UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Matemática Aplicada

CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES PRECISAS DE PROBLEMAS MIXTOS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON COEFICIENTES VARIABLES SEPARABLES

Pedro Almenar Belenguer

TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Matemática Aplicada

CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES PRECISAS DE PROBLEMAS MIXTOS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON COEFICIENTES VARIABLES SEPARABLES

Tesis doctoral

Presentada por:

D. Pedro Almenar Belenguer

Dirigida por:

Dr. D. Lucas Jódar Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

LUCAS JÓDAR SÁNCHEZ, CATEDRÁTICO DE UNIVERSIDAD DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA,

CERTIFICA: Que la presente memoria **CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES PRECISAS DE PROBLEMAS MIXTOS PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON COEFICIENTES VARIABLES SEPARABLES**, ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, por *D. Pedro Almenar Belenguer*, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia la referida tesis, firmando el presente certificado en Valencia, en Diciembre de mil novecientos noventa y ocho.

Lucas Jódar Sánchez

"Seguro que también tú, querido lector, entablaste de niño conocimiento con el soberbio edificio de la Geometría de Euclides y recuerdas, quizá con más respeto que amor, la imponente construcción por cuyas altas escalinatas te pasearon durante horas sin cuento los meticulosos profesores de la asignatura. Y seguro que, en virtud de ese tu pasado, castigarías con el desprecio a cualquiera que declarase falso incluso el más recóndito teoremita de esta ciencia. Pero es muy posible que ese sentimiento de orgullosa seguridad te abandonara de inmediato si alguien te preguntara: "¿ Qué entiendes tú al afirmar que estos teoremas son verdaderos ?". Detengámonos un rato en esta cuestión."

Albert Einstein, *Sobre la teoría de la relatividad especial y general.*

Indice

Agradecimientos

A todos aquéllos que han posibilitado directa o indirectamente la aparición de esta tesis, en especial a Reyes y a mis padres, por el apoyo que han supuesto para mí y la enorme paciencia que han tenido siempre conmigo (créanme, les aseguro que hay que tener paciencia). Y también a Lucas, sin cuya ayuda esta tesis jamás hubiera visto la luz.

Valencia — Pedro Almenar Belenguer
Diciembre de 1998

Capítulo 1

Introducción

La cita que abre esta tesis es una de las más acertadas que hay en la historia de la ciencia. Y es que es una actitud muy humana el descartar de antemano alternativas que chocan de frente con nuestra intuición natural, o al menos con la forma de ver las cosas que hemos aprendido a lo largo de nuestra vida.

La presente tesis tratará de llevar este ejemplo al mundo matemático, ciñéndonos a un campo particular del Cálculo como es el de la resolución de problemas con derivadas parciales sobre recintos espacialmente acotados. Evidentemente, no vamos a provocar ninguna revolución en dicho entorno, pero pensamos que habremos logrado nuestro objetivo si, al menos, la próxima vez que el lector se enfrente con uno de dichos problemas, antes de decantarse por un método de resolución y descartar el resto, se para un momento a considerar una cuestión que a primera vista puede parecer pueril: hasta qué punto la falta de información que nos proporciona un método sobre los valores exactos que toma la solución en cada punto nos obliga a ignorarlo aunque nos asegure al menos la existencia de la solución. O escribiéndolo de otro modo: por qué saber que una solución existe es tan importante como saber calcularla.

Los ejemplos que trataremos girarán fundamentalmente en torno al conocido método de separación de variables. Esta técnica, de la cual hay bibliografía abundante, consiste en separar un problema constituido por una ecuación en derivadas parciales junto con unas condiciones iniciales y de contorno, en problemas compuestos de ecuaciones diferenciales ordinarias independientes para cada variable. La resolución de dichos problemas en todas las variables y la superposición de las soluciones obtenidas en forma de serie nos ofrece una serie candidata a solución cuya validez hay que comprobar a posteriori.

Este método suele tener bastante éxito cuando los problemas que se nos presentan contienen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales simples. Sin embargo, cuando éstas se complican, las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen para cada variable suelen ser extremadamente complicadas, en muchos casos irresolubles. Ello es muy frecuente cuando dichas ecuaciones son de grado igual o superior a dos, pues para éstas no existe ninguna expresión general que nos dé la solución. Dada la abundancia de tales ecuaciones, no es de extrañar que el método goce de escasa popularidad para el tratamiento de problemas complejos.

Sin embargo, y éste es el punto fundamental de nuestro desarrollo, demostraremos que aunque no sepamos resolver las ecuaciones obtenidas para cada variable sí podemos extraer de ellas la suficiente información para construir una serie solución del problema (constituida por las soluciones de momento desconocidas de cada problema) incalculable pero válida. Nótese la diferencia entre ambos términos: sabemos que la solución construida es solución, lo que no sabemos es cómo calcularla con total exactitud. De hecho, en un primer momento no nos va a preocupar ni siquiera el cómo calcularla.

Por ello, el siguiente paso será siempre aprovechar las propiedades que hayamos podido deducir de la solución exacta para aproximarla por medio de otros métodos numéricos (la aproximación de la solución exacta por métodos numéricos es lo que otorga el calificativo de técnica mixta analítico-numérica al proceso total seguido). A lo largo de esta tesis nos hemos decantado, en general, por métodos numéricos multipaso, pero no tienen porqué ser los únicos. De hecho, sería interesante examinar el esfuerzo computacional que supone la aproximación de la solución por medio de otras vías.

Todos los ejemplos expuestos harán hincapié en el cálculo y acotación del error producido al aproximar. Entendemos que los conceptos de aproximación y error son inseparables: de nada sirve saber que una función es una aproximación de otra si no conocemos el error máximo cometido al aproximar, pues nada nos permite asegurar que cualquier otra función que escojamos estará más cerca de la solución que nuestra "aproximación".

Los problemas que estudiaremos estarán relacionados fundamentalmente con la ecuación de ondas en sus diferentes versiones, pues ésta contiene ecuaciones de segundo orden en todas las variables involucradas en el problema. Es en dichas ecuaciones donde el método de separación de variables, con el necesario desarrollo, se revela como más eficaz, dada la ausencia de otros métodos exactos para resolverlas. No obstante, también se analizará un problema con la ecuación de difusión, para probar la eficacia del método para otras ecuaciones.

Asimismo, todos los casos a analizar serán bidimensionales. Si bien este hecho puede considerarse como una pérdida de generalidad respecto a problemas más interesantes, pensamos que los resultados obtenidos son suficientemente comprensibles y sugerentes para hacernos una idea de cómo extender el método a un número superior de variables.

El hilo argumental de esta tesis se basa en la exposición de una serie de problemas paulatinamente crecientes en dificultad. No obstante, tal sucesión de ejemplos será más un medio para probar nuestros planteamientos que un fin en sí misma: no tratamos únicamente de mostrar variaciones más o menos sofisticadas del mismo problema (en cualquier caso, ahí estarán sus soluciones), sino que pretendemos desarrollar un hábito para resolver las posibles complicaciones que nos pueden aparecer al extender el método expuesto a otros ámbitos.

De paso, proporcionaremos al lector suficientes herramientas para resolver cualquier tipo de problemas donde aparezca una ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{q(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left[p(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right], \quad t > 0, 0 < x < L. \tag{1.0.1}$$

Ejemplos de tales situaciones aparecen en muchos campos de la Física moderna: el estudio de propagación de ondas electromagnéticas en medios no homogéneos, como ferritas o medios anisótropos [14], estudio de calentamiento de sustancias por medio de microondas ([39, cap.3] y [23]), procesado electromagnético de materiales por medio de altas densidades de potencia , procesos de secado de materiales finos higroscópicos [41, cap.10], propagación de ondas electromagnéticas sobre una fibra óptica ([36]), etc. Su utilidad, pues, resulta evidente.

En general, los métodos empleados para resolver ese tipo de problemas suelen ser por defecto los numéricos basados en esquemas de diferencias o de elementos finitos (ver [16] o [50]). Estos métodos poseen inconvenientes tanto a nivel matemático como físico. A nivel matemático, la solución numérica presenta un error difícil de controlar en la mayor parte de los casos, además de tener un elevado coste computacional. A nivel físico, la aproximación obtenida no es mas que un conjunto discreto de datos del que no se puede extraer ninguna propiedad física: son valores válidos para un problema y entorno determinado, sin posibilidad de abstraer o generalizar pautas de comportamientos que nos revelen algún hecho físico interesante. Las soluciones exactas, por el contrario, al darse en fórmulas compactas, pueden interpretarse físicamente y nos pueden servir de base para futuros modelos. Es por esto por lo que el método de separación de variables, como cualquier otro que nos proporcione una fórmula explícita (en este caso una serie de funciones), nos parece tan interesante frente a soluciones directamente obtenidas mediante métodos numéricos. Y es por ello por lo que trataremos de justificar su uso.

Además de esta introducción y una conclusión, esta tesis constará de otros seis capítulos. El primero de ellos examinará un problema con la ecuación de ondas con variación exclusivamente temporal en su forma más simple:

$$c(t)u_{xx} = u_{tt}.$$

Este capítulo nos servirá de introducción para comenzar a enfrentarnos a las dificultades inherentes al método. En él se presentarán algunos resultados claves para el resto del documento. El capítulo 3 complicará el problema anterior al añadir un término de amortiguamiento. Como se verá, ello nos obligará a rehacer los cálculos hechos en el capítulo 2 siguiendo la misma filosofía, e introducirá otros problemas a nivel de la aproximación:

$$u_{tt} + a(t)u_t = c(t)u_{xx}.$$

El capítulo 4 cerrará la serie de problemas caracterizados por la variación de los coeficientes exclusivamente temporal al añadir un nuevo y definitivo término a la ecuación. Como se verá aquí, las técnica seguida se complicará sobremanera y nos obligará a un verdadero esfuerzo imaginativo para obtener resultados similares a los del capítulo 3.

$$u_{tt} + c(t)u_t + b(t)u = a(t)u_{xx}.$$

En el capitulo 5 se analizará el primer caso de variación espacial en los coeficientes de la ecuación. Concretamente, se probará un caso con variación lineal en x. Ello nos permitirá salir de los desarrollos en serie de Fourier usados hasta ese momento para analizar otra categoría de desarrollos en serie como los de Bessel-Dini. Por ello, la obtención de las cotas para expansiones en serie de determinados conjuntos de funciones ortogonales empezará a cobrar importancia.

$$[xu_x]_x = [p(t)u_t]_t.$$

A partir del capítulo 6 se generalizará el problema al admitir variaciones en x de cualquier tipo (con las mínimas restricciones admisibles, que se determinarán). Ello va a complicar notablemente la obtención de soluciones, especialmente en lo que atañe al cálculo de cotas de expansiones en serie de autofunciones, por lo que hemos decidido dedicar a este tema dos capítulos. Así, el capítulo 6 analizará un problema más simple, al tratar la ecuación de difusión. En él se desarrollarán los resultados básicos para un estudio de ese tipo. Dichos resultados se aplicarán finalmente en el capítulo 7, que analizará el problema generalizado de la ecuación de ondas

$$b(t)u_{tt} = a(x)u_{tt}.$$

problema con el que cerraremos la exposición teórica de esta tesis.

1.1 Algunas definiciones

A lo largo del presente documento emplearemos algunos conceptos y resultados en repetidas ocasiones, por los que hemos consideramos conveniente mencionarlos previamente para facilitar la posterior lectura del texto.

Definición 1. *Si A es una matriz en $\mathbb{R}^{m\times n}$, su norma de Frobenius, denotada por $\|A\|_F$, se define como*

$$\|A\|_F = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Definición 2. *Si A es una matriz en $\mathbb{R}^{m\times n}$, su norma-2, denotada por $\|A\|_2$, se define como*

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

donde para cualquier vector $y \in C^n$, $\|y\|_2 = \left(y^T y\right)^{\frac{1}{2}}$ no es más que la comunmente usada norma euclídea de y.

De [20, p.57], si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, queda claro que ambas normas están relacionadas por

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\, \|A\|_2 , \tag{1.1.1}$$

y

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|. \tag{1.1.2}$$

Teorema 1 (Leibniz). ***[17, teorema 8.11.2 p. 174]***
Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y sea

$$\begin{array}{rccc} f: & [a,b]\times]c,d[& \longrightarrow & \mathbb{C}^{r\times q} \\ & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} ,$$

una función tal que $\forall\,(x,t) \in [a,b]\times]c,d[$ $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe y es continua. Entonces, la función

$$\begin{array}{rccc} g: &]c,d[& \longrightarrow & \mathbb{C}^{r\times q} \\ & t & \mapsto & g(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx \end{array}$$

es diferenciable, y

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \quad .$$

Capítulo 2

Existencia, unicidad y construcción de problemas mixtos para la ecuación de ondas unidimensional con coeficientes variables dependientes del tiempo

2.1 Introducción

Este capítulo trata de ser un primer acercamiento a la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales mediante técnicas analítico-numéricas. En él se plantea el problema, en apariencia simple[1]

$$u_{tt}(x,t) - c(t)u_{xx}(x,t) = 0\,, \quad 0 < x < p\,, \quad t > 0\,, \tag{2.1.1}$$

$$u(0,t) = u(p,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \tag{2.1.2}$$

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad 0 \leq x \leq p\,, \tag{2.1.3}$$

$$u_t(x,0) = g(x)\,, \quad 0 \leq x \leq p\,, \tag{2.1.4}$$

[1] El problema aquí expuesto se puede considerar como una versión corregida y aumentada de [25] y [26].

donde $c(t)$ es una función real positiva definida en $[0,+\infty[$, que cumple

$$\begin{gathered} c(t) \text{ es 2 veces continuamente diferenciable y} \\ |c'(t)| + |c''(t)| > 0 \text{ para todo } t \geq 0 \ , \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

y $f(x)$, $g(x)$ son funciones con propiedades a determinar.

El problema anterior es un claro ejemplo de propagación de ondas estacionarias en medios cambiantes con el tiempo. De hecho, se puede asimilar al de una cavidad resonante en el que en dos dimensiones (las transversales al objeto) se verifica la ecuación de Laplace, y en el que se inducen ciertos cambios en el dieléctrico contenido que provocan variaciones de la constante dieléctrica con el tiempo, por ejemplo por calentamiento. El modelo es muy exacto cuando el dieléctrico tiene como mecanismo fundamental de polarización el de polarización por orientación (ver [3]).

La aparente sencillez del problema propuesto no debe conducir a engaño al lector. La variación temporal mostrada invalida muchos métodos de análisis teóricos como Fourier, Laplace o, en general, todos los basados en transformaciones sobre la variable t. El método de separación de variables, a priori, tampoco parece un candidato claro, dado que la ecuación obtenida para t es en principio irresoluble (así como para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden hay fórmulas generales que nos permiten encontrar su solución para cuaquier expresión del coeficiente, para las de segundo orden la afirmación anterior es falsa. En general, pocas ecuaciones de segundo orden tienen solución conocida. El método más empleado para resolverlas, el de Frobenius, presenta el inconveniente de que requiere que la función coeficiente sea analítica, lo que invalida buena parte de las funciones posibles). Trataremos, no obstante, de mostrar que aún sin conocer la solución de la ecuación para t, podemos extraer ciertas propiedades de dicha solución, a partir de la forma de la ecuación, que nos permitan aplicarlas donde convenga.

Los resultados obtenidos aquí, serán ampliados en sucesivos capítulos, lo que confirmará la validez del método para problemas aparentemente muy complejos. Creemos conveniente comenzar con un problema simplificado antes de tratar de saltar a situaciones de mayor dificultad para aumentar la claridad e inteligibilidad del presente texto, de modo que el lector sea consciente en cada caso del grado de dificultad que añade cada variación de este problema inicial.

El capítulo está organizado como sigue. El apartado 2 analiza la ecuación diferencial ordinaria

$$Y'' + \lambda^2 c(t)\, Y = 0 \,, \quad 0 \le t \le T \tag{2.1.6}$$

donde $\lambda > 0$. Se probará que dicha ecuación posee un sistema fundamental de soluciones $\{z(t), w(t)\}$ que verifican $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, y que están uniformemente acotadas en $[0, T]$ cuando $\lambda \to \infty$. Este hecho nos permitirá garantizar la existencia de un sistema fundamental de soluciones $\{z_n(t), w_n(t)\}$ de la ecuación

$$T'' + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)\, T = 0 \,, \quad 0 \le t \le T \,, \quad n \ge 1 \tag{2.1.7}$$

que cumplen

$$z_n(0) = 1 \,, \quad z_n'(0) = 0 \,, \quad w_n(0) = 0 \,, \quad w_n'(0) = 1 \,, \tag{2.1.8}$$

con

$$|z_n(t)| \,, \quad |w_n(t)| \quad uniformemente \quad acotadas \quad en \quad [0, T] \,, \quad para \quad todo \quad n \ge 1 \,.$$

El apartado 3 está dedicado a probar la existencia de una solución en serie del problema (2.1.1)-(2.1.4), de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n \ge 1} \{ a_n\, z_n(t) + b_n\, w_n(t) \} \text{ sen} \left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

En el apartado 4 trataremos la siguiente cuestión: Dado un error admisible $\epsilon > 0$ y un dominio compacto $D(T) = \{(x,t); 0 \leq x \leq p, \ 0 \leq t \leq T\}$, con $T > 0$, cómo construir una solución numérica continua del problema (2.1.1)-(2.1.4), de modo que el error en la aproximación esté uniformemente acotado superiormente por ϵ en $D(T)$. La construcción será de la siguiente manera. Primero la serie infinita será truncada de manera apropiada. Después, la soluciones teóricas $z_n(t)$ y $w_n(t)$ del problema (2.1.7)-(2.1.8), serán aproximadas en una malla de puntos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, por medio de la fórmula de Stormer. Finalmente, usando funciones B-spline lineales, se construirá la solución numérica continua buscada tomando como referencia las aproximaciones sobre los puntos de la malla.
El tamaño del paso h a usar en la fórmula de Stormer será elegido de modo que el error en la aproximación esté uniformemente acotado por ϵ en $D(T)$.

Al final de este capítulo, el último apartado demostrará la unicidad de la solución encontrada en el apartado 3.

2.2 La ecuación diferencial $Y'' + \lambda^2 k(t) Y = 0$

El propósito de este apartado es la demostración del siguiente resultado, fundamental tanto en este capítulo como en el resto del presente documento.

Teorema 2. *Sea* $\lambda > 0$ *y* $k(t)$ *una función positiva 2 veces continuamente diferenciable, tal que*

$$|\,k'(t)\,| + |\,k''(t)\,| > 0 \,, \quad \textit{para} \ \ t > 0 \tag{2.2.1}$$

Sea $K > 0$ *el real que cumple*

$$K = \max\{\,k(t)\,; \quad 0 \leq t \leq T\,\} \,. \tag{2.2.2}$$

Sea $T > 0$, *y* $\{z(t), w(t)\}$ *el sistema fundamental de soluciones de*

$$Y'' + \lambda^2\, k(t)\; Y = 0 \,, \quad t \geq 0 \,, \tag{2.2.3}$$

tal que

$$z(0) = 1\,; \quad z'(0) = 0\,; \quad w(0) = 0\,; \quad w'(0) = 1\,. \tag{2.2.4}$$

Entonces existe una constante $M > 0$ *, independiente de* λ *, tal que*

$$\left.\begin{array}{l} |z(t)| \leq M \quad , \quad |w(t)| \leq M\left(\lambda\sqrt{k(0)}\right)^{-1} \ , \\ \\ |z'(t) \leq \lambda\sqrt{K}M \quad , \quad |w'(t)| \leq M\sqrt{\frac{K}{k(0)}} \ , \end{array}\right\} \quad \textit{para todo} \ \ t \in [0,T] \, . \tag{2.2.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos 4 casos.

$\boxed{\text{Caso 1.}}$ $\underline{\ k(t) \text{ es creciente en } [0,T]\, .\ }$

Sea $Y(t)$ una solución de (2.2.3) en $[0,T]$, y asociémosle la función

$$F(Y,t) = [Y(t)]^2 + \frac{1}{k(t)}\left[\frac{Y'(t)}{\lambda}\right]^2 , \quad t \in [0,T] \tag{2.2.6}$$

Tomando derivadas respecto a t y teniendo en cuenta que $Y(t)$ es una solución de (2.2.3), se tiene

$$F'(Y,t) = 2Y(t)Y'(t) + \frac{2k(t)Y'(t)Y''(t) - (Y'(t))^2 k'(t)}{\lambda^2 (k(t))^2}$$

$$= 2Y(t)Y'(t) - \frac{2(k(t))^2 Y'(t)Y(t)\lambda^2 + (Y'(t))^2 k'(t)}{\lambda^2 (k(t))^2}$$

$$F'(Y,t) = -\left[\frac{Y'(t)}{\lambda\, k(t)}\right]^2 k'(t) \leq 0\, , \quad t \in [0,T]\ . \tag{2.2.7}$$

De (2.2.7) se sigue que $F(Y,\cdot)$ es decreciente en $[0,T]$ y

$$F(Y,t) \leq F(Y,0) = (Y(0))^2 + \frac{1}{k(0)}\left[\frac{Y'(0)}{\lambda}\right]^2 , \quad t \in [0,T]\ . \tag{2.2.8}$$

Particularicemos para $F(z,t)$ y $F(w,t)$. Por (2.2.4) y (2.2.8), es evidente que

$$F(z,t) = (z(t))^2 + \frac{1}{k(t)}\left[\frac{z'(t)}{\lambda}\right]^2 \leq F(z,0) = 1\, , \quad t \in [0,T]\ ;$$

$$F(w,t) = (w(t))^2 + \frac{1}{k(t)}\left[\frac{w'(t)}{\lambda}\right]^2 \leq F(w,0) = \frac{1}{\lambda^2\, k(0)}\, , \quad t \in [0,T]\ .$$

Por tanto

$$|z(t)| \leq 1 \quad y \quad |w(t)| \leq \left(\lambda\,\sqrt{k(0)}\right)^{-1}\;, \quad t \in [0,T]\;; \tag{2.2.9}$$

$$|z'(t)| \leq \lambda\sqrt{k(t)} \leq \lambda\sqrt{K} \quad y \quad |w'(t)| \leq \sqrt{\frac{k(t)}{k(0)}} \leq \sqrt{\frac{K}{k(0)}}\,, \quad t \in [0,T]\;. \tag{2.2.10}$$

De (2.2.9) y (2.2.10) se concluye, tomando

$$M = 1\;, \tag{2.2.11}$$

la validez de (2.2.5).

$\boxed{\text{CASO 2.}}$ $\underline{\;k(t)\;\text{ es decreciente en }\;[0,T]\,.}$

Como antes, sea $Y(t)$ una solución de (2.2.3) en $[0,T]$, y asociémosle la función

$$G(Y,t) = \lambda^2 k(t)(Y(t))^2 + (Y'(t))^2\,, \quad t \in [0,T]\;. \tag{2.2.12}$$

Dado que $Y(t)$ es solución de (2.2.3), se sigue que

$$G'(Y,t) = \lambda^2 k'(t)(Y(t))^2 + 2\lambda^2 k(t)Y(t)Y'(t) + 2Y'(t)Y''(t)$$

$$= \lambda^2 k'(t)(Y(t))^2 + 2\lambda^2 k(t)Y(t)Y'(t) - 2\lambda^2 Y'(t)Y(t)k(t)\,,$$

$$G'(Y,t) = \lambda^2 k'(t)(Y(t))^2 \leq 0\,, \quad t \in [0,T]\;. \tag{2.2.13}$$

De (2.2.13), la función $G(Y,\cdot)$ es decreciente en $[0,T]$, y

$$G(Y,t) \leq G(Y,0) = \lambda^2 k(0)(Y(0))^2 + (Y'(0))^2\,, \quad t \in [0,T]\;. \tag{2.2.14}$$

Particularizando para $G(z,\cdot)$ y $G(w,\cdot)$, de (2.2.4) y (2.2.14), se tiene que

$$G(z,t) \leq G(z,0) = \lambda^2 k(0)(z(0))^2 + (z'(0))^2 = \lambda^2 k(0)\,, \quad t \in [0,T]\,, \tag{2.2.15}$$

$$G(w,t) \leq G(w,0) = \lambda^2 k(0)(w(0))^2 + (w'(0))^2 = 1\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{2.2.16}$$

De (2.2.15), (2.2.16) y la definición de $G(z,\cdot)$, $G(w,\cdot)$, se llega a

$$\lambda^2 k(t)(z(t))^2 \leq \lambda^2 k(0)\,; \quad |z(t)| \leq \left(\frac{k(0)}{k(T)}\right)^{1/2} \ , \quad t \in [0,T] \ ,$$

$$\lambda^2 k(t)(w(t))^2 \leq 1\,; \quad |w(t)| \leq \left(\lambda\sqrt{k(t)}\right)^{-1} \leq \left(\lambda\sqrt{k(T)}\right)^{-1} \ , \quad t \in [0,T] \ ,$$

$$(z'(t))^2 \leq \lambda^2 k(0)\,; \quad |z'(t)| \leq \lambda\,(k(0))^{1/2} \ , \quad t \in [0,T] \ ,$$

$$(w'(t))^2 \leq 1\,; \quad |w(t)| \leq 1\,, \quad t \in [0,T] \ .$$

De lo cual se concluye que

$$|z(t)| \leq \sqrt{\frac{k(0)}{k(T)}} = M \ , \ |w(t)| \leq \left(\lambda\sqrt{k(T)}\right)^{-1} = M\left(\lambda\sqrt{k(0)}\right)^{-1},$$

$$|z'(t)| \leq \lambda\sqrt{k(T)}M \leq \lambda\sqrt{K}M \text{ y } |w'(t)| \leq \sqrt{\frac{k(T)}{k(0)}}M \leq \sqrt{\frac{K}{k(0)}}M, \tag{2.2.17}$$

$$t \in [0,T] \ .$$

$\boxed{\text{Caso 3.}}$ Existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < T$, tal que $k(t)$ is creciente en $[0,t_0]$, $[t_1,t_2]$, $\ldots$, $[t_{2k+1},t_{2k+2}]$ y decreciente en $[t_0,t_1]$, $[t_2,t_3]$, $\ldots$ $[t_{2k},t_{2k+1}]$, con $T = t_{2k+1}$ o $T = t_{2k+2}$.

Sea $Y(t)$ una solución de (2.2.3), y consideremos las funciones asociadas $F(Y,\cdot)$ y $G(Y,\cdot)$, definidas por (2.2.6) y (2.2.12) respectivamente. Nótese que ambas funciones vienen relacionadas por la ecuación

$$\lambda^2 k(t) F(Y,t) = G(Y,t)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{2.2.18}$$

Por (2.2.7) sabemos que

$$F(Y,\cdot) \quad \textit{es} \quad \textit{decreciente} \quad \textit{en}\ [0,t_0]\,,\ [t_1,t_2]\,,\ \ldots\,,\ [t_{2k+1},t_{2k+2}]\,, \tag{2.2.19}$$

y por (2.2.13),

$$G(Y,\cdot) \quad es \quad decreciente \quad en\, [t_0,t_1]\,,\; [t_2,t_3]\,,\;\ldots\,,\; [t_{2k},t_{2k+1}]. \tag{2.2.20}$$

De (2.2.18) y (2.2.19) se tiene

$$\begin{gathered} F(Y,t) \leq F(Y,0)\,, \quad 0 \leq t \leq t_0\;, \\ G(Y,t) \leq \lambda^2 k(t_0) F(Y,0)\,, \quad 0 \leq t \leq t_0\;. \end{gathered} \tag{2.2.21}$$

Con lo que, de (2.2.12), (2.2.18) y (2.2.20), se deduce

$$\begin{gathered} G(Y,t) \leq G(Y,t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \text{ y } G(Y,t_1) \leq \lambda^2 k(t_0) F(y,0)\;, \\ F(Y,t_1) = \frac{G(Y,t_1)}{\lambda^2\, k(t_1)} \leq \frac{k(t_0)}{k(t_1)} F(Y,0)\;. \end{gathered} \tag{2.2.22}$$

De (2.2.18), (2.2.19) y (2.2.22) se tiene

$$\begin{gathered} F(Y,t) \leq F(Y,t_1) \leq \frac{k(t_0)}{k(t_1)} F(Y,0)\,, \quad t_1 \leq t \leq t_2\;, \\ G(Y,t_2) = \lambda^2 k(t_2) F(Y,t_2) \leq \frac{\lambda^2 k(t_0) k(t_2)}{k(t_1)} F(Y,0)\;. \end{gathered} \tag{2.2.23}$$

De (2.2.18), (2.2.20) y (2.2.23), se sigue ahora

$$\begin{gathered} G(Y,t) \leq G(Y,t_2)\;, \quad t_2 \leq t \leq t_3\;, \\ G(Y,t_3) \leq \frac{\lambda^2 k(t_0) k(t_2)}{k(t_1)} F(Y,0)\;, \\ F(Y,t_3) = \frac{G(Y,t_3)}{\lambda^2 k(t_3)} = \frac{k(t_0) k(t_2)}{k(t_1) k(t_3)} F(Y,0)\;. \end{gathered} \tag{2.2.24}$$

De manera análoga, se tiene

$$\begin{gathered} F(z,t_4) \leq \frac{k(t_0) k(t_2)}{k(t_1) k(t_3)} F(Y,0)\;, \\ G(z,t_4) \leq \frac{\lambda^2 k(t_4) k(t_2) k(t_0)}{k(t_1) k(t_3)} F(Y,0)\;. \end{gathered} \tag{2.2.25}$$

Y en general,

$$F(Y,t) \leq F(Y,t_{2k+1}) \leq \frac{k(t_{2k}) \cdots k(t_2)k(t_0)}{k(t_{2k+1}) \cdots k(t_3)k(t_1)} F(Y,0) , \quad t_{2k+1} \leq t \leq t_{2k+2} \ . \quad (2.2.26)$$

De (2.2.6) y (2.2.26), por tanto, podemos establecer

$$\left.\begin{aligned} |Y(t)| &\leq \left[\frac{k(t_{2k}) \cdots k(t_2)k(t_0)}{k(t_{2k+1}) \cdots k(t_3)k(t_1)}\right]^{1/2} \sqrt{F(Y,0)} , \\ |Y'(t)| &\leq \lambda\sqrt{k(t)} \left[\frac{k(t_{2k}) \cdots k(t_2)k(t_0)}{k(t_{2k+1}) \cdots k(t_3)k(t_1)}\right]^{1/2} \sqrt{F(Y,0)} , \end{aligned}\right\} t_{2k+1} \leq t \leq t_{2k+2} \quad (2.2.27)$$

Respectivamente, para $G(Y,t)$ podemos también asegurar

$$G(Y,t) \leq G(Y,t_{2k}) \leq \frac{\lambda^2 k(t_{2k}) \cdots k(t_0)}{k(t_{2k-1}) \cdots k(t_1)} F(Y,0) \ , \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+1} \ , \quad (2.2.28)$$

y por (2.2.12), (2.2.20) y (2.2.28), tenemos

$$\begin{aligned} |Y(t)| &\leq \left[\tfrac{k(t_{2k}) \cdots k(t_0)}{k(t_{2k-1}) \cdots k(t_1)k(t)}\right]^{1/2} \sqrt{F(Y,0)} \\ &\leq \left[\tfrac{k(t_{2k}) \cdots k(t_0)}{k(t_{2k+1}) \cdots k(t_1)}\right]^{1/2} \sqrt{F(Y,0)} , \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+1} , \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

$$\begin{aligned} |Y'(t)| &\leq \lambda \left[\tfrac{k(t_{2k}) \cdots k(t_0)}{k(t_{2k-1}) \cdots k(t_1)}\right]^{1/2} \sqrt{F(Y,0)} \\ &\leq \lambda\sqrt{k(t_{2k+1})} \left[\tfrac{k(t_{2k}) \cdots k(t_0)}{k(t_{2k+1}) \cdots k(t_1)}\right]^{1/2} \sqrt{F(Y,0)} , \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+1} \, . \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Podemos aplicar ahora los resultados (2.2.27), (2.2.29) y (2.2.30) a $z(t)$ y $w(t)$. En efecto, de (2.2.4) resulta evidente que

$$|z(t)| \leq \left[\frac{k(t_0) \cdots k(t_{2k})}{k(t_1) \cdots k(t_{2k+1})}\right]^{1/2} \quad ; \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+2} \ , \quad (2.2.31)$$

$$|z'(t)| \leq \lambda \sqrt{\max_{t_{2k+1} \leq t \leq t_{2k+2}} k(t)} \left[\frac{k(t_0) \cdots k(t_{2k})}{k(t_1) \cdots k(t_{2k+1})}\right]^{1/2} \quad ; \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+2} \ , \quad (2.2.32)$$

$$|w(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k})}{k(0)k(t_1)\cdots k(t_{2k+1})}\right]^{1/2} \quad ; \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+2} \ , \tag{2.2.33}$$

$$|w(t)| \leq \sqrt{\max_{t_{2k+1}\leq t\leq t_{2k+2}} k(t)}\left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k})}{k(0)k(t_1)\cdots k(t_{2k+1})}\right]^{1/2} \quad ; \quad t_{2k} \leq t \leq t_{2k+2} \ . \tag{2.2.34}$$

Además, por las hipótesis, $k(t_{2k}) \geq k(t_{2k+1})$, con lo cual

$$\left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k})}{k(t_1)\cdots k(t_{2k+1})}\right]^{1/2} \geq \left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k-2})}{k(t_1)\cdots k(t_{2k-1})}\right]^{1/2} \tag{2.2.35}$$

y

$$\left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k})}{k(0)k(t_1)\cdots k(t_{2k+1})}\right]^{1/2} \geq \left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k-2})}{k(0)k(t_1)\cdots k(t_{2k-1})}\right]^{1/2} \ . \tag{2.2.36}$$

Así, por (2.2.31), (2.2.33), (2.2.35) y (2.2.36) se concluye que

$$\left.\begin{array}{l} |z(t)| \leq M \quad , \quad |w(t)| \leq (\lambda\sqrt{k(0)})^{-1}M \ , \\ \\ |z'(t)| \leq \lambda\sqrt{K}M \quad y \quad |w'(t)| \leq \sqrt{\dfrac{K}{k(0)}}M \ , \end{array}\right\} \ 0 \leq t \leq t_{2k+2} = T \ , \tag{2.2.37}$$

donde

$$M = \left[\frac{k(t_0)\cdots k(t_{2k})}{k(t_1)\cdots k(t_{2k+1})} \ .\right]^{1/2} \tag{2.2.38}$$

Con ello, el resultado queda establecido para el caso 3. Nótese el ligero cambio de situación que aparece cuando $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{2k+1} = T$, donde $k(t)$ es creciente en $[0, t_0], \ldots [t_{2k-1}, t_{2k}]$, y decreciente en $[t_0, t_1], \ldots [t_{2k}, t_{2k+1}]$. En ese caso, el resultado sigue siendo cierto dado que la ecuación (2.2.37) se verifica para $0 \leq t \leq t_{2k+1} = T$.

CASO 4. Existe una partición $0 < s_0 < s_1 < \cdots < s_{2k+1} = T$, tal que $k(t)$ es decreciente en $[0, s_0]$, $[s_1, s_2]$, $\ldots$, $[s_{2k-1}, s_{2k}]$ y creciente en $[s_0, s_1]$, $[s_2, s_3]$, $\ldots$ $[s_{2k}, s_{2k+1}]$.

La demostración de este caso es análoga a la del caso 3, considerando la partición t_0

$= 0 < t_1 < \cdots < t_{2k+2} = T$, con $t_i = s_{i-1}$, $i = 1, \ldots, 2k+2$.

Estos cuatro casos cubren todas la posibilidades, pues el intervalo compacto $[0, T]$ no puede tener una sucesión infinita $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, de modo que $k(t)$ sea alternativamente creciente y decreciente en intervalos consecutivos $[t_i, t_{i+1}]$ y $[t_{i+1}, t_{i+2}]$, con $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots$, $\lim_{i\to\infty} t_i \leq T$. De hecho, si así lo fuera, existiría una sucesión $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ de puntos en $[0, T]$ tal que

$$k'(t_i) \;=\; 0 \;, \quad i \geq 0 \,. \tag{2.2.39}$$

Por el teorema de Rolle ($k(t)$ es 2 veces continuamente diferenciable), existiría entonces otra sucesión de puntos $\xi_i \in]t_i, t_{i+1}[$ tal que

$$k''(\xi_i) \;=\; 0 \;, \quad i \geq 0 \;, \quad t_i < \xi_i < t_{i+1} \;. \tag{2.2.40}$$

Dado que $[0, T]$ es compacto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass deben existir subsucesiones $\{t_{n_i}\}_{i\geq 0}$ y $\{\xi_{n_i}\}_{i\geq 0}$ de las sucesiones $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$, respectivamente, tales que

$$t^* = \lim_{i\to\infty} t_{n_i} \quad y \quad t^* = \lim_{i\to\infty} \xi_{n_i} \;. \tag{2.2.41}$$

Como $k'(t)$ y $k''(t)$ son continuas $[0, T]$,de (2.2.41) se obtiene

$$k'(t^*) \;=\; k''(t^*) \;=\; 0 \;,$$

lo que contradice las hipótesis (2.2.1).

Si $k(t)$ fuera analítica, el argumento se podría repetir hasta el infinito, es decir, existiría un punto $t^* \in [0, T]$ en el que todas las derivadas de $k(t)$ se anularían. Como una función analítica se puede descomponer en serie de potencia alrededor de cualquier punto, por ejemplo t^*, resultaría que la función debería ser constante, situación que se puede englobar perfectamente dentro de los casos 1 ó 2. Por tanto, una función analítica no necesita siquiera cumplir la condición (2.2.1).

Con todo lo anterior, el resultado queda establecido. $\square$

Nota 1. *Nótese que de la prueba del teorema 2, la constante* M *que aparece en (2.2.5), viene dada por* $M = 1$ *si* $k(t)$ *es creciente, por* $M = \sqrt{\frac{k(0)}{k(T)}}$ *si* $k(t)$ *es decreciente en* $[0, T]$*, y por (2.2.38), si* $k(t)$ *es creciente y decreciente alternativamente en intervalos consecutivos* $[t_i, t_{i+1}]$ *y* $[t_{i+1}, t_{i+2}]$*, donde* $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < T$*, es una partición de* $[0, T]$*.*
Nótese que para cualquier real $\beta > 1$*, la función* $k(t) = \beta +$ *sen*(t)*, es positiva y verifica las hipótesis del teorema 2 (si bien su periodicidad la hace propicia a otros métodos de análisis).*

2.3 Solución teórica en serie

En este apartado aplicaremos el método de separación de variables para obtener una solución exacta del problema (2.1.1)-(2.1.4).
Buscando soluciones de (2.1.1)-(2.1.3) de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \tag{2.3.1}$$

resulta evidente que $X(x)$ y $T(t)$ deben cumplir:

$$X'' + \lambda^2 X = 0; \;\; X(0) = X(p) = 0, \;\; 0 < x < p, \tag{2.3.2}$$

y

$$T'' + \lambda^2 c(t) T = 0, \;\; t \geq 0. \tag{2.3.3}$$

El problema de Sturm-Liouville (2.3.2) es relativamente simple, y posee unos autovalores y autofunciones

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2, \;\; X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \;\; n \geq 1. \tag{2.3.4}$$

Para dichos valores de λ, la ecuación (2.3.3) adquiere la forma

$$T'' + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)T = 0,\ t \geq 0. \tag{2.3.5}$$

Bajo las hipótesis de que $c(t)$ es una función positiva 2 veces continuamente diferenciable que verifica la condición (2.1.5), por el teorema 2, para cada entero positivo $n \geq 1$, la ecuación (2.3.5) admite un sistema fundamental de soluciones en $[0, T]$, definido por

$$\{z_n(t), w_n(t)\},\quad n \geq 1, \tag{2.3.6}$$

$$z_n(0) = 1,\ z_n'(0) = 0,\ w_n(0) = 0,\ w_n'(0) = 1, \tag{2.3.7}$$

tal que

$$|z_n(t)| \leq M \quad \text{y} \quad |z_n'(t)| \leq \frac{n\pi}{p} M\sqrt{C},\ 0 \leq t \leq T, \tag{2.3.8}$$

$$|w_n(t)| \leq \frac{Mp}{n\pi\sqrt{c(0)}} \quad \text{y} \quad |w_n'(t)| \leq \sqrt{\frac{C}{c(0)}M}\ ,\ 0 \leq t \leq T, \tag{2.3.9}$$

donde M viene dado por el teorema 2, aplicado a $k(t) = c(t)$, y

$$C = \max\{c(t),\ 0 \leq t \leq T\}. \tag{2.3.10}$$

Por superposición de las soluciones $u_n(x,t)$ de (2.3.1), dadas por

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$u_n(x,t) = \text{ sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\},\ \ 0 \leq x \leq p,\ \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.3.11}$$

se obtiene una serie candidata a solución

$$u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} = \sum_{n\geq 1} u_n(x,t). \tag{2.3.12}$$

Si imponemos las condiciones iniciales (2.1.3) y (2.1.4), podemos asumir por un momento que tomamos

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx\,,\quad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx\,. \tag{2.3.13}$$

Para garantizar que $u(x,t)$ definida por (2.3.12)-(2.3.13), es 2 veces parcialmente diferenciable respecto a ambas variables x y t, en $[0,p]$, debemos asumir (como se verá) las siguientes hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es cuatro veces diferenciable y } f^{(4)}(x) \text{ es continua a trozos} \\ \text{en } [0,p],\ \text{ con } f(0) = f(p) = f''(0) = f''(p) = 0\,, \end{array}\right\} \tag{2.3.14}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ es tres veces diferenciable y } g'''(x) \text{ es continua a trozos} \\ \text{en } [0,p],\ \text{ con } g(0) = g(p) = g''(0) = g''(p) = 0. \end{array}\right\} \tag{2.3.15}$$

Entonces, por el teorema 4.4 de [7], la serie $u(x,t)$ definida por (2.3.12), (2.3.13) es 2 veces parcialmente diferenciable respecto a x, y

$$u_x(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{n\pi}{p}\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,,$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,. \tag{2.3.16}$$

Por otro lado, las series obtenidas por derivación parcial término a término de $u(x,t)$ respecto a t tienen la forma

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \tag{2.3.17}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2} &= \textstyle\sum_{n\geq 1} \{a_n z_n''(t) + b_n w_n''(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \\ &= -\textstyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right). \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Bajo las hipótesis (2.3.14)-(2.3.15), después de integrar por partes en la expresión de los coeficientes a_n, b_n (ver teorema 2.6 de [19]), se sigue que

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{P_1}{n^4}, \quad P_1 = \tfrac{2p^3}{\pi^4} \textstyle\int_0^p |f^{(4)}(x)|dx, \quad n \geq 1\,, \\ |b_n| &\leq \frac{P_2}{n^3}, \quad P_2 = \tfrac{2p^2}{\pi^3} \textstyle\int_0^p |g^{(3)}(x)|dx, \quad n \geq 1\,. \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

De (2.3.8)-(2.3.10) y (2.3.19) se obtiene

$$|a_n z_n'(t)| \leq \frac{M\pi\sqrt{C}P_1}{n^3 p}\ , \quad |b_n w_n'(t)| \leq \frac{MP_2}{n^3}\sqrt{\frac{C}{c(0)}}\ , \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1. \tag{2.3.20}$$

De (2.3.20) se sigue que la serie (2.3.17) es uniformemente convergente en $0 \leq x \leq p$, $0 \leq t \leq T$, y por el teorema de derivación de series de funciones, [8, p.385], la serie $u(x,t)$ definida por (2.3.12)-(2.3.13), es 2 veces parcialmente diferenciable término a término respecto a t, y

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right).$$

De (2.3.8)-(2.3.9) y (2.3.19), se tiene

$$\left|\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 a_n z_n(t)\right| \leq \frac{(\pi/p)^2 P_1 M}{n^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1, \tag{2.3.21}$$

$$\left|\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 b_n w_n(t)\right| \leq \frac{M(\pi/p)P_2}{\sqrt{c(0)}}\frac{1}{n^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1. \tag{2.3.22}$$

Por (2.3.21), (2.3.22) está claro que la serie (2.3.18) converge uniformemente en $(x,t) \in D(T)$, y por el teorema de derivación de series de funciones, $u(x,t)$ es 2 veces parcialmente diferenciable respecto a t, obteniéndose para $(x,t) \in D(T)$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) = & = \textstyle\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n''(t) + b_n w_n''(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}\right) \\ & = -\textstyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} c(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right). \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Finalmente, de (2.3.16) y (2.3.23), para $(x,t) \in D(T)$ se tiene

$$u_{tt}(x,t) - c(t)u_{xx}(x,t) =$$
$$\textstyle\sum_{n\geq 1}\{a_n(z_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)z_n(t)) + b_n(w_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)w_n(t))\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) = 0$$

y por (2.3.14)-(2.3.15) y el teorema 4.3 de [7],

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq p\,.$$

Por tanto, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 3. *Sea $c(t)$ una función positiva 2 veces continuamente diferenciable en $[0,+\infty[$, que satisface la condición (2.1.5), y sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones en $[0,p]$, que cumplen las condiciones (2.3.14) y (2.3.15), respectivamente. Si a_n, b_n, vienen definidos por (2.3.13), y $\{z_n(t), w_n(t)\}$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2.3.5), que verifica (2.3.7), entonces la función $u(x,t)$ definida por (2.3.12)-(2.3.13) es una solución exacta del problema (2.1.1)-(2.1.5).*

Nota 2. *La solución en serie $u(x,t)$ proporcionada por el teorema 3, presenta dos obstáculos desde un punto de vista computacional. Primero, la infinidad de la serie, y segundo, el hecho de que la expresión exacta del sistema fundamental de soluciones $\{z_n(t), w_n(t)\}$ de la ecuación (2.3.5) que verifica (2.3.7), no nos es conocida. Estos 2 hechos motivan la búsqueda de soluciones numéricas.*

2.4 Soluciones numéricas continuas con precisión prefijada

En este apartado nos enfrentaremos a la siguiente cuestión: cómo construir una solución numérica continua $\tilde{u}(x,t)$ del problema (2.1.1)-(2.1.5) en $D(T) = \{(x,t) \ / \ 0 \leq x \leq p, \ 0 \leq t \leq T\}$ de modo que el error $u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$ respecto a la solución exacta $u(x,t)$ proporcionada por el teorema 3, sea menor que un error admisible prefijado ϵ, uniformemente en $(x,t) \in D(T)$.

Nuestra estrategia será la siguiente. En primer lugar, truncaremos la serie (infinita) $u(x,t)$ definida en (2.3.12)-(2.3.13), de modo que

$$\sum_{n \geq n_0} |u_n(x,t)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ uniformemente en } (x,t) \in D(T). \tag{2.4.1}$$

En segundo lugar construiremos soluciones numéricas continuas

$$T_1(x,t), \ T_2(x,t), \ldots, T_{n_0-1}(x,t),$$

que aproximen

$$u_1(x,t), \ u_2(x,t), \ldots, u_{n_0-1}(x,t),$$

respectivamente, de manera que

$$|\sum_{n=1}^{n_0-1} (T_n(x,t) - u_n(x,t))| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ uniformemente en } (x,t) \in D(T). \tag{2.4.2}$$

Para tratar de facilitar la presentación de los próximos resultados, a continuación expondremos algunas cuestiones sobre resolución numérica de ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo

$$Y'' = f(t,Y), \;\; Y(0) = \eta, \;\; Y'(0) = \eta', \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{2.4.3}$$

cuyas demostraciones pueden encontrarse en el capítulo 6 de [24]. Si consideramos la fórmula de Stormer de 2 pasos

$$Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + Y_n = h^2 f_{n+1}, \;\; n \geq 0, \tag{2.4.4}$$

donde

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}, Y_{n+1}), \;\; t_{n+1} = (n+1)h, \;\; h > 0, \tag{2.4.5}$$

$f(t,Y)$ satisface una condición de Lipschitz con constante L, y Y_0, Y_1 son valores iniciales, que dependen de h,

$$Y_0 = \eta_0(h), \;\; Y_1 = \eta_1(h), \tag{2.4.6}$$

tales que

$$\lim_{h\to 0} \eta_0(h) = \eta \text{ y } \lim_{h\to 0} \frac{\eta_1(h) - \eta_0(h)}{h} = \eta', \tag{2.4.7}$$

entonces el error de discretización

$$e_n = Y_n - Y(t_n), \;\; 0 \leq t_n \leq T, \tag{2.4.8}$$

donde $Y(t_n)$ es la solución teórica exacta de (2.4.3) en t_n, y Y_n viene dado por (2.4.4), satisface la desigualdad:

$$|e_n| \leq 8(t_n+h)\delta + \frac{(t_n+h)^2}{24} Y h^2 exp((t_n+h)^2 L), \;\; 0 \leq t_n \leq T, \tag{2.4.9}$$

siendo

$$Y = \sup\{|Y^{(4)}(t)|, \;\; 0 \leq t_n \leq T\}, \tag{2.4.10}$$

En la fórmula (2.4.10), L (como hemos mencionado antes) es la constante de Lipschitz de f, y δ es un valor a determinar que cumpla

$$|Y_m - Y(t_m)| \leq h\delta, \;\; m = 0, 1\,. \tag{2.4.11}$$

Suponemos que la aproximación Y_n se calcula por medio de (2.4.4) sin tener en cuenta los (obligados) errores de redondeo.

Pensando en la aplicación de los resultados arriba expuestos a la resolución numérica de la ecuación diferencial (2.3.5), nótese que la solución teórica de (2.3.5) verifica

$$\begin{aligned}
&T''(t) = -\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)T(t);\\
&T'''(t) = -\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \{c'(t)T(t) + c(t)T'(t)\};\\
&T^{(4)}(t) = -\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \{-c(t)\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)T(t) + c''(t)T(t) + 2c'(t)T'(t)\};\\
&T^{(4)}(t) = -\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \left[\{c''(t) - \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)^2\}T(t) + 2c'(t)T'(t)\right].
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Con el objetivo de asegurar que los valores iniciales Y_0 y Y_1 satisfacen las condiciones (2.4.7) y (2.4.11), escojamos

$$Y_0 = Y(0), \;\; Y_1 = Y(0) + hY'(0). \tag{2.4.13}$$

De ese modo, teniendo en cuenta el teorema de Taylor, se cumple $Y(h) = Y(0) + hY'(0) + \frac{h^2}{2}Y''(\psi_h)$, con $0 < \psi_h < h$. Por lo tanto, la constante $\delta > 0$ que aparece en (2.4.11) puede escogerse como

$$\delta = \frac{h}{2}\ \max\{|Y''(t)|,\ \ 0 \leq t \leq h\}, \tag{2.4.14}$$

siendo $Y(t)$ la solución teórica del problema (2.4.3).

Una vez presentadas las herramientas a utilizar, pasemos a su aplicación al problema específico.
Sea $\epsilon > 0$ un error admisible en el domimio $D(T)$. De (2.3.8)-(2.3.9), (2.3.10) y (2.3.19), se sigue

$$|a_n z_n(t)| \leq \frac{P_1 M}{n^4},\ \text{y}\ |b_n w_n(t)| \leq \frac{P_2 M p}{\pi\sqrt{c(0)}}\frac{1}{n^4},\ \ 0 \leq t \leq T,\ \ n \geq 1. \tag{2.4.15}$$

Dado que $\sum_{n\geq 1} 1/n^4 = \pi^4/90$ (ver [8, p.479]) sea n_0 el primer entero positivo que tal que

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{n^4} > \frac{\pi^4}{90} - \left[\frac{\epsilon}{2} M^{-1}\left(P_1 + \frac{pP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\right)^{-1}\right]. \tag{2.4.16}$$

Entonces, de (2.3.12) y (2.4.16), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left|u(x,t) - \textstyle\sum_{n=1}^{n_0-1}\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right| \\
&\leq \textstyle\sum_{n\geq n_0} |a_n z_n(t) + b_n w_n(t)| \qquad\qquad (2.4.17)\\
&\leq M\left(P_1 + \frac{pP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\right)\textstyle\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{n^4} < \frac{\epsilon}{2},\ \ (x,t)\in D(T).
\end{aligned}$$

Acabamos, pues, de encontrar el entero a partir del cual truncar la serie cometiendo un error acotado por $\epsilon/2$. Ahora, sea n un entero con $1 \leq n \leq n_0 - 1$, y consideremos los problemas de valor inicial

$$Y''(t) = -\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)Y(t), \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.4.18}$$

y

$$Y''(t) = -\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 c(t)Y(t), \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.4.19}$$

cuyas soluciones teóricas exactas son $z_n(t)$ $w_n(t)$, respectivamente. Sea N un entero y $h > 0$ tal que

$$Nh = T, \tag{2.4.20}$$

sea $\{z_{m,n}\}_{m=0}^{N}$ la aproximación de $z_n(t)$ en los puntos de la malla $t = t_m = mh$, construida por medio de la fórmula de Stormer

$$\begin{gathered} z_{m+2,n} - 2z_{m+1,n} + z_{m,n} = -h^2 \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 c(t_{m+1}) z_{m+1,n}, \quad 0 \leq m \leq N-2 \\ z_{0,n} = 1, \ z_{1,n} = 1 \end{gathered} \tag{2.4.21}$$

y sea $\{w_{m,n}\}_{m=0}^{N}$ la aproximación de $w_n(t)$ en los puntos de la malla $t = t_m = mh$, obtenida también usando la fórmula de Stormer

$$\begin{gathered} w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + w_{m,n} = -h^2 \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 c(t_{m+1}) w_{m+1,n}, \quad 0 \leq m \leq N-2 \\ w_{0,n} = 0, \ w_{1,n} = h. \end{gathered} \tag{2.4.22}$$

De (2.3.8) y (2.4.14), la constante $\delta_{1,n}$ asociada a los valores iniciales de (2.4.21), por (2.4.11), toma la forma

$$\delta_{1,n} = \frac{h}{2}\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 MC, \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \tag{2.4.23}$$

y de (2.3.9), (2.4.11) y (2.4.14) la constante $\delta_{2,n}$ asociada a los valores iniciales de (2.4.22), viene dada por

$$\delta_{2,n} = \frac{h}{2}\left(\frac{n\pi}{p}\right)\frac{MC}{\sqrt{c(0)}}, \quad 1 \le n \le n_0 - 1. \tag{2.4.24}$$

Si definimos C_i como

$$C_i = \max\{|c^{(i)}(t)|, \ \ 0 \le t \le T\}, \quad i = 1, 2, \tag{2.4.25}$$

entonces, por (2.3.8)-(2.3.10), (2.4.12) y (2.4.25), las soluciones teóricas $z_n(t)$ y $w_n(t)$, de los problemas (2.4.18) y (2.4.19) respectivamente, verifican

$$\max_{0\le t\le T} |z_n^{(4)}(t)| \le M\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\left(C_2 + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 C^2 + 2C_1\frac{n\pi}{p}\sqrt{C}\right), \quad 1 \le n \le n_0 - 1, \tag{2.4.26}$$

y

$$\max\nolimits_{0\le t\le T} |w_n^{(4)}(t)| \le$$

$$M(c(0))^{-1/2}\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2\left[\left(C_2 + \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 C^2\right)\tfrac{p}{n\pi} + 2C_1C^{1/2}\right], \tag{2.4.27}$$

$$1 \le n \le n_0 - 1.$$

La constante de Lipschitz para los 2 problemas (2.4.18) y (2.4.19) es

$$L_n = C\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2, \quad 1 \le n \le n_0 - 1. \tag{2.4.28}$$

De (2.4.9) y (2.4.23)-(2.4.28) se deduce que el error de discretización para $0 < h < 1$,

$$e^{(1)}_{m,n} = z_{m,n} - z_n(t_m), \;\; e^{(2)}_{m,n} = w_{m,n} - w_n(t_m), \;\; 0 \le m \le N. \tag{2.4.29}$$

satisface

$$\begin{aligned}
|e^{(1)}_{m,n}| \; & \le 8(T+h)\tfrac{h}{2}\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 MC + \tfrac{(T+h)^2}{24} h^2 M \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \\
& \times \left[C_2 + \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 C^2 + 2C_1 C^{1/2} \tfrac{n\pi}{p}\right] \exp\left((T+h)^2 C \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2\right) \;\;, \\
& \le 4(T+1)MC\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 h + \tfrac{(T+1)^2}{24} h^2 M \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \\
& \times \left[C_2 + \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 C^2 + 2C_1 C^{1/2} \tfrac{n\pi}{p}\right] \exp\left((T+1)^2 C \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2\right) \;\;,
\end{aligned}$$

$$|e^{(1)}_{m,n}| = hE_{1,n}, \;\; 0 \le m \le N, \;\; 1 \le n \le n_0 - 1, \tag{2.4.30}$$

siendo

$$\begin{gathered}
E_{1,n} = 4(T+1)MC\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 + \frac{(T+1)^2}{24} M \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \\
\times \left[C_2 + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 C^2 + 2C_1 C^{1/2}\frac{n\pi}{p}\right] \exp\left((T+1)^2 C \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right).
\end{gathered} \tag{2.4.31}$$

De manera análoga se obtiene

$$|e^{(2)}_{m,n}| = hE_{2,n}, \;\; 0 \le m \le N, \;\; 1 \le n \le n_0 - 1, \tag{2.4.32}$$

siendo

$$\begin{gathered}
E_{2,n} = 4(T+1)\left(\frac{n\pi}{p}\right)\frac{MC}{\sqrt{c(0)}} + \frac{(T+1)^2}{24} M (c(0))^{-1/2} \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \\
\times \left[\left(C_2 + C^2\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right)\frac{p}{n\pi} + 2C_1 C^{1/2}\right] \exp\left((T+1)^2 C \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right).
\end{gathered} \tag{2.4.33}$$

Nótese que de (2.3.19), (2.4.29)-(2.4.33) se sigue que

$$|a_n[z_n(t_m) - z_{m,n}]| + |b_n[w_n(t_m) - w_{m,n}]|$$

$$\leq h(|a_n|E_{1,n} + |b_n|E_{2,n})$$

$$\leq h\left(\frac{P_1E_{1,n}}{n^4} + \frac{P_2E_{2,n}}{n^3}\right), \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1.$$

Si definimos γ_n como

$$\gamma_n = \frac{P_1E_{1,n}}{n^4} + \frac{P_2E_{2,n}}{n^3}, \tag{2.4.34}$$

entonces, para $1 \leq n \leq n_0 - 1$, se tiene

$$\max_{0\leq m\leq N} |a_n[z_n(t_m) - z_{m,n}]| + |b_n[w_n(t_m) - w_{m,n}]| \leq h\gamma_n. \tag{2.4.35}$$

Notese también que para $0 < h < 1$, $Nh = T$,

$$a_nz_{m,n} + b_nw_{m,n}, \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1, \quad 0 \leq m \leq N, \tag{2.4.36}$$

es la aproximación numérica en los nodos $t = t_m = mh$, de la función

$$a_nz_n(t) + b_nw_n(t), \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1. \tag{2.4.37}$$

Construyamos ahora la función B-spline lineal $S_n(t)$ que interpola los valores $a_nz_n(t)+b_nw_n(t)$, $0 \leq m \leq N$, definida por (ver capítulo 6 de [22]),

$$S_n(t) = \frac{1}{h}\{(t_{m+1} - t)(a_nz_n(t_m) + b_nw_n(t_m)) + (t - t_m)(a_nz_n(t_{m+1}) + b_nw_n(t_{m+1}))\},$$

$$t_m \leq t < t_{m+1}, \quad 0 \leq m \leq N - 1. \tag{2.4.38}$$

Si consideramos el B-spline lineal $T_n(t)$ que interpola las aproximaciones numéricas $a_n z_{m,n} + b_n w_{m,n}$, $0 \leq m \leq N$, y que viene definido por

$$T_n(t) = \frac{1}{h}\{(t_{m+1} - t)(a_n z_{m,n} + b_n w_{m,n}) + (t - t_m)(a_n z_{m+1,n} + b_n w_{m+1,n})\},$$

$$t_m \leq t < t_{m+1}, \quad 0 \leq m \leq N-1, \tag{2.4.39}$$

por [22, p.257], para $1 \leq n \leq n_0 - 1$ y $0 \leq t \leq T$, se sigue que

$$|a_n z_n(t) + b_n w_n(t) - S_n(t)| \leq \frac{C}{8}\left(\frac{n\pi h}{p}\right)^2 \max_{0 \leq t \leq T} |a_n z_n(t) + b_n w_n(t)|, \tag{2.4.40}$$

y de las propiedades de los B-splines, [22, p.247], y (2.4.35), resulta

$$\max_{0 \leq t \leq T} |S_n(t) - T_n(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq T} |a_n[z_n(t_m) - z_{m,n}] + b_n[w_n(t_m) - w_{m,n}]| \leq h\gamma_n. \tag{2.4.41}$$

Aplicando (2.3.8), (2.3.9), (2.3.19) y (2.4.40), para $1 \leq n \leq n_0 - 1$ y $0 \leq t \leq T$, se tiene

$$|a_n z_n(t) + b_n w_n(t) - S_n(t)| \leq C\frac{(h\pi/p)^2}{8n^2}\left(MP_1 + \frac{pMP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\right). \tag{2.4.42}$$

Con lo cual, de (2.4.40)-(2.4.42), si $0 < h < 1$ y $0 \leq t \leq T$, se llega a

$$\begin{aligned} &|a_n z_n(t) + b_n w_n(t) - T_n(t)| \\ &\leq |a_n z_n(t) + b_n w_n(t) - S_n(t)| + |S_n(t) - T_n(t)| \\ &\leq h\left[\gamma_n + \tfrac{MC}{8}\left(\tfrac{\pi}{np}\right)^2\left(P_1 + \tfrac{pP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\right)\right], \quad 0 \leq t \leq T, \ \ 1 \leq n \leq n_0 - 1. \end{aligned} \tag{2.4.43}$$

Así pues, tomando $0 < h < 1$ tal que

$$h < \frac{\epsilon}{2\sum_{n=1}^{n_0-1}\left[\gamma_n + \frac{MC}{8}\left(\frac{\pi}{np}\right)^2 (P_1 + \frac{pP_2}{\pi\sqrt{c(0)}})\right]}, \tag{2.4.44}$$

entonces de (2.4.43)-(2.4.44), para $(x,t) \in D(T)$, se deduce

$$\left| \sum_{n=1}^{n_0-1} \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) - \sum_{n=1}^{n_0-1} T_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.4.45}$$

Finalmente, de (2.4.17) y (2.4.45) se concluye

$$\tilde{u}(x,t,n_0) = \sum_{n=1}^{n_0-1} T_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \tag{2.4.46}$$

donde $T_n(t)$ es la función B-spline lineal definida por (2.4.39), es una aproximación de la solución en serie $u(x,t)$ del problema (2.1.1)-(2.1.5), proporcionada por el teorema 3, tal que el error $u(x,t) - \tilde{u}(x,t,n_0)$ está uniformemente acotado superiormente por ϵ en $D(T)$.

Resumiendo todo lo anterior, bajo las hipótesis y notación del teorema 3, el siguiente algoritmo permite la construcción de una solución numérica continua cuyo error respecto a la solución exacta $u(x,t)$ definida por (2.3.12)-(2.3.13), está uniformemente acotado por ϵ en $D(T)$.

PASO 1 TRUNCAMIENTO DE LA SERIE.

1. Sea M definida por el teorema 2, con $\lambda = \frac{n\pi}{p}$ y $c(t) = k(t)$. Calcular las constantes P_1 y P_2 por medio de (2.3.19), y C por medio de (2.3.10).
2. Elegir el primer entero positivo n_0 que verifique (2.4.16).

PASO 2 CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES NUMÉRICAS CONTINUAS.

1. Calcular la constante C_2 definida por (2.4.25), y para $1 \leq n \leq n_0 - 1$ calcular L_n por medio de (2.4.28), $\delta_{1,n}$ con (2.4.23) y $\delta_{2,n}$ con (2.4.24).
2. Calcular $E_{1,n}$ por (2.4.31), $E_{2,n}$ por (2.4.33) y γ_n por (2.4.34), para $1 \leq n \leq n_0 - 1$.
3. Seleccionar $0 < h < 1$ que verifique (2.4.44) con $\frac{T}{h}$ entero.
4. Tomar $N = \frac{T}{h}$ y $t_m = mh$ para $0 \leq m \leq N$.
5. Fijar $z_{0,n} = 1$, $z_{1,n} = 1$, $w_{0,n} = 0$, $w_{1,n} = h$ para $1 \leq n \leq n_0 - 1$.
6. Construir las sucesiones $\{z_{m,n}\}_{m=0}^{N}$ y $\{w_{m,n}\}_{m=0}^{N}$ parar $1 \leq n \leq n_0 - 1$, usando para ello la fórmulas de Stormer (2.4.21) y (2.4.22).
7. Calcular los valores a_n, b_n, para $1 \leq n \leq n_0 - 1$, vía (2.3.13) y aplicarlos para calcular $a_n z_{m,n} + b_n w_{m,n}$, $0 \leq m \leq N$.
8. Construir el B-spline $T_n(t)$ definido por (2.4.39) para $0 \leq t \leq T$ y $1 \leq n \leq n_0 - 1$.
9. La función $\tilde{u}(x, t, n_0)$ definida por (2.4.46) es la aproximación numérica buscada.

2.5 Unicidad de la solución

En los apartados anteriores hemos probado la existencia de la solución del problema (2.1.1)-(2.1.5) y la hemos aproximado. Sin embargo, sin una garantía de unicidad, soluciones numéricas distintas podrían aproximar soluciones también diferentes del problema, y por tanto el interés del método numérico propuesto sería muy limitado. Esto evidentemente motiva el estudio de la unicidad de la solución del problema planteado.

Comenzaremos con un lema que jugará un papel crucial en el estudio de la unicidad.

Lema 1. *Sea $T(x,t)$ una solución del problema (2.1.1)-(2.1.5) con $f = g = 0$, y* *supongamos que:*

$$T(x,t_0) = T_t(x,t_0) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, t_0 \geq 0, \tag{2.5.1}$$

$$c'(t) \textit{ tiene signo constante en }]t_0,t_1[. \tag{2.5.2}$$

Entonces $T(x,t) = 0$ *para* $(x,t) \in [0,p] \times [t_0,t_1[$.

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos tres casos.

$\boxed{\text{CASO 1:}}$ $\underline{c'(t) < 0 \text{ para } t \in]t_0,t_1[.}$

Sea $T(x,t)$ una solución del problema (2.1.1)-(2.1.5) con $f = g = 0$, satisfaciendo (2.5.1) y (2.5.2), y sea E(t) definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^p [c(t)T_x^2(x,t) + T_t^2(x,t)]\,dx, \quad t_0 \leq t < t_1. \tag{2.5.3}$$

Tomando derivadas en (2.5.3), de la regla de Leibniz, las hipótesis e integrando por partes, se tiene

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^p c'(t)T_x^2\,dx + c(t)\int_0^p T_xT_{xt}\,dx + \int_0^p T_tT_{tt}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^p c'(t)T_x^2\,dx + c(t)[T_xT_t]_0^p - c(t)\int_0^p T_tT_{xx}\,dx + \int_0^p T_tT_{tt}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^p c'(t)T_x^2\,dx + c(t)[T_x(p,t)T_t(p,t) - T_x(0,t)T_t(0,t)].$$

Por tanto

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^p [c'(t)T_x^2]\,dx \leq 0, \quad t \in [t_0,t_1[, \tag{2.5.4}$$

dado que $T_x(x,t_0) = 0$ y $c'(t) < 0$ en $]t_0,t_1[$. Nótese que por (2.5.1) se tiene $E(t_0) = 0$ y por definición $E(t) \geq 0$. De (2.5.4) se concluye $E(t) = 0$ para $t \in [t_0,t_1[$. Por continuidad de $T_x^2(\cdot,t)$ y $T_t^2(\cdot,t)$, y por (2.5.3), resulta

$$T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0 \quad \text{para } \; 0 \le x \le p, \; t_0 \le t \le t_1. \tag{2.5.5}$$

De (2.5.1) y (2.5.5) se tiene $T(x,t) = T(x,t_0) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [t_0,t_1[$.

$\boxed{\text{CASO 2:}}$ $\underline{c'(t) > 0 \text{ para }]t_0,t_1[.}$
Dado $T(x,t)$, definamos $H(t)$ como

$$H(t) = \frac{1}{2}\int_0^p \left[T_x^2(x,t) + \frac{T_t^2(x,t)}{c(t)} \right] dx, \;\; t_0 \le t \le t_1. \tag{2.5.6}$$

De las hipótesis, la regla de Leibniz y el método de integración por partes, la derivada de $H(t)$ puede escribirse de la forma

$$H'(t) = \int_0^p (T_x T_{xt})\, dx + \frac{1}{c(t)}\int_0^p (T_t T_{tt})\, dx - \frac{c'(t)}{2c^2(t)}\int_0^p T_t^2\, dx =$$

$$= [T_x T_t]_0^p - \int_0^p (T_{xx} T_t)\, dx + \int_0^p (T_{xx} T_t)\, dx - \frac{c'(t)}{2c^2(t)}\int_0^p T_t^2\, dx.$$

$$H'(t) = -\frac{c'(t)}{2c^2(t)}\int_0^p T_t^2\, dx \le 0, \;\; t_0 \le t \le t_1, \tag{2.5.7}$$

pues $T_t(x,t_0) = 0$ y $c'(t) > 0$ para $t_0 \le t \le t_1$. De (2.5.1) y (2.5.6) se sigue que $H(t_0) = 0$ y $H(t) \ge 0$ para $t_0 \le t \le t_1$. Ya que por (2.5.7) la función $H(t)$ es decreciente en $]t_0,t_1[$, se tiene $H(t) = H(t_0) = 0$ para $t_0 \le t \le t_1$.

Por continuidad de $T_x^2(\cdot,t)$ y $T_t^2(\cdot,t)$ y por (2.5.6) se concluye que $T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0$ para $0 \le x \le p$, $t_0 \le t \le t_1$. Por tanto $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [t_0,t_1[$.

$\boxed{\text{CASO 3:}}$ $\underline{c'(t) = 0 \text{ para }]t_0,t_1[.}$
En este caso $c(t)$ es una función constante en $[t_0,t_1]$. Dada $T(x,t)$, consideremos la función $E(t)$ definida en (2.5.3) con $c(t) = c > 0$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^p [c(t)T_x^2(x,t) + T_t^2(x,t)]\, dx, \quad t_0 \leq t < t_1. \tag{2.5.8}$$

Dado que $T(x,t)$ es solución de (2.1.1)-(2.1.5) con $f = g = 0$, usando el argumento del caso 1, es fácil probar que $E'(t) = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Como $E(t_0) = 0$, se tiene $E(t) = E(t_0) = 0, t_0 \leq t \leq t_1$. Por continuidad de $T_x^2(\cdot,t)$ y $T_t^2(\cdot,t)$ y por (2.5.8) se sigue que $T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [t_0,t_1]$. Por tanto $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [t_0,t_1]$, como queríamos demostrar.

Nota 3. *Como se demostró en el teorema 2, el signo de $c'(t)$ sólo puede cambiar un número finito de veces en un intervalo compacto $[0,T]$.*

Teniendo en cuenta esta resultado, podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema 4. *Bajo las hipótesis (2.1.5), (2.3.14) y (2.3.15), el problema (2.1.1)-(2.1.4) admite una sola solución.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con probar la unicidad en cualquier dominio acotado $D = [0,p] \times [0,T]$, donde T es cualquier número positivo que fijamos. Asimismo, por la linealidad del problema (2.1.1)-(2.1.4), es suficiente con probar que la única solución del problema (2.1.1)-(2.1.4) con $f = g = 0$, es la solución trivial $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [0,T]$. Si el signo de $c'(t)$ no cambia en [0,T], entonces el resultado queda establecido directamente con el lema 1. Si no, supongamos que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ tal que $c'(t)$ tiene signo constante en $]t_i, t_{i+1}[$ para $0 \leq i \leq N-1$. Aplicando el lema 1 al intervalo $[0,t_1[$, se sigue que $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [0,t_1]$.

Aplicando el lema 1 inductivamente, se obtiene $T(x,t) = 0$ y $T_t(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,p] \times [t_1,t_2]$ y finalmente $T(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in [0,p] \times [0,T]$. Con ello queda establecido el resultado.

Capítulo 3

Soluciones analítico-numéricas de problemas mixtos para la ecuación de ondas amortiguada con coeficientes dependientes del tiempo

3.1 Introducción

En este capítulo ampliaremos el problema presentado en el capitulo anterior para considerar problemas de propagación de ondas amortiguadas en medios de propiedades cambiantes con el tiempo, de los que el caso del capítulo 2 se puede ver como una particularización. El problema a tratar aquí será del tipo,[1]

$$u_{tt} + a(t)u_t = c(t)u_{xx}, \quad 0 < x < d, \ t > 0, \tag{3.1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.1.2}$$

$$u(p,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.1.3}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq d, \tag{3.1.4}$$

[1]Este capítulo es una versión corregida y ampliada de [27].

$$u_t(x,0) = g(x), \;\; 0 \le x \le d, \tag{3.1.5}$$

donde $a(t)$, $c(t)$, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales con propiedades a determinar.

La ecuación anterior es bastante más común que la presentada en el segundo capítulo, puesto que, en general, al combinar las ecuaciones de la Física que dan lugar a un problema como (3.1.1)-(3.1.5), por ser generalmente dichas ecuaciones de orden inferior, sería lógico encontrar el coeficiente variable dentro de alguna derivada parcial, lo que evidentemente nos daría más términos (los que hay en (3.1.1) que no hay en (2.1.1)). Se puede encontrar, por ejemplo, en propagación de ondas electromagnéticas en medios con pérdidas de propiedades cambiantes con el tiempo, por ejemplo porque nosotros estemos influyendo en el material calentándolo, etc.

Las técnicas estándar para resolver el problema, como se citó en la introducción, se basan en métodos de diferencias finitas o de elementos finitos [16], [49], [50]. No obstante, siguiendo la filosofía de esta tesis, sabemos que soluciones analítico-numéricas expresadas en términos de los datos de partida nos son más interesantes que las soluciones discretas dado que permiten una mejor interpolación del problema, así como la extracción de propiedades de la solución (estabilidad, acotación) para las que los métodos discretos resultan ineficaces.

Es bien sabido que el método de separación de variables es muy eficiente para construir soluciones en serie de problemas en derivadas parciales mixtas en los que las ecuaciones diferenciales obtenidas son autónomas. Pero también es normal que en el caso en que alguna ecuación tenga algun factor dependiente del tiempo, la separación de variables sea descartada debido a la falta de conocimiento sobre la acotación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas al problema. Sin embargo, como se vio en el capítulo anterior (y en general a lo largo de esta tesis) para la ecuación de ondas no amortiguada, aunque la solución exacta de tales ecuaciones diferenciales ordinarias no sea conocida, la acotación de las soluciones y sus derivadas puede usarse para construir una solución exacta en serie del problema, lo que probaremos. Las expresiones obtenidas aquí serán bastante más generales que las encontradas en el capítulo 2, y podrán aplicarse en otros problemas (como el que aparece en el capítulo 5). Y es que la en apariencia sencilla añadidura de un término más invalida los resultados obtenidos en el apartado anterior y nos obliga a un esfuerzo mayor de análisis (y también de imaginación).

A pesar de la mayor generalidad del problema (3.1.1)-(3.1.5) frente al del capítulo anterior (de hecho (2.1.1)-(2.1.4) no es más que (3.1.1)-(3.1.5) con $a(t) = 0$), creemos conveniente estudiar ambos casos por separado. En primer lugar, porque resulta mucho más intuitivo acercarnos a una situación más compleja partiendo de una más simple. Y en segundo lugar porque, como se verá, y ciñéndonos al caso en cuestión, el método utilizado para la aproximación de los términos del desarrollo en serie obtenido como solución exacta difiere en ambos casos. Mientras que el empleado en el caso anterior trata de explotar al máximo la ausencia de un término con derivada de primer orden en la ecuación (es un método de Stormer de segundo orden), aquí eso no es posible, por lo que habrá que encontrar algún medio que permita ampliar el tipo de términos admisible como se necesite. Ello, aunque no se cite ni demuestre explícitamente, redundará (como era de esperar, por otro lado), en una mayor dificultad computacional. Y es que aunque aquí se proponga un método determinado, no podemos sino tratar de recomendar al lector que use en cada caso el que más convenga a la naturaleza de las ecuaciones obtenidas. Este capítulo (esta tesis, en general), pretende dar formas de resolución, pero más aún un mecanismo o o filosofía de trabajo. Todo lo que sea aprovechar las características concretas del problema en cuestión debería por lo menos tenerse en cuenta antes de emprender caminos más generales, y en general económicamente (en computación) más costosos.

El capítulo está organizado como sigue. El apartado 2 analiza la acotación del sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial paramétrica

$$(p(t)y')' + \lambda^2 q(t)y = 0,$$

donde $\lambda > 0$, y $p(t)$, $q(t)$ son funciones estrictamente positivas y 2 veces continuamente diferenciables. En el apartado 3 se presta una atención particular a la ecuación

$$y'' + a(t)y' + \lambda^2 c(t)y = 0,$$

debido a su interés para la resolución del problema (3.1.1)-(3.1.5) mediante el método de separación de variables. En el apartado 4 se construirá una solución exacta en serie del problema (3.1.1)-(3.1.5). La unicidad de la solución hallada será tratada en la sección 5. Finalmente, en el apartado 6 enfocaremos la siguiente cuestión. Si $T > 0$, $D(T) = [0, d] \times [0, T]$ y $\epsilon > 0$, cómo construir una solución numérica continua cuyo error respecto a la solución exacta en serie sea inferior a ϵ, uniformemente en el interior de $D(T)$. Para ello, primero la solución exacta será truncada para obtener una suma finita. Después, cada uno de los términos de la suma finita será aproximada por medio de métodos multipaso matriciales y funciones B-spline también matriciales, de modo que el error global esté superiormente acotado por ϵ en $D(T)$. El tamaño del paso para la discretización y el número de términos de la serie truncada serán ambos determinados en función de los datos.

3.2 La ecuación diferencial $(p(t)y')' + \lambda^2 q(t)y = 0$

Este apartado está dedicado a demostrar el siguiente resultado:

Teorema 5. *Sea $\lambda > 0$ y sean $p(t), q(t)$ 2 funciones positivas 2 veces continuamente diferenciables tales que*

$$|(p \cdot q)'(t)| + |(p \cdot q)''(t)| > 0 \quad \textit{para } 0 \leq t \leq T,\ T > 0. \tag{3.2.1}$$

Sea $\{z(t), w(t)\}$ el sistema fundamental de soluciones de

$$(p(t)y')' + \lambda^2 q(t)y = 0 \quad t \geq 0, \tag{3.2.2}$$

tal que

$$z(0)=1;\quad z'(0)=0;\quad w(0)=0;\quad w'(0)=1. \tag{3.2.3}$$

y definamos

$$\frac{Q}{P}=\max\left\{\frac{q(t)}{p(t)},\quad 0\le t\le T\right\}\ . \tag{3.2.4}$$

Entonces existe una constante $M>0$, independiente de λ, tal que

$$|z(t)|\le M \quad , \quad |w(t)|\le M\left(\tfrac{p(0)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\lambda^{-1},\quad 0\le t\le T. \tag{3.2.5}$$

y

$$|z'(t)|\le \lambda\left(\tfrac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}}M \quad y \quad |w'(t)|\le M\left(\tfrac{p(0)}{q(0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}},\quad 0\le t\le T. \tag{3.2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos 4 casos.

$\boxed{\textit{CASO 1.}}$ $\underline{p(t)q(t) \text{ is creciente en } [0,T].}$

Sea $y(t)$ una solución de (3.2.2) en $[0,T]$, e introduzcamos la función

$$F(y,t)=[y(t)]^2+\frac{[p(t)y'(t)]^2}{\lambda^2 p(t)q(t)},\quad 0\le t\le T. \tag{3.2.7}$$

Tomando derivadas en (3.2.7) con respecto a t y usando el hecho de que $y(t)$ es una solución de (3.2.2), se tiene que

$$F'(y,t)=2y(t)y'(t)+\frac{2\left(p(t)y'(t)\right)\left(p(t)y'(t)\right)'p(t)q(t)-[p(t)y'(t)]^2\,[p(t)q(t)]'}{\lambda^2\left(p(t)q(t)\right)^2},$$

$$F'(y,t)=-\left[\frac{y'(t)}{\lambda q(t)}\right]^2\left(p(t)q(t)\right)'\le 0,\quad 0\le t\le T, \tag{3.2.8}$$

pues $\left(p(t)q(t)\right)'\ge 0,\ 0\le t\le T$. Por tanto $F(y,\cdot)$ es decreciente en $[0,T]$ y

$$F(y,t)\le F(y,0),\quad 0\le t\le T. \tag{3.2.9}$$

Si consideramos la desigualdad (3.2.9) para $y=z$ y $y=w$, se obtiene

$$[z(t)]^2+\frac{[p(t)z'(t)]^2}{\lambda^2 p(t)q(t)}\le 1,\quad 0\le t\le T,$$

y

$$[w(t)]^2 + \frac{[p(t)w'(t)]^2}{\lambda^2 p(t)q(t)} \leq \frac{p(0)}{\lambda^2 q(0)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Por consiguiente

$$\begin{array}{ll} |z(t)| \leq 1\ , & |w(t)| \leq \lambda^{-1}\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \leq t \leq T. \\ |z'(t)| \leq \lambda\left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}} M & \text{y } |w'(t)| \leq \left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}} M, \end{array} \tag{3.2.10}$$

$\boxed{\textit{CASO 2.}}$ $\underline{p(t)q(t) \text{ is decreciente en } [0,T].}$

Sea $y(t)$ una solución de (3.2.2) en $[0,T]$, y definamos

$$G(y,t) = \lambda^2 p(t)q(t)\,[y(t)]^2 + [p(t)y'(t)]^2\,, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.2.11}$$

De nuevo, tomando derivadas en (3.2.11) respecto a t y usando (3.2.2) se obtiene

$$G'(y,t) = (\lambda y(t))^2\,(p(t)q(t))' \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2.12}$$

dado que $(p(t)q(t))' \leq 0$, en $0 \leq t \leq T$, por hipótesis.

De (3.2.12) se sigue que

$$G(y,t) \leq G(y,0), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.2.13}$$

Considerando (3.2.13) para $y = z$ y $y = w$, se tiene

$$\lambda^2 p(t)q(t)[z(t)]^2 + (p(t)z'(t))^2 \leq \lambda^2 p(0)q(0), \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\lambda^2 p(t)q(t)[w(t)]^2 + (p(t)w'(t))^2 \leq [p(0)]^2, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Por tanto

$$|z(t)| \leq \left[\frac{p(0)q(0)}{p(t)q(t)}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{p(0)q(0)}{p(T)q(T)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$|w(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\frac{p(0)}{[p(t)q(t)]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\lambda}\frac{p(0)}{[p(T)q(T)]^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

o lo que es lo mismo

$$|w(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{p(0)q(0)}{p(T)q(T)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$|z'(t)| \leq \lambda\frac{[p(0)q(0)]^{\frac{1}{2}}}{p(t)} \leq \lambda\left[\frac{p(0)q(0)}{p(T)q(T)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{q(t)}{p(t)}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \lambda M\left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

y

$$|w'(t)| \leq \frac{p(0)}{p(t)} \leq \left[\frac{p(0)q(0)}{p(t)q(t)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{q(t)}{p(t)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}} \leq M\left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$\boxed{\textit{CASO 3.}}$ Existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ del intervalo $[0, T]$ tal que:

$$p(t)q(t) \text{ es creciente en } [0, t_0], [t_1, t_2], \ldots, [t_{2K+1}, t_{2K+2}],$$

$$p(t)q(t) \text{ es decreciente en } [t_0, t_1], [t_2, t_3], \ldots, [t_{2K}, t_{2K+1}],$$

con $t_N = t_{2K+1}$ o $t_N = t_{2K+2}$.

Si $y(t)$ es una solución de (3.2.2) y $F(y, \cdot)$, $G(y, \cdot)$ son las funciones definidas en (3.2.7) y (3.2.11) respectivamente, del estudio de los casos 1 y 2 se sigue que

$$F(y, \cdot) \text{ es decreciente en } [0, t_0], [t_1, t_2], \ldots, [t_{2K+1}, t_{2K+2}], \tag{3.2.14}$$

$$G(y, \cdot) \text{ es decreciente en } [t_0, t_1], [t_2, t_3], \ldots, [t_{2K}, t_{2K+1}], \tag{3.2.15}$$

y

$$\lambda^2 p(t)q(t)F(y, t) = G(y, t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.2.16}$$

A partir de las expresiones (3.2.14)-(3.2.16) se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} F(y, t) \leq F(y, 0), \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ \\ G(y, t_0) = \lambda^2 p(t_0)q(t_0)F(y, t_0) \leq \lambda^2 p(t_0)q(t_0)F(y, 0). \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} G(y,t) \leq G(y,t_0) \leq \lambda^2 p(t_0)q(t_0)F(y,0), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ F(y,t_1) = \frac{G(y,t_1)}{\lambda^2 p(t_1)q(t_1)} \leq \frac{p(t_0)q(t_0)}{p(t_1)q(t_1)}F(y,0). \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} F(y,t) \leq F(y,t_1) \leq \frac{p(t_0)q(t_0)}{p(t_1)q(t_1)}F(y,0), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ G(y,t_2) = \lambda^2 p(t_2)q(t_2)F(y,t_2) \leq \lambda^2 \frac{p(t_2)q(t_2)p(t_0)q(t_0)}{p(t_1)q(t_1)}F(y,0). \end{aligned}\right\}$$

Aplicando inducción se llega a

$$G(y,t) \leq \lambda^2 \frac{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}F(y,0), \quad t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1},$$

$$F(y,t) \leq \frac{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}F(y,0), \quad t_{2K+1} \leq t \leq t_{2K+2}. \tag{3.2.17}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\lambda^2 p(t)q(t)[y(t)]^2 + [p(t)y'(t)]^2 \\ \leq \quad &\lambda^2 \frac{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}F(y,0), \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

$$\tag{3.2.19}$$

$$t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1},$$

y dado que $p(t)q(t)$ es decreciente en $[t_{2K}, t_{2K+1}]$, de (3.2.18) se obtiene

$$|y(t)| \leq \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})p(t)q(t)}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2.20}$$

$$|y(t)| \leq \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}}, \quad t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1}, \tag{3.2.21}$$

y

$$|y'(t)| \leq \frac{\lambda}{p(t)} \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2.22}$$

$$|y'(t)| \le \lambda \left(\frac{q(t)}{p(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})p(t)q(t)}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \lambda \left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}}, \;\; t_{2K} \le t \le t_{2K+1}. \tag{3.2.23}$$

Si $t_{2K+1} \le t \le t_{2K+2}$, de (3.2.17) se sigue que

$$[y(t)]^2 + \frac{[p(t)y'(t)]^2}{\lambda^2 p(t)q(t)} \le \frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})} F(y,0),$$

y por tanto, se puede escribir

$$|y(t)| \le \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} [F(y,0)]^{\frac{1}{2}}, \;\; t_{2K+1} \le t \le t_{2K+2}, \tag{3.2.24}$$

y

$$|y'(t)| \le \lambda \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} [F(y,0)]^{\frac{1}{2}}, \;\; t_{2K+1} \le t \le t_{2K+2}. \tag{3.2.25}$$

Por (3.2.20)-(3.2.25) y dado que $p(t)q(t)$ es decreciente en $[t_{2K}, t_{2K+1}]$, se tiene que $p(t_{2K})q(t_{2K}) \ge p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})$, y para $T = t_{2K+1}$, o $T = t_{2K+2}$, se concluye

$$|y(t)| \le \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} [F(y,0)]^{\frac{1}{2}}, \;\; 0 \le t \le T, \tag{3.2.26}$$

y

$$|y'(t)| \le \lambda \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} [F(y,0)]^{\frac{1}{2}}, \;\; 0 \le t \le T. \tag{3.2.27}$$

Aplicando (3.2.26) a $y = z$, por ser $F(z,0) = 1$, se llega a

$$|z(t)| \le \left[\frac{p(t_0)q(t_0)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}} = M, \;\; 0 \le t \le T; \tag{3.2.28}$$

$$|z'(t)| \le \lambda \left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}} M, \;\; 0 \le t \le T. \tag{3.2.29}$$

Aplicando ahora (3.2.26) a $y = w$ y tomando M definido en (3.2.28), se sigue que $F(w,0) = \frac{p(0)}{\lambda^2 q(0)}$ y

$$|w(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}} M, \quad 0 \leq t \leq T; \tag{3.2.30}$$

$$|w'(t)| \leq \left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}} M, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.2.31}$$

$\boxed{\textit{CASO 4.}}$ Existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de $[0,T]$ tal que:

$$p(t)q(t) \text{ es decreciente en } [0,t_0],[t_1,t_2],\ldots,[t_{2K+1},t_{2K+2}],$$

$$p(t)q(t) \text{ es creciente en } [t_0,t_1],[t_2,t_3],\ldots,[t_{2K},t_{2K+1}].$$

En el dominio $[t_0,T]$ la prueba de este caso es idéntica a la del caso 3 después de un cambio en la numeración de los índices. En $[0,t_0]$ la discusión sigue del caso 2. Así para cualquier solución y de la ecuación (3.2.2) se tiene:

$$G(y,t) \leq \lambda^2 \frac{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})} F(y,t_0), \quad t_{2K+1} \leq t \leq t_{2K+2}. \tag{3.2.32}$$

$$F(y,t) \leq \frac{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})} F(y,t_0), \quad t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1}. \tag{3.2.33}$$

Del análisis efectuado en el caso 2 para $[0,t_0]$ se sigue

$$F(y,t_0) = \frac{G(y,t_0)}{\lambda^2 p(t_0)q(t_0)} \leq \frac{G(y,0)}{\lambda^2 p(t_0)q(t_0)}, \tag{3.2.34}$$

con lo que de (3.2.32)-(3.2.34) se deduce

$$G(y,t) \leq \frac{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})} G(y,0), \quad t_{2K+1} \leq t \leq t_{2K+2}. \tag{3.2.35}$$

$$F(y,t) \leq \frac{p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{\lambda^2 p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})} G(y,0), \quad t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1}. \tag{3.2.36}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de $F(y,\cdot)$ y $G(y,\cdot)$, las desigualdades (3.2.35)-(3.2.36) pueden reescribirse de la forma

$$\lambda^2 p(t)q(t)[y(t)]^2 + (p(t)y'(t))^2 \leq$$

$$\leq \frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})} G(y,0), \tag{3.2.37}$$

$$t_{2K+1} \leq t \leq t_{2K+2},$$

y

$$[y(t)]^2 + \frac{[p(t)y'(t)]^2}{\lambda^2 p(t)q(t)} \leq$$

$$\leq \frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{\lambda^2 p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})} G(y,0), \tag{3.2.38}$$

$$t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1}.$$

De (3.2.37), dado que $p(t)q(t)$ decrece en $[t_{2K+1}, t_{2K+2}]$, resulta evidente que

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})p(t)q(t)} G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})p(t_{2K+2})q(t_{2K+2})} G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$t_{2K+1} \leq t \leq t_{2K+2},$$

y

$$|y'(t)| \leq \left[\frac{q(t)}{p(t)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})p(t)q(t)}G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K+1})q(t_{2K+1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})p(t_{2K+2})q(t_{2K+2})}G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$t_{2K+1} \leq t \leq t_{2K+2},$$

lo que se puede escribir también como

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad t_{2K-1} \leq t \leq t_{2K}, \tag{3.2.39}$$

y

$$|y'(t)| \leq \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad t_{2K-1} \leq t \leq t_{2K}. \tag{3.2.40}$$

De (3.2.38), se tiene que las desigualdades (3.2.39)-(3.2.40) se verifican también para $t_{2K} \leq t \leq t_{2K+1}$.

Dado que $p(t_{2K-1})q(t_{2K-1}) \geq p(t_{2K})q(t_{2K})$ en $[t_{2K-1}, t_{2K}]$, cada cociente

$$\frac{p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_{2K})q(t_{2K})} \geq 1,$$

con lo que se deduce que (3.2.39)-(3.2.40) también se satisfacen en los subintervalos previos. Resumiendo se tiene

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2.41}$$

y

$$|y'(t)| \leq \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}G(y,0)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2.42}$$

tanto si $T = t_{2K}$ como si $T = t_{2K+1}$.

Aplicando como antes (3.2.41) a $y = z$ y $y = w$, y haciendo uso del hecho de que $G(z,0) = \lambda^2 p(0)q(0)$, $G(w,0) = [p(0)]^2$, se concluye

$$|z(t)| \leq M = \left[\frac{p(0)q(0)p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2K-1})q(t_{2K-1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2K})q(t_{2K})}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$|w(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}} M, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$|z'(t)| \leq \lambda \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} M, \quad 0 \leq t \leq T,$$

y

$$|w'(t)| \leq \left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{Q}{P}\right]^{\frac{1}{2}} M, \quad 0 \leq t \leq T,$$

para ambos casos $T = t_{2K}$ y $T = t_{2K+1}$.

Bajo las hipótesis (3.2.1) los cuatro casos considerados cubren todas las alternativas posibles. La prueba de esta afirmación puede verse en el capítulo anterior, sustituyendo $k(t)$ por $p(t)q(t)$, por lo que no se repetirá aquí.

3.3 La ecuación diferencial $y'' + a(t)y' + \lambda^2 c(t)y = 0$

El propósito de este apartado es encontrar cotas explícitas para el sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$y'' + a(t)y' + \lambda^2 c(t)y = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \ \lambda > 0. \tag{3.3.1}$$

Para ello, trataremos de transformar la ecuación (3.3.1) en la forma (3.2.2) para funciones apropiadas $p(t), q(t)$ a determinar. Nótese que (3.2.2) puede escribirse como

$$p(t)y'' + p'(t)y' + \lambda^2 q(t)y = 0. \tag{3.3.2}$$

Si multiplicamos (3.3.1) por una función cualquiera $p(t)$ tendremos

$$p(t)y'' + p(t)a(t)y' + \lambda^2 p(t)c(t)y = 0. \tag{3.3.3}$$

Suponiendo por un momento que

$$p'(t) = p(t)a(t), \tag{3.3.4}$$

entonces, la ecuación (3.3.3) toma la forma (3.3.2), con

$$q(t) = p(t)c(t). \tag{3.3.5}$$

Resolviendo (3.3.4) para $p(t)$ se obtiene

$$p(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right). \tag{3.3.6}$$

(3.3.1) será, pues, equivalente a la ecuación (3.2.2) con $p(t)$ definida por (3.3.6) y

$$q(t) = c(t)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad c(t) > 0. \tag{3.3.7}$$

Nótese ahora que

$$\begin{gathered} p(t)q(t) = c(t)\exp\left(2\int_0^t a(s)ds\right), \\ (p(t)q(t))' = (2a(t)c(t) + c'(t))\exp\left(2\int_0^t a(s)ds\right), \end{gathered} \tag{3.3.8}$$

y

$$(p(t)q(t))' \geq 0 \text{ si y sólo si } 2a(t)c(t) + c'(t) \geq 0,$$

$$(p(t)q(t))' \leq 0 \text{ si y sólo si } 2a(t)c(t) + c'(t) \leq 0.$$

Asumiendo por un momento que

$$\begin{gathered} c(t) \text{ es una función positiva 2 veces continuamente} \\ \text{diferenciable en } [0, T], \end{gathered} \tag{3.3.9}$$

$$a(t) \text{ es continuamente diferenciable en } [0, T], \tag{3.3.10}$$

por (3.3.8), la condición (3.2.1) puede expresarse como

$$\begin{aligned}|2a(t)c(t)+c'(t)|&+|2a(t)(c'(t)+2a(t)c(t))+\\&+2a'(t)c(t)+2a(t)c'(t)+c''(t)|>0, \qquad 0\le t\le T.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Si $\{z(t),w(t)\}$ es el sistema fundamental de soluciones de (3.3.1) que satisface (3.2.3), entonces por el teorema 5 existe una constante M tal que, si llamamos

$$C=\max\{c(t)\ ;\ 0\le t\le T\}, \tag{3.3.12}$$

se cumple

$$|z(t)|\le M, \quad |w(t)|\le \tfrac{M}{\lambda\sqrt{c(0)}}, \quad 0\le t\le T, \tag{3.3.13}$$

$$|z'(t)|\le \lambda\sqrt{C}M, \quad |w'(t)|\le M\sqrt{\tfrac{C}{c(0)}}, \quad 0\le t\le T, \tag{3.3.14}$$

donde M, dependiendo del caso en cuestión, toma la expresión:

CASO 1. $2a(t)c(t)+c'(t)$ es creciente en $[0,T]$.

$$M=1. \tag{3.3.15}$$

CASO 2. $2a(t)c(t)+c'(t)$ es decreciente en $[0,T]$.

$$M=\left[\frac{p(0)q(0)}{p(T)q(T)}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{c(0)}{c(T)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\int_0^T a(s)ds\right). \tag{3.3.16}$$

CASO 3. Existe una partición $0<t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ tal que

$$\begin{aligned}2a(t)c(t)+c'(t) \text{ es creciente en } [0,t_0],[t_1,t_2],\ldots,[t_{2K+1},t_{2K+2}],\\2a(t)c(t)+c'(t) \text{ es decreciente en } [t_0,t_1],[t_2,t_3],\ldots,[t_{2K},t_{2K+1}],\end{aligned}$$

con $T=t_{2K+1}$ o $T=t_{2K+2}$.

$$M=\left[\frac{c(t_0)c(t_2)\cdots c(t_{2K})}{c(t_1)c(t_3)\cdots c(t_{2K+1})}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\sum_{i=0}^{K}\int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} a(s)ds\right). \tag{3.3.17}$$

CASO 4. Existe una partición $0<t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ tal que

$$2a(t)c(t) + c'(t) \text{ es decreciente en } [0, t_0], [t_1, t_2], \ldots, [t_{2K-1}, t_{2K}], \text{ y}$$
$$2a(t)c(t) + c'(t) \text{ es creciente en } [t_0, t_1], [t_2, t_3], \ldots, [t_{2K}, t_{2K+1}],$$

con $T = t_{2K}$ o t_{2K+1}.

$$M = \left[\frac{c(0)c(t_1)\cdots c(t_{2K-1})}{c(t_0)c(t_2)\cdots c(t_{2K})}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\sum_{i=0}^{K}\int_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} a(s)ds\right), \quad t_{-1} = 0. \tag{3.3.18}$$

Con lo anterior puede considerarse establecido el siguiente resultado:

Teorema 6. *Sean $a(t)$, $c(t)$ funciones reales que satisfacen las condiciones (3.3.9), (3.3.10) y (3.3.11), sea $\lambda > 0$ y sea $\{z(t), w(t)\}$ el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (3.3.1) que satisface las condiciones (3.2.3). Sea C la constante definida por (3.3.12) y M la constante positiva que aparece en (3.3.13), cuyo valor explícito viene dado por (3.3.15), (3.3.16), (3.3.17) o (3.3.18) dependiendo del caso. Entonces las cotas (3.3.13) y (3.3.14) son válidas para $0 \leq t \leq T$.*

3.4 Solución exacta en serie

Si buscamos soluciones del problema (3.1.1)-(3.1.3), de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, fácilmente se llega a la conclusión de que $X(x)$ y $T(t)$ deben cumplir:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(d) = 0, \quad 0 < x < d, \tag{3.4.1}$$

y

$$T'' + a(t)T' + \lambda^2 c(t)T = 0, \quad t > 0. \tag{3.4.2}$$

Los autovalores y las autofunciones del problema de Sturm-Liouville (3.4.1) son

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2; \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \quad n \geq 1. \tag{3.4.3}$$

Bajo las hipótesis (3.3.9), (3.3.10) y (3.3.11), por el teorema 6, para cada entero positivo $n \geq 1$, la ecuación

$$T'' + a(t)T' + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 c(t)T = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.4.4}$$

admite un sistema fundamental de soluciones en $[0,T]$, denotado por $\{z_n(t), w_n(t)\}$ tal que

$$z_n(0) = 1, \quad z_n'(0) = 0, \quad w_n(0) = 0, \quad w_n'(0) = 1, \tag{3.4.5}$$

$$\left.\begin{aligned} |z_n(t)| &\le M; \\ |z_n'(t)| &\le nQ_1, \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le T, \tag{3.4.6}$$

$$\left.\begin{aligned} |w_n(t)| &\le \tfrac{dM}{n\pi\sqrt{c(0)}}, \\ |w_n'(t)| &\le Q_2, \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le T, \tag{3.4.7}$$

siendo

$$\begin{aligned} Q_1 &= M\sqrt{C}\tfrac{\pi}{d}, \\ Q_2 &= M\sqrt{\tfrac{C}{c(0)}}. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Superponiendo las soluciones $u_n(x,t)$ de la forma

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}, \quad 0 \le x \le d, \ 0 \le t \le T, \tag{3.4.9}$$

se obtiene la serie candidata a solución

$$u(x,t) = \sum_{n\ge 1} u_n(x,t) = \sum_{n\ge 1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}. \tag{3.4.10}$$

Si imponemos las condiciones iniciales (3.1.4), (3.1.5) y suponemos por un momento que podemos derivar respecto a la variable t tomando derivadas parciales en la serie (3.4.10), tendremos

$$\begin{aligned} f(x) = u(x,0) &= \textstyle\sum_{n\ge 1} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \\ g(x) = u_t(x,0) &= \textstyle\sum_{n\ge 1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Por consiguiente los coeficientes a_n, b_n deben venir definidos por

$$a_n = \frac{2}{d}\int_0^d f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)dx, \quad b_n = \frac{2}{d}\int_0^d g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)dx, \quad n \geq 1. \tag{3.4.12}$$

Estudiemos ahora las condiciones bajo las cuales la serie $u(x,t)$ definida por (3.4.10)-(3.4.12) es una solución rigurosa del problema (3.1.1)-(3.1.5). Supongamos que

$f(x)$ es 3 veces diferenciable y $f^{(3)}(x)$ es continua a trozos y de variación acotada en $[0,d]$, con $f(0) = f(d) = f^{(2)}(0) = f^{(2)}(d) = 0$, (3.4.13)

y

$g(x)$ es 2 veces diferenciable y $g^{(2)}(x)$ es continua a trozos y de variación acotada en $[0,d]$, con $g(0) = g(d) = 0$. (3.4.14)

Bajo las hipótesis (3.4.13), la continuidad de la extensiones impares de $f(x), f'(x)$ y $f''(x)$ se obtiene automáticamente y

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| n^2 < +\infty. \tag{3.4.15}$$

Por (3.4.14), la extensiones impar de $g(x)$ y su derivada son también continuas y

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| n < +\infty, \tag{3.4.16}$$

ver [53, p.95-99], [48] y [19, p.38-41]. De (3.4.6)-(3.4.8) y (3.4.15)-(3.4.16) la serie

$$\sum_{n>1} \{a_n z_n'(t) + b_n w'(n)\}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right),$$

es uniformemente convergente en $D(T) = [0,d] \times [0,T]$, y por el teorema de derivación de series funcionales (ver [8, p.403]), la serie $u(x,t)$ definida por (3.4.10)-(3.4.12) es derivable parcialmente término a término con respecto a t, siendo

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{3.4.17}$$

Asimismo, la serie que aparece al tomar de nuevo derivadas parciales término a término respecto a t en el miembro derecho de (3.4.17) toma la forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n''(t)+b_n w_n''(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \\
&= -a(t)\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \qquad (3.4.18)\\
&- c(t)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \qquad (3.4.19)
\end{aligned}$$

Por (3.4.6)-(3.4.7) y (3.4.15)-(3.4.16), las series que aparecen en (3.4.18)-(3.4.19) son convergentes uniformemente en $D(T)$ y así por [8, p.403], $u_t(x,t)$ es derivable parcialmente término a término respecto a t, siendo

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= -a(t)\textstyle\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\\
&- c(t)\textstyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Las series que resultan de derivar parcialmente término a término (3.4.10) con respecto a x pueden escribirse como

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \tag{3.4.21}$$

$$-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{3.4.22}$$

De (3.4.6)-(3.4.8) y (3.4.15)-(3.4.16), se tiene que las series (3.4.21), (3.4.22) son uniformemente convergentes en $D(T)$, y por [8, p.403], la función $u(x,t)$ definida por (3.4.10)-(3.4.12) es 2 veces derivable parcialmente término a término con respecto a x, siendo

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{3.4.23}$$

De (3.4.20) y (3.4.23), para $(x,t) \in D(T)$ se concluye que

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) + a(t)u_t(x,t) - c(t)u_{xx}(x,t) = \\
&\quad - a(t)\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \\
&\quad - c(t)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \\
&\quad + a(t)\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \\
&\quad + c(t)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Además, de (3.4.12) y [7, teorema 4.3], también se puede afirmar que

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq d. \tag{3.4.24}$$

Con todo lo anterior, el siguiente resultado queda establecido:

Teorema 7. *Sean $a(t), c(t)$ funciones reales que satisfacen las condiciones (3.3.9), (3.3.10) y (3.3.11) en $[0, +\infty[$, y sean $f(x), g(x)$ funciones que cumplen las propiedades (3.4.13) y (3.4.14). Si a_n, b_n son los calculados en (3.4.12), entonces la función $u(x,t)$ definida por (3.4.10) es una solución del problema (3.1.1)-(3.1.5).*

Como en el capítulo anterior (y en general, en todos los problemas presentados a lo largo de la presente tesis doctoral), la solución en serie $u(x,t)$ proporcionada por el teorema 7, presenta dos importantes obstáculos desde el punto de vista computacional. En primer lugar, la infinidad de la serie, y en segundo, el hecho de que las expresiones exactas del sistema fundamental de soluciones $\{z_n(t), w_n(t)\}$ de la ecuación (3.4.4) no nos están disponibles. Esto motivará la posterior búsqueda de soluciones numéricas.

3.5 Unicidad de la solución

Este apartado está dedicado a la demostración de la unicidad de la solución exacta dada por (3.4.10). La prueba es similar a la que aparece en el capítulo anterior sobre la ecuación de ondas no amortiguada.

Para demostrar la unicidad del problema en cuestión, probaremos que la solución del problema más general

$$[p(t)T_t]_t = q(t)T_{xx}, \quad 0 \leq x \leq d, t \geq 0, \tag{3.5.1}$$

$$T(0,t) = T(d,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.5.2}$$

$$T(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq d, \tag{3.5.3}$$

$$T_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq d, \tag{3.5.4}$$

con $p(t)$ y $q(t)$ verificando las hipótesis del teorema 5, es la solución trivial $T(x,t) = 0$. En ese caso, dividiendo (3.5.1) por $p(t)$ y empleando (3.3.5) se obtiene el problema homogéneo asociado al problema (3.1.1)-(3.1.5). Como en el capítulo anterior, primero demostraremos el siguiente lema:

Lema 2. *Sea $T(x,t)$ la solución de (3.5.1)-(3.5.4), y supongamos que:*

$$T(x,t_0) = T_t(x,t_0) = 0 \quad 0 \leq x \leq d, \ \textit{with } t_0 \geq 0, \tag{3.5.5}$$

$$[p(t)q(t)]' \ \textit{tiene signo constante en }]t_0, t_1[. \tag{3.5.6}$$

Entonces $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,d] \times [t_0, t_1[$.

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos 3 casos.
$\boxed{\textit{Caso 1:}}$ $\underline{[p(t)q(t)]' < 0 \text{ para } t \in]t_0, t_1[.}$
Sea $E(t)$ la función definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^d \{p(t)q(t)T_x^2 + [p(t)T_t]^2\}\, dx. \tag{3.5.7}$$

Tomando derivadas en (3.5.7), por las hipótesis e integrando por partes, se tiene que

$$E'(t) = \frac{[p(t)q(t)]'}{2} \int_0^d T_x^2 \, dx \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.5.8}$$

Dado que $E(t_0) = 0$ por (3.5.5) y (3.5.7), de aquí y de (3.5.8) se obtiene $E(t) = 0$ para $t \in [t_0, t_1[$. Por continuidad se deduce que

$$T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0 \ \text{ para } 0 \leq x \leq d, t_0 \leq t \leq t_1. \tag{3.5.9}$$

Por (3.5.5) y (3.5.9) se concluye que $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,d] \times [t_0, t_1[$.

$\boxed{\textit{Caso 2:}}$ $\underline{[p(t)q(t)]' > 0 \text{ para } t \in]t_0, t_1[.}$

Sea $H(t)$ la función definida por

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_0^d \left[T_x^2 + \frac{p(t)}{q(t)} T_t^2 \right] \, dx, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{3.5.10}$$

Tomando derivadas en (3.5.10) se tiene

$$H'(t) = -\frac{[p(t)q(t)]'}{[p(t)q(t)]^2} \int_0^d [p(t)T_t]^2 \, dx \leq 0, \quad t \in [t_0, t_1[. \tag{3.5.11}$$

De (3.5.5), (3.5.10) y (3.5.11) se sigue que

$$H(t) = 0 \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{3.5.12}$$

Por continuidad de T_x y T_t, y por (3.5.5) se concluye que $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,d] \times [t_0, t_1[$.

$\boxed{\textit{Caso 3}}$ $\underline{[p(t)q(t)]' = 0 \text{ para } t \in]t_0, t_1[.}$

Tomando $E(t)$ como en (3.5.7) se obtiene $E'(t) = 0$ para $t \in]t_0, t_1[$. Por (3.5.5), (3.5.7) y la continuidad de T_t y T_x se concluye que $T(x,t) = 0$ para $t \in [t_0, t_1[$.

Teorema 8. *Bajo las hipótesis (3.5.5)-(3.5.6) el problema (3.5.1)-(3.5.4) admite una sola solución.*

DEMOSTRACIÓN. Por la linealidad del problema, es suficiente con demostrar que la única solución del problema (3.5.1)-(3.5.4), en cualquier dominio acotado $D = [0,d] \times [0, T^*]$, donde T^* es cualquier número positivo fijado, es la solución nula $T(x,t) = 0$.

Como se demostró en el capítulo anterior, el signo de $[p(t)q(t)]'$ puede cambiar sólo un número limitado de veces dentro de $[0,T^*]$. Si dicho signo no cambia en $[0,T^*]$, entonces el resultado ha quedado probado con el lema 2. Si no, debe existir una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T^*$ tal que $[p(t)q(t)]'$ tiene signo constante en cada subintervalo $]t_i, t_{i+1}[$ con $0 \leq i \leq N-1$. Aplicando el lema 2 al intervalo $[0,t_1]$ se sigue que $T(x,t) = T_t(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,d] \times [0,t_1[$. Por continuidad se tiene $T(x,t_1) = T_t(x,t_1) = 0$. Si se aplica inductivamente del mismo modo el lema 2 se obtiene finalmente que $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in D$.

3.6 Soluciones numéricas continuas

En este apartado trataremos la siguiente cuestión. Cómo construir una solución numérica continua $\tilde{u}(x,t)$ del problema (3.1.1)-(3.1.5) en $D(T) = \{\,(x,t);\ 0 \leq x \leq d;\ 0 \leq t \leq T\ \}$ de modo que el error $e(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$ con respecto a la solución exacta del teorema 7 sea inferior que una cantidad admisible prefijada ϵ, uniformemente para $(x,t) \in D(T)$.

Por la claridad de la presentación de los resultados siguientes, mostraremos ahora cómo encontrar un entero positivo m tal que

$$\sum_{i \geq m} \frac{1}{i^3} < \delta, \qquad \delta > 0. \tag{3.6.1}$$

Por el teorema 1.3 de [52] (ver fórmulas (1.21) y (1.22) de [52, p.12-17]), sabemos que

$$\sum_{i \geq m} \frac{1}{i^3} = \int_m^\infty x^{-3}\, dx + \frac{1}{2m^3} + \frac{1}{4m^4} + R_2, \tag{3.6.2}$$

donde

$$R_2 = \frac{\theta_2}{2m^6}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1. \tag{3.6.3}$$

De (3.6.2) y (3.6.3), si $m \geq 2$ se sigue que

$$\sum_{i \geq m} \frac{1}{i^3} \leq \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2m^3} + \frac{1}{4m^4} + \frac{1}{2m^6} = \frac{1}{2m^2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{m^4}\right)$$

$$\sum_{i\geq m}\frac{1}{i^3}\leq\frac{1}{2m^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=\frac{1}{2m^2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{23}{32m^2}.$$

Por tanto, la condición (3.6.1) se satisface tomando $m\geq 2$ que cumpla

$$m>\sqrt{\frac{23}{32\delta}}. \tag{3.6.4}$$

Por otro lado, bajo las hipótesis (3.4.13)-(3.4.14), integrando por partes 3 veces para a_n y 2 para b_n, de (3.4.12) se llega a

$$|a_n|\leq\frac{P_1}{n^3},\quad |b_n|\leq\frac{P_2}{n^2},\quad n\geq 1, \tag{3.6.5}$$

donde

$$P_1=\frac{2d^2}{\pi^3}\int_0^d|f^{(3)}(x)|dx,\quad P_2=\frac{2d}{\pi^2}\int_0^d|g^{(2)}(x)|dx. \tag{3.6.6}$$

De (3.4.6)-(3.4.8) y (3.6.5)-(3.6.6) se obtiene

$$|a_nz_n(t)|\leq\frac{MP_1}{n^3},\quad |b_nw_n(t)|\leq\frac{dMP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\frac{1}{n^3},\quad 0\leq t\leq T,\ n\geq 1, \tag{3.6.7}$$

y entonces, de (3.6.7) se deduce que

$$u_n(x,t)=[a_nz_n(t)+b_nw_n(t)]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right),\quad n\geq 1, \tag{3.6.8}$$

satisface

$$|u_n(x,t)|\leq\frac{M}{n^3}\left(P_1+\frac{dP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\right). \tag{3.6.9}$$

Nótese que con el fin de garantizar que

$$\sum_{n>n_0}|u_n(x,t)|<\frac{\epsilon}{2},\quad (x,t)\in D(T), \tag{3.6.10}$$

por (3.6.4) y (3.6.9), basta con tomar n_0 como el primer entero positivo tal que

$$n_0>\sqrt{\frac{23M}{16\epsilon}\left(P_1+\frac{dP_2}{\pi\sqrt{c(0)}}\right)}-1. \tag{3.6.11}$$

Por tanto, queda claro que

$$\left| u(x,t) - \sum_{n=1}^{n_0} \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (x,t) \in D(T). \tag{3.6.12}$$

Así si denotamos

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \tag{3.6.13}$$

se sigue que

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (x,t) \in D(T). \tag{3.6.14}$$

Sin embargo, $v(x,t)$ no es una aproximación especialmente útil, al menos en su forma (3.6.14), dado que ni $z_n(t)$ ni $w_n(t)$ son conocidas. Por ello trataremos ahora de construir aproximaciones numéricas continuas de $u_n(x,t)$ para $n = 1, 2, \ldots, n_0$, de la forma

$$U_n(x,t) = s_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \quad 1 \leq n \leq n_0, \tag{3.6.15}$$

donde $s_n(t)$ es una aproximación de $a_n z_n(t) + b_n w_n(t) = T_n(t)$, es decir, la solución del problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{c} T_n'' + a(t)T_n' + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 c(t)T_n = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \ 1 \leq n \leq n_0 \\ T_n(0) = a_n, \quad T_n'(0) = b_n. \end{array}\right\} \tag{3.6.16}$$

Si consideramos la transformación

$$Z_n(t) = \begin{bmatrix} T_n(t) \\ T_n'(t) \end{bmatrix}, \tag{3.6.17}$$

el problema (3.6.16) es equivalente al extendido

$$Z_n'(t) = A_n(t) Z_n(t), \quad Z_n(0) = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.6.18}$$

donde

$$A_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(t)\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 & -a(t) \end{bmatrix}, \quad 1 \le n \le n_0. \tag{3.6.19}$$

Nótese que si $Y_n(t)$ es solución del problema matricial de valor inicial en $I\!R^{2\times 2}$ relacionado:

$$Y_n'(t) = A_n(t)Y_n(t); \quad Y_n(0) = I, \quad 0 \le t \le T, \ 1 \le n \le n_0, \tag{3.6.20}$$

entonces la solución $Z_n(t)$ del problema (3.6.18) puede expresarse en términos de la solución $Y_n(t)$ del problema (3.6.20), de la forma

$$Z_n(t) = Y_n(t) \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le T, \ 1 \le n \le n_0. \tag{3.6.21}$$

Tratemos, pues, de encontrar $Y_n(t)$. En primer lugar, podemos calcular una solución numérica del problema (3.6.20) por medio de métodos matriciales multipaso como los usados en [34]. Así, si $h > 0$ y $t_K = Kh$, para los enteros $K \ge 0$, consideremos la sucesión matricial

$$\begin{gathered} Y_{n,0} = I \quad Y_{n,K} = \prod_{j=0}^{K-1} \left\{ \left[I - \tfrac{h}{2}A_n(t_{K-j})\right]^{-1} \left[I + \tfrac{h}{2}A_n(t_{K-j-1})\right] \right\}, \\ n \ge 1, \ K \ge 1, \end{gathered} \tag{3.6.22}$$

para valores lo suficientemente pequeños de h, y definamos la función B-spline matricial

$$V_n(t) = \sum_{K=0}^{N} B_{1K}(t) Y_{n,k}, \quad n \ge 1, \ 0 \le t \le T, \tag{3.6.23}$$

donde N es un entero positivo y

$$B_{1K}(t) = \begin{cases} h^{-1}(t - t_{K-1}), & t_{K-1} \le t \le t_K, \\ h^{-1}(t_{K+1} - t), & t_K \le t \le t_{K+1}. \end{cases} \tag{3.6.24}$$

Si denotamos por k_{in} los reales positivos:

$$k_{in} = \max\{\|A_n^{(i)}(t)\|_2, \ 0 \le t \le T\}, \quad i = 0, 1, 2; \ 1 \le n \le n_0, \tag{3.6.25}$$

y tomamos

$$h < \frac{1}{k_{0,n}}, \quad 1 \leq n \leq n_0, \tag{3.6.26}$$

entonces, por [34, p.77-78], la diferencia entre la solución exacta $Y_n(t)$ de (3.6.20), y la aproximación continua $V_n(t)$, satisface

$$\left.\begin{aligned} \|Y_n(t) - V_n(t)\|_2 \leq \frac{h^2}{4}(k_{1n} + k_{0n}^2)\exp(Tk_{0n}) + \\ + \frac{Th^2}{6}(k_{0n}^3 + 3k_{1n}k_{0n} + k_{2n})\exp(3Tk_{0n}), \\ \text{con } h < \frac{1}{k_{0,n}}, \quad 0 \leq t \leq T,\ 1 \leq n \leq n_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.6.27}$$

Si definimos

$$W_n(t) = V_n(t) \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T,\ 1 \leq n \leq n_0, \tag{3.6.28}$$

de (3.6.21) y (3.6.28) se sigue que

$$\|Z_n(t) - W_n(t)\|_2 \leq \|Y_n(t) - V_n(t)\|_2 \left\| \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \right\|_2, \quad 0 \leq t \leq T,\ 1 \leq n \leq n_0. \tag{3.6.29}$$

Introduzcamos las constantes

$$\begin{aligned} a^i &= \max\{|a^{(i)}(t)|;\ 0 \leq t \leq T\}, \\ c^i &= \max\{|c^{(i)}(t)|;\ 0 \leq t \leq T\}, \end{aligned} \tag{3.6.30}$$

y nótese que

$$\begin{aligned} \|A_n(t)\|_F &= \sqrt{1 + \left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c(t))^2 + (a(t))^2}; \\ \|A_n'(t)\|_F &= \sqrt{\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c'(t))^2 + (a'(t))^2}; \\ \|A_n^{(2)}(t)\|_F &= \sqrt{\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^{(2)}(t))^2 + (a^{(2)}(t))^2}. \end{aligned} \tag{3.6.31}$$

Entonces, de (1.1.1), (3.6.25), (3.6.30) y (3.6.31), se sigue que

$$\begin{aligned} k_{0n} &\leq \sqrt{1+\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^0)^2+(a^0)^2}; \\ k_{1n} &\leq \sqrt{\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^1)^2+(a^1)^2}; \\ k_{2n} &\leq \sqrt{\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^2)^2+(a^2)^2}. \end{aligned} \tag{3.6.32}$$

Por (3.6.27) y (3.6.32), para valores de h que satisfagan (3.6.26) se obtiene

$$\|Y_n(t)-V_n(t)\|_2 \leq h^2 E_n, \quad 0\leq t\leq T, 1\leq n\leq n_0, \tag{3.6.33}$$

donde

$$\begin{aligned} E_n = &\frac{1+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^4 (c^0)^2+(a^0)^2+\sqrt{(a^1)^2+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^4 (c^1)^2}}{4} \\ &\cdot \exp\left(T\sqrt{1+\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^0)^2+(a^0)^2}\right)+\tfrac{T}{6}\Bigg\{\left[1+\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^0)^2+(a^0)^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &+3\sqrt{\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^1)^2+(a^1)^2}\sqrt{1+\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^0)^2+(a^0)^2} \\ &+\sqrt{\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^2)^2+(a^2)^2}\Bigg\}\exp\left(3T\sqrt{1+\left(\tfrac{n\pi}{d}\right)^4 (c^0)^2+(a^0)^2}\right). \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

De (3.6.5), (3.6.29) y (3.6.33) se tiene

$$\|Z_n(t)-W_n(t)\| \leq h^2 E_n\sqrt{\frac{P_1^2}{n^6}+\frac{P_2^2}{n^4}}, \quad 0\leq t\leq T,\ 1\leq n\leq n_0. \tag{3.6.35}$$

Sea $s_n(t)$ el primer componente del vector $W_n(t)$, esto es:

$$s_n(t)=[1\,,\,0]W_n(t)=\sum_{K=0}^{N} B_{1K}(t)[1,\,0]Y_{nK}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{3.6.36}$$

entonces, de (1.1.2), (3.6.17) y (3.6.35), se sigue que

$$|T_n(t)-s_n(t)| \leq h^2 E_n\sqrt{\frac{P_1^2}{n^6}+\frac{P_2^2}{n^4}}, \quad 0\leq t\leq T,\ 1\leq n\leq n_0. \tag{3.6.37}$$

Por tanto, tomando

$$\tilde{u}(n_0,x,t)=\sum_{n=1}^{n_0} s_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right),\quad (x,t)\in D(T), \tag{3.6.38}$$

de (3.6.13), (3.6.37) y (3.6.38) se concluye

$$|v(x,t)-\tilde{u}(n_0,x,t)|<h^2\sum_{n=1}^{n_0} E_n\sqrt{\frac{P_1^2}{n^6}+\frac{P_2^2}{n^4}},\quad (x,t)\in D(T). \tag{3.6.39}$$

Por (3.6.39), si

$$h<\left[\frac{\epsilon}{2\sum_{n=1}^{n_0} E_n\left(\frac{P_1^2}{n^6}+\frac{P_2^2}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.6.40}$$

resulta evidente que

$$|v(x,t)-\tilde{u}(n_0,x,t)|<\frac{\epsilon}{2},\quad (x,t)\in D(T), \tag{3.6.41}$$

con lo cual, de (3.6.14) y (3.6.41) se obtiene finalmente

$$|u(x,t)-\tilde{u}(n_0,x,t)|<\epsilon,\quad (x,t)\in D(T). \tag{3.6.42}$$

Ahora expresemos en términos de los datos del problema algunas de las condiciones mostradas anteriormente. En primer lugar, nótese que k_{n0} definida por (3.6.25) satisface

$$k_{0n}=\max_{0\le t\le T}\|A_n(t)\|_2\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\max_{0\le t\le T}\|A_n(t)\|_F$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\min_{0\le t\le T}\sqrt{1+(a(t))^2+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^4(c(t))^2}.$$

Por tanto, k_{0n} deberá cumplir

$$k_{0n}\ge\frac{\sqrt{1+(a_{min})^2+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^4(c_{min})^2}}{\sqrt{2}},\quad 1\le n\le n_0, \tag{3.6.43}$$

donde

$$a_{min} = \min\{|a(t)|;\ 0 \leq t \leq T\}, \quad c_{min} = \min\{|c(t)|;\ 0 \leq t \leq T\}. \tag{3.6.44}$$

Así, la condición (3.6.26) puede escribirse como

$$h < \left[\frac{2}{1 + (a_{min})^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^4 (c_{min})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq n \leq n_0. \tag{3.6.45}$$

Asimismo, el producto de matrices $[I - \frac{h}{2}A_n(t_{K-j})]^{-1}[I + \frac{h}{2}A_n(t_{K-j-1})] = C_{nK}^j$ que aparece en (3.6.22) puede expresarse

$$C_{nK}^j =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 + \frac{h}{2}a(t_{K-j}) - \frac{h^2}{4}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 c(t_{K-j-1}) & h + \frac{h^2}{4}[a(t_{K-j}) - a(t_{K-j-1})] \\ -\frac{h}{2}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 [c(t_{K-j}) + c(t_{K-j-1})] & -\frac{h^2}{4}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 c(t_{K-j}) - \frac{h}{2}a(t_{K-j-1}) + 1 \end{bmatrix}}{1 + \dfrac{h}{2}a(t_{K-j}) + \dfrac{h^2}{4}\left(\dfrac{n\pi}{d}\right)^2 c(t_{K-j})}, \tag{3.6.46}$$

para $1 \leq n \leq n_0$, $0 \leq j \leq K-1$, $1 \leq k \leq N$, donde N es un entero positivo tal que si h satisface las condiciones (3.6.40), (3.6.45), entonces N debe ser

$$Nh = T. \tag{3.6.47}$$

Resumiendo lo anterior, bajo las hipótesis y la notación del teorema 7, el siguiente algoritmo nos permite construir una solución numérica continua cuyo error respecto a la solución exacta $u(x,t)$ definida en (3.4.10), (3.4.12), está uniformemente acotada por ϵ en $D(T)$.

- **PASO 1.** TRUNCAMIENTO DE LA SERIE.

  Sean $\epsilon > 0$ y $T > 0$.

  1. Sea M la constante calculada en (3.3.13)-(3.3.18), y sean P_1 y P_2 los valores definidos en (3.6.6).

2. Dado ϵ, elegir n_0 como el primera entero positivo que satisfaga (3.6.11).

- **PASO 2.** CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES NUMÉRICAS CONTINUAS.

  Dado n_0:

  1. Calcular las constanets c^0, a^0, c^1, a^1, c^2 y a^2 definidas en (3.6.30).
  2. Calcular las constantes k_{0n} por medio de (3.6.32) para $1 \leq n \leq n_0$.
  3. Calcular las constantes E_n definidas por (3.6.34) para $1 \leq n \leq n_0$.
  4. Calcular a_{min} y c_{min} por medio de (3.6.44).
  5. Sean $h > 0$ y $N > 0$ tales que $Nh = T$ y satisfacen (3.6.40) y (3.6.45).
  6. Calcular las matrices C_{nK}^j definidas por (3.6.46) para $0 \leq j \leq K-1$, $1 \leq K \leq N$, $1 \leq n \leq n_0$.
  7. Calcular las matrices

  $$Y_{n,0} = I, \quad Y_{n,K} = \prod_{j=0}^{K-1} C_{nK}^j, \quad 1 \leq k \leq N, \ 1 \leq n \leq n_0.$$

  8. Construir $V_n(t)$ siguiendo (3.6.23)-(3.6.24).
  9. Calcular a_n, b_n con (3.4.12) para $1 \leq n \leq n_0$ y $s_n(t)$ por medio de (3.6.36).
  10. Construir $\tilde{u}(n_0, x, t)$ siguiendo (3.6.38). $\tilde{u}(n_0, x, t)$ será una aproximación de la solución exacta $u(x,t)$ del problema (3.1.1)-(3.1.5) que satisfará (3.6.42).

Con el algoritmo anterior, el problema puede considerarse resuelto.

Capítulo 4

Soluciones analítico-numéricas de problemas mixtos para la ecuación del telégrafo con coeficientes variables dependientes del tiempo

4.1 Introducción

Este capítulo cerrará el estudio de problemas en los que interviene la ecuación de onda con variación de los coeficientes de la ecuación únicamente temporal.
El problema a analizar, pues, será del tipo[1]

$$u_{tt} + c(t)u_t + b(t)u = a(t)u_{xx}\ ,\ 0 < x < d,\ t > 0, \tag{4.1.1}$$

$$u(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{4.1.2}$$

$$u(d,t) = 0,\ t > 0, \tag{4.1.3}$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq d, \tag{4.1.4}$$

$$u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq d, \tag{4.1.5}$$

[1]Este capítulo está basado en parte en [29] y [33].

donde $c(t), b(t), a(t)$ son funciones continuas positivas, con $a(t)$ y $b(t)$ continuamente diferenciables y de variación acotada en cualquier intervalo finito, tales que

$$\begin{aligned}&\left[\exp\left(2\int_0^t c(s)ds\right)(b(t)+\lambda^2 a(t))\right] \text{ no tiene ningún punto crítico} \\ &\text{para } t \geq 0,\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

o

$$\begin{aligned}&\left[\exp\left(2\int_0^t c(s)ds\right)(b(t)+\lambda^2 a(t))\right] \text{ tiene como mucho un conjunto} \\ &\text{discreto de puntos críticos en cualquier intervalo compacto } [0,H]\,.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales definidas en $[0,d]$ tales que

$$\begin{aligned}&f(x) \text{ es tres veces diferenciable, } f^{(3)}(x) \text{ es continua a trozos y de} \\ &\text{variación acotada en [0,d], con } f(0)=f(d)=f^{(2)}(0)=f^{(2)}(d)=0,\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

$$\begin{aligned}&g(x) \text{ es dos veces diferenciable y } g^{(2)}(x) \text{ es continua a trozos} \\ &\text{y de variación acotada en } [0,d], \text{ con } g(0)=g(d)=0.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

La ecuación (4.1.1), más conocida como ecuación del telégrafo (es la ecuación que aparece al estudiar la propagación de una onda electromagnética sobre un cable de pares, como los empleados para la comunicación telegráfica), es bastante frecuente en la naturaleza. En general, cualquier fenómeno de propagación de ondas en el que se consideren efectos de amortiguamiento, distorsión, pérdidas, etc., viene definido por una ecuación como (4.1.1).

Dicha ecuación, en su versión con coeficientes constantes, juega un papel importante en la transmisión y propagación de señales eléctricas [21, p.280], sistemas vibrantes [9, p.517] y mecánicos [53, p.188]. Sin embargo, numerosos y muy distintos problemas requieren un modelo matemático basado en coeficientes variables con el tiempo. Así, en la evaluación de procesos de calentamiento por microondas, el modelo de coeficientes constantes frecuentemente lleva a resultados erróneos debidos no sólo a la complejidad de la distribución del campo electromagnético en el interior del horno sino a la variación de las propiedades dieléctricas del material debido a las alteraciones que las propias microondas inducen en la temperatura (evidentemente), humedad (el calor seca los materiales, hace evaporar el agua que contienen), densidad y otros parámetros (no olvidemos que el efecto dieléctrico de los materiales es una manifestación de su respuesta no instantánea al campo ejercido -ver [3]-, respuesta en la que el movimiento, separación, interacciones y estructura de la propias moléculas del material influyen decisivamente [39, cap.3]). El procesado electromagnético de materiales homogéneos con altas densidades de potencia, o más concretamente, el estudio de procesos de secado por microondas en materiales gruesos y higroscópicos también conduce a modelos descritos por la ecuación del telégrafo, ver [45, cap.10].

Como en los casos analizados hasta ahora, el método de separación de variables será el arma que emplearemos para tratar de encontrar una solución al problema (4.1.1)-(4.1.9). De nuevo, tres factores cruciales nos permitirán afrontar el problema:

1. La acotación del sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que aparecen al aplicar el método, lo que permitirá la construcción de una solución teórica del problema en forma de serie.

2. La posibilidad de aprovechar esa cota para truncar la serie obtenida de acuerdo con un error prefijado admisible en un subdominio compacto $D(H) = \{(x,t);\ 0 \leq x \leq d,\ 0 \leq t \leq H\}$.

3. Una vez la serie ha sido truncada, el uso de métodos discretos de un paso matriciales y técnicas de interpolación para construir soluciones numéricas continuas en forma de suma finita. El tamaño de paso de la solución numérica discreta será calculado en función de los datos del problema.

El problema analizado en este capítulo, más que ser una ampliación del anterior, es un complemento del mismo, pues aquí la función $b(t)$ que aparece en (4.1.1) no puede anularse en ningún punto, mientras que el capítulo anterior se anulaba en toda la recta real. La presencia de dicho término complica sobremanera el cálculo de unas cotas para el sistema fundamental de soluciones para la ecuación ordinaria que se encontrará en t, hasta el punto que deberemos desarrollar una expresión que nos permita ignorar los puntos de inflexión de las funciones que intervienen, pues aquí éstos no serán constantes para todos los autovalores λ sino que variarán con dichos parámetros. Si se quiere independizar al máximo las cotas obtenidas respecto a λ, consideraremos primero particiones de $[0, H]$ dependientes de dicho parámetro y luego generalizaremos la cota en pos de una expresión en la que la manera de escoger dicha partición no afecte en absoluto. Este mecanismo, ampliable a los problemas anteriores, será fundamentalmente el que añada el grado de calidad a esta solución respecto a las que aparecen en otros apartados. Con el consiguiente cálculo, dicho resultado se puede ampliar al caso en el que $b(t)$ se anule en algunos puntos, labor para la que, aunque no se realizará explícitamente, pensamos haber dejado las bases.

La organización del capítulo es la siguiente. El apartado 2 analizará la acotación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del tipo

$$(p(t)T')' + p(t)(b(t) + \lambda^2 a(t))T = 0, \tag{4.1.10}$$

donde $p(t)$ es una función positiva, continuamente diferenciable y de variación acotada en cualquier intervalo compacto, y $a(t), b(t)$ son las funciones que aparecen en (4.1.1). En el apartado 3, el método de separación de variables será aplicado para obtener una solución teórica en serie del problema (4.1.1)-(4.1.5), bajo las hipótesis (4.1.6) o (4.1.7), y (4.1.8)-(4.1.9). En el apartado 4, por último, se tratará la siguiente cuestión: dado un error admisible $\varepsilon > 0$, y un dominio acotado $D(H) = \{(x,t); 0 \leq x \leq d,\ 0 \leq t \leq H\},\ H > 0$, cómo construir una solución numérica continua cuyo error respecto a la serie solución sea menor que ε uniformemente en el interior de $D(H)$.

4.2 Cotas para las soluciones de ecuaciones diferenciales paramétricas

En este apartado trataremos de encontrar una acotación, independiente de λ, para las soluciones de la ecuación

$$(p(t)y')' + p(t)(b(t) + \lambda^2 a(t))y = 0, \quad 0 \leq t \leq H \ , \tag{4.2.1}$$

donde $p(t)$, $b(t)$ y $a(t)$ son funciones positivas, continuamente diferenciables y de variación acotada en $[0, H]$.
Sea $\{z(t), w(t)\}$ el sistema fundamental de soluciones de (4.2.1) que satisface

$$z(0) = 1;\ z'(0) = 0;\ w(0) = 0;\ w'(0) = 1. \tag{4.2.2}$$

Supondremos que se cumple cualquiera de las siguientes dos hipótesis:

$$(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t)) \text{ no tiene ningún punto crítico para } t \geq 0, \tag{4.2.3}$$

o

$$\begin{array}{c}(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t)) \text{ tiene como mucho un conjunto} \\ \text{discreto numerable de puntos críticos en } t \geq 0.\end{array} \tag{4.2.4}$$

Con el fin de facilitar nuestra búsqueda, distinguiremos los siguientes casos.

CASO 1. $[(p(t))^2(b(t) + \lambda a(t))]' \geq 0$ para $0 \leq t \leq H$ y para todo $\lambda \geq 1$.
Sea $y(t)$ una solución de (4.2.1) y consideremos la función $F(y, \cdot)$ definida por

$$F(y, t) = (y(t))^2 + \frac{(y'(t))^2}{b(t) + \lambda^2 a(t)}. \tag{4.2.5}$$

Tomando derivadas en (4.2.5) y sabiendo que y es una solución de (4.2.1), se sigue

$$F'(y, t) = 2y(t)y'(t) + \frac{2(b(t) + \lambda^2 a(t))y''(t)y'(t) - (y'(t))^2(b'(t) + \lambda^2 a'(t))}{(b(t) + \lambda^2 a(t))^2}$$

$$= \frac{-2(y'(t))^2 \left(\frac{p'(t)}{p(t)}\right)(b(t) + \lambda^2 a(t)) - (y'(t))^2(b'(t) + \lambda^2 a'(t))}{(b(t) + \lambda^2 a(t))^2},$$

$$F'(y,t) = -\left[\frac{y'(t)}{(p(t))^2(b(t)+\lambda^2 a(t))}\right]^2 [(p(t))^2(b(t)+\lambda^2 a(t))]' \leq 0, \qquad (4.2.6)$$

por hipótesis.

Con lo cual, si $z(t)$ es la solución de (4.2.1) que satisface $z(0)=1,\ z'(0)=0$, para valores $\lambda \geq 1$ resulta

$$(z(t))^2 + \frac{(z'(t))^2}{b(t)+\lambda^2 a(t)} = F(z,t) \leq F(z,0) = 1,$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} |z(t)| \leq 1,\ \left|z'(t)\right| \leq \lambda(b^o + a^o)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad 0 \leq t \leq H, \\ b^o = \max\{b(t); 0 \leq t \leq H\},\quad a^o = \max\{a(t); 0 \leq t \leq H\}. \end{array}\right] \qquad (4.2.7)$$

Si w es la solución de (4.2.1) que satisface $w(0)=0,\ w'(0)=1$, para $\lambda \geq 1$, se tiene

$$(w(t))^2 + \frac{(w'(t))^2}{b(t)+\lambda^2 a(t)} = F(w,t) \leq F(w,0) = \frac{1}{b(0)+\lambda^2 a(0)}\ ,\quad 0 \leq t \leq H.$$

Por tanto

$$|w(t)| \leq \lambda^{-1}(a(0))^{-\frac{1}{2}},\ |w'(t)| \leq (b^o + a^o)^{\frac{1}{2}}(a(0))^{-\frac{1}{2}},\quad 0 \leq t \leq H. \qquad (4.2.8)$$

CASO 2. $[(p(t))^2(b(t)+\lambda a(t))]' \leq 0$ para $0 \leq t \leq H$ y para todo $\lambda \geq 1$.

Sea $y(t)$ una solución de (4.2.1) y consideremos la función $G(y,\cdot)$ definida por

$$G(y,t) = (b(t)+\lambda^2 a(t))\ ((p(t)y(t))^2 + (p(t)y'(t))^2,\quad 0 \leq t \leq H. \qquad (4.2.9)$$

Tomando derivadas en (4.2.9) y sabiendo que y satisface (4.2.1), se tiene

$$G'(y,t) = (y(t))^2 \left[(p(t))^2\ (b(t)+\lambda^2 a(t))\right]' \leq 0\ ,\quad 0 \leq t \leq H, \qquad (4.2.10)$$

por hipótesis.

Consideremos la solución z de (4.2.1), con $z(0)=1,\ z'(0)=0$. Entonces

$$(p(t)z'(t))^2 + (p(t)z(t))^2\ (b(t)+\lambda^2 a(t)) \leq G(z,0) = (p(0))^2(b(0)+\lambda^2 a(0)). \quad (4.2.11)$$

Dado que $(p(t))^2(b(t)+\lambda a(t))$ es positiva y decreciente en $[0,H]$ para cualquier $\lambda \geq 1$, y además $b(t) > 0$ para $t \in [0,H]$, se sigue que

$$|z(t)| \leq \frac{p(0)}{p(H)} \left(\frac{b(0)+a(0)}{a(H)} \right)^{\frac{1}{2}} = M, \quad 0 \leq t \leq H, \quad \lambda \geq 1, \tag{4.2.12}$$

y

$$|z'(t)| \leq M(a^0+b^0)^{\frac{1}{2}}\lambda, \quad 0 \leq t \leq H \quad \lambda \geq 1, \tag{4.2.13}$$

donde a^0 y b^0 vienen definidos como en (4.2.7).
Consideremos ahora la solución w de (4.2.1) con $w(0) = 0$ y $w'(0) = 1$, para $\lambda \geq 1$. De (4.2.10) se deduce

$$(p(t)w'(t))^2 + (p(t)w(t))^2 \ (b(t) + \lambda^2 a(t)) \leq G(w,0) = (p(0))^2. \tag{4.2.14}$$

Como antes, dado que $(p(t))^2(b(t) + \lambda a(t))$ es positiva y decreciente en $[0,H]$ para cualquier $\lambda \geq 1$, y $b(t) > 0$ para $t \in [0,H]$, se tiene

$$|w(t)| \leq \frac{p(0)}{p(H)} \left(\frac{1}{\lambda^2 a(H)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M}{\lambda (a(0))^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq t \leq H, \quad \lambda \geq 1, \tag{4.2.15}$$

y

$$|w'(t)| \leq \frac{M}{(a(0))^{\frac{1}{2}}} (a^0+b^0)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq H, \quad \lambda \geq 1. \tag{4.2.16}$$

Supongamos ahora que no podemos garantizar que para todo $\lambda \geq 1$, $(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))$ no tenga puntos críticos. Por ser $[0,H]$ un compacto y por la hipótesis (4.2.4), en este intervalo el signo de $[(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))]'$ sólo puede cambiar un número finito de veces (número que, fijados $p(t)$, $b(t)$ y $a(t)$, dependerá del parámetro λ). Nótese además que, de (4.2.5) y (4.2.9), para cada solución $y(t)$ de (4.2.1) se verifica

$$G(y,t) = (p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t)) \ F(y,t). \tag{4.2.17}$$

Estamos ya en condiciones para analizar el siguiente caso.

CASO 3. Existe una partición $0 < t_{0,\lambda} < t_{1,\lambda} < ... < t_{N,\lambda}$, tal que $[(p(t_{i,\lambda}))^2(b(t_{i,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{i,\lambda}))]' = 0$ para $0 \le i \le N$, con $[(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))]' \ge 0$ para t en $]0, t_{0,\lambda}[$, $]t_{1,\lambda}, t_{2,\lambda}[$,..., $]t_{2k+1,\lambda}, t_{2k+2,\lambda}[$ y $[(p(t))^2(b(t)+\lambda^2 a(t))]' \le 0$ para t en $]t_{0,\lambda}, t_{1,\lambda}[$, $]t_{2,\lambda}, t_{3,\lambda}[$, ..., $]t_{2k,\lambda}, t_{2k+1,\lambda}[$, con $t_{2k+1,\lambda} = H$ o $t_{2k+2,\lambda} = H$.

Por la economía en la notación, denotemos por $R(t)$ a la función

$$R(t) = (p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t)), \quad 0 \le t \le H. \tag{4.2.18}$$

Aplicando el caso 1 al intervalo $[0, t_{0,\lambda}]$ y (4.2.17), se obtiene

$$\begin{aligned} &F(y,t) \le F(y,0), && 0 \le t \le t_{0,\lambda}, \\ &G(y,t) = R(t)F(y,t) \le R(t_{0,\lambda})F(y,0), && 0 \le t \le t_{0,\lambda}. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

En el intervalo $t_{0,\lambda} \le t \le t_{1,\lambda}$, del estudio del caso 2 y de (4.2.17), se sigue

$$\begin{aligned} &G(y,t) \le G(y,t_{0,\lambda}), \qquad t_{0,\lambda} \le t \le t_{1,\lambda}, \\ &F(y,t_{1,\lambda}) = \frac{G(y,t_{1,\lambda})}{R(t_{1,\lambda})} \le \frac{G(y,t_{0,\lambda})}{R(t_{1,\lambda})} = \frac{R(t_{0,\lambda})}{R(t_{1,\lambda})}F(y,0) \ . \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Para $t_{1,\lambda} \le t \le t_{2,\lambda}$, del estudio del caso 1 y de (4.2.20), (4.2.17) resulta

$$\begin{aligned} &F(y,t) \le F(y,t_{1,\lambda}) = \frac{R(t_{0,\lambda})}{R(t_{1,\lambda})}F(y,0) \ , \qquad t_{1,\lambda} \le t \le t_{2,\lambda}, \\ &G(y,t_{2,\lambda}) = R(t_{2,\lambda})F(y,t_{2,\lambda}) \le \frac{R(t_{2,\lambda})R(t_{0,\lambda})}{R(t_{1,\lambda})}F(y,0) \ . \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Si $t_{2,\lambda} \le t \le t_{3,\lambda}$, de (4.2.21) y (4.2.17) se sigue

$$\begin{aligned} &G(y,t) \le G(y,t_{2,\lambda}), \qquad t_{2,\lambda} \le t \le t_{3,\lambda}, \\ &F(y,t_{3,\lambda}) = \frac{G(y,t_{3,\lambda})}{R(t_{3,\lambda})} \le \frac{R(t_{2,\lambda})R(t_{0,\lambda})}{R(t_{3,\lambda})R(t_{1,\lambda})}F(y,0) \ . \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Por inducción, en general

$$F(y,t) \le F(y,t_{2k+1,\lambda}) = \frac{R(t_{2k,\lambda})...R(t_{0,\lambda})}{R(t_{2k+1,\lambda})...R(t_{1,\lambda})}F(y,0), \tag{4.2.23}$$

$$t_{2k+1,\lambda} \le t \le t_{2k+2,\lambda}.$$

De (4.2.5), (4.2.18) y (4.2.23) podemos escribir, para $\lambda \ge 1$,

$$|y(t)|^2 \le \left[\frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})}\right]^2 \times$$

$$\times \frac{[b(t_{2k,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k,\lambda})]...[b(t_{0,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{0,\lambda})]}{[b(t_{2k+1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k+1,\lambda})]...[b(t_{1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{1,\lambda})]} F(y,0) \ ,$$

$$|y'(t)|^2 \le \lambda^2(a^0 + b^0)\left[\frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})}\right]^2 \times$$

$$\times \frac{[b(t_{2k,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k,\lambda})]...[b(t_{0,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{0,\lambda})]}{[b(t_{2k+1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k+1,\lambda})]...[b(t_{1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{1,\lambda})]} F(y,0) \ ,$$

$$t_{2k+1,\lambda} \le t \le t_{2k+2,\lambda}.$$

Por otro lado

$$G(y,t) \le G(y,t_{2k,\lambda}) \le R(t_{2k,\lambda})\left[\frac{R(t_{2k-2,\lambda})...R(t_{0,\lambda})}{R(t_{2k-1,\lambda})...R(t_{1,\lambda})}\right] F(y,0) \ , \quad t_{2k,\lambda} \le t \le t_{2k+1,\lambda}.$$

De aquí y de (4.2.9) y teniendo en cuenta que $R(t)$ es decreciente en $[t_{2k,\lambda}, t_{2k+1,\lambda}]$, para $\lambda \ge 1$ se sigue que

$$|y(t)|^2 \le \frac{R(t_{2k,\lambda})}{R(t)}\left[\frac{R(t_{2k-2,\lambda})...R(t_{0,\lambda})}{R(t_{2k-1,\lambda})...R(t_{1,\lambda})}\right] \le \frac{R(t_{2k,\lambda})...R(t_{0,\lambda})}{R(t_{2k+1,\lambda})...R(t_{1,\lambda})}F(y,0) \ ,$$

y

$$|y'(t)|^2 \le \frac{R(t_{2k,\lambda})[b(t) + \lambda^2 a(t)]}{R(t)}\left[\frac{R(t_{2k-2,\lambda})...R(t_{0,\lambda})}{R(t_{2k-1,\lambda})...R(t_{1,\lambda})}\right]$$

$$\le \lambda^2(a^0 + b^0)\frac{R(t_{2k,\lambda})...R(t_{0,\lambda})}{R(t_{2k+1,\lambda})...R(t_{1,\lambda})}F(y,0) \ ,$$

para $t_{2k,\lambda} \leq t \leq t_{2k+1,\lambda}$.
Por tanto, dado que

$$\frac{(p(t_{2i,\lambda}))^2[b(t_{2i,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2i,\lambda})]}{(p(t_{2i+1,\lambda}))^2[b(t_{2i+1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2i+1,\lambda})]} \leq 1 \ ,$$

podemos afirmar que si $0 \leq t \leq t_{2k+2,\lambda}$, entonces

$$\begin{aligned} |y(t)| \leq & \frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})} \times \\ & \times \left[\frac{[b(t_{2k,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k,\lambda})]...[b(t_{0,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{0,\lambda})]}{[b(t_{2k+1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k+1})]...[b(t_{1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{1,\lambda})}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

y

$$\begin{aligned} |y'(t)| \leq & \lambda(a^0 + b^0)^{\frac{1}{2}} \frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})} \times \\ & \times \left[\frac{[b(t_{2k,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k,\lambda})]...[b(t_{0,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{0,\lambda})]}{[b(t_{2k+1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{2k+1})]...[b(t_{1,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{1,\lambda})}\right]^{\frac{1}{2}} (F(y,0))^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

Si conseguimos acotar el miembro derecho de (4.2.24) (excluyendo $F(y,0)$) por una expresión que no dependa de la partición, habremos conseguido una cota cuya dependencia respecto a λ será lo suficientemente simple como para poder usarla en apartados posteriores.
Por la claridad de la exposición, detengámonos un poco en este punto. Dado que $p(t)$ es siempre positiva, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})} &= \exp\left[\log\left(\frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})}\right)\right] \\ &= \exp\left[\log\left(\frac{p(t_{2k,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})}\right) + ... + \log\left(\frac{p(t_{0,\lambda})}{p(t_{1,\lambda})}\right)\right] . \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Por otro lado, un simple cálculo deja claro que

$$\log(1+x) \leq x \ , \qquad x > -1 \ .$$

Aplicando este resultado a (4.2.26), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{p(t_{2k,\lambda})...p(t_{0,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})...p(t_{1,\lambda})} &= \\
&= \exp\left[\log\left(1+\frac{p(t_{2k,\lambda})-p(t_{2k+1,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})}\right)+...+\log\left(1+\frac{p(t_{0,\lambda})-p(t_{1,\lambda})}{p(t_{1,\lambda})}\right)\right] \\
&\leq \exp\left[\frac{p(t_{2k,\lambda})-p(t_{2k+1,\lambda})}{p(t_{2k+1,\lambda})}+...+\frac{p(t_{0,\lambda})-p(t_{1,\lambda})}{p(t_{1,\lambda})}\right] \\
&\leq \exp\left(\frac{P(0,H)}{p_{min}}\right), \qquad (4.2.27)
\end{aligned}$$

siendo

$$p_{min} = \min\{p(t),\ \ 0 \leq t \leq H\}\ , \qquad (4.2.28)$$

y $P(0,H)$ la variación total de $p(t)$ en $[0,H]$.

Repitiendo el razonamiento anterior se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
&\frac{[b(t_{2k,\lambda})+\lambda^2 a(t_{2k,\lambda})]...[b(t_{0,\lambda})+\lambda^2 a(t_{0,\lambda})]}{[b(t_{2k+1,\lambda})+\lambda^2 a(t_{2k+1})]...[b(t_{1,\lambda})+\lambda^2 a(t_{1,\lambda})]} \\
&\leq \ \exp\left(\frac{B(0,H)+\lambda^2 A(0,H)}{b_{min}+\lambda^2 a_{min}}\right), \qquad (4.2.29)
\end{aligned}$$

siendo

$$a_{min} = \min\{a(t),\ 0 \leq t \leq H\} \quad b_{min} = \min\{b(t),\ 0 \leq t \leq H\}\ , \qquad (4.2.30)$$

y $A(0,H)$ y $B(0,H)$ las variaciones totales, respectivamente, de $a(t)$ y $b(t)$ en $[0,H]$.

Si definimos

$$K = \max\left\{\frac{B(0,H)}{b_{min}}, \frac{A(0,H)}{a_{min}}\right\} \qquad (4.2.31)$$

entonces podemos asegurar que

$$\frac{B(0,H)+\lambda^2 A(0,H)}{b_{min}+\lambda^2 a_{min}} \leq K. \qquad (4.2.32)$$

De (4.2.24), (4.2.25), (4.2.27), (4.2.29), (4.2.31) y (4.2.32), se concluye que

$$|y(t)| \leq \exp\left(\frac{P(0,H)}{p_{min}} + \frac{K}{2}\right)(F(y,0))^{\frac{1}{2}} = M(F(y,0))^{\frac{1}{2}},$$

$$|y'(t)| \leq \lambda M(a^0+b^0)^{\frac{1}{2}}(F(y,0))^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2.33}$$

$$0 \leq t \leq H,$$

expresión en la que, como se puede observar, no hay dependencia respecto a la partición usada. La expresión anterior, pues, es válida para cualquier $\lambda \geq 1$.

Si aplicamos (4.2.33) a $z(t)$ y $w(t)$, tendremos, por (4.2.2), que

$$|z(t)| \leq M, \qquad |z'(t)| \leq \lambda M(a^0+b^0)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq H;$$

$$|w(t)| \leq \frac{M}{\lambda(a(0))^{\frac{1}{2}}}, \quad |w'(t)| \leq M\frac{(a^0+b^0)^{\frac{1}{2}}}{(a(0))^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq t \leq H, \tag{4.2.34}$$

con M definido como en (4.2.33).

El caso 4 es esencialmente el mismo que el 3, con la única diferencia que en el primer intervalo $[0, t_{0,\lambda}]$ la función $(p(t))^2(b(t)+\lambda^2 a(t))$ es decreciente:

CASO 4. Existe una partición $0 < t_{0,\lambda} < t_{1,\lambda} < ... < t_{N,\lambda}$, tal que $(p(t_{i,\lambda}))^2(b(t_{i,\lambda}) + \lambda^2 a(t_{i,\lambda}))' = 0$ para $0 \leq i \leq N$, $[(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))]' < 0$ para t en $]0, t_{0,\lambda}[$, $]t_{1,\lambda}, t_{2,\lambda}[$, ..., $]t_{2k-1,\lambda}, t_{2k}[$ y $[(p(t))^2(b(t)+\lambda^2 a(t))]' > 0$ para t en $]t_{0,\lambda}, t_{1,\lambda}[$, $]t_{2,\lambda}, t_{3,\lambda}[$, ..., $]t_{2k,\lambda}, t_{2k+1,\lambda}[$, con $t_{2k,\lambda} = H$ o $t_{2k+1,\lambda} = H$.

Resumiendo lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 9. *Sea p(t) una función positiva, de variación acotada y continuamente diferenciable en* $[0,H]$, *y sean* $a(t), b(t)$ *funciones positivas, continuamente diferenciables y de variación acotada en* $[0,H]$. *Sea* $\lambda \geq 1$ *y sea* $\{z, w\}$ *el sistema fundamental* *de soluciones de la ecuación (4.2.1) que satisface (4.2.2). Bajo las hipótesis (4.2.3) o (4.2.4) existe una constante positiva M (independiente de λ) tal que*

$$|z(t)| \leq M, \quad |z'(t)| \leq \lambda M(\widetilde{b}^o + \widetilde{a}^o)^{\frac{1}{2}}, \; 0 \leq t \leq H\,,$$

$$|w(t)| \leq \lambda^{-1}(a(0))^{-\frac{1}{2}}M, \; |w'(t)| \leq M(\widetilde{b}^o + \widetilde{a}^o)^{\frac{1}{2}}(a(0))^{-\frac{1}{2}}, \; 0 \leq t \leq H\,, \qquad (4.2.35)$$

$$\widetilde{b}^o = \max\{b(t); 0 \leq t \leq H\}, \; \widetilde{a}^o = \max\{a(t); 0 \leq t \leq H\}, \; \lambda \geq 1.$$

Nota 4. *La constante M puede expresarse directamente en función de los datos de acuerdo a los 4 casos anteriores. Así, si $(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))$ es creciente en $[0, H]$ para cualquier $\lambda \geq 1$, $M = 1$. Si $(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))$ es decreciente para cualquier $\lambda \geq 1$, M viene definida por (4.2.12). Si $(p(t))^2(b(t) + \lambda^2 a(t))$ tiene intervalos de crecimiento y decrecimiento para algún $\lambda \geq 1$, M toma el valor dado en (4.2.33).*

El principal inconveniente del teorema 9 es la dificultad para asegurar el cumplimiento de las hipótesis (4.2.3) y (4.2.4), especialmente de esta última, dado que dicha cuestión pasa por determinar todos los ceros (para conocer su número) de una función ($p^2(t)[b(t) + \lambda^2 a(t)]$) de dos variables ($t$ y λ) en un dominio semiinfinito ($[0, H] \times [1, +\infty[$).

Una posible solución parte de ampliar las condiciones a cumplir por parte de $p(t)$, $a(t)$ y $b(t)$ y exigir que las segundas derivadas de las tres funciones ($p^{(2)}(t)$, $a^{(2)}(t)$ y $b^{(2)}(t)$, respectivamente) sean continuamente diferenciables en $[0, H]$.

Siendo así, si existiera algún λ_i para el que $p^2(t)[b(t) + \lambda_i^2 a(t)]$ tuviera infinitos puntos críticos, aplicando el mismo argumento utilizado en el teorema 2, debería existir al menos un punto de acumulación t^* de tales ceros en $[0, H]$ tal que

$$(p^2(t^*)b(t^*))' + \lambda_i^2(p^2(t^*)a(t^*))' = (p^2(t^*)b(t^*))'' + \lambda_i^2(p^2(t^*)a(t^*))'' = 0\,.$$

Por la legibilidad del texto, emplearemos en lo sucesivo las funciones $r(t)$ y $s(t)$ definidas por

$$r(t) = p^2(t)b(t)\,, \quad s(t) = p^2(t)a(t)\,. \qquad (4.2.36)$$

De (4.2.36) se deduce que la ecuación anterior puede expresarse como

$$r'(t^*) + \lambda_i^2 s'(t^*) = r''(t^*) + \lambda_i^2 s''(t^*) = 0\,. \tag{4.2.37}$$

En tal situación podemos distinguir cuatro casos:

1. $r'(t^*) = 0$ ó $s'(t^*) = 0$ y ni $r''(t)$ ni $s''(t)$ se anulan en t^* . En ese caso, por (4.2.37), queda claro, dado que $\lambda_i \geq 1$, que $s'(t^*) = 0$ y $r'(t^*) = 0$, respectivamente.

   Además, también por (4.2.37), se tiene que

   $$\lambda_i^2 = -\frac{r''(t^*)}{s''(t^*)}\,, \tag{4.2.38}$$

   de donde obtenemos una expresión para calcular λ_i. Sea cual sea el valor de λ_i^2 encontrado, éste debe ser al menos mayor que 0.

2. $r''(t^*) = 0$ ó $s''(t^*) = 0$ y ni $r'(t)$ ni $s'(t)$ se anulan en t^*. En ese caso, por (4.2.37), y dado que $\lambda_i \geq 1$, se deduce que $s'(t^*) = 0$ y $r'(t^*) = 0$, respectivamente.

   Además, por (4.2.37), se tiene que

   $$\lambda_i^2 = -\frac{r'(t^*)}{s'(t^*)}\,, \tag{4.2.39}$$

   de donde obtenemos una expresión para calcular λ_i. De nuevo está claro que sea cual sea el valor de λ_i^2 encontrado, éste debe ser mayor que 0.

3. Ni $r'(t)$ ni $s'(t)$ ni $r''(t)$ ni $s''(t)$ se anulan en t^*. En ese caso, (4.2.38) y (4.2.39) se siguen verificando y

   $$\lambda_i^2 = -\frac{r'(t^*)}{s'(t^*)} = -\frac{r''(t^*)}{s''(t^*)}\,, \tag{4.2.40}$$

   de donde se ha de cumplir que

   $$r'(t^*)s''(t^*) - r''(t^*)s'(t^*) = 0\,. \tag{4.2.41}$$

4. $r'(t^*) = s'(t^*) = r''(t^*) = s''(t^*) = 0$.

Obsérvese que por (4.2.37) no cabe la posibilidad de que $r'(t^*)$ se anule y $s'(t^*)$ no (o viceversa), ni que $r''(t^*)$ se anule y $s''(t^*)$ no (o viceversa también), pues $\lambda \geq 1$.

De las líneas anteriores podemos extraer el siguiente teorema

Teorema 10. *Si $p(t)$, $a(t)$ y $b(t)$ son funciones estrictamente positivas y dos veces continuamente diferenciables en $[0, H]$ y las funciones $r(t)$ y $s(t)$ definidas por (4.2.36) verifican que no existe ningun punto ξ en el intervalo $[0, H]$ tal que $r'(\xi) = s'(\xi) = r''(\xi) = s''(\xi) = 0$, si existe algún λ_i para el que $r(t) + \lambda_i^2 s(t)$ posea infinitos puntos críticos en $[0, H]$, entonces tales puntos críticos deben tener al menos algún punto de acumulación $t^* \in [0, H]$ que cumplirá una de las siguientes condiciones*

- $r'(t^*) = s'(t^*) = 0$, *en cuyo caso* $\lambda_i^2 = -\frac{r''(t^*)}{s''(t^*)}$;
- $r''(t^*) = s''(t^*) = 0$, *en cuyo caso* $\lambda_i^2 = -\frac{r'(t^*)}{s'(t^*)}$, *o*
- $r''(t^*)s'(t^*) - r'(t^*)s''(t^*) = 0$, *en cuyo caso* $\lambda_i^2 = -\frac{r'(t^*)}{s'(t^*)} = -\frac{r''(t^*)}{s''(t^*)}$.

Del teorema anterior resulta que para averiguar si $p(t)$, $a(t)$ y $b(t)$ verifican las hipótesis (4.2.3) y (4.2.4), será conveniente encontrar primero aquéllos puntos t^*, si los hay, para los que $r'(t^*) = s'(t^*) = 0$, o $r''(t^*) = s''(t^*) = 0$ o $r''(t^*)s'(t^*) - r'(t^*)s''(t^*) = 0$. Una vez encontrados, habría que calcular la correspondiente constante λ_i^2 por medio de (4.2.38), (4.2.39) y (4.2.40), respectivamente.

Con t^* y λ_i, restaría construir la función $r(t) + \lambda_i^2 s(t)$ y examinar sus posibles puntos críticos en la cercanía de t^*, para determinar si efectivamente son infinitos o no. La determinación de su número sería más simple al haber fijado λ_i y saber que los puntos críticos deben estar en la vecindad de t^*.

El único inconveniente del método expuesto aparece si el número de puntos t^* encontrado es infinito, dado que evidentemente no podríamos analizarlos todos.

Por el contrario, si no existe ningún t^* que cumpla las hipótesis mencionadas, podemos estar seguros de que las hipótesis (4.2.3) y (4.2.4) se verifican en $[0, H]$.

4.3 Solución teórica exacta en serie

En este apartado trataremos de construir una solución en serie del problema (4.1.1)-(4.1.5) bajo las hipótesis (4.1.8)-(4.1.9) y (4.1.6) o (4.1.7). Nótese que si $X(x)$ es una solución no idénticamente nula del problema de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(d) = 0, \quad 0 < x < d, \ \lambda > 0, \tag{4.3.1}$$

y $T(t)$ satisface

$$T'' + c(t)T' + (b(t) + \lambda^2 a(t))T = 0, \quad t > 0 \tag{4.3.2}$$

entonces $u(x,t) = X(x)T(t)$ es una solución de (4.1.1) pues

$$\begin{aligned} u_{tt} + c(t)u_t + b(t)u - a(t)u_{xx} &= T''X + c(t)T'X + b(t)XT - a(t)X''T \\ &= (T'' + c(t)T' + (b(t) + \lambda^2 a(t))T)X \ = \ 0, \end{aligned}$$

y $u(0,t) = u(d,t) = 0$.
Los autovalores y autofunciones del problema (4.3.1) son

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \ X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \ n \geq 1, \tag{4.3.3}$$

y para estos valores de λ_n, la ecuación (4.3.2) adquiere la forma

$$T'' + c(t)T' + (b(t) + \lambda_n^2 a(t))T = 0\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{4.3.4}$$

Además, si

$$p(t)c(t) = p'(t), \tag{4.3.5}$$

entonces la ecuación (4.3.4) puede escribirse de la forma

$$(p(t)T')' + p(t)(b(t) + \lambda_n^2 a(t))T = 0. \tag{4.3.6}$$

Resolviendo (4.3.5) e imponiendo la condición $p(0) = 1$ resulta

$$p(t) = \exp\left(\int_0^t c(s)ds\right), \quad t \geq 0 \tag{4.3.7}$$

y nótese que $p(t)$ es creciente porque $c(s) > 0$ y ademas $p(t) \geq 1$, $t \geq 0$. Así las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.6) son equivalentes. Si $\{z_n, w_n\}$ es el sistema fundamental de soluciones de (4.3.4) que satisface

$$z_n(0) = 1, z_n'(0) = 0, w_n(0) = 0, w_n'(0) = 1, \tag{4.3.8}$$

entonces bajo las hipótesis (4.1.6)-(4.1.9), (4.2.3), (4.2.4), del teorema 9, si $\lambda \geq 1$, o lo que es lo mismo,

$$n \geq n_0 = \frac{d}{\pi}, \tag{4.3.9}$$

se obtiene la existencia de una cota M tal que

$$\begin{aligned} &|z_n(t)| \leq M, \quad |z_n'(t)| \leq n\pi d^{-1} M(\widetilde{b}^o + \widetilde{a}^o)^{\frac{1}{2}}, \\ &|w_n(t)| \leq (n\pi)^{-1} dM(a(0))^{-\frac{1}{2}}, \ |w_n'(t)| \leq M(\widetilde{b}^o + \widetilde{a}^o)^{\frac{1}{2}}(a(0))^{-\frac{1}{2}}, \\ &\qquad\qquad 0 \leq t \leq H, \quad n \geq n_0. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Si denotamos

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}, \quad n \geq 1, \tag{4.3.11}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^d f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^d g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) dx, \quad n \geq 1, \tag{4.3.12}$$

por superposición se obtiene una serie candidata a solución del problema (4.1.1)-(4.1.5) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}. \tag{4.3.13}$$

Bajo la hipótesis (4.1.8), de [53, p.95-99], [48] o [19, p.38-41], la continuidad de las extensiones impares de $f(x), f'(x)$ y $f''(x)$ como funciones $2d$-periódicas en la recta real se obtiene automáticamente y

$$\sum_{n\geq 1} n^2 |a_n| < +\infty. \tag{4.3.14}$$

De la hipótesis (4.1.9), la continuidad de la extensión impar de $g(x)$ y su derivada como función $2d$-periódica en la recta real también resulta automáticamente y

$$\sum_{n\geq 1} n\,|b_n| < +\infty. \tag{4.3.15}$$

De (4.3.10), (4.3.14) y (4.3.15), la serie

$$\sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right),$$

es uniformemente convergente en $D(H) = [0,d]\times[0,H]$, y por el teorema de derivación de series funcionales [8, p.403], la serie $u(x,t)$ definida por (4.3.13) es parcialmente diferenciable término a término con respecto a t y

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{4.3.16}$$

Asimismo, la serie que aparece al tomar derivadas parciales término a término con respecto a t sobre el miembro derecho de (4.3.16) tiene la forma

$$\sum_{n\geq 1} \{a_n z_n''(t) + b_n w_n''(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) =$$

$$= -c(t)\sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) - \tag{4.3.17}$$

$$-\sum_{n\geq 1} \left(b(t) + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 a(t)\right) \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{4.3.18}$$

Por (4.3.10) y (4.3.14)-(4.3.15), las series que aparecen en (4.3.17)-(4.3.18) son convergentes uniformemente en $D(H)$ y así por [8, p.403], $u_t(x,t)$ es derivable parcialmente término a término respecto a t, y

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \;&=\; -c(t)\sum_{n\geq 1} \{a_n z_n'(t) + b_n w_n'(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right) - \\ &\quad -\sum_{n\geq 1} \left(b(t) + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 a(t)\right) \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Por otro lado, las series que se obtienen cuando se toman primeras y segundas derivadas parciales respecto a x en (4.3.13) toman la forma

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \tag{4.3.20}$$

$$-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{4.3.21}$$

De (4.3.10) y (4.3.14)-(4.3.15), las series (4.3.20),(4.3.21) son uniformemente convergentes en $D(H)$, y por [8, p.403], $u(x,t)$ definida por (4.3.13) es dos veces parcialmente diferenciable respecto a x, siendo

$$u_{xx}(x,t)=-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \tag{4.3.22}$$

De (4.3.19) y (4.3.22), para $(x,t)\in D(H)$, finalmente se concluye

$$u_{tt}(x,t)+c(t)u_t(x,t)+b(t)u(x,t)-a(t)u_{xx}(x,t)$$

$$=-c(t)\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

$$-\sum_{n\geq 1}\left(b(t)+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 a(t)\right)\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

$$+c(t)\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)+b(t)\sum_{n\geq 1}\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

$$+a(t)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)=0.$$

Además, de (4.3.12), de las hipótesis (4.1.8), (4.1.9) y de [19, p.46], queda claro que

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x),\ 0\leq x\leq d.$$

Resumiendo, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 11. *Sean $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ funciones continuas positivas, $a(t)$ y $b(t)$ además continuamente diferenciables y satisfaciendo hipótesis (4.1.6) o (4.1.7), y sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones reales que satisfacen (4.1.8) y (4.1.9), respectivamente. Si a_n, b_n vienen definidos por (4.3.12), entonces la función $u(x,t)$ definida en (4.3.13) es una solución del problema (4.1.1)-(4.1.5).*

La solución en serie $u_{xx}(x,t)$ que nos proporciona el teorema 11, presenta dos serios inconvenientes desde el punto de vista computacional. Primero, la infinidad de la serie, y segundo, el hecho de que el sistema fundamental de soluciones $\{z_n, w_n\}$ de la ecuación (4.2.1) no nos es conocido. Estos problemas motivan la búsqueda de soluciones numéricas.

4.4 Soluciones numéricas continuas

En este apartado trataremos la cuestión de cómo construir una solución numérica continua $U(x,t)$ del problema (4.1.1)-(4.1.5) de modo que el error $e(x,t) = u(x,t) - U(x,t)$ con respecto a la serie solución dada por el teorema 11 esté uniformemente acotada superiormente por una cantidad prefijada admisible ε, en el dominio $D(H)$ con $H > 0$. Supondremos en lo sucesivo que las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ son dos veces derivables para $t > 0$.
Bajo las hipótesis (4.1.8) y (4.1.9), integrando por partes tres veces para a_n y dos veces para b$_n$, los coeficientes de Fourier a_n, b_n, definidos por (4.3.12) satisfacen

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{P_1}{n^3}\ ,\quad |b_n| \leq \frac{P_2}{n^2}\ ,\quad n \geq 1, \\ P_1 &= \frac{2d^2}{\pi^3}\int_0^d \left|f^{(3)}(x)\right| dx\quad ,\quad P_1 = \frac{2d}{\pi^2}\int_0^d \left|g^{(2)}(x)\right| dx\ . \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Con la notación del apartado 3, de (4.3.10) y (4.4.1) resulta

$$|a_n z_n(t) + b_n w_n(t)| \leq \left(P_1 + \frac{d}{\pi (a(0))^{\frac{1}{2}}} P_2\right) \frac{M}{n^3}\ ,\ 0 \leq t \leq H,\ n \geq n_0. \tag{4.4.2}$$

Por tanto, si m es un entero $m \geq n_0$ (ver (4.3.9)), se cumplirá

$$\left|\sum_{n\geq m}\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\text{ sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\right| \leq \left(P_1+\frac{d}{\pi(a(0))^{\frac{1}{2}}}P_2\right)\sum_{n\geq m}\frac{M}{n^3}\ . \tag{4.4.3}$$

De (3.6.4) y (4.4.3), tomando m tal que

$$m \geq \left[\frac{23M\left(P_1+\frac{d}{\pi(a(0))^{\frac{1}{2}}}P_2\right)}{16\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}\quad ,\quad m \geq \max(2,n_0)\ , \tag{4.4.4}$$

entonces, para $0 \leq t \leq H$, se tiene

$$\left|u(x,t)-\sum_{n=1}^{m-1}\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\text{ sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\right| \leq \sum_{n\geq m}|a_n z_n(t)+b_n w_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto significa que para la función $\widetilde{u}(x,t)$ definida por

$$\widetilde{u}(x,t)=\sum_{n=1}^{m-1}\{a_n z_n(t)+b_n w_n(t)\}\text{ sen}\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \tag{4.4.5}$$

el error $u(x,t)-\widetilde{u}(x,t)$ satisface

$$|u(x,t)-\widetilde{u}(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\quad (x,t)\in D(H)\ . \tag{4.4.6}$$

A partir de ahora, nuestra tarea será la de aproximar para $n = 1,2,...,m-1$ la función $a_n z_n(t)+b_n w_n(t)$, que es la única solución del problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{l} T_n''+c(t)T_n'+\left(b(t)+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 a(t)\right)T_n=0,\ 0\leq t\leq H \\ \\ T_n(0)=a_n\ ,\quad T_n'(0)=b_n\ ,\quad 1\leq n\leq m-1. \end{array}\right] \tag{4.4.7}$$

Si consideramos la transformación

$$Z_n(t)=\left[\begin{array}{c} T_n(t) \\ T_n'(t) \end{array}\right]\ , \tag{4.4.8}$$

el problema (4.4.7) resulta ser equivalente al problema vectorial extendido

$$\begin{aligned} &Z_n'(t) = A_n(t) Z_n(t) \ , \quad Z_n(t) = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \ , \ 0 \le t \le H, \\ &A_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(b(t) + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 a(t)) & -c(t) \end{bmatrix} \ , \ 1 \le n \le m-1. \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Nótese que si $Y_n(t)$ es la solución del problema matricial de valor inicial

$$Y_n'(t) = A_n(t) Y_n(t) \ ; \ Y(0) = I, \quad 0 \le t \le H, \ 1 \le n \le m-1, \tag{4.4.10}$$

donde I denota la matriz identidad en $R^{2\times 2}$, entonces por (4.4.8) y (4.4.10) se tiene

$$T_n(t) = [\ 1 \quad 0\ ] Z_n(t) \ , \quad Z_n(t) = Y_n(t) \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{4.4.11}$$

Emplearemos ahora los resultados expuestos en [34] para construir una solución numérica de (4.4.10) por medio de métodos matriciales de un paso. Así, sea $h > 0$ y $t_i = ih$, para enteros $i \ge 0$. Por (1.1.1)

$$\begin{aligned} &\|A_n(t)\|_2^2 \le 1 + (c(t))^2 + \left(b(t) + (\tfrac{n\pi}{d})^2 a(t)\right)^2 \le 1 + (\widetilde{c}_0)^2 + \left(\widetilde{b}^0 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^0\right)^2, \\ &\|A_n'(t)\|_2^2 \le (c'(t))^2 + \left(b'(t) + (\tfrac{n\pi}{d})^2 a'(t)\right)^2 \le (\widetilde{c}_1)^2 + \left(\widetilde{b}^1 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^1\right)^2, \\ &\left\|A_n^{(2)}(t)\right\|_2^2 \le (c''(t))^2 + \left(b''(t) + (\tfrac{n\pi}{d})^2 a''(t)\right)^2 \le (\widetilde{c}_2)^2 + \left(\widetilde{b}^2 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^2\right)^2 \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

donde

$$\begin{aligned} &\widetilde{a}^i = \max\left\{\left|a^{(i)}(t)\right| ; \ 0 \le t \le H\right\} \ , \quad \widetilde{b}^i = \max\left\{\left|b^{(i)}(t)\right| ; \ 0 \le t \le H\right\} \ , \\ &\widetilde{c}_i = \max\left\{\left|c^{(i)}(t)\right| ; \ 0 \le t \le H\right\} \ , \qquad 0 \le i \le 2 \ . \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

De acuerdo con [34], denotemos

$$\max\left\{\left\|A_n^{(i)}(t)\right\|_2 \ ; \ \ 0 \le t \le H\right\} = k_{i,n} \ , \qquad 0 \le i \le 2, \ \ 0 \le n \le m-1 \ . \tag{4.4.14}$$

Si tomamos $h > 0$ lo suficientemente pequeño y un entero positivo L, de modo que

$$h < (k_{0,n})^{-1}, \ \ 1 \le n \le m-1 \ , \ \ Lh = H, \tag{4.4.15}$$

y

$$
\begin{aligned}
&Y_{n,0} = I \ , \\
&Y_{n,i} = \prod_{j=0}^{i-1} \left\{ [I - \tfrac{h}{2} A_n(t_{i-j})]^{-1} [I + \tfrac{h}{2} A_n(t_{i-j-1})] \right\} \ , \quad i \geq 1
\end{aligned}
\tag{4.4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_n(t) = \sum_{i=0}^{L} B_{1i}(t) Y_{n,i} \ , \quad 1 \leq n \leq m-1 \ , \ 0 \leq t \leq H \ , \\
&B_{1i}(t) = \begin{cases} h^{-1}(t - t_{i-1}), \ t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ h^{-1}(t_{i+1} - t), \ t_i \leq t \leq t_{i+1}, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.4.17}
$$

entonces, de [22, p.77-78], para $0 \leq t \leq H$ se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\|Y_n(t) - V_n(t)\|_2 \ \leq \ & \frac{h^2}{4}(k_{1,n} + k_{0,n}^2) \exp(Hk_{0,n}) + \\
& + \frac{Hh^2}{6}(k_{0,n}^3 + 3k_{1,n}k_{0,n} + k_{2,n}) \exp(3Hk_{0,n}),
\end{aligned}
$$

o, de otro modo,

$$
\|Y_n(t) - V_n(t)\|_2 \leq h^2 E_n, \quad 1 \leq n \leq m-1 \ , \ 0 \leq t \leq H \ , \tag{4.4.18}
$$

siendo, para $1 \leq n \leq m-1$,

$$
\begin{aligned}
E_n = \tfrac{1}{4} & \left(1 + (\widetilde{c}_0)^2 + \left(\widetilde{b}^0 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^0 \right)^2 + \sqrt{(\widetilde{c}_1)^2 + \left(\widetilde{b}^1 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^1 \right)^2} \right) \\
\exp & \left(H \sqrt{1 + (\widetilde{c}_0)^2 + \left(\widetilde{b}^0 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^0 \right)^2} \right) + \tfrac{H}{6} \left\{ \left(1 + (\widetilde{c}_0)^2 + \left(\widetilde{b}^0 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^0 \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
+3 & \sqrt{1 + (\widetilde{c}_0)^2 + \left(\widetilde{b}^0 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^0 \right)^2} \sqrt{(\widetilde{c}_1)^2 + \left(\widetilde{b}^1 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^1 \right)^2} \\
+ & \left. \sqrt{(\widetilde{c}_2)^2 + \left(\widetilde{b}^2 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^2 \right)^2} \right\} \exp \left(3H \sqrt{1 + (\widetilde{c}_0)^2 + \left(\widetilde{b}^0 + (\tfrac{n\pi}{d})^2 \widetilde{a}^0 \right)^2} \right) \ .
\end{aligned}
\tag{4.4.19}
$$

Si denotamos por $W_n(t)$ al vector función definido por

$$
W_n(t) = V_n(t) \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad 1 \leq n \leq m-1, \tag{4.4.20}
$$

tomando normas en (4.4.20), de (4.4.11), (4.4.18) y (4.4.1) resulta

$$\|Z_n(t) - W_n(t)\|_2 \leq \|Y_n(t) - V_n(t)\|_2 \left\| \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \right\|_2 \leq h^2 E_n (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

$$\|Z_n(t) - W_n(t)\|_2 \leq h^2 E_n \left(\frac{P_1^2}{n^6} + \frac{P_2^2}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq n \leq m-1, \quad 0 \leq t \leq H \ . \tag{4.4.21}$$

Tomando el primer componente de $W_n(t)$ y aplicando (1.1.2) y (4.4.21) se sigue que

$$S_n(t) = [\ 1 \quad 0\ ] W_n(t) = \sum_{i=0}^{L} B_{1i}(t) [\ 1 \quad 0\ ] Y_{n,i} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \ , \tag{4.4.22}$$

$$|T_n(t) - S_n(t)| \leq \|Z_n(t) - W_n(t)\|_2 \leq h^2 E_n \left(\frac{P_1^2}{n^6} + \frac{P_2^2}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4.23}$$

$$1 \leq n \leq m-1,\ 0 \leq t \leq H.$$

Consideremos la aproximación numérica continua

$$U(x,t,m,h) = \sum_{n=1}^{m-1} S_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{d} \right), \quad (x,t) \in D(H), \tag{4.4.24}$$

y tomemos $h > 0$ lo suficientemente pequeño para que satisfaga (4.4.15) y

$$h < \left[\varepsilon \left(2 \sum_{n=1}^{m-1} E_n \left(\frac{P_1^2}{n^6} + \frac{P_2^2}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4.25}$$

Entonces, por (4.4.5), (4.4.23), (4.4.24) y (4.4.25) se obtiene

$$|\widetilde{u}(x,t) - U(x,t,m,h)| < \sum_{n=1}^{m-1} |S_n(t) - T_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \quad (x,t) \in D(H). \tag{4.4.26}$$

De (4.4.6) y (4.4.26) se concluye

$$|u(x,t) - U(x,t,m,h)| < \varepsilon \ , \quad (x,t) \in D(H). \tag{4.4.27}$$

Con el fin de determinar valores para h que satisfagan (4.4.15), es conveniente obtener cotas inferiores de $k_{0,n}$. Así, nótese que por (1.1.1) se tiene

$$\begin{aligned} k_{0,n} &= \max_{0\leq t\leq H} \|A_n(t)\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0\leq t\leq H} \|A_n(t)\|_F \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0\leq t\leq H} \sqrt{1+(c(t))^2+\Big(b(t)+(\frac{n\pi}{d})^2 a(t)\Big)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$k_{0,n} \geq \left\{ \frac{1}{2} \left(1+(c_{\min})^2+\left(b_{\min}+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 a_{\min}\right)^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4.28}$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} a_{\min}=\min\{a(t); 0\leq t\leq H\}, \quad b_{\min}=\min\{b(t);\ 0\leq t\leq H\}, \\ c_{\min}=\min\{c(t);\ 0\leq t\leq H\}\ . \end{array} \right] \tag{4.4.29}$$

Así, la condición (4.4.15) se cumplirá si h satisface

$$h < \left\{ \frac{2}{1+(c_{\min})^2+\big(b_{\min}+(\frac{n\pi}{d})^2 a_{\min}\big)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad 1\leq n\leq m-1. \tag{4.4.30}$$

Resumiendo, bajo las hipótesis y notación del teorema 11 y la adicional doble derivabilidad de las funciones coeficiente $a(t), b(t), c(t)$, el siguiente algoritmo permite construir una solución numérica continua cuyo error respecto a la serie solución exacta $u(x,t)$ proporcionada por el teorema 11, está uniformemente acotada superiormente por ε dentro de $D(H)$ para $H>0,\ \varepsilon>0$.

PASO 1. TRUNCAMIENTO DE LA SERIE SOLUCIÓN

Sean $\varepsilon>0,\ H>0$.

1. Determinar las constantes M, n_0 que satisfacen (4.3.10) y (4.3.9) de acuerdo con las hipótesis alternativas (4.1.6) o (4.1.7) y el teorema 9.
2. Determinar las constantes P_1 y P_2 definidas por (4.4.1) y el primer natural $m\geq n_0$ que satisfaga (4.4.4).

STEP 2. CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES NUMÉRICAS CONTINUAS

Dado m:

1. Calcular las constantes $\widetilde{a}^i, \widetilde{b}^i$ y $\widetilde{c}^i$ definidas por (4.4.13) para $0 \leq i \leq 2$.
2. Calcular las constantes $\mathrm{k}_{0,n}$ definidas por (4.4.14) que satisfacen (4.4.28), donde $a_{\min}, b_{\min}$ y $c_{\min}$ vienen dadas por (4.4.29).
3. Encontrar las constantes E_n definidas por (4.4.19) para $1 \leq n \leq m-1$.
4. Elegir $h > 0$, $L > 0$ tales que $NL = H$ y además verifiquen (4.4.15) y (4.4.30).
5. Calcular las matrices $Y_{n,i}$ dadas por (4.4.9) y (4.4.16) con $t_i = ih$.
6. Calcular a_n, b_n dados por (4.3.12) para $1 \leq n \leq m-1$, $V_n(t)$ por (4.4.17) y $S_n(t)$ por (4.4.22).
7. $U(x, t, m, h)$ definida por (4.4.24) es una aproximación de la serie solución exacta del problema (4.1.1)-(4.1.5) que satisface (4.4.27).

Con el algoritmo anterior, el problema queda finalmente resuelto.

Capítulo 5

Soluciones analítico-numéricas para la ecuación de ondas con coeficientes separables dependientes del tiempo y con variación lineal en la dimensión espacial.

5.1 Introducción

Los problemas hasta ahora tratados contienen la versión más simple de la ecuación de ondas, es decir, aquéllas en las que la única variación del coeficiente de propagación es temporal. No obstante, en muchos problemas de la naturaleza, las ecuaciones obtenidas contienen cierta variación espacial, lineal en su forma más simple, ya no porque las propiedades de los elementos analizados cambien con la distancia, sino por la misma geometría del caso. En [15] se presentan algunas de dichas situaciones, que dan lugar a ecuaciones de ondas con variaciónes lineales o cuadráticas. Ello nos más que una muestra de que muchos problemas diferentes requieren un modelo matemático basado en la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{q(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left[p(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right], \quad t > 0, 0 < x < L. \tag{5.1.1}$$

Ejemplos de dichas situaciones, como siempre, aparecen en problemas de propagación de ondas en materiales de ferrita o medios anisótropos [14]. [36, cap.8] también presenta problemas en los que aparece una ecuación de onda con variaciones espaciales, en este caso en el análisis de la propagación de un rayo de luz en una fibra óptica no ideal. Para el caso de que dichas variaciones sean separables en función de la dimensión, el problema obtenido claramente refleja (5.1.1), con el agravante de que, como el mismo autor asegura, la asunción de propiedades constantes de la fibra suele ser imposible de mantener, mientras que los métodos existentes para resolver la ecuación con variación lineal no dan siempre buenos resultados (algunos ni siquiera tienen una justificación matemática rigurosa).

De entre los numerosos problemas que podemos encontrar con una ecuación como (5.1.1), en este capítulo analizaremos el problema[1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{q(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left[p(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right], \quad t > 0, 0 < x < L, \tag{5.1.2}$$

$$u(L,t) = 0, \quad u(0,t) \text{ finita}, \ t \geq 0, \tag{5.1.3}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.1.4}$$

$$u_t(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.1.5}$$

donde $p(t), q(t), f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales con propiedades a determinar. El problema (5.1.2)-(5.1.5) describe las vibraciones laterales de una cadena pesada y flexible que cuelga de uno de sus extremos, con tension y densidad variables [15, p.299]. El caso más general, con $T(x)$ sin especificar -o al menos un problema muy similar entre éste y el analizado en el capítulo 2-, será examinado en el último capítulo, pues requiere cierta formulación adicional que todavía no hemos desarrollado. Baste con decir que la aplicación del método de separación de variables de (5.1.1) conduce a un

[1] Este apartado es una versión corregida y aumentada de [30].

problema en x de Sturm-Liouville, de solución a priori desconocida (desde el momento que $T(x)$ puede ser cualquier función).

No obstante, tampoco debe verse esta simplificación como un intento de marear la perdiz con problemas gradualmente crecientes en dificultad. No es el objetivo de esta tesis. Más bien que, así como el último capítulo analiza un problema muy general, nuestro consejo es que, mientras las ecuaciones obtenidas al separar variables sean resolubles, se trate de utilizar todo el conocimiento disponible sobre las soluciones de tales ecuaciones. En este caso, como se verá, las ecuación obtenida en x es la ecuación de Bessel de primera especie, de la cual la bibliografía que existe es abundantísima. Además, una diferencia importante entre esta ecuación y las que se verán en el último capítulo, es que a las segundas se las obligará a tener coeficientes positivos en todo el dominio, cosa que no ocurre con Bessel. Esta aparentemente sutil diferencia encierra mucho más significado del que a primera vista se pudiera encontrar: la aplicación directa de los teoremas 2 y 5 no es posible. Sin embargo, como se verá, los métodos empleados al demostrar los mismos nos pueden todavía ser útiles.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: El apartado 2 está dedicado a la obtención de cotas explícitas en términos de las funciones dato para los coeficientes de Fourier-Bessel. Esta información es crucial a la hora de construir soluciones numéricas con una precisión prefijada. Los resultados del apartado 2 pueden considerarse como refinamientos prácticos de los resultados clásicos sobre funciones de Bessel dados por [54] y [56]. El apartado 3 trata de encontrar una solución exacta en forma de serie del problema (5.1.2)-(5.1.5) por medio del método de separación de variables. En el apartado 4 enfocaremos la cuestión de cómo construir una solución numérica continua en un subdominio acotado $D(t^*) = [0, L] \times [0, t^*]$, con $t^* > 0$, de modo que el error respecto a la solución exacta sea inferior a $\epsilon > 0$, uniformemente en todo el dominio $D(t^*)$. La construcción será realizada de la siguiente manera. Primero la serie solución exacta será truncada para obtener una suma finita de términos (en número dependiente de ϵ y t^*). Después, cada una de las funciones que aparezcan en la serie truncada será aproximada usando métodos discretos (los cuales ofrecen soluciones numéricas en una malla de puntos para la ecuación diferencial obtenida), eligiendo el tamaño de paso apropiado de la malla h de acuerdo con la precisión requerida.

5.2 Cotas explícitas para los coeficientes de Bessel

Este apartado está dedicado a la determinación de cotas explícitas para los coeficientes de la expansión de funciones en funciones de Bessel. Así, sea $J_0(x)$ la función de Bessel de primera clase y orden 0, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ los ceros positivos de $J_0(x)$ ordenados en orden creciente.

Supongamos que $f(x)$ es una función regular continua a trozos en $[0, 1]$, con $f(1) = 0$. En ese caso, por [56, p.591], o [54, p.231], se tiene que

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} c_n J_0(\lambda_n x), \quad 0 < x \leq 1, \tag{5.2.1}$$

donde

$$c_n = \frac{\int_0^1 tf(t)J_0(\lambda_n t)\,dt}{\int_0^1 tJ^2(\lambda_n t)\,dt} = \frac{2}{[J_0'(\lambda_n)]^2}\int_0^1 tf(t)J_0(\lambda_n t)\,dt. \tag{5.2.2}$$

Por el teorema 1 de [54, p.225], si los coeficientes c_n satisfacen la condición

$$|c_n| \leq \frac{C}{\lambda_n^{1+\epsilon}}, \tag{5.2.3}$$

donde C y $\epsilon > 0$ son constantes, la serie

$$\sum_{n\geq 1} c_n J_0(\lambda_n x) \tag{5.2.4}$$

converge absoluta y uniformemente en [0,1].
Además, por el teorema 1 de [54, p.231], si $f(x)$ es cuatro veces derivable y

$$f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0, \tag{5.2.5}$$

$$f^{(4)}(x) \text{ es continua en } [0,1], \tag{5.2.6}$$

$$f(1) = f'(1) = f^{(2)}(1) = 0, \tag{5.2.7}$$

entonces los coeficientes c_n de Fourier-Bessel definidos por (5.2.2) satisfacen

$$|c_n| \leq \frac{C}{\lambda_n^{\frac{7}{2}}}, \tag{5.2.8}$$

para cierta constante C que desafortunadamente no nos es dada explícitamente. Dado que la condición (5.2.8) es del tipo (5.2.3) con $\epsilon = \frac{5}{2}$, bajo las condiciones (5.2.5)-(5.2.7), la serie (5.2.4) converge absoluta y uniformemente a $f(x)$ en [0,1].

Determinemos ahora el valor de la constante C que aparece en (5.2.8), en términos de $f(x)$ y de los ceros λ_n de $J_0(x)$. Supongamos que se cumplen las condiciones (5.2.5)-(5.2.7), y sea

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{x} f(x), \quad F_1(x) = \frac{-F(x)}{4x^2} - F^{(2)}(x), \\ F_2(x) &= \frac{-F_1(x)}{4x^2} - F_1^{(2)}(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Un simple cálculo nos ofrece

$$F_2(x) = \sqrt{x} f^{(4)}(x) + 2x^{-\frac{1}{2}} f^{(3)}(x) - x^{-\frac{3}{2}} f^{(2)}(x) + x^{-\frac{5}{2}} f'(x), \quad 0 < x \leq 1. \tag{5.2.10}$$

Por las hipótesis (5.2.5) y (5.2.6), y el teorema de Taylor podemos escribir

$$f(x) = f^{(4)}(\theta x) \frac{x^4}{4!} \quad \text{y} \quad f'(x) = f^{(4)}(\varphi x) \frac{x^3}{3!}, \quad 0 < \theta < 1, 0 < \varphi < 1, \tag{5.2.11}$$

$$f^{(2)}(x) = f^{(4)}(\xi x) \frac{x^2}{2!} \quad \text{y} \quad f^{(3)}(x) = f^{(4)}(\omega x) x, \quad 0 < \xi < 1, 0 < \omega < 1. \tag{5.2.12}$$

Sea $f_4 > 0$ tal que

$$|f^{(4)}(x)| \leq f_4, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{5.2.13}$$

Entonces de (5.2.10)-(5.2.13) se sigue que

$$|F_2(x)| \leq \sqrt{x} f_4 \left(1 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \leq \frac{11}{3} f_4, \quad 0 < x \leq 1. \tag{5.2.14}$$

De [54, p.228], se sabe que $z(x) = \sqrt{x} J_0(x)$ es una solución de

$$z'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) z = 0, \quad x > 0, \tag{5.2.15}$$

y por (5.2.15), la función

$$S(z, x) = (z(x))^2 + \frac{(z'(x))^2}{\left[1 + \frac{1}{4x^2}\right]}, \tag{5.2.16}$$

verifica

$$S'(x) = 2z(x)z'(x) + \frac{\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) 2z'(x)z''(x) - (z'(x))^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)'}{\left[1 + \frac{1}{4x^2}\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{2x^3} \left[\frac{z'(x)}{1 + \frac{1}{4x^2}}\right]^2 > 0, \quad x > 0.$$

Así pues, $S(z, \cdot)$ es una función creciente con la variable $x > 0$. Dado que $\lambda_n > \lambda_1$ para $n > 1$, se tiene de inmediato que $S(z, \lambda_n) \geq S(z, \lambda_1)$ para $n \geq 1$, o, lo que es lo mismo

$$(z(\lambda_n))^2 + \frac{(z'(\lambda_n))^2}{1 + \frac{1}{4\lambda_n^2}} \geq (z(\lambda_1))^2 + \frac{(z'(\lambda_1))^2}{1 + \frac{1}{4\lambda_1^2}}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.17}$$

Como $z(x) = \sqrt{x} J_0(x)$ cumple que $z'(x) = \frac{J_0(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} J_0'(x)$, podemos escribir

$$z'(\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n} J_0'(\lambda_n), \quad n \geq 1. \tag{5.2.18}$$

De (5.2.17) y (5.2.18) se tiene

$$\frac{\lambda_n (J_0'(\lambda_n))^2}{1 + \frac{1}{4\lambda_n^2}} \geq \frac{\lambda_1 (J_0'(\lambda_1))^2}{1 + \frac{1}{4\lambda_1^2}}, \tag{5.2.19}$$

$$|J_0'(\lambda_n)| \geq \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \frac{\left(1 + \frac{1}{4\lambda_n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4\lambda_1^2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} |J_0'(\lambda_1)| \geq \left(\frac{\lambda_1}{1 + \frac{1}{4\lambda_1^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|J_0'(\lambda_1)|}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.20}$$

De la demostración del teorema 1 de [54, p.231], bajo las hipótesis (5.2.5)-(5.2.7), resulta

$$I_n = \int_0^1 xf(x)J_0(\lambda_n x)\ dx = \lambda_n^{-4} \int_0^1 F_2(x) z_n(x)\ dx, \quad n \geq 1, \tag{5.2.21}$$

donde F_2 viene definida por (5.2.9) y $z_n(x) = \sqrt{x} J_0(\lambda_n x)$. De (5.2.14), (5.2.21) y la desigualdad de Schwarz se sigue

$$|I_n| \leq \frac{11}{3} f_4 \lambda_n^{-4} \left(\int_0^1 x J_0^2(\lambda_n x)\ dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.22}$$

Por tanto, los coeficientes a_n de Fourier-Bessel definidos en (5.2.2), satisfacen

$$|c_n| \leq \frac{\left(\frac{11}{3}\right) f_4 \lambda_n^{-4}}{\left[\int_0^1 x J_0^2(\lambda_n x)\ dx\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.23}$$

Por las propiedades de las funciones de Bessel ([56, p.18]; [54, p.219])

$$J_1(x) = -J_0'(x), \tag{5.2.24}$$

$$\int_0^1 x J_0^2(x)\ dx = \frac{1}{2} J_1^2(\lambda_n), \quad n \geq 1, \tag{5.2.25}$$

y de (5.2.23)-(5.2.25), se sigue que

$$|c_n| \leq \frac{\left(\frac{11\sqrt{2}}{3}\right) f_4 \lambda_n^{-4}}{|J_1(\lambda_n)|} = \frac{\left(\frac{11\sqrt{2}}{3}\right) f_4 \lambda_n^{-4}}{|J_0'(\lambda_n)|}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.26}$$

De (5.2.20),(5.2.24) y (5.2.26) se obtiene

$$|c_n| \leq C \lambda_n^{-\frac{7}{2}}; \quad C = \left(\frac{1 + 4\lambda_1^2}{\lambda_1^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{11 f_4}{3\sqrt{2} |J_1(\lambda_1)|}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.27}$$

Ahora, por [56, p.748], sabemos que los dos primeros ceros de $J_0(x)$ son

$$\lambda_1 = 2.4048256, \quad \lambda_2 = 5.5200781.$$

Con lo cual $\lambda_1 > \frac{\pi}{2}$, $\lambda_2 > 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y

$$\lambda_2 - \lambda_1 > 2 > \frac{\pi}{2}. \tag{5.2.28}$$

Queremos probar por medio del principio de inducción que

$$\lambda_n > \frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.29}$$

Para $n = 1, 2$ el resultado es directamente válido. Supongamos ahora que $\lambda_m > \frac{m\pi}{2}$ para $m = 1, 2, \ldots, n$. Por [51, teorema 1.82.2], sabemos que si $\phi(x)$ es una función continua decreciente en $x > 0$ e y es una solución no idénticamente nula de

$$y'' + \phi(x)y = 0,$$

entonces para tres ceros cualesquiera consecutivos $x' < x'' < x'''$ de y, se verifica

$$x'' - x' < x''' - x''.$$

Aplicando este resultado a $y = \sqrt{x}J_0(x)$ y a la ecuación diferencial

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) y = 0,$$

se sigue

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \lambda_n - \lambda_{n-1} > \cdots > \lambda_2 - \lambda_1 > \frac{\pi}{2}. \tag{5.2.30}$$

Dado que $\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$, por (5.2.28), la hipótesis de inducción y (5.2.30) resulta

$$\lambda_{n+1} > \frac{n\pi}{2} + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > (n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Así, (5.2.29) se satisface para todo $n \geq 1$. De (5.2.27) y (5.2.29) se obtiene

$$|a_n| \leq \Lambda \lambda_n^{-\frac{7}{2}} \leq \Lambda \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}}, \quad n \geq 1, \tag{5.2.31}$$

donde

$$\Lambda = \left[\frac{(1 + 4\lambda_1^2)}{2\lambda_1^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{11}{3} \frac{f_4}{|J_1(\lambda_1)|}. \tag{5.2.32}$$

Con lo anterior, podemos considerar establecido el siguiente teorema

Teorema 12. *Sea f una función cuatro veces diferenciable en $[0,1]$ que satisface las condiciones (5.2.5)-(5.2.7), y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los ceros positivos de $J_0(x)$ ordenados en orden creciente. Entonces la expansión de Fourier-Bessel (5.2.1) converge absoluta y uniformemente en [0,1] y los coeficientes de Fourier-Bessel satisfacen (5.2.31) donde $J_1(x)$ es la función de Bessel de primera especie y orden 1, y f_4 viene definida por (5.2.13).*

Pensando en aplicaciones del teorema 12 a los próximos apartados, sea $g(x)$ una función definida en [0,L]. Estamos interesados en la expansión de $g(x)$ en serie de funciones $J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$ donde $0 \leq x \leq L$. Si consideramos el cambio $Ly^2 = x$, este problema es equivalente a la expansión de $v(y) = g(Ly^2)$ en la forma

$$v(y) = g(Ly^2) = \sum_{n\geq 1} c_n J_0(\lambda_n y), \quad 0 \leq y \leq 1. \tag{5.2.33}$$

Nótese que $v(0) = g(0)$, $v'(0) = 0$, $v^{(2)}(0) = 2Lg'(0)$, $v^{(3)}(0) = 0$ y

$$v^{(4)}(y) = 12L^2 g^{(2)}(Ly^2) + 48L^3 y^2 g^{(3)}(Ly^2) + 16L^4 y^4 g^{(4)}(Ly^2). \tag{5.2.34}$$

Las condiciones (5.2.5)-(5.2.7) para v pueden expresarse en términos de g como

$$g(0) = g'(0) = 0, \tag{5.2.35}$$

$$g(L) = g'(L) = g^{(2)}(L) = 0, \tag{5.2.36}$$

$$g^{(4)}(x) \text{ es continua en } [0, L], \tag{5.2.37}$$

y por el teorema 1, se tiene

$$g(x) = f\left(\sqrt{\frac{x}{L}}\right) = \sum_{n\geq 1} a_n J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.2.38}$$

donde

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 y g(Ly^2) J_0(\lambda_n y)\, dy, \tag{5.2.39}$$

y

$$|c_n| \leq \Lambda_g \lambda_n^{-\frac{7}{2}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} \Lambda_g n^{-\frac{7}{2}}, \quad n \geq 1. \tag{5.2.40}$$

$$\Lambda_g = \frac{11}{3} \left[\frac{1+4\lambda_1^2}{2\lambda_1^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{(12L^2 G_2 + 48L^3 G_3 + 16L^4 G_4)}{|J_1(\lambda_1)|}, \tag{5.2.41}$$

con

$$G_i = \max\{|g^{(i)}(x)|;\ 0 \leq x \leq L\}, \quad i = 2, 3, 4. \tag{5.2.42}$$

5.3 Construcción de la solución exacta

En este apartado construiremos una serie solución del problema (5.1.2)-(5.1.5) por medio del método de separación de variables. Si buscamos soluciones $X(x)$ y $T(t)$ de los problemas

$$\left.\begin{array}{c} [xX'(x)]' + k^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < L,\ k \in \mathbb{R}, \\ X(L) = 0,\ X(0) \text{ finita}, \end{array}\right\} \tag{5.3.1}$$

y

$$[p(t)T'(t)]' + k^2 q(t) T(t) = 0, \quad t > 0, \tag{5.3.2}$$

fácilmente se puede demostrar que

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5.3.3}$$

define una solución del problema (5.1.2)-(5.1.3). Por [15, p.299] las autofunciones $X_n(x)$ y los autovalores k_n del problema de Sturm-Liouville (5.3.1) viene definidos por

$$X_n(x) = J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{L}}\right), \quad k_n = \frac{\lambda_n}{2\sqrt{L}}, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.3.4}$$

donde λ_n es el $n-$ésimo cero positivo de $J_0(x)$. Para estos valores del parámetro k, la ecuación (5.3.2) adquiere la forma

$$[p(t)T_n'(t)]' + \frac{\lambda_n^2}{4L}q(t)T_n(t) = 0, \quad t > 0. \tag{5.3.5}$$

Supongamos que

$$\begin{array}{c} p(t), q(t) \text{ son funciones positivas, 2 veces} \\ \text{continuamente diferenciables tales que} \\ |(pq)'(t)| + |(pq)^{(2)}(t)| > 0 \quad \text{para } t > 0. \end{array} \tag{5.3.6}$$

y sea $\{z_n(t), w_n(t)\}$ el sistema fundamental de soluciones de (5.3.5) que satisface

$$z_n(0) = 1, \quad z_n'(0) = 0, \quad w_n(0) = 0, \quad w_n'(0) = 1. \tag{5.3.7}$$

Entonces, cualquier solución $T_n(t)$ de la ecuación (5.3.5) puede escribirse de la forma

$$T_n(t) = a_n z_n(t) + b_n w_n(t),$$

para valores apropiados de a_n, b_n.

Bajo las hipótesis (5.3.6), el signo de la función $(pq)'(t)$ sólo puede cambiar un número finito de veces en cualquier intervalo acotado $[0, t^*]$, ver teorema 5. Además, se sigue que

$$\left.\begin{array}{c} |z_n(t)| \leq M, \quad 0 \leq t \leq t^*, \ n \geq 1, \\[2ex] |w_n(t)| \leq 2M\sqrt{\dfrac{Lp(0)}{q(0)}}\lambda_n^{-1}, \quad 0 \leq t \leq t^*, \ \ n \geq 1, \\[2ex] |z_n'(t)| \leq Z_1\lambda_n, \quad 0 \leq t \leq t^*, \ n \geq 1, \\[2ex] |w_n'(t)| \leq W_1, \quad 0 \leq t \leq t^*, \ n \geq 1, \end{array}\right\} \tag{5.3.8}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{P} = \max\left\{\frac{q(t)}{p(t)};\ 0 \le t \le t^*\right\}; \quad m_p = \min\{p(t);\ 0 \le t \le t^*\}, \\ W_1 = M\left[\frac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad Z_1 = \frac{M}{2\sqrt{L}}\left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.3.9}$$

y

Caso 1

$$M = 1 \text{ si } p(t)q(t) \text{ es creciente en } 0 \le t \le t^*, \tag{5.3.10}$$

Caso 2

$$M = \left(\frac{p(0)q(0)}{p(t^*)q(t^*)}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } p(t)q(t) \text{ es decreciente en } 0 \le t \le t^*, \tag{5.3.11}$$

Caso 3

$$M = \left(\frac{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2s})q(t_{2s})}{p(t_1)q(t_1)p(t_3)q(t_3)\cdots p(t_{2s+1})q(t_{2s+1})}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.3.12}$$

si existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t^*$ tal que

$$p(t)q(t) \text{ crece en } [0, t_0], [t_1, t_2], \ldots, [t_{2s+1}, t_{2s+2}] \text{ y}$$

$$p(t)q(t) \text{ decrece en } [t_0, t_1], [t_2, t_3], \ldots, [t_{2s}, t_{2s+1}],$$

con

$$t^* = t_{2s+2} = t_m \quad \text{o} \quad t^* = t_{2s+1} = t_m.$$

Caso 4

$$M = \left(\frac{p(0)q(0)p(t_1)q(t_1)\cdots p(t_{2s-1})q(t_{2s-1})}{p(t_0)q(t_0)p(t_2)q(t_2)\cdots p(t_{2s})q(t_{2s})}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.13}$$

si existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t^*$ tal que

$$p(t)q(t) \text{ decrece en } [0, t_0], [t_1, t_2], \ldots, [t_{2s-1}, t_{2s}] \text{ y}$$

$$p(t)q(t) \text{ crece en } [t_0, t_1], [t_2, t_3], \ldots, [t_{2s}, t_{2s+1}],$$

con

$$t^* = t_{2s} = t_m \quad \text{o} \quad t^* = t_{2s+1} = t_m.$$

Para cualquier valor de las constantes a_n, b_n, las funciones

$$u_n(x,t) = J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}, \quad 0 \leq x \leq L, \;\; 0 \leq t \leq t^*, \;\; n \geq 1. \tag{5.3.14}$$

son soluciones de (5.1.2)-(5.1.3), y por superposición puede construirse una serie candidata a solución del problema (5.1.2)-(5.1.5) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}. \tag{5.3.15}$$

Si suponemos por un momento que $u(x,t)$ es formalmente derivable parcialmente término a término con respecto a la variable t, imponiendo las condiciones iniciales (5.1.3) y (5.1.4) se obtiene

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{n\geq 1} a_n J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.3.16}$$

$$f(x) = u_t(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right), \quad 0 \leq x \leq L. \tag{5.3.17}$$

Si $g(x)$ y $f(x)$ son funciones 4 veces diferenciables en $[0, L]$, que satisfacen las condiciones (5.2.35)-(5.2.37), haciendo el cambio $Ly^2 = x$ en (5.2.39) los coeficientes a_n, b_n pueden escribirse como

$$a_n = \frac{\frac{1}{L}\int_0^L g(x) J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\, dx}{J_1^2(\lambda_n)}; \quad b_n = \frac{\frac{1}{L}\int_0^L f(x) J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\, dx}{J_1^2(\lambda_n)}; \quad n \geq 1, \tag{5.3.18}$$

de donde por el teorema 12, las ecuaciones (5.3.16) y (5.3.17) se satisfacen y la convergencia es absoluta y uniforme en $[0, L]$. Además se cumple

$$|a_n| \leq K_g \lambda_n^{-\frac{7}{2}} \leq K_g \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}}; \quad |b_n| \leq K_f \lambda_n^{-\frac{7}{2}} \leq K_f \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}}, \quad n \geq 1, \tag{5.3.19}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} K_g &= \frac{11}{3}\left[\frac{1+4\lambda_1^2}{2\lambda^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{(12L^2G_2+48L^3G_3+16L^4G_4)}{|J_1(\lambda_1)|}, \\ K_f &= \frac{11}{3}\left[\frac{1+4\lambda_1^2}{2\lambda^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{(12L^2\mathcal{F}_2+48L^3\mathcal{F}_3+16L^4\mathcal{F}_4)}{|J_1(\lambda_1)|}, \end{aligned}\right\} \tag{5.3.20}$$

y

$$G_i = \max\{|g^{(i)}(x)|;\ 0 \le x \le L\}; \quad \mathcal{F}_i = \max\{|g^{(i)}(x)|;\ 0 \le x \le L\}; \\ i = 2, 3, 4. \tag{5.3.21}$$

Ya que $|J_0(y)| \le 1$ para $y \ge 0$ (ver [56, p.31]), de (5.3.8)-(5.3.9), (5.3.19)-(5.3.20) y (5.2.29) se sigue que

$$\left.\begin{aligned} &\left|J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}\right| \\ &\le Z_1K_g\lambda_n^{-\frac{5}{2}} + W_1K_f\lambda_n^{-\frac{7}{2}} \\ &\le Z_1K_g\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{5}{2}} + W_1K_f\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}}, \\ &0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le t^*, \quad n \ge 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.22}$$

Por consiguiente

$$\sum_{n\ge1} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}$$

converge uniformemente en $(x,t) \in [0,L] \times [0,t^*]$. Por el teorema de derivación de series de funciones [8, p.403], la serie (5.3.15) es derivable parcialmente término a término con respecto a la variable t, y

$$u_t(x,t) = \sum_{n\ge1} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n'(t)+b_n w_n'(t)\}, \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le t^*. \tag{5.3.23}$$

Por (5.3.5) podemos escribir

$$T_n''(t) = -\frac{\lambda_n^2}{4L}\frac{q(t)}{p(t)}T_n(t) - \frac{p'(t)}{p(t)}T_n'(t), \quad t > 0,$$

y de (5.3.8) se sigue

$$|z_n''(t)| \le R_z\lambda_n + S_z\lambda_n^2; \quad |w_n''(t)| \le R_w + S_w\lambda_n, \quad 0 \le t \le t^*,\ n \ge 1, \tag{5.3.24}$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} S_z = \dfrac{M}{4L}\left(\dfrac{Q}{P}\right); \ \ R_z = \dfrac{M_{p'}Z_1}{m_p}; \ \ S_w = \dfrac{M}{2\sqrt{L}}\left(\dfrac{Q}{P}\right)\left[\dfrac{p(0)}{q(0)}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \\ M_{p'} = \max\{|p'(t)|;\ 0 \le t \le t^*\}, \quad R_w = \dfrac{M_{p'}W_1}{m_p}, \end{array}\right\} \tag{5.3.25}$$

y m_p, Z_1, W_1 y $\frac{Q}{P}$ vienen definidos por (5.3.9). De (5.3.19) y (5.3.24)-(5.3.25) se sigue que

$$\left.\begin{array}{l} \left|J_0\left(\lambda_n\sqrt{\dfrac{x}{L}}\right)\{a_n z_n''(t) + b_n w_n''(t)\}\right| \\ \\ \le K_g S_z \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{3}{2}} + (K_f S_w + K_g R_z)\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{5}{2}} + K_f R_w \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}}, \\ \\ 0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le t^*,\ n \ge 1. \end{array}\right\} \tag{5.3.26}$$

Por tanto la serie

$$\sum_{n\ge1} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n''(t) + b_n w_n''(t)\},$$

converge uniformemente en $[0, L] \times [0, t^*]$. Por el teorema de derivación de series de funciones, la serie (5.3.23) es derivable parcialmente término a término con respecto a t y

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n\ge1} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n''(t) + b_n w_n''(t)\}, \quad 0 \le x \le L,\ \ 0 \le t \le t^*. \tag{5.3.27}$$

Por otro lado, de (5.2.24) y usando el hecho de que $|J_1(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ para $y \geq 0$, [56, p.31], podemos escribir

$$X_n'(x) = \left[J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\right]' = \frac{\lambda_n}{2\sqrt{xL}}J_0'\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right) = \frac{-\lambda_n}{2\sqrt{xL}}J_1\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$$

y

$$|X_n'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{Lx_0}}\lambda_n, \quad 0 < x_0 \leq x \leq L, \;\; n \geq 1. \tag{5.3.28}$$

De (5.2.29), (5.3.8), (5.3.19) y (5.3.28), para $0 < x_0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq t^*$, $n \geq 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} &|X_n'(x)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}| \\ &\leq \frac{M\sqrt{2}}{4\sqrt{Lx_0}}\left(K_g\lambda_n^{-\frac{5}{2}} + \frac{2K_f\sqrt{p(0)L}}{\sqrt{q(0)}}\lambda_n^{-\frac{7}{2}}\right) \\ &\leq \frac{M\sqrt{2}}{4\sqrt{x_0 L}}\left(K_g\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}n^{-\frac{5}{2}} + \frac{2\sqrt{p(0)L}K_f}{\sqrt{q(0)}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}}n^{-\frac{7}{2}}\right). \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Por tanto la serie

$$\sum_{n\geq 1} X_n'(x)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}$$

converge uniformemente en $[x_0, L] \times [0, t^*]$, y por el teorema de derivación de series de funciones, la serie (5.3.15) es derivable parcialmente término a término con respecto a x y

$$u_x(x,t) = \sum_{n\geq 1} X_n'(x)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}, \quad 0 \leq x \leq L, \;\; 0 \leq t \leq t^*. \tag{5.3.30}$$

Nótese además que

$$X_n''(x) = \frac{\lambda_n}{4x\sqrt{xL}}J_1\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right) - \frac{\lambda_n^2}{4xL}J_1'\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \tag{5.3.31}$$

y por [56, p.18, p.31] tenemos

$$J_1'(x) = \frac{J_1(x)}{x} - J_2(x), \quad x > 0$$

$$|J_2(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y \geq 0.$$

Así

$$|X_n''(x)| \leq \frac{\lambda_n}{4x_0\sqrt{2x_0L}} + \frac{\lambda_n^2}{4x_0L}\left(1+\frac{1}{x_0}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_0 \leq x \leq L,\ n \geq 1, \tag{5.3.32}$$

y por (5.2.29), (5.3.8), (5.3.19) y (5.3.32), para $x_0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq t^*$, $n \geq 1$, se sigue que

$$|X_n''(x)\{a_nz_n(t)+b_nw_n(t)\}|$$

$$\leq \frac{K_gM}{4\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}L}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}n^{-\frac{5}{2}} + \frac{K_gM\sqrt{2}}{8x_0L}\left(1+\frac{1}{x_0}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}n^{-\frac{3}{2}} + \frac{MK_f\sqrt{p(0)}}{2\sqrt{2}x_0\sqrt{x_0q(0)}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}}n^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{MK_f\sqrt{2p(0)}}{4x_0\sqrt{Lq(0)}}\left(1+\frac{1}{x_0}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}n^{-\frac{5}{2}}.$$

Esto significa que la serie

$$\sum_{n\geq 1} X_n''(x)\{a_nz_n(t)+b_nw_n(t)\}$$

converge uniformemente en $[x_0, L] \times [0, t^*]$, y así, por el teorema de derivación de series funcionales, podemos tomar derivadas parciales término a término en (5.3.30), obteniéndose

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n\geq 1}\left[J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\right]''\{a_nz_n(t)+b_nw_n(t)\}, \quad 0 \leq x \leq L, \ \ 0 \leq t \leq t^*. \tag{5.3.33}$$

De (5.3.4), (5.3.5), (5.3.23), (5.3.27), (5.3.30) y (5.3.33) se concluye

$$\frac{\partial}{\partial x}[xu_x] - \frac{1}{q(t)}\frac{\partial}{\partial t}[p(t)u_t] =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}\left[J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\right]\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}\right]$$

$$- \frac{1}{q(t)}\sum_{n\geq 1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{p(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\right]\right\} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1}\left[-\frac{\lambda_n^2}{4L} + \frac{1}{q(t)}\frac{\lambda_n^2}{4L}q(t)\right]\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right) = 0,$$

para $0 < x \leq L$, $0 < t \leq t^*$. Por tanto, el siguiente resultado queda establecido:

Teorema 13. *Sean $p(t), q(t)$ funciones que satisfacen la condición (5.3.6) y sean $f(x)$, $g(x)$ funciones cuatro veces diferenciables en $[0, L]$, que satisfacen*

$$f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0, \tag{5.3.34}$$

$$f(L) = f'(L) = f''(L) = g(L) = g'(L) = g''(L) = 0, \tag{5.3.35}$$

$$f^{(4)}(x) \text{ y } g^{(4)}(x) \text{ son continuas en } [0, L]. \tag{5.3.36}$$

Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de ceros positivos de $J_0(x)$ ordenada en orden creciente y a_n, b_n son los valores definidos en (5.3.18), entonces la función $u(x, t)$ definida por (5.3.15) es una solución del problema (5.1.2)-(5.1.5).

5.4 Soluciones numéricas continuas

En este apartado nos interesaremos por el siguiente problema. Dados $t^* > 0$ y $\epsilon > 0$, cómo podemos construir una solución aproximada de (5.1.2)-(5.1.5) con un error inferior a ϵ, uniformemente en $(x, t) \in D(t^*) = [0, L] \times [0, t^*]$.

Sea $u(x, t)$ la solución exacta en serie del problema (5.1.1)-(5.1.4) definida por (5.3.15), (5.3.18), y consideremos su truncamiento de orden m definido por

$$u(m, x, t) = \sum_{n=1}^{m} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{m} J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\}. \tag{5.4.1}$$

De (5.2.29), (5.3.8), (5.3.19) y sabiendo que $|J_0(y)| \leq 1$ para $y \geq 0$, resulta

$$|u_n(x,t)| = \left| J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{L}}\right) \{a_n z_n(t) + b_n w_n(t)\} \right|$$

$$\leq K_g M \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}} + \frac{2K_f M\sqrt{p(0)L}}{\sqrt{q(0)}} \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n^{-\frac{7}{2}}$$

$$\leq K_g M \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} n^{-\frac{7}{2}} + \frac{2K_f M\sqrt{p(0)L}}{\sqrt{q(0)}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{9}{2}} n^{-\frac{9}{2}},$$

$$|u_n(x,t)| \leq K_g M \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} n^{-3} + \frac{2K_f M\sqrt{p(0)L}}{\sqrt{q(0)}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{9}{2}} n^{-4}, \quad (x,t) \in D(t^*). \quad (5.4.2)$$

De (3.6.4), (5.4.2) y empleando el hecho de que $\sum_{n\geq 1} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$, [52, p.5], para $m \geq 2$ se tiene

$$|u(x,t) - u(m,x,t)| = |\sum_{n>m} u_n(x,t)|$$

$$\leq K_g M \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} \sum_{n>m} n^{-3} + \frac{2K_f M\sqrt{Lp(0)}}{\sqrt{q(0)}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{9}{2}} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{m} n^{-4}\right)$$

$$\leq K_g M \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{23}{32(m+1)^2} + \frac{2K_f M\sqrt{Lp(0)}}{\sqrt{q(0)}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{9}{2}} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{m} n^{-4}\right), \quad (5.4.3)$$

$(x,t) \in D(t^*)$.

Dado $\epsilon > 0$, sea m_0 el primer entero positivo tal que

$$\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{m_0} n^{-4} < \frac{\epsilon \pi^{\frac{9}{2}} \sqrt{q(0)}}{8K_f M\sqrt{p(0)L}\,2^{\frac{9}{2}}}, \quad m_0 \geq 2, \quad (5.4.4)$$

y sea m_1 el primer entero positivo tal que

$$\frac{1}{(m_1+1)^2} < \frac{8\pi^{\frac{7}{2}}\epsilon}{23 K_g M 2^{\frac{7}{2}}}, \quad m_1 \geq 2. \quad (5.4.5)$$

De (5.4.3)-(5.4.5), si $m_2 = \max(m_0, m_1)$ entonces

$$|u(x,t) - u(m_2,x,t)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (x,t) \in D(t^*). \tag{5.4.6}$$

Aproximemos ahora $T_n(t) = a_n z_n(t) + b_n w_n(t)$ para $1 \le n \le m_2$, por una solución continua numérica $S_n(t)$ de la ecuación (5.3.5), tal que

$$U(m_2,x,t) = \sum_{n=1}^{m_2} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{L}}\right) S_n(t), \tag{5.4.7}$$

satisfaga

$$|U(m_2,x,t) - u(m_2,x,t)| = \left|\sum_{n=1}^{m_2} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{L}}\right)[S_n(t) - T_n(t)]\right| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{5.4.8}$$

$$(x,t) \in D(t^*),$$

donde $T_n(t)$ es la solución exacta del problema

$$[p(t)T_n'(t)]' + \frac{\lambda_n^2}{4L} q(t) T_n(t) = 0, \quad 0 \le t \le t^*, \ \ 1 \le n \le m_2, \tag{5.4.9}$$

$$T_n(0) = a_n, \quad T_n'(0) = b_n.$$

Nótese que para $1 \le n \le m_2$, el problema (5.4.9) puede escribirse en la forma estándar

$$T_n''(t) + a(t)T_n'(t) + \frac{\lambda_n^2}{4L} c(t) T_n(t) = 0, \quad 0 \le t \le t^* \tag{5.4.10}$$

$$T_n(0) = a_n, \quad T_n'(0) = b_n,$$

donde

$$a(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}, \quad c(t) = \frac{q(t)}{p(t)}, \quad 0 \le t \le t^*. \tag{5.4.11}$$

Nótese también que $T_n(t) = [\,1\ ,\ 0\,] Z_n(t)$, satisface

$$Z_n(t) = \begin{bmatrix} T_n(t) \\ T_n'(t) \end{bmatrix}, \quad Z_n'(t) = A_n(t) Z_n(t), \quad 0 \le t \le t^*, \tag{5.4.12}$$

$$Z_n(0) = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

donde

$$A_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(t)\frac{\lambda_n^2}{4L} & -a(t) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq n \leq m_2. \tag{5.4.13}$$

Además, si $Y_n(t)$ es la matriz solución del problema matricial relacionado en $\mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$Y_n'(t) = A_n(t)Y_n(t), \quad Y_n(0) = I, \quad 0 \leq t \leq t^* \quad 1 \leq n \leq m_2, \tag{5.4.14}$$

se tiene

$$Z_n(t) = Y_n(t)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad 1 \leq n \leq m-2. \tag{5.4.15}$$

Definamos las constantes k_{in}

$$k_{in} = \max\{\|A_n^{(i)}(t)\|, \, 0 \leq t \leq t^*\}, \quad 0 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq n \leq m_2, \tag{5.4.16}$$

y sea $h > 0$ y un entero positivo N tal que

$$h < \frac{1}{k_{0,n}}, \quad 1 \leq n \leq m_2, \quad Nh = t^*. \tag{5.4.17}$$

Consideremos la solución numérica discreta del problema (5.4.14) en $t_k = kh$, $0 \leq k \leq N$, obtenida usando métodos multipaso matriciales [34], y definida por

$$Y_{n,0} = I, \quad Y_{n,k} = \prod_{j=0}^{k-1}\left\{\left[I - \frac{h}{2}A_n(t_{k-j})\right]^{-1}\left[I + \frac{h}{2}A_n(t_{k-j-1})\right]\right\}, \tag{5.4.18}$$

$$1 \leq n \leq m_2, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Consideremos asimismo la función B-spline matricial

$$V_n(t) = \sum_{k=0}^{N} B_{1k}(t)Y_{n,k}, \quad 1 \leq n \leq m_2, \quad 0 \leq t \leq t^*, \tag{5.4.19}$$

$$B_{1k}(t) = \begin{cases} h^{-1}(t - t_k), & t_{k-1} \leq t \leq t_k \\ h^{-1}(t_{k+1} - t), & t_k \leq t \leq t_{k+1}. \end{cases} \tag{5.4.20}$$

Por [34], la diferencia entre la solución exacta $Y_n(t)$ de (5.4.14) y la solución numérica continua dada por (5.4.19), satisface

$$\|Y_n(t) - V_n(t)\| \leq \frac{h^2}{4}(k_{1n} + k_{0n}^2)e^{t^* k_{0n}} + \frac{h^2 t^*}{6}(k_{0n}^3 + +3k_{1n}k_{0n} + k_{2n})e^{3t^* k_{0n}},$$

$$0 \leq t \leq t^*, \quad 1 \leq n \leq m_2. \tag{5.4.21}$$

Si denotamos

$$W_n(t) = V_n(t) \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \ \ 0 \leq t \leq t^*, \ 1 \leq n \leq m_2, \tag{5.4.22}$$

entonces por (5.4.15) y (5.4.22) resulta

$$\|Z_n(t) - W_n(t)\|_2 \leq \|Y_n(t) - V_n(t)\|_2 \left\| \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \right\|_2, \ \ 0 \leq t \leq t^*, \ 1 \leq n \leq m_2. \tag{5.4.23}$$

Con el fin de expresar las cotas de error (5.4.21) en términos de los datos, introduzcamos las constantes

$$\begin{aligned} a^i &= \max\left\{ \left| \left[\frac{p'(t)}{p(t)}\right]^{(i)} \right| ; \ 0 \leq t \leq t^* \right\}, \\ c^i &= \max\left\{ \left| \left[\frac{q(t)}{p(t)}\right]^{(i)} \right| ; \ 0 \leq t \leq t^* \right\}, \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

y adviértase que

$$\|A_n(t)\|_F = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_n^2}{4L}c(t)\right)^2 + (a(t))^2}; \tag{5.4.25}$$

y

$$\begin{aligned} \|A_n'(t)\|_F &= \sqrt{\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c'(t))^2 + (a'(t))^2}; \\ \|A_n^{(2)}(t)\|_F &= \sqrt{\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^{(2)}(t))^2 + (a^{(2)}(t))^2}, \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

donde $a(t)$ y $c(t)$ vienen dadas por (5.4.11). Así por (5.4.16) y (5.4.24)-(5.4.26) se sigue que

$$\begin{aligned} k_{0n} &\le \sqrt{1+\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^0)^2+(a^0)^2}; \\ k_{1n} &\le \sqrt{\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^1)^2+(a^1)^2}; \\ k_{2n} &\le \sqrt{\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^2)^2+(a^2)^2}; \\ & 1\le n\le m_2. \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

De (5.4.21) y (5.4.27), para valores de N y h satisfaciendo (5.4.17) se tiene

$$\|Y_n(t)-V_n(t)\|_2 \le h^2 E_n, \;\; 0\le t\le t^*, 1\le n\le m_2, \tag{5.4.28}$$

donde

$$\begin{aligned} E_n \;=\; & \frac{1+\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^0)^2+(a^0)^2+\sqrt{(a^1)^2+\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^1)^2}}{4} \\ \cdot \exp & \left(t^*\sqrt{1+\tfrac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^0)^2+(a^0)^2}\right)+\tfrac{t^*}{6}\left\{\left[1+\tfrac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^0)^2+(a^0)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right. \\ & +3\sqrt{\tfrac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^1)^2+(a^1)^2}\sqrt{1+\tfrac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^0)^2+(a^0)^2} \\ & \left.+\sqrt{\tfrac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^2)^2+(a^2)^2}\right\}\exp\left(3t^*\sqrt{1+\tfrac{\lambda_n^4}{16L^2}(c^0)^2+(a^0)^2}\right). \end{aligned} \tag{5.4.29}$$

De (5.3.19), (5.4.23) y (5.4.28) se deduce que

$$\begin{aligned} & \|Z_n(t)-W_n(t)\| \le h^2 E_n\sqrt{a_n^2+b_n^2} \le h^2 E_n \lambda_n^{-\frac{7}{2}}\sqrt{K_g^2+K_f^2}, \\ & 0\le t\le t^*,\; 1\le n\le m_2. \end{aligned} \tag{5.4.30}$$

Si $S_n(t)$ es el primer componente del vector $W_n(t)$:

$$S_n(t) = [\,1\,,\,0\,]W_n(t) = \sum_{k=0}^{N} B_{1k}(t)[\,1,\,0\,]Y_{nk} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{5.4.31}$$

entonces, por (5.4.12), (5.4.30) y (5.4.31) se tiene

$$|T_n(t) - s_n(t)| \leq h^2 E_n \lambda_n^{-\frac{7}{2}} \sqrt{K_g^2 + K_f^2}, \;\; 0 \leq t \leq t^*, \; 1 \leq n \leq m_2. \tag{5.4.32}$$

Definamos $U(m_2, x, t)$ como

$$U(m_2, x, t) = \sum_{n=1}^{m_2} J_0 \left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{L}} \right) S_n(t), \;\; (x, t) \in D(t^*); \tag{5.4.33}$$

en ese caso, si $u(m_2, x, t)$ es la función definida en (5.4.1), teniendo en cuenta que $|J_0(y)| \leq 1$, para $y \geq 0$, de (5.4.32) resulta

$$|U(m_2, x, t) - u(m_2, x, t)| < h^2 \sqrt{K_f^2 + K_g^2} \sum_{n=1}^{m_2} E_n \lambda_n^{-\frac{7}{2}}, \tag{5.4.34}$$

$$(x, t) \in D(t^*).$$

Por (5.4.34), si se elige $h > 0$ de modo que además de la condición (5.4.17) satisfaga

$$0 < h < \left[\frac{\epsilon}{2\sqrt{K_g^2 + K_f^2} \sum_{n=1}^{m_2} \lambda_n^{-\frac{7}{2}} E_n} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.4.35}$$

entonces de (5.4.34) se obtiene finalmente

$$|U(m_2, x, t) - u(m_2, x, t)| < \frac{\epsilon}{2}, \;\; (x, t) \in D(t^*), \tag{5.4.36}$$

y por (5.4.6) se concluye

$$|u(x, t) - U(m_2, x, t)| < \epsilon, \;\; (x, t) \in D(t^*). \tag{5.4.37}$$

Con el objetivo de expresar la condición (5.4.17) en términos de los datos, nótese que por (1.1.1) se tiene

$$k_{0n} = \max_{0\le t\le t^*} \|A_n(t)\|_2 \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0\le t\le t^*} \|A_n(t)\|_F$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{0\le t\le t^*} \sqrt{1+(a(t))^2+\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c(t))^2}.$$

Por tanto

$$k_{0n} \ge \left[\frac{1+(a_{min})^2+\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c_{min})^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 1\le n\le m_2, \tag{5.4.38}$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{min} &= \min\left\{|a(t)| = \left|\frac{p'(t)}{p(t)}\right| ;\ 0\le t\le t^*\right\}, \\ c_{min} &= \min\left\{|c(t)| = \left|\frac{q(t)}{p(t)}\right| ;\ 0\le t\le t^*\right\}. \end{aligned} \tag{5.4.39}$$

Así, por (5.4.38) y (5.4.39) la condición (5.4.17) se cumple si $h>0$ satisface

$$h < \left[\frac{2}{1+(a_{min})^2+\frac{\lambda_n^4}{16L^2}(c_{min})^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 1\le n\le m_2. \tag{5.4.40}$$

Las matrices $C_{nk}^j = [I-\frac{h}{2}A_n(t_{k-j})]^{-1}[I+\frac{h}{2}A_n(t_{k-j-1})]$ que aparecen en (5.4.18) pueden expresarse de la siguiente manera

$$C_{nk}^j =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1+\frac{h}{2}\frac{p'(t_{k-j})}{p(t_{k-j})}-\frac{h^2\lambda_n^2}{16L}\frac{q(t_{k-j-1})}{p(t_{k-j-1})} & h+\frac{h^2}{4}\left[\frac{p'(t_{k-j})}{p(t_{k-j})}-\frac{p'(t_{k-j-1})}{p(t_{k-j-1})}\right] \\ -\frac{h\lambda_n^2}{8L}\left[\frac{q(t_{k-j})}{p(t_{k-j})}+\frac{q(t_{k-j-1})}{p(t_{k-j-1})}\right] & -\frac{h^2\lambda_n^2}{16L}\frac{q(t_{k-j})}{p(t_{k-j})}-\frac{h}{2}\frac{p'(t_{k-j-1})}{p(t_{k-j-1})}+1 \end{bmatrix}}{1+\frac{h}{2}\frac{p'(t_{k-j})}{p(t_{k-j})}+\frac{h^2\lambda_n^2}{16L}\frac{q(t_{k-j})}{p(t_{k-j})}}, \tag{5.4.41}$$

para $1 \leq n \leq m_2$, $0 \leq j \leq k-1$, $1 \leq k \leq N$, con $Nh = t^*$.

Resumiendo lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 14. *Sean $\epsilon > 0$, $t^* > 0$ y $D(t^*) = [0, L] \times [0, t^*]$. Sean K_g y K_f los valores definidos por (5.3.20) y (5.3.21) y sean m_0 y m_1 los primeros enteros positivos que satisfagan (5.4.4) y (5.4.5) respectivamente. Sea $m_2 = \max(m_0, m_1)$, sean a_{min}, c_{min} los reales definidos en (5.4.39) y E_n la secuencia dada por (5.4.29) para $1 \leq n \leq m_2$, donde a^i, c^i viene definidos por (5.4.24) para $0 \leq i \leq 2$. Tomemos $h > 0$ lo suficientemente pequeño para verificar (5.4.35) y (5.4.40) con $Nh = t^*$ para algún entero positivo N. Si C_{nk}^j está definida por (5.4.41) para $1 \leq n \leq m_2$, $0 \leq j \leq k-1$, $1 \leq k \leq N$, Y_{nk} está dada por*

$$Y_{n,0} = I, \quad Y_{n,k} = \prod_{j=0}^{k-1} C_{nk}^j,$$

$S_n(t)$ por (5.4.31) y a_n, b_n por (5.3.18), entonces la función $U(m_2, x, t)$ construida en (5.4.33) es una solución aproximada del problema (5.1.2)-(5.1.5) que satisface (5.4.37), donde $u(x, t)$ es la solución exacta dada por el teorema 13.

Capítulo 6

Soluciones exactas y aproximadas para la ecuación de difusión con coeficientes variables separables

6.1 Introducción

En este capítulo se va a intentar dar un paso más en la aplicación de los resultados obtenidos en la presente tesis mediante el método de separación de variables.

El salto cualitativo es el siguiente: hasta ahora hemos tratado siempre de resolver ecuaciones lineales en derivadas parciales en las que la variación de los coeficientes siempre dependía de la variable temporal. En la variable espacial, x, siempre se ha tenido una ecuación simple o al menos de solución conocida (ecuación de Bessel). Sin embargo, los resultados obtenidos (en especial los del capítulo 2), son perfectamente aplicables a esta coordenada, con tal de que la ecuación en dicha coordenada sea de segundo grado. Así, la acotación de las soluciones en x, autofunciones del problema, se obtiene de manera muy similar a las obtenidas en el teorema 2 para t.

El inconveniente que se presenta al permitir variaciones en x de los coeficientes de los términos de la ecuación en derivadas parciales, es que al aplicar el método de separación de variables se obtiene en la dimensión espacial un problema de Sturm-Liouville, del cual generalmente es imposible obtener una solución explícita exacta (autovalores y autofunciones del problema). Además, la imposición de las condiciones iniciales a la serie solución final del problema requiere la descomposición de las funciones iniciales (dependientes de x) en serie de autofunciones. Los coeficientes para ello requeridos nos son desconocidos desde el momento que las mismas autofunciones y autovalores también lo son.

Sin embargo podemos aplicar la estrategia utilizada en anteriores capítulos y suponer que la solución mediante el método de separación de variables existe. Tal estrategia pasa por los siguientes pasos:

1. Acotar superiormente los coeficientes del desarrollo en serie de autofunciones de las funciones iniciales, en función de los autovalores λ_n, de momento desconocidos, del problema de Sturm-Liouville en x. La acotación deberá fundamentarse en propiedades que tengan las autofunciones y que no tengan el resto de funciones.

2. Acotar superior e inferiormente los autovalores citados.

3. Acotar las autofunciones.

4. Aplicar las cotas obtenidas a las diversas derivadas parciales de la serie candidata a solución y demostrar la convergencia uniforme de las series obtenidas (como se ha hecho hasta ahora).

Con ello se logrará determinar una solución exacta en forma de serie. El siguiente paso sería la aproximación de la serie, que dependerá ya del caso concreto.

A modo de ejemplo, este capítulo analizará un problema relacionado con la ecuación de difusión. Concretamente, el problema a estudiar será:

$$u_{xx} = \frac{a(x)}{b(t)} u_t \,, \quad 0 < x < L \,, \quad t > 0 \tag{6.1.1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \ \ t > 0 \tag{6.1.2}$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \ \ 0 \leq x \leq L \tag{6.1.3}$$

en el que los coeficientes $a(x)$, $b(t)$ y la función inicial $f(x)$ satisfacen ciertas condiciones a determinar.[1]

Problemas de este tipo son frecuentes en sistemas de polímeros, modelos de difusión en medios anisótropos, o, en general, problemas de difusión con coeficientes de difusión variables, [13], [40]. En ellos, la variación espacial suele ser más común que la temporal (de hecho la variación temporal es difícil de ver). No obstante, como se verá, el caso de coeficiente temporal $b(t)$ constante no es sino una particularización del problema anterior, mucho más general e interesante.

El uso de soluciones en serie y aproximaciones analíticas posteriores ya ha sido aplicado por Tsang a problemas del tipo (6.1.1)-(6.1.3), para el caso de problemas de difusión moderadamente dependientes de la concentración (ver [13, p.135-136] y referencias allí contenidas). Sin embargo, su método no ofrece ninguna información sobre el error encontrado. Dado que nuestra filosofía a lo largo del presente documento ha sido exponer las ventajas de la aproximación de soluciones analíticas, ventajas cuyo exponente principal es la acotación del error, trataremos de aplicar toda la potencia de las herramientas que hemos ido desarrollando para conseguir una aproximación a la solución tan cercana como se desee, lo cual, por supuesto, requiere extraer la mayor información posible del error cometido.

El capítulo está organizado como sigue. El apartado 2 tratará de la unicidad de las soluciones del problema (6.1.1)-(6.1.3). El crecimiento de los coeficientes de la

[1] Este capítulo es una versión corregida y aumentada de [2].

expansión en serie de Sturm-Liouville asociada al problema

$$X'' + \lambda^2 a(x) X = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \quad X(0) = X(L) = 0\,, \tag{6.1.4}$$

es analizado en la sección 3, que puede considerarse como una continuación del apartado 2 del capítulo 2.

En el apartado 4 se construirá la solución exacta en serie por medio del método de separación de variables. Dado un error admisible $\epsilon > 0$ y $D(t_0, t_1) = \{(x,t);\ 0 \le x \le L\,,\ 0 \le t_0 \le t \le t_1\}$, en el apartado 5 se determinará el índice de truncamiento n_0 que hace que el error de la serie finita truncada respecto a la solución exacta en serie sea menor que $\frac{\epsilon}{2}$ uniformemente en $D(t_0,t_1)$. Ya que la solución en serie truncada del apartado 4 es teórica, pues incluye los autovalores y autofunciones exactos del problema (6.1.4), se tratará depués la siguiente cuestión: Dado $\epsilon > 0$, $D(t_0,t_1)$ y un índice de truncamiento n_0, determinar cuáles son los errores admisibles δ_1 y δ_2, respectivamente, para los autovalores aproximados $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_{n_0}^2$ y las autofunciones $w_1(x), \ldots, w_{n_0}(x)$, respectivamente, de manera que si $\widetilde{\lambda_n^2}$ es un autovalor aproximado y $\widetilde{w_n(x)}$ es una autofunción aproximada, entonces bajo la condición

$$|\widetilde{\lambda_n^2} - \lambda_n^2| < \delta_1\,,\ |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}| < \delta_2\,,\ 0 \le x \le L\,,\quad 1 \le n \le n_0\,,$$

el error global en la aproximación del problema (6.1.1)-(6.1.3), sea menor que ϵ uniformemente en $D(t_0,t_1)$.

En las siguientes líneas, la función de error será denotada por $erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx$, y la función de error complementaria por

$$erfc(t) = 1 - erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2}dx\,.$$

6.2 Unicidad

Consideremos el problema (6.1.1)-(6.1.3) donde $a(x)$, $b(t)$ son continuas y

$$a(x) \neq 0 \quad y \quad k(x,t) \;=\; \frac{b(t)}{a(x)} \ge 0 \quad para \quad todo \quad (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty[\,. \tag{6.2.1}$$

Supongamos que $u_i(x,t)$ para $i=1,\,2$ son 2 soluciones del problema (6.1.1)-(6.1.3), bajo las hipótesis (6.2.1), tales que

$$u_i\ ,\quad \frac{\partial u_i}{\partial t}\ ,\quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\ ,\quad i=1,\ 2\ ,\quad \textit{son continuas en}\quad [0,L]\times[0,+\infty[\ . \tag{6.2.2}$$

Sea $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$, y nótese que w satisface:

$$w_t \;=\; k(x,t)\,w_{xx}\ ,\quad 0<x<L\,,\quad t>0\,, \tag{6.2.3}$$

$$w(0,t) \;=\; w(L,t) \;=\; 0\,,\quad t\geq 0\,, \tag{6.2.4}$$

$$w(x,0) \;=\; 0\,,\quad 0\leq x\leq L\,. \tag{6.2.5}$$

Introduzcamos la función $I:[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$I(t) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^L a(x)\,w^2(x,t)\,dx\,. \tag{6.2.6}$$

Por la hipótesis (6.2.5) y la regla de Leibnitz para la derivación de integrales paramétricas, se tiene

$$I'(t) \;=\; \int_0^L a(x)\,w(x,t)\,w_t(x,t)\,dx\,,\quad t\geq 0\,,\quad I(0)=0\,. \tag{6.2.7}$$

De (6.2.1), (6.2.3) y (6.2.7) se sigue

$$I'(t) \;=\; \int_0^L a(x)\,w(x,t)\,k(x,t)\,w_{xx}(x,t)\,dx \;=\; b(t)\int_0^L w(x,t)\,w_{xx}(x,t)\,dx\,. \tag{6.2.8}$$

Nótese que para $t>0$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(w\,w_x) \;=\; w_x^2 \;+\; w\,w_{xx}\,,$$

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(ww_x)\,dx \;=\; \int_0^L w_x^2\,dx \;+\; \int_0^L ww_{xx}\,dx\,,$$

$$w(L,t)w_x(L,t)-w(0,t)w_x(0,t) \;=\; \int_0^L w_x^2\,dx \;+\; \int_0^L ww_{xx}\,dx\ ,\quad t>0\ . \tag{6.2.9}$$

De (6.2.4) y (6.2.9) se sigue que

$$\int_0^L w w_{xx}\, dx \;=\; -\int_0^L w_x^2\, dx \;, \quad t > 0 \,, \tag{6.2.10}$$

con lo que de (6.2.8), (6.2.10) se tiene

$$I'(t) \;=\; -b(t) \int_0^L w_x^2(x,t)\, dx \;, \quad t \geq 0 \,, \tag{6.2.11}$$

y por el teorema del valor medio y (6.2.11) se llega a

$$I(t) - I(0) \;=\; \int_0^t I'(s)\, ds \;=\; t\, I'(t_1) \,,$$

$$I(t) \;=\; -\, t\, b(t_1) \int_0^L w_x^2(x,t_1)\, dx \;, \quad 0 < t_1 < t \,. \tag{6.2.12}$$

Bajo las hipótesis (6.2.1), hay 2 casos posibles:

CASO 1. $a(x) > 0$ y $b(t) \geq 0 \,,\; (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty[\,.$

CASO 2. $a(x) < 0$ y $b(t) \leq 0 \,,\; (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty[\,.$

En ambos casos, de (6.2.6) y (6.2.12) se concluye

$$I(t) \;=\; 0 \;, \quad \textit{para} \quad t \geq 0 \,. \tag{6.2.13}$$

Dado que $a(x)$ y $w(x,t)$ son continuas y el signo de $a(x)$ es constante en $[0,L]$, de (6.2.6) y (6.2.13) se sigue que

$$a(x)\, w^2(x,t) \;=\; 0 \,, \quad t > 0 \,,\; 0 \leq x \leq L \,,$$

y por (6.2.1) se concluye $w(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [0,\infty[$. Ello nos permite establecer el siguiente resultado:

Teorema 15. *Bajo las hipótesis (6.2.1) y la continuidad de las funciones* $a(x)$, $b(t)$, *el problema (6.1.1)-(6.1.3) tiene como mucho una solución* $u(x,t)$ *tal que* u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ *y* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *son continuas en* $[0,L] \times [0,\infty[$.

6.3 Acotación de los coeficientes de Sturm-Liouville

Consideremos el problema regular de Sturm-Liouville

$$X'' \ + \ \lambda^2 \, a(x) \, X \ = \ 0 \ , \quad 0 < x < L \, , \tag{6.3.1}$$

$$X(0) \ = \ X(L) \ = \ 0 \ , \tag{6.3.2}$$

donde $a(x)$ es una función positiva continuamente diferenciable tal que

$$\left.\begin{array}{c} a'(x) \quad \textit{tiene} \quad \textit{como} \quad \textit{mucho} \quad \textit{un} \quad \textit{conjunto} \quad \textit{discreto} \\ \textit{numerable} \quad \textit{de} \quad \textit{ceros} \quad \textit{en} \quad \textit{la} \quad \textit{recta} \quad \textit{real} \quad \textit{positiva.} \end{array}\right\} \tag{6.3.3}$$

Señalemos que sustituyendo la hipótesis (6.3.3) por la hipótesis

$$|\, a'(t) \,| \ + \ |\, a''(t) \,| \ > \ 0 \ , \quad t > 0 \ ,$$

la conclusión y demostración del teorema 2 siguen siendo ciertas. De este resultado, si $\lambda_n > 0$, y $\{z_n, w_n\}$ es el sistema fundamental de soluciones de

$$X_n''(x) \ + \ \lambda_n^2 \, a(x) \, X_n(x) \ = \ 0 \ , \quad 0 \leq x \leq L \, , \tag{6.3.4}$$

que satisface

$$z_n(0) = 1 \, , \quad z_n'(0) = 0 \, , \quad w_n(0) = 0 \, , \quad w_n'(0) = 1 \, , \tag{6.3.5}$$

entonces

$$|\, w_n(x) \,| \ \leq \ \frac{M}{\lambda_n \, \sqrt{a(0)}} \, , \tag{6.3.6}$$

donde:

CASO 1

$$M = 1 \quad \textit{si} \quad a(x) \quad \textit{es} \quad \textit{creciente} \quad \textit{en} \quad [0, L] \, . \tag{6.3.7}$$

CASO 2

$$M = \left[\frac{a(0)}{a(L)}\right]^{1/2} \quad si \quad a(x) \quad es \quad decreciente \quad en \quad [0, L]. \tag{6.3.8}$$

CASO 3 Existe una partición $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L$ tal que $a(x)$ es creciente en $[0, x_0]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$, $a(x)$ es decreciente en $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{2k}, x_{2k+1}]$, con $x_N = x_{2k+1}$ o $x_N = x_{2k+2}$. En ese caso

$$M = \left[\frac{a(x_0)a(x_2)\cdots a(x_{2k})}{a(x_1)a(x_3)\cdots a(x_{2k+1})}\right]^{1/2}. \tag{6.3.9}$$

CASO 4 Existe una partición $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L$ tal que $a(x)$ es decreciente en $[0, x_0]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ y $a(x)$ es creciente en $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{2k}, x_{2k+1}]$, con $x_N = x_{2k}$ o $x_N = x_{2k+1}$. En ese caso

$$M = \left[\frac{a(0)a(x_1)\cdots a(x_{2k-1})}{a(x_0)a(x_2)\cdots a(x_{2k})}\right]^{1/2}. \tag{6.3.10}$$

Si $X_n(x)$ es una autofunción de (6.3.1)-(6.3.2) correspondiente al n-ésimo autovalor λ_n^2, entonces de (6.3.5) se sigue que $X_n(x) = \alpha\, w_n(x)$, para cierta constante α.

Sea $h(x)$ una función continua con derivada continua a trozos y de variación acotada en $[0, L]$, y sea

$$c_n = \frac{\int_0^L a(x)\, w_n(x)\, h(x)\, dx}{\int_0^L a(x)\, w_n^2\, dx}, \quad n \geq 1, \tag{6.3.11}$$

el n-ésimo coeficiente de Sturm-Liouville de $h(x)$ respecto al sistema de autovalores $\{w_n(x)\}_{n\geq 1}$ del problema (6.3.1)-(6.3.2).

En este apartado buscaremos cotas superiores de los coeficientes $\{c_n\}$ definidos por (6.3.11). Considerando (6.3.4) para $X_n(x) = w_n(x)$, se sigue que

$$\int_0^L a(x)\, w_n(x)\, h(x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^L w_n^{(2)}(x)\,h(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^L w_n'(x)\,h'(x)\,dx\,. \tag{6.3.12}$$

Dado que $h'(x)$ is continua a trozos en $[0,L]$, existe una función escalonada $H_n(x)$ y una partición $P = \{0 = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_N^n = L\}$ de $[0,L]$ conteniendo los puntos de discontinuidad de $h'(x)$ tal que

$$H_n(x) \;=\; h'(x_{i-1}^n+) \;=\; \lim_{x\longrightarrow x_{i-1}^n+} h'(x)\,, \quad x_{i-1}^n \le x < x_i^n\,, \tag{6.3.13}$$

y

$$\left|\int_0^L w_n'(x)\,\{\,H_n(x) \;-\; h'(x)\,\}\;dx\right| \;<\; \epsilon\,. \tag{6.3.14}$$

Nótese que de (6.3.2) y (6.3.13) se tiene

$$\int_0^L w_n'(x)H_n(x)dx \;=\; \sum_{i=0}^{m-1} h'(x_i^n+)\left[w_n(x_{i+1}^n) - w_n(x_i^n)\right] \;=$$

$$= -h'(x_0^n+)w_n(x_0^n) - \sum_{i=0}^{m-2}\left[h'(x_{i+1}^n+) - h'(x_i^n+)\right]w_n(x_{i+1}^n) + h'(x_{m-1}^n+)w_n(x_m^n) \;=$$

$$= -\sum_{i=0}^{m-2}\left[h'(x_{i+1}^n+) - h'(x_i^n+)\right]\;w_n(x_{i+1}^n)\,.$$

De aquí, (6.3.12) y (6.3.14) se obtiene

$$\left|\int_0^L a(x)w_n(x)h(x)\,dx\right| \;<\; \frac{\epsilon + \left|\int_0^L w_n'(x)H_n(x)\,dx\right|}{\lambda_n^2}$$

$$\le\; \frac{\epsilon + v(h')\max\{|w_n(x)|\,;\;0\le x\le L\}}{\lambda_n^2}\,,$$

donde $v(h')$ es la variación total de $h'(x)$ entre 0 y L, dado que $h'(x)$ es de variación acotada en el intervalo $[0,L]$ por hipótesis. De (6.3.6), tomando límites en la expresión anterior cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, se sigue

$$\left|\int_0^L a(x)w_n(x)h(x)\,dx\right| \;\le\; \frac{Mv(h')}{\lambda_n^3\sqrt{a(0)}}\,,\quad 0\le x\le L\,,\quad n\ge 1\,, \tag{6.3.15}$$

donde M está definida en (6.3.7)-(6.3.10).

Busquemos ahora una cota inferior para el denominador de (6.3.11). De (6.3.4), integrando por partes y sabiendo que $w_n(0) = w_n(L) = 0$, se sigue

$$\int_0^L (w_n'(x))^2\, dx \;=\; \lambda_n^2 \int_0^L a(x) w_n^2(x)\, dx\,, \quad n \geq 1\,. \tag{6.3.16}$$

Por tanto, podemos esribir

$$\int_0^L a(x) w_n^2(x)\, dx \;=\; \frac{1}{2\lambda_n^2}\left[\int_0^L \left\{\lambda_n^2 a(x) w_n^2(x) + (w_n'(x))^2\right\} dx\right]. \tag{6.3.17}$$

Si denotamos

$$G(w_n, x) \;=\; \lambda_n^2 a(x) w_n^2(x) \;+\; (w_n'(x))^2\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \tag{6.3.18}$$

entonces (6.3.17) toma la forma

$$\int_0^L a(x) w_n^2(x) dx \;=\; \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^L G(w_n, x) dx\,. \tag{6.3.19}$$

De la sección 2 del capítulo 2 se sabe que $G(w_n, \cdot)$ is creciente donde $a(\cdot)$ crece y $G(w_n, \cdot)$ es decreciente donde $a(\cdot)$ decrece. De acuerdo con esto, podemos distinguir 4 casos:

CASO 1. $a(\cdot)$ es creciente en $[0, L]$.

En ese caso, de (6.3.5), (6.3.7) y (6.3.18) se obtiene, (tomando $M = 1$)

$$\int_0^L G(w_n, x) dx \geq L G(w_n, 0) = L = \frac{L}{M^2}\,. \tag{6.3.20}$$

CASO 2. $a(\cdot)$ is decreciente en $[0, L]$.

Consideremos la función $F(w_n, \cdot)$ definida por

$$F(w_n, x) = w_n^2(x) + \frac{(w_n'(x))^2}{\lambda_n^2 a(x)}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,. \tag{6.3.21}$$

Por (2.2.7) se tiene que $F(w_n, \cdot)$ es creciente donde $a(\cdot)$ es decrece y $F(w_n, \cdot)$ es decreciente donde $a(\cdot)$ crece. Además, se tiene

$$G(w_n, x) = \lambda_n^2 a(x) F(w_n, x)\,, \quad 0 \leq x \leq L\,. \tag{6.3.22}$$

De (6.3.5), (6.3.8), (6.3.21) y (6.3.22) se sigue que (ver también capítulo 2):

$$\int_0^L G(w_n,x)dx = \lambda_n^2 \int_0^L a(x)F(w_n,x)dx \geq \lambda_n^2 F(w_n,0) \int_0^L a(x)dx\,,$$

$$\int_0^L G(w_n,x)dx \geq \frac{\int_0^L a(x)dx}{a(0)} \geq L\frac{a(L)}{a(0)} = \frac{L}{M^2}\,, \tag{6.3.23}$$

con M dado por (6.3.8).

CASO 3. Bajo las condiciones del caso anterior 3, tomando M dado por (6.3.9) y teniendo en cuenta el estudio de los casos 1 y 2, se tiene (ver capítulo 2)

$$G(w_n,x) \geq \frac{a(x_1)\cdots a(x_{2k+1})}{a(x_0)\cdots a(x_{2k})}\,,\quad 0 \leq x \leq x_N\,.$$

Por tanto $G(w_n,x) \geq \frac{1}{M^2}$ y

$$\int_0^L G(w_n,x)dx \geq \frac{L}{M^2}\,. \tag{6.3.24}$$

CASO 4. Bajo las hipótesis del caso anterior 4, tomando M dada en (6.3.10) y teniendo en cuenta el estudio de los casos 1 y 2, se obtiene (ver también capítulo 2)

$$G(w_n,x) \geq \frac{a(x_2)\cdots a(x_{2k})}{a(x_1)\cdots a(x_{2k-1})}G(w_n,x_0)\,,\quad x_0 \leq x \leq x_N\,, \tag{6.3.25}$$

y de (6.3.5) y (6.3.21) se obtiene

$$G(w_n,x) \geq G(w_n,x_0) = \lambda_n^2 a(x_0)F(w_n,x_0)$$

$$\geq \lambda_n^2 a(x_0)\frac{1}{\lambda_n^2 a(0)} = \frac{a(x_0)}{a(0)}\,,\quad 0 \leq x \leq x_0\,. \tag{6.3.26}$$

De (6.3.25), (6.3.26) se sigue

$$\int_0^L G(w_n,x)dx \geq \frac{a(x_0)\cdots a(x_{2k})}{a(0)a(x_1)\cdots a(x_{2k-1})}L = \frac{L}{M^2}\,, \tag{6.3.27}$$

donde M viene dado por (6.3.10). Así, para los cuatro casos se tiene

$$\int_0^L G(w_n,x)dx \geq \frac{L}{M^2}\,, \tag{6.3.28}$$

donde M viene dado por (6.3.7)-(6.3.10), dependiendo del caso concreto. De (6.3.19) y (6.3.28) se tiene

$$\int_0^L a(x)w_n^2(x)dx \geq \frac{L}{2M^2\lambda_n^2}\,. \tag{6.3.29}$$

Finalmente, de (6.3.11), (6.3.15) y (6.3.29) se concluye

$$|c_n| \,\leq\, \frac{2M^3 v(h')}{L\sqrt{a(0)}}\,\frac{1}{\lambda_n}\,, \quad n \geq 1\,. \tag{6.3.30}$$

Resumiendo, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 16. *Sea h una función derivable cuya derivada es continua a trozos y de variación acotada en $[0,L]$, y sea $v(h')$ la variación total de h' en $[0,L]$. Si $h(0)=h(L)=0$, y $a(x)$ es una función positiva continuamente diferenciable que satisface (6.3.3), entonces los coeficientes de Sturm-Liouville $c_n(h)$ definidos en (6.3.11) satisfacen (6.3.30)*

6.4 Soluciones teóricas exactas y aproximadas

El método de separación de variables provee de soluciones del problema (6.1.1)-(6.1.2) de la forma

$$u(x,t) \,=\, X(x)\,T(t)\,, \tag{6.4.1}$$

donde

$$X'' + \lambda^2 a(x)X = 0\,, \quad X(0) = X(L) = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \tag{6.4.2}$$

$$T' + \lambda^2 b(t)T = 0\,, \quad t > 0\,. \tag{6.4.3}$$

El conjunto de autofunciones del problema de Sturm-Liouville (6.4.2) está formado por las funciones $\{w_n(x)\}_{n\geq 1}$ introducidas en el apartado 3, que están asociadas a los autovalores $\{\lambda_n^2\}_{n\geq 1}$. Si M viene definido por (6.3.7)-(6.3.10), dependiendo del caso, entonces del teorema 2 del capítulo 2 se sigue que

$$\left.\begin{array}{l} |w_n(x)| \leq \dfrac{M}{\lambda_n\sqrt{a(0)}}\,, \quad |w_n'(x)| \leq \dfrac{M}{\sqrt{a(0)}}\sqrt{A(0,L)}\,, \\[3ex] A(0,L) \,=\, \max\{a(x)\,;\;\; 0 \leq x \leq L\}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \quad n \geq 1\,. \end{array}\right\} \tag{6.4.4}$$

Resolviendo (6.4.3) para $\lambda = \lambda_n$ se obtiene

$$T_n(t) = \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right]\,, \quad t \geq 0\,, \tag{6.4.5}$$

y

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = w_n(x)\exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right]\,, \quad n \geq 1\,. \tag{6.4.6}$$

Por superposición, la serie candidata a solución del problema (6.1.1)-(6.1.3) viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n w_n(x)\exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right]\,, \tag{6.4.7}$$

siendo

$$c_n = \frac{\int_0^L a(x)w_n(x)f(x)dx}{\int_0^L a(x)w_n^2(x)dx}\,. \tag{6.4.8}$$

Si $f(x)$ tiene una derivada continua a trozos en $[0,L]$, entonces, de [10, p. 57]

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n\geq 1} c_n w_n(x)\,, \qquad 0 < x < L\,, \tag{6.4.9}$$

y si además $f'(x)$ es de variación acotada en $[0,L]$ y se cumple

$$f(0) = f(L) = 0\,, \tag{6.4.10}$$

entonces, por el teorema 16 se sigue que

$$|c_n| \leq \frac{2v(f')M^3}{L\sqrt{a(0)}}\,\frac{1}{\lambda_n}\,, \quad n \geq 1\,. \tag{6.4.11}$$

De (6.4.6) se tiene que

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = -\lambda_n^2 b(t) c_n w_n(x)\exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right]\,. \tag{6.4.12}$$

Introduzcamos las siguientes constantes positivas:

$$\left.\begin{aligned} b(t_0,t_1) &= \min\{b(t);\ t_0 \le t \le t_1\}\,, \\ \\ B(t_0,t_1) &= \max\{b(t);\ t_0 \le t \le t_1\}\,, \\ \\ a(0,L) &= \min\{a(x);\ 0 \le x \le L\}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.4.13}$$

Por [47, p. 264-265] se sabe que

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2 A(0,L)} \le \lambda_n^2 \le \frac{n^2\pi^2}{L^2 a(0,L)}\,, \quad n \ge 1\,, \tag{6.4.14}$$

y de (6.4.4) y (6.4.11)-(6.4.14) se sigue que

$$\begin{gathered} \left| c_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} \right| \le \frac{2B(t_0,t_1) M^4 v(f')}{a(0)L} \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right]\,, \\ 0 < t_0 \le t \le t_1\,, \quad 0 \le x \le L\,. \end{gathered} \tag{6.4.15}$$

Por consiguiente la serie

$$\sum_{n\ge 1} c_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$$

converge uniformemente en $D(t_0,t_1) = \{(x,t);\ 0 \le x \le L\,,\ 0 < t_0 \le t \le t_1\ \}$, y por el teorema de derivación de series de funciones [8, p. 402], la serie $u(x,t)$ definida por (6.4.7) es parcialmente diferenciable término a término con respecto a la variable t, en cualquier punto (x,t), con $0 \le x \le L\,,\ t > 0\,.$

De (6.4.4), (6.4.11) y (6.4.14) se tiene que

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} = w_n'(x) \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds \right]$$

y que

$$\left. \begin{array}{c} \left| c_n \dfrac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} \right| \leq \dfrac{2v(f')M^4 A(0,L)}{n\pi a(0)} \exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \dfrac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right] \\ \\ 0 \leq x \leq L \ , \quad 0 < t_0 \leq t \leq t_1 \ ; \end{array} \right\} \tag{6.4.16}$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = w_n''(x) \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds \right] = -\lambda_n^2 a(x) w_n(x) \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds \right] \ ,$$

$$c_n \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = -c_n \lambda_n^2 a(x) w_n(x) \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds \right] \ ,$$

$$\left. \begin{array}{c} \left| c_n \dfrac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} \right| \leq \dfrac{2v(f')M^4 A(0,L)}{L a(0)} \exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \dfrac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right] \ , \\ \\ 0 \leq x \leq L \, , \quad 0 < t_0 \leq t \leq t_1 \ . \end{array} \right\} \tag{6.4.17}$$

Por tanto ambas series

$$\sum_{n \geq 1} c_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} \ , \quad \sum_{n \geq 1} c_n \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} \ ,$$

convergen uniformemente en $D(t_0, t_1)$, con $t_0 > 0$, y por el teorema de derivación de series de funciones, la serie $u(x,t)$ definida por (6.4.7) es 2 veces parcialmente diferenciable término a término con respecto a la variable x en cualquier punto (x,t) con $0 < x < L \, , \ t > 0$. Nótese también que de (6.4.4), (6.4.6), (6.4.11) y (6.4.14) se tiene

$$\left. \begin{array}{c} |c_n u_n(x,t)| \leq \dfrac{2v(f')M^4 L A(0,L)}{n^2 \pi^2 a(0)} \exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \dfrac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right] \ , \\ \\ 0 \leq x \leq L \, , \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \, , \end{array} \right\} \tag{6.4.18}$$

lo que significa que $u(x,t)$ es continua también en cualquier punto (x,t) con $t \geq 0$. Por tanto

$$u_{xx}(x,t) - \frac{a(x)}{b(t)} u_t(x,t) =$$

$$= \sum_{n \geq 1} c_n w_n''(x) \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right] -$$

$$- \frac{a(x)}{b(t)} \sum_{n \geq 1} c_n (-\lambda_n^2) w_n(x) b(t) \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right] =$$

$$= \sum_{n \geq 1} c_n \left[w_n''(x) + \lambda_n^2 a(x) w_n(x)\right] \exp\left[-\lambda_n^2 \int_0^t b(s)ds\right] = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,.$$

Con lo anterior podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 17. *Sea $f(x)$ una función derivable con derivada continua a trozos y de variación acotada en $[0,L]$ tal que $f(0) = f(L) = 0$. Sean $a(x)$ y $b(t)$ funciones continuas positivas tales que $a(x)$ satisface (6.3.3). Si c_n viene dado por (6.4.8) y $u_n(x,t)$ por (6.4.6), entonces $u(x,t)$ definida por (6.4.7) es la única solución del problema (6.1.1)-(6.1.3).*

6.5 Construcción de aproximaciones

La solución en serie del teorema 17 presenta varias dificultades computacionales. En primer lugar la infinidad de la serie. Está claro que nosotros no podemos estar sumando "hasta el infinito", por mucha paciencia que poseamos. Aparte de ello, los autovalores λ_n no son exactamente computables y lo mismo ocurre con $w_n(x)$ y $T_n(t)$, dado que ambas dependen de λ_n.

En este apartado trataremos de solventar ambos problemas para resolver la siguiente cuestión: Dado $\epsilon > 0$ y $0 \leq t_0 < t_1$, cómo construir una aproximación computable

$U(x,t)$, cuyo error respecto a la solución exacta en serie u(x,t), satisfaga

$$|u(x,t) - U(x,t)| < \epsilon\,, \quad (x,t) \in D(t_0,t_1) = \{(x,t);\ 0 \le x \le L\,,\ 0 \le t_0 \le t \le t_1\}\,. \tag{6.5.1}$$

Para ello, en primer lugar, truncaremos la serie obteniendo un error máximo conocido, y después aproximaremos los autovalores λ_n, las autofunciones $w_n(x)$ y los coeficientes de Sturm-Liouville $\{c_n\}$, de acuerdo con la precisión prefijada en el dominio $D(t_0,t_1)$. Así pues, dado $\epsilon > 0$, $0 \le t_0 < t_1$, de (6.4.18), para $(x,t) \in D(t_0,t_1)$ se tiene, aplicando integración por partes:

$$\sum_{n>n_0} |c_n u_n(x,t)| \le \frac{2LA(0,L)M^4 v(f')}{\pi^2 a(0)} \sum_{n>n_0} \frac{1}{n^2} \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)}\right]$$

$$\le \frac{2LA(0,L)M^4 v(f')}{\pi^2 a(0)} \int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{y^2} \exp\left[-\frac{y^2\pi^2 t_0 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)}\right]\, dy$$

$$= \frac{2v(f')M^4 LA(0,L)}{\pi^2 a(0)} \left\{ \frac{1}{n_0} \exp\left[-\frac{n_0^2\pi^2 t_0 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)}\right] \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{t_0\pi^3 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)}}\; erfc\left(n_0 \sqrt{\frac{\pi^2 t_0 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)}}\right) \right\}.$$

Por tanto, tomando n_0 como el primer entero positivo que satisfaga

$$\left\{ \frac{1}{n_0} \exp\left[-\frac{n_0^2\pi^2 t_0 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)}\right] - \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{t_0\pi b(0,t_1)}{A(0,L)}}\; erfc\left(n_0\sqrt{\frac{\pi^2 t_0 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)}}\right)\right\} <$$

$$< \frac{\pi^2 a(0)}{4v(f')M^4 LA(0,L)}\,\epsilon \tag{6.5.2}$$

se obtiene

$$\left| u(x,t) - \sum_{n=1}^{n_0} c_n\, u_n(x,t) \right| < \frac{\epsilon}{2}\,, \quad (x,t) \in D(t_0,t_1)\,. \tag{6.5.3}$$

Para el caso en que queramos calcular el índice de truncamiento n_0 en $D(0,t_1)$, la expresión anterior se reduce a

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\pi^2 a(0)\epsilon}{4v(f')M^4 LA(0,L)} . \tag{6.5.4}$$

En los últimos años se han desarrollado distintos métodos para aproximar los autovalores λ_n y las autofunciones $w_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville (6.4.2). Así, diversos ejemplos de métodos de diferencias pueden verse en [6]. Otros métodos, como los de Canosa y Oliveira en [11] y Pruess en [42] y [43], se basan en la aproximación de los coeficientes de la ecuación diferencial por funciones escalón o splines polinomiales. Un detallado estudio de éstos y otros métodos puede encontrarse en [38], [37] y [44]. Del estudio de todos ellos se deduce que podemos encontrar aproximaciones $\widetilde{\lambda_n^2}$ de λ_n^2, y aproximaciones $\widetilde{w_n(x)}$ de $w_n(x)$, de modo que dados errores admisibles δ_1 y δ_2 se tenga

$$|\widetilde{\lambda_n^2} - \lambda_n^2| < \delta_1 \quad y \quad |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}| < \delta_2 , \quad 0 \le x \le L , \quad 1 \le n \le n_0 . \tag{6.5.5}$$

Nuestro objetivo ahora será el buscar tales errores admisibles δ_1 y δ_2 de manera que, definiendo

$$\widetilde{c_n} = \frac{\int_0^L a(x)\, \widetilde{w_n(x)}\, f(x)\, dx}{\int_0^L a(x) \widetilde{w_n^2(x)}\, dx} , \quad 1 \le n \le n_0 , \tag{6.5.6}$$

entonces la solución aproximada

$$\widetilde{u(x,t,n_0)} = \sum_{n=1}^{n_0} \widetilde{c_n}\, \widetilde{w_n(x)} \exp\left[-\widetilde{\lambda_n^2} \int_0^t b(s) ds \right] , \tag{6.5.7}$$

satisfaga

$$\left| \sum_{n=1}^{n_0} c_n u_n(x,t) - \widetilde{u(x,t,n_0)} \right| < \frac{\epsilon}{2} , \quad (x,t) \in D(t_0,t_1) . \tag{6.5.8}$$

Para ello, previamente debemos obtener cotas superiores tanto de $\widetilde{\lambda_n}$, $\widetilde{w_n(x)}$ como de los coeficientes aproximados $\widetilde{c_n}$.

El caso de $\widetilde{\lambda_n}$ y $\widetilde{w_n(x)}$ es simple. Dado que son valores y funciones, respectivamente, a priori desconocidos, y que debemos calcular, podemos exigirles, aún sin conocerlos, que cumplan las cotas encontradas para λ_n y $w_n(x)$ en (6.4.14) y (6.4.4). Así pues, se debe cumplir

$$|\widetilde{w_n(x)}| \leq \frac{ML\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}}\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,, \tag{6.5.9}$$

y

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2A(0,L)} \leq \widetilde{\lambda_n^2} \leq \frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,. \tag{6.5.10}$$

A la cota fijada en (6.5.9) la denominaremos de ahora en adelante $\widetilde{W_n}$.

En el caso en que después de calcular $\widetilde{\lambda_n}$ y $\widetilde{w_n(x)}$ nos encontráramos con que alguno de sus valores excede la cota indicada, truncaremos tales valores para asegurar (6.5.9) y (6.5.10). Es evidente que los valores truncados estarán más cerca de los valores teóricos que la primera aproximación obtenida.

Con los coeficientes aproximados $\widetilde{c_n}$ podemos hacer algo parecido y exigir que cumplan las mismas cotas que los coeficientes exactos c_n (ver (6.4.11)), es decir

$$|\widetilde{c_n}| \leq \frac{2v(f')M^3\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}}\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,, \tag{6.5.11}$$

cota a la que denominaremos $\widetilde{C_n}$ en lo sucesivo.

Calculadas las cotas pedidas, podemos lanzarnos a determinar los errores admisibles δ_1 y δ_2 definidos en (6.5.5). Así pues, sea $\widetilde{T_n(t)} = \exp\left[-\widetilde{\lambda_n^2}\int_0^t b(s)\,ds\right]$, $\widetilde{u_n(x,t)} = \widetilde{w_n(x)}\widetilde{T_n(t)}$ y nótese que

$$\begin{gathered}c_nu_n(x,t) - \widetilde{c_n}\widetilde{u_n(x,t)} = c_nT_n(t)w_n(x) - \widetilde{c_n}\widetilde{T_n(t)}\widetilde{w_n(x)} = \\ (c_n-\widetilde{c_n})T_n(t)w_n(x) + \widetilde{c_n}[T_n(t)-\widetilde{T_n(t)}]w_n(x) + \widetilde{c_n}\widetilde{T_n(t)}[w_n(x)-\widetilde{w_n(x)}]\,.\end{gathered} \tag{6.5.12}$$

De (6.5.12) queda claro que para encontrar el error total nos interesa calcular el error cometido en $\widetilde{T_n(t)}$ y en los coeficientes $\widetilde{c_n}$.

Así, para $\widetilde{T_n(t)}$, por el teorema del valor medio y (6.4.14) se tiene

$$|T_n(t) - \widetilde{T_n(t)}| \leq |\lambda_n^2 - \widetilde{\lambda_n^2}| \left(\int_0^t b(s)ds \right) \exp \left[-\frac{n^2\pi^2}{L^2 A(0,L)} \int_0^t b(s)ds \right],$$

$$|T_n(t) - \widetilde{T_n(t)}| \leq |\lambda_n^2 - \widetilde{\lambda_n^2}| \left(\int_0^t b(s)ds \right) \exp \left[-\frac{n^2 t_0 b(0,t_1)\pi^2}{L^2 A(0,L)} \right],$$

$$t_0 \leq t \leq t_1\,,\ 1 \leq n \leq n_0. \tag{6.5.13}$$

Por otro lado, para $\widetilde{c_n}$, un simple cálculo nos permite deducir que

$$c_n - \widetilde{c_n} =$$

$$= \frac{\int_0^L [w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}] f(x) a(x)\, dx}{\int_0^L a(x) w_n^2(x) dx} + \widetilde{c_n} \frac{\left[\int_0^L (\widetilde{w_n^2(x)} - w_n^2(x)) a(x)\, dx \right]}{\int_0^L a(x) w_n^2(x)\, dx}.$$

Por tanto, tomando valores absolutos en la anterior expresión

$$|c_n - \widetilde{c_n}| \ \leq \frac{\int_0^L |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}|\, |f(x)a(x)| dx}{\int_0^L a(x) w_n^2(x)\, dx} +$$

$$+ \ |\widetilde{c_n}| \frac{\int_0^L |\widetilde{w_n(x)} - w_n(x)|\, |\widetilde{w_n(x)} + w_n(x)|\, |a(x)|\, dx}{\int_0^L a(x) w_n^2(x)\, dx}, \tag{6.5.14}$$

y por (6.3.29), (6.4.4), (6.4.14), (6.5.9), (6.5.10), (6.5.11) y (6.5.14) se tiene

$$|c_n - \widetilde{c_n}| \leq \left[\frac{2M^2 n^2 \pi^2}{L^3 a(0,L)} \left(\int_0^L |f(x)| a(x) dx \right) + \frac{2\widetilde{C_n} M^2 \pi^2 n^2}{L^3 a(0,L)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\widetilde{W_n} + \frac{ML\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}} \right) \int_0^L a(x) dx \right] \sup_{0 \leq x \leq L} |\widetilde{w_n(x)} - w_n(x)|\,. \tag{6.5.15}$$

Definamos $\gamma_{0,n}$ como

$$\gamma_{0,n} \;=\; \frac{2(Mn\pi)^2}{L^3 a(0,L)} \int_0^L |f(x)| a(x) dx + \\ + \frac{2\pi^2 \widetilde{C_n} M^2 n^2}{L^3 a(0,L)} \left(\widetilde{W_n} + \frac{ML\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}} \right) \int_0^L a(x) dx\,. \qquad (6.5.16)$$

Entonces de (6.5.15)-(6.5.16) se obtiene

$$|c_n - \widetilde{c_n}| \leq \gamma_{0,n} \sup_{0 \leq x \leq L} |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}|\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,. \qquad (6.5.17)$$

De la definición de $\widetilde{T_n(t)}$ y de (6.5.10) se llega a

$$|\widetilde{T_n(t)}| \leq \exp\left[- \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right]\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,, \quad t_0 \leq t \leq t_1\,. \qquad (6.5.18)$$

Del mismo modo, de (6.4.14) y la definición de $T_n(t)$, ver (6.4.5), se sigue que

$$|T_n(t)| \leq \exp\left[- \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right]\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,, \quad t_0 \leq t \leq t_1\,, \qquad (6.5.19)$$

y por (6.4.4) y (6.4.14) se tiene

$$|w_n(x)| \leq \frac{M\sqrt{A(0,L)}L}{\sqrt{a(0)}n\pi}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,. \qquad (6.5.20)$$

Una vez aquí, podemos aplicar lo calculado en (6.5.13)-(6.5.20) a (6.5.12) y escribir

$$|c_n u_n(x,t) - \widetilde{c_n}\widetilde{u_n(x,t)}| \leq \gamma_{1,n} \sup\nolimits_{0 \leq x \leq L} |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}| \;+\; \gamma_{2,n} |\lambda_n^2 - \widetilde{\lambda_n^2}|\,, \qquad (6.5.21)$$

$$0 \leq x \leq L\,, \quad t_0 \leq t \leq t_1\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,,$$

donde $\gamma_{1,n}$ y $\gamma_{2,n}$ vienen dados por

$$\gamma_{1,n} = \left[\gamma_{0,n} \frac{ML}{n\pi} \sqrt{\frac{A(0,L)}{a(0)}} + \widetilde{C_n} \right] \exp\left[- \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{t_0 b(0,t_1)}{A(0,L)} \right]\,, \\ \gamma_{2,n} = \frac{ML\widetilde{C_n}}{n\pi} \left(\int_0^{t_1} b(s) ds \right) \exp\left[- \frac{t_0 n^2 \pi^2 b(0,t_1)}{L^2 A(0,L)} \right] \sqrt{\frac{A(0,L)}{a(0)}}\,. \qquad (6.5.22)$$

Finalmente, de (6.5.21), si los autovalores aproximados $\widetilde{\lambda_n^2}$ y las autofunciones aproximadas $\widetilde{w_n(x)}$ satisfacen

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le x\le L} |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}| \le \frac{\epsilon}{4\sum_{n=1}^{n_0}\gamma_{1,n}}\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \\ &|\lambda_n^2 - \widetilde{\lambda_n^2}| < \frac{\epsilon}{4\sum_{n=1}^{n_0}\gamma_{2,n}}\,, \qquad\qquad 1 \le n \le n_0\,, \end{aligned} \tag{6.5.23}$$

entonces la función $u(\widetilde{x,t,n_0})$ definida por (6.5.7) satisface (6.5.8), y por (6.5.3) se concluye

$$|u(\widetilde{x,t,n_0}) - u(x,t)| < \epsilon\,, \quad (x,t) \in D(t_0,t_1)\,. \tag{6.5.24}$$

Con todo lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 18. *Bajo las hipótesis y notación del teorema 17, sea* $\epsilon > 0$, $0 \le t_0 < t_1$, *y* $D(t_0,t_1)$ *definido por (6.5.1). Sea* n_0 *el primer entero positivo que verifique (6.5.2) y sean* $\widetilde{\lambda_n^2}$, $\widetilde{w_n(x)}$ *y* $\widetilde{c_n}$ *los autovalores, autofunciones y coeficientes aproximados, respectivamente, del problema de Sturm-Liouville (6.3.1)-(6.3.2), para* $1 \le n \le n_0$. *Si* λ_n^2, $w_n(x)$ *y* c_n *son los autovalores, autofunciones y coeficientes de Sturm-Liouville teóricos, y las condiciones (6.5.9), (6.5.10), (6.5.11) y (6.5.23) se verifican, donde* $\gamma_{1,n}$ *y* $\gamma_{2,n}$ *vienen definidas por (6.5.22), entonces la función* $u(\widetilde{x,t,n_0})$ *definida por (6.5.7) satisface (6.5.24).*

Lo que prueba que el método expuesto permite aproximar la solución real del problema con tanta precisión como se desee.

Capítulo 7

Soluciones exactas y aproximadas para la ecuación de ondas con coeficientes variables separables

7.1 Introducción

En este capítulo, finalmente, trataremos de aunar los resultados expuestos a lo largo de los capítulos anteriores para encontrar solución a un problema del tipo:

$$u_{tt} = \frac{b(t)}{a(x)} u_{xx} \ , \ 0 < x < L, \ t > 0, \tag{7.1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \ t > 0, \tag{7.1.2}$$

$$u(L,t) = 0, \ t > 0, \tag{7.1.3}$$

$$u(x,0) = f(x), \ 0 \leq x \leq L, \tag{7.1.4}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \ 0 \leq x \leq L, \tag{7.1.5}$$

donde

$b(t)$ es una función positiva dos veces continuamente diferenciable en toda la recta real, tal que $b'(t)$ tiene un conjunto finito de ceros en cualquier intervalo acotado $[0,T]$, (7.1.6)

y

$$\begin{aligned} &a(x) \text{ es una función positiva continuamente diferenciable en } [0,L]\,, \\ &\text{tal que } a'(x) \text{ tiene un conjunto finito de ceros en dicho intervalo.} \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

El problema (7.1.1)-(7.1.5) es el más complejo que hemos estudiado hasta ahora, pues en él las variaciones del coeficiente de la ecuación de ondas dependen tanto de x como de t. Como en el resto de capítulos, el método de separación de variables será la herramienta que utilizaremos, primero para resolver y luego para aproximar la solución de (7.1.1)-(7.1.5). La variación del coeficiente de propagación de la onda con las dos variables va a provocar la aparición en x de un problema de Sturm-Liouville como el estudiado en el capítulo anterior y un problema en t como los mostrados en el capítulo 2. La complicación respecto al capítulo 6 será el hecho de que la ecuación obtenida en t será de segundo orden en vez de primer orden. Para las ecuaciones de segundo orden, como se ha citado en numerosas ocasiones a lo largo de este documento, no existe una expresión general que nos dé una solución, como ocurre con las de primer orden. Las fuentes de error en la aproximación serán, pues, múltiples.

Sin duda alguna, el problema se podría haber dificultado añadiendo nuevos términos en la ecuación en derivadas parciales que dieran lugar a otros términos en las respectivas ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas así se han estudiado en los capítulos 3 y 4, por lo que los resultados necesarios para ello ya han sido desarrollados). No lo hemos considerado oportuno, pues como hemos indicado a lo largo de esta tesis, nuestra idea es más la de dar un método de trabajo que la de resolver cada problema concreto.

Además de ser el más complejo, el problema (7.1.1)-(7.1.5) es también el más habitual de entre los estudiados. La variación temporal de los coeficientes, aunque siempre presente, es mucho menos común que la variación espacial, pues ésta puede ser debida a cambios en la composición del material por el que se propaga la onda. [36] da algunos ejemplos de ello, al analizar las imperfecciones que aparecen en una fibra óptica no ideal. En cualquier caso, el método de resolución que presentaremos aquí es totalmente válido tanto si hay variación temporal del coeficiente como si no (en el segundo caso, bastará con usar, por ejemplo, $b(t) = 1$).

El capítulo está organizado de la siguiente manera. El apartado 2 tratará de la unicidad de las soluciones del problema (7.1.1)-(7.1.5). El apartado 3 analizará, a partir de los resultados del apartado segundo del capítulo anterior, la posibilidad de obtener acotaciones más restrictivas para los coeficientes de la expansión en serie de Sturm-Liouville asociada al problema

$$X'' + \lambda^2 a(x) X = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \quad X(0) = X(L) = 0\,, \tag{7.1.8}$$

para una función $h(x)$ de propiedades a determinar.

En el apartado 4, basándonos en las cotas obtenidas en el apartado 3 y en los resultados del teorema 2 del capítulo 2, se construirá una solución exacta de (7.1.1)-(7.1.5) en forma de serie mediante el método de separación de variables. Finalmente, en el apartado 5, dado un error admisible $\epsilon > 0$ y un subdominio compacto $D(T) = \{(x,t);\ 0 \le x \le L\,,\ 0 \le t \le T\}$, afrontaremos la cuestión de cómo construir una solución numérica continua cuyo error respecto a la solución exacta en forma de serie dada por el apartado 4 sea menor que ϵ uniformemente dentro de $D(T)$. Para ello, primero se determinará el índice de truncamiento n_0 que hace que el error de la serie truncada respecto a la solución exacta en serie sea menor que $\frac{\epsilon}{3}$ uniformemente en $D(T)$. Puesto que la solución en serie truncada es incalculable directamente, ya que incluye los autovalores y autofunciones exactos del problema (7.1.8), se determinará:

1. Por un lado, cuáles son los errores admisibles δ y ξ, para los autovalores aproximados $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_{n_0}^2$ y las autofunciones $w_1(x), \ldots, w_{n_0}(x)$, respectivamente, de manera que si $\widetilde{\lambda_n^2}$ es un autovalor aproximado y $\widetilde{w_n(x)}$ es una autofunción aproximada, entonces bajo la condición

$$|\widetilde{\lambda_n^2} - \lambda_n| < \delta\,,\ |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}| < \xi\,,\ 0 \le x \le L\,,\quad 1 \le n \le n_0\,,$$

el error global en la aproximación del problema (7.1.1)-(7.1.5), sea menor que ϵ uniformemente en $D(T)$.

2. Por otro lado, el tamaño de paso h a emplear para poder aproximar la función $T_n(t)$, obtenida por el método de separación de variables para la variable t, por medio de métodos de Stormer de segundo orden, de manera que se asegure la acotación del error citada.

Con los autovalores aproximados $\widetilde{\lambda_n}$, las autofunciones aproximadas $\widetilde{w_n(x)}$ y las aproximaciones obtenidas para $T_n(t)$ se construirá la solución aproximada del problema (7.1.1)-(7.1.5)

7.2 Sobre la unicidad

Tan importante como la determinación de la solución de un problema como (7.1.1)-(7.1.5) es el estudio de su unicidad. Sin una garantía de unicidad, soluciones numéricas distintas podrían aproximar soluciones también diferentes del problema, y por tanto el interés del método numérico que propondremos sería muy limitado. De ahí la necesidad de demostrar la unicidad de la solución del problema planteado.

Comenzaremos con un lema que jugará un papel crucial en este estudio.

Lema 3. *Sea $T(x,t)$ una solución del problema (7.1.1)-(7.1.5) con $f = g = 0$, y supongamos que:*

$$T(x,t_0) = T_t(x,t_0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t_0 \geq 0, \tag{7.2.1}$$

$$b'(t) \text{ tiene signo constante en }]t_0,t_1[. \tag{7.2.2}$$

Entonces $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [t_0,t_1[$.

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos tres casos.

$\boxed{\text{CASO 1:}}$ $\underline{b'(t) < 0 \text{ para } t \in]t_0,t_1[.}$

Sea $T(x,t)$ una solución del problema (7.1.1)-(7.1.5) con $f = g = 0$, satisfaciendo (7.2.1) y (7.2.2), y sea E(t) definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [b(t)T_x^2(x,t) + a(x)T_t^2(x,t)]\, dx, \quad t_0 \leq t < t_1. \tag{7.2.3}$$

Tomando derivadas en (7.2.3), de la regla de Leibniz, las hipótesis e integrando por partes, se tiene

$$E'(t) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^L b'(t)T_x^2\, dx + b(t)\int_0^L T_x T_{xt}\, dx + \int_0^L a(x)T_t T_{tt}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L b'(t)T_x^2\, dx + b(t)[T_x T_t]_0^L - b(t)\int_0^L T_t T_{xx}\, dx + \int_0^L a(x)T_t T_{tt}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L b'(t)T_x^2\, dx + b(t)[T_x(L,t)T_t(L,t) - T_x(0,t)T_t(0,t)].$$

Por tanto

$$E'(t) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^L [b'(t)T_x^2]\, dx \;\leq\; 0, \;\; t \in [t_0, t_1[, \tag{7.2.4}$$

dado que $T_x(x,t_0) = 0$ y $b'(t) < 0$ en $]t_0, t_1[$. Nótese que por (7.2.1) se tiene $E(t_0) = 0$ y por definición $E(t) \geq 0$. De (7.2.4) se concluye $E(t) = 0$ para $t \in [t_0, t_1[$. Por continuidad de $T_x^2(\cdot, t)$ y $T_t^2(\cdot, t)$, y por (7.2.3), resulta

$$T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0 \quad \text{para} \;\; 0 \leq x \leq L, \;\; t_0 \leq t \leq t_1. \tag{7.2.5}$$

De (7.2.1) y (7.2.5) se tiene $T(x,t) = T(x,t_0) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [t_0, t_1[$.

$\boxed{\text{CASO 2:}}$ $\underline{b'(t) > 0 \text{ para }]t_0, t_1[.}$

Dado $T(x,t)$, definamos $H(t)$ como

$$H(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[T_x^2(x,t) + \frac{a(x)T_t^2(x,t)}{b(t)}\right] dx, \ \ t_0 \leq t \leq t_1. \tag{7.2.6}$$

De las hipótesis, la regla de Leibniz y el método de integración por partes, la derivada de $H(t)$ puede escribirse de la forma

$$H'(t) = \int_0^L (T_x T_{xt})\, dx + \frac{1}{b(t)}\int_0^L (a(x)T_t T_{tt})\, dx - \frac{b'(t)}{2b^2(t)}\int_0^L a(x)T_t^2\, dx =$$

$$= [T_x T_t]_0^L - \int_0^L (T_{xx}T_t)\, dx + \int_0^L (T_{xx}T_t)\, dx - \frac{b'(t)}{2b^2(t)}\int_0^L a(x)T_t^2\, dx.$$

$$H'(t) = -\frac{b'(t)}{2b^2(t)}\int_0^L a(x)T_t^2\, dx \leq 0, \ \ t_0 \leq t \leq t_1, \tag{7.2.7}$$

pues $T_t(x,t_0) = 0$ y $b'(t) > 0$ para $t_0 < t < t_1$. De (7.2.1) y (7.2.6) se sigue que $H(t_0) = 0$ y $H(t) \geq 0$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Ya que por (7.2.7) la función $H(t)$ es decreciente en $]t_0, t_1[$, se tiene $H(t) = H(t_0) = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_1$.

Por continuidad de $T_x^2(\cdot,t)$ y $T_t^2(\cdot,t)$ y por (7.2.6) se concluye que $T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0$ para $0 \leq x \leq L$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por tanto $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [t_0, t_1[$.

$\boxed{\text{Caso 3:}}$ $\underline{b'(t) = 0 \text{ para }]t_0, t_1[.}$

En este caso $b(t)$ es una función constante en $[t_0, t_1]$. Dada $T(x,t)$, consideremos la función $E(t)$ definida en (7.2.3) con $b(t) = b > 0$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [b(t)T_x^2(x,t) + a(x)T_t^2(x,t)]\, dx, \quad t_0 \leq t < t_1. \tag{7.2.8}$$

Dado que $T(x,t)$ es solución de (7.1.1)-(7.1.5) con $f = g = 0$, usando el argumento del caso 1, es fácil probar que $E'(t) = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Como $E(t_0) = 0$, se tiene $E(t) = E(t_0) = 0, t_0 \leq t \leq t_1$. Por continuidad de $T_x^2(\cdot,t)$ y $T_t^2(\cdot,t)$ y por (7.2.8) se sigue que $T_x(x,t) = T_t(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [t_0, t_1]$. Por tanto $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [t_0, t_1]$, como queríamos demostrar.

Nota 5. *Bajo la hipótesis (7.1.6) el signo de $b'(t)$ sólo puede cambiar un número finito de veces en un intervalo compacto $[0,T]$.*

Teniendo en cuenta esta resultado, podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema 19. *Bajo la hipótesis (7.1.6), el problema (7.1.1)-(7.1.5) admite una sola solución.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con probar la unicidad en cualquier dominio acotado $D = [0,L] \times [0,T]$, donde T es cualquier número positivo que fijamos. Asimismo, por la linealidad del problema (7.1.1)-(7.1.5), es suficiente con probar que la única solución del problema (7.1.1)-(7.1.5) con $f = g = 0$, es la solución trivial $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$. Si el signo de $b'(t)$ no cambia en [0,T], entonces el resultado queda establecido directamente con el lema 1. Si no, supongamos que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ tal que $b'(t)$ tiene signo constante en $]t_i, t_{i+1}[$ para $0 \leq i \leq N-1$. Aplicando el lema 3 al intervalo $[0, t_1[$, se sigue que $T(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [0,t_1]$.

Aplicando el lema 3 inductivamente, se obtiene $T(x,t) = 0$ y $T_t(x,t) = 0$ para $(x,t) \in [0,L] \times [t_1,t_2]$ y finalmente $T(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$. Con ello queda establecido el resultado.

7.3 Nuevas cotas para los coeficientes de Sturm--Liouville

Consideremos el problema regular de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 a(x) X = 0 , \quad 0 < x < L , \tag{7.3.1}$$

$$X(0) \;=\; X(L) \;=\; 0\;, \tag{7.3.2}$$

donde $a(x)$ es una función continuamente diferenciable que verifica (7.1.7). Señalemos que sustituyendo la hipótesis (7.1.7) por la condición

$$|a'(x)| + |a''(x)| > 0\,, \qquad 0 \le x \le L\,, \tag{7.3.3}$$

la conclusión y demostración del teorema 2 siguen siendo ciertas. De este resultado, si $\lambda_n > 0$, y $\{z_n, w_n\}$ es el sistema fundamental de soluciones de

$$X'' \;+\; \lambda_n^2\, a(x)\, X \;=\; 0\;, \quad 0 \le x \le L\,, \tag{7.3.4}$$

que satisface

$$z_n(0) = 1\,, \quad z_n'(0) = 0\,, \quad w_n(0) = 0\,, \quad w_n'(0) = 1\,, \tag{7.3.5}$$

entonces

$$|\, w_n(x)\, | \;\le\; \frac{M_x}{\lambda_n\,\sqrt{a(0)}}\,, \quad |\, w_n'(x)\, | \;\le\; \frac{M_x\sqrt{A(0,L)}}{\sqrt{a(0)}}\,. \tag{7.3.6}$$

donde:

$$A(0,L) = \max\{a(x)\,,\, 0 \le x \le L\}\,, \tag{7.3.7}$$

y

CASO 1

$$M_x = 1 \quad si \quad a(x) \quad es \quad creciente \quad en \quad [0,L]\,. \tag{7.3.8}$$

CASO 2

$$M_x = \left[\frac{a(0)}{a(L)}\right]^{1/2} \quad si \quad a(x) \quad es \quad decreciente \quad en \quad [0,L]\,. \tag{7.3.9}$$

CASO 3 Existe una partición $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L$ tal que $a(x)$ es creciente en $[0, x_0]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$, $a(x)$ es decreciente en $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{2k}, x_{2k+1}]$, con $x_N = x_{2k+1}$ o $x_N = x_{2k+2}$. En ese caso

$$M_x = \left[\frac{a(x_0)a(x_2)\cdots a(x_{2k})}{a(x_1)a(x_3)\cdots a(x_{2k+1})}\right]^{1/2}. \tag{7.3.10}$$

CASO 4 Existe una partición $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L$ tal que $a(x)$ es decreciente en $[0, x_0]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ y $a(x)$ es creciente en $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{2k-1}, x_{2k}]$, con $x_N = x_{2k}$ o $x_N = x_{2k+1}$. En ese caso

$$M_x = \left[\frac{a(0)a(x_1)\cdots a(x_{2k-1})}{a(x_0)a(x_2)\cdots a(x_{2k})}\right]^{1/2}. \tag{7.3.11}$$

Si $X_n(x)$ es una autofunción de (7.3.1)-(7.3.2) correspondiente al n-ésimo autovalor λ_n^2, entonces de (7.3.5) se sigue que $X_n(x) = \alpha\, w_n(x)$, para cierta constante α. Sea $h(x)$ una función continua con derivada continua a trozos en $[0, L]$, y sea

$$c_n = \frac{\int_0^L a(x)\, w_n(x)\, h(x)\, dx}{\int_0^L a(x)\, w_n^2\, dx}, \quad n \geq 1, \tag{7.3.12}$$

el n-ésimo coeficiente de Sturm-Liouville de $h(x)$ respecto al sistema de autovalores $\{w_n(x)\}_{n\geq 1}$ del problema (7.3.1)-(7.3.2).

En este apartado trataremos de mejorar la cota para c_n obtenida en (6.3.30) aumentando las condiciones a imponer a la función $h(x)$. Así de (6.3.12) sabemos que si $h(0) = h(L) = 0$ entonces

$$\int_0^L a(x)\, w_n(x)\, h(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^L w_n'(x)\, h'(x)\, dx. \tag{7.3.13}$$

Si además $h'(x)$ tiene también derivada continua a trozos $h^{(2)}(x)$, entonces, de (7.3.5) y (7.3.13) resulta

$$\begin{aligned} \int_0^L a(x)\, w_n(x)\, h(x)\, dx &= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^L w_n(x)\, h^{(2)}(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^L w_n''(x)\, \frac{h''(x)}{a(x)}\, dx, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

De (7.3.14) podemos seguir de dos maneras:

1. Asumiendo directamente que $\frac{h''(x)}{a(x)}$ es de variación acotada en $[0, L]$.

   En ese caso, siguiendo un argumento similar al empleado en (6.3.12)-(6.3.15), definiendo

$$H_0(x) = \frac{h''(x)}{a(x)}\,, \qquad 0 \leq x \leq L\,, \tag{7.3.15}$$

   denotando por $v(H_0)$ a la variación total de $H_0(x)$ entre 0 y L y tomando

$$V(H_0) = v(H_0) + |H_0(0)| + |H_0(L)|\,, \tag{7.3.16}$$

   se tiene

$$\left| \int_0^L a(x) w_n(x) h(x)\, dx \right| \leq \frac{\epsilon + V(H_0) \max\{|w_n'(x)|\,;\ 0 \leq x \leq L\}}{\lambda_n^4}\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{7.3.17}$$

   para cualquier $\epsilon > 0$.

   De (7.3.6) y (7.3.17) se concluye finalmente

$$\left| \int_0^L a(x) w_n(x) h(x)\, dx \right| \leq \frac{V(H_0) M_x \sqrt{A(0,L)}}{\sqrt{a(0)}\lambda_n^4}\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{7.3.18}$$

   De este resultado y de la acotación inferior del denominador de (7.3.12) encontrada en (6.3.29), totalmente aplicable a esta situación, se obtiene

$$|\, c_n \,| \leq \frac{2V(H_0) M_x^3}{L} \sqrt{\frac{A(0,L)}{a(0)}} \frac{1}{\lambda_n^2}\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{7.3.19}$$

2. Asumiendo que $H_0(x)$ es derivable, cumple $H_0(0) = H_0(L) = 0$ y su derivada es continua a trozos y de variación acotada en $[0, L]$.

En ese caso, si definimos

$$H_1(x) = \left[\frac{h''(x)}{a(x)}\right]' = \frac{h^{(3)}(x)a(x) - h''(x)a'(x)}{a^2(x)}\,, \qquad 0 \le x \le L\,, \tag{7.3.20}$$

de (7.3.14) se tiene claramente que

$$\int_0^L a(x)\, w_n(x)\, h(x)\, dx = -\frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^L w_n'(x)\, H_1(x)\, dx\,. \tag{7.3.21}$$

De (7.3.21), como antes, siguiendo un argumento similar al usado en (6.3.12)-(6.3.15), y denotando por $v(H_1)$ a la variación total de $H_1(x)$ en $[0, L]$, dado que por (7.3.5) $w_n(0) = w_n(L) = 0$, se llega a

$$\left| \int_0^L a(x) w_n(x) h(x)\, dx \right| \le \frac{\epsilon + v(H_1) \max\{|w_n(x)|\,;\ 0 \le x \le L\}}{\lambda_n^4}\,, \qquad n \ge 1\,, \tag{7.3.22}$$

para cualquier $\epsilon > 0$.

Finalmente, de (7.3.6) y (7.3.22) se llega a

$$\left| \int_0^L a(x) w_n(x) h(x)\, dx \right| \le \frac{v(H_1) M_x}{\sqrt{a(0)}\lambda_n^5}\,, \qquad n \ge 1\,. \tag{7.3.23}$$

De (7.3.23) y de la acotación inferior del denominador de (7.3.12) encontrada en (6.3.29), se obtiene

$$|\, c_n \,| \le \frac{2v(H_1) M_x^3}{L\sqrt{a(0)}} \frac{1}{\lambda_n^3}\,, \qquad n \ge 1\,. \tag{7.3.24}$$

Resumiendo lo anterior, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 20. *Sea h una función continuamente diferenciable en $[0, L]$ tal que $h(0) = h(L) = 0$ y sea $a(x)$ una función continuamente diferenciable que satisface (7.1.7) o (7.3.3).*

1. *Si la función $H_0(x)$ definida por (7.3.15) es continua a trozos y de variación acotada en $[0, L]$ entonces los coeficientes de Sturm-Liouville $c_n(h)$ dados por (7.3.12) verifican (7.3.19).*

2. *Si la función $H_0(x)$ definida en (7.3.15) es derivable y cumple $H_0(0) = H_0(L) = 0$ y su derivada $H_1(x)$ definida en (7.3.20) es continua a trozos y de variación acotada en $[0, H]$, entonces los coeficientes de Sturm-Liouville $c_n(h)$ dados por (7.3.12) verifican (7.3.24).*

7.4 Soluciones teóricas en forma de serie

Buscando soluciones del problema (7.1.1)-(7.1.5) de la forma

$$u(x,t) \;=\; X(x)\,T(t)\,, \tag{7.4.1}$$

queda claro que $X(x)$ y $T(t)$ deben verificar

$$X'' + \lambda^2 a(x) X = 0\,, \quad X(0) = X(L) = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \tag{7.4.2}$$

$$T'' + \lambda^2 b(t) T = 0\,, \quad t > 0\,. \tag{7.4.3}$$

El conjunto de autofunciones del problema de Sturm-Liouville (7.4.2) está formado por las funciones $\{w_n(x)\}_{n\geq 1}$ introducidas en el apartado 3, que están asociadas a los autovalores $\{\lambda_n^2\}_{n\geq 1}$. Si $a(x)$ verifica las hipótesis (7.1.7) o (7.3.3) y M_x viene definido por (7.3.8)-(7.3.11), dependiendo del caso, entonces del teorema 2 del capítulo 2 se sigue que

$$\left.\begin{array}{r} |w_n(x)| \leq \frac{M}{\lambda_n\sqrt{a(0)}}\,, \quad |w_n'(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{a(0)}}\sqrt{A(0,L)}\,, \\[2ex] A(0,L) \;=\; \max\{a(x)\,; \;\; 0\leq x\leq L\}\,, \quad 0\leq x\leq L\,, \quad n\geq 1\,. \end{array}\right\} \tag{7.4.4}$$

Bajo la hipótesis (7.1.6), por el teorema 2, para cada entero positivo $n \geq 1$, la ecuación

$$T'' + \lambda_n^2 b(t) T = 0\,, \quad t > 0\,, \tag{7.4.5}$$

admite un sistema fundamental de soluciones en $[0,T]$, denotado por $\{Tz_n(t), Tw_n(t)\}$, tal que

$$Tz_n(0) = 1, \quad Tz_n'(0) = 0, \quad Tw_n(0) = 0, \quad Tw_n'(0) = 1, \tag{7.4.6}$$

$$\left.\begin{array}{cc} |Tz_n(t)| \leq M_t\,, & |Tw_n(t)| \leq \frac{M_t}{\lambda_n\sqrt{b(0)}}\,, \\[2ex] |Tz_n'(t)| \leq \lambda_n M_t\sqrt{B(T)}\,, & |Tw_n'(t)| \leq \frac{M_t\sqrt{B(T)}}{\sqrt{b(0)}}\,; \\[2ex] \multicolumn{2}{r}{B(T) \;=\; \max\{b(t)\,;0\leq t\leq T\}\,, \quad 0\leq t\leq T\,, \quad n\geq 1\,,} \end{array}\right\} \tag{7.4.7}$$

donde M_t es una constante positiva cuyo valor depende de $b(t)$ de la siguiente manera

CASO 1

$$M_t = 1 \quad si \quad b(t) \quad es \quad creciente \quad en \quad [0,T]\,. \tag{7.4.8}$$

CASO 2

$$M_t = \left[\frac{b(0)}{b(T)}\right]^{1/2} \quad si \quad b(t) \quad es \quad decreciente \quad en \quad [0,T]\,. \tag{7.4.9}$$

CASO 3. Existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ tal que $b(t)$ es creciente en $[0,t_0]$, $[t_1,t_2]$, $\ldots$, $[t_{2k+1},t_{2k+2}]$, $b(t)$ es decreciente en $[t_0,t_1]$, $[t_2,t_3]$, $\ldots$, $[t_{2k},t_{2k+1}]$, con $t_N = t_{2k+1}$ o $t_N = t_{2k+2}$. En ese caso

$$M_t = \left[\frac{b(t_0)b(t_2)\cdots b(t_{2k})}{b(t_1)b(t_3)\cdots b(t_{2k+1})}\right]^{1/2}. \tag{7.4.10}$$

CASO 4. Existe una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ tal que $b(t)$ es decreciente en $[0,t_0]$, $[t_1,t_2]$, $\ldots$, $[t_{2k},t_{2k+1}]$ y $b(t)$ es creciente en $[t_0,t_1]$, $[t_2,t_3]$, $\ldots$, $[t_{2k-1},t_{2k}]$, con $t_N = t_{2k}$ o $t_N = t_{2k+1}$. En ese caso

$$M_t = \left[\frac{b(0)b(t_1)\cdots b(t_{2k-1})}{b(t_0)b(t_2)\cdots b(t_{2k})}\right]^{1/2}. \tag{7.4.11}$$

Por superposición de soluciones $u_n(x,t)$ de la forma

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = w_n(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\}\,, \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T, \tag{7.4.12}$$

se obtiene una serie candidata a solución del problema (7.1.1)-(7.1.5) definida por

$$u(x,t) = \sum_{n\ge 1} c_n u_n(x,t) = \sum_{n\ge 1} c_n w_n(x)\{a_n T z_n(t) + b_n T w_n(t)\}\,. \tag{7.4.13}$$

Si imponemos a (7.4.13) las condiciones iniciales (7.1.4) y (7.1.5) y suponemos por un momento que podemos derivar respecto a la variable t, tomando derivadas parciales en (7.4.13), resulta

$$f(x) = u(x,0) = \textstyle\sum_{n\geq 1} c_n w_n(x)\,,$$
$$g(x) = u_t(x,0) = \textstyle\sum_{n\geq 1} d_n w_n(x)\,. \tag{7.4.14}$$

Por tanto los coeficientes a_n, b_n deben estar definidos por

$$c_n = \frac{\int_0^L a(x)w_n(x)f(x)\,dx}{\int_0^L a(x)w_n^2(x)\,dx}\,, \qquad d_n = \frac{\int_0^L a(x)w_n(x)g(x)\,dx}{\int_0^L a(x)w_n^2(x)\,dx}\,. \tag{7.4.15}$$

Estudiemos ahora las condiciones bajo las cuales la serie $u(x,t)$ definida por (7.4.13)-(7.4.15) es una solución rigurosa (no sólo formal) del problema (7.1.1)-(7.1.5). Para ello necesitaremos previamente algunas acotaciones para los coeficientes de Sturm-Liouville (7.4.15) y los propios autovalores λ_n.

Si $f(x)$ es una función continuamente diferenciable en $[0,L]$ tal que $f(0) = f(L) = 0$, entonces, de [10, p. 57] se deduce

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} c_n w_n(x)\,. \tag{7.4.16}$$

Además, si la función $F_0(x)$ definida por

$$F_0(x) = \frac{f''(x)}{a(x)}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \tag{7.4.17}$$

es derivable en $[0,L]$ y cumple $F_0(0) = F_0(L) = 0$, y su derivada

$$F_1(x) = \frac{f^{(3)}(x)a(x) - f''(x)a'(x)}{a^2(x)}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \tag{7.4.18}$$

es continua a trozos y de variación acotada en $[0,L]$ entonces, por el teorema 20, los coeficientes de Sturm-Liouville c_n dados por (7.4.15) verifican

$$|c_n| \leq \frac{2v(F_1)M_x^3}{L\sqrt{a(0)}}\frac{1}{\lambda_n^3}\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{7.4.19}$$

donde $v(F_1)$ es la variación total de $F_1(x)$ en $[0,L]$.

Asimismo, si $g(x)$ es una función continuamente diferenciable en $[0, L]$ tal que $g(0) = g(L) = 0$, entonces, por [10, p. 57], se tiene también

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} d_n w_n(x)\,. \tag{7.4.20}$$

En ese caso, si la función $G_0(x)$ definida por

$$G_0(x) = \frac{g''(x)}{a(x)}\,, \quad 0 \leq x \leq L\,, \tag{7.4.21}$$

es continua a trozos y de variación acotada en $[0, L]$ entonces, por el teorema 20, los coeficientes de Sturm-Liouville d_n dados por (7.4.15) verifican

$$|d_n| \,\leq\, \frac{2V(G_0)M_x^3}{L}\sqrt{\frac{A(0,L)}{a(0)}}\frac{1}{\lambda_n^2}\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{7.4.22}$$

donde $V(G_0)$ se define como

$$V(G_0) = v(G_0) + |G_0(0)| + |G_0(L)|\,, \tag{7.4.23}$$

y $v(G_0)$ es la variación total de $G_0(x)$ en $[0, L]$.

Por otro lado, si introducimos la constante positiva

$$a(0, L) = \min\{a(x);\; 0 \leq x \leq L\,\}\,, \tag{7.4.24}$$

entonces, de [47, p. 264-265], (7.4.4) y (7.4.24) resulta

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2 A(0,L)} \leq \lambda_n^2 \leq \frac{n^2\pi^2}{L^2 a(0,L)} \;\;,\;\; n \geq 1\,, \tag{7.4.25}$$

expresión que en adelante nos será de gran utilidad a la hora de acotar los términos donde aparezcan los autovalores λ_n.

Ahora, de (7.4.4), (7.4.7), (7.4.12), (7.4.19), (7.4.22) y (7.4.25) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right| &\leq \\
&\leq \frac{M_x}{\lambda_n\sqrt{a(0)}}\left[\frac{2v(F_1)M_x^3}{L\sqrt{a(0)}}\frac{1}{\lambda_n^2}\sqrt{B(0,L)}M_t + \frac{2V(G_0)M_x^3}{L\sqrt{a(0)b(0)}}\frac{\sqrt{A(0,L)B(0,L)}}{\lambda_n^2}M_t\right] \\
&\leq \frac{K_1}{n^3}\,, \quad n \geq 1, \;\; 0 \leq x \leq L, \;\; 0 \leq t \leq T\,, \qquad (7.4.26)
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\partial u_n}{\partial t} \qquad (7.4.27)$$

converge uniformemente en $[0,L]\times[0,T]$. Por el teorema de derivación de series de funciones (ver [8, p. 402]) se deduce que la serie $u(x,t)$ definida en (7.4.13) es derivable respecto a t y además

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} w_n(x)\{c_nTz_n'(t) + d_nTw_n'(t)\}\,, \qquad 0 \leq t \leq T, \; 0 \leq x \leq L\,. \qquad (7.4.28)$$

Los términos que aparecen al derivar $u_n(x,t)$ dos veces respecto a t, por (7.4.5), son

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2} &= w_n(x)\{c_nTz_n''(t) + d_nTw_n''(t)\} \\
&= -w_n(x)b(t)\lambda_n^2\{c_nTz_n(t) + d_nTw_n(t)\}\,, \\
& \quad 0 \leq t \leq T, \; 0 \leq x \leq L\,, n \geq 1\,. \qquad (7.4.29)
\end{aligned}
$$

De (7.4.4), (7.4.7), (7.4.12), (7.4.19), (7.4.22), (7.4.25) y (7.4.29) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2}\right| &\leq \\
&\leq \frac{M_xB(T)\lambda_n}{\sqrt{a(0)}}\left\{\frac{2v(F_1)M_x^3M_t}{L\sqrt{a(0)}}\frac{1}{\lambda_n^3} + \frac{2V(G_0)M_x^3M_t\sqrt{A(0,L)}}{L\sqrt{a(0)b(0)}}\frac{1}{\lambda_n^3}\right\} \\
&\leq \frac{K_2}{n^2}\,, \quad n \geq 1, \;\; 0 \leq x \leq L, \;\; 0 \leq t \leq T\,, \qquad (7.4.30)
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \tag{7.4.31}$$

converge uniformemente en $[0, L] \times [0, T]$. Por el teorema de derivación de series de funciones se tiene que la serie $u(x, t)$ definida en (7.4.13) es dos veces derivable respecto a t y se cumple

$$u_{tt}(x,t) \;=\; \sum_{n\geq 1} w_n(x)\{c_n T z_n''(t) + d_n T w_n''(t)\}\,, \qquad 0 \leq t \leq T,\; 0 \leq x \leq L\,. \tag{7.4.32}$$

Por otro lado, de (7.4.4), (7.4.7), (7.4.12), (7.4.19), (7.4.22) y (7.4.25) se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right| &\leq \\ &\leq M_x \sqrt{\frac{A(0,L)}{a(0)}} \left[\frac{2v(F_1) M_t M_x^3}{L\sqrt{a(0)}} \frac{1}{\lambda_n^3} + \frac{2V(G_0) M_x^3 M_t \sqrt{A(0,L)}}{L\sqrt{a(0)b(0)}} \frac{1}{\lambda_n^3}\right] \\ &\leq \frac{K_3}{n^3}\,, \qquad n \geq 1,\;\; 0 \leq x \leq L,\;\; 0 \leq t \leq T\,, \end{aligned} \tag{7.4.33}$$

de donde se deduce que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial x} \tag{7.4.34}$$

converge uniformemente en $[0, L] \times [0, T]$. Por el teorema de derivación de series de funciones (ver [8, p. 402]) se deduce que la serie $u(x, t)$ definida en (7.4.13) es derivable respecto a x y además

$$u_x(x,t) \;=\; \sum_{n\geq 1} w_n'(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\}\,, \qquad 0 \leq t \leq T,\; 0 \leq x \leq L\,. \tag{7.4.35}$$

Finalmente, los términos que aparecen al derivar dos veces $u_n(x, t)$ respecto a x, por

(7.4.2), son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} &= w_n''(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\} \\
&= -w_n(x) b(t) \lambda_n^2 \{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\}\,, \\
& \qquad 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq L\,, n \geq 1\,. \qquad (7.4.36)
\end{aligned}$$

De (7.4.4), (7.4.7), (7.4.12), (7.4.19), (7.4.22), (7.4.25) y (7.4.36), repitiendo el mismo argumento usado en (7.4.29)-(7.4.32), se concluye que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \qquad (7.4.37)$$

converge uniformemente en $[0,L] \times [0,T]$. Por el teorema de derivación de series de funciones se tiene que la serie $u(x,t)$ definida en (7.4.13) es dos veces derivable respecto a x y además

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n\geq 1} w_n''(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\}\,, \qquad 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq L\,. \qquad (7.4.38)$$

De (7.4.2), (7.4.5), (7.4.32) y (7.4.38), para $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$, se tiene

$$\begin{aligned}
u_{xx} - \frac{a(x)}{b(t)} u_{tt} &= \sum_{n\geq 1} w_n''(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\} \\
&\quad - \frac{a(x)}{b(t)} \sum_{n\geq 1} w_n(x)\{c_n T z_n''(t) + d_n T w_n''(t)\} \\
&= -a(x) \sum_{n\geq 1} \lambda_n^2 w_n(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\} \\
&\quad + \frac{a(x)}{b(t)} b(t) \sum_{n\geq 1} \lambda_n^2 w_n(x)\{c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)\} \\
&= 0\,. \qquad (7.4.39)
\end{aligned}$$

Además, de (7.4.16) y (7.4.20) se sigue que

$$u(x,t) = f(x)\,, \quad u_t(x,0) = g(x)\,, \quad 0 \le x \le L\,. \tag{7.4.40}$$

Resumiendo, podemos establecer el siguiente resultado

Teorema 21. *Si $a(x)$ y $b(t)$ son funciones positivas que satisfacen (7.1.7) (o (7.3.3)) y (7.1.6), respectivamente, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuamente diferenciables en $[0,L]$ tales que $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$ y además*

1. *La función $F_0(x)$ definida en (7.4.17) es derivable en $[0,L]$, cumple $F_0(0) = F_0(L) = 0$ y su derivada $F_1(x)$ definida en (7.4.18) es continua a trozos y se variación acotada en $[0,L]$.*
2. *La función $G_0(x)$ definida en (7.4.21) es continua a trozos en y de variación acotada en $[0,L]$,*

entonces la serie $u(x,t)$ definida por (7.4.13)-(7.4.15) es una solución del problema (7.1.1)-(7.1.5).

7.5 Soluciones numéricas continuas

La serie $u(x,t)$ proporcionada por el teorema 21, como siempre, presenta dos serios obstáculos desde el punto de vista computacional. En primer lugar, la infinidad de la serie, y en segundo, el hecho de que ni los autovalores λ_n ni las autofunciones $w_n(x)$ ni el sistema fundamental de soluciones de (7.4.5) $\{Tz_n(t), Tw_n(t)\}$ nos son conocidos. Ello motiva la necesidad de obtener soluciones numéricas que aproximen la solución exacta dada por (7.4.13)-(7.4.15), en cualquier subdominio compacto $D(T) = [0,L] \times [0,T]$.

La aproximación se realizará en dos pasos fundamentales:

1. Truncamiento de la serie (7.4.13) para obtener una suma finita.
2. Aproximación de los términos de (7.4.13), lo que pasa por

   - Aproximación de las autofunciones $w_n(x)$ y los autovalores λ_n.

- Aproximación del sistema fundamental de soluciones $\{Tz_n(t), Tw_n(t)\}$.
- Aproximación de los coeficientes c_n, d_n.

Comencemos por el truncamiento de la serie.

7.5.1 Truncamiento de la serie

Buscamos un entero n_0 de modo que

$$u(n_0, x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} w_n(x)\{c_n Tz_n(t) + d_n Tw_n(t)\} \tag{7.5.1}$$

cumpla

$$|u(x,t) - u(n_0, x, t)| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad (x,t) \in D(T). \tag{7.5.2}$$

De (7.4.4), (7.4.7), (7.4.19), (7.4.22) y (7.4.25) se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n>n_0} w_n(x)\{c_n Tz_n(t) + d_n Tw_n(t)\}\right| \leq \\
&\leq \sum_{n>n_0} \frac{M_x}{\lambda_n\sqrt{a(0)}}\left\{\frac{2v(F_1)M_x^3M_t}{L\sqrt{a(0)}}\frac{1}{\lambda_n^3} + \frac{2V(G_0)M_x^3M_t\sqrt{A(0,L)}}{L\sqrt{a(0)b(0)}}\frac{1}{\lambda_n^3}\right\} \\
&\leq \sum_{n>n_0} \frac{2M_x^4M_t}{a(0)L}\left\{\frac{v(F_1)A^2(0,L)L^4}{n^4\pi^4} + \frac{V(G_0)A^{\frac{5}{2}}(0,L)L^4}{\sqrt{b(0)}n^4\pi^4}\right\} \\
&= \frac{2M_x^4M_tL^3A^2(0,L)}{\pi^4 a(0)}\left(v(F_1) + \frac{V(G_0)\sqrt{A(0,L)}}{\sqrt{b(0)}}\right)\sum_{n>n_0}\frac{1}{n^4},
\end{aligned} \tag{7.5.3}$$

para $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$. Por otro lado, de [8, p.479] sabemos que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{7.5.4}$$

De aquí y de (7.5.3), si definimos n_0 como el primer entero a partir del cual

$$\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n^4} > \frac{\pi^4}{90} - \epsilon\frac{\pi^4 a(0)}{6M_x^4M_tL^3A^2(0,L)}\left(v(F_1) + \frac{V(G_0)\sqrt{A(0,L)}}{\sqrt{b(0)}}\right)^{-1} \tag{7.5.5}$$

verificaremos (7.5.2).

7.5.2 Aproximación de los términos de $u(x,t)$

Una vez truncada la serie $u(x,t)$, trataremos en este apartado de aproximar los términos que componen la suma finita obtenida.

Del capítulo anterior sabemos que existen diversos métodos para aproximar los autovalores y autofunciones de (7.4.2). Con todos ellos podemos encontrar aproximaciones $\widetilde{\lambda}$ y $\widetilde{w_n(x)}$ de λ_n y $w_n(x)$, respectivamente, de modo que para cualesquiera constantes positivas δ, ξ se cumpla

$$|\lambda_n^2 - \widetilde{\lambda_n^2}| < \delta\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \tag{7.5.6}$$

$$|w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}| < \xi\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \tag{7.5.7}$$

con $\widetilde{\lambda_n}$ cumpliendo, como λ_n en (7.4.25)

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2A(0,L)} \le \widetilde{\lambda_n^2} \le \frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}\;, \quad 1 \le n \le n_0\,, \tag{7.5.8}$$

y $\widetilde{w_n(x)}$ verificando a su vez, como $w_n(x)$ en (7.4.4)

$$|\widetilde{w_n(x)}| < \frac{M_x}{\lambda_n\sqrt{a(0)}} \le \frac{M_xL}{n\pi}\sqrt{\frac{A(0,L)}{a(0)}}\;, \quad 0 \le x \le L,\ 1 \le n \ge n_0\,. \tag{7.5.9}$$

La aproximación del sistema fundamental de soluciones de (7.4.5) $\{Tz_n(t), Tw_n(t)\}$ es un poco más compleja, pues tenemos dos fuentes de error:

- Por un lado, no conocemos el valor exacto de λ_n, sino sólo de sus aproximaciones $\widetilde{\lambda_n}$. Por tanto, ni aunque supiéramos resolver (7.4.5) con exactitud las funciones obtenidas serían las $\{Tz_n(t), Tw_n(t)\}$ buscadas: sólo sus aproximaciones $\{\widetilde{Tz_n(t)}, \widetilde{Tw_n(t)}\}$, a su vez soluciones exactas de (7.4.5) usando $\widetilde{\lambda_n}$ en vez de λ_n, es decir, soluciones de

$$T_n'' + \widetilde{\lambda_n^2}b(t)T_n(t) = 0\,, \quad t \ge 0,\ 1 \le n \le n_0\,. \tag{7.5.10}$$

- Por otro lado, ni siquiera sabemos resolver exactamente (7.5.10). Por ello lo que haremos será encontrar aproximaciones $TZ_n(t)$ y $TW_n(t)$ de $\widetilde{Tz_n(t)}$ y $\widetilde{Tw_n(t)}$, respectivamente, con un error conocido. El proceso a seguir es exactamente el mismo que el presentado en el capítulo 2, por lo que los resultados allí obtenidos serán ampliamente utilizados.

Para encontrar el error cometido al aproximar $\{Tz_n(t), Tw_n(t)\}$ por $\{\widetilde{Tz_n(t)}, \widetilde{Tw_n(t)}\}$, nótese que definiendo

$$Z_n(t) = \begin{bmatrix} Tz_n(t) \\ Tz'_n(t) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{Z_n(t)} = \begin{bmatrix} \widetilde{Tz_n(t)} \\ \widetilde{Tz'_n(t)} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq n \leq n_0\,, \tag{7.5.11}$$

se tendrá, de (7.4.5), (7.4.6) y (7.5.10), que

$$\widetilde{Z_n}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\widetilde{\lambda_n^2} b(t) & 0 \end{bmatrix} \widetilde{Z_n(t)} = \widetilde{A_n(t)}\widetilde{Z_n(t)}, \quad \widetilde{Z_n(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Z'_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 b(t) & 0 \end{bmatrix} Z_n(t) = A_n(t) Z_n(t), \quad Z_n(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.5.12}$$

$$t \geq 0\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,.$$

Por tanto, de (7.5.12), podemos escribir

$$\widetilde{Z_n(t)} - Z_n(t) = \int_0^t \widetilde{A_n(s)}[\widetilde{Z_n(s)} - Z_n(s)]\,ds + \int_0^t [\widetilde{A_n(s)} - A_n(s)] Z_n(s)\,ds\,.$$

Tomando normas ($\|\cdot\|_2$) y fijando $t \in [0, T]$, se obtiene, de (7.4.7) y (7.5.6), que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{Z_n(t)} - Z_n(t)\| &\leq \int_0^t \|\widetilde{A_n(s)}\| \|[\widetilde{Z_n(s)} - Z_n(s)]\|\,ds + \left| \int_0^t b(s)(\lambda_n^2 - \widetilde{\lambda_n^2}) Tz_n(s)\,ds \right| \\ &\leq \int_0^t \|\widetilde{A_n(s)}\| \|[\widetilde{Z_n(s)} - Z_n(s)]\|\,ds + \delta B(T) M_t T \end{aligned} \tag{7.5.13}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq n \leq n_0\,.$$

Aplicando a (7.5.13) el teorema de Bellman [46, p.95], resulta, por (1.1.2) y (7.4.25), que

$$|Tz_n(t) - \widetilde{Tz_n(t)}| \leq \delta B(T)TM_t \exp\left[T\sqrt{1 + \frac{n^4\pi^4 B^2(T)}{L^4 a^2(0,L)}}\right] , \tag{7.5.14}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq n \leq n_0 .$$

Un desarrollo similar para $Tw_n(t)$ nos da

$$|Tw_n(t) - \widetilde{Tw_n(t)}| \leq \delta \frac{B(T)TM_t L\sqrt{A(0,L)}}{n\sqrt{b(0)}\pi} \exp\left[T\sqrt{1 + \frac{n^4\pi^4 B^2(T)}{L^4 a^2(0,L)}}\right] , \tag{7.5.15}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq n \leq n_0 .$$

Trataremos ahora de aproximar $\widetilde{Tz_n(t)}$ y $\widetilde{Tw_n(t)}$. El proceso a seguir, como hemos indicado antes, será el utilizado en el capítulo 2: primero aproximaremos las funciones $\widetilde{Tz_n(t)}$ y $\widetilde{Tw_n(t)}$ en una malla de puntos por medio de la fórmula de Stormer de segundo orden presentada en (2.4.3)-(2.4.7) y después interpolaremos por medio de splines lineales los valores obtenidos.

Así pues, si $\{Tz_{m,n}\}_{m=0}^N$ y $\{Tw_{m,n}\}_{m=0}^N$ son las aproximaciones de $\widetilde{Tz_n(t)}$ y $\widetilde{Tw_n(t)}$, respectivamente, en $t_m = mh$, $0 \leq m \leq N$, siendo h el tamaño de paso de la malla y $t_N = T$, calculadas por las fórmulas

$$\begin{gathered} Tz_{m+2,n} - 2Tz_{m+1,n} + Tz_{m,n} = -h^2\widetilde{\lambda_n^2} b(t_{m+1})Tz_{m+1,n}, \\ Tz_{0,n} = 1, \qquad Tz_{1,n} = 1 \\ 0 \leq m \leq N-2, \qquad 1 \leq n \leq n_0, \end{gathered} \tag{7.5.16}$$

y

$$\begin{gathered} Tw_{m+2,n} - 2Tw_{m+1,n} + Tw_{m,n} = -h^2\widetilde{\lambda_n^2} b(t_{m+1})Tw_{m+1,n}, \\ Tw_{0,n} = 0, \qquad Tw_{1,n} = h \\ 0 \leq m \leq N-2, \qquad 1 \leq n \leq n_0, \end{gathered} \tag{7.5.17}$$

entonces, de (2.4.8)-(2.4.14), (7.5.16) y (7.5.17), si $0 < h < 1$ y definimos

$$B_i(T) = \max\{|b^{(i)}(t)|\,,\ 0 \le t \le T\,, i = 1, 2\}\,, \tag{7.5.18}$$

el error de discretización

$$\begin{aligned} ez_{m,n} &= Tz_{m,n} - \widetilde{Tz_n(t_m)}\,, \quad 0 \le m \le N\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \\ ew_{m,n} &= Tw_{m,n} - \widetilde{Tw_n(t_m)}\,, \quad 0 \le m \le N\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \end{aligned} \tag{7.5.19}$$

cumplirá

$$\begin{aligned} |ez_{m,n}| &\le hE_{1,n}\,, \quad 0 \le m \le N\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \\ |ew_{m,n}| &\le hE_{2,n}\,, \quad 0 \le m \le N\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \end{aligned} \tag{7.5.20}$$

siendo

$$E_{1,n} = 4(T+1)M_t B(T)\widetilde{\lambda_n^2} + \frac{(T+1)^2}{24}\widetilde{\lambda_n^2}$$

$$\times \left\{ \left[B_2(T) + \widetilde{\lambda_n^2} B^2(T) \right] M_t + 2B_1(T)M_t\sqrt{B(T)}\widetilde{\lambda_n} \right\} \exp\left((T+1)^2 B(T)\widetilde{\lambda_n^2} \right)\,,$$

$$1 \le n \le n_0\,, \tag{7.5.21}$$

y

$$E_{2,n} = 4(T+1)\frac{M_t B(T)}{\sqrt{b(0)}}\widetilde{\lambda_n} + \frac{(T+1)^2}{24}\widetilde{\lambda_n^2}$$

$$\times \left\{ \left[B_2(T) + \widetilde{\lambda_n^2} B^2(T) \right] \frac{M_t}{\widetilde{\lambda_n}\sqrt{b(0)}} + 2B_1(T)M_t\sqrt{\frac{B(T)}{b(0)}} \right\} \exp\left((T+1)^2 B(T)\widetilde{\lambda_n^2} \right)\,,$$

$$1 \le n \le n_0\,. \tag{7.5.22}$$

Aplicando (7.4.25) a (7.5.21) y (7.5.22) podemos escribir

$$E_{1,n} = 4(T+1)M_tB(T)\frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)} + \frac{(T+1)^2}{24}\frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}\left\{\left[B_2(T) + \frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}B^2(T)\right]M_t\right.$$

$$\left. +2B_1(T)M_t\sqrt{B(T)}\frac{n\pi}{L\sqrt{a(0,L)}}\right\}\exp\left((T+1)^2B(T)\frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}\right) ,$$

$$1 \leq n \leq n_0 \, , \tag{7.5.23}$$

y

$$E_{2,n} = 4(T+1)\frac{M_tB(T)}{\sqrt{b(0)}}\frac{n\pi}{L\sqrt{a(0,L)}} + \frac{(T+1)^2}{24}\frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}\left\{\left[B_2(T) + \frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}B^2(T)\right]\right.$$

$$\left. \times \frac{M_tL\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{b(0)}} + 2B_1(T)M_t\sqrt{\frac{B(T)}{b(0)}}\right\}\exp\left((T+1)^2B(T)\frac{n^2\pi^2}{L^2a(0,L)}\right) ,$$

$$1 \leq n \leq n_0 \, . \tag{7.5.24}$$

Construyamos ahora los B-splines lineales $TZ_n(t)$ y $TW_n(t)$ que interpolan los valores $Tz_{m,n}$ y $Tw_{m,n}$, $1 \leq m \leq N$, $1 \leq n \leq n_0$, respectivamente, definidos por

$$TZ_n(t) = \frac{1}{h}\left\{(t_{m+1} - t)Tz_{m,n} + (t - t_m)Tz_{m+1,n}\right\} , \qquad t_n \leq t \leq t_{m+1}, \quad 0 \leq m \leq N-1, \tag{7.5.25}$$

y

$$TW_n(t) = \frac{1}{h}\left\{(t_{m+1} - t)Tw_{m,n} + (t - t_m)Tw_{m+1,n}\right\} , \qquad t_n \leq t \leq t_{m+1}, \quad 0 \leq m \leq N-1. \tag{7.5.26}$$

Si definimos ahora los B-splines $\widetilde{TZ_n(t)}$ y $\widetilde{TW_n(t)}$ que interpolan las funciones $\widetilde{Tz_n(t)}$ y $\widetilde{Tw_n(t)}$, respectivamente, dados por

$$\widetilde{TZ_n(t)} = \frac{1}{h}\left\{(t_{m+1}-t)\widetilde{Tz_n(t_m)} + (t-t_m)\widetilde{Tz_n(t_{m+1})}\right\}\,, \qquad t_n \le t \le t_{m+1},\quad 0 \le m \le N-1, \tag{7.5.27}$$

y

$$\widetilde{TW_n(t)} = \frac{1}{h}\left\{(t_{m+1}-t)\widetilde{Tw_n(t_m)} + (t-t_m)\widetilde{Tw_n(t_{m+1})}\right\}\,, \qquad t_n \le t \le t_{m+1},\quad 0 \le m \le N-1, \tag{7.5.28}$$

tendremos, por propiedades de los splines lineales y por (7.5.20) y (7.5.25)-(7.5.28), que

$$\begin{aligned} |\widetilde{TZ_n(t)} - TZ_n(t)| &\le hE_{1,n}\,, \quad 1 \le n \le n_0,\ 0 \le t \le T\,, \\ |\widetilde{TW_n(t)} - TW_n(t)| &\le hE_{2,n}\,, \quad 1 \le n \le n_0,\ 0 \le t \le T\,, \end{aligned} \tag{7.5.29}$$

siendo $E_{1,n}$ y $E_{2,n}$ los definidos en (7.5.23) y (7.5.24). Además, de [22, p.257] se sigue que

$$\begin{aligned} |\widetilde{Tz_n(t)} - \widetilde{TZ_n(t)}| &\le \frac{h^2}{8}\max_{0\le t\le T}\{|\widetilde{Tz''_n(t)}| \le \frac{h^2}{8}\max_{0\le t\le T}\{|\widetilde{\lambda_n^2} b(t)\widetilde{Tz_n(t)}| \\ &\le \frac{h^2}{8}\frac{n^2\pi^2}{L^2 a(0,L)}B(T)M_t\,, \\ & 1 \le n \le n_0, \quad 0 \le t \le T\,, \end{aligned} \tag{7.5.30}$$

y

$$|\widetilde{Tw_n(t)} - \widetilde{TW_n(t)}| \le \frac{h^2}{8}\frac{n\pi B(T)M_t}{L\sqrt{a(0,L)b(0)}}\,, \qquad 1 \le n \le n_0, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{7.5.31}$$

De (7.5.29), (7.5.30) y (7.5.31) resulta que el error obtenido al aproximar $\widetilde{Tz_n(t)}$ por $TZ_n(t)$ y $\widetilde{Tw_n(t)}$ por $TW_n(t)$ está acotado por

$$|\widetilde{Tz_n(t)} - TZ_n(t)| \le hE_{1,n} + \frac{h^2}{8}\frac{n^2\pi^2}{L^2 a(0,L)} B(T) M_t \,,$$

$$|\widetilde{Tw_n(t)} - TW_n(t)| \le hE_{2,n} + \frac{h^2}{8}\frac{n\pi B(T) M_t}{L\sqrt{a(0,L)b(0)}} \,, \tag{7.5.32}$$

$$1 \le n \le n_0 \,, \quad 0 \le t \le T \,.$$

Tomando

$$0 < h < 1 \tag{7.5.33}$$

y teniendo en cuenta (7.5.14), (7.5.15), (7.5.32) y (7.5.33), se concluye que

$$|Tz_n(t) - TZ_n(t)| \ \le \ hE_{1,n} + \frac{h^2}{8}\frac{n^2\pi^2}{L^2 a(0,L)} B(T) M_t +$$

$$+ \delta\, B(T) T M_t \exp\left[T\sqrt{1 + \frac{n^4\pi^4 B^2(T)}{L^4 a^2(0,L)}}\right] \ = \ KZ_{1,n}\, h + KZ_{2,n}\, \delta \,,$$

$$|Tw_n(t) - TW_n(t)| \ \le \ hE_{2,n} + \frac{h^2}{8}\frac{n\pi B(T) M_t}{L\sqrt{a(0,L)b(0)}} +$$

$$+ \delta\, \frac{B(T) T M_t L\sqrt{A(0,L)}}{n\sqrt{b(0)}\pi} \exp\left[T\sqrt{1 + \frac{n^4\pi^4 B^2(T)}{L^4 a^2(0,L)}}\right] \ = \ KW_{1,n}\, h + KW_{2,n}\, \delta \,,$$

$$1 \le n \le n_0 \,, \quad 0 \le t \le T \,. \tag{7.5.34}$$

Asimismo, forzaremos a que $TZ_n(t)$ y $TW_n(t)$ cumplan, como $Tz_n(t)$ y $Tw_n(t)$, las cotas (7.4.7) (de hecho esa acotación ha sido aprovechada ya en (7.5.30) y (7.5.31)), es decir

$$
\begin{aligned}
&|TZ_n(t)| \le M_t\,, && 0 \le t \le T, \quad 1 \le n \le n_0,\\
&|TW_n(t)| \le \frac{M_t L\sqrt{A(0,L)}}{\sqrt{b(0)}n\pi}\,, && 0 \le t \le T, \quad 1 \le n \le n_0.
\end{aligned}
\tag{7.5.35}
$$

Ello no invalida los cálculos hechos hasta ahora: el hecho de forzar $TZ_n(t)$ y $TW_n(t)$ para que verifiquen (7.5.35), truncando cuando sea necesario, nos asegura que las funciones truncadas obtenidas estarán, si cabe, más cerca de $Tz_n(t)$ y $Tw_n(t)$ que si no las truncáramos.

Dado que no conocemos exactamente los autofunciones $w_n(x)$ sino sus aproximaciones $\widetilde{w_n(x)}$, no podremos calcular con exactitud los coeficientes c_n y d_n definidos en (7.4.15), sino sólo sus aproximaciones

$$
\widetilde{c_n} = \frac{\int_0^L a(x)\widetilde{w_n(x)}f(x)\,dx}{\int_0^L a(x)\widetilde{w_n^2(x)}\,dx}\,, \qquad \widetilde{d_n} = \frac{\int_0^L a(x)\widetilde{w_n(x)}g(x)\,dx}{\int_0^L a(x)\widetilde{w_n^2(x)}\,dx}\,. \tag{7.5.36}
$$

Calculemos los errores cometidos al aproximar c_n y d_n por $\widetilde{c_n}$ y $\widetilde{d_n}$, respectivamente. Del capítulo anterior, concretamente de (6.5.9)-(6.5.11) y (6.5.15), sabemos que si forzamos $\widetilde{w_n(x)}$, $\widetilde{c_n}$ y $\widetilde{d_n}$ a que cumplan, como $w_n(x)$, c_n y d_n en (7.4.4), (7.4.19) y (7.4.22), que

$$
|\widetilde{w_n(x)}| \le \frac{M_x L\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}} = W_n\,, \quad 1 \le n \le n_0 \quad 0 \le x \le L\,, \tag{7.5.37}
$$

$$
|\widetilde{c_n}| \le \frac{2v(F_1)M_x^3 L^2 A^{\frac{3}{2}}(0,L)}{\sqrt{a(0)}n^3\pi^3} = \widetilde{C_n}\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \tag{7.5.38}
$$

y

$$
|\widetilde{d_n}| \le \frac{2V(G_0)M_x^3 L A^{\frac{3}{2}}(0,L)}{n^2\pi^2\sqrt{a(0)}} = \widetilde{D_n}\,, \quad 1 \le n \le n_0\,, \tag{7.5.39}
$$

respectivamente, entonces, por (7.5.7), se cumplirá

$$
\begin{aligned}
|c_n - \widetilde{c_n}| \quad &\leq \quad \left[\frac{2M^2 n^2 \pi^2}{L^3 a(0,L)} \left(\int_0^L |f(x)| a(x) dx \right) + \frac{2\widetilde{C_n} M^2 \pi^2 n^2}{L^3 a(0,L)} \cdot \right. \\
&\left. \cdot \left(\widetilde{W_n} + \frac{ML\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}} \right) \int_0^L a(x) dx \right] \xi \\
&= \quad KC_n \, \xi \,, \qquad 1 \leq n \leq n_0 \,, \qquad (7.5.40)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
|d_n - \widetilde{d_n}| \quad &\leq \quad \left[\frac{2M^2 n^2 \pi^2}{L^3 a(0,L)} \left(\int_0^L |f(x)| a(x) dx \right) + \frac{2\widetilde{D_n} M^2 \pi^2 n^2}{L^3 a(0,L)} \cdot \right. \\
&\left. \cdot \left(\widetilde{W_n} + \frac{ML\sqrt{A(0,L)}}{n\pi\sqrt{a(0)}} \right) \int_0^L a(x) dx \right] \xi \\
&= \quad KD_n \, \xi \,, \qquad 1 \leq n \leq n_0 \,. \qquad (7.5.41)
\end{aligned}
$$

Llegados a este punto, tenemos todas las herramientas necesarias para encontrar el error total cometido al aproximar los términos $u_n(x,t)$.

Así, si definimos

$$
u\widetilde{(n_0, x, t)} = \sum_{n=1}^{n_0} \widetilde{w_n(x)} \{ \widetilde{c_n} T Z_n(t) + \widetilde{d_n} T W_n(t) \} \qquad 0 \leq x \leq L, \; 0 \leq t \leq T \,. \quad (7.5.42)
$$

entonces, de (7.5.1) y (7.5.42), se tiene que

$$
\begin{aligned}
&|u(n_0,x,t) - u\widetilde{(n_0,x,t)}| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} |w_n(x) - \widetilde{w_n(x)}|\,|c_n T z_n(t) + d_n T w_n(t)| + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{n_0} |\widetilde{w_n(x)}|\,|c_n[Tz_n(t) - TZ_n(t)] + d_n[Tw_n(t) - TW_n(t)]| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{n_0} |\widetilde{w_n(x)}|\,|(c_n - \widetilde{c_n})TZ_n(t) + (d_n - \widetilde{d_n})TW_n(t)|\,. \qquad (7.5.43)
\end{aligned}
$$

Aplicando (7.5.6), (7.5.7), (7.5.23), (7.5.24), (7.5.34), (7.5.35) y (7.5.37)-(7.5.41) a (7.5.43), se obtiene

$$
\begin{aligned}
&|u(n_0,x,t) - u\widetilde{(n_0,x,t)}| \leq \\
&\leq \xi \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ \frac{2v(F_1)M_x^3 L^2 M_t A^{\frac{3}{2}}(0,L)}{\sqrt{a(0)}n^3\pi^3} + \frac{2V(G_0)M_x^3 L^2 M_t A^2(0,L)}{\sqrt{a(0)b(0)}n^3\pi^3} + \right. \\
&\quad \left. + \widetilde{W_n}\left(M_t K C_n + \frac{M_t L}{n\pi}\sqrt{\frac{A(0,L)}{b(0)}} K D_n \right) \right\} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{n_0} \widetilde{W_n} \left\{ h\left(\widetilde{C_n} K Z_{1,n} + \widetilde{D_n} K W_{1,n}\right) + \delta\left(\widetilde{C_n} K Z_{2,n} + \widetilde{D_n} K W_{2,n}\right)\right\} \\
&= P_1\xi + P_2 h + P_3\delta\,, \qquad 0 \leq x \leq L\,,\;\; 0 \leq t \leq T\,. \qquad (7.5.44)
\end{aligned}
$$

De (7.5.2), (7.5.5) y (7.5.44) se deduce que si

$$
P_1\xi + P_2 h + P_3\delta < \frac{2\epsilon}{3}\,, \qquad (7.5.45)
$$

entonces

$$
|u(x,t) - u\widetilde{(n_0,x,t)}| < \epsilon\,, \qquad 0 \leq x \leq L\,,\;\; 0 \leq t \leq T\,. \qquad (7.5.46)
$$

Una opción para cumplir (7.5.45) es distribuir el peso del error entre los tres términos, es decir

$$\xi < \frac{2\epsilon}{9P_1}\,, \quad h < \frac{2\epsilon}{9P_2}\,, \quad \delta < \frac{2\epsilon}{9P_3}\,. \tag{7.5.47}$$

No obstante, recomendamos hacer algunos cálculos previamente a la elección ξ, h, y δ para determinar que trío de valores genera menor esfuerzo computacional total.

Resumiendo lo anterior, podemos establecer el siguiente teorema

Teorema 22. *Bajo las hipótesis y la notación del teorema 21, sea $\epsilon > 0$ y T un entero positivo. Sea n_0 el primer entero positivo que satisface (7.5.5) y sean $\widetilde{\lambda_n^2}$, $\widetilde{w_n(x)}$, $\widetilde{c_n}$ y $\widetilde{d_n}$ los autovalores, autofunciones y coeficientes de Sturm-Liouville aproximados del problema (7.1.1)-(7.1.5), para $1 \leq n \leq n_0$. Si λ_n^2, $w_n(x)$, c_n y d_n son los autovalores, autofunciones y coeficientes de Sturm-Liouville teóricos, tales que la condiciones (7.5.44)-(7.5.45) se cumplen, entonces la función $\widetilde{u(n_0,x,t)}$ definida en (7.5.42) es una aproximación de la solución exacta $u(x,t)$ del problema (7.1.1)-(7.1.5) (dada por (7.4.13)-(7.4.15)), que satisface (7.5.46).*

Con el teorema anterior, el último problema a analizar puede considerarse resuelto.

Capítulo 8

Conclusiones

Hasta aquí los hechos. Pero, ¿y el futuro? Por de pronto los resultados expuestos hasta ahora deben enseñarnos a no descartar métodos analíticos aun cuando lleguemos a callejones en apariencia sin salida. Muchas veces tendemos a discriminar métodos exactos por el mero hecho (en sí importante) de no proporcionar una solución directamente calculable. Sin embargo, en la mayor parte de las ocasiones, la información que nos proporciona esa solución, aunque incomputable, es más que suficiente para abrir otras vías, de las que la presentada a lo largo de esta tesis no es sino un ínfimo ejemplo. Y eso es un detalle que a veces se tiende a olvidar. Por supuesto que de poco nos sirve (a los ingenieros, por lo menos, como meros aplicadores de unas herramientas ya desarrolladas) el tener una solución exacta que a priori no podemos calcular; a nosotros, al fin y al cabo, nos preocupan los números, la realidad. Pero esa misma realidad nos puede ser mostrada si aplicamos nuestro ingenio al problema determinado en vez de acudir a mecanismos estándar de resolución.

No pretenden estas líneas el ser una crítica destructiva del uso de métodos numéricos a la resolución de problemas técnicos. Su utilización es imprescindible porque en la mayor parte de los casos el acercamiento teórico no da resultados utilizables (a veces ni siquiera da ningún resultado). Lo único que es quizá censurable es que dicho uso sea indiscriminado, sin pararse a pensar previamente si no habrá otros caminos para encontrar una solución. El estudio matemático de la realidad requiere un modelado de ésta, modelado sujeto a muchas imperfecciones, entre ellas las de nuestra propia medida. Y es de tales modelos de donde se pueden extraer problemas como los analizados a lo largo del presente documento. No obstante, no deja de sorprender a veces el que los problemas extraídos sean atacados directamente por métodos numéricos sin preocuparse siquiera si el modelo utilizado da pie a una solución real. Si no es así, todos nuestros cálculos son inútiles. Lo mismo ocurre si el problema admite múltiples soluciones exactas. En ese caso, ¿ a cuál de ellas se aproximará nuestra aproximación? Más importante que tratar de encontrar una solución es averiguar a priori si ésta existe y es única. Si es así, bienvenido sea cualquier método que nos permita encontrarla.

Si la solución existe, la tarea del Cálculo debe ser la de proporcionarnos medios para encontrar lo más parecido a ella que nuestro modelo requiera. Para ello, el concepto de *error* o de *cota de error* es absolutamente imprescindible. En la literatura ingenieril es desgraciadamente bastante corriente encontrar aplicaciones de métodos de sólida argumentación matemática como el de las diferencias o los elementos finitos, a situaciones donde, además de tener un uso cuanto menos discutible (o al menos, que requiere un estudio previo analítico más serio que el que se realmente hace), jamás se analiza el posible error cometido (muchas veces éste ni siquiera se menciona). Bajo el lema de "el error cometido tiende a 0 con el tamaño de malla" se pueden cometer las más grandes tropelías matemáticas que se deseen. La eliminación en las ecuaciones de términos de valor *supuestamente* despreciable no es más que un pequeño ejemplo. Ello muchas veces no invalida tales aproximaciones, pues el hecho es que en la naturaleza la aseveración anterior suele ser cierta: el verdadero problema es que su corriente efectividad la inmortalice inconscientemente, que la haga inmune a cualquier duda sobre su validez. No basta con decir "el error es despreciable". Hay que estar seguro de ello. Los mismos métodos numéricos empleados suelen tener asociadas (y definidas en la literatura matemática) unas cotas para el error obtenido, cotas que dependen no sólo del citado tamaño de malla (tómese aquí el concepto de malla como aquél parámetro del método específico que nos obliga a sacrificar computabilidad por precisión) sino de propiedades de la solución exacta. Sin conocer dichas propiedades, resulta imposible acotar el error con exactitud, y sin la cota de error, nuestra aproximación es tan válida como cualquier solución que se nos ocurra dibujar.

Es por ello por lo que consideramos tan importante el estudio teórico de soluciones. A veces, las propiedades que se encuentren nos pueden ser más interesantes que la misma solución en sí. Y los métodos aquí desarrollados son un ejemplo.

Ciñéndonos a éstos, y dejando al margen la carga filosófica de la argumentación expuesta, las posibilidades de ampliación de tales métodos son numerosas. En primer lugar, la más inmediata, sería la posibilidad de emplear el método de separación de variables a cualquier problema diferencial de orden 2. La ecuación de ondas (en sus múltiples formas) y la de difusión son claros ejemplos. Las acotaciones encontradas son perfectamente admisibles para la mayor parte de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtendrían, lo que nos permitiría tanto encontrar una solución exacta en forma de serie (incalculable directamente) como truncar dicha serie para quedarnos con una suma finita de productos de soluciones de ecuaciones diferenciales, resolubles por otros muchos medios.

Asimismo, tengo el convencimiento que, en algunos casos, es posible encontrar fórmulas similares para determinados problemas de orden superior, desde luego más complejas y elaboradas. Este es un campo bastante interesante y prácticamente inestudiado hasta ahora.

Las acotaciones encontradas en los teoremas 2, 5 ó 9, pueden arrojar algo de luz sobre una parte de la teoría de ecuaciones diferenciales de segundo orden sobre las que existe poca bibliografía: el de la acotación de las soluciones. Lo sorprendente del caso es que así como hay numerosos resultados sobre el número de ceros de una solución, su estabilidad, convergencia, etc., sobre su acotación los resultados encontrados son de mucha validez teórica pero poca práctica, entendida ésta en el sentido de cálculo de cotas explícitas. Así, por ejemplo, hay muchas obras donde se demuestra la acotación de las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville, pero nadie se plantea realmente dar una cota real. Existe, pero, ¿a quién le importa?, es la conclusión a la que puede llegar un lector.

La acotación de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden mostrada aquí todavía puede mejorarse y ampliarse. Por ejemplo, reduciendo las condiciones a exigir a los coeficientes de la ecuación. Siguiendo ese camino, tres vías aparecen de forma natural:

1. Permitir que $p(t)$ o $q(t)$ se anulen en la ecuación (3.2.2). El caso de $q(t)$ es más simple: puesto que $p(t) \cdot q(t)$ se tendrá que anular en el mismo punto donde $q(t)$ lo hace, justo antes de dicho punto tal función debe ser decreciente. Por tanto, en tal intervalo podremos estudiar la función $G(y,t)$ definida en (3.2.11). Dado que $G(y,t)$ contiene un término $(p(t)(y'(t))^2$, que no se anula con $q(t)$, a partir de la cotas obtenidas para ese momento para $G(y,t)$ podemos acotar $y'(t)$ y por tanto también $y(t)$. El caso de $p(t)$ es más complicado, pues $p(t)$ aparece en los dos términos de $G(y,t)$. No obstante ambos casos requieren un mayor estudio más profundo.

2. Permitir que $p(t)$ o $q(t)$ sean continuas a trozos. Una posible solución sería acotar tanto $y(t)$ como $y'(t)$ justo a la izquierda del punto de discontinuidad, usar el hecho de que ambas funciones deben ser continuas para seguir acotando con $F(y,t)$ y $G(y,t)$ a la derecha del punto de discontinuidad.

3. Eliminar la condición (3.2.1) y analizar bajo qué casos las funciones $z_n(t)$ y $w_n(t)$ pueden acotarse superiormente y con qué cota. A este respecto, señalar que quizá el desarrollo efectuado en el capítulo 4 pueda servir de ayuda.

Relacionado con la acotación de las soluciones está el no menos importante de la acotación de los coeficientes del desarrollo en serie de Sturm-Liouville de una función. Como en el caso anterior, resultados teóricos sobre la acotación de las cotas los hay y bastantes, todos ellos dando el orden de magnitud en función del número de orden del autovalor. Sin embargo, cuando se trata de obtener una cota *real* para un problema *real*, el lector puede encontrarse totalmente perdido. Dado el uso que se ha hecho de los desarrollos en serie de autofunciones de Sturm-Liouville a lo largo de la historia, uno no puede dejar de preguntarse de qué modo se puede calcular una solución exacta en forma de serie si no se sabe cuánto puede afectar la cola de la serie truncada cuando decidimos dejar de sumar: ¡la cola puede superar fácilmente en algunos casos el propio valor calculado! Y eso, incluso en los problemas más simples en los que se aplica el método de separación de variables.

El estudio de las tales cotas es un tema que desde luego no queda cerrado en esta tesis. Los dos últimos capítulos, de hecho, han analizado el problema de Sturm-Liouville más simple ($y'' + \lambda^2 c(t) y = 0$), sin otros términos que pudieran complicar la ecuación. Las posibles ampliaciones al respecto que se nos ocurren, por de pronto, son:

1. Sustituir las condiciones de contorno de Dirichlet aplicadas por otras de Neuman o naturales. En ese caso las autofunciones que se obtendrían serían, o $z_n(t)$ (para el caso de Neuman) o una combinación lineal de $z_n(t)$ y de $w_n(t)$ (para el caso de condiciones de contorno naturales). Dado que a lo largo de todas las demostraciones efectuadas al respecto, la acotación de $z_n(t)$ y $w_n(t)$ se ha obtenido particularizando las de una función cualquiera $y_n(t)$, la acotación de la autofunción obtenida no deberá ser complicada. La acotación de los coeficientes, siguiendo los métodos empleados en los dos últimos capítulos, tampoco. Lo que sí puede ser más problemático es la acotación de los autovalores, que dependerá del caso en cuestión.

2. Introducir nuevos términos en la ecuación. Como en el caso anterior, las acotaciones expuestas pueden facilitar bastante el cálculo de las cotas de los coeficientes de Sturm-Liouville. De nuevo, lo que más puede verse afectado es la acotación de los autovalores.

3. Ampliar las condiciones exigidas a las funciones coeficiente de la ecuación para incluir las condiciones expuestas en el apartado relativo a posibles ampliaciones en el estudio de la acotación de soluciones (permitir que $p(t)$ o $p(t)$ se anulen, etc.) En este caso será conveniente primero revisar la bibliografía para ver si los problemas que aparecen tienen realmente solución.

4. Suavizar las condiciones necesarias para que una función tenga desarrollo en serie de autofunciones y obtener cotas para los coeficientes obtenidos (resultados similares existen para desarrollos en serie de Fourier o de Dini (funciones de Bessel), con lo que estimamos que es posible encontrarlos para cualquier conjunto de autofunciones, en general).

Las bases para tratar los casos citados, no obstante, quedan puestas. Siguiendo un método similar al empleado estimamos que se pueden cubrir todos los casos posibles, no sin una buena dosis de paciencia, buena cantidad de papel y una imaginación adecuada. Tampoco era el objetivo de esta tesis el analizar exhaustivamente todas las situaciones. Más bien, en parte, el demostrar que no conocer una serie de valores no significa no poder averiguar su comportamiento.

Otro apartado interesante que surge de inmediato de los problemas presentados es el de la estimación, con cotas de error, de los autovalores y autofunciones de un problema de Sturm-Liouville. La literatura existente al respecto es bastante joven (si bien los trabajos de Ritz en la aproximación de autovalores mediante la reducción del problema a un subespacio concreto de funciones -en vez de todo el espacio de éstas- son bastante más antiguos, los primeros trabajos en los que se proporcionan cotas de error, los de Canosa y Oliveira [11], datan de la década de los setenta), y aun cuando la aparición de resultados al respecto ha sido constante en los últimos años, estimamos que es un campo en el que todavía pueden producirse sorpresas.

Con todo lo anterior, lo ideal sería englobar todos los casos en un método de separación de variables generalizado con problemas de Sturm-Liouville para problemas de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden finitos en una dimensión. Los pasos a seguir para ello serían:

1. Acotación de autofunciones.
2. Acotación de los coeficientes del desarrollo de una función cualquiera en serie de autofunciones.
3. Acotación de los autovalores.
4. Determinación de la solución exacta en forma de serie (lo que nos daría unas condiciones a imponer a las funciones iniciales).
5. Demostración de la unicidad de la solución.
6. Fijado un error máximo admisible, truncamiento de la serie para obtener una suma finita de n términos, aprovechando para ello las cotas obtenidas para las autofunciones, autovalores y coeficientes.
7. Aproximación de autofunciones y autovalores.
8. Cálculo del efecto de la acotación (con error, por supuesto) de los autovalores en la solución de la ecuación obtenida en la dimensión no acotada (t, generalmente).
9. Cálculo del efecto de la aproximación de la autofunciones en los coeficientes de la suma.
10. Estimación del error total.

Aunque a lo largo de esta tesis los métodos usados para resolver el problema que aparecen en la dimensión infinita (t, en todos nuestros casos) siempre han sido los multipaso escalares o matriciales, se podría aplicar a éstos cualquier otro método numérico que nos permita acotar el error cometido. Así, sería interesante analizar la razón error/computabilidad ofrecida por otros métodos como los elementos finitos, etc.

El método expuesto se puede generalizar a problemas con un número de dimensiones superior a dos. Para éstos, la tarea más complicada debe ser la acotación de las autofunciones y los autovalores, en función de la geometría del problema, y la acotación de los coeficientes de los desarrollos en series de autofunciones obtenidos. Resueltos ambos inconvenientes, los pasos a seguir no tienen por qué diferir mucho de los empleados hasta ahora.

La ampliación de los problemas estudiados al caso matricial aparece también como otro de los campos de posible desarrollo a partir de esta tesis. De hecho en [28] se puede ver un primer intento de acercamiento. Estos casos pueden ser muy interesantes en el futuro dado que hasta ahora los problemas donde aparecen sistemas de ecuaciones en derivadas parciales siempre han tendido a desacoplarse, es decir, a resolverse descomponiéndolos en problemas escalares dependientes generalmente mal condicionados. Sin embargo, entendemos que dichos problemas deberían tratarse desde el punto de vista matricial directamente. El resolverlos en forma escalar puede cambiar la misma filosofía del problema, y además los errores que el desacoplo acarrea pueden llegar a ser tan grandes como para invalidar totalmente el método empleado. Ejemplo de la potencia del tratamiento matricial directo pueden verse en [32] o [31]. Los resultados mostrados en esta tesis pueden en buena parte escalarse al dominio matricial, incluyendo aquellos problemas donde intervengan problemas de Sturm-Liouville matriciales, en los que el método propuesto puede ser una interesante fuente de resultados. Asimismo, la aparición de nuevos métodos multipaso matriciales como los expuestos en [34] puede contribuir a abrir dicho camino.

Finalmente, no podemos tampoco dejar de resaltar que aunque esta tesis se haya limitado al método de separación de variables, éste no puede en modo alguno considerarse una panacea. El método de separación de variables puede valer si los coeficientes de la ecuación general son separables y el dominio de la ecuación en alguna de las variables es finito. Si no es así, hay otros métodos que pueden resultar mucho más interesantes. La aplicación de transformadas infinitas es un buen ejemplo. El método a seguir para éstas no tiene porqué diferir mucho del utilizado hasta aquí: estudio de las propiedades de la transformada, determinación en base a dichas propiedades de una solución integral exacta, truncamiento de tal integral impropia y aproximación de la integral restante a través de otras técnicas. Tarea, que aunque así expuesta puede parecer sencilla, proporcionará seguro más de un dolor de cabeza al que se aventure a emprenderla.

Y aun así, ¿qué hay de malo en ello?

Valencia, 29 de Diciembre de 1998

Bibliografía

[1] P. Almenar, E. Perales, E Ponsoda, *Approximate Solutions of Time Dependent Mixed Partial Differential Problems with* Mathematica, I Congreso de *Mathematica* en España, Valencia, 11-12 Julio 1996.

[2] P. Almenar, L. Jódar, D. Goberna, *Constructive approximations of mixed variable coefficient diffusion problems*, Math. Comp. Modelling, en impresión.

[3] J.M. Albella, J.M. Martínez Duart, *Física de Dieléctricos*, Marcombo S.A., Barcelona, 1984.

[4] R.S. Anderssen, F.R. de Hoog, *On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm-Liouville problems with general boundary conditions*, *BIT*, 24 (1984), 401-412.

[5] A. Andrew, J. Paine, *Correction of finite element estimates for Sturm-Liouville eigenvalues*, Numer. Math. 50 (1986), 205-215.

[6] A. Andrew, J. Paine, *Correction of numeror's eigenvalues estimates*, Numer. Math. 47 (1985), 289-300.

[7] L.C. Andrews, *Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1986.

[8] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Pubs. Co., Reading, MA, 1957.

[9] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Differential Equations Elementary and Boundary Value Problems*, John-Wiley, New York, 1977.

[10] J.W. Brown, R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 1993.

[11] J. Canosa, R. Gomes de Oliveira, *A new method for the solution of the Schroedinger equation*, J. Comput. Phys., 5, (1970), 188-207.

[12] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, John-Wiley, New York, 1989.

[13] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[14] P.K. Das, *Optical Signal Processing*, Springer, New York, 1991.

[15] H.F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Dover, New York, 1963.

[16] D.C. Dibben, R. Metaxas, *Time domain finite element analysis of multimode microwave applications*, IEEE Transact. Magnetics, Vol.32 No.3 (1996), 942-945.

[17] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[18] S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, New York, 1993.

[19] G.B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks, Pacific Groove, California, 1992.

[20] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.

[21] E.A. González-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1995.

[22] G. Hämerling, K. Hoffman, *Numerical Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[23] A.F. Harvey, *Microwave Engineering*, Academic Press, New York, 1963.

[24] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John-Wiley, New York, 1962.

[25] L. Jódar, P. Almenar, *Accurate Continuous Numerical Solutions of Time Dependent Mixed Partial Differential Problems*, Computers Math. Appl., Vol 32, No. 2 (1996), 5-19.

[26] L. Jódar, P. Almenar, *Uniqueness of Solutions for Mixed Problems related to the Generalized Wave Equation*, Computer. Math. Appl., Vol. 33, No. 4 (1997), 49-51.

[27] L. Jódar, P. Almenar, *Numerical Approximations with a priori Error Bounds for Time Dependent Damped Wave Mixed Problems*, Int. J. Applied Sci. Comput., Vol 4, No. 2 (1997), 178-200.

[28] L. Jódar, P. Almenar, D. Goberna, *Exact and Approximate Solutions with a Priori Error Bounds for Systems of Time Dependent Wave Equations*, Math. Comp. Modelling, Vol. 26, No. 7 (1997), 11-28.

[29] L. Jódar, P. Almenar, J.A. Martín, *Mixed Problems for the Time Dependent Telegraph Equation, Continuous Numerical Solutions with a priori Error Bounds*, Math. Comp. Modelling, Vol. 25, No.11 (1997), 31-44.

[30] L. Jódar, P. Almenar, *Analytic-Numerical Solution with a Priori Error Bounds for Lateral Vibrations of a String with Variable Tension and Mass Density*, Utilitas Mathematica, en impresión.

[31] L. Jódar, D. Goberna, *Exact and analytic numerical solution of coupled diffusion problems in a semi-infinite medium*, Computers & Mathematics with Applications, Vol 31, No 9. (1996), pp. 17-24.

[32] L. Jódar, D. Goberna, *A matrix d'Alembert formula for coupled wave initial value problems*, Comput. Math Appl., Vol 35, No.9 (1998), 1-15.

[33] L. Jódar, D. Goberna *Correction to "Mixed Problems for the Time-Dependent Telegraph Equation: Continuous Numerical Solutions With A Priori Error Bounds"*, Math. Comp. Modelling, Vol 28, No.1 (1998), 113-116.

[34] L. Jódar, E. Ponsoda, *Computing Continuous Numerical Solutions of Matrix Differential Equations*, Comput. Math. Appl. 29, No. 8 (1995), 63-71.

[35] J.D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John-Wiley, New York.

[36] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press Inc, San Diego, 1991.

[37] M. Marletta, J.D. Pryce, *Automatic solution of Sturm-Liouville problems using the Pruess method*, J. Comput. Appl. Math., 39, 1992, 57-78.

[38] M. Marletta, *Theory and Implementation of Algorithms for Sturm-Liouville Computations.* Ph. Thesis, Royal Military College of Science (Cranfield), 1991.

[39] R.C. Metaxas, R.J. Meredith, *Industrial Microwave Heating*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1983.

[40] M.N. Ozisik, *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover, New York, 1968.

[41] D.M. Pozar, *Microwave Engineering*, Addison-Wesley, New York, 1990.

[42] S. Pruess, *Higher order approximations to Sturm-Liouville eigenvalues*, Numer. Math., 24 (1975), 241-257.

[43] S. Pruess, *Estimating the eigenvalues of Sturm-Liouville problems by approximating the differential equation*, SIAM J. Numer. Anal., 10, (1973), 55-68.

[44] J.D. Pryce, *Numerical Solutions of Sturm-Liouville Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[45] G. Roussy, J.A. Pearcy, *Foundations and Industrial Applications of Microwaves and Radio Frequency Fields*, John-Wiley, New York, 1995.

[46] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1964.

[47] H. Sagan, *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*, Dover, New York, 1989.

[48] V.I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, Vol. II, Pergamon Press, New York, 1964.

[49] G.D. Smith, *Numerical Solution of partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1978.

[50] B. Szabö, I. Babuška, *Finite Element Analysis*, John-Wiley, New York, 1991.

[51] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Colloq. Pub., Vol XXIII, Providence, 1939.

[52] N.M. Temme, *Special Functions*, John-Wiley & Sons, New York, 1996.

[53] N. Tikhonov, A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, Moscú.

[54] G. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1962.

[55] Tyn Myint-U, L. Debnath, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[56] G.N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press., London, 1966.

[57] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, Academic Press Inc., San Diego, 1992.

[58] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Vol I and II*, Cambrigde University Press, Cambrigde, 1977.