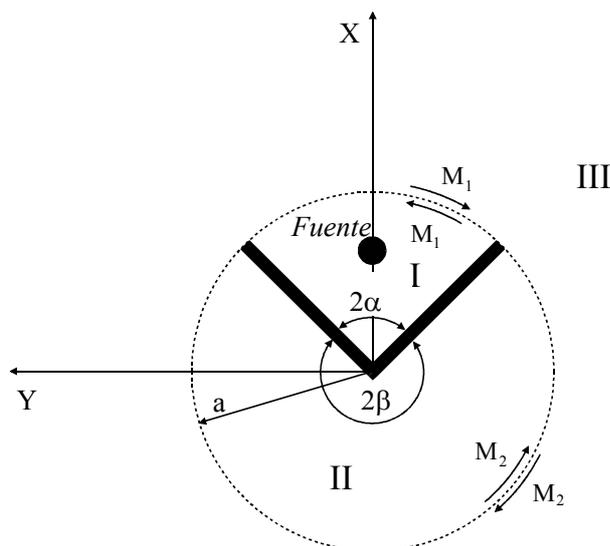


figura (5.18) Modelo bidimensional que describe el comportamiento del reflector de esquina como estructura radiante

El circuito equivalente se simplifica respecto al empleado en el apartado anterior, como se ve en la figura 5.19. Sin embargo ahora no va a resultar apropiado hablar de un coeficiente de reflexión para el reflector, ya que la fuente está en su interior.

Es necesario proceder como se indica en 4.1.1 y obtener las corrientes magnéticas incógnita \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 .

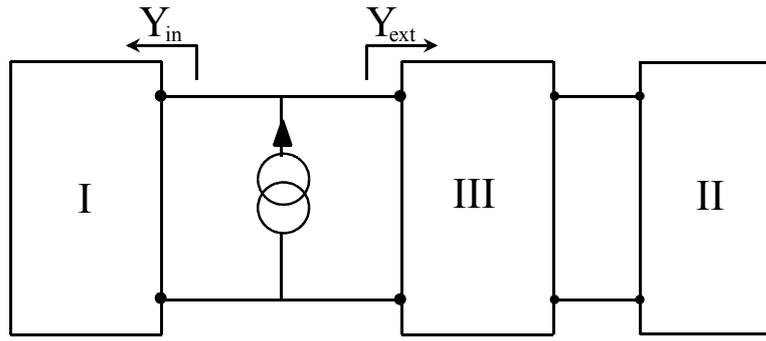


figura (5.19) El bloque I contiene la fuente. Los bloques II y III hacen de carga y se caracterizan por sendas matrices de admitancia.

Las matrices de admitancia que caracterizan las regiones I y II se calculan en ausencia de la fuente y son formalmente idénticas a las ya obtenidas en 5.1.1.

La región III al estar en contacto con I y II debe considerarse como una red de dos accesos, cuya matriz de caracterización es

$$\overline{\overline{Y}}_{III}^e = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_{11}^e & \overline{\overline{Y}}_{12}^e \\ \overline{\overline{Y}}_{21}^e & \overline{\overline{Y}}_{22}^e \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Dado que la fuente es un hilo de corriente orientado según \hat{z} , el problema vuelve a ser TM_z y la función de onda asociada al recinto III ahora es

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (5.51)$$

Como funciones expansión para \mathbf{M} y \mathbf{H} empleamos las mismas que las utilizadas en 5.1.1.a para los accesos a las regiones I y II.

En cuanto a la región III, los elementos de su matriz $\overline{\overline{Y}}_{III}^e$ son

$$\overline{\overline{Y}}_{11}^e = \overline{\overline{W}}_1^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^a \cdot \overline{\overline{G}}_1^e \quad (5.52)$$

$$w_{qn}^e = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} h_{1q}^e(\phi) e^{jn\phi} d\phi \quad (5.53)$$

$$\mathbf{g}_{nl}^e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} m_{1l}^e(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \quad (5.54)$$

$$\overline{\overline{Y}}_{0III}^a = \text{diag} \left(\frac{j H_n^{(2)'}(ka)}{\eta H_n^{(2)}(ka)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.55)$$

$$\overline{\overline{Y}}_{12}^e = \overline{\overline{W}}_1^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^a \cdot \overline{\overline{G}}_2^e \quad (5.56)$$

$$\mathbf{g}_{nl}^e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} m_{2l}^e(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \quad (5.57)$$

$$\overline{\overline{Y}}_{21}^e = \overline{\overline{W}}_2^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^a \cdot \overline{\overline{G}}_1^e = \frac{\alpha}{\beta} \overline{\overline{Y}}_{12}^e \quad (5.58)$$

$$\overline{\overline{Y}}_{22}^e = \overline{\overline{W}}_2^e \cdot \overline{\overline{Y}}_{0III}^a \cdot \overline{\overline{G}}_2^e \quad (5.59)$$

Como se justifica en 4.1.1 la corriente incógnita \mathbf{M}_1 se obtiene forzando la continuidad del campo magnético en la superficie de separación entre las regiones I y II

$$\mathbf{H}_{in}(\mathbf{M}_1) + \mathbf{H}_{in}(\mathbf{J}^i) = \mathbf{H}_{ext}(-\mathbf{M}_1) \quad (5.60)$$

Conocidas las admitancias en cada región, podemos formular matricialmente la expresión (5.60), ya que

$$\left[\langle \mathbf{h}_{1q}, \mathbf{H}_{in}(\mathbf{M}_1) \rangle \right] = \overline{\overline{Y}}_I \cdot \overline{\overline{M}}_1 \quad (5.61)$$

$$\left[\langle \mathbf{h}_{1q}, \mathbf{H}_{ext}(-\mathbf{M}_1) \rangle \right] = \overline{\overline{Y}}_{ext} \cdot \overline{\overline{M}}_1 \quad (5.62)$$

siendo

$$\bar{Y}_{ext} = \bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{12} \left(\bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{22} \right)^{-1} \cdot \bar{Y}_{21} \quad (5.63)$$

Por su parte el campo magnético creado por la fuente impresa \mathbf{J}^i sobre la superficie metálica que separa las regiones I y III se expresa como un vector

$$-\left[\langle \mathbf{h}_{1q}, \mathbf{H}_{in}(\mathbf{J}^i) \rangle \right] = \bar{I} \quad (5.64)$$

Para la obtención del vector \bar{I} empleamos la función de Green bidimensional de una fuente axial en una cavidad radial

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{\pi I}{j2\alpha} \sum_n \begin{cases} J_\nu(k\rho) \left[H_\nu^{(2)}(k\rho) + R_\nu^a J_\nu(k\rho) \right] \text{sen}[\nu(\phi'+\alpha)] \text{sen}[\nu(\phi+\alpha)] & \rho \geq \rho' \\ J_\nu(k\rho) \left[H_\nu^{(2)}(k\rho') + R_\nu^a J_\nu(k\rho') \right] \text{sen}[\nu(\phi+\alpha)] \text{sen}[\nu(\phi'+\alpha)] & \rho \leq \rho' \end{cases} \quad (5.65)$$

$$\text{donde } \nu = \frac{n\pi}{2\alpha}$$

y

$$R_\nu^a = -\frac{H_\nu^{(2)}(ka)}{J_\nu(ka)} \quad (5.66)$$

El campo magnético producido por la fuente \mathbf{J}^i en la superficie $\rho=a$ es

$$H_\phi^J = -\frac{\partial G}{\partial \rho} \quad (5.67)$$

introduciendo (5.65) en (5.67)

$$H_\phi^J(\rho = a) = -\frac{\pi kI}{j2\alpha} \sum_n J_\nu(k\rho') \left[H_\nu^{(2)'}(ka) + R_\nu^a J_\nu'(ka) \right] \text{sen}[\nu(\phi'+\alpha)] \text{sen}[\nu(\phi+\alpha)] \quad (5.68)$$

El Wronskiano (apéndice I) nos permite simplificar (5.68) resultando

$$H_\phi^J(\rho = a) = \frac{I}{\alpha a} \sum_\nu \frac{J_\nu(k\rho')}{J_\nu(ka)} \cdot \text{sen}[\nu(\phi' + \alpha)] \cdot \text{sen}[\nu(\phi + \alpha)] \quad (5.69)$$

Finalmente, el vector \bar{I}^e se calcula como resultado del producto interno entre $H_\phi^J(\phi)$ y $\mathbf{h}_{1q}^e(\phi)$, siendo estas últimas las funciones peso empleadas al caracterizar la región I

$$\bar{I}^e = -\left[\left\langle \mathbf{h}_q^e, H_\phi^J \right\rangle \right]_{Q \times 1} \quad (5.70)$$

Podemos formular la relación (5.60) como dos sistemas de ecuaciones

$$\left[\bar{Y}_{in}^e - \bar{Y}_{ext}^e \right] \cdot \bar{M}_1^e = \bar{I}^e \quad (5.71)$$

considerando por separado los problemas par e impar. Finalmente, la corriente magnética incógnita \bar{M}_1^e se obtiene como

$$\bar{M}_1^e = \left[\bar{Y}_{in}^e - \bar{Y}_{ext}^e \right]^{-1} \cdot \bar{I}^e \quad (5.72)$$

y conocida la corriente \mathbf{M}_1 , la corriente \mathbf{M}_2 se obtiene de forma inmediata mediante

$$\bar{M}_2^e = \left[\left(\bar{Y}_{II}^e - \bar{Y}_{22}^e \right)^{-1} \cdot \bar{Y}_{21}^e \right] \cdot \bar{M}_1^e \quad (5.73)$$

Ahora, para calcular el campo radiado por la antena debemos obtener las contribuciones de \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 al espectro de la función de onda (5.51). Resulta inmediato concluir que dicho espectro es

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{H_n^{(2)}(ka)} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} M_1(\phi) e^{-jn\phi} d\phi + e^{jn\phi} \int_{-\beta}^{\beta} M_2(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \right] \quad (5.74)$$

y empleando la expresión asintótica de $H_n^{(2)}(k\rho)$ cuando $\rho \rightarrow \infty$

$$E_{rad}(\phi) \propto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J^{-n} e^{jn\phi} \quad (5.75)$$

En la figura 5.20 se observan los diagramas de radiación de distintos reflectores en función de su tamaño. También se puede ver la influencia de la posición de la fuente en la figura 5.21. En la figura 5.22 se muestra el efecto que tiene sobre el diagrama el rellenado del reflector con material dieléctrico.

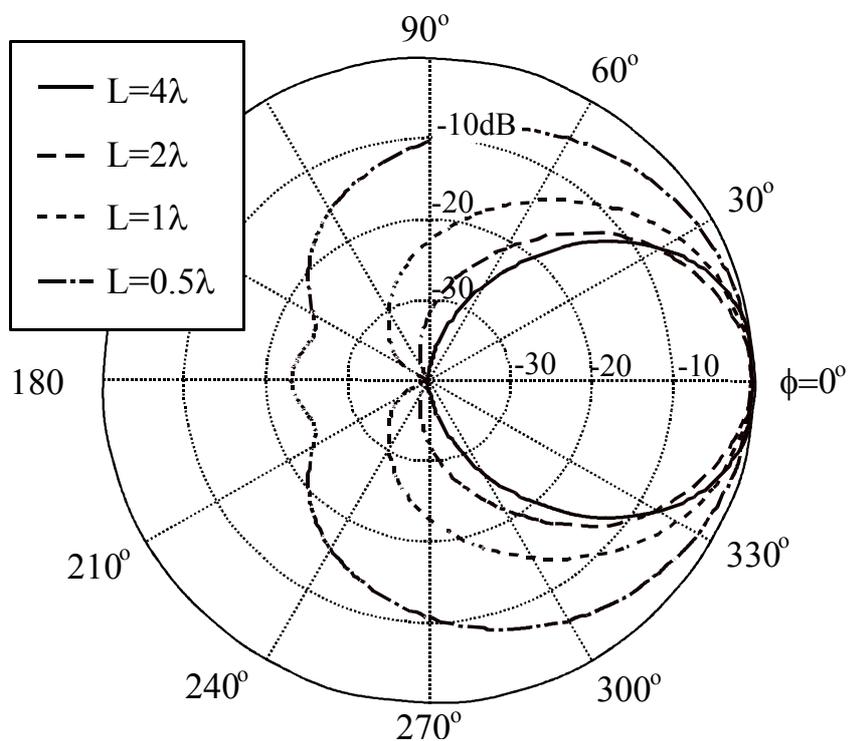


figura (5.20) En la gráfica se muestra el diagrama de radiación de un reflector de esquina. La fuente está situada en la bisectriz del diedro y a una distancia $d=\lambda/2$ del vértice. Se observa que al aumentar la dimensión L de los planos del diedro la antena se hace más directiva.

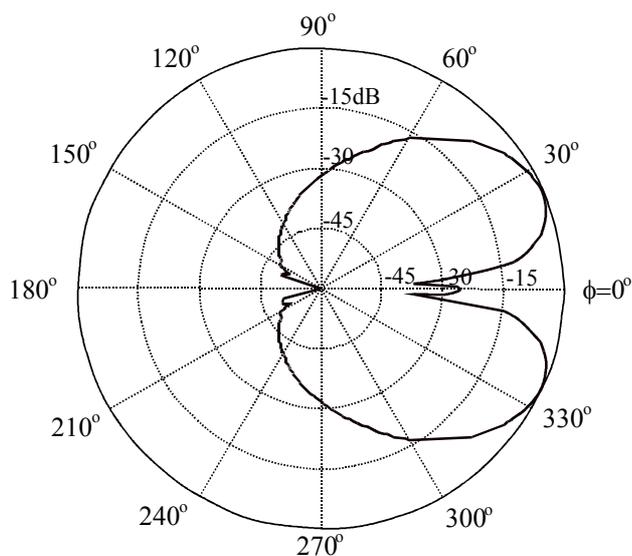


figura (5.21) El diagrama corresponde a un reflector de esquina de 90° cuyo alimentador esta sobre la bisectriz y a una distancia $d=\lambda$ del vértice. Los paneles tienen una longitud $L=4\lambda$.

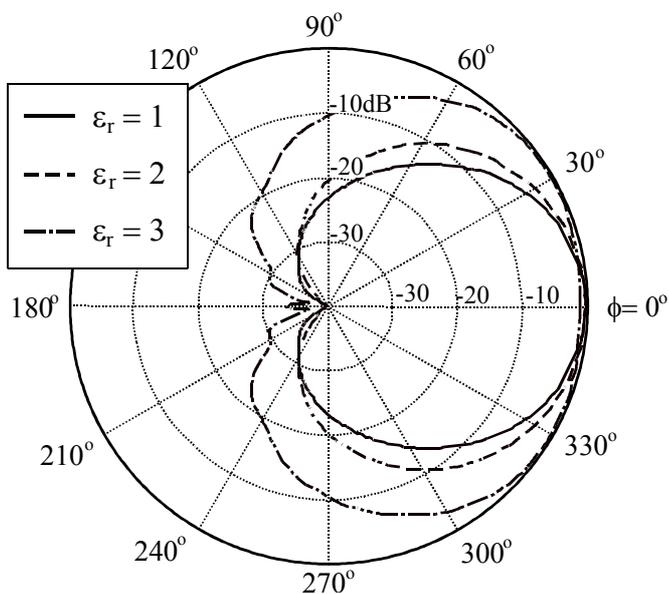


figura (5.22) La gráfica muestra la influencia de ϵ_r en el diagrama de radiación de un reflector de esquina. El sector circular ocupado por la fuente es rellenado por distintos materiales dieléctricos. La fuente esta a $d=\lambda/2$ del vértice y los paneles son de $L=\lambda$.

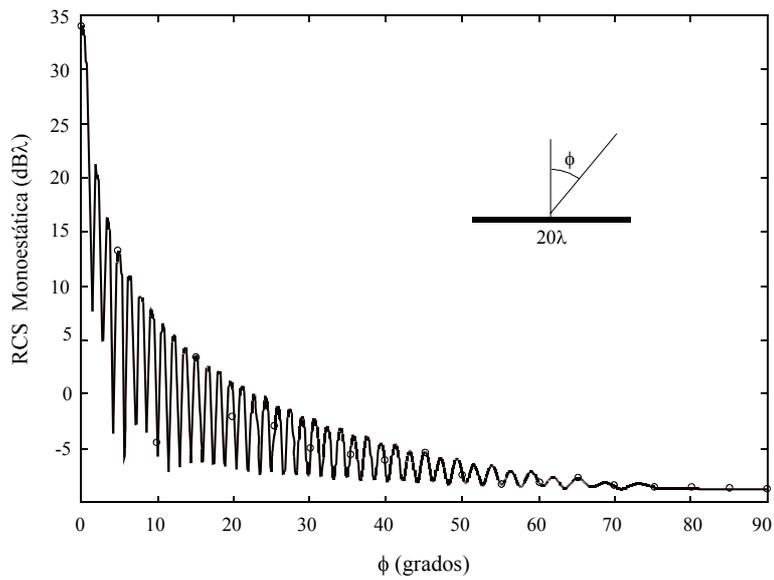


figura (5.24) La gráfica muestra la sección recta radar monoestática de una placa metálica de 20λ . La incidencia es TM_z .

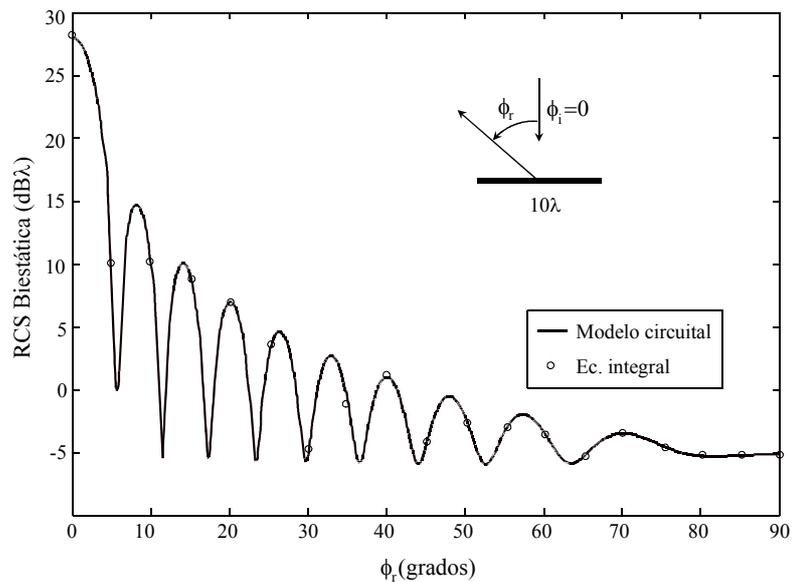


figura (5.25) La figura muestra la sección recta biestática de una placa conductora de 10λ . La incidencia es TM_z .

En las figuras 5.26 y 5.27 se considera la incidencia TE_z . En todos los casos la concordancia entre los resultados generados y las referencias empleadas es excelente.

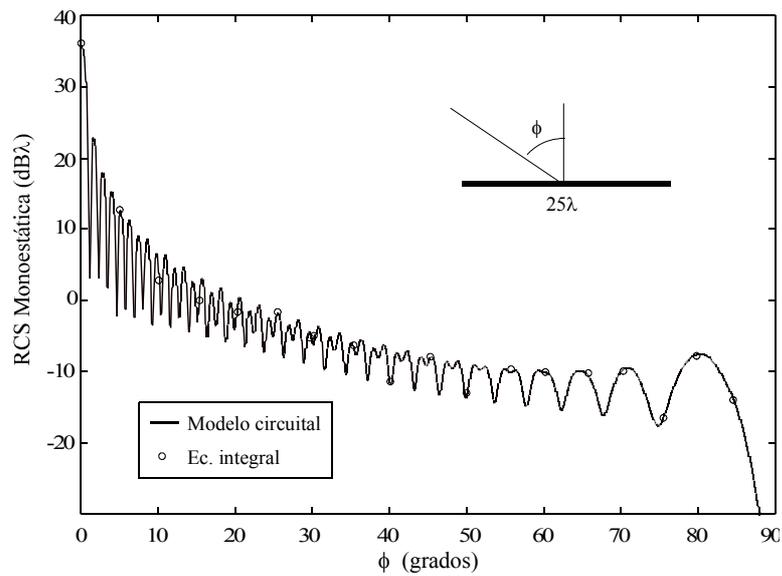


figura (5.26) La gráfica muestra la sección radar monoestática de una placa conductora de 25λ , para incidencia TE_z .

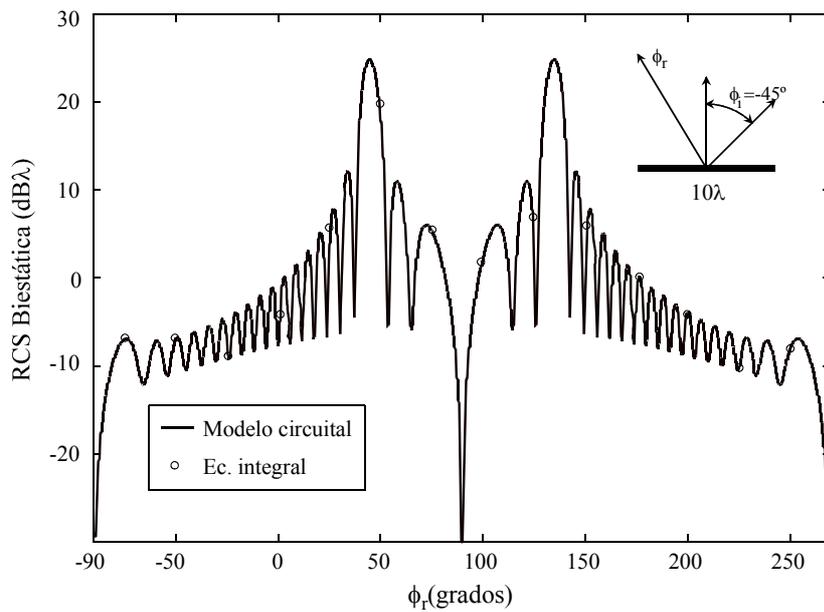


figura (5.27) Se muestra la sección recta radar biestática de una placa conductora de 10λ cuando la onda incidente forma 45° con la vertical. El problema es TE_z .

En las figuras 5.28 y 5.29 se muestran dos ejemplos del comportamiento del campo en las proximidades de la placa metálica

figura (5.28)

figura (5.29)

ESTA HOJA ESTA
INTENCIONADAMENTE EN BLANCO

5.1.4 Discusión de los resultados

Antes de proceder al estudio de nuevas configuraciones, conviene detenerse a analizar algunas particularidades surgidas en la aplicación del modelo circuitual.

En primer lugar salta a la vista que existe una gran coincidencia entre los resultados obtenidos mediante segmentación y los proporcionados por el método integral usado como referencia. Más concretamente hay que decir que la solución alcanzada mediante modelado circuitual converge a la obtenida por el método de los momentos en los casos considerados. El modelo circuitual sitúa la incógnita de la ecuación integral (M_1) en una circunferencia de radio $\rho=b$, por lo que la exactitud de la solución va a depender del número de armónicos circunferenciales escogidos en la expansión de M_1 , según la relación

$$M_1(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n B_n(kb) e^{jn\phi} \quad (5.76)$$

donde $B_n(kb)$ es una combinación de funciones de Bessel de orden n particularizada en $\rho=b$. En principio los límites de la serie en (5.76) parecen indicar una difícil convergencia a la solución, sin embargo el comportamiento de las funciones de Bessel nos va a permitir truncar la serie para un cierto valor de N , con la seguridad de haber alcanzado la convergencia en la suma de ésta. Es conocido que, dada una familia de funciones de Bessel $B_n(x)$, aquellas cuyo orden n supere al valor del argumento, $n > x$, tienen una amplitud notablemente inferior al resto, hasta el punto de que algunos autores [57,58] sugieren truncar series como la (5.76) en $N=kb$, ya que la contribución de los términos $n > N$ puede considerarse despreciable. La práctica nos dice sin embargo que con ese valor para N no se puede asegurar aún la convergencia. Para afirmar que la serie converge es necesario que $N=kb+10$. Algo similar ocurre cuando consideramos la expansión de la corriente magnética en una guía radial para $\rho=cte$. Ahora ésta se expresa como

$$M_2(\phi) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n B_n(kb) \cdot \begin{cases} \text{sen}[\nu(\phi + \alpha)] \\ \text{cos}[\nu(\phi + \alpha)] \end{cases}, \quad \nu = \frac{n\pi}{2\alpha} \quad (5.77)$$

y la convergencia de la serie se obtiene para $N = \frac{2\alpha}{\pi} [kb + 10]$, siendo 2α el ángulo que define la guía radial. Se observa que a medida que se estrecha la guía, el número de modos necesario se reduce en proporción precisamente al ángulo que la define.

En consecuencia, el número de términos de la serie que define $M_1(\phi)$ en (5.76) es $2N+1$. Éste es, por otro lado, el número de incógnitas a calcular en la solución del problema. Si ésta se plantea matricialmente, debemos invertir una matriz de $(2N+1) \times (2N+1)$. Sin embargo, en casos como los estudiados, en los que las simetrías nos permiten afirmar que no hay acoplamiento entre las soluciones par e impar, sólo habrá que plantearse la inversión de dos matrices de $(N+1) \times (N+1)$ y $N \times N$ asociadas a los problemas par e impar respectivamente, con el consiguiente ahorro de recursos.

Una vez acotado el número de incógnitas podemos contrastar el coste computacional de este método con el que requieren las ecuaciones integrales de campo eléctrico o magnético tradicionales. El número de incógnitas que plantea la solución mediante estos métodos depende de la resolución deseada. Cuando se emplean funciones base de dominio discreto, el muestreo habitual de la corriente incógnita es de 0.1λ a 0.2λ [59]. Para un objeto bidimensional cuyo perímetro eléctrico sea L_λ , el número de incógnitas a resolver sería de $10L_\lambda$. Si se tratase de una placa metálica, el modelado circuital, por su parte, necesitaría plantear $N = \pi L_\lambda + 10$ incógnitas y por lo tanto las ventajas computacionales no empezarían a manifestarse hasta que la placa fuera eléctricamente grande. Si tenemos en cuenta además, que una juiciosa combinación de funciones de dominio discreto y de dominio completo reduce apreciablemente el número de incógnitas de las ecuaciones integrales convencionales [7], el ahorro de recursos del modelado circuital puede resultar insignificante. Ahora bien, a medida que el perímetro del objeto contenido en la circunferencia de radio $\rho = b$ aumenta, el modelado circuital mantiene el número de incógnitas, mientras que el método de los momentos lo incrementa. Así por ejemplo, un cilindro metálico de sección cuadrada de lado $\sqrt{2}L_\lambda$ requiere $N \cong 56L_\lambda$ incógnitas. Si el cilindro es eléctricamente grande, entonces el modelado circuital sí reduce el coste numérico. Además, se eluden las singularidades en las esquinas, que condicionan precisamente la elección de las funciones de expansión de las corrientes de conducción sobre el objeto. Conviene añadir también que el cálculo de la RCS monoestática mediante una ecuación integral convencional implica la evaluación de la misma para cada ángulo de incidencia, ya que las corrientes inducidas son

diferentes cada vez. Sin embargo, el modelado circuitual caracteriza el objeto independizándolo de la fuente que lo ilumina.

Otra cuestión interesante es la que tiene que ver con las singularidades en los extremos del reflector diédrico o de la placa. Es sabido que bajo una iluminación del tipo TM_z la corriente inducida en las discontinuidades o esquinas de un objeto es singular. Esta singularidad en la corriente tiene su reflejo también en el campo magnético tangencial en cuanto que lleva aparejada un salto o discontinuidad en las funciones H_ρ y H_ϕ , precisamente en los puntos donde la corriente es singular. Sin embargo, tal discontinuidad se manifiesta sólo en la variación radial de estas funciones, como podemos ver en la figura 5.30a y 5.30b, mientras que la componente H_ϕ es continua en ϕ . En la figura 5.30a se observa que la componente H_ϕ del campo magnético se concentra en el extremo de la placa y constituye la energía almacenada asociada a la discontinuidad. La componente H_ρ se distribuye a lo largo de la placa como se puede ver en la figura 5.30b, y está relacionada con la corriente en su superficie, ya que $\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}_t$. Si retomamos el enfoque circuitual que hemos venido asociando a los problemas electromagnéticos, podemos interpretar que las discontinuidades que aparecen en la transición entre dos regiones, son responsables del desacoplo entre las soluciones modales de cada una de ellas. Tal desacoplo se manifiesta no sólo en forma de ondas reflejadas, que ya se consideran en la propia solución modal, sino también por la acumulación de energía en forma de ondas evanescentes (o modos de orden superior) en las proximidades de la discontinuidad.

figura (5.30a)

figura (5.30b)

ESTA HOJA ESTA
INTENCIONADAMENTE EN BLANCO

5.2 CILINDROS CONDUCTORES DE SECCIÓN POLIGONAL

En los ejemplos analizados hasta el momento, la segmentación aplicada ha permitido que las distintas regiones involucradas tuvieran una geometría separable; es decir, estuvieran limitadas por contornos donde $\rho=cte$ o $\phi=cte$. Esto ha facilitado el empleo de la función de onda y la caracterización de los recintos. Esta situación, si bien es frecuente en problemas cerrados no lo es en absoluto en problemas abiertos. Para caracterizar regiones homogéneas cuyos contornos son arbitrarios debemos recurrir a métodos integrales más generales como los descritos en el capítulo 3.

Como ya se comentó, el modelado circuitual basado en el M.E.C. se apoya en la función de Green de espacio libre y resuelve la ecuación integral empleando el método de los momentos. La discretización del problema con funciones discretas nos conduce a grandes sistemas de ecuaciones con matrices llenas, por lo que urge buscar alternativas. Una de ellas la constituye la ecuación integral de contorno basada en la función de onda y descrita en 3.4. A modo de ejemplo abordaremos el caso de los cilindros conductores de sección poligonal para ilustrar la posibilidad de emplear ciertas soluciones de la ecuación de onda a pesar de que la presencia de singularidades de corriente pueda disuadirnos de su aplicabilidad.

a) Incidencia TM_z

Consideremos que la estructura conductora de la figura 5.31 está iluminada por una onda plana eléctricamente polarizada según \hat{z} .

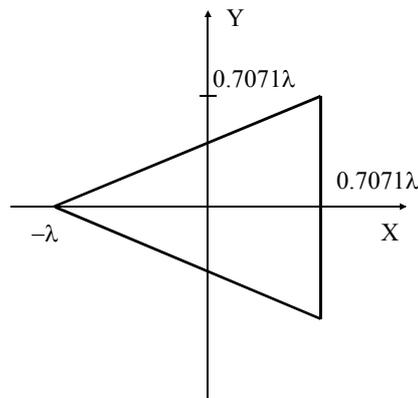


figura (5.31) Cilindro conductor de sección triangular

Para segmentar el problema, trazamos una circunferencia de radio $\rho=\lambda$ que pasa por los vértices del triángulo. Además imponemos otro contorno circular más exterior de radio $b>\lambda$. El problema segmentado queda como muestra la figura 5.32a y su circuito equivalente es el de la figura 5.32b

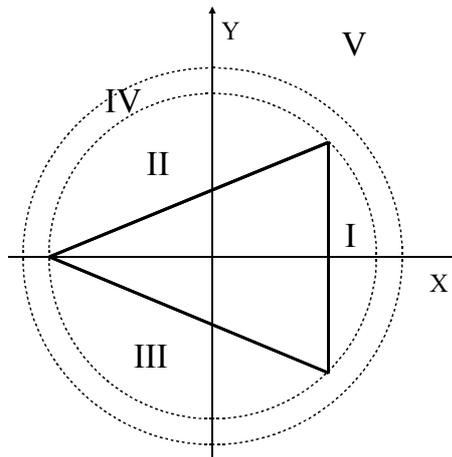


figura (5.32a) Segmentación del problema para su análisis circuital.

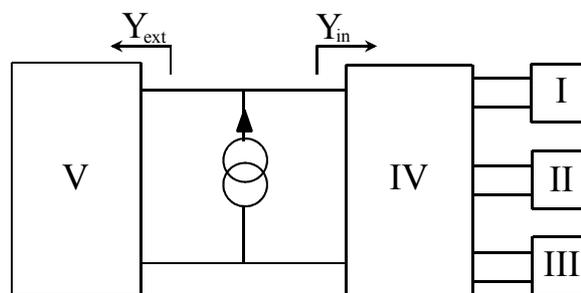


figura (5.32b) Representación esquemática de la descomposición efectuada sobre el problema de la figura 5.32a.

El circuito equivalente es muy similar a los estudiados en 5.1 ya que la región multiacceso es de nuevo una corona circular y su caracterización es análoga a la ya realizada. Por el contrario las regiones de carga I, II y III no pueden analizarse con los criterios empleados en 5.1 ya que ahora no son recintos canónicos.

Tomemos por ejemplo la región I y analicémosla por separado. En la figura 5.33 se identifica esta región como la porción de un círculo de radio a y centrado en O ,

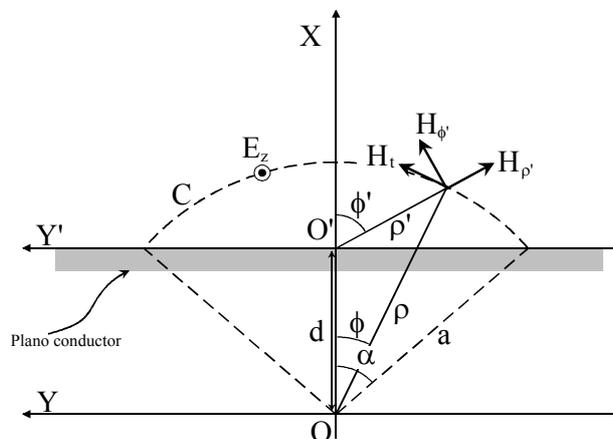


figura (5.33) Detalle de la geometría asociada a cada una de las caras del triángulo.

intersecado por un plano conductor perfecto a lo largo del eje Y' . En el espacio que se sitúa por encima del plano conductor, la función de onda referida al origen O' es de la forma

$$\psi = \sum_{n=1}^N a_n J_n(k\rho') \operatorname{sen} \left[n \left(\phi' + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (5.78)$$

Atendiendo al principio de equivalencia la región limitada por el plano conductor infinito y el arco de circunferencia C debe tener la misma matriz de admitancia que la región I en la figura 5.32a. La función de onda (5.78) nos va a permitir obtener una relación entre E y H en C y en consecuencia su admitancia generalizada.

A lo largo del contorno circular C , la función de onda (5.78) depende tanto de ρ' como de ϕ' , por lo que la relación entre las componentes tangenciales del campo E_z y H_ϕ no se obtiene de una forma tan inmediata como en el problema del reflector diédrico. Además H_ϕ es una combinación de las componentes $H_{\rho'}$ y $H_{\phi'}$. En 3.4, se estableció que

$$\oint_{C+\text{plano conductor}} (j\omega \mu \psi \mathbf{J}_s + \mathbf{M}_s \times \nabla' \psi) \hat{\mathbf{z}} dC = 0 \quad (5.79)$$

Dado que sobre el plano conductor tanto ψ como \mathbf{M}_s son nulas, podemos escribir

$$\int_C \left[j\omega \mu \psi J_z + (M_\phi \hat{\phi} \times \nabla' \psi) \hat{z} \right] dC = 0 \quad (5.80)$$

donde la prima (') hace referencia al sistema coordenado centrado en O' .

Teniendo en cuenta que

$$\nabla' \psi = \hat{\rho}' \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} + \hat{\phi}' \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \psi}{\partial \phi'} \quad (5.81)$$

y expresando los vectores unitarios $\hat{\rho}'$ y $\hat{\phi}'$ en función de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$, podemos particularizar (5.80) como

$$j\omega \mu \int_{-\alpha}^{\alpha} J_z(\phi) \psi(\phi) d\phi = \int_{-\alpha}^{\alpha} M_\phi(\phi) \cdot G(\phi) d\phi \quad (5.82)$$

donde

$$G(\phi) = \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \cos(\phi - \phi') + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \psi}{\partial \phi'} \text{sen}(\phi - \phi') \quad (5.83)$$

aparentemente G es función tanto de ϕ como de ϕ' aunque en realidad

$$\rho' = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \phi} \quad (5.84)$$

y

$$\phi' = \text{sen}^{-1} \left(\frac{a \text{sen} \phi}{\rho'} \right) \quad (5.85)$$

son a su vez funciones de ϕ .

Para convertir la ecuación integral (5.82) en una ecuación algebraica, en primer lugar expandimos J_z y M_ϕ en un conjunto de funciones $\mathbf{j}_q^e \in \mathbf{J}^e$ y $\mathbf{m}_l^e \in \mathbf{M}^e$ siendo

$$\mathbf{J}^e = \left\{ \mathbf{j}_q^e \mid \mathbf{j}_q^e = \cos\left(\frac{q\pi}{\alpha} \phi\right), q = 0, 1, \dots, Q_e; \mathbf{j}_q^o = \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{2\alpha} \phi\right), q = 1, 2, \dots, Q_o \right\} \quad (5.86)$$

$$\mathbf{M}^e = \left\{ \mathbf{m}_l^e \mid \mathbf{m}_l^e = \cos\left(\frac{(2q-1)\pi}{2\alpha} \phi\right), q = 0, 1, \dots, Q_e; \mathbf{m}_l^o = \sin\left(\frac{q\pi}{\alpha} \phi\right), q = 1, 2, \dots, Q_o \right\} \quad (5.87)$$

con lo que

$$\mathbf{J}_z^e = \sum_{q=0}^{Q_e} \mathbf{J}_q^e \mathbf{j}_q^e \quad (5.88)$$

$$\mathbf{M}_\phi^e = \sum_{l=0}^{L} \mathbf{M}_l^e \mathbf{m}_l^e \quad (5.89)$$

Dado que la igualdad (5.82) debe verificarse para cada una de las N funciones de onda en (5.78), podemos plantear N ecuaciones que en forma matricial se expresan como

$$\overline{\overline{\mathbf{U}}}^e \cdot \overline{\overline{\mathbf{J}}}^e = \overline{\overline{\mathbf{H}}}^e \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}}^e \quad (5.90)$$

donde la simetría del problema respecto a x permite considerar una vez más los casos par e impar por separado.

Los elementos de la matriz $\overline{\overline{\mathbf{U}}}^e$ son

$$u_{nq}^e = j\omega \mu \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_n^e \mathbf{j}_q^e d\psi \quad (5.91)$$

y los de la matriz $\overline{\overline{H}}^e$

$$h_{nl}^e = \int_{-\alpha}^{\alpha} G_n^e \cdot m_l^e d\phi \quad (5.92)$$

si escogemos $N_e=Q_e$ y $N_o=Q_o$ podemos invertir la matriz $\overline{\overline{U}}^e$ para obtener la admitancia buscada

$$\overline{\overline{Y}}_l^e = \overline{\overline{U}}^e{}^{-1} \cdot \overline{\overline{H}}^e \quad (5.93)$$

Las matrices correspondientes a las regiones II y III de la figura 5.32a se generan de forma idéntica, adaptando únicamente el dominio de integración en ϕ , al nuevo contorno.

Conocidas las admitancias de carga $\overline{\overline{Y}}_I^e$, $\overline{\overline{Y}}_II^e$ e $\overline{\overline{Y}}_III^e$, así como la matriz de acoplamiento $\overline{\overline{Y}}_{IV}^e$, sólo resta obtener la admitancia de entrada $\overline{\overline{Y}}_{in}^e$. Ahora sin embargo la falta de simetrías en la disposición de los elementos nos obliga a considerar el acoplamiento entre soluciones pares e impares entre si. Es necesario plantear ambos problemas conjuntamente.

La admitancia de carga en la región *i-ésima* es ahora

$$\begin{bmatrix} J_i^e \\ J_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_i^e & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{Y}}_i^o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_i^e \\ M_i^o \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

siendo $\overline{\overline{0}}$ la matriz nula.

En cuanto a la matriz de acoplamiento múltiples que describe la región IV, las admitancias mutuas entre los accesos *i* y *j* constan a su vez de cuatro submatrices

$$\overline{\overline{Y}}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_{ij}^{ee} & \overline{\overline{Y}}_{ij}^{eo} \\ \overline{\overline{Y}}_{ij}^{oe} & \overline{\overline{Y}}_{ij}^{oo} \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

No obstante conviene hacer notar que en la matriz $\overline{\overline{Y}}_{IV}$, en las admitancias que ocupan la diagonal principal, $\overline{\overline{Y}}_{ii}$, las autoadmitancias cruzadas $\overline{\overline{Y}}_{ii}^{eo}$ e $\overline{\overline{Y}}_{ii}^{oe}$ también son nulas dadas las simetrías que se presentan.

Las nuevas admitancias cruzadas $\overline{\overline{Y}}_{ij}^{eo}$ e $\overline{\overline{Y}}_{ij}^{oe}$, responsables del acoplamiento par-impar, se calculan siguiendo el mismo procedimiento sistemático descrito para el reflector diédrico en 5.1.

La observación de la admitancia de entrada resultante, $\overline{\overline{Y}}_{in}$, nos muestra que los elementos cruzados $\overline{\overline{Y}}_{in}^{eo}$ e $\overline{\overline{Y}}_{in}^{oe}$ son nulos. Recordemos que las funciones de expansión para el acceso exterior son $\cos n\phi$ y $\sin n\phi$, que están desacopladas entre si en el dominio $[0, 2\pi]$.

$$\overline{\overline{Y}}_{in} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}_{in}^{ee} & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{Y}}_{in}^{oo} \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

- Resultados obtenidos

En la figura 5.34 se puede ver la sección recta radar biestática del cilindro de sección triangular de la figura 5.31. Este mismo elemento ha sido estudiado en [38,60] por el método del unimomento. Los resultados se avalan entre sí y coinciden también con los obtenidos aplicando el método de los elementos de contorno en la caracterización de las regiones I, II y III.

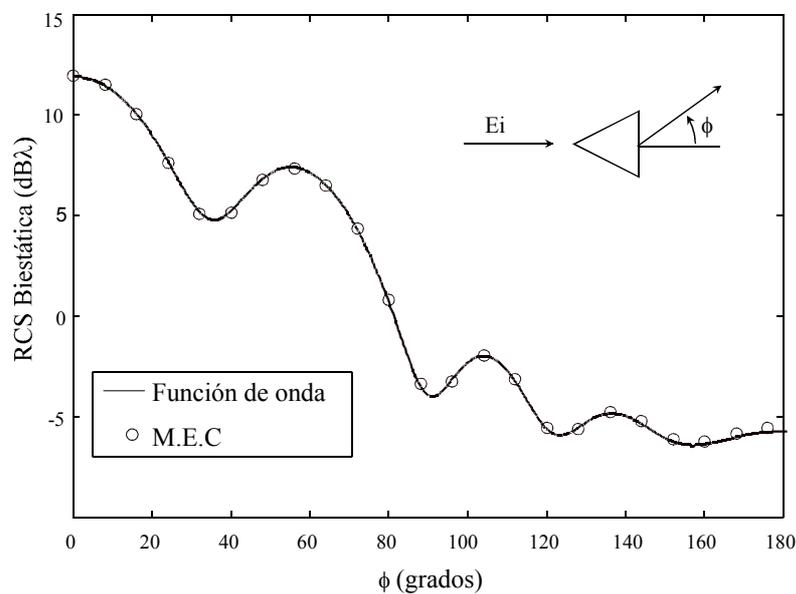


figura (5.34) Sección recta radar biestática de un triángulo isósceles. La incidencia es TM_z y la dirección de llegada se indica en el dibujo interior.

En las figuras 5.35 y 5.36 se observa la RCS biestática de un cuadrado, para dos incidencias y tamaños distintos.

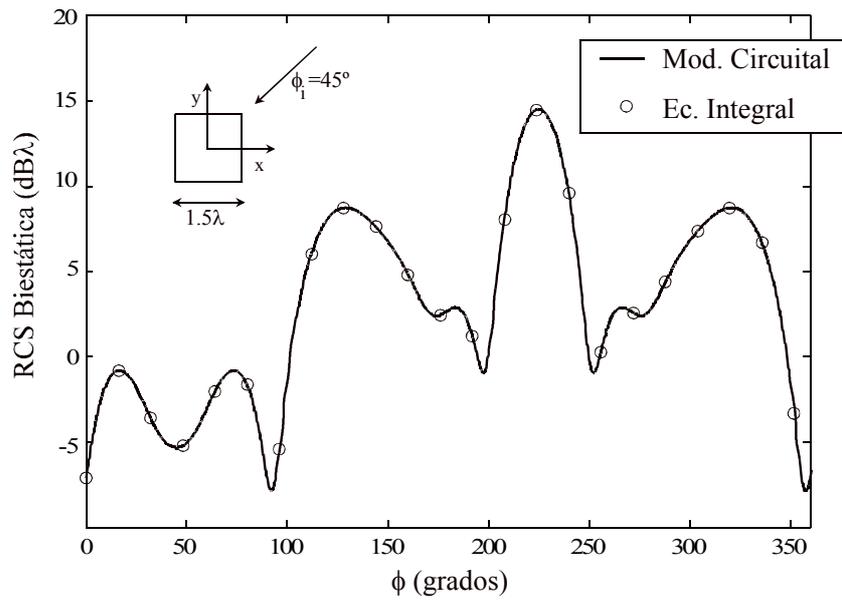


figura (5.35) Sección recta radar biestática de un cilindro conductor de sección cuadrada de lado 1.5λ . La incidencia es por un vértice y su naturaleza es TM_z .

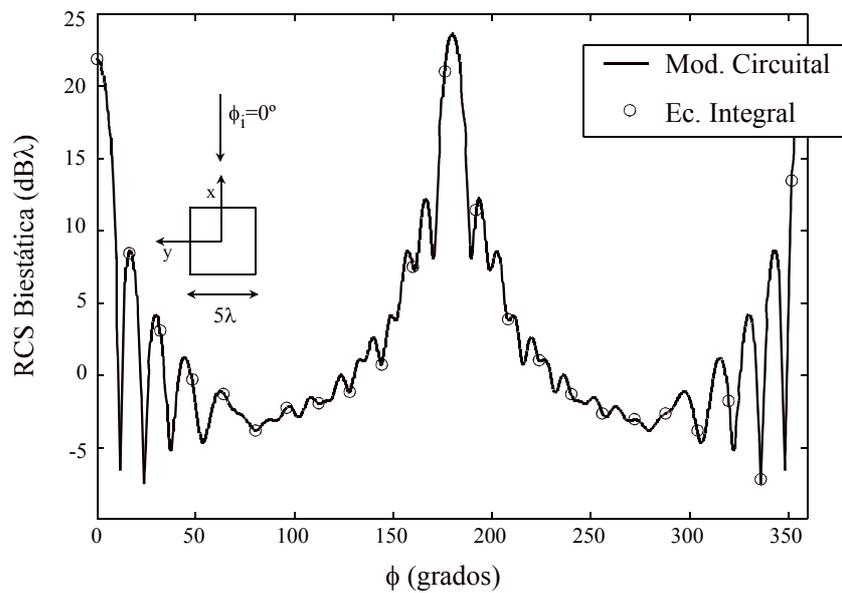


figura (5.36) Gráfica de la sección recta radar biestática de un cuadrado conductor de sección cuadrada y de lado 5λ . La incidencia es frontal sobre una de las caras y de tipo TM_z .

figura (5.37)

figura (5.38)

ESTA PÁGINA ESTA EN BLANCO
INTENCIONADAMENTE

figura (5.39)

figura (5.40)

ESTA PÁGINA ESTA EN BLANCO
INTENCIONADAMENTE

b) Incidencia TE_z . Método de los modos proyectados

Para analizar la incidencia TE_z podemos mantener la segmentación establecida en el apartado anterior. Los acoplamientos múltiples se analizan como en 5.1.1.b y las regiones de carga I, II y III deben caracterizarse ahora por la función de onda

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(k\rho') \cos \left[n \left(\phi' + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (5.97)$$

que es la solución general para la ecuación de onda en el caso TE_z , en presencia de un plano conductor eléctrico perfecto.

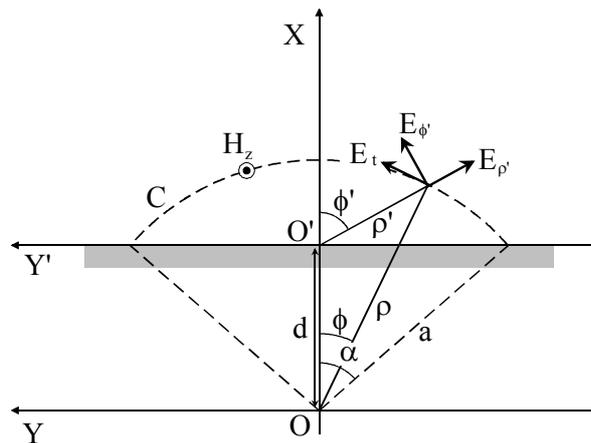


figura (5.41) Detalle de la geometría asociada a las caras de un cilindro de sección poligonal.

La relación que se aplica ahora al contorno de la figura 5.41 es la dual de (5.79):

$$\oint_{C+\text{plano conductor}} (j\omega \epsilon \psi \mathbf{M}_s + \mathbf{J}_s \times \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{z}} dC = 0 \quad (5.98)$$

Alternativamente a lo que ocurría en (5.79), ahora es $\nabla \psi$ la que se anula en el conductor junto con \mathbf{M}_s . Podemos escribir entonces

$$\oint_C (j\omega \varepsilon \psi \mathbf{M}_s + \mathbf{J}_s \times \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{z}} dC = 0 \quad (5.99)$$

El desarrollo de esta relación corre paralelo al descrito en el apartado anterior, por lo que no lo repetiremos. Conviene, no obstante, matizar que las funciones expansión para \mathbf{J}_s y \mathbf{M}_s son ahora diferentes. Concretamente la función vectorial \mathbf{M}_s en los extremos del contorno C no es tangencial al plano conductor y por lo tanto no se anula en él. Podemos entonces utilizar para \mathbf{M}_s el mismo conjunto de funciones que para \mathbf{J}_s y que fue definido en (5.86).

Pretendemos introducir ahora, sin embargo, un nuevo procedimiento de caracterización sumamente sencillo basado también en la función de onda definida en (5.97). En realidad puede considerarse como una particularización de las expresiones obtenidas en 3.4 para el caso de redes de un acceso. A pesar de ello, este enfoque puede contribuir a facilitar la comprensión del significado matemático de relaciones como (5.79) y (5.98).

La función de onda (5.97) describe el comportamiento del campo en cada punto del semiespacio $y' \geq 0$, y en particular en los puntos del contorno C definidos por ρ' y ϕ' . Entonces, cada una de las soluciones de la ecuación de onda, tras evaluarla en C puede considerarse como un *modo proyectado* sobre C que llamaremos $\mathbf{M}_n^p(\phi)$:

$$\mathbf{M}_n^p(\phi) = J_n(k\rho') \text{sen} \left[n \left(\phi' + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (5.100)$$

donde ρ' y ϕ' son a su vez función de ϕ , y $\rho = cte$ en este caso.

El conjunto de los modos proyectados constituye una familia de funciones que si bien no es ortogonal, al menos puede considerarse una base para las soluciones sobre el contorno C , lo que nos asegura que podemos expresar cualquier función (que sea solución de la ecuación de onda) como combinación lineal de aquellos.

El campo magnético $H_z(\phi)$ puede desarrollarse entonces como combinación lineal de estos modos proyectados

$$H_z(\phi) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{M}_n^p(\phi) \quad (5.101)$$

Al mismo tiempo, el campo magnético puede expresarse también como desarrollo en serie de un conjunto completo de funciones ortogonales conocidas $H = \{h_q(\phi)\}$.

$$H_z(\phi) = \sum_{q=1}^Q H_q h_q(\phi) \quad (5.102)$$

Igualando (5.101) a (5.102) y aplicando a ambos lados el producto interno con los modos proyectados según se definió en (4.6), obtenemos

$$\sum_{q=1}^Q H_q \langle \mathbf{h}_q, \mathbf{M}_m^{p*} \rangle = \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \mathbf{M}_n^p, \mathbf{M}_m^{p*} \rangle \quad (5.103)$$

que expresado matricialmente resulta

$$[\mathbf{t}_{nq}]_{N \times Q} [\mathbf{H}_q]_{Q \times 1} = [\mathbf{w}_{mn}]_{N \times N} [\alpha_n] \quad (5.104)$$

Despejando α_n y normalizando $H_q=1 \forall q$, obtenemos

$$[\alpha_n]_{N \times Q} = [\mathbf{w}_{mn}]_{N \times N}^{-1} [\mathbf{t}_{nq}]_{N \times Q} \quad (5.105)$$

$[\alpha_n]$ es la matriz que convierte el conjunto de los modos proyectados en los nuevos modos de H. Además, dado que para cada modo proyectado hay una única función de onda asociada, cada columna de $[\alpha_n]$ contiene los pesos de estas funciones de onda, a_n^q , atribuidos a cada excitación normalizada de campo magnético $H_z(\phi)=h_q(\phi)$. Conocido este espectro para cada $h_q(\phi)$ resulta inmediato generar una matriz, en este caso de impedancias, que proporcione el campo eléctrico tangencial E_t producido por H_z .

El campo eléctrico tangencial depende de las componentes E_ρ y E_ϕ según

$$E_t(\phi) = \text{sen}(\phi' - \phi) E_\rho + \text{cos}(\phi' - \phi) E_\phi \quad (5.106)$$

y también se puede expresar como desarrollo en serie de un conjunto de funciones ortogonales, en general $\mathbf{F} = \{e_l(\phi)\}$

$$E_t(\phi) = \sum_{l=1}^L E_l e_l(\phi) \quad (5.107)$$

La relación de las componentes E_ρ y E_ϕ con la función de onda puede verse en 2.48, y el espectro es conocido para cada $h_q(\phi)$, como ya se indicó. Si expresamos (5.106) en forma matricial y aplicamos el producto interno con las funciones peso e_l ,

$$[E_l]_{L \times 1} = \frac{1}{T} \{ [r_{ln}]_{L \times N} + [f_{ln}]_{L \times N} \} [\alpha]_{N \times Q} \quad (5.108)$$

donde T es un factor de normalización resultante de aplicar el producto interno.

Los elementos de $\bar{R} = [r_{ln}]$ y $\bar{F} = [f_{ln}]$, son

$$r_{ln} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \psi}{\partial \phi'} \cdot e(\phi) d\phi \quad (5.109)$$

y

$$f_{ln} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \cdot e(\phi) d\phi \quad (5.110)$$

La expresión (5.108) supone que las amplitudes $H_q=1$ por lo que finalmente podemos escribir que

$$\bar{E}_t = \bar{Z} \cdot \bar{H}_z \quad (5.111)$$

donde

$$\bar{Z} = \frac{1}{T} (\bar{R} + \bar{F}) [\alpha] \quad (5.112)$$

y la matriz de admitancias

$$\bar{Y} = \bar{Z}^{-1} \quad (5.113)$$

- Resultados obtenidos

En las figuras 5.42 y 5.43 se muestra la RCS biestática para dos cuadrados con distintos tamaños. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante el método de los momentos y con los obtenidos por Balanis [61] utilizando UTD, mostrando una gran concordancia. Conviene apuntar que Balanis en la referencia citada utiliza difracciones de hasta tercer orden para obtener unos resultados semejantes a los obtenidos aquí.

Los comentarios apuntados en 5.1.4 son aplicables también a las nuevas estructuras estudiadas. En el caso del cilindro de sección cuadrada es patente la economía de recursos del modelado circuitual respecto al método de los momentos: la superficie a considerar se multiplica aproximadamente por cuatro respecto a la placa conductora, y con ella el número de incógnitas. Por el contrario, en el modelo circuitual el radio de la circunferencia que lo envuelve permanece constante y con él las incógnitas necesarias.

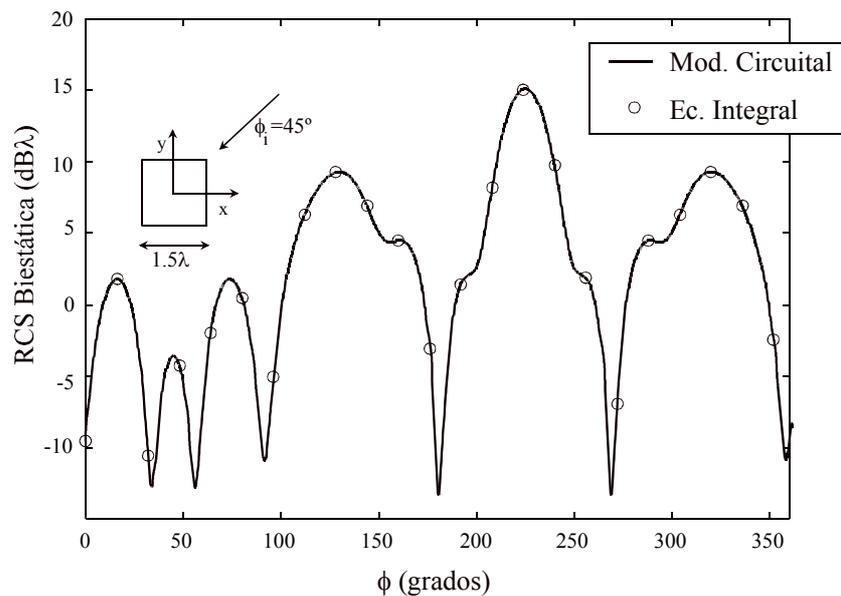


figura (5.42) Sección recta radar biestática de un cilindro conductor de sección cuadrada de lado 1.5λ . La onda incidente es plana y de naturaleza TE_z .

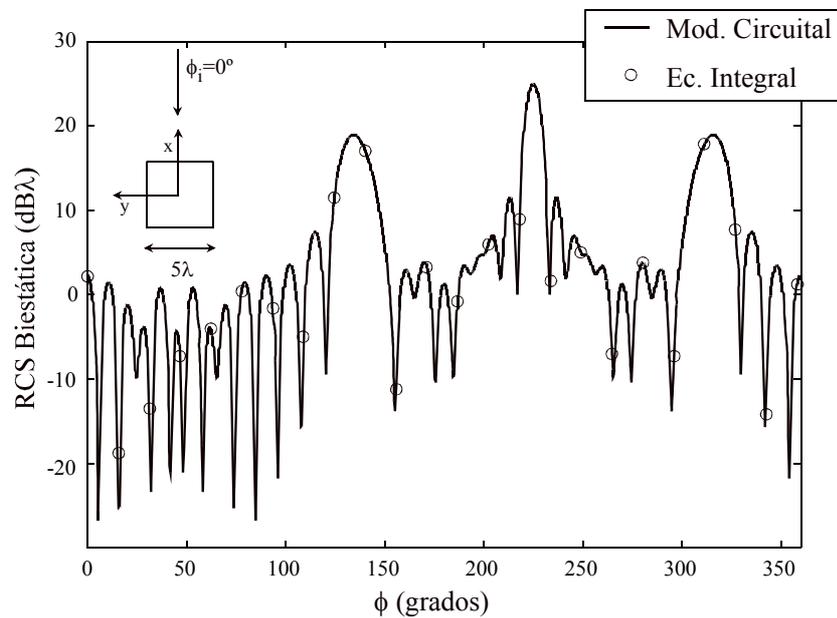


figura (5.43) Sección recta radar biestática de un cilindro conductor de sección cuadrada de lado 5λ . La onda incidente es plana y de naturaleza TE_z .

En las figuras 5.44 y 5.45 se puede observar la distribución del campo próximo en los alrededores de un cilindro de sección cuadrada, cuando sobre él incide una onda plana.

figura (5.44)

figura (5.45)

ESTA HOJA ESTA EN BLANCO
INTENCIONADAMENTE

5.3 CILINDRO HUECO RANURADO

A continuación consideraremos un problema clásico en teoría electromagnética. El cilindro metálico ranurado es una estructura canónica muy interesante en el análisis del acoplamiento de cavidades a través de ranuras. También permite estudiar de forma sencilla la penetración de las ondas electromagnéticas a través de la ranura lo que hace de esta estructura un modelo apropiado en el análisis de problemas de compatibilidad electromagnética. Por otra parte, cuando consideramos aperturas de más de 180° en el cilindro, éste puede considerarse como un reflector y emplearse en el estudio de algunos de los problemas físicos asociados al mismo, tales como la difracción en los bordes o el efecto de bloqueo del alimentador.

El cilindro ranurado ha sido estudiado en las últimas décadas por distintos métodos. Aparte de disponer de la ecuación integral asociada al cilindro ranurado, y resuelta numéricamente con el método de los momentos [62], se encuentran otros planteamientos basados en la imposición de las condiciones de continuidad en la propia apertura. Así, Harrington aplica su formulación circuitual generalizada a este problema en [63]. Otro enfoque similar puede encontrarse en [64], si bien se trata de una solución aproximada ya que impone la forma del campo en la apertura. Ziolkowski [65-67] hace un estudio detallado de este problema considerando una gran variedad de configuraciones en cuanto al tamaño de la apertura o la presencia de otros cilindros internos y coaxiales. El análisis se realiza empleando técnicas de Riemann-Hilbert en el dominio complejo. El cilindro ranurado de sección elíptica también ha merecido alguna atención [68] aunque el método de análisis recuerda al empleado en [63], sustituyendo las funciones de Bessel por funciones de Mathieu.

El análisis que vamos a realizar a continuación es más general que los reseñados en cuanto que considera al cilindro ranurado como un elemento de circuito. Dispone por tanto de dos accesos, uno interno y otro externo. Con esta concepción la agregación de nuevos elementos coaxiales internos o externos al cilindro supone únicamente la conexión en cascada de estos elementos, y el análisis circuitual del conjunto se realiza de forma más sencilla que si considerásemos el problema electromagnético globalmente.

El cilindro ranurado tiene la geometría mostrada en la figura 5.46. En general puede considerarse como una red de dos accesos ya que la fuente u otras estructuras pueden situarse tanto interna como externamente al cilindro.

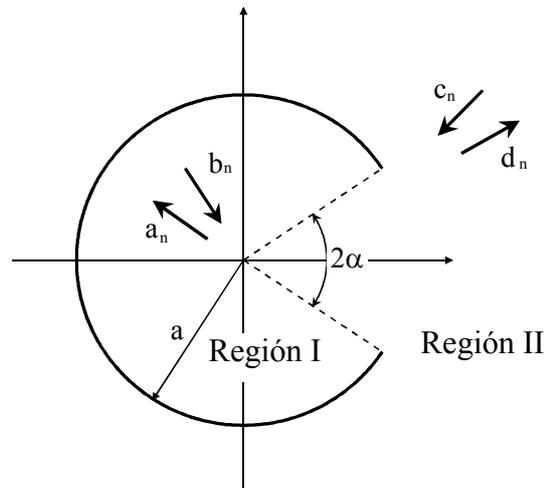


figura (5.46) El cilindro ranurado divide el espacio en las regiones I y II.

La función de onda que describe el comportamiento del campo tanto en la región interna (I) como en la externa (II) es de la forma

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n H_n^{(1)}(k\rho) + b_n H_n^{(2)}(k\rho) \right] e^{jn\phi} \quad (5.114)$$

Dado que la superficie de contacto entre ambas regiones se ajusta a un contorno donde $\rho = cte$, es posible caracterizar la estructura en términos de las ondas cilíndricas incidentes sobre el cilindro y reflejadas en cada región. Así, en la región I, las ondas incidentes están asociadas a las funciones $H_n^{(2)}(k\rho)$ mientras que las reflejadas lo están a las funciones $H_n^{(1)}(k\rho)$. Por el contrario en la región II las ondas incidentes sobre el cilindro varían radialmente según $H_n^{(1)}(k\rho)$ y son sus conjugadas, $H_n^{(2)}(k\rho)$, las asociadas a las ondas reflejadas. Caracterizamos entonces el cilindro ranurado mediante una matriz de dispersión asociada a los espectros en cada región según muestra la figura 5.47

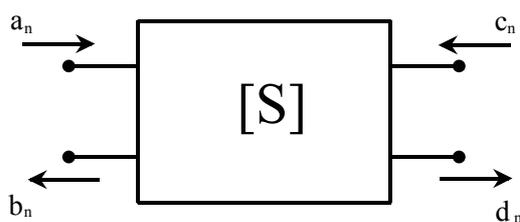


figura (5.47) El cilindro ranurado se caracteriza por una matriz de dispersión asociada a los modos incidentes y reflejados por ambos lados de éste

Los parámetros de dispersión son matrices que relacionan los espectros a ambos lados del cilindro según la definición

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ \bar{d}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} \\ \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_n \\ \bar{c}_n \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

Para obtener los cuatro elementos de la matriz $\bar{\bar{S}}$ debemos estudiar dos casos según la posición de la fuente. Cuando la fuente se sitúa en el interior del cilindro y hacemos que la incidencia desde el exterior sea nula, $\bar{c}_n = 0$, podemos calcular $\bar{\bar{S}}_{11}$ y $\bar{\bar{S}}_{21}$. Análogamente, anulando la fuente en el interior, \bar{a}_n , y situándola en el exterior calcularemos $\bar{\bar{S}}_{12}$ y $\bar{\bar{S}}_{22}$.

a) Fuente en el interior

Si suponemos que la fuente (normalmente un hilo de corriente eléctrica) impone una solución de tipo TM_z , la obtención de los parámetros de dispersión va a requerir como paso previo el cálculo del campo eléctrico en la apertura. Para ello procedemos como se indica en 4.1.1. Cerramos la apertura con un conductor eléctrico perfecto ajustado a la curvatura del cilindro ($\rho = a, |\phi| < \alpha$). Situamos una corriente magnética \mathbf{M} en el interior de la apertura y otra $-\mathbf{M}$ en la parte exterior de la misma. Con ellas aseguramos la continuidad del campo eléctrico en la apertura. Si además imponemos la continuidad en el campo magnético tangencial, la situación es análoga al caso en que la apertura no ha sido cerrada:

$$H_\phi^I(\mathbf{M}) + H_\phi^I(\mathbf{J}) = H_\phi^II(-\mathbf{M}) \quad (5.116)$$

$\mathbf{H}^I(\mathbf{M})$ es el campo magnético en el interior debido a la corriente magnética \mathbf{M} , $\mathbf{H}^II(-\mathbf{M})$ es el campo magnético en el exterior debido a la corriente $-\mathbf{M}$, y $\mathbf{H}^I(\mathbf{J})$ es el campo magnético que existiría si las ondas producidas por \mathbf{J} incidieran en el cilindro cuando su apertura está cerrada con un conductor sobre $\rho=a$. Reordenamos la ecuación (5.116) como

$$H_\phi^I(\mathbf{M}) - H_\phi^{II}(-\mathbf{M}) = H_\phi^I(\mathbf{J}) \quad (5.117)$$

Expresemos

$$\mathbf{M} = \hat{\phi} (M^e + M^o) \quad (5.118)$$

donde M^e y M^o son funciones par e impar respectivamente. Dada la simetría que presenta el problema podemos analizar una vez más los casos par e impar por separado. La solución numérica de (5.118) la obtenemos expandiendo \mathbf{M} según

$$M^o = \sum_{l=1}^L V_l^o m_l^o \quad (5.119)$$

donde $m_l^o \in \left\{ m_l^e \mid m_l^e = \cos \frac{(2l-1)\pi}{2\alpha} \phi, l=1,2,\dots,L, \text{ y } m_l^o = \sin \frac{l\pi}{\alpha} \phi, l=1,2,\dots,L \right\}$.

En la región I, el campo magnético $H_\phi^I(M^o)$ puede expresarse como

$$H_\phi^I(\phi)^o = \sum_{l=1}^L V_l^o \int_{-\alpha}^{\alpha} m_l^o(\phi') \cdot \frac{1}{j\eta} \sum_n \frac{H_n^{(1)'}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \cdot e^{jn(\phi-\phi')} d\phi' \quad (5.120)$$

Análogamente, en la región II, el campo magnético $H_\phi^{II}(-M^o)$ tiene la forma

$$H_\phi^{II}(\phi)^o = \sum_{l=1}^L V_l^o \int_{-\alpha}^{\alpha} m_l^o(\phi') \cdot \frac{1}{j\eta} \sum_n \frac{H_n^{(2)'}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \cdot e^{jn(\phi-\phi')} d\phi' \quad (5.121)$$

Si imponemos para \mathbf{J} soluciones del tipo $\frac{k^2}{j\omega\mu\varepsilon} H_i^{(2)}(k\rho) e^{ji\phi}$ incidentes en el cilindro y de amplitud $a_i=1$, los modos reflejados y transmitidos que obtendremos coincidirán con los parámetros de dispersión:

$$b_m = S_{mi}^{11}$$

$$d_m = S_{mi}^{21}$$

El campo magnético inducido en el interior del cilindro por cada modo J_i es

$$H_\phi^i(\phi) = j \frac{8}{ka} \frac{e^{ji\phi}}{H_i^{(1)}(ka)} \quad (5.122)$$

Introduciendo (5.120), (5.121) y (5.122) en (5.117) obtenemos una ecuación funcional en la que la incógnita es el campo eléctrico en la apertura.

Para obtener las L ecuaciones necesarias para resolver el problema, multiplicamos (5.117) por L funciones peso w_q° definidas por

$$w_q^\circ \in \left\{ w_q \mid w_q^\circ = \cos \frac{q\pi}{\alpha} \phi, q = 0, 1, \dots, \text{ y } w_q^\circ = \sin \frac{(2q-1)\pi}{2\alpha} \phi, q = 1, 2, \dots \right\}$$

e integramos con respecto a ϕ' , entre $-\alpha$ y α .

La solución del sistema de ecuaciones proporciona los coeficientes de la serie que define el campo en la apertura, $E_z^i(\phi)$, para el modo excitador i -ésimo. Ahora podemos calcular los parámetros de dispersión correspondientes.

En la región I se cumple que

$$\frac{k^2}{j\omega\mu\varepsilon} H_i^{(2)}(ka) + \frac{k^2}{j\omega\mu\varepsilon} \sum_m b_m^i H_m^{(1)}(ka) e^{jm\phi} = E_z^i(\phi) \quad (5.123)$$

En la región II por su parte

$$\frac{k^2}{j\omega\mu\varepsilon} \sum_m d_m^i H_m^{(2)}(ka) e^{jm\phi} = E^i(\phi) \quad (5.124)$$

despejando b_m en (5.123) obtenemos los elementos de la columna i -ésima de $\overline{\overline{S}}_{11}$

$$b_m^i = S_{mi}^{11} = \frac{1}{H_m^{(1)}(ka)} \left[\frac{j\omega\mu\varepsilon}{k^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} E_z^i(\phi') e^{-jm\phi'} d\phi' - H_i^{(2)}(ka) \delta_{in} \right] \quad (5.125)$$

donde δ_{in} es la delta de Kronecker.

Del mismo modo, despejando d_m en (5.124) se obtienen los elementos de la columna i -ésima de $\overline{\overline{S}}_{21}$

$$d_m^i = S_{mi}^{21} = \frac{j\omega\mu\varepsilon}{k^2} \frac{1}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} E_z^i(\phi') e^{-jm\phi'} d\phi' \quad (5.126)$$

b) Fuente en el exterior

Para obtener los parámetros S_{12} y S_{22} situamos la fuente en el exterior del cilindro ranurado de manera que la ecuación funcional (5.117) sólo resulta afectada en el término independiente. Ahora el i -ésimo modo excitador, J_i , produce un campo magnético sobre la superficie exterior del cilindro que viene dado por

$$H_\phi^i(\phi) = j \frac{8}{ka} \frac{e^{ji\phi}}{H_i^{(2)}(ka)} \quad (5.127)$$

Resolviendo numéricamente la ecuación como en el apartado anterior, llegamos finalmente a los parámetros de dispersión restantes

$$S_{mi}^{22} = d_m^i = \frac{1}{H_m^{(2)}(ka)} \left[\frac{j\omega\mu\varepsilon}{k^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} E_z^i(\phi') e^{-jm\phi'} d\phi' - H_i^{(1)}(ka) \delta_{in} \right] \quad (5.128)$$

$$S_{mi}^{12} = b_m^i = \frac{j\omega\mu\varepsilon}{k^2} \frac{1}{H_m^{(1)}(ka)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} E_z^i(\phi') e^{-jm\phi'} d\phi' \quad (5.129)$$

Una vez caracterizado el cilindro ranurado como elemento de circuito resulta inmediato evaluar la distribución del campo para un buen número de configuraciones. Consideremos por ejemplo que el cilindro de la figura 5.46 tuviera una apertura de 180° y estuviera iluminado por una onda plana incidente según $\phi = 0^\circ$. El circuito equivalente se muestra en la figura 5.48. En él, el origen de coordenadas ($\rho=0$) constituye un circuito abierto para los modos incidentes, $H_n^{(1)}(k\rho)$, por lo que $a_n=b_n$. Dado que el cilindro ranurado ha sido caracterizado en términos de las funciones de Hankel de primera y segunda especie, la onda plana debe descomponerse en suma de ambos tipos de ondas para considerar la incidencia en el cilindro.

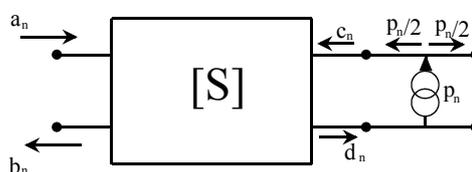


figura (5.48) Representación esquemática de los modos incidentes y reflejados a ambos lados del cilindro.

$$E_z^{inc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{2} H_n^{(1)}(k\rho) e^{jn\phi} + \frac{P_n}{2} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (5.130)$$

La relación entre los modos incidentes y reflejados en ambas zonas se establece mediante la matriz de dispersión

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ \bar{d}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ \frac{\bar{P}_n}{2} \end{pmatrix} \quad (5.131)$$

que nos proporciona los espectros incógnita \bar{b}_n y \bar{d}_n .

En la figura 5.49 se puede ver la distribución del campo cuando sobre el cilindro incide dicha onda plana.

En la figura 5.50 se ha situado un hilo de corriente eléctrica en el centro del cilindro. Se aprecia ahora el comportamiento de éste como reflector.

figura (5.49)

figura (5.50)

A continuación se considera la presencia de un cilindro conductor situado coaxial con el cilindro ranurado. La figura 5.51a muestra la disposición de los elementos, mientras que en 5.51b se observa el circuito equivalente.

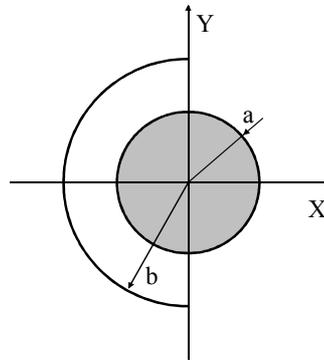


figura (5.51a) Cilindro ranurado conteniendo otro cilindro conductor coaxial.

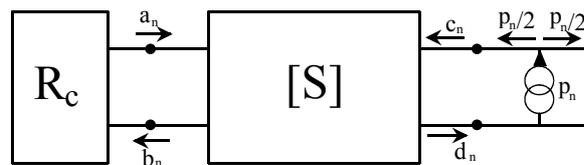


figura (5.51b) Representación esquemática del problema de la figura (a)

El cilindro interior se caracteriza por un coeficiente de reflexión

$$\overline{\overline{R}}_c = \text{diag} \left(-\frac{H_n^{(1)}(kb)}{H_n^{(2)}(kb)} \right)_{n=-N}^N \quad (5.132)$$

Si suponemos que incide una onda plana según $\phi=0^\circ$, las relaciones que deben cumplir ahora los espectros son

$$\overline{\overline{a}}_n = \overline{\overline{R}}_c \overline{\overline{b}}_n \quad (5.133)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{b}}_n \\ \overline{\overline{d}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{S}}_{11} & \overline{\overline{S}}_{12} \\ \overline{\overline{S}}_{21} & \overline{\overline{S}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\overline{a}}_n \\ \overline{\overline{p}}_n / 2 \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

En la figura 5.52 se pueden observar los resultados para el campo eléctrico, cuando el radio interior es $b=1.1\lambda$ y el exterior $a=1.6\lambda$.

figura (5.52)

ESTA HOJA ESTA EN BLANCO
INTENCIONADAMENTE

Podemos considerar también el caso de dos cilindros ranurados coaxiales. En la figura 5.53a se muestra la disposición de éstos. El cilindro interior está girado 90° respecto al exterior, y las ranuras en ambos son de 20° .

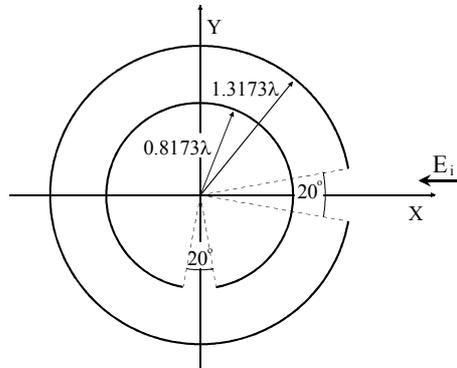


figura (5.53a) Dos cilindros ranurados coaxiales. Sus aperturas están giradas 90° entre sí. Las ranuras son de 20° .

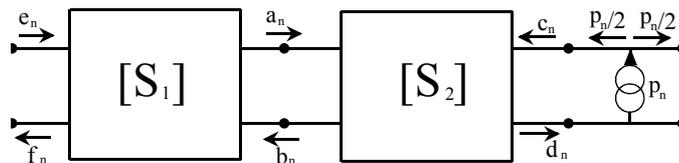


figura (5.53b) Representación esquemática del problema de la figura (a), empleando matrices de dispersión.

El circuito equivalente ahora es el mostrado en 5.53b. La matriz de dispersión del cilindro ranurado girado se obtiene multiplicando por una matriz de giro (apéndice III) a cada uno de los elementos de la matriz de dispersión original. En la figura 5.54 se observa cómo penetra el campo hasta llegar al más interno donde se acopla el modo TM_{21} de la cavidad circular, dado que el radio escogido es $R_1=0.8173\lambda$.

Finalmente, resulta interesante comprobar cómo la penetración del campo eléctrico es mínima en un caso cuasiestático. Si consideramos un cilindro de radio 0.2λ y en él una apertura de 20° , el campo eléctrico apenas se introduce en el cilindro como se puede ver en la figura 5.55.

figura (5.54)

figura (5.55)

ESTA HOJA ESTA EN BLANCO
INTENCIONADAMENTE

6

Análisis de Fuentes Finitas Junto a Estructuras Cilíndricas

Algunas estructuras radiantes pueden considerarse cuasi-bidimensionales; esto es, mantienen su sección inalterada a lo largo de un eje excepto por la presencia de ciertas fuentes (reales o equivalentes) equiespaciadas a lo largo de dicho eje de traslación. Tal es el caso por ejemplo de las agrupaciones de dipolos sujetos a mástiles y empleados en aplicaciones de radiodifusión, y que esquemáticamente se puede identificar en la figura 6.1a. Del mismo modo los arrays de ranuras en guía pueden considerarse antenas cuasi-cilíndricas. Similarmente, un problema de difracción en el que el objeto difractante es cilíndrico y el elemento iluminante es finito (figura 6.1b) puede considerarse como cuasi-bidimensional, presentándose ahora el fenómeno de la incidencia oblicua que no aparece en un problema puramente 2-D.

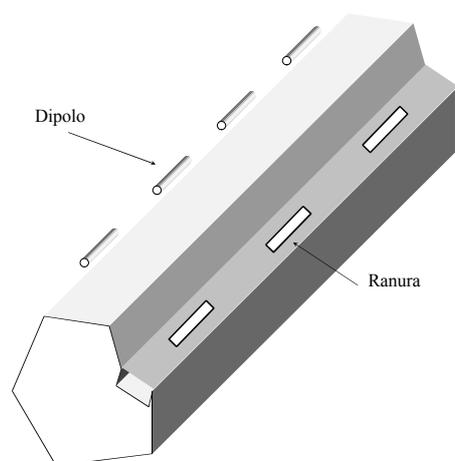


figura (6.1a) Arrays de dipolos y de ranuras sobre una estructura cilíndrica.

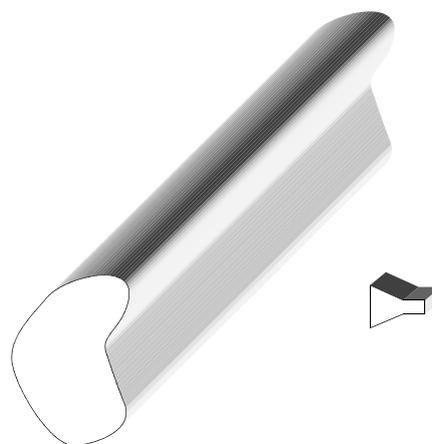


figura (6.1b) Una antena de dimensiones finitas ilumina una estructura con simetría de traslación

El análisis de este tipo de problemas constituye una extensión natural del realizado en los capítulos precedentes ya que, como podremos comprobar, un problema tridimensional en el que una fuente finita está confinada por contornos cilíndricos (estructura con simetría de traslación), puede convertirse en un espectro de problemas bidimensionales aplicando una transformada de Fourier respecto a la coordenada axial [24] (habitualmente z). De esta forma, el análisis en el dominio transformado será similar al ya efectuado con anterioridad sobre problemas bidimensionales.

El estudio que vamos a realizar va a girar entorno al cálculo de la influencia de la estructura cilíndrica sobre la fuente. Plantearemos entonces cómo se altera la distribución de corriente o la impedancia de entrada en un dipolo cuando se sitúa en las proximidades de una estructura cilíndrica arbitraria. En este contexto, el análisis de estos parámetros por otros métodos puede resultar inabordable: la aplicación de una ecuación integral sobre el problema tridimensional formado por el conjunto de la estructura y la fuente exigiría un esfuerzo computacional excesivo. No obstante, pueden encontrarse en la literatura algunos intentos de abordar este problema empleando métodos híbridos que alivian el coste numérico. Así, Thiele considera en [18,81] el caso de un dipolo junto a una estructura conductora eléctricamente grande. Para su estudio, al análisis del dipolo en espacio libre mediante una ecuación integral, le superpone el efecto de la interacción con la estructura conductora empleando técnicas de alta frecuencia como GTD o UTD. Los resultados son bastante satisfactorios si bien el método puede complicarse en exceso cuando en la estructura se multiplican las esquinas o aparecen elementos dieléctricos.

Por el contrario, la técnica que vamos a emplear se beneficia de las facilidades de trabajar en un contexto bidimensional proporcionando soluciones más completas, si bien para ello es necesario pasar al dominio espectral. Esta tipo de técnicas ya han sido empleadas en otro contexto para el tratamiento de estructuras multicapa en antenas microstrip [82]. Allí, un problema tridimensional se reduce a otro unidimensional expresado en términos de ondas planas, para lo que se aplica una transformada de Fourier bidimensional. En nuestro caso sólo se aplica una transformada unidimensional y el problema resultante, como veremos, es 2-D.

6.1 FUENTES Y CAMPOS EN EL DOMINIO TRANSFORMADO

Antes de plantear el problema estructura-fuente en su conjunto, conviene analizar el campo producido por una fuente aislada en espacio libre y su formulación en el dominio transformado. Consideremos un hilo finito centrado en el origen y con distribución conocida de corriente $I(z)$, de la que se supone que existe su transformada de Fourier. Para una fuente así, es sabido que la solución de la ecuación de onda es de tipo TM_z siendo la función de onda de la forma general indicada en (2.47).

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k_z) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} dk_z \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) es solución de la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (6.2)$$

Ahora bien, la función de onda en (6.1) tiene la forma de una transformada inversa de Fourier. Si aplicamos la transformada directa sobre ella

$$\tilde{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi e^{-jk_z z} dz \quad (6.3)$$

la transformada de la función de onda, $\tilde{\psi}$, será solución de la ecuación de onda transformada

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \phi^2} + k_\rho^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (6.4)$$

donde

$$k_\rho^2 = k^2 - k_z^2 \quad (6.5)$$

La ecuación de onda en (6.4) es ahora bidimensional, y su solución es

$$\tilde{\psi} = f(k_z) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \quad (6.6)$$

donde $f(k_z)$ se determina imponiendo las condiciones de contorno. En este caso es la propia fuente en el origen la que condiciona el valor de $f(k_z)$ puesto que debe cumplirse que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} H_\phi \rho \, d\phi = I(z) \quad (6.7)$$

y en el dominio transformado

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_\phi \rho \, d\phi = \tilde{I}(z) \quad (6.8)$$

Para argumentos pequeños de $H_0^{(2)}(k_\rho)$ se tiene que

$$\tilde{H}_\phi = \lim_{\rho \rightarrow 0} -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu} \frac{2j}{\pi \rho} f(k_z) \quad (6.9)$$

de donde se concluye que

$$f(k_z) = \frac{\mu}{4j} \tilde{I}(k_z) \quad (6.10)$$

Conocida la función de onda en el dominio transformado

$$\tilde{\psi}(\rho, k_z) = \frac{\mu}{4j} \tilde{I}(k_z) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \quad (6.11)$$

es inmediato obtener cualquiera de las componentes del campo transformado mediante

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_\rho &= \frac{k_z}{\omega \mu \varepsilon} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \rho} & \tilde{H}_\rho &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} \\
\tilde{E}_\phi &= \frac{k_z}{\omega \mu \varepsilon} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \phi} & \tilde{H}_\phi &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \rho} \\
\tilde{E}_z &= \frac{k_\rho^2}{j\omega \mu \varepsilon} \tilde{\psi} & \tilde{H}_z &= 0
\end{aligned} \tag{6.12}$$

que son las transformadas de las componentes obtenidas en 1.4.7.

Una vez conocido el valor del campo en el dominio espectral o transformado, la aplicación de la transformada inversa nos proporciona su valor real. Así por ejemplo, la componente E_z se obtiene mediante

$$E_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_z(k_z, \rho) e^{jk_z z} dk_z \tag{6.13}$$

- Interpretación física del problema transformado

La expresión (6.13) nos permite interpretar el campo eléctrico E_z como el resultado de la superposición de un espectro de ondas de amplitud $\tilde{E}_z(k_z, \rho) dk_z$ y fase lineal dada por $e^{jk_z z}$. La independencia con ϕ en la amplitud del espectro, y la fase progresiva, nos indican que se trata de ondas de naturaleza cónica cuyo frente de fase es normal al vector de propagación dado por $\mathbf{k} = k_\rho \hat{\rho} + k_z \hat{z}$, como se ilustra en la figura 6.2

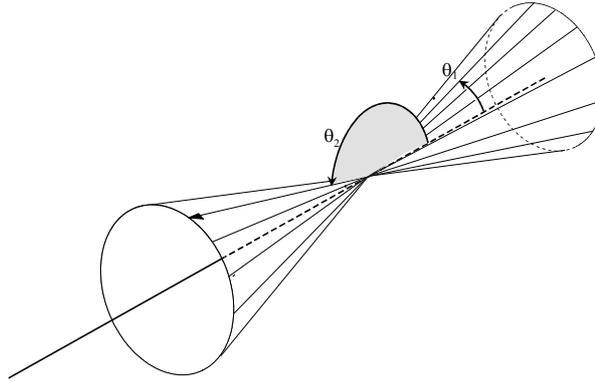


figura (6.2) Cada una de las fuentes transformadas produce una onda cónica. Se muestran los conos para dos valores de k_z , uno positivo y otro negativo

Igualmente, la corriente $I(z)$ puede considerarse como resultado de la superposición de un espectro de filamentos de corriente infinitamente largos de amplitud constante, $\tilde{I}(k_z)dk_z$, y fase progresiva $e^{jk_z z}$

$$I(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(k_z) e^{jk_z z} dk_z \quad (6.14)$$

Cada uno de los filamentos de corriente es responsable de la onda cónica elemental que se propaga en la dirección $\theta = \arccos(k_z/k)$. Esto es lógico pues la fase lineal en la corriente es la responsable del apuntamiento de la onda. En particular, cuando $k_z=0$ el frente de onda deja de ser cónico para convertirse en cilíndrico. Si particularizamos la expresión del espectro de la corriente y del campo eléctrico en (6.12) para este valor de k_z ,

$$\tilde{I}(k_z = 0) = I_0 \longleftrightarrow \tilde{E}(0, \rho) = -\frac{k^2 I_0}{4\omega \mu \epsilon} H_0^{(2)}(k\rho) \delta(k_z) \quad (6.15)$$

El campo eléctrico obtenido en (6.15) constituye la conocida solución al problema bidimensional de un hilo de corriente invariante con z ya que en este caso $E_z(\rho) = \tilde{E}(0, \rho)$.

Análogamente, si consideramos cualquier otro hilo infinito con corriente $I_0 e^{jk_1 z}$, el espectro de su campo eléctrico es

$$\tilde{E}_z(k_z, \rho) = -\frac{k_{\rho_1}^2 I_0}{4\omega \mu \varepsilon} H_0^{(2)}(k_{\rho_1} \rho) \delta(k_z - k_1) \quad (6.16)$$

y en consecuencia, el campo eléctrico resultante es

$$E_z(z, \rho) = -\frac{k_{\rho_1}^2 I_0}{4\omega \mu \varepsilon} H_0^{(2)}(k_{\rho_1} \rho) e^{jk_1 z} \quad (6.17)$$

• Obtención de la impedancia de entrada de un dipolo con el teorema de Parseval

Habiendo resuelto un problema en el dominio transformado, hay parámetros, no obstante, que no requieren la aplicación de la transformada inversa para obtener su valor. Tal es el caso de la impedancia. El método de la f.e.m. inducida [83] proporciona la impedancia mutua entre dos hilos de corriente con orientación axial mediante

$$z_{12} = -\frac{1}{I_1 I_2} \int_{-L/2}^{L/2} E_{1z}(z) I_2^*(z) dz \quad (6.18)$$

donde $E_{1z}(z)$ es el campo eléctrico que crea el dipolo 1 sobre el dipolo 2, e $I_2(z)$ es la corriente que circula por el dipolo 2. Ahora bien, el teorema de Parseval [24] permite afirmar que

$$\int_{-L/2}^{L/2} E_{1z}(z) I_2^*(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{1z}(k_z) \tilde{I}_2^*(k_z) dk_z \quad (6.19)$$

y el cálculo de (6.19) puede resultar en muchos casos más sencillo y preciso en el dominio transformado que en el original. El hecho de que los límites de integración sean infinito nos permite además ahondar en la interpretación física del espectro de ondas cónicas, $\tilde{E}_{1z}(k_z)$. Cuando $|k_z| < k$, entonces $k_{\rho} > 0$ y la función de Hankel $H_0^{(2)}$ en (6.16) representa las ondas que se propagan alejándose de la fuente, y que en campo lejano se atenúan según $1/\sqrt{\rho}$. Sin embargo, cuando $|k_z| > k$, k_{ρ} es negativo y la función de Hankel pasa a tener argumento imaginario, con lo que

$$H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho) = j \frac{2}{\pi} K_0\left(\sqrt{k_z^2 - k^2} \rho\right) \quad (6.20)$$

La función modificada de Bessel de orden cero, $K_0(x)$, se atenúa rápidamente con x e indica que los valores $|k_z| > k$ del espectro son ondas evanescentes y están asociadas a la energía almacenada entorno a la antena. Si bien su influencia puede considerarse despreciable en el cálculo de la impedancia mutua, no ocurre lo mismo cuando se trata de calcular la impedancia de entrada, ya que entonces

$$z_{in} = \lim_{\rho \rightarrow 0} z_{12}$$

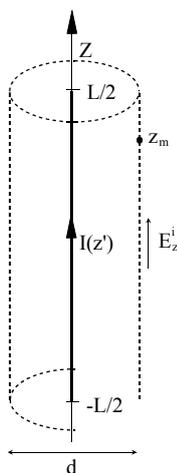
y entonces las ondas evanescentes contribuyen notablemente a la parte reactiva de la impedancia de entrada.

6.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE FUENTES REALES DE CORRIENTE EN ESPACIO LIBRE

En el apartado anterior hemos supuesto que la distribución de corriente por el dipolo era conocida. Habitualmente se suele asumir que dicha corriente es sinusoidal. Sin embargo, para dipolos de sección finita (diámetros $d > 0.05\lambda$) la distribución sinusoidal es orientativa pero no exacta. Para obtener una distribución de corriente más exacta es necesario deducir una ecuación integral en donde se consideren las condiciones de contorno, y resolverla con técnicas basadas en el método de los momentos. Si conocemos la tensión aplicada en bornes del dipolo, y calculamos su corriente, podremos obtener luego su impedancia de entrada y su diagrama de radiación.

Una de las ecuaciones integrales clásicas que describen el comportamiento de la corriente por el dipolo es la ecuación integrodiferencial de Pocklington [25].

$$\int_{-L/2}^{L/2} I(z') \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \phi(z, z') dz' = -j\omega \mu \varepsilon E_z^i(\rho = d/2) \quad (6.21)$$



Donde $\phi(z, z')$ representa la función de Green del problema.

Esta ecuación permite determinar la corriente equivalente por el dipolo $I(z)$, conocido el campo incidente en la superficie del hilo, $E_z^i(\rho = d/2)$. En la figura 6.3 puede verse la situación de $I(z)$ y de $E_z^i(\rho = d/2)$

En la solución numérica de la ecuación (6.21), la función incógnita puede discretizarse como

figura (6.3) modelo de dipolo.

$$I(z') = \sum_{n=1}^N I_n i_n(z')$$

siendo $i_n(z)$ funciones de subdominio o de dominio completo.

Así tenemos N incógnitas. Para obtener N ecuaciones aplicamos el producto interno entre un conjunto de N funciones peso $w_m(z)$, y la ecuación (6.21)

$$\langle w_m(z), L [I(z')] \rangle = -j\omega \varepsilon \langle w_m(z), E_z^i \rangle \quad (6.23)$$

El conjunto de N ecuaciones puede escribirse en notación matricial como

$$[z_{mn}] [I_n] = [V_m] \quad (6.24)$$

donde

$$[I_n] = [I_1, I_2, \dots, I_N]^c \quad (6.25)$$

$$[V_m] = -j\omega \varepsilon \left[\langle w_1, E_z^i \rangle, \langle w_2, E_z^i \rangle, \dots, \langle w_N, E_z^i \rangle \right]^c \quad (6.26)$$

$$[z_{mn}] = \left[\langle w_m^*(z), L [I_n(z')] \rangle \right]_{M \times N} \quad (6.27)$$

Los elementos de la matriz de impedancias generalizadas, $[z_{mn}]$, se obtienen desarrollando el producto interno en (6.27)

$$z_{mn} = \int_{\Delta_m} w_m^*(z) \cdot \left[\int_{\Delta_n} I_n(z') \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(z, z') dz' \right] dz \quad (6.28)$$

donde Δ_m y Δ_n representan los subdominios de integración $[z_m, z_{m+1}]$ y $[z_n, z_{n+1}]$ respectivamente.

Si ahora aplicamos el teorema de Parseval sobre (6.28)

$$z_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_m^*(k_z) \cdot \tilde{E}_n(k_z) dk_z \quad (6.29)$$

donde

$$\tilde{E}_n(k_z) = \int_{\Delta_m} \left[\int_{\Delta_n} I_n(z') \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(z, z') dz' \right] e^{-jk_z z} dz \quad (6.30)$$

Admitiendo que el integrando es continuo en el dominio de integración, es posible intercambiar el orden de integración en (6.30), resultando

$$\tilde{E}_n(k_z) = \int_{\Delta_n} I_n(z') \left[\int_{\Delta_m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(z, z') e^{-jk_z z} dz \right] dz' \quad (6.31)$$

La integral más interna tiene la forma de una transformada de Fourier aplicada sobre el operador integrodiferencial. Podemos expresar $\tilde{E}_n(k_z)$ en función de la transformada de dicho operador

$$\tilde{E}_n(k_z) = k_\rho^2 \int_{\Delta_n} I_n(z') \cdot \tilde{\phi}(k_z, z') dz' \quad (6.32)$$

La función de Green tridimensional en espacio libre es conocida habitualmente en coordenadas esféricas

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (6.33)$$

Para nuestro propósito resulta conveniente sin embargo expresarla en coordenadas cilíndricas. Se puede demostrar [24] que dicha función tiene entonces la forma

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z(z-z')} dk_z \quad (6.34)$$

Como puede verse, se trata de una transformada inversa de Fourier, por lo que es inmediato extraer que

$$\tilde{\phi}(k_z, z', \rho) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-jk_z z'} \quad (6.35)$$

Si particularizamos en (6.32)

$$\tilde{E}_n(k_z, \rho) = \frac{1}{4j} k_\rho^2 H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \int_{\Delta_n} I_n(z') e^{-jk_z z'} dz' \quad (6.36)$$

La integral en (6.36) es la transformada de Fourier de una función discreta desplazada al punto z'_n ; de modo que si $I_n(z') = I_0(z' - z'_n)$, entonces

$$\tilde{E}_n(k_z, \rho) = \frac{1}{4j} k_\rho^2 H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \tilde{I}_0(k_z) e^{-jk_z z'_n} \quad (6.37)$$

Ahora podemos obtener los elementos de la matriz de impedancias generalizadas para el dipolo aislado. Empleando la técnica de colocación o point-matching, las funciones de peso son deltas $w_m(z) = \delta(z_n - z_m)$, y podemos escribir que

$$z_{mn} = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 H_0^{(2)}\left(k_\rho \frac{d}{2}\right) \tilde{I}_0(k_z) e^{-jk_z(z_n - z_m)} dk_z \quad (6.38)$$

De forma similar, hubiera resultado sencillo aplicar el método de Galerkin en el cálculo de las impedancias. En ese caso las funciones base y peso coinciden, $w_m(z) = I_m(z)$, y sustituyendo en (6.29)

$$z_{mn} = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^2 H_0^{(2)}\left(k_{\rho} \frac{d}{2}\right) \left| \tilde{I}_0(k_z) \right|^2 e^{-jk_z(z_n - z_m)} dk_z \quad (6.39)$$

Los comentarios realizados en 6.1 acerca del dominio de integración y de la interpretación física del espectro de ondas, son igualmente aplicables a las impedancias obtenidas en (6.38) y (6.39). Nótese que el término exponencial de la integral tiene en cuenta el desplazamiento axial relativo entre los segmentos m y n y la impedancia mutua entre ambos, z_{mn} , es formalmente idéntica a la deducida en (6.14) a partir del método de la f.e.m. inducida.

6.3 ANÁLISIS ESPECTRAL DEL DIPOLO FRENTE A UN CILINDRO CONDUCTOR DE SECCIÓN CIRCULAR

El procedimiento espectral deducido en el punto 6.2 para el dipolo aislado se puede extender al caso en que el dipolo está junto a un cilindro conductor. La geometría se muestra en la figura 6.4. La función de Green del nuevo problema ahora es [84]

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_z(z - z')} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(J_n(k_{\rho} \rho_0) - \frac{J_n(k_{\rho} R)}{H_n^{(2)}(k_{\rho} R)} H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho_0) \right) H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho) e^{jn(\phi - \phi_0)} dk_z, \quad \rho \geq \rho_0 \quad (6.40)$$

que es aplicable cuando la fuente está orientada paralela al eje del cilindro. En (6.40), R es el radio del cilindro y (ρ_0, ϕ_0) es la posición de la fuente¹. Para el cálculo de la corriente por el dipolo las variables ρ y ϕ se particularizan como $\rho = \rho_0 + d/2$ y $\phi = \phi_0$.

¹ La expresión de la función de Green aplicable para $\rho \leq \rho_0$ se puede obtener a partir de la propia expresión (6.40) intercambiando ρ y ρ_0 .

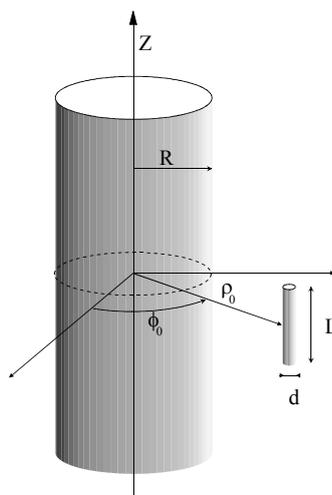


figura (6.4) Dipolo junto a un cilindro conductor.

De nuevo la función de Green tiene la forma de una transformada inversa de Fourier, y resulta inmediato obtener su espectro

$$\tilde{\phi}(k_z, z') = \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[J_n(k_\rho \rho_0) - \frac{J_n(k_\rho R)}{H_n^{(2)}(k_\rho R)} H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0) \right] H_n^{(2)}\left(k_\rho \left(\rho_0 + \frac{d}{2}\right)\right) e^{-jk_z z'} \quad \rho \geq \rho_0 \quad (6.41)$$

La función de Green transformada es la solución de la ecuación diferencial

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + k_\rho^2 \tilde{\phi} = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) e^{jk_z z} \quad (6.42)$$

sujeta a las condiciones de contorno $\tilde{\phi}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, k_z) = 0$.

En ella podemos reconocer el mismo comportamiento analizado en 6.1 para la fuente aislada. Reordenando (6.41) e introduciendo en la formulación la notación matricial, $[]^F$, para matrices fila y $[]^C$, para matrices columna, obtenemos

$$\tilde{\phi}(k_z, z') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}\left(k_\rho \frac{d}{2}\right) e^{-jk_z z'} + \frac{1}{4j} \left[H_n^{(2)}\left(k_\rho \left(\rho_0 + \frac{d}{2}\right)\right) \right]^F \cdot \overline{\overline{R}}_c(k_z) \cdot \left[H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0) \right]^C \cdot e^{-jk_z z'} \quad (6.43)$$

donde

$$\overline{\overline{R}}_c(k_z) = \text{diag} \left(-\frac{J_n(k_\rho R)}{H_n^{(2)}(k_\rho R)} \right)_{n=-\infty}^{\infty} \quad (6.44)$$

es el coeficiente de reflexión que caracteriza al cilindro conductor. Ahora resulta más sencillo constatar que el espectro de esta función de Green se compone de dos contribuciones, la primera debida a la incidencia directa, análoga a la obtenida en (6.16), y la segunda asociada al campo reflejado por el cilindro, donde lo más llamativo es su coeficiente de reflexión, el cual es función de k_z para satisfacer las condiciones de contorno, manifestando además su influencia en el apuntamiento de las ondas cónicas reflejadas.

Introduciendo (6.43) en (6.28) y (6.29) podemos calcular la matriz de impedancias generalizadas con el mismo procedimiento seguido en 6.2 para el dipolo aislado.

6.4 CARACTERIZACIÓN ESPECTRAL DE CILINDROS DE SECCIÓN ARBITRARIA

La observación de la función de Green espectral en (6.43) nos permite extender los resultados previos a problemas con geometrías cilíndricas cuya sección y composición sean arbitrarias.

Las distintas geometrías consideradas son invariantes con z . En ese caso, la variación armónica de las fuentes espectrales $\tilde{I}(k_z)e^{jk_z z}$, se traslada a los campos totales, mostrando la misma dependencia con z para poder satisfacer las condiciones de contorno. En el caso del cilindro conductor de sección circular estas condiciones se manifiestan a través de su coeficiente de reflexión, que depende de k_z a través de k_ρ . Sin embargo la variación acimutal es independiente de k_z y se conserva para cualquier valor que tome éste. De hecho, cuando $k_z=0$ el coeficiente de reflexión del cilindro adopta el conocido valor del caso bidimensional

$$\overline{\overline{R}}_c(0) = -\frac{J_n(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} \quad (6.45)$$

Podemos concluir entonces que una estructura cilíndrica de sección arbitraria puede analizarse por *cualquiera de los métodos bidimensionales* descritos en los capítulos 3 y 4. Aquel análisis nos ha proporcionado una matriz de admitancias, de dispersión o de reflexión asociada a la incidencia normal definida por $k_\rho = k$. Para obtener las matrices asociadas al resto de las incidencias del caso tridimensional será necesario realizar el mismo cálculo sustituyendo únicamente k por k_ρ . Esto respeta las condiciones de contorno en el plano acimutal y asegura el cumplimiento de las mismas a lo largo de z cuando la fuente es finita.

De esta forma, el problema se reduce a calcular el campo total como resultado de la *superposición* de los campos debidos a unas fuentes armónicas bidimensionales $\tilde{I}(k_z)e^{jk_z z}$, en presencia de una geometría que está caracterizada por su matriz de admitancias $\bar{Y}(k_z)$, o su coeficiente de reflexión $\bar{\Gamma}(k_z)$. Este es un problema más sencillo de resolver que el original porque las fuentes armónicas se extienden hasta infinito en el dominio tridimensional, ajustándose a la geometría cilíndrica del problema (ver figura 6.5). Lo único que hace este problema diferente de uno bidimensional es la variación armónica en las fuentes, pero esta diferencia puede asumirse matemáticamente gracias a la dependencia con k_z del coeficiente de reflexión o la admitancia, como hemos justificado.

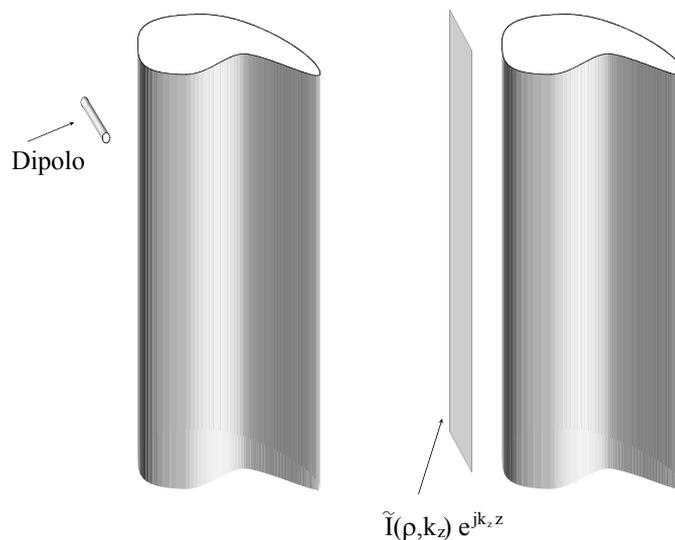


figura (6.5) Comparación del problema real (tridimensional) y el espectral (bidimensional).

La descripción del método se ha realizado sobre una fuente de corriente eléctrica orientada axialmente como representativa del modo TM_z . Recientemente, Kildal ha propuesto una técnica espectral muy similar a la que acabamos de describir, y la ha aplicado al estudio de corrientes magnéticas axiales (ranuras) sobre estructuras radiantes en guía [85-87]. Además este mismo autor ha presentado en [88] un estudio profundo aunque teórico de su método, extendiéndolo a fuentes con orientación arbitraria; para lo cual se ha apoyado en la función diádica de Green de espacio libre. El procedimiento que hemos descrito, a diferencia del planteado por Kildal, se sirve de funciones de Green especializadas, como la de una fuente junto a una estructura cilíndrica, y está concebido para facilitar la introducción del modelado circuital del problema y favorecer así su análisis numérico [89-91].

6.5 APLICACIÓN DEL MÉTODO ESPECTRAL AL CÁLCULO DE LA Z_{IN} DE DIPOLOS FRENTE A CILINDROS

A continuación se recogen los resultados obtenidos al aplicar el método espectral en el cálculo de la impedancia de un dipolo orientado axialmente junto a una estructura cilíndrica arbitraria.

Inicialmente el método se aplica a un dipolo axial en presencia de un cilindro conductor de radio 0.5λ . Los resultados se comparan en la figura 6.6 con los obtenidos por Ekelman en [81] mediante el MM-GTD, mostrando una gran similitud.

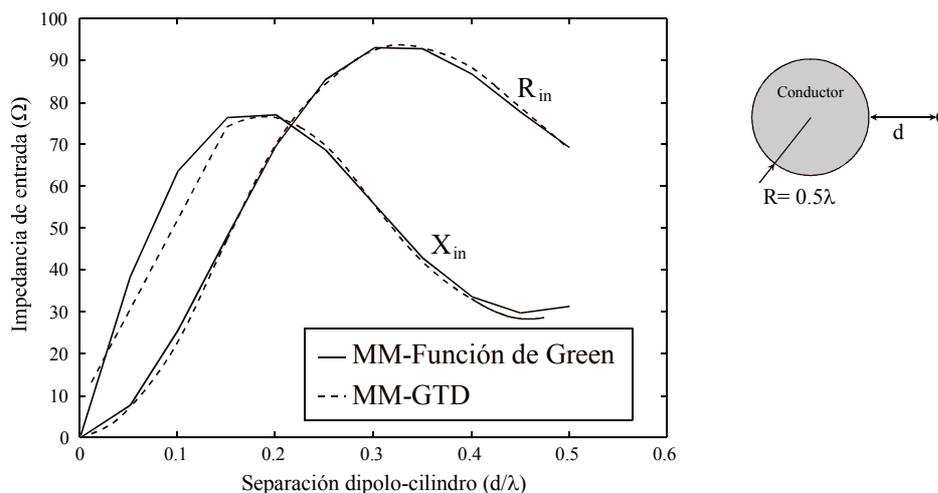


figura (6.6) Impedancia de entrada de un dipolo frente a un cilindro conductor perfecto.

A continuación se considera el caso del dipolo frente a un cilindro dieléctrico de sección circular de radio 0.5λ y cuya constante dieléctrica es $\epsilon_r=4-j0.5$. El coeficiente de reflexión de este cilindro se ha obtenido mediante el método de los elementos finitos. Podemos observar su influencia en la impedancia de entrada del dipolo, respecto a la que ejercería si fuese conductor.

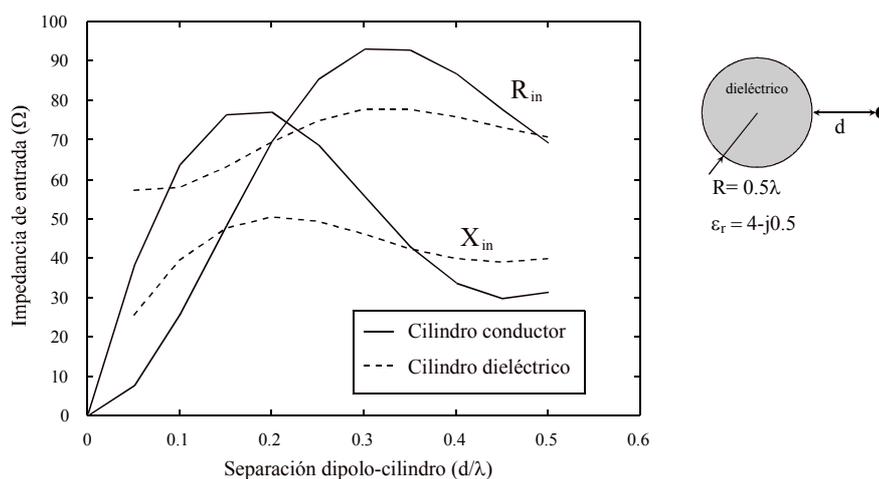


figura (6.7) Impedancia de entrada de un dipolo frente a un cilindro dieléctrico de sección circular.

En la figura 6.8 podemos observar la variación de la impedancia de entrada cuando el dipolo se desplaza lateralmente junto a un cilindro metálico de sección cuadrada. El lado del cuadrado es $L=1.25\lambda$. Se puede comprobar que la variación en el valor de la Z_{in} es mínima a lo largo del recorrido. Los valores calculados son similares a los que se obtienen cuando el dipolo está junto a un plano conductor infinito y a una distancia $d=0.375\lambda$ de éste.

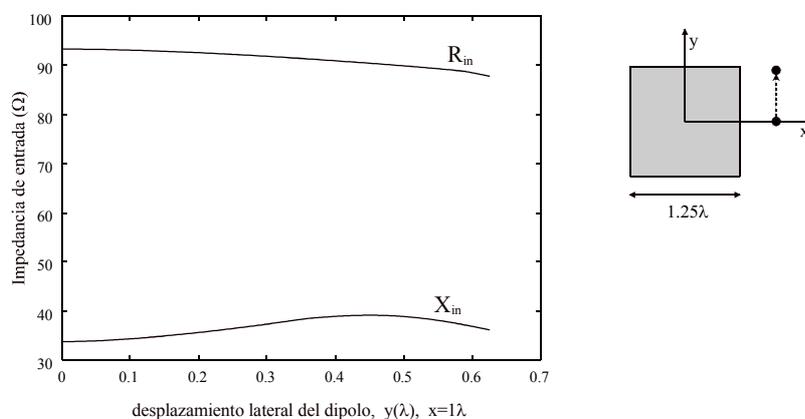


figura (6.8) Impedancia de entrada de un dipolo axial próximo a un cilindro conductor de sección cuadrada. El dipolo se desplaza a lo largo de un lateral del cilindro.

La figura 6.9 nos muestra como decrece la impedancia mutua entre dos dipolos cuando uno de ellos se desplaza alrededor de una estructura metálica de sección triangular, manteniendo fijo el otro dipolo. el lado del triángulo es $L=1.4\lambda$.

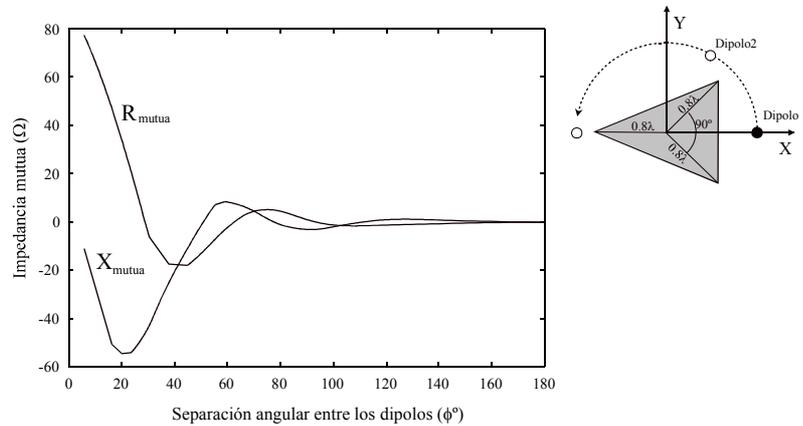


figura (6.9) Impedancia mutua entre dos dipolos situados alrededor de un cilindro conductor de sección triangular.

Finalmente, en la figura 6.10 se presenta la influencia de un radomo dieléctrico en la impedancia mutua entre dos dipolos. El cilindro interno es conductor y su radio es $R_c=2\lambda$. El radomo tiene un radio $R_d=4\lambda$ y su grosor es de 0.1λ . La permitividad del radomo es $\epsilon_r=2.56$. Uno de los dipolos está fijo a 0.25λ del cilindro interior mientras que el otro se va separando radialmente de éste una distancia d .

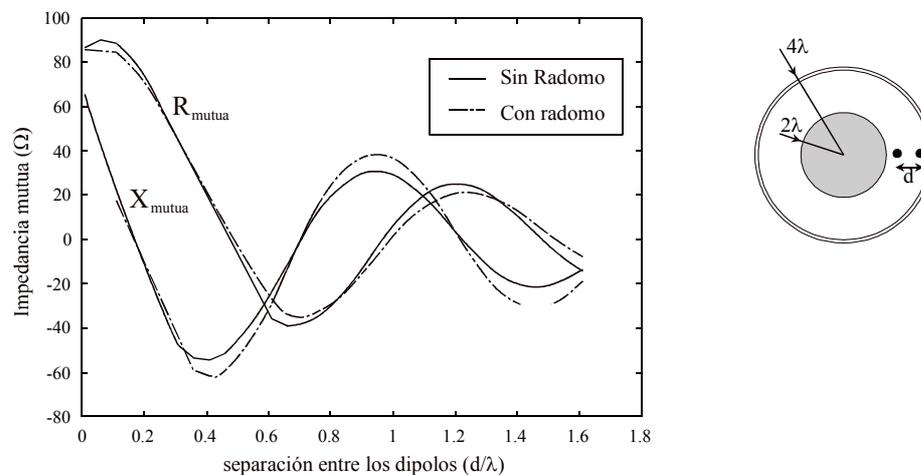


figura (6.10) Influencia del radomo en la impedancia mutua entre dos dipolos.

Conclusiones y Líneas Futuras

1. CONCLUSIONES

El trabajo que se ha desarrollado en los capítulos precedentes constituye un acercamiento unificado y sistemático al tratamiento de los problemas electromagnéticos. Es unificado porque se muestra como una alternativa elegante que facilita la combinación de distintas técnicas de análisis apoyándose en una metodología matricial común. Y es sistemático porque tras obtener la caracterización matricial de un elemento en el contexto de un problema, su matriz de admitancias generalizadas es reutilizable en otros problemas distintos donde aparezca el mismo elemento. Esta es una característica cada vez más apreciada por cuanto permite la creación de bibliotecas de elementos que pueden conectarse entre sí, sin necesidad de rehacer los cálculos cada vez. En este sentido algunos de los ejemplos aportados son el resultado de la combinación de distintas técnicas numéricas: modales-elementos finitos, espectrales-elementos finitos o modales-MEC.

La correcta aplicación del principio de equivalencia en la definición de la admitancia generalizada de un recinto ha desempeñado un papel esencial, ya que ha permitido identificar cada recinto e independizarlo del resto del problema para su

caracterización por el método más idóneo. Se ha podido comprobar que los problemas abiertos, al igual que los cerrados, son susceptibles de resolverse mediante procedimientos circuitales sin necesidad de introducir modificaciones en las técnicas de segmentación.

A pesar de que algunos de los operadores integrales descritos, y las técnicas numéricas que los discretizan son conocidos desde hace tiempo, la bibliografía consultada no dispone de ningún estudio que sintetice y compare las distintas técnicas adaptándolas al modelado circuital.

Se han aportado soluciones analíticas a algunos problemas tradicionalmente resueltos con técnicas numéricas o de alta frecuencia; tal es el caso del reflector diédrico o de la placa conductora, donde las regiones resultantes de la segmentación presentaban una geometría separable.

El operador integral basado en la función de onda es una de las aportaciones de esta tesis. Este operador se ha mostrado especialmente sencillo de aplicar, proporcionando una notable exactitud y una rápida convergencia en todos los problemas estudiados. Esta última facultad es particularmente importante en problemas abiertos, donde se ha podido comprobar que es posible abordar la caracterización de objetos eléctricamente grandes empleando un número razonable de incógnitas.

Posteriormente se han apuntado varios procedimientos de segmentación, con paredes conductoras o sin ellas, facilitando así la descomposición del problema y su posterior modelo circuital. El fenómeno de la interacción múltiple entre elementos inconexos ha encontrado también una descripción circuital empleando el transformador como componente que explica dicha interacción.

La descripción circuital ha facilitado la conexión de situaciones comunes en problemas abiertos, con otras mas propias de contextos cerrados. Así, se ha podido analizar un conjunto de postes en guía sin apenas alterar la formulación básica.

Finalmente se ha considerado una clase de problemas tridimensionales: aquellos en los que una fuente finita se sitúa junto a una estructura con simetría axial. Se ha desarrollado un nuevo procedimiento espectral que nos ha permitido calcular de forma eficiente parámetros que hasta ahora sólo recibían un tratamiento aproximado, como la impedancia de entrada de un dipolo. El enfoque descrito en el capítulo 6 ha resultado especialmente apropiado al facilitar la extensión de los

métodos bidimensionales aportados en los capítulos 3 y 4 al análisis circuital de este tipo de problemas tridimensionales. Esto es particularmente notable porque el único procedimiento alternativo, basado en la combinación MM-GTD, se muestra completamente ineficiente frente a estructuras cilíndricas complejas.

2. LÍNEAS FUTURAS

Debemos apuntar algunos aspectos que no han quedado recogidos en este trabajo y que serán objeto de posterior estudio.

La sistematización del tratamiento de problemas electromagnéticos conllevará el desarrollo de facilidades para la creación de una biblioteca de elementos. Asimismo se creará un entorno que permita la interconexión de elementos y el análisis del circuito.

Otro aspecto que merecerá atención es la extensión del modelado circuital a estructuras tridimensionales arbitrarias introduciendo los desarrollos modales en coordenadas esféricas.

Entre los procedimientos espectrales será de gran utilidad la combinación eficiente de las técnicas espectrales cilíndricas con los métodos basados en espectros de ondas planas. Esto puede ser de gran utilidad para la caracterización de objetos en estructuras planas multicapa.

El método espectral descrito en el capítulo 6 debe ser desarrollado también para considerar fuentes con orientación arbitraria. También se pretende estudiar la posibilidad de caracterizar cuerpos cilíndricos de longitud finita. Este aspecto puede resultar especialmente útil en el análisis de postes finitos en guía.

