



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

**MODELIZACIÓN DE LA INTERACCIÓN MAGNETOMECÁNICA  
BAJO UN TENSOR DE CAUCHY DE TENSIONES MAGNÉTICAS  
OBTENIDO POR PROCEDIMIENTOS ENERGÉTICOS**

ALEJANDRO USIETO GALVE

Director:

Prof. Dr. RAFAEL SÁNCHEZ GRANDÍA

Tesis de Doctorado

Valencia – Enero 2016



## RESUMEN

En la actualidad, se emplean diferentes métodos para obtener las densidades de fuerza magnetostáticas en un medio continuo. Algunos de ellos se fundamentan en modelos de interacción de la materia con un campo externo y otros se derivan de tensores de Maxwell en la materia. Todas estas densidades son diferentes. Los modelos actuales de interacción magnetomecánica están condicionados por la elección de una de estas densidades. En esta Tesis se propone un nuevo modelo de interacción independiente de la densidad de fuerza adoptada. El tensor de Cauchy obtenido está constituido por un tensor elástico, otro magnético y otro magnetoelástico. La componente magnética es la única que depende del tensor de Maxwell o densidad de fuerza adoptada. Se constata que el tensor de Cauchy no es en general simétrico y se define una densidad de fuerza magnetostática extendida que tiene en cuenta los efectos de interacción elástica.

**PALABRAS CLAVE:** Acoplamiento magnetoelástico, tensor de Maxwell en materia, tensor de tensiones de Cauchy.

## SUMMARY

At present, different methods for magnetostatic force densities in a continuous medium are used. Some of them are based on models of interaction of matter with an external field and others are derived from Maxwell's tensors in matter. All of these densities are different. Current models of magnetomechanical interactions are conditioned by the choice of one of these densities. In this dissertation a new model of magnetomechanical interaction that is independent on force density adopted is proposed. The Cauchy stress tensor obtained is constituted by the addition of three components: elastic, magnetic and magnetoelastic tensors. The magnetic component is the only one dependent on force density adopted. It is found that the magnetoelastic Cauchy stress tensor is not in general symmetric and an extended magnetostatic force density that takes into account the effects of elastic interaction is defined.

**KEY WORDS:** Magnetoelastic coupling, Maxwell' tensor in matter, Cauchy stress tensor.

**RESUM**

En l'actualitat, s'utilitzen diferents mètodes per a obtenir les densitats de forces magnetostàtiques en un medi continu. Alguns d'ells tenen els seus fonaments en models d'interacció de la matèria amb un camp extern y d'altres es deriven de tensors de Màxwell en la matèria. Totes les densitats son diferents. Els models actuals d'interacció magnetomecànica estan condicionats per l'elecció d'una d'aquestes densitats. En la present Tesi es propasa un nou model d'interacció independent de la densitat de força adoptada. El tensor de Cauchy obtingut està constituït per un tensor elàstic, un magnètic i un magnetoelàstic. La component magnètica és l'única que depend del tensor de Màxwell o densitat de força adoptada. Es constata que el tensor de Cauchy no és en general simètric i es defineix una densitat de força magnetostàtica estesa que té en compte els efectes d'interacció elàstica.

**PARAULES CLAU:** Acoplament magnetoelàstic, tensor de Maxwell en la matèria, tensor de tensions de Cauchy.

## INDICE

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>7</b>
1.- Fundamentación .....	7
2.- Descripción, objetivos y metodología.....	13
<b>1. DENSIDADES DE FUERZA MAGNETOSTÁTICA.....</b>	<b>21</b>
1.- Introducción .....	21
2.- La descripción magnetostática del medio continuo .....	25
3.- Fundamentos teóricos de los métodos de fuentes equivalentes de fuerza magnetostática .....	34
4.- Fundamentos teóricos de los modelos dipolares de densidad de fuerza magnetostática.....	39
5.- Sumario: densidades volumétrica de fuerza magnetostática .....	47
6.- Ecuaciones de campos en magnetostática.....	49
7.- Fuerzas globales y locales: Problemas actuales.....	54
8.- Discusión.....	71
<b>2. TENSORES DE MAXWELL.....</b>	<b>79</b>
1.- Introducción .....	79
2.- Tensores de Maxwell asociados directamente con alguna densidad de fuerza .....	82
3.- Tensores de Maxwell no asociados directamente a alguna densidad de fuerza específica .....	89
4.- Discusión.....	117
<b>3. APROXIMACIÓN A LA INTERACCIÓN MAGNETOELÁSTICA.....</b>	<b>123</b>

---

1.- Introducción .....	123
2.- Elementos para una aproximación a la interacción magnetoelástica compatible con diferentes tensores de Maxwell.....	127
2.1.- Trabajo magnetoelástico: tensor de Cauchy.....	127
2.2.- Trabajo magnetostático .....	138
2.3.- Densidad de energía libre magnetostática: una forma general del tensor de tensiones magnetoelástica de Cauchy .....	140
3.- Modelización del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy .....	147
4.- Unicidad del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy ante diferentes densidades de fuerza magnetostáticas .....	150
5.- Desarrollo de un modelo de acoplamiento magnetoelástico compatible con una forma general de tensor de Maxwell .....	153
6.- Componente antisimétrica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy: balance de momento angular ....	164
7.- La componente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas.....	165
8.- Condición de contorno del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy.....	169
9.- Análisis del modelo en relación a resultados previos .....	173
10.- Discusión.....	188
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>199</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>207</b>

---

## INTRODUCCIÓN

### 1.- Fundamentación

Esta Tesis Doctoral se ha elaborado en el seno del Grupo de Investigación en Electromecánica Avanzada (*GREA*), que fue creado en el año 1994 como una estructura de investigación en la que intervenían la École Normale Supérieure de Cachan —Laboratorio SATIE del CNRS— y la Universitat Politècnica de València. En el transcurso de sus trabajos de investigación, ha ido detectándose la necesidad de abordar los problemas de diseño de dispositivos electromecánicos, objeto central de trabajo de este grupo, desde una perspectiva de integración interdisciplinar.

La complejidad del análisis de los problemas que surgen en el diseño de sistemas con altas exigencias en precisión, velocidad y potencia requería ya que tales problemas fueran resueltos con nuevas modelizaciones que permitiesen una conversión directa y rápida de las energías electromagnética y mecánica, bajo, además, una concepción integral del sistema, que debía estar presente ya desde las primeras fases de diseño. Estas modelizaciones debían trascender pues los métodos clásicos de la ingeniería electromecánica y, por tanto, requerían su reformulación en un contexto teórico más amplio y más próximo al campo disciplinar de la física. Es así cómo esta nueva metodología de diseño integral debía avanzar en el conocimiento físico de la interacción del campo magnético (que puede considerarse con suficiente aproximación como estático) generado en un dispositivo electromecánico con sus propios componentes materiales.

Por lo tanto, una primera cuestión a tratar consistía en la obtención de la fuerza magnetostática global que, en un campo magnetostático, experimenta un cuerpo con propiedades magnéticas.

Los métodos utilizados convencionalmente en la obtención de esta fuerza total, o global, consistían en la integración del clásico

tensor de tensiones de Maxwell en el vacío en una superficie cualquiera que comprendiese al cuerpo, por una parte, y, por otra, la obtención numérica, mediante elementos finitos, de tal fuerza mediante la variación virtual de la energía magnética, ante un desplazamiento determinado por la variación de unas determinadas variables. Bajo estos dos métodos se desarrollaban la práctica totalidad de los trabajos de diseño y análisis de dispositivos electromecánicos convencionales.

Uno de los primeros problemas que requerían una aproximación metodológica diferente consistía en la obtención de fuerzas de origen magnetostático en cuerpos en contacto. En este caso, la resolución usual, tanto en el método del tensor de Maxwell como en los métodos basados en el principio de Trabajos Virtuales, conlleva ineludiblemente un cierto grado de error, derivado de la necesidad de crear virtualmente un espacio vacío en torno al cuerpo considerado, para, de esta forma, integrar el tensor de Maxwell en el vacío en tal superficie cerrada, o, en el caso del método de los Trabajos Virtuales, resolver los problemas de mallado asociados al tratamiento de la superficie física de separación entre ambos medios. Aunque, desde el punto de vista de la ingeniería, tales errores pudieran considerarse como no significativos, al menos cuando estos dos métodos se aplican a dispositivos electromagnéticos convencionales, desde el punto de vista físico la resolución de este problema planteaba un claro objeto de investigación, por una parte, y, por otra, respondía a una limitación seria en el diseño de dispositivos que sí requerían un alto nivel de exactitud en el cálculo de las fuerzas globales sobre sus componentes.

La investigación que se llevó a cabo en ese momento en el *GREA* sobre este aspecto reveló la existencia de determinados modelos de densidades de fuerza basados en diferentes hipótesis de interacción de la materia con un campo externo. La modelización de las propiedades magnéticas de un medio continuo estaba pues en la base de estos procedimientos de densidades de fuerza. Los modelos que se consideraron en ese momento de investigación eran los más documentados en la literatura técnica y científica: los métodos



denominados como de Cargas Magnéticas Equivalentes, de Corrientes Magnetizantes Equivalentes y el denominado con gran generalidad como método de Kelvin. Estos tres métodos, cuyo origen parecía situarse temporalmente en torno a la mitad del siglo pasado, proporcionaban unas densidades volumétricas de fuerza y unas densidades superficiales de fuerza, diferentes en cada caso, pero cuya integración al volumen y superficie del cuerpo, siempre rodeado del vacío, proporcionaban un mismo valor para la fuerza total o global del cuerpo y coincidían, además, con un grado de aproximación suficiente, principalmente determinado por la metodología de elementos finitos utilizada en su determinación, con la fuerza calculada por medio de la aplicación del método del tensor de Maxwell o por el principio de Trabajos Virtuales.

Obviamente, este hecho planteaba un interrogante desde el punto de vista de conocimiento de la realidad física del proceso de interacción de la materia con un campo magnetostático externo, pero, además, la existencia de tales métodos no añadía ninguna posibilidad de resolución al problema de las fuerzas en contacto puesto que estos métodos fueron concebidos desde la interacción de la realidad material, considerada como constituida por diversos elementos magnetizantes (cargas magnéticas, corrientes magnetizantes equivalentes, dipolos magnéticos...), *localizados en el vacío*, con un campo externo. Por lo tanto, su validez estaba también constreñida al cálculo de fuerzas sobre cuerpos aislados en aire. Pero, como se ha indicado antes, el interrogante que suponía la existencia de diversos modelos de interacción magnetostática provenientes de hipótesis diferentes que conducen a una misma fuerza global se seguía manteniendo.

Por otra parte, también especialmente a partir de la mitad del siglo pasado, diversos trabajos fueron publicados en torno al concepto de fuerza ponderomotriz (de origen electrostático o magnetostático), que indicaban la conveniencia de tratar estas fuerzas como la divergencia de un tensor de tensiones de tal origen en la materia. Implícitamente, estos trabajos consideraban la existencia de una única

forma tensorial de tensiones magnetostáticas, que en el vacío debía tomar la forma del clásico tensor de Maxwell. Además, en otros ámbitos de investigación, desde comienzos de siglo se estaba considerando la definición de un tensor de tensiones electromagnéticas en la materia que permitiese tratar los fenómenos de interacción lumínica con un medio continuo (los trabajos de Minkowski y Abrahams, en el comienzo de siglo XX conducían a tensores cuyas divergencias aún son objeto de investigación teórica). Así pues, la posibilidad de obtención de un tensor de tensiones magnetostáticos en la materia constituyó un objeto de investigación del *GREA*. Efectivamente, la existencia de una única forma tensorial de Maxwell, válida en cualquier medio, podía contribuir a la definición de un procedimiento fundamentado teóricamente para la determinación de fuerzas en cuerpos en contacto.

En ingeniería electromecánica suele utilizarse, además de la densidad de energía, la densidad de coenergía magnética, especialmente cuando se tratan fuerzas generadas o sufridas por imanes permanentes. En los trabajos desarrollados por el *GREA*, se obtuvieron tensores diferentes cuando se aplican el método de Trabajos Virtuales a tales densidades. Tales tensores eran transpuestos entre sí y dependientes en su componente diagonal de la densidad de coenergía. En la literatura científica ya se habían descrito diferentes resultados entre tensiones magnéticas obtenidas a partir de las densidades de energía y de coenergía y ello suponía un problema de interpretación sobre el origen y naturaleza de las fuerzas.

Ahora bien, la densidad de fuerza magnetostática obtenida como la divergencia de este tensor de Maxwell genérico obviamente no coincidía con ninguna de las densidades de fuerza descritas anteriormente. En un trabajo posterior, se publicaron los resultados obtenidos por el *GREA* consistentes en que, a partir de este tensor, podían reproducirse tales densidades, tanto volumétricas como superficiales, cuando se aplicaban a un cuerpo rodeado del vacío. Obviamente, ello no suponía más que la ausencia de contradicción entre el resultado obtenido con los utilizados previamente bajo

métodos no tensoriales puesto que esta concordancia también podía darse bajo cualquier otro tensor de Maxwell cuya forma, en el vacío, coincidiese con el clásico tensor de Maxwell. Es decir, sólo desde la perspectiva de la obtención de un tensor válido en cualquier medio que reproduzca la fuerza global sobre un cuerpo rodeado del vacío no puede concluirse la adecuación del tensor a la *distribución real* de fuerzas en el seno del material.

La divergencia entre los resultados obtenidos a partir de las variaciones virtuales de las densidades de energía y coenergía debía ser resuelta y, en un posterior análisis realizado por el *GRETA* se concluye que una adecuada interpretación de estas variaciones virtuales conduce a un único tensor simétrico, también con un término diagonal únicamente dependiente de la densidad de coenergía, y se comprueba de nuevo que tal tensor reproduce adecuadamente la fuerza global sobre un cuerpo rodeado del vacío obtenido por las densidades de fuerzas fundamentadas en los métodos de interacción anteriormente indicados.

La obtención de un tensor de tensiones magnéticas en un medio, o tensor de Maxwell, obtenido a partir del principio de Trabajos Virtuales sobre las densidades de energía o de coenergía, unifica en un mismo marco teórico ambos procedimientos. Como, por otra parte, las densidades de fuerza volumétricas y superficiales obtenidas a partir de este formalismo tensorial pueden contrastarse con las obtenidas por los métodos clásicos derivados de alguna hipótesis de interacción, la investigación en torno a la naturaleza de las fuerzas magnetostáticas en la materia se mostraba más avanzada.

No obstante, la verificación experimental es compleja. Recientes trabajos en torno a las fuerzas obtenidas en el marco matemático adecuado para la implementación del método de Trabajos Virtuales, la geometría diferencial, parecen confirmar que tales resultados coinciden con los obtenidos a partir del tensor simétrico indicado anteriormente, pero, y esta consideración es fundamental, ha de

tenerse en cuenta el efecto mecánico (elástico, esencialmente) de tales fuerzas magnetostáticas.

En los dispositivos actuales, que requieren ya alta velocidad y, por lo tanto, importantes tensiones mecánicas, son necesarios modelos de acoplamiento magnetoelástico, que permitan resolver con mayor exactitud y menor tiempo de procesamiento, el comportamiento magnetomecánico en los componentes de estos dispositivos. Actualmente, no se ha resuelto este problema. Mediante, de nuevo, el principio de Trabajos Virtuales, bajo una determinada expresión de la densidad de energía magnetoelástica, pueden obtenerse tales tensiones, pero la definición de esta densidad de energía es el elemento central de acoplamiento aún no resuelto. Por esta razón, los procesos de simulación numérica suelen realizarse de forma iterativa, obteniendo en una primera configuración geométrica inicial la distribución de los campos magnetostáticos y sus tensiones. Determinadas éstas, se analiza el comportamiento elástico del material y se determinan los estados de deformación correspondientes. Bajo tal estado deformado, se vuelve a simular la distribución de las tensiones magnéticas, hasta encontrar un estado ya estable en sus comportamientos magnético y mecánico.

Por ello, la investigación en modelos de acoplamiento magnetoelástico está abierta. Pero la formulación de tales modelos parte de una dificultad previa: ¿qué densidad de fuerza o, en su caso, qué tensor de Maxwell ha de considerarse en la formulación de este modelo? Y, por tanto, ¿están condicionados ya los resultados por esta elección? Y, si es así, ¿en qué medida? Es ésta una cuestión relevante, ya que, aun cuando las densidades de fuerza clásicas o los tensores de Maxwell que las reproducen proporcionan una misma fuerza global, los efectos elásticos son fuertemente dependientes de las distribuciones de fuerza magnetostática y éstas son claramente divergentes entre sí.

Es ésta la fundamentación central de esta Tesis Doctoral, cuya finalidad consiste en la obtención de un modelo de interacción

magnetoelástica que pueda considerarse como independiente del modelo de densidad de fuerza o tensor de Maxwell considerado o, expresado en otros términos, que sea compatible con todos ellos. Como consecuencia de la obtención de este modelo, diversas cuestiones son analizadas, tales como la simetría del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy o la posibilidad de encontrar una densidad de fuerza magnetostática que, siendo también compatible con cualquier densidad de fuerza, las complementa en un término adicional que represente la adecuación de tal densidad para describir un mismo acoplamiento magnetoelástico.

De esta forma, se amplía el campo de descripción de las fuerzas de origen magnetostático en un medio continuo, incluyendo las componentes magnéticas derivadas de las deformaciones que estas fuerzas locales producirían. Desde el punto de vista del conocimiento científico, en sí limitado por las modelizaciones en las que se basa, se enriquece tal conocimiento en la medida en que se hace más complejo el modelo de interacción o, expresado de diferente manera, en la medida en que el medio material no se concibe sólo como un conjunto de fuentes magnéticas aisladas en un vacío, sino que incluye además una interacción esencialmente ligada al medio material: su comportamiento elástico.

## 2.- Descripción, objetivos y metodología

El objetivo central de esta investigación es el desarrollo de un modelo de interacción magnetomecánica no dependiente inicialmente de la elección de una determinada densidad de fuerza. Como se ha indicado anteriormente, en la literatura científica se han expuesto diversos modelos de interacción de un campo externo con un medio material con propiedades magnéticas, fundamentados en la modelización del medio material como constituido por diferentes elementos considerados como fuente de campo magnético (o de inducción magnética). Estas referencias teóricas se encuentran poco

sistematizadas en las referencias técnicas o científicas en este campo de conocimiento y, a menudo, reciben denominaciones diferentes, o están referidas a textos desde los cuales es difícil avanzar en la definición histórica de estos métodos.

Por otra parte, tres de estos modelos, los denominados de carga magnética equivalente, de corriente magnetizante equivalente y de Kelvin, se han documentado con una muy superior extensión y generalidad que el resto, y ya estaba documentado el resultado de que el cálculo de la fuerza global sobre un cuerpo rodeado del vacío podía ser obtenido indistintamente por cualquiera de ellos, y que tal fuerza coincidía además con la obtenida mediante la aplicación de los métodos de integración del tensor de Maxwell en el vacío y el método basado en el principio de Trabajos Virtuales. Sin embargo, también estaba documentada las serias diferencias entre la distribución de fuerzas locales, o densidades de fuerza, de carácter volumétrico o superficial.

Por ello, en el primer Capítulo de esta memoria se ha desarrollado un análisis riguroso de las principales referencias documentales sobre estos métodos. Se han escogido por tanto una serie de trabajos, de muy amplia difusión, en los que se ha descrito con mayor profundidad conceptual estos métodos y los resultados que se obtienen por su aplicación, tanto en el caso de materiales ferromagnéticos como en imanes permanentes. No se han incluido las múltiples referencias técnicas en las que se exponen resultados obtenidos bajo la aplicación de estas metodologías pero que se limitan a enunciar tales modelos. Son muy numerosas y su enumeración en las referencias documentales de esta memoria no aporta ningún valor a la resolución del objetivo central de esta Tesis. Se ha buscado, por tanto, contraponer críticamente tales metodologías. Por ello, se ha recurrido con bastante frecuencia a la transcripción literal de algún párrafo significativo de tales trabajos y, con la finalidad de evitar ambigüedades de traducción, ésta no se ha incluido cuando tales transcripciones literales lo son en idioma inglés. Algunos textos,

redactados en su versión inicial en francés, sí han sido traducidos al castellano en notas al pie de página.

Un problema metodológico inicial se planteaba en el tratamiento de este primer Capítulo y era el consistente en la oportunidad de desarrollarlo sin haber expuesto previamente el marco teórico (esencialmente, el electromagnetismo clásico) que puede considerarse como elemento referencial en el análisis de las densidades de fuerza en la materia. En este caso, se optó por no hacerlo, en base a dos consideraciones.

La primera se deriva del propio objeto de este primer capítulo, que requería un análisis en el que la perspectiva histórica estuviese presente. Efectivamente, llegó a detectarse que el origen de dos de los principales modelos de densidades de fuerza estaba descrito en los primeros trabajos sobre la naturaleza y origen del magnetismo (Poisson, Thomson, Maxwell, principalmente) y, por tanto, de la naturaleza de los campos denominados actualmente como campo magnético  $\mathbf{H}$ , inducción magnética  $\mathbf{B}$  e imantación o magnetización  $\mathbf{m}$ . Por este criterio de fundamentación histórica, se han ido tratando posteriormente diferentes textos relevantes en los que estos modelos estaban descritos con suficiente rigor. En este sentido, una exposición inicial de la teoría sistematiza no se ha considerado oportuna y, como se ha podido comprobar en la redacción de este Capítulo, tampoco ha sido necesaria. Los elementos teóricos necesarios para la descripción de las expresiones de densidades de fuerza magnetostática han sido convenientemente introducidos cuando han sido necesarios para la correcta interpretación de estas expresiones.

Un segundo criterio ha sido tenido en cuenta en la adopción de esta metodología de exposición. El objeto de esta investigación incluye referencias teóricas situadas en el marco de áreas tales como el electromagnetismo, la mecánica del medio continuo, la física estadística o la termodinámica, en lo que se refiere al marco físico. Los métodos matemáticos de implementación del procedimiento de elementos finitos o los propios de la geometría diferencial también

están en la base de muchas argumentaciones relativas al objeto de esta tesis. Pero además, en el campo tecnológico de la ingeniería electromecánica, campos como la descripción de las propiedades magnéticas de los materiales y su clasificación, de los procesos de inducción de fuerzas, del comportamiento térmico o mecánico de los componentes de un dispositivo electromecánico y de otros muchos aspectos que influyen en el diseño de estos dispositivos, están también presentes, aunque ciertamente, en este caso, más tangencialmente, en la exposición de resultados y, en mayor medida, en las referencias técnicas consultadas. En este marco tan interdisciplinar, no tiene cabida en esta Tesis una exposición rigurosa de todos estos campos de conocimiento a modo de descripción de referencias teóricas necesarias. Por el contrario, se ha optado por una explicación de estos elementos teóricos conforme han sido considerados en esta memoria y, sobre todo, por una referencia clara a los textos en que tales elementos pueden ser consultados.

De esta forma, tras una primera introducción al Capítulo 1, se ha considerado necesario el desarrollo de una sección consistente en la descripción magnetostática del medio continuo, desde la que se ha podido establecer una primera clasificación de las fuerzas magnetostáticas como obtenidas a partir de métodos de fuentes equivalentes y a partir de métodos dipolares, que son descritos, desde la metodología ya expuesta, en las secciones 3 y 4 de este Capítulo. Como consecuencia del análisis expuesto en estos dos capítulos, en la sección 5 se presenta un sumario de densidades magnetostáticas, que será un elemento necesario para la redacción del Capítulo 2. En la siguiente sección sí que se ha considerado ya conveniente exponer, en forma muy reducida, el contexto teórico de la magnetostática, en el marco de referencia más amplio de las ecuaciones de Maxwell. La sección 7 está dedicada al análisis del estado actual de los métodos de fuerzas y, por último, en la sección 8, se formula una discusión sobre esta cuestión, que servirá de base para la formalización de las conclusiones generales de la tesis.



Este esquema se mantiene en todos los Capítulos, cuya primera sección es siempre introductoria y cuya última sección lo es siempre de discusión o análisis de los resultados expuestos en el desarrollo del Capítulo. Las conclusiones generales se formularán atendiendo a estas discusiones.

Como ya se ha expuesto en la sección de Fundamentación de esta Introducción general, la cuestión del tensor de Maxwell en la materia está estrechamente ligada a la densidad de fuerza, aunque ha tenido un desarrollo paralelo y, en otros ámbitos científicos, más temprano que el que concierne a esta memoria. Pero en algunas referencias consultadas, se abordan en paralelo las densidades de fuerza y los tensores de Maxwell de las que derivan. Como ya se ha indicado, la densidad de fuerza puede obtenerse como la divergencia de un tensor de Maxwell y, por lo tanto, son descritos diversos tensores de Maxwell asociados a estos modelos de interacción de la materia con un campo externo. En este punto se han encontrado también algunas discordancias en las referencias consultadas. Por ello, tras una primera sección en la que, a modo de introducción, se establecen los elementos básicos de este formalismo tensorial en el cálculo de las fuerzas volumétricas y superficiales para un cuerpo rodeado de un medio, y, en especial, del vacío, se procede en la sección 2 de este Capítulo a una obtención y clasificación de los tensores de Maxwell asociados a las densidades de fuerza sumariadas en el Capítulo 1.

Naturalmente, los tensores de Maxwell asociados a cada modelización de la interacción magnetostática son diferentes y, consecuentemente, el mismo grado de ambigüedad que se ha detectado en la descripción de las fuerzas se extiende al ámbito de la formalización tensorial. Pero, por otra parte, se han descrito en la literatura científica otros tensores de Maxwell no asociados a ninguna de estas modelizaciones, sino que han sido obtenidos mediante aplicación del principio de Trabajos Virtuales bajo diferentes metodologías y formalizaciones matemáticas. A este tema se dedica la sección 3 de este Capítulo. Como se observará, la diferencia entre

tensores obtenidos a partir de la variación virtual de las densidades de energía y de coenergía constituía un problema teórico que requería una solución. Diferentes propuestas fueron descritas y, en el seno del *GREA* se planteó una propuesta de resolución consistente en la formulación de un tensor simétrico en los campos  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  y con una componente diagonal consistente en la densidad de coenergía. Se trata de un tensor genérico, válido para cualquier medio, y que puede reproducir también las expresiones clásicas de los métodos basados en las densidades de fuerza descritas en el Capítulo 1. Recientemente han sido publicados trabajos en los que, a partir de un análisis riguroso de las densidades de fuerza desde la aplicación del principio de Trabajos Virtuales, se plantea también ese mismo tensor como tensor de Maxwell susceptible de reproducir tales densidades de fuerza. La última sección de este Capítulo aborda una discusión principalmente sobre este aspecto.

Los Capítulos 1 y 2 han de ser considerados pues como una introducción necesaria a la contribución básica de esta Tesis, la obtención de un modelo de interacción magnetoelástica que puede ser compatible con cualquier densidad de fuerza o cualquier tensor de Maxwell. No obstante, aun no siendo objeto central de esta investigación, de los contenidos de los Capítulos 1 y 2 pueden extraerse conclusiones que también pueden ser consideradas como contribuciones originales de esta Tesis y que se refieren sustancialmente al ámbito en el que han de ser consideradas las diferencias que manifiestan los diversos procedimientos de obtención de fuerzas en la materia. El Capítulo 3 se destina pues a la obtención de un tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy bajo el modelo estándar de formulación de interacciones acopladas en un medio continuo. Este modelo es, también, presentado conforme se va desarrollando, abordando secuencialmente las tres etapas de su formulación, basadas, respectivamente, en las leyes de conservación de energía, de momento lineal y de momento angular. Mientras que las hipótesis relativas a la definición formal del modelo se establecen en torno a la conservación de la densidad de energía, la cuestión de la necesaria compatibilidad con cualquier densidad de fuerza o tensor de

---

Maxwell requiere de la adopción de la principal hipótesis de este modelo, la introducción de un conjunto de parámetros magnético y magnetoelásticos de acoplamiento que permiten tal compatibilidad. La cuestión de conservación del momento angular permite obtener conclusiones respecto a la simetría del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, cuestión que aún sigue abierta en los modelos de acoplamiento magnetoelástico. El estado de la investigación en esta materia se ha presentado como la penúltima sección, puesto que de esta manera se puede, a la vez que ofrecer tal estado actual, comprobar la adecuación del modelo propuesto en esta memoria a las diversas formulaciones propuestas en la literatura técnica y científica. La discusión sobre este modelo se presenta como última sección de este tercer Capítulo.

Se formulan por último, en una sección independiente, las conclusiones de este trabajo y se presentan, por último, las referencias bibliográficas consultadas en el desarrollo de esta memoria.



## 1. DENSIDADES DE FUERZA MAGNETOSTÁTICA

### 1.- Introducción

En este Capítulo se van a exponer tanto los fundamentos teóricos como las principales limitaciones de los modelos de interacción magnetostática del medio continuo con un campo magnetostático basados en diferentes modelizaciones del medio continuo con propiedades magnéticas. Cuando se pretende una sistematización de estos modelos a partir de las numerosas referencias bibliográficas existentes se constata un primer hecho: tales modelos están descritos generalmente de forma incompleta en la práctica totalidad de los textos consultados. Y, en ocasiones, tales modelizaciones son descritas con diferentes denominaciones y sus fundamentos teóricos remitidos a fuentes documentales que, consultadas, no proporcionan tales elementos teóricos. Como se comprobará en este capítulo, la modelización del medio continuo con propiedades magnéticas ha sido una cuestión abierta y, en la actualidad, no resuelta.

Pero, por otra parte, la preocupación por la modelización de las fuerzas internas o locales en el medio continuo cobra importancia en la medida en que la necesidad de desarrollar modelos de acoplamiento magnetomecánico se ha ido acrecentando, ante las mayores exigencias de potencia y velocidad de los actuales dispositivos electromecánicos, por una parte y, por otra, ante la importancia que cobran los modelos de obtención de fuerzas basado en la aplicación del principio de Trabajos Virtuales mediante procedimientos numéricos.

Así, hasta aproximadamente mediados del siglo pasado, diversos modelos de interacción de la materia con un campo externo coexistían en la literatura científica con igual validez en tanto en cuanto todas estas modelizaciones reproducían convenientemente las

propiedades magnéticas en el espacio exterior al cuerpo y en tanto y cuanto todas ellas permitían obtener la fuerza global o total sobre el medio sometido a la interacción con un campo exterior. Tales modelizaciones estaban por tanto, contrastadas experimentalmente en ese marco de experimentación. Pero, en la medida en que crecía el interés por la distribución interna de estas fuerzas magnéticas se evidenciaban también las notables divergencias entre tales distribuciones. Pero una cuestión persistía, y era la validez de los modelos en cuanto a propiedades globales se refiere. Se plantea así una cuestión de una importancia relevante en el conocimiento científico de la interacción magnetostática. No se ha documentado error alguno en la formulación teórica de tales modelos y tampoco se ha documentado la equivalencia teórica entre tales modelos. Ello no es posible, dadas las claras divergencias entre las hipótesis sobre las que se fundamentan.

Siendo así, la única posibilidad de concluir la prevalencia de alguna de estas modelizaciones sobre las otras ha de situarse en un contexto experimental más amplio y, en este sentido, el más inmediato no puede ser otro que el de las deformaciones elásticas que tales distribuciones locales de fuerzas provoquen.

Por otra parte, una de las principales limitaciones de los métodos de cálculo de fuerzas globales basados en alguna modelización de la interacción de la materia con un campo exterior consiste en que las expresiones teóricas que proporcionan tales fuerzas globales sólo son de aplicación para un medio aislado en el vacío o en el aire. Aun siendo ésta la situación más usual en diseño de dispositivos electromecánicos, en la actualidad es necesario abordar el problema de fuerzas entre cuerpos en contacto, por lo que algunos métodos basados en la extensión o generalización de tales modelizaciones al caso de cuerpos en contacto han sido publicados especialmente en los últimos quince años. Estos procedimientos se describirán en este capítulo, pero ya es conveniente considerar aquí que la misma limitación existe en la aplicación del método del tensor

de Maxwell, que no puede aplicarse en su sentido estricto cuando el cuerpo está en contacto con otro medio material diferente del aire.

Como se ha indicado, la sistematización de las fuerzas locales, o densidades de fuerza, ofrece cierta complejidad cuando se analizan las referencias documentales. Por ello, uno de los objetivos de este primer Capítulo es avanzar en esta sistematización ofreciendo una clasificación de éstas atendiendo a su origen. En la revisión de referencias que se ha efectuado sobre el estado actual del conocimiento en este campo, no se han encontrado otras densidades de fuerza que las documentadas en este primer Capítulo.

En la segunda sección de este Capítulo se presenta una exposición precisamente objeto de la investigación que se ha realizado en esta memoria sobre las modelizaciones teóricas. Efectivamente, dos métodos muy usados en la descripción de las densidades de fuerza (y, en mucha menor medida, en la formulación de modelos de acoplamiento magnetoelástico) son los denominados como métodos de fuentes equivalentes. Son dos; el que se refiere al modelo basado en cargas magnéticas (al que se denomina método de cargas magnéticas equivalentes) y el relativo al modelo basado en corrientes magnetizantes (al que se denomina método de corrientes magnetizantes equivalentes). Se ha podido comprobar que tales dos métodos responden a dos modelos que cabe situar en los inicios de la descripción del magnetismo. Se documenta en esta segunda sección cómo, actualmente, aún está abierta la discusión sobre la naturaleza de los campos que actualmente se denominan como magnético  $\mathbf{H}$ , inducción magnética  $\mathbf{B}$  y magnetización (o imantación)  $\mathbf{m}$  y que esta discusión está estrechamente ligada a la descripción de las propiedades magnéticas en términos de cargas magnéticas o de corrientes magnetizantes. Obviamente, los métodos denominados como de fuentes equivalentes parten de alguna de estas dos descripciones. De lo expuesto en esta segunda sección cabe concluir que conviene realizar una clasificación de las densidades de fuerza en dos tipos: las asociadas a modelizaciones de fuentes equivalentes y las correspondientes a descripciones dipolares. Como también se

comprobará, los modelos dipolares pueden también formularse en términos de  $\mathbf{H}$  o de  $\mathbf{B}$  y que esta duplicidad en la formulación puede también referirse a esta dualidad en la interpretación de estos dos campos.

En las secciones 3 y 4 se presentan las formulaciones actuales de los modelos de fuentes equivalentes y de los modelos dipolares, respectivamente. Como se comprobará, pueden coexistir en todos estos modelos otra dualidad: la consistente en considerar como campo de interacción el campo exterior o el campo total (tanto cuando se considera como campo de interacción el campo magnético como cuando se considera la inducción magnética como campo interactuante). Se documentará que, en el caso en el que el campo interactuante sea el campo total, la formulación de estos modelos requiere además de una densidad superficial de fuerza, además de la correspondiente densidad volumétrica de fuerza. Sobre este aspecto se ha comprobado también cierta confusión que ha podido manifestarse claramente en trabajos relativamente recientes.

En la sección 5 se presenta el sumario de densidades de fuerza magnetostática que será considerado en este trabajo. Como ya se ha mencionado, no se ha encontrado en las referencias analizadas ninguna otra modelización y puede darse como completa, puesto que, como se comprobará, se han formulado simétricamente respecto a los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . Tras esta clasificación, se exponen, en la sección 6, y a modo de establecimiento del marco teórico en el que se sitúa esta memoria, las ecuaciones magnetostáticas en el medio continuo, que servirán de referencia a los desarrollos teóricos que se realicen en este trabajo.

En la sección 7 se ofrece el estado actual de las modelizaciones establecidas en las secciones anteriores. Este estado actual se ha centrado en las limitaciones básicas propias de estos modelos (básicamente, el hecho de que han de ser aplicados a cuerpos rodeados del vacío y la limitación esencial de sus diferencias inherentes) y los intentos que se han realizado para salvar estas dificultades.



---

En la sección 8 se presenta un análisis de las cuestiones planteadas en este primer Capítulo.

## 2.- La descripción magnetostática del medio continuo

En diversas fuentes documentales actuales se exponen las ambigüedades y problemas de definición e interpretación de la densidad de fuerza magnética en un medio rígido. Estos problemas aún persisten, puesto que, como se describirá en este capítulo, no existe en la actualidad un único modelo aceptado generalmente como *válido* para la descripción de la interacción magnética en un medio continuo. Se ha empleado en la anterior afirmación el término *válido* en su doble sentido teórico y experimental, ya que, como se expondrá posteriormente, son numerosos los trabajos que formulan modelos de interacción magnetoelástica, así como trabajos que describen diseños de sistemas magnetomecánicos, que han sido *válidamente* contrastados con resultados experimentales, por una parte, y, por otra, no se ha producido tampoco ninguna refutación teórica de alguno o algunos de tales modelos. Así pues, el problema de determinar la *verdadera* naturaleza de las fuerzas magnéticas en el interior de un medio continuo está actualmente abierto y sigue siendo objeto de una importante investigación.

Sin embargo, tal investigación tiene una componente casi exclusivamente experimental. Las actuales exigencias en velocidad y precisión de nuevos dispositivos magnetomecánicos requieren de modelos analíticos que incrementen la fiabilidad y reduzcan el tiempo de los actuales procesos numéricos fundamentados en la simulación iterativa y diferenciada de los comportamientos mecánicos y magnéticos hasta la convergencia a unos resultados que puedan ser considerados como definitivos. Generalmente, tales modelos analíticos se desarrollan a partir de alguna de las densidades de fuerza magnetostática usuales y requieren de ajustes experimentales y de hipótesis propias difícilmente extrapolables a modelos que partan de una densidad de fuerza magnetostática diferente. Es por esta razón por

la que una comparación teórica de tales modelos que llegue a permitir un análisis de validez de las hipótesis requeridas en cada modelo es, en la práctica, imposible.

Aun cuando se expondrán en este Capítulo las principales densidades de fuerza fundamentadas en diferentes modelizaciones de la interacción magnetostática, es casi necesario apuntar ya algunos elementos que afectan a este problema. Esencialmente, tales elementos se refieren al análisis sobre la naturaleza del campo magnético  $\mathbf{H}$  y de la inducción magnética  $\mathbf{B}$ . Para introducir este análisis puede transcribirse parte del *Abstract* en (McDonald, 2002):

«Despite 180 years of theory on magnetism, it appears that the practice of calculating forces on magnetic media is ambiguous, (...). Potentially troubling issues include: Which field  $\mathbf{B}$  or  $\mathbf{H}$  should be used? Should the total field be used, or only the external field? And if the latter, what is meant by “external”? Can/should effects of magnetization currents and/or fictitious magnetic poles be included? (...).».

Como se observa, las cuestiones planteadas en este trabajo se refieren al núcleo de la interpretación de la naturaleza y proceso de obtención de la densidad de fuerza magnética en un medio continuo y es sorprendente el planteamiento de esta cuestión en un texto de algo más de una década. En este texto se hace también referencia a dos de los principales modelos de densidad magnetostática de fuerza, que se derivan precisamente de la diferenciación entre el campo magnético y la inducción magnética y, por tanto, a la interpretación y cuantificación de los fenómenos magnéticos en medios materiales: la consistente en la introducción de *corrientes de magnetización* o de

*monopolos o cargas magnéticas*<sup>1</sup>. Estos métodos han tenido un continuo desarrollo durante décadas y son actualmente utilizados tanto en diseño de sistemas magnetomecánicos como en la modelización del acoplamiento magnetoelástico y su denominación actual es la de *Equivalent Source Methods* (*Magnetizing Current Method* y *Magnetic Charge Method*, respectivamente). En esta memoria se utilizarán las siglas EJM y EQM para denotar estos dos modelos. Ocasionalmente, se utilizará el acrónimo *ESM* para indicar ambos procedimientos en conjunto, dado que se ha utilizado esta denominación en determinados trabajos de la literatura científica.

En este mismo sentido, en (Roche, 2000) se presenta un exhaustivo análisis de la evolución histórica de las diferentes interpretaciones de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  que, por lo tanto, incluye la descripción del desarrollo de estos dos modelos de análisis de las propiedades magnéticas de la materia. El estudio que se realiza en este trabajo se inicia analizando la contribución de S.D. Poisson (1781-1840) en la explicación de la *intensidad de la acción magnética* en un punto del espacio como integral de tal *acción magnética* (el autor indica que tal término es el equivalente actual de campo magnético  $\mathbf{H}$ ) en términos de la *intensidad de magnetismo* (entendiendo ésta, según J.J. Roche, como la actual magnetización  $\mathbf{m}$ ) de cada volumen elemental que compone un cuerpo magnetizado. A partir de estos trabajos Poisson concluiría que la fuerza existente entre dos imanes podría explicarse como la interacción entre monopolos de *fluido magnético ligados* a la superficie de los imanes, por una parte y, por otra, por la interacción de *monopolos de fluido magnético libres* en el

---

<sup>1</sup> Considérese la diferenciación que se establece en el texto transcrito entre ambos procedimientos con la calificación de ficticio al segundo de ellos.

interior del imán que, en el caso de un medio homogéneo, no existirían (considérese que el término *fluido* en los trabajos iniciales de magnetismo hacen referencia a un *fluido etérico* con propiedades, en este caso, magnéticas<sup>2</sup>).

En esta descripción, **la densidad de la distribución superficial de monopolos libres sería igual a la componente normal de la magnetización y la densidad volumétrica de monopolos igual a la divergencia de la magnetización cambiada de signo**<sup>3</sup>. El resaltado de la anterior frase responde a la significativa equivalencia entre su contenido y la actual representación de las densidades superficial y volumétrica de carga magnética equivalente propia del modelo EQM. A pesar de que la intensidad de campo magnético en un punto exterior a un imán podía ser reproducido por esta imagen de las propiedades magnéticas del imán (cuyo carácter *imaginario* fue criticado, entre otros, por William Thomson (1824-1907), Lord Kelvin<sup>4</sup>), la

---

<sup>2</sup> El concepto de fluido etérico ha estado presente de forma sustancial en el desarrollo de la física clásica y contemporánea. Sin entrar en el fondo de la cuestión, de acuerdo a esta concepción, toda interacción (magnética, eléctrica, calorífica, lumínica o gravitatoria) requeriría de un medio etérico para su propagación, de naturaleza inmaterial (es decir, sin masa cuantificable), cuestionando de esta forma las modelización basadas en el concepto de interacción a distancia.

<sup>3</sup> Aunque las referencias indicadas en (Roche, 2000) no han sido consultadas, por su interés se incluirán como notas al pie de página, criterio que se mantendrá en la totalidad de esta memoria. En este caso, el texto se refiere a Poisson, S.D. (1822). *Memoire sur la théorie du magnétisme: 1821-1822*». *Mem. Acad. R.Sci. Inst. France* 5, 296-303.

<sup>4</sup> Thomson, W. (1872). *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. Macmillan, London.* 351-355 y.361.

obtención de tal campo magnético en el interior de un medio magnético fue fruto de una intensa investigación desarrollada fundamentalmente por Poisson, Thomson y George Green (1793-1841)<sup>5</sup>.

La formulación por André-Marie Ampère (1775-1836) de la relación entre la intensidad de un bucle cerrado de corriente y el campo magnético en una superficie limitada por él <sup>6</sup> permitió a Thompson formular la hipótesis de que **el campo magnético en puntos externos de un imán es el mismo que la producida por corrientes superficiales imaginarias numéricamente igual a la componente de la magnetización paralela a la superficie y a corrientes internas obtenidas como el rotacional de la magnetización.**<sup>7</sup> De nuevo, el subrayado en esta frase se debe a su equivalencia con las actuales expresiones para el cálculo de las corrientes equivalentes en el modelo EJM. La diferencia observada en el campo magnético en puntos interiores utilizando el modelo de monopolos o de corrientes indujo a Thomson a diferenciar la nomenclatura de este campo (polar en el primer caso y electromagnético en el segundo) y a realizar un estudio matemático de tales campos. Así, como se expone en (Roche, 2000):

---

<sup>5</sup> Green, G. (1828). An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism. *Documento particular no publicado.. Nottingham*, 1828, p.50-53.

<sup>6</sup> Ampère, A.M (1823). Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques. *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France.*..228–232.

<sup>7</sup> Thomson, W. (1872). Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. *Macmillan, London*, 394-395 y 424-425.

«In 1871 Thomson worked out in detail the analytical properties of his two magnetic intensities. In his units he found that the “electromagnetic” intensity was larger than the “polar” intensity, by the added amount  $4\pi x$  (magnetization). The “polar” intensity, “electromagnetic” intensity, and magnetization were all in the same direction in isotropic bodies. Thomson found that the divergence of “polar” intensity was equal to the negative divergence of the magnetization and that the divergence of the “electromagnetic” intensity was always zero, as was the curl of the “polar” intensity in the absence of macroscopic currents. The curl of the “electromagnetic intensity” was equal to  $4\pi x$  (curl of magnetization). It also followed from his investigations that the normal component of the “electromagnetic” intensity and the tangential component of the “polar” intensity were continuous across the boundary of a magnetized body».

Es evidente a partir del párrafo precedente la inmediatez de la identificación de la intensidad “polar” con el campo magnético  $\mathbf{H}$  y de la intensidad “electromagnética” con la inducción magnética  $\mathbf{B}$  en el interior de un material magnético. Thomson mantuvo que la identificación de la intensidad magnética en un medio, en términos de  $\mathbf{H}$  o de  $\mathbf{B}$ , era, en cierta forma, *arbitraria* o cuestión de *conveniencia*.

Fue James Clark Maxwell (1831-1879) quien introdujo el término de inducción magnética, a la que posteriormente se identificó mediante la notación de campo  $\mathbf{B}$ , diferenciándola de la intensidad magnética, identificada posteriormente por  $\mathbf{H}$ <sup>8,9</sup>, asociándolos con las

---

<sup>8</sup> J. C. Maxwell (1890). The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, *Cambridge U.P.* Cambridge. 192, 459.

<sup>9</sup> J.C. Maxwell (1891). The Scientific Letters and Papers, *Cambridge U.P.* Cambridge. 231-242.

intensidades electromagnética y polar de Thompson. La diferenciación de estos dos campos fue finalmente establecida por Hendrik Lorentz (1853-1928), introduciendo <sup>10</sup> la densidad de magnetización  $\mathbf{m}$  y postulando que el campo  $\mathbf{B}$  es el valor promedio de campos microscópicos y es la única intensidad magnética en el medio, mientras que el campo  $\mathbf{H}$  es considerado como un artificio matemático definido a través de la actual expresión:<sup>11</sup>

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{m}) \quad (1.1)$$

coincidiendo ambos campos en su naturaleza, aunque no en sus unidades, en el vacío y donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío.

Esta introducción ha sido incorporada a esta memoria con la única finalidad de poner en manifiesto que, aún en la actualidad, la naturaleza de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ , que se denominarán como campo magnético e inducción magnética respectivamente, sigue siendo objeto de debate científico. Pero su interés sustancial no es tanto el poner de manifiesto este hecho como apuntar la posibilidad de que tales interpretaciones pudieran estar en el fondo de la cuestión de la ambigüedad en la definición de una única densidad de fuerza magnetostática. Es este un objeto de investigación muy ambicioso cuyo desarrollo no será objeto de este trabajo y por esta misma razón la anterior descripción sólo se ha realizado muy esquemáticamente. Sin embargo, el hecho de que las propiedades magnéticas de la materia hayan sido descritas desde los orígenes de los estudios de

---

<sup>10</sup> H. A. Lorentz (1939). Collected Papers. *Nijhoff, The Hague*, 129-130.

<sup>11</sup> Se emplea esta relación en su forma actual.

magnetismo bajo la dualidad de dos interpretaciones, la consistente en la existencia de monopolos magnéticos obtenidos como la divergencia de la magnetización o de corrientes ligadas obtenidas como el rotacional de este mismo campo están directamente en la base de dos de los modelos de densidades de fuerza más utilizados, los modelos ESM, e indirectamente en el resto, los conocidos como métodos dipolares.

Así, en el modelo Magnetic Charge Method, EQM, se describe la densidad de fuerza magnética como la interacción entre la densidad de carga magnética equivalente  $\rho_m$  :

$$\rho_m = -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{m} = -\mu_0 \bar{\nabla} \cdot \mathbf{m} = -\mu_0 m_{j,j} \quad (1.2)$$

y la densidad superficial de carga magnética  $\rho_m^s$  dada por la componente normal de la magnetización,

$$\rho_m^s = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) = \mu_0 m_j n_j \quad (1.3)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal a la superficie y dirigido hacia fuera del volumen que encierra, con el campo magnético  $\mathbf{H}$ , tal y como se expondrá posteriormente.

En las ecuaciones (1.1)-(1-3) se han introducido los elementos esenciales de formalización matemática que se desarrollará en esta memoria. El producto escalar se denotará bien por su expresión formal simplificada o bien en términos de las componentes de los vectores utilizando el convenio de suma respecto a índices repetidos. Igualmente, la derivada respecto a una componente espacial se representará mediante el subíndice representativo de la componente respecto a la que se deriva precedido de una coma. La divergencia de un vector se representará por el producto escalar del operador vectorial nabla  $\bar{\nabla}$ ,



$$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (1.4)$$

y la magnitud vectorial cuya divergencia se calcula. En la expresión (1.4) el símbolo  $\partial_i$  representa la derivada respecto a la componente espacial  $i$ .

Igualmente, en el método de las corrientes magnetizantes equivalentes, Magnetizing Current Method, EJM, la densidad de corriente magnetizante viene dada por el rotacional de la magnetización:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_m &= \text{rot } \mathbf{m} = \vec{\nabla} \times \mathbf{m} \\ j_i &= \varepsilon_{ijk} m_{k,j} \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde el símbolo  $\times$  indica el producto vectorial y  $\varepsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita. En este modelo se contempla también la existencia de corrientes superficiales  $\mathbf{j}_m^s$  iguales a la componente tangencial de la magnetización,

$$\mathbf{j}_m^s = (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \quad (1.6)$$

Como se verá posteriormente, la fuerza sobre un medio magnético se obtendrá mediante la interacción de las densidades (1.5) y (1.6) con la inducción magnética  $\mathbf{B}$ .

Es evidente entonces la correspondencia clara entre estos dos modelos y las concepciones del campo magnético generado por imanes de Poisson y Ampère descritas anteriormente. Efectivamente, dado que el campo magnético en el exterior puede describirse adecuadamente bajo estas dos formulaciones, es necesario considerar la interacción magnética con el medio bajo estas dos modelizaciones y ello determina la existencia de las dos modelizaciones de fuerza ya expuestas, EQM y EJM.

En las siguientes secciones se abordarán otros modelos de fuerza adicionales a los ya introducidos EQM y EJM. Tales modelos son los modelos dipolares, entre los que tiene especial importancia el desarrollado por William Fuller Brown Jr. (1904-1983).

### 3.- Fundamentos teóricos de los métodos de fuentes equivalentes de fuerza magnetostática

Posiblemente uno de los primeros textos en los que se encuentra formalizado el tratamiento del magnetismo producido por imanes permanentes en términos de polos magnéticos y corrientes magnetizantes sea (Livens, 1918). Para describir las propiedades magnéticas en el seno de un imán permanente se retoma el concepto de *materia magnética ideal* de Poisson<sup>12</sup>. Esta *materia magnética* está conformada por una densidad volumétrica de carga magnética dada por la ecuación (1.2) y una densidad superficial en la forma de (1.3) (Livens, 1918: 237). El posterior análisis desarrollado en términos de potencial magnetostático para un dipolo magnético (de forma semejante al que se realiza en capítulos anteriores en el ámbito de la electrostática) concluye (Livens, 1918: 270) con la expresión de la densidad de fuerza magnetostática:

$$\begin{aligned} f_i &= \mu_0 m_j H_{i,j} \\ \mathbf{f} &= \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} \end{aligned} \tag{1.7}$$

---

<sup>12</sup> Poisson, S.D. (1826-1827). *Mem. de l'Acad.* 5, pp. 247, 488 y 6, p. 441.

que, como se expondrá posteriormente, coincide con la denominada actualmente de forma usual como densidad de Kelvin o densidad de Brown<sup>13</sup>. El mismo resultado puede consultarse en (Ferraro, 1956:244).

Así mismo, el modelo de Ampère de corrientes ligadas como fuentes de campo magnético viene descrito también en (Livens, 1918: 360), reproduciendo las ecuaciones (1.5) y (1.6). No obstante en este texto no se expone de forma explícita los modelos EQM y EJM tal y como son desarrollados actualmente, en tanto en cuanto no se detallan las expresiones de interacción de las fuentes equivalentes (polos o corrientes) con el campo o la inducción magnética, aun cuando pueden considerarse implícitas en la argumentación expuesta en este texto.

Con el efecto de clarificar este punto, es interesante acudir al tratado (Stratton, 1941). En su estudio sobre la magnetostática, en la que el campo  $\mathbf{H}$  en las regiones en que no existan líneas de corriente<sup>14</sup> verifica la condición (Stratton, 1941:227)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

---

<sup>13</sup> El campo  $\mathbf{H}$  no es aquí el campo total. Tal y como figura en (Livens,1918: 270): *Excluding <..> the part arising wholly from the interaction of neighbouring molecules, which is not transmitted by material stress, but is compensated on the spot, by molecular action due to change of physical state induced by it .*

<sup>14</sup> Las líneas de corriente han de ser cerradas o ser infinitas, dado que el ámbito de la magnetostática se consideran despreciables las variaciones temporales de la densidad de carga y, por lo tanto, la divergencia del vector  $\mathbf{J}$ , densidad de corriente, es nula.

de tal forma que el campo  $\mathbf{H}$  se deriva de un potencial magnetostático  $\phi_m$ :

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m \quad (1.9)$$

concluye que dentro de cualquier región que contenga imanes permanentes y materia polarizable, en la que no exista densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , el problema magnetostático es equivalente matemáticamente al problema electrostático (Stratton, 1941:228). De esta forma, la densidad de fuerza actuante en un punto en el que existe una densidad de carga magnética  $\rho_m$ , definida por la ecuación (1.2), vendrá dada por la expresión

$$\mathbf{f} = \rho_m \mathbf{H} \quad (1.10)$$

La expresión actualmente utilizada para la determinación de la densidad de fuerza superficial no está expuesta explícitamente en (Stratton, 1941), puesto que la argumentación utilizada en este texto está fundamentada en la discontinuidad del potencial magnético. En (Ferraro, 1956: 74) se obtiene la densidad de fuerza electrostática en la superficie de un dieléctrico y, en virtud de la correspondencia matemática ya indicada entre la electrostática y el tratamiento de la magnetostática basado en densidad de carga equivalente, la densidad de fuerza magnetostática superficial en los límites del cuerpo dependerá de la densidad superficial de carga magnética (1.3) y de los valores del campo magnético en puntos suficientemente próximos de la superficie de separación en ambos medios,

$$\mathbf{f}^s = \rho_m^s \left( \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}_{ext}}{2} \right) \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{H}_{ext}$  es el campo magnético en un punto del medio exterior suficientemente próximo a la superficie que separa ambos medios.

Las ecuaciones (1.10) y (1.11) con (1.2) y (1.3) constituyen la formulación actual del modelo de densidad de fuerza de cargas magnéticas equivalentes, EQM. Las densidades de corriente de magnetización (1.5) y (1.6) son también expuestas en (Stratton, 1941:243). Aun cuando en este texto no se exponen las expresiones explícitas de densidades de fuerza magnetostática bajo el modelo de Ampère de corrientes magnetizantes, la aplicación inmediata de la ley de Lorentz determina que tales fuerzas sean (Sadowski et al, 1992):

$$\mathbf{f} = \mathbf{j}_m \times \mathbf{B} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{f}^s = \mathbf{j}_m^s \times \left( \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}_{ext}}{2} \right) \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{B}_{ext}$  es la inducción magnética en un punto del medio exterior suficientemente próximo a la superficie que separa ambos medios. El valor medio de los campos interno y externo en las ecuaciones (1.11) y (1.13) viene determinado por las expresiones de las densidades de carga y corriente equivalentes y por las condiciones de continuidad de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ , respectivamente (Sadowski et al, 1992), (Ferraro, 1956: 74).

Las ecuaciones (1.12) y (1.13) con (1.5) y (1.6) constituyen la formulación actual del método de corrientes magnetizantes equivalentes, EJM. En (Carpenter, 1959) se presenta una muy desarrollada aplicación de los métodos de fuente equivalente en su aplicación a materiales ferromagnéticos. En este caso, las expresiones (1.11) y (1.13) se desarrollan en términos de las componentes normales y tangenciales del campo  $\mathbf{H}$  en el vacío y de la permeabilidad magnética del hierro considerado. En este texto se muestran las diferencias entre las distribuciones superficiales de fuerza obtenidas bajo la aplicación de los dos métodos y sus repercusiones en el proceso de diseño y se explora la posibilidad de

combinar los procedimientos EJM y EQM en materiales ferromagnéticos. Su interés radica no sólo en la obtención de expresiones de fácil implementación en procesos de diseño de dispositivos magnetomecánicos, sino también en el interés de explorar las diferencias entre estos dos procedimientos, ante las evidentes divergencias observadas en la distribución superficial de fuerzas proporcionadas por la aplicación de estos dos procedimientos. En hierro, la magnetización  $\mathbf{m}$  es uniforme, por lo que no se darán componentes de fuerza volumétrica. Pero las fuerzas superficiales tangenciales y normales en la superficie del hierro son diferentes para los métodos EQM y EJM y, a su vez, diferentes a la combinación propuesta en (Carpenter, 1959). Todas ellas, por otra parte, difieren de los resultados obtenidos por la aplicación del Método de Trabajos Virtuales, que no proporciona componentes de fuerza tangenciales a la superficie. Se introduce por primera vez en esta memoria el denominado método de los Trabajos Virtuales, muy ampliamente desarrollado tanto en diseño de dispositivos magnetomecánicos como en trabajos de fundamentación científica de procedimientos de cálculo de densidades de fuerza. En este trabajo se denominará este procedimiento como VWM.

Ahora bien, de acuerdo a lo expuesto, el desarrollo de los métodos de carga magnética y corriente magnetizante equivalentes está esencialmente ligado al estudio de la naturaleza del magnetismo, específicamente, en imanes permanentes, desde los iniciales trabajos de Poisson, Thompson, Ampère y Maxwell, esencialmente, y, en concreto, a la naturaleza del campo magnético y la inducción magnética. Su aplicación entonces a fuerzas sobre materiales ferromagnéticos evidencia de forma clara la divergencia entre las densidades de fuerza proporcionadas por estos dos métodos. La sistematización teórica del magnetismo con la formulación de las ecuaciones de Maxwell delimita claramente el contexto empírico de estos campos y los desarrollos posteriores de estos modelos de fuente equivalente se han realizado en este marco teórico. En una sección posterior se describirá la evolución de estos modelos, tanto en su

aplicación al diseño magnetomecánico como a su consideración en modelos de acoplamiento.

4.- Fundamentos teóricos de los modelos dipolares de densidad de fuerza magnetostática.

Tal y como se ha indicado en el apartado anterior, la expresión (1.7) aparece formulada en (Livens,1918: 270), en el contexto de la concepción del medio como conformado por polos magnéticos. Ya se ha indicado también que, en el ámbito de la magnetostática, esta formulación es matemáticamente equivalente a la propia de la electrostática. En este contexto, la fuerza que actúa sobre un elemento de volumen con una densidad de momento dipolar, es decir, en un punto con un valor  $\mathbf{P}$  de su polarización eléctrica sometido a un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , viene dada por (Livens,1918: 213)

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0(\mathbf{P} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (1.14)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la constante dieléctrica del vacío y, consecuentemente, la densidad de fuerza magnetostática puede expresarse como (1.7), por un razonamiento similar sobre un dipolo magnético<sup>15</sup>. Ya se ha

---

<sup>15</sup> La obtención de (1.15) por analogía a (1.14), está explícitamente argumentada en (Haus y Melcher, (1989): 11.8-59). En este mismo texto se cita el texto (Fano, R.M., Chu, L.J y Adler, R.B., 1967. *Electromagnetic Fields, Energy and Forces. John Wiley and Sons, New York*) en el que el modelo de densidad de fuerza sobre un dipolo magnético se desarrolla para cargas móviles. Este modelo fue criticado por mantener la hipótesis de dipolo magnético y su analogía con el dipolo eléctrico por, entre otros, como es citado en (Haus y Melcher. (1989):11.8-59), en (Tellegen, D.B.H., 1962. *Magnetic-dipole models. Am. J. Phys.*30, 650-652.

indicado también que la expresión (1.7) es actualmente conocida como densidad de Kelvin en gran número de trabajos y, en menor medida, como densidad de Brown:

$$\mathbf{f} = \mu_0(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H} \quad (1.15)$$

En el contexto de esta memoria, el método de cálculo de fuerzas basado en la densidad (1.15) se denominará en esta memoria como método de Brown-Kelvin (BKM). Este mismo resultado, también en el contexto de una descripción dipolar, puede consultarse en (Ferraro, 1956:244)<sup>16</sup> y es obtenido por consideraciones energéticas en (Landau y Lifshitz, 1981:171)<sup>17</sup>.

Sin embargo, en textos más recientes (Boyer, 1987) se obtiene una expresión formalmente muy semejante a (1.15), en la que el operador  $\mathbf{m} \cdot \nabla$  es aplicado sobre la inducción magnética  $\mathbf{B}$ , es decir, considerando que la densidad de fuerza magnética que actúa en un punto con una densidad de carga magnética puede obtenerse como producto de esta densidad por la inducción magnética  $\mathbf{B}$ . Al considerar la integral de esta densidad de fuerza sobre un volumen dado, admitiendo que la integral total de densidad de carga magnética es nula y desarrollando en serie de Taylor el valor de la inducción en el punto considerado, prescindiendo de términos de segundo orden, se concluye en (Boyer, 1987) que la densidad de fuerza magnetostática en este modelo es

$$\mathbf{f} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (1.16)$$

---

<sup>16</sup> Aquí, la expresión es deducida para pequeño imán constituido por dos polos, en el límite de distancias entre los monopolos tendiendo a cero.

<sup>17</sup> En este caso,  $\mathbf{H}$  es el campo externo.



Hasta este punto, los modelos dipolares (1.15) y (1.16) han sido obtenidos bajo el modelo de cargas magnéticas equivalentes, con la suposición, matemática, de monopolos magnéticos.

Bajo la suposición de un modelo de magnetismo consistente en cargas magnetizantes equivalentes, la densidad de fuerza, como ya se ha mencionado, se obtiene por aplicación de la fuerza de Lorentz, de acuerdo a lo indicado en la ecuación (1.12). De una forma similar (Jackson, 1962) a la expuesta anteriormente en la obtención de (1.15), la fuerza total sobre un elemento de volumen, integral de la densidad volumétrica de fuerza, admite un desarrollo en serie de Taylor para la inducción  $\mathbf{B}$ , lo que permite obtener una densidad de fuerza magnetostática consistente en el gradiente del producto escalar de la magnetización y la inducción,

$$\mathbf{f} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.17)$$

Tal como se expone en (Boyer, 1987), la relación entre las expresiones (1.17) y (1.16) puede derivarse fácilmente de la identidad vectorial

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.18)$$

de tal forma que ambas expresiones coincidirían en puntos donde la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  fuese nula y donde no se dieran variaciones significativas del campo eléctrico con el tiempo, de forma que las

corrientes de desplazamiento fuesen nulas<sup>18</sup>. Esta situación es la más usual en problemas de diseño magnetomecánico; quizás sea por esta razón por la que la densidad (1.17) no ha sido utilizada de forma significativa en los desarrollos de modelos de acoplamiento magnetomecánico. Por esta misma circunstancia, la densidad de fuerza (1.17) tampoco será tenida en cuenta en el desarrollo de esta memoria. Por lo tanto, de acuerdo a lo expuesto en este punto, dos expresiones de densidad de fuerza sobre un dipolo magnético, las dadas por las ecuaciones (1.15) y (1.16), han sido obtenidas bien partiendo del modelo de dipolo magnético constituido por dos monopolos magnéticos o bien a partir del momento dipolar obtenido a partir de corrientes ligadas. No obstante, la aplicación de estas expresiones ha suscitado un cierto grado de controversia científica.

Así, a modo de ilustración, en (Odenbach y Liu, 2001) se concluye la existencia de fuertes discrepancias experimentales en el uso de la expresión (1.15) en ferrofluidos. En un trabajo inmediatamente posterior (Engel, 2001) se argumenta que tales discrepancias obedecen a un incorrecto uso de la expresión (1.15) al no tener en cuenta términos de fuerza superficial. Efectivamente, tal y como se expone en (Petit et al, 2011), pueden utilizarse indistintamente las expresiones:

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 \quad (1.19)$$

---

<sup>18</sup> La corriente de desplazamiento en un medio viene dada por la expresión  $\mathbf{J}_d = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , donde  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica del medio y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico.

donde  $\mathbf{H}_0$  es únicamente el campo magnético externo<sup>19</sup>, que no incluye al generado por el propio medio magnético, y que no requiere de términos de fuerza superficial y la densidad (1.15), que necesariamente ha de incluir un término superficial, dado por la expresión

$$\mathbf{f}^s = \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \quad (1.20)$$

de tal forma que la actual formulación del método de Brown-Kelvin está constituido por la integración al volumen del cuerpo de la densidad (1.15) y por la integración en la superficie del cuerpo de la densidad (1.20) (Jin et al., 2010)<sup>20</sup>. El modelo de Brown está descrito

---

<sup>19</sup> Considérese aquí las consideraciones expuestas respecto a esta expresión en formulaciones anteriores.

<sup>20</sup> Aunque este aspecto no será tratado en la presente sección, el efecto conjunto de la integración volumétrica y superficial de las ecuaciones (1.15) y (1.20) es equivalente (Petit et al, 2011) a una única integración de volumen de la densidad  $\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla (\mathbf{m}^2)$  y una inmediata consecuencia de este resultado remite de nuevo a la ambigüedad en la definición de una densidad de fuerza. Efectivamente, el término superficial (1.20) es un término que provoca tensiones normales a la superficie del cuerpo y tales tensiones normales, mediante la aplicación del teorema de Green-Ostrogradski, se considera distribuido en el volumen del cuerpo, tal y como se observa en la ecuación (1.21). La distribución de la densidad de fuerza en componentes volumétricas y superficiales es pues un elemento de interés en el análisis de estas distribuciones locales de fuerza y, como se tratará posteriormente, en la formulación de tensores de tensiones magnetostáticas de Maxwell en el medio.

en (Jin et al., 2010). Se trata de un modelo desarrollado por W.F. Brown en su tesis doctoral<sup>21</sup>. De acuerdo a este método, la fuerza total sobre un medio magnético puede ser obtenida por cualquiera de las dos expresiones (1.21) y (1.22):

$$\mathbf{F} = \int_V \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} dV + \int_S \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2 dS \mathbf{n} \quad (1.22)$$

donde  $V$  es el volumen considerado y  $S$  su superficie. En (Jin et al., 2010) se justifica, también a partir de la tesis de Brown, que la fuerza total  $\mathbf{F}$  sobre el cuerpo puede obtenerse, a partir de la expresión (1.22) utilizando una densidad de fuerza magnetostática dada por

$$\begin{aligned} f &= m_j B_{j,i} \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{B} \otimes \nabla)^t \mathbf{m} \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde el tensor  $\mathbf{B} \otimes \nabla$  es obtenido como producto diádico o tensorial de los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\nabla$  y viene definido por

$$(\mathbf{B} \otimes \nabla)_{ij} = B_i \partial_j \quad (1.24)$$

y una densidad de fuerza superficial que dependerá en este caso de la componente tangencial de la magnetización en los puntos de la superficie

---

<sup>21</sup> Brown, W.F., (1966). *Magnetoelastic Interactions*. Springer.

$$\mathbf{f}^s = -\frac{\mu_0}{2}(\mathbf{m} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) \quad (1.25)$$

de forma que la fuerza total sobre un medio magnético de volumen  $V$  y superficie  $S$  viene dada por

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{B} \otimes \nabla)^t \mathbf{m} dV + \int_S \left( -\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{m}^2 - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})^2) \mathbf{n} \right) dS \quad (1.26)$$

En algunas referencias, puede consultarse por ejemplo (Zhou, Y. y Zheng, X., 1998), se denomina al método definido por la ecuación (1.26) como método de Eringen-Maugin<sup>22</sup>. Como después se expondrá son muchos los desarrollos y aplicaciones de acoplamiento magnetomecánico basados en este método, razón por la que se ha considerado conveniente mantener esta denominación para este método en la elaboración de esta memoria. Así pues, el método de Eringen-Maugin, EMM, consiste en la adopción de las densidades volumétricas y superficiales (1.23) y (1.25). Realmente, las razones que justifican esta denominación se centran en la adopción de un determinado tensor de tensiones magnetostáticas de Maxwell capaz de reproducir las densidades (1.23) y (1.25). Así mismo, en (Zhou, Y. y

---

<sup>22</sup> Por los desarrollos realizados en (Eringen, A.C., (1980). *Mechanics of Continua*. Krieger, New York) y (Maugin, G.A., (1980). *The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics: Application to Coupled Fields*. *Acta Mechanica*, 35, 1-70. (consultar, por ejemplo, la expresión (4.1), página 24 de este último trabajo). Igualmente, puede consultarse (Maugin, G.A., Eringen, A.C., (1977). *On the equations of the electrodynamics of deformable bodies of finite extent*. *J. de Mécanique*, 16, 101-147.

Zheng, X., 1998) se presenta el método axiomático de Pao-Yeh (Pao, y Yeh, 1973) basado en la introducción de un tensor de tensiones magnetostáticas de Maxwell que reproduce las densidades de fuerza (1.15) y (1.20). No obstante, aun cuando la mayor parte de trabajos científicos, sobre todo en el campo de ferrofluidos, se refieren a este método como método de Kelvin, en esta memoria se denominará, como ya se ha indicado, como método de Brown-Kelvin, BKM.

La densidad de fuerza (1.16) apenas se ha utilizado en modelos de acoplamiento magnetomecánico. No ha podido encontrarse en la revisión bibliográfica realizada para el desarrollo de esta memoria la densidad de fuerza superficial asociada a esta densidad volumétrica, tal y como ocurre con los procedimientos BKM y EMM. Sin embargo, las densidades superficiales no van a tener una relevancia significativa en el contexto de este trabajo, que estará centrado en los diferentes tensores de Maxwell asociados a cada una de las densidades volumétricas de fuerza. En este contexto tensorial, las fuerzas superficiales pueden ser obtenidas bajo una única representación tensorial y su desarrollo, para el tensor asociado a la densidad (1.16) conducirá a la correspondiente densidad de fuerza superficial. Por otra parte, las tres densidades consideradas hasta ahora basadas en modelos dipolares (1.15), (1.16) y (1.23), como se comprobará posteriormente, conducen a tensores de tensiones magnetostáticas de Maxwell que difieren únicamente en el término diagonal que provocarán tensiones superficiales normales a la superficie. Por estas razones, no se considera de relevancia el hecho de que no haya podido documentarse la contribución superficial asociada a la densidad volumétrica (1.16). En (Hutter et al, 2006), se presenta una metodología de acoplamiento magnetoelástico. Se consideran cinco densidades de fuerza, entre las que figuran las densidades de fuerza correspondientes a los métodos EQM, EJM, BKM y EMM. En este texto se considera además el modelo de Maxwell-Minkowski, que se desarrolla bajo la introducción de la densidad:

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{H} \otimes \nabla)^t \mathbf{m} \quad (1.27)$$

que, como se observa, presenta la misma estructura formal que la densidad de Eringen-Maugin, pero sustituyendo la inducción magnética  $\mathbf{B}$  por el campo magnético  $\mathbf{H}$ . Como en el caso de la densidad de fuerza magnetostática (1.16), no se ha podido encontrar ninguna referencia relativa al término de fuerza superficial asociado, en su caso, a la densidad (1.27).

#### 5.- Sumario: densidades volumétrica de fuerza magnetostática

Es conveniente en este punto, para desarrollos posteriores, presentar un sumario de las seis densidades de fuerza que han podido documentarse en la elaboración de la actual sección de esta memoria. Como se ha indicado, sólo cuatro de ellas, las correspondientes a los métodos EQM, EJM, BKM y EMM, han sido incluidas con carácter suficientemente general en desarrollos técnicos o científicos documentados en el ámbito del diseño magnetomecánico<sup>23</sup>. Tales

---

<sup>23</sup> Una interesante exposición de estos cuatro métodos puede ser encontrada en (Delfino, 2001). En este trabajo se indica, textualmente, que “*In recent years, the scientific activity on total force computation in 2D and 3D finite element modeling has been concerned with the research of alternative methods for MST and VWM and with their use within the most popular potential-oriented and field-oriented formulations. In this context, the so-called equivalent source methods (ESM) have been investigated and their numerical reliability has been verified in connection to the adopted formulation to solve the 2D or 3D field problem and to the level of mesh refinement*”. Se muestra en este trabajo la concordancia entre los métodos del tensor de Maxwell (MSM) y de los Trabajos Virtuales (VWM) con los métodos de cargas magnéticas y corrientes magnetizantes equivalentes (ESM). Es curioso que, aunque estos métodos, tal y como se ha expuesto en este capítulo, estaban definidos desde las primeras décadas del siglo XX,

cuatro métodos incluyen términos superficiales que han sido obtenidos en el contexto del desarrollo de estos métodos y en su aplicación en la determinación de fuerzas globales sobre medios magnéticos. El análisis tensorial que se desarrollará en un capítulo posterior contribuirá a analizar los términos superficiales que podrían ser considerados en el cálculo de fuerzas utilizando las restantes densidades volumétricas (1.16) y (1.27).

A. Modelos dipolares

A1: *Método de Brown-Kelvin (BKM)*

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (1.28)$$

A2: *Método dipolar básico (DBM)*

$$\mathbf{f} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1.29)$$

A3: *Método de Maxwell-Minkowski (MMM)*

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{H} \otimes \nabla)^f \mathbf{m} \quad (1.30)$$

A4: *Método de Eringen-Maugin (EMM)*

$$\mathbf{f} = (\mathbf{B} \otimes \nabla)^f \mathbf{m} \quad (1.31)$$

B. Modelos de fuente magnética equivalente

---

tomen especial relevancia a comienzos del XXI. La razón, como apunta F. Delfino en este texto, es la posibilidad de obtener resultados mediante simulación numérica con la finalidad de evitar algunos de los problemas inherentes a los métodos de Maxwell y de Trabajos Virtuales.



*B1: Método de cargas magnéticas equivalentes (EQM)*

$$\mathbf{f} = -\mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{m}) \mathbf{H} \quad (1.32)$$

*B2: Método de corrientes magnetizantes equivalentes (EJM)*

$$\mathbf{f} = (\nabla \times \mathbf{m}) \times \mathbf{B} \quad (1.33)$$

Como se comprobará, las cuatro densidades dipolares darán lugares a tensores de Maxwell en el medio que no serán simétricos en los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  y que se diferenciarán únicamente en el valor del término diagonal, es decir, en tensiones normales en cada punto de la superficie del cuerpo considerado. Por el contrario, los modelos de fuente magnética equivalente proporcionarán tensores simétricos. Considérese también la semejanza matemática entre los modelos  $A1$  y  $A2$  entre sí y los modelos  $A3$  y  $A4$ , también entre ellos. Su diferencia consiste en que la interacción con la magnetización  $\mathbf{m}$  que da lugar a la densidad de fuerza se formula en términos de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  o del campo magnético  $\mathbf{H}$ . Este hecho es, por otra parte, precisamente el que establece la diferencia esencial entre los métodos  $B1$  y  $B2$ . Ya se ha indicado que estas densidades de fuerza son esencialmente diferentes, es decir, determinan diferentes distribuciones de fuerzas y, como consecuencia, el acoplamiento magnetoelástico requerirá en cada caso de diferentes tensores de tensiones de Cauchy.

## 6.- Ecuaciones de campos en magnetostática

Las ecuaciones de Maxwell definen el marco teórico de unificación de las interacciones eléctricas y magnéticas. En su formulación actual, tales ecuaciones son las que a continuación se detallan.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.34)$$

La ecuación anterior representa la inexistencia de cargas o monopolos magnéticos generadores de campo magnético. La representación integral de (1.34), utilizando el teorema de Gauss-Ostrogadski es

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0 \quad (1.35)$$

de forma que el flujo de la inducción magnética a través de cualquier superficie cerrada es siempre nula. Una segunda ecuación de Maxwell semejante para el campo eléctrico es la obtenida a partir del teorema de Gauss, que establece que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es siempre igual a la carga eléctrica contenida en tal superficie dividida por la constante dieléctrica del vacío,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.36)$$

y, que, por lo tanto, atribuye al campo eléctrico la cualidad de estar generado por *fuentes* de campo o cargas eléctricas. La expresión diferencial de la ecuación (1.36), o teorema de Gauss en forma local es

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.37)$$

donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga eléctrica. Estas dos primeras ecuaciones de Maxwell se refieren pues a las respectivas naturalezas de los campos eléctrico y magnético, respecto a sus propiedades de flujo a través de cualquier superficie cerrada o, lo que resulta equivalente, a la posibilidad de que ambos campos estén generados por fuentes puntuales.

Una tercera ley de Maxwell es la representativa del proceso de inducción establecido por la ley Faraday, que indica que la circulación del campo eléctrico a lo largo de cualquier línea  $C$  es igual a la variación con el tiempo, cambiada de signo, del flujo de la inducción magnética a través de la superficie  $S$  limitada por la línea cerrada,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.38)$$

La forma local o diferencial de esta ley de Faraday puede obtenerse por aplicación del teorema de Stokes, de tal forma que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.39)$$

de tal forma que

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.40)$$

es decir, el rotacional del campo eléctrico en un punto coincide con la variación temporal, cambiada de signo, de la inducción magnética en ese punto.

Y, por último, el teorema de Ampère establecía que la circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada  $C$  debía coincidir con la intensidad neta de corriente eléctrica  $I$  que atravesara cualquier superficie  $S$  limitada por tal curva. La posterior generalización de este teorema desarrollada por Maxwell establece que tal circulación coincide, en el caso general de campos eléctricos variables, con la intensidad de corriente eléctrica más la intensidad de corriente de desplazamiento  $I_D$  que atraviesan cualquier superficie limitada por tal curva. Utilizando de nuevo el teorema de Stokes y

definiendo las densidades de corrientes libre (o real)  $\mathbf{J}$  y de desplazamiento  $\mathbf{J}_D$  como

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} \quad (1.41)$$

$$I_D = \int_S \mathbf{J}_D d\mathbf{S}$$

con

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.42)$$

siendo el vector desplazamiento  $\mathbf{D}$  proporcional, en el caso de un medio isótropo, al vector campo eléctrico, siendo la constante de proporcionalidad la constante dieléctrica del medio,  $\epsilon$ ,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.43)$$

se obtiene la forma diferencial de la última de las cuatro ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.44)$$

Las ecuaciones (1.34), (1.37), (1.40) y (1.44) constituyen las ecuaciones de Maxwell en forma local y determinan el comportamiento de los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{H}$ , estando los campos inducción magnética  $\mathbf{B}$  y desplazamiento  $\mathbf{D}$  relacionados con los anteriores por las ecuaciones (1.1) y (1.43).

La ecuación (1.1) puede expresarse con carácter general como

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_p) \quad (1.45)$$

donde  $\mathbf{m}_p$  es la magnetización permanente, independiente del campo magnético  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{m}_i$  es la magnetización inducida, dependiente del campo  $\mathbf{H}$ , de la forma, para materiales isótropos,

$$\mathbf{m}_i = \chi(\mathbf{H})\mathbf{H} \quad (1.46)$$

donde  $\chi(\mathbf{H})$  se denomina susceptibilidad magnética y es adimensional. En materiales ferromagnéticos, de mayor interés en aplicaciones industriales, la susceptibilidad magnética es alta (valores típicos son 1000 en fundición gris y valores máximos de 8000 en hierro dulce). Los materiales paramagnéticos tienen una susceptibilidad magnética positiva y muy baja (del orden de  $10^{-6}$ ) mientras que los diamagnéticos tienen susceptibilidad negativa también de este orden. En los materiales en los que la relación (1.46) pueda expresarse como

$$\mathbf{m}_i = \chi\mathbf{H} \quad (1.47)$$

es decir, cuando la susceptibilidad magnética sea independiente del campo magnético, se habla de comportamiento lineal de la magnetización. En los materiales sin magnetización permanente, la ecuación (1.45) se expresa como

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi(\mathbf{H}))\mathbf{H} = \mu_0\mu_r(\mathbf{H})\mathbf{H} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H} \quad (1.48)$$

donde  $\mu(\mathbf{H})$  se denomina permeabilidad magnética del medio y  $\mu_r(\mathbf{H})$  permeabilidad magnética relativa.

El ámbito de la magnetostática queda matemáticamente definido cuando la inducción magnética  $\mathbf{B}$  sea constante en el tiempo. Ello determina que el conjunto de las ecuaciones de Maxwell pueda escribirse como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.49)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.50)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.51)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.52)$$

en las que la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es independiente del tiempo en cada punto.

En la práctica, las condiciones de campo magnetostático se obtienen cuando tanto las corrientes libres  $\mathbf{J}$  como el propio campo eléctrico  $\mathbf{E}$  varíen lo suficientemente lentamente como para que pueda admitirse que las corrientes de desplazamiento sean nulas y el campo  $\mathbf{H}$ , por la ecuación (1.50), puedan considerarse como estacionario. De esta forma, la descripción magnetostática de un sistema queda determinada por las ecuaciones (1.45), (1.46), (1.49) y (1.50) y, por lo tanto, tal descripción puede realizarse independientemente del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ .

## 7.- Fuerzas globales y locales: Problemas actuales

En los apartados precedentes de este capítulo se ha presentado un análisis de los fundamentos teóricos que han permitido definir un conjunto de densidades de fuerza magnetostáticas. Este análisis conduce a una clasificación de tales densidades de fuerza en dos grandes categorías: las fundamentadas en modelos de corriente magnetizante y carga magnética equivalente y las obtenidas a partir de modelos dipolares. Ya se ha indicado también que no todas estas densidades de fuerza han sido utilizadas con igual generalidad o intensidad en la descripción de la interacción magnetostática, tanto en el campo del cálculo de fuerzas globales como en el desarrollo de modelos de acoplamiento magnetoelástico. Como se observará en el desarrollo de este punto, los intentos de determinar la prevalencia

teórica o experimental de alguno de estos modelos sobre el resto se han mantenido presentes en la literatura científica hasta la actualidad. Sin embargo, las investigaciones sobre esta cuestión se han realizado desde diferentes perspectivas, por lo que la valoración de sus resultados en una serie de conclusiones claras es también problemática.

Así se reconoce, a modo de ejemplo, en (Bossavit, 2013), en una exposición en la que se presentan tales densidades de fuerza y se cuestiona también la validez general del método del tensor de Maxwell. En lo sucesivo, en este trabajo se referirá este método con el acrónimo MTM. Aunque el formalismo tensorial asociado a las densidades de fuerza y la generalización del clásico tensor de Maxwell en el vacío a un tensor de Maxwell en un medio continuo se expondrán en el Capítulo 2 de esta memoria, es inevitable la referencia al método MTM en su aplicación a fuerzas globales sobre un medio rodeado del vacío en la exposición de este punto. Es un teorema clásico bien conocido, según el cual la fuerza total sobre un medio magnético rodeado de vacío (en la práctica, aire) puede obtenerse como la integral sobre una superficie cerrada  $S$  arbitraria que incluya la totalidad del medio del tensor

$$\mathbb{T}_0^M = \mu_0 \left( \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{H^2}{2} \mathbb{I} \right) \quad (1.53)$$

El procedimiento MTM ha sido utilizado en el cálculo de fuerzas magnéticas para el diseño de dispositivos electromecánicos con igual generalidad que lo ha sido el procedimiento basado en la aplicación del principio de Trabajos Virtuales (VWM).

En la práctica, son innumerables las referencias de trabajos científicos y técnicos en los que se han aplicado estos dos procedimientos. Una revisión sobre las referencias en el uso de estos procedimientos es inadecuada en esta memoria, puesto que tales métodos no afectan esencialmente a su objeto central, centrado en el

uso de densidades de fuerza en la modelización de la interacción magnetostática. Sin embargo, algunos de los elementos de estos dos procedimientos deberán ser tenidos en cuenta tangencialmente en el desarrollo de esta sección. Así, en (Delfino, 2001) se apuntan algunas razones del interés de los métodos de fuentes equivalentes (ESM) y del método de Kelvin frente a los procedimientos MTM y VWM. Textualmente:

“However, in spite of this large popularity, it is difficult to find in electromagnetic literature any well established and rigorous proof of the validity of both methods in all the typical configurations in which electromagnetic systems have to operate. By way of example, although MST is successfully used in presence of nonlinear ferromagnetic materials, no demonstration of its applicability in such cases can be found in classical textbooks of electrodynamics” y, a continuación, “Similarly, VWM is usually justified writing down the energy conservation principle over a magnetic system in which mechanical deformations, exchanges of heat and changes of temperature as well as of thermodynamic internal energy are neglected during the virtual displacement. But these simplifications are, in reality, untenable, since most of the physical quantities involved in the energy balance are mixed thermodynamic-magnetic terms. In addition, VWM can be employed only in absence of hysteretic phenomena, as classical thermodynamics cannot account for such a behavior and this results in the impossibility of defining the concept of magnetic energy”

Aun cuando, como se ha expuesto en los apartados precedentes de este capítulo, las descripciones del campo magnético en términos de corrientes equivalentes o cargas magnéticas equivalentes, o en términos de dipolos magnéticos, han estado presentes prácticamente desde el inicio de los estudios sobre magnetismo en medios continuos, la preocupación por analizar la adecuación de estos procedimientos en el cálculo de fuerzas surge con mayor intensidad conforme aumenta la complejidad en el diseño de dispositivos electromecánicos. Así, tras el ya mencionado trabajo de (Carpenter, 1959), uno de los primeros textos en los que se expone la problemática de la divergencia entre las



distribuciones locales de fuerza puede ser el también referenciado (Sadowski et al., 1992). En este texto se exponen los métodos EJM y EQM, así como otro método, basado también en (Carpenter, 1959), en el que se combinan distribuciones superficiales de carga y corrientes equivalentes, de tal forma que la fuerza total sobre el medio está constituida únicamente por fuerzas superficiales. En (Sadowski et al, 1992), se expone también el método basado en el principio de Trabajos Virtuales<sup>24</sup>, cuya formulación clásica consiste en enunciar que la fuerza global sobre un medio magnético no deformable puede ser calculada a través de la expresión

$$F_i = -\frac{\delta W}{\delta x_i} \quad (1.54)$$

que indica que la componente en una dirección de la densidad de fuerza en el medio es el cociente entre la variación de la densidad de energía magnetostática en el transcurso de un desplazamiento virtual en esta dirección efectuado a flujo magnetostático constante<sup>25</sup> y el propio desplazamiento virtual efectuado. Esta expresión conduce (Sadowski et al, 1992), a una densidad de fuerza volumétrica dada por<sup>26</sup>

---

<sup>24</sup> En este texto, “Método de variación de la energía”

<sup>25</sup> Por tratarse de la densidad de energía magnética, función de la inducción magnética **B**

<sup>26</sup> Como más adelante se indicará, esta densidad de fuerza es conocida como densidad de Korteweg-Helmholtz. Será tratada en esta memoria posteriormente.

$$\mathbf{f} = -\frac{H^2}{2} \nabla \mu \quad (1.55)$$

La comparación de esas cuatro densidades de fuerza conduce a resultados claramente diferenciados (con unas expresiones analíticas para las componentes tangenciales y normales de la fuerza superficial diferentes y un comportamiento diferente ante el mallado efectuado para el cálculo por elementos finitos) que determina que, en las conclusiones de este trabajo, los autores formulen abiertamente la cuestión: “*parmi les quatre formulations analysées en est-il une qui fournisse la densité de force réelle qui s'exerce sur le matériau magnétique ?*”<sup>27</sup>. La divergencia, como se expone en las conclusiones de este texto, no se refiere a la fuerza global, sino a la distribución local de las fuerzas. En cuanto a ésta, los autores reconocen que :

« Les résultats que nous avons présentés ne permettent absolument pas de conclure et <...> il ne nous semble pas possible de résoudre théoriquement le problème du calcul de la densité de force sans faire appel à une représentation du matériau magnétique plus précise »<sup>28</sup>.

En esta misma línea, en (Muller, W., 1990) se detallan las diferencias entre las densidades superficiales en materiales

---

<sup>27</sup> “Entre las cuatro densidades de fuerza analizadas, ¿existe alguna que proporcione la densidad de fuerza real que se ejerce sobre un medio magnético?”

<sup>28</sup> “Los resultados que hemos presentado no permiten en absoluto concluir y <...> no nos parece posible resolver teóricamente el problema de la determinación de la densidad de fuerza sin recurrir a una representación más precisa del medio magnético”

ferromagnéticos y se proponen métodos numéricos para resolver las divergencias obtenidas en densidades volumétricas comparando los procedimientos EQM, EJM, MTM y VWM. En (Ren, Z., 1994) se comparan también las simulaciones numéricas para el cálculo de las fuerzas locales y globales, concluyendo que el método del tensor de Maxwell y los métodos de fuentes magnéticas son teóricamente equivalentes para el cálculo de la fuerza global, si bien, su exactitud depende de la permeabilidad relativa del material, así como del propio tratamiento numérico. Por otra parte, concluye también que el método de los Trabajos Virtuales es válido para la obtención tanto de las fuerzas locales como globales. Una contrastación experimental de diferentes modelos de fuerza es presentada en (Barré et al, 2006), en el que se analizan las deformaciones obtenidas bajo la aplicación de los procedimientos EQM, EJM, MTM y VWM y su grado de adecuación con la deformación real experimentada por un paralelepípedo situado en el entrehierro de un circuito magnético y empotrado en uno de sus extremos. La deformación medida es la máxima (correspondiente al extremo libre) y se observa que la mayor adecuación con la deformación prevista se obtiene bajo la aplicación del método de Trabajos Virtuales, mientras que los tres restantes métodos determinan unas deformaciones inferiores siendo la deformación obtenida por aplicación del método EQM la más alejada del valor experimental. En esta verificación experimental no se ha valorado el método de Brown-Kelvin.

La distribución de las fuerzas locales en imanes es de especial interés, tal y como ya se ha indicado en el Capítulo 1 de esta memoria. En la documentación científica sobre esta materia es importante considerar la investigación iniciada en (De Medeiros et al, 1998). En este primer trabajo se concluye que la distribución de fuerzas obtenidas en imanes mediante la aplicación del principio de Trabajos Virtuales a las densidades de energía y de co-energía es dependiente precisamente de la expresión o definición de estas magnitudes. Así, un estudio sobre el concepto de energía magnética en imanes como constituida por una energía intrínseca y una energía de interacción es introducido en (De Medeiros et al, 1998a), puesto que, literalmente, se

indica que “*it is shown that the use of simplified expressions can lead to erroneous results*”,<sup>29</sup>.

En un trabajo del mismo año (De Medeiros et al, 1998b) se comparan los métodos EQM, EJM, VWM y MTM en el cálculo de la fuerza global de interacción en dos imanes cúbicos de 1 cm de arista enfrentados. En las conclusiones de este trabajo se enuncia, literalmente que “*The methods based on the equivalent source models are the most imprecise and concerning the force densities, do not have any physical justification. Thus, do not seems to present great interest*”. Este mismo argumento es expuesto en un trabajo posterior (De Medeiros et al, 1999), que enuncia que “*A different force distribution on permanent magnets can be obtained using each of the methods described above. As it has been said, some of these methods are based on equivalent or mathematical models and the resulting force densities represents no physical reality*”. En este trabajo, reproduciendo las densidades de fuerza obtenidas por los métodos EQM, EJM, MTM y VWM, se observan claramente las notables diferencias entre ellas. En el pie de la Fig.2, en la que se representan las densidades EQM, EJM y MTM, se lee: “*Forces distributions by the equivalent models and Maxwell stress tensor (no physical reality)*” y, en las conclusiones, también literalmente: “*One must take care with the use of the methods based on equivalent or mathematical models. They can be only used for the calculation of the global force. But the resulting force densities have no physical meaning. Nevertheless, the use of the virtual work method leads to coherent results and after some physical considerations about the energies in the magnet, the*

---

<sup>29</sup> Tales expresiones simplificadas se refieren a las definiciones clásicas de densidad de energía  $dF = \mathbf{H}d\mathbf{B}$  y de coenergía  $dG = -\mathbf{B}d\mathbf{H}$ . La densidad de energía y de coenergía son pues funciones termodinámica de estado de las variables  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , respectivamente.

*same distribution of forces is obtained by two different formulations*<sup>30</sup>. Thus, it appears that the only method that can be used to calculate the actual force distribution between a magnet and the exterior medium is the one based on the virtual work principle". En (De Medeiros et al, 2000) se comprueba de nuevo que *"the use of the appropriate expressions provides the same local force distribution using scalar (co-energy) or vector potential (energy) formulations"*<sup>31</sup>.

El reconocimiento explícito en (Sadowski et al., 1992) de la insuficiencia de los argumentos teóricos que permitan apuntar hacia una densidad de fuerza *real* sin recurrir a representaciones del material magnético más precisas es ambigua, dado que no permite discernir el ámbito en que este análisis más preciso debe ser realizado. Sin embargo, en (Bossavit, 2011) se reconoce explícitamente que *"the theory of magnetism as due to the motion of electric charges at some microscopic or atomistic level was refuted long ago"* y se refiere a (van Leeuwen, 1921)<sup>32</sup>. La autora de este trabajo muestra, en el

---

<sup>30</sup> Se refiere al uso de las densidades de energía o de coenergía modificadas según lo indicado en (De Medeiros et al, 1998a)

<sup>31</sup> Puede consultarse la introducción de los potenciales magnéticos escalar y vectorial, por ejemplo, (Landau y Lifshitz, 1981:143-145). El potencial escalar es más adecuado en la derivación de fuerzas a partir de la co-energía, función del campo magnético, y el vectorial más adecuado cuando la derivación se hace en términos de la energía, función de la inducción magnética.

<sup>32</sup> Se trata de un extracto de su tesis doctoral, *Vraagstukken uit de electronentheorie van het magnetisme*, dirigida por Lorentz y defendida en la Universidad de Leyde, en 1919. En esta tesis se expone el denominado posteriormente teorema de Bohr-van Leeuwen, inicialmente expuesto por Bohr en su tesis doctoral en 1911 y confirmado posteriormente por van Leeuwen. De acuerdo a este teorema, las propiedades magnéticas de la

ámbito de la física estadística, que el valor medio del momento magnético es siempre nulo en el marco del magnetismo clásico, en contradicción con los trabajos previos de Langevin<sup>33</sup>, en los que se concluía que tanto el diamagnetismo como el paramagnetismo podía ser explicados por la *teoría electrónica* (esencialmente, una teoría conformada por diferentes modelos moleculares con corrientes electrónicas localizadas en órbitas elípticas), y de Kroo<sup>34</sup>, que mostró que únicamente el diamagnetismo podía ser explicado desde esta teoría.

Obviamente, este resultado podría tener como consecuencia una argumentación que refutara la totalidad de los modelos de densidades de fuerza. Efectivamente, como se ha mostrado en secciones anteriores, la totalidad de estos modelos estudiados parten de la suposición de que las propiedades magnéticas del medio pueden ser explicadas en términos de cargas magnéticas equivalentes, corrientes magnetizantes equivalentes o dipolos magnéticos. Se parte entonces de la hipótesis de que las propiedades magnéticas del medio pueden ser descritas desde el campo del electromagnetismo clásico, en contradicción con el teorema Bohr-van Leeuwen. Pero, por otra parte, ha quedado mostrado que el campo magnético en el exterior de un medio magnético puede ser obtenido adecuadamente por cualquiera de estos métodos y la fuerza global sobre un medio continuo sometido

---

materia (diamagnetismo, paramagnetismo o ferromagnetismo) no pueden ser explicadas desde la física clásica y requieren de una fundamentación cuántica.

<sup>33</sup> P. Langevin (1905). Magnétisme et théorie des électrons. *Ann. de Chim. et de Phys.*, VIII, 5, p. 70.

<sup>34</sup> J.N. Kroo (1913). Zur statistischen Elektronentheorie der Diëlektrizität und des Magnetismus. *Ann. der Phys.* 42, 1354.

a un campo externo puede ser igualmente reproducida por todos ellos. Sin embargo, los resultados de (van Leeuwen, 1921) se refieren a la reproducción de la densidad de momento magnético a partir de corrientes electrónicas. Su conclusión inmediata consistiría entonces que tales corrientes moleculares no son reales o, al menos, no proporcionan, estadísticamente, y en el dominio de la mecánica clásica, un momento magnético resultante no nulo. Ahora bien, esta afirmación no resta valor al modelo basado en corrientes magnetizantes equivalentes, que deberían ser consideradas, al igual que lo son las cargas magnéticas equivalentes, como ficticias o, en sentido genérico, y en consonancia con la propia denominación de estos métodos, como corrientes *equivalentes*, es decir, corrientes ficticias que pueden reproducir las propiedades magnéticas globales del medio. Otra cuestión, efectivamente, es la distribución local de estos esfuerzos, o densidades de fuerza. Las discrepancias entre estas distribuciones han sido puestas de manifiesto en numerosos trabajos científicos, alguno de los cuales ya ha sido tratado en esta memoria. Han sido también descritos resultados de simulación numérica de deformaciones producidas por las diferentes densidades de fuerza. Es interesante en primer término reseñar el resultado obtenido en (Lee, S-H. et al, 2000). En este trabajo se comparan las densidades de fuerza de Kelvin, de Korteweg-Helmholtz, de carga magnética equivalente y de corriente magnetizante equivalente. Para exponer los resultados de este trabajo denotaremos por  $\mathbf{f}^{K-B}$ ,  $\mathbf{f}^{K-H}$ ,  $\mathbf{f}^{EQ}$ ,  $\mathbf{f}^{EJ}$  respectivamente, a estas densidades de fuerza. Mediante procedimientos algebraicos se obtienen en este trabajo las siguientes relaciones:

$$\mathbf{f}^{K-B} - \mathbf{f}^{K-H} = \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) H^2 \right] \quad (1.56)$$

$$\mathbf{f}^{K-B} - \mathbf{f}^{EQ} = \vec{\nabla} \left[ \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mu_0 H^2 \right] \quad (1.57)$$

$$\mathbf{f}^{K-B} - \mathbf{f}^{EJ} = \mu_0 \vec{\nabla} \left[ \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} M^2 \right] - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{M} \quad (1.58)$$

La integración de estas densidades de fuerza prueba que la diferencia entre las fuerzas totales de los métodos de Kelvin-Brown con los métodos de Korteweg-Helmholtz y de cargas magnéticas equivalentes consiste en un término normal a la superficie del medio, correspondiente a la integral del término correspondiente a la divergencia, haciendo uso del teorema de Gauss-Ostrogadski. En un medio considerado incomprensible las deformaciones producidas por aplicación de estos procedimientos son entonces las mismas. Sin embargo, la ecuación (1.39) indica que las deformaciones obtenidas por aplicación de los métodos de Kelvin-Brown y de corrientes equivalentes no son las mismas (la desigualdad entre sus densidades de fuerza no es únicamente la divergencia de una función escalar). De acuerdo a esos resultados, el método de corrientes equivalentes proporcionaría diferentes resultados de deformación a los obtenidos por aplicación de cualquiera de los tres métodos restantes. Estos resultados teóricos son reproducidos en tres simulaciones numéricas.

La densidad de fuerza de Korteweg-Helmholtz utilizada en este trabajo coincide con la expresión (1.55), válida para materiales lineales. En un posterior trabajo (Lee, S-H. et al, 2004), se estudia la correlación entre el método de cargas equivalentes y los métodos del tensor de Maxwell y de Korteweg-Helmholtz para materiales no lineales. La expresión general de la densidad de fuerza de Korteweg-Helmholtz<sup>35</sup> en ausencia de corrientes libres, es

$$\mathbf{f} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \nabla \alpha_i - \nabla \left( \sum_i \alpha_i \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right) \quad (1.59)$$

---

<sup>35</sup> Puede consultarse, por ejemplo, Melcher, J.R. (1981). *Continuum Electromechanics*. MIT Press, Cambridge, MA,



donde  $\alpha_i$  son parámetros que se corresponden a la caracterización magnética del medio. El desarrollo de esta expresión para materiales no lineales conduce (Lee, S-H. et al, 2004) a que la diferencia entre las densidades de fuerza de Kelvin-Brown y de Korteweg-Helmholtz pueda expresarse como

$$\mathbf{f}^{K-B} - \mathbf{f}^{K-H} = \vec{\nabla}[p_1] \quad (1.60)$$

donde  $p_1$  es una función escalar de los campos  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ , de la energía  $W$  y de sus derivadas respecto a los parámetros materiales  $\alpha_i$ . La expresión (1.60) supone pues una generalización de la (1.56). Dado que (1.57) permanece siendo válida para materiales no lineales, se concluye en este trabajo que el método de cargas magnéticas equivalentes aplicado a materiales lineales conduce a la misma fuerza global que la obtenida por aplicación del método del tensor de Maxwell y utilizando la densidad de Korteweg-Helmholtz. La distribución de tensiones se evalúa atendiendo a la máxima desviación en la flexión de un cantiléver próximo a un acero excitado por un devanado, obteniéndose un mejor ajuste entre los resultados utilizando los métodos de Maxwell y de cargas magnéticas equivalentes en el caso lineal y un error de un 20% entre ambos métodos cuando el material no es lineal.

Como ya se ha indicado, no todas las densidades de fuerza analizadas en las secciones precedentes han sido utilizadas con similar generalidad en aplicaciones magnetomecánicas. En estos últimos dos trabajos se han analizado los procedimientos KBM, EJM y EQM bajo los que se han desarrollado la práctica totalidad de estos estudios y desarrollos. Resultados similares son expuestos también en (Lee, S-H., 2005). En el campo de ferrofluidos, los resultados anteriores no son de aplicación. En (Petit et al, 2011) se comparan los métodos EQM, EJM y BKM. Se estudian diferentes formulaciones para este último método, procediendo a la comparación con los resultados obtenidos por aplicación del software Flux2D y concluyendo que

únicamente la densidad de fuerza de Kelvin puede considerarse ajustada a los resultados de simulación numérica.

Una importante limitación está asociada a los métodos basados en densidades de fuerza originadas por algún modelo de interacción, así como con el procedimiento del tensor de Maxwell. Tales métodos pueden aplicarse, en sus formulaciones expuestas anteriormente, cuando el medio magnético se halla rodeado del vacío. Aunque no se encuentra fácilmente en la literatura científica un enunciado explícito de esta limitación<sup>36</sup> es expuesto claramente en (Choi et al, 2005) en su introducción:

“There are several conventional methods for calculating electromagnetic forces such as Maxwell stress tensor, virtual work, equivalent current and equivalent magnetic charge for the total force calculation. They are defined only for the objects surrounded by air or empty space. In order to apply these methods to a body contacting with other materials, it is necessary that a thin air-gap should be inserted between materials, or  $\mathbf{H}$  and  $\mathbf{B}$  must be estimated for the force calculation as if there were air-gap”.

Por otra parte, en (Sánchez-Grandía et al, 2008) se obtienen, a partir del desarrollo de un formalismo tensorial<sup>37</sup> expresiones

---

<sup>36</sup> Hay que tener en cuenta que, en la mayor parte de dispositivos electromecánicos, la determinación de la fuerza entre dos cuerpos en contacto tiene una incidencia limitada. En estos casos suele utilizarse el método del tensor de Maxwell creando un *air gap* ficticio que permita aislar individualmente los cuerpos en contacto. Esta metodología será la base para el desarrollo de métodos generalizados de Kelvin o de fuentes magnéticas equivalentes que se exponen a continuación.

<sup>37</sup> El Capítulo 2 de esta memoria está dedicado al problema del tensor de Maxwell en un medio magnético.

ampliadas de los procedimientos de Kelvin y de fuentes magnéticas equivalentes válidas para calcular la fuerza global cuando el cuerpo no está rodeado del vacío. En (Choi et al, 2005) se inicia una línea de investigación tendente a la resolución del problema de fuerzas entre cuerpos en contacto utilizando las densidades de fuerza de Kelvin, de cargas magnéticas equivalentes y de corrientes magnetizantes equivalentes. Tales métodos se conocen como Métodos de densidades de fuerza generalizadas.

Así en (Choi et al, 2005) se generaliza la expresión (1.11) para el cálculo de la densidad de fuerza superficial sobre un cuerpo rodeado del vacío. Usando la notación empleada en este trabajo, (1.11) se representa como

$$\mathbf{f}_s = \sigma_m \mathbf{H}_{ext} \quad (1.61)$$

siendo

$$\mathbf{H}_{ext} = \frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \quad (1.62)$$

siendo  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$  los campos magnéticos a ambos lados de la superficie de separación del medio (medio  $1$ , el vacío). Cuando se consideran dos medios en contacto, aparecerán dos densidades de carga magnética equivalente, de tal forma que la fuerza sobre el medio  $1$  (medio que rodea al cuerpo) considerará también el campo en el medio  $1$  producido por la densidad superficial de carga magnética en el medio  $2$  y viceversa, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1s} &= \sigma_{m1} (\mathbf{H}_{ext} + \mathbf{H}_{2up}) \\ \mathbf{f}_{2s} &= \sigma_{m2} (\mathbf{H}_{ext} + \mathbf{H}_{1down}) \end{aligned} \quad (1.63)$$

siendo  $\mathbf{H}_{2up}$  el campo generado en el medio  $1$  por la densidad de carga magnética del cuerpo  $2$ ,

$$\mathbf{H}_{2up} = \frac{\sigma_{m2}}{2\mu_0} \mathbf{n}_2 \quad (1.64)$$

y  $\mathbf{H}_{1down}$  el campo creado en el medio 2 por la densidad de carga magnética del cuerpo 1,

$$\mathbf{H}_{1down} = \frac{\sigma_{m1}}{2\mu_0} \mathbf{n}_1 \quad (1.65)$$

y  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  los vectores unitarios normales a las correspondientes superficies y dirigidos hacia fuera del correspondiente cuerpo. Un procedimiento absolutamente similar se emplea en (Choi et al, 2006) en la definición de un método generalizado de corrientes magnetizantes equivalentes. Así, la expresión equivalente a (1.13), en este trabajos se formula como

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{J}_{ms} \times \mathbf{B}_{ext} \quad (1.66)$$

siendo

$$\mathbf{B}_{ext} = \frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \quad (1.67)$$

Las expresiones equivalentes a (1.63)-(1.65) para este método se introducen bajo la misma justificación:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1s} &= \mathbf{J}_{1s} \times (\mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{2up}) \\ \mathbf{f}_{2s} &= \mathbf{J}_{2s} \times (\mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{1down}) \end{aligned} \quad (1.68)$$

con

$$\mathbf{B}_{2up} = -\left(\frac{\mu_0}{2}\right) J_{2s} \mathbf{t}_2 \quad (1.69)$$

$$\mathbf{B}_{1down} = -\left(\frac{\mu_0}{2}\right)J_{1s}\mathbf{t}_1 \quad (1.70)$$

donde  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$  son vectores unitarios tangentes a la superficie de separación de los dos medios.

En (Lee et al, 2007) se introduce una expresión generalizada para el cálculo de fuerza utilizando la densidad de Kelvin, en la forma dada por la expresión (1.19). Considérese que en esta expresión se utiliza el campo externo y el cálculo de la fuerza global se realiza únicamente por una integral de volumen de esta densidad, no requiriéndose términos de fuerza superficial. La integración por elementos finitos de (1.19) se realiza en esta propuesta admitiendo que un air-gap virtual de aire rodea cada elemento finito, de forma que el campo  $\mathbf{H}_0$  puede expresarse como

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} + \mathbf{H}_{2up} \quad (1.71)$$

donde  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$  son los campos en el exterior e interior de cada elemento y  $\mathbf{H}_{2up}$  es la intensidad de campo magnético producido por la densidad de carga magnética equivalente  $\sigma_{m2}$ . Se describe en este trabajo también el procedimiento para obtener la fuerza total considerando la expresión (1.22) con el campo total o actual  $\mathbf{H}$ .

El desarrollo de estos métodos generalizados solventa las dificultades de aplicación del método de Trabajos Virtuales para cuerpos en contacto, por una parte, y, por otra, evita la introducción de un gap virtual de aire entre los dos cuerpos necesario para aplicar el método de Maxwell en estos cuerpos en contacto, con el consecuente error propio de esta aproximación. Aplicaciones posteriores de estos métodos pueden consultarse en (Choi et al, 2006), (Jeong et al, 2007) y (Lee et al, 2012), en los que se comparan y analizan los resultados obtenidos por simulación numérica de estos métodos con los métodos

clásicos de Kelvin, de cargas magnéticas y corrientes magnetizantes equivalentes y con los métodos del tensor de Maxwell y de Trabajos Virtuales.

En lo que se refiere al desarrollo de esta memoria, esta serie de trabajos que generalizan los procedimientos ESM y BKM para la resolución de la computación por elementos finitos de la fuerza entre cuerpos en contacto tienen tan sólo un interés relativo. Efectivamente, tales métodos están fundamentados en la introducción de campos en un air-gap virtual. Se han documentado resultados coherentes con los procedimientos MTM y VWP y su interés radica especialmente en los algoritmos desarrollados para la simulación por elementos finitos.

Desde un enfoque estrictamente teórico, la introducción de estos campos adicionales obedece a las mismas justificaciones que las ya expuestas para los métodos de fuentes equivalentes o de Kelvin. Sin embargo, una cuestión metodológica prevalece tras estos resultados: la obtención de fuerzas entre cuerpos en contacto partiendo de estos modelos de fuerza parece necesitar, tanto en el método del tensor de Maxwell como en los métodos de fuentes equivalentes o de Kelvin, es decir, en los métodos fundamentados en la modelización de la interacción de un medio con un campo externo, de la ruptura del material o de su aislamiento a través de un air-gap virtual. Como se expondrá en el Capítulo II de esta memoria, la definición de un tensor de Maxwell en un medio continuo obviaría, de forma natural, esta dificultad.

Un análisis interesante de la distribución de fuerzas basadas en los modelos de Kelvin-Brown y de corrientes magnetizantes equivalentes puede encontrarse en (Kovanen et al, 2012), basado en

un trabajo previo de los mismos autores (Kovanen et al, 2011)<sup>38</sup>. Utilizando el marco formal de la geometría diferencial y mediante aplicación del procedimiento de Trabajos Virtuales, los autores muestran la equivalencia entre ambos modelos, en un sentido muy interesante, expuesto en las conclusiones de (Kovanen et al, 2012): “*By restricting the force localization to subvolumes one avoids the assignement of physical meaning to the force densities obtained by using the classical materials models*”. En este mismo trabajo se procede a la simulación numérica de las fuerzas en contacto entre dos cuerpos (acero de permeabilidad relativa  $\mu_r = 1000$  y un imán permanente con magnetización constante utilizando estos dos modelos dipolares.

Pero la aportación sustancial de esta investigación puede consistir en el análisis local, utilizando los métodos formales de la geometría diferencial, de las divergencias formales entre los modelos de fuerza considerados. Se trata de una línea de investigación que no puede ser abordada en esta memoria, pero que incide en el núcleo de la ambigüedad en la definición de las fuerzas magnetostáticas en el interior de un medio magnético. Por otra parte, estos desarrollos están esencialmente ligados a la simulación numérica mediante elementos finitos del cálculo de las fuerzas locales y globales.

## 8.- Discusión

Como se ha expuesto en esta sección, la cuestión de la *verdadera* naturaleza de la distribución de fuerzas en un medio

---

<sup>38</sup> Estos métodos son referidos en este trabajo como *Magnetic Charge Dipole Model* y *Electric Current Dipole Model*, respectivamente.

magnético no está resuelta en la actualidad. La fuerte discrepancia de resultados en la aplicación de estos modelos en materiales ferromagnéticos, con distribuciones superficiales claramente desiguales constituyó una primera evidencia de la importancia de esta cuestión en el diseño de aplicaciones o dispositivos electromecánicos, que se pone de manifiesto ya en la primera mitad del siglo pasado (la contribución de Carpenter (Carpenter, 1959) fue esencial en este contexto).

El importante avance en métodos numéricos desde ese momento ha posibilitado un importante desarrollo tanto teórico como experimental del procedimiento basado en el principio de Trabajos Virtuales. Como consecuencia, se ha podido contrastar las fuerzas globales obtenidas mediante la aplicación de las expresiones de densidades de fuerza volumétricas y superficiales basadas en modelos de interacción magnética en el medio continuo. Los resultados documentados muestran que tales fuerzas globales concuerdan entre sí y con la obtenida por aplicación del principio de Trabajos Virtuales.

Es extraordinariamente amplia la documentación científica sobre la implementación y dificultades de aplicación del método basado en este principio; tal documentación se refiere no sólo a los problemas teóricos inherentes a este método sino también al desarrollo de los métodos de cálculo basado en elementos finitos que permiten optimizar no sólo el procedimiento de cálculo sino también su grado de aproximación con resultados experimentales. Ya se ha indicado que en el contexto de este trabajo sólo se ha abordado tangencialmente estos procedimientos, puesto que su estudio se aleja sustancialmente del objeto central de investigación que se aborda en este trabajo. Sin embargo, como también se ha indicado, es éste el procedimiento usualmente utilizado en la simulación numérica de la distribución magnética de los campos magnético, inducción magnética y magnetización, por lo que sus resultados han de ser siempre tenidos en consideración y, muy en particular, cuando su aplicación permite determinar distribuciones volumétricas y superficiales de fuerza.

El método de obtención de fuerzas por aplicación de la integración del tensor de Maxwell es también utilizado usualmente en



el cálculo de fuerzas globales. Como en la aplicación basada en el principio de Trabajos Virtuales, la obtención de fuerzas en cuerpos en contacto ha sido una de sus principales limitaciones. Su uso en la determinación de densidades de fuerza constituye una posibilidad que lleva asociada un error básico, al necesitar un *air-gap* virtual en el que poder integrar tal tensor de Maxwell en el vacío.

Para salvar estas dificultades se ha desarrollado una potente investigación tendente a la extensión de los métodos de fuerza basados en modelos de interacción (especialmente, los métodos de fuentes equivalentes y el método de Brown-Kelvin) que permiten salvar esta dificultad mediante la introducción de campos adicionales en un *air-gap* virtual en la superficie de separación entre medios.

Como se observa, entonces, se da una fuerte discrepancia en torno la validez de los métodos basados en densidades de fuerza fundamentadas en modelos de interacción. Efectivamente, si se admite la radical conclusión presentada por De Medeiros en sus trabajos relativos a análisis de la distribución de fuerzas en imanes, los métodos de extensión de tales procedimientos para abordar el problema del cálculo de fuerzas en cuerpos en contacto también estarían carentes de fundamentación, aun cuando la concordancia de estos procedimientos con resultados experimentales ha sido suficientemente documentada.

En esta memoria se ha procedido a una clasificación de modelos de interacción magnética en el medio continuo. Se han documentado cuatro modelos dipolares y dos modelos de fuentes magnetizantes equivalentes. De estos seis modelos, son cuatro los que han sido utilizados con mayor frecuencia en análisis comparativos de resultados. Son los dos métodos de fuentes magnetizantes y los métodos dipolares de Brown-Kelvin y de Eringen-Maugin. Se han documentado resultados que han intentado valorar la adecuación de estos modelos a las deformaciones elásticas observadas en configuraciones experimentales sencillas, enfrentando también estos resultados a los obtenidos por aplicación del principio de Trabajos Virtuales. Del análisis de referencias que se ha efectuado en esta

memoria no es posible concluir la clara *inadecuación* de alguno de estos modelos frente al resto.

En este contexto, se muestra como evidente la necesidad de extender el problema de las divergencias entre las fuerza locales obtenidas por aplicación de los diferentes modelos de interacción a ámbitos más extensos o complejos. Es un interesante problema de fundamentación científica. Efectivamente, los diferentes modelos de interacción se han desarrollado desde la única perspectiva inicialmente posible: la representación de la interacción de la materia con un campo externo admitiendo que las propiedades magnéticas de la materia se obtienen a partir de propiedades magnéticas de elementos aislados en el vacío, sean éstos monopolos magnéticos, corrientes magnetizantes o dipolos magnéticos en alguna de sus formas. Evidentemente, se trata tan sólo de modelizaciones o representaciones de la materia, en lo que se refiere a sus propiedades magnéticas, y, en cuanto tales, ha de admitirse, a raíz de las divergencias observadas en su aplicación, que tales modelizaciones son incompletas o, expresado en otros términos, no representan adecuadamente la complejidad de la interacción de un cuerpo con propiedades magnéticas con un campo exterior. Ahora bien, la admisión de este hecho no resta valor a tales modelizaciones, en tanto en cuanto, muy significativamente, todas ellas son capaces de reproducir la fuerza global sobre un cuerpo.

Así pues, debería ser de rigor un estudio teórico sobre esta problema que, sin embargo, y salvando algunas excepciones, como las que se refieren a los trabajos de Kovanen indicados en este Capítulo, en los que estas discrepancias han sido analizadas desde la perspectiva del tratamiento del continuo bajo procedimientos de geometría diferencial, no ha sido tratado en los términos expuestos en esta discusión. Ha sido una constante en la investigación en este campo la contraposición de estos modelos, bajo el interés de poder llegar a concluir que alguno de estos modelos representa *realmente* la densidad de fuerza en el medio continuo. Desde el punto de vista del autor de esta memoria, tales esfuerzos han estado condicionados por la hipótesis previa de que alguna de las modelizaciones propuestas es

*esencialmente válida* frente al resto y, por ello mismo, no han desembocado en resultados concluyentes.

En cualquier caso, ha resultado sorprendente, en el proceso de desarrollo de este primer Capítulo, el aparente desinterés con que se ha tratado la cuestión de la divergencia entre métodos de cálculo de fuerzas. Han resultado numerosos los textos y resultados en los que se adopta alguna de ellas sin hacer referencia a este hecho y muy pocos los que han abordado la naturaleza divergente de estas modelizaciones, como también ha sido sorprendente la escasa fundamentación documental, a veces incluso contradictoria, en el momento de admitir alguna de estas modelizaciones como base de desarrollos técnicos o experimentales. El hecho de que mismas modelizaciones hayan sido referenciadas bajo diferentes denominaciones da ya muestra de la ambigüedad con que ha sido tratada la fundamentación científica de estos métodos. Como ejemplo quizás más significativo, la ausencia de referencias a los iniciales trabajos de Poisson o Thompson en la descripción del magnetismo, en los que ya se cimientan los métodos denominados posteriormente de fuentes magnetizantes equivalentes ha de ser especialmente resaltada.

Ahora bien, ¿en qué sentido ha de extenderse la investigación en torno a la naturaleza de la densidad de fuerza magnetostática en un medio continuo? En primer término, ya también desde mediados del pasado siglo, empezó a extenderse el interés por la formulación tensorial de las fuerzas dentro de la materia en el contexto tecnológico en el que se sitúa esta memoria<sup>39</sup>. Cada uno de los modelos

---

<sup>39</sup> Aunque no ha sido tratado en este primer Capítulo, la definición de un tensor de tensiones electromagnéticas en la materia ha sido objeto de polémica desde comienzos de siglo XX, en un contexto científico diferente centrado en la interacción o propagación del campo electromagnético (y, especialmente, la luz) en la materia. La controversia en torno a la validez de

considerados en este Capítulo proporciona una densidad de fuerza que puede obtenerse como la divergencia de un determinado tensor de Maxwell, diferentes también entre sí. Sin embargo, como se expone en el siguiente Capítulo, pueden definirse tensores cuyas divergencias no reproduzcan ninguna de estas densidades clásicas. En este sentido, es posible introducir nuevas densidades de fuerza obtenidas a través de procedimientos tensoriales. Y, en segundo término, es necesario constatar que un ámbito más complejo en el que las densidades de fuerza deban ser tratadas se obtiene a través de modelos de acoplamiento magnetoelástico. Ya se ha descrito que se han documentado trabajos en los que la validez de los métodos de fuerza ha intentado ponerse de manifiesto a través de las deformaciones que tales modelos provocarían en dispositivos sencillos. En este sentido, parece necesario admitir que un único estado de deformación, o de tensión, ha de ser obtenido en una determinada configuración experimental, sea cual fuere la densidad de fuerza utilizada. El

---

los tensores de Abraham (Abraham, M. (1909). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 28, 1-28) y de Minkowski (Minkowski, H. (1908). Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, S. 53-111) está todavía activa (ver, por ejemplo, (Pfeifer, R.N.C. et al, (2009). Constraining Validity of the Minkowski Energy-Momentum Tensor. *Phys. Rev. A* 79(2), 023813)). El tensor de Abraham es simétrico en los campos  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  en contraposición al tensor de Minkowski. Un interesante análisis sobre los tensores de Abraham, Einstein-Laub, Minkowski y Erigen-Maugin, éste último extendido al caso más general de interacción electromagnética puede ser consultado en (Hirsinger y Daher, 1913). La cuestión de la simetría del tensor de Maxwell en un medio magnético será tratada en el Capítulo 2.

---

desarrollo de esta cuestión constituye el objetivo central de esta memoria y será desarrollado en el Capítulo 3 de ésta.



## 2. TENSORES DE MAXWELL

### 1.- Introducción

El capítulo 1 de esta memoria se ha centrado en la descripción de las densidades de fuerza magnetostática en un medio continuo. La fuerza total sobre el cuerpo podrá obtenerse como la integral volumétrica de esta densidad de fuerza. Se ha expuesto igualmente que, para desarrollos de modelos de acoplamiento magnetoelástico, es prácticamente necesario que tales densidades de fuerza estén expresadas en términos de los campos  $\mathbf{H}$  o  $\mathbf{B}$  en su interacción con la magnetización  $\mathbf{m}$ . Estos tres campos son los existentes en una configuración definida, que incluye, por tanto, los efectos sobre estos tres campos del propio comportamiento magnético del material. Por esta razón, a diferencia de cuando se pretende obtener la fuerza total en interacción con un campo estrictamente externo, es necesario considerar términos de fuerza superficial. En la modelización de procesos de acoplamiento magnetoelástico es muy usual la introducción de un tensor de tensiones magnetostáticas en el medio continuo, denominado como tensor de tensiones magnetostáticas de Maxwell. La densidad de fuerza magnetostática es obtenida como la divergencia de este tensor de Maxwell, es decir:

$$f_i = T_{ij,j}^M \quad (2.1)$$

donde el superíndice  $M$  denota la referencia a Maxwell. Es entonces claro que, considerando el teorema de Gauss-Ostrogadski que la fuerza total sobre un elemento de volumen podrá transformarse en la integral extendida a la superficie del elemento de volumen considerado. Ahora bien, ello podrá realizarse mientras se garanticen las condiciones de continuidad de los campos que aseguran la validez de este teorema integral:

$$F_i = \int_V f_i dV = \int_V T_{ij,j}^M dS = \oint_S T_{ij}^M n_j dS \quad (2.2)$$

donde el vector  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal en el punto considerado de la superficie y dirigido hacia fuera de ella. De esta forma, de acuerdo con la expresión (2.2), la fuerza total sobre el medio magnético puede obtenerse como una integral superficial. Sin embargo, es importante considerar que este resultado deja de ser cierto en cuanto se pretende obtener la fuerza sobre un cuerpo con una superficie real de separación con otro medio. En este caso, los campos dejan de ser continuos y no puede aplicarse la ecuación (2.2). En (Slepian, 1950) se analiza la naturaleza del tensor de tensiones en un medio material. Se trata de uno de los primeros trabajos en abordar este problema<sup>40</sup> y aunque el desarrollo se realiza en el ámbito de la electrostática, es perfectamente extrapolable a campos magnetostáticos. De acuerdo con lo expuesto en este trabajo, la fuerza magnetostática total sobre el cuerpo, que puede obtenerse por la integral del tensor de Maxwell en el vacío extendida a cualquier superficie que comprenda a este cuerpo, tal y como se realiza en el Método del Tensor de Maxwell, puede expresarse en términos de un tensor de Maxwell en el medio:

---

<sup>40</sup> En la Synopsis de este trabajo: “We may define as a posible electromagnetic stress tensor any tensor whose components are functions of the field vectors  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$  and  $\mathbf{B}$  and the charge and currents densities  $\rho$  and  $\mathbf{J}$ , and which in empty space, i.e., where  $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ ,  $\rho = 0$  and  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  reduces to Maxwell’s electromagnetic stress tensor. Then we define the associated mechanical stress tensor through the vector difference between the calculated electrical surface force for the sides of the cut, and the mechanical force observed there, this difference being derivable from a tensor.”



$$F_i = \oint_S T_{0,ij}^M n^j dS = \int_V T_{ij,j}^M dV + \oint_S (T_{0,ij}^M - T_{ij}^M) n_j dS \quad (2.3)$$

siendo  $T_{0,ij}^M$  las componentes  $i,j$  del Tensor de Maxwell en el vacío. Considérese que, por aplicación del teorema de Gauss-Ostrogadski ha de verificarse la relación

$$\int_V T_{ij,j}^M dV = \oint_S T_{ij}^M n_j dS \quad (2.4)$$

con lo que se evidencia la no unicidad del tensor de Maxwell en el medio en el cumplimiento de la ecuación (2.3). De hecho, la única condición establecida en (Slepian, 1950) es que el tensor de Maxwell admitido deba reproducir el tensor de Maxwell en el vacío. Por sencillez en la exposición, un tensor se representará en esta memoria bien simbólicamente,  $\mathbb{T}$ , o bien mediante sus componentes,  $T_{ij}$ . La ecuación (2.3) tiene una repercusión inmediata, ya mencionada. Cualquier tensor, expresado en términos de los campos  $\mathbf{H}$  y/o  $\mathbf{B}$ , que reproduzca el Tensor de Maxwell en el vacío, es válido, según (2.3), para el cálculo de la fuerza total sobre el cuerpo, con una densidad volumétrica dada por la ecuación (2.1) y una densidad superficial definida por la ecuación:

$$f_i^S = (T_{0,ij}^M - T_{ij}^M) n_j \quad (2.5)$$

Así pues, se manifiesta una primera ambigüedad en la obtención de un tensor de Maxwell en el medio continuo desde la perspectiva de su uso para la obtención de fuerzas globales en un medio magnético limitado. Expresado en otros términos, no será posible obtener un *único tensor de Maxwell* en un medio continuo, o discriminar entre varios tensores, atendiendo a su uso en el cálculo de la fuerza total sobre un medio magnético limitado. Por tanto, las aproximaciones a la definición de un tensor de Maxwell pueden partir, en primera

instancia, de las expresiones de densidad de fuerza clásicas, utilizadas en diseño magnetomecánico, que son, esencialmente, las consideradas en el Capítulo 1 de esta memoria.

Ahora bien, se ha descrito en ese capítulo las notables divergencias entre las distribuciones de fuerza, o fuerzas locales, proporcionadas por esos métodos. Por otra parte, dada una determinada densidad de fuerza, el tensor de Maxwell asociado a ella, que verifique la ecuación (2.1) tampoco está unívocamente definido, puesto que la adición a ese tensor de Maxwell obtenido de un tensor de divergencia nula proporcionará la misma densidad de fuerza.

En segunda instancia, dada la falta de univocidad de la densidad de fuerza magnetostática, puede admitirse que otros tensores de Maxwell, que no proporcionen mediante su divergencia alguna densidad de fuerza de las consideradas, sean igualmente válidos para su inclusión en modelos de acoplamiento magnetostático. Por estas razones, en la sección 2 de este capítulo se obtendrán los tensores magnetostáticos de Maxwell capaces de reproducir las seis densidades de fuerza consideradas en el Capítulo 1. En la sección 3, se documentarán otros tensores de Maxwell descritos en la literatura técnica o científica que no se obtienen directamente de tales densidades de fuerza, prestando especial atención a la posibilidad de definir tensores de Maxwell en medios continuos simétricos en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . La sección 4 se dedicará a una discusión de estos resultados.

## 2.- Tensores de Maxwell asociados directamente con alguna densidad de fuerza

En esta sección se obtendrán tensores de tensiones magnetostáticas de Maxwell para las diferentes densidades de fuerza expuestas en el Capítulo 1 de esta memoria. Para ello, se utilizarán esencialmente las ecuaciones de campo.

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow e_{ijk} H_{k,j} = 0 \\ \bar{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 &\Leftrightarrow B_{j,j} = 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

Consecuencias inmediatas de las ecuaciones (2.6) son el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \bar{\nabla} \times \mathbf{m} &\Leftrightarrow e_{ijk} B_{k,j} = \mu_0 e_{ijk} m_{k,j} \\ \bar{\nabla} \cdot \mathbf{m} = -\bar{\nabla} \cdot \mathbf{H} &\Leftrightarrow m_{j,j} = -H_{j,j}\end{aligned}\quad (2.7)$$

que también serán tenidas en cuenta en el desarrollo de esta sección. Se retomará en este punto la clasificación establecida en el Capítulo 1, e irán obteniéndose en este mismo orden los tensores de Maxwell asociados, que se identificarán, al igual que las densidades de fuerza correspondientes, con superíndices adecuados.

#### A1: Método de Brown-Kelvin (BKM)

La densidad (1.28) puede ser expresada en términos de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$f_i^B = \mu_0 m_j H_{i,j} = B_j H_{i,j} - \mu_0 H_j H_{i,j} \quad (2.8)$$

que puede transformarse inmediatamente como:

$$f_i^B = \left( H_i B_j - \frac{\mu_0}{2} H^2 \delta_{ij} \right)_{,j} \quad (2.9)$$

de forma que el tensor de Maxwell asociado a la densidad de fuerza de Brown-Kelvin es

$$T_{ij}^{M,B} = H_i B_j - \frac{\mu_0}{2} H^2 \delta_{ij} \quad (2.10)$$

A2: Método dipolar básico (DBM)

La densidad (1.29) puede transformarse en:

$$f_i^D = \mu_0 m_j B_{i,j} = \mu_0 m_j H_{i,j} + \mu_0 m_j m_{i,j} = f_i^B + \frac{\mu_0}{2} m_{,i}^2 \quad (2.11)$$

y, considerando ahora (2.9) se obtiene el tensor de Maxwell asociado a la densidad de fuerza dipolar elemental:

$$T_{ij}^{M,D} = H_i B_j - \frac{\mu_0}{2} (H^2 - m^2) \delta_{ij} \quad (2.12)$$

A4: Método de Eringen-Maugin (EMM)

La densidad de fuerza (1.31) puede ser expresada como

$$f_i^E = m_j B_{j,i} = \mu_0 \left( \frac{m^2}{2} \right)_{,i} + \mu_0 m_j H_{j,i} \quad (2.13)$$

Con el fin de relacionar la ecuación (2.13) con la densidad de Brown-Kelvin, puede utilizarse la relación vectorial general:

$$a_j b_{j,i} = a_j b_{i,j} + \varepsilon_{ijk} a_j e_{klm} b_{m,l} \quad (2.14)$$

de tal forma que, considerando la ecuación (2.6)<sub>1</sub>,

$$f_i^E = m_j B_{j,i} = \mu_0 \left( \frac{m^2}{2} \right)_{,i} + f_i^B \quad (2.15)$$

que coincide con la ecuación (2.11), por lo que el tensor de Maxwell asociado a la densidad de Eringen-Maugin coincide con el considerado como Método dipolar básico. De hecho, la igualdad entre las densidades (1.31) y (1.29) podría haberse establecido previamente, bajo la suposición de la ausencia de corrientes libres, de forma que el rotacional del campo magnético pueda ser considerado como nulo.

Así pues,

$$T_{ij}^{M,E} = H_i B_j - \frac{\mu_0}{2} (H^2 - m^2) \delta_{ij} \quad (2.16)$$

aunque se adoptará la forma más utilizada en la literatura científica,

$$T_{ij}^{M,E} = H_i B_j - \left( \frac{B^2}{2\mu_0} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \right) \delta_{ij} \quad (2.17)$$

equivalente a (2.16).

### A3: Método de Maxwell-Minkowski (MMM)

La densidad de fuerza (1.30) puede ser inmediatamente relacionada con la densidad de Eringen-Maugin,

$$f_i^M = \mu_0 m_j H_{j,i} = f_i^E - \mu_0 \left( \frac{m^2}{2} \right)_{,i} \quad (2.18)$$

de forma que el tensor de Maxwell asociado a este procedimiento coincide con el asociado a la densidad de fuerza de Brown,

$$T_{ij}^{M,M} = H_i B_j - \frac{\mu_0}{2} H^2 \delta_{ij} \quad (2.19)$$

*B1: Método de Cargas Magnéticas Equivalentes (EQM)*

La densidad de fuerza (1.32) puede ser expresada en términos de la divergencia del campo magnético  $\mathbf{H}$  usando (2.7)<sub>2</sub>

$$f_i^Q = -\mu_0 H_i m_{j,j} = \mu_0 H_{j,j} H_i = \mu_0 (H_i H_j)_{,j} - \mu_0 H_{i,j} H_j \quad (2.20)$$

Considerando ahora la relación vectorial general

$$V_{,i}^2 = 2V_{i,j} V_j + e_{ijk} V_{k,j} \quad (2.21)$$

y, teniendo en cuenta (2.6)<sub>1</sub>, la densidad (2.20) puede expresarse ya en la forma

$$f_i^Q = \mu_0 H_i H_{j,j} = \mu_0 (H_i H_j)_{,j} - \frac{\mu_0}{2} H_{,i}^2 = \mu_0 \left( H_i H_j - \frac{H^2}{2} \delta_{ij} \right)_{,j} \quad (2.22)$$

es decir, como divergencia del tensor de Maxwell asociado al método de cargas magnéticas equivalentes,

$$T_{ij}^{M,Q} = \mu_0 \left( H_i H_j - \frac{H^2}{2} \delta_{ij} \right) \quad (2.23)$$

*B2: Método de Corrientes Magnetizantes Equivalentes (EJM)*

La densidad de fuerza (1.33) puede hacerse equivalente, teniendo en cuenta (3.7)<sub>1</sub>, únicamente en términos de la inducción magnética,

$$f_i^J = e_{ijk} e_{jlm} m_{m,l} B_k = \frac{1}{\mu_0} e_{ijk} e_{jlm} B_{m,l} B_k \quad (2.24)$$

Y, considerando de nuevo la relación (2.21), se obtiene inmediatamente la densidad (2.24) como divergencia de un tensor, el asociado al método de corrientes magnetizantes equivalentes,

$$T_{ij}^{M,J} = \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{B^2}{2} \delta_{ij} \right) \quad (2.25)$$

Considerando entonces estos resultados, puede concluirse que:

- Los tensores de tensiones magnetostáticas asociados a densidades de fuerza basadas en métodos dipolares pueden reducirse sólo a dos:

El tensor

$$\mathbb{T}^{M,B} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \quad (2.26)$$

divergencia proporciona las densidades de fuerza de Brown-Kelvin y de Maxwell-Minkowski<sup>41</sup>, y el tensor

---

<sup>41</sup> Este tensor, en su forma transpuesta,  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I}$  es denominado en algunos trabajos (Voltairas, P.A. et al, 2003) como tensor de Einstein-Laub, haciendo referencia para ello al trabajo (Toupin, R.A., (1956). *Arch. Ration. Mech. Anal.* 5, 849.).

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}^{M,E} &= \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \left( \frac{B^2}{2\mu_0} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbb{I} \\
&= \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{2} (H^2 - m^2) \mathbb{I}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

cuya divergencia proporciona bien la densidad de Eringen-Maugin o bien la densidad dipolar básica.

Estos dos tensores no son simétricos, por una parte y, por otra, tan sólo se diferencian en la componente diagonal, es decir, en las tensiones normales en los puntos de la superficie que limite el medio considerado.

- El tensor simétrico

$$\mathbb{T}^{M,Q} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \tag{2.28}$$

está asociado a la densidad de fuerza correspondiente al método de cargas magnéticas equivalentes.

- El tensor simétrico

$$\mathbb{T}^{M,J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \mathbb{I} \tag{2.29}$$

está asociado a la densidad de fuerza correspondiente al método de corrientes magnetizantes equivalentes.

- Los tensores (2.26)-(2.29) son independientes, reproducen tensiones diferentes y están asociados a densidades magnetostáticas de fuerza independientes.



- Los tensores (2.26)-(2.29) reproducen el tensor de Maxwell cuando son considerados en el vacío, bajo las condiciones  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ .

### 3.- Tensores de Maxwell no asociados directamente a alguna densidad de fuerza específica

Como se ha mencionado ya, la existencia de cuatro modelos diferenciados e independientes de fuerzas magnetostáticas en el medio continuo, o de cuatro tensores de Maxwell independientes, plantea diversos problemas científicos y tecnológicos.

En primer término, en el momento de desarrollar un modelo de acoplamiento magnetomecánico ha de escogerse una determinada densidad de fuerza y, en principio, o hasta el momento, no se han publicado argumentos que pudieran hacer prevalecer algún método sobre otro. Se trata entonces de una cuestión de elección no fundada. Por lo general, los modelos de acoplamiento se han desarrollado específica y diferenciadamente a partir de una de estas densidades, por lo que tales modelos no pueden ser contrastados entre sí. Este aspecto se tratará en el Capítulo 3. También se ha expuesto anteriormente que bajo estos tensores podrá obtenerse la fuerza total sobre un medio magnético limitado de acuerdo con la ecuación (2.3) y a la última de las conclusiones expuestas en la sección anterior, por lo que el cálculo de la fuerza total sobre un cuerpo no ayudará a discriminar ninguno de estos métodos como el que más se pudiera ajustar a la necesaria distribución *real* de las fuerzas locales.

En segundo término, pueden darse, y así se han descrito en diversos trabajos, otros tensores de Maxwell en medios magnéticos cuya divergencia no reproduce ninguna de las densidades de fuerza clásicas descritas en el Capítulo 1. Estos tensores también se han utilizado en la formulación de modelos de acoplamiento magnetomecánico. Puede darse, incluso, que las divergencias de estos

tensores proporcionen densidades de fuerza que sean combinación de diversas densidades clásicas.

Y, en tercer término, una cuestión relevante se manifiesta en la revisión de referencias llevadas a cabo en la elaboración de esta memoria. Efectivamente, los tensores derivados de modelos dipolares de fuerza (2.26) y (2.27) son de la forma genérica

$$\mathbb{T}^M = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \Theta(\mathbf{H}, \mathbf{B})\mathbb{I} \quad (2.30)$$

y es fácil encontrar tensores en la forma transpuesta a la (2.30),

$$\mathbb{T}^M = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \Theta(\mathbf{H}, \mathbf{B})\mathbb{I} \quad (2.31)$$

Y, obviamente, ambos tensores proporcionan diferentes densidades de fuerza<sup>42</sup>. Se analizarán en este capítulo estas diferentes formulaciones tensoriales.

En (Henrotte et al, 2004), se indica que la importante controversia relativa a la computación de fuerzas electromagnéticas<sup>43</sup> no puede ser resuelta en el ámbito del análisis vectorial, sino que es

---

<sup>42</sup> En el caso en que se mantenga el criterio de derivación dado por la ecuación (2.1). Obviamente, si se opta por un procedimiento de cálculo definido por la ecuación  $f_i = T_{ji,j}^M$ , es decir, derivando la primera componente del tensor de Maxwell ambos tensores coinciden. En diversos trabajos no se explicita este criterio.

<sup>43</sup> Considérese lo expuesto en el Capítulo 1 en relación a este aspecto.

necesario recurrir a la geometría diferencial y, en particular, usando la derivada de Lie y su relación con la derivada material.

En la elaboración de esta memoria no se van a introducir estos métodos, que requerirían un desarrollo específico y situado en un campo ajeno a la última finalidad de este trabajo. Pero, no obstante, se indicarán claramente el uso de estos procedimientos de geometría diferencial cuando así sea necesario para la documentación de los resultados obtenidos bajo su aplicación. A partir de estos métodos, en (Henrotte et al, 2004) se describen un conjunto de expresiones, que han de ser entendidas como axiomas, de las que se derivan diferentes tensores de Maxwell cuando tales expresiones se aplican a la densidad de energía o de co-energía. Es este un tema de investigación que ha suscitado también cierto grado de controversia aún no resuelta con el suficiente grado de consenso científico. Los tensores obtenidos en (Henrotte et al, 2004), son

$$\mathbb{T} = \mathbf{B} \otimes \frac{\partial \rho^\psi}{\partial \mathbf{B}} - \left( \frac{\partial \rho^\psi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} - \rho^\psi \right) \mathbb{I} \quad (2.32)$$

cuando se parte de la densidad de energía  $\rho^\psi$  y

$$\mathbb{T} = \frac{\partial \rho^\phi}{\partial \mathbf{H}} \otimes \mathbf{H} - \rho^\phi \mathbb{I} \quad (2.33)$$

si se utiliza la densidad de co-energía  $\rho^\Phi$ . El mismo tensor (2.33) es utilizado posteriormente (Henrotte y Hameyer, 2007)<sup>44</sup>, en un modelo de acoplamiento magnetoelástico, obteniendo la densidad de fuerza a partir de la divergencia de (2.33) y las fuerzas superficiales como la discontinuidad, según la expresión (2.5) del tensor en el vacío con el tensor en el medio. La aportación esencial de estos trabajos consiste entonces en la obtención de un tensor de Maxwell utilizando, en el contexto de la geometría diferencial, de derivadas temporales de *p-formas*. Su origen se sitúa por tanto en los métodos computacionales para la obtención de fuerzas, pero el formalismo desarrollado, a diferencia de otros procedimientos de naturaleza computacional, posibilita la obtención de expresiones analíticas para el tensor de Maxwell en el medio y, consecuentemente, para la densidad de fuerza.

Sin embargo, existe otra aportación sustancial en (Henrotte et al, 2004) y consiste en la diferenciación de tensores obtenidos cuando la formulación desarrollada se aplica a la densidad de energía y a la densidad de coenergía. Efectivamente, los tensores (2.32) y (2.33) proporcionan estados de tensión diferentes y, por tanto, densidades de energía diferentes. Por otra parte, la parte diádica de ambos tensores son transpuestas entre sí. En (Henrotte et al, 2004, 2), se desarrollan los tensores obtenidos para materiales ferromagnéticos. Para materiales ferromagnéticos lineales, los tensores (2.32) y (2.33) conducen, respectivamente, a las expresiones

$$\mathbb{T}^{M,\psi} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu} B^2 \mathbb{I} \quad (2.34)$$

---

<sup>44</sup> Aquí se identifican ya las derivadas como  $\frac{\partial \rho^\psi}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{H}$ ,  $\frac{\partial \rho^\Phi}{\partial \mathbf{H}} = \mathbf{B}$

$$\mathbb{T}^{M,\phi} = \mu \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu}{2} H^2 \mathbb{I} \quad (2.35)$$

que coinciden en medios lineales. Sin embargo, en su aplicación a imanes permanentes se obtienen las expresiones

$$\mathbb{T}^{M,\psi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \mathbb{I} \quad (2.36)$$

$$\mathbb{T}^{M,\psi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{m} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{B} - \left( \frac{B^2}{2\mu_0} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbb{I} \quad (2.37)$$

El modelo desarrollado en (Henrotte et al, 2004) distingue entre densidades de flujo (en la descripción basada en la densidad de energía) y densidades de circulación (cuando se refiere a densidades de coenergía). Los tensores (2.36) y (2.37), y sus correspondientes densidades de fuerza son diferentes en imanes permanentes. Esta discrepancia no es, desde luego, mayor que la ya referida en el Capítulo 1 entre densidades de fuerza. Los autores proporcionan un análisis de esta divergencia<sup>45</sup> que remite a la experimentación en la verificación de las configuraciones experimentales en las que pueden ser válidas.

---

<sup>45</sup> “This shows that the distinction between flux densities and circulation densities, which is irrelevant for the expression of the magnetic constitutive law, becomes essential when the magneto-mechanical coupling is considered. There is however no mathematical reason to favour one or the other of these assumptions. It is only a matter of experiment to determine case by case which model is the closest to reality”.

En esta misma línea, en (Sánchez-Grandía et al, 2006) se obtiene, mediante aplicación del principio de Trabajos Virtuales a las densidades de energía y de coenergía diferentes tensores de Maxwell,

$$\mathbb{T}^{M,F} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + G(\mathbf{H})\mathbb{I} \quad (2.38)$$

$$\mathbb{T}^{M,G} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + G(\mathbf{H})\mathbb{I} \quad (2.39)$$

donde los superíndices  $F, G$  se refieren, respectivamente al origen de tales tensores, densidad de energía  $F$  o de coenergía  $G$ . Como se observa, en este caso también ambos tensores coincidirían en el caso de materiales ferromagnéticos y diferirían tratándose de imanes permanentes.

En cualquier caso, como se demuestra en (Sánchez-Grandía et al, 2006) la fuerza total sobre un cuerpo bajo aplicación utilizando estos dos tensores, a través de la relación (2.3) únicamente proporcionaría resultados diferentes si el medio que rodea al cuerpo no tiene un comportamiento magnético lineal. Obviamente, la fuerza total sobre un cuerpo rodeado del vacío, como ya se ha argumentado, coincide, dado que ambos tensores reproducen el tensor de Maxwell en el vacío.

Los tensores (2.32), (2.33), (2.38) y (2.39) han sido obtenidos a partir de procedimientos variacionales sobre las densidades de energía y de coenergía. Como consecuencia, el término asociado al tensor identidad se expresa en términos de estas densidades. En trabajos previos se han obtenido resultados similares en este sentido. Así, en (Zelazo y Melcher, 1969), se analiza en primer término el tensor<sup>46</sup>

---

<sup>46</sup> Obsérvese que este tensor no responde directamente a ninguno de los tensores que responden a una densidad de fuerza magnetostática clásica. Sin embargo, coincide con el tensor (2.35), válido para materiales

$$\mathbb{T}^M = \mu \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu H^2 \mathbb{I} \quad (2.40)$$

cuya divergencia es la densidad de fuerza de Korteweg-Helmholtz para medios lineales

$$f_i^{M,K-H} = -H^2 \left( \frac{\mu}{2} \right)_{,i} \quad (2.41)$$

y su aplicación a ferrofluidos, en los que se admite que la imantación es colineal con el campo magnético  $\mathbf{H}$  en una forma no lineal (la susceptibilidad magnética depende de una serie de parámetros representativos de las propiedades locales de los fluidos y del cuadrado del campo magnético  $H^2$ ). En caso de comportamiento lineal, el tensor (2.40) no es suficiente en la descripción del acopamiento magnetomecánico, por lo que, aplicando métodos variacionales a la densidad de coenergía  $\omega'$ , en (Zelazo y Melcher, 1969) se obtiene el tensor

$$\mathbb{T}^{M,\phi} = \mu \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \omega' \mathbb{I} \quad (2.42)$$

en el que  $\mu = 1 + \chi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, H^2)$  y  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Considérese que este tensor es equivalente a (3.38) o (3.39), haciendo  $G = -\omega'$ , siempre en medios lineales.

---

ferromagnéticos lineales y también puede ser obtenido a partir de (2.38) o (2.39) imponiendo una relación lineal entre los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .

En (Bossavit, 2011) se presenta un interesante (y necesario) análisis sobre los tensores de Maxwell que, como (2.32), (2.33), (2.38), (2.39) o (2.42), incluyen como elemento diagonal la densidad de coenergía. El problema que subyace en el fondo de este análisis es la naturaleza del tensor de Maxwell en su relación con el principio de trabajos virtuales. Bossavit parte en este trabajo de una igualdad estrictamente matemática

$$\nabla(\mathbf{B}(\mathbf{H}, \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{H})\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla(\mathbf{H} \times \mathbf{B}) + \mathbf{H} \nabla \mathbf{B} - \nabla \varphi(\mathbf{H})) \quad (2.43)$$

siendo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  campos vectoriales suaves<sup>47</sup> y  $\mathbf{v}$  un campo vectorial uniforme. La función  $\varphi(\mathbf{H})$  es la densidad de coenergía, dependiente, por tanto, del campo  $\mathbf{H}$ . Aplicando el teorema de Gauss a la divergencia en (2.43) en un volumen  $V$  limitado por una superficie  $S$ , (2.43) es equivalente<sup>48</sup> a

$$\oint_S ((\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{H} - \varphi(\mathbf{H})\mathbf{n}) dS = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \varphi(\mathbf{H})) dV \quad (2.44)$$

En el espacio libre, la ecuación (2.44) es

---

<sup>47</sup> Diferenciables y con derivadas continuas hasta un determinado orden. Aunque esta identidad vectorial es válida para cualquier par de campos vectoriales, se utilizan los vectores campo magnético e inducción magnética, a los que se impone posteriormente en este trabajo las condiciones derivadas de las ecuaciones de Maxwell.  $\nabla \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

<sup>48</sup> El campo auxiliar  $\mathbf{v}$  desaparece en la obtención de esta igualdad.



$$\oint_S \left( (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{n} \right) dS = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) indica que el flujo del tensor de Maxwell

$$\mathbb{T}^M = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{2} \mathbb{I} \quad (2.46)$$

en la superficie  $S$  proporciona la fuerza (fuerza de Lorentz) sobre todas las corrientes incluidas en el volumen  $V$ <sup>49</sup>. Si el volumen  $V$  está enteramente rodeado por aire y contiene además de la distribución de corrientes  $\mathbf{J}$  un material magnético con una densidad de coenergía  $\varphi(\mathbf{H})$ , el flujo del tensor de Maxwell en una superficie  $S$  en el aire que comprenda todo este volumen  $V$ , entonces la densidad fuerza asociada al material magnético (excluyendo las corrientes  $\mathbf{J}$ ) debe ser igual al gradiente de la coenergía  $-\nabla \varphi(\mathbf{H})$ , que, en el caso de medios lineales conduce inmediatamente a la densidad de Korteweg-Helmholtz, dada por la ecuación (2.41). Esta es la causa por la que Bossavit en este trabajo analiza la legitimidad de admitir un tensor de Maxwell en la forma

$$\mathbb{T}^M = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \varphi(\mathbf{H}) \mathbb{I} \quad (2.47)$$

cuya divergencia proporcione la densidad de fuerza y de tal forma que su flujo, en una superficie  $S$  que puede situarse dentro del volumen  $V$ , coincida con la fuerza total que experimente el volumen incluido por tal superficie  $S$ .

---

<sup>49</sup> Incluyendo las fuerzas sobre corrientes magnetizantes equivalentes.

Expresado en otros términos, se cuestiona en (Bossavit, 2011) la prevalencia de modelos basados en la admisión de un tensor de tensiones de Maxwell en un medio, y la obtención posterior de una densidad de fuerza, sobre modelos en los que prevalece la densidad de fuerza y la obtención del tensor de Maxwell es posterior<sup>50</sup>. Se trata evidentemente de una cuestión de importancia teórica, dado que no sólo diversos tensores de Maxwell han sido obtenidos por métodos variacionales sino porque también diversos tensores se obtienen a partir de modelos de acoplamiento magnetomecánico que no incluyen explícitamente alguna de las densidades de fuerza ya tratadas en el Capítulo 1 de esta memoria.

En (Bossavit, 2011) se limita el estudio a materiales ferromagnéticos, no necesariamente lineales, concluyendo que el tensor de Maxwell (2.47) puede ser aplicado en el cálculo de densidades de fuerza y no únicamente en el cálculo de fuerzas o momentos globales con la única restricción de materiales que presentan magnetostricción. Además, la superficie de control  $S$  puede ser tomada dentro del medio, a diferencia del cálculo de la fuerza global para cuerpos aislados en el aire, siempre y cuando la permeabilidad magnética sea una función igualmente suave. En este mismo artículo se plantean cuestiones relativas a la aplicabilidad del tensor de Maxwell en el estudio del acoplamiento magnetoelástico, que serán tratados en el Capítulo 3 de esta memoria, frente a la potencia del Principio de Trabajos Virtuales en el tratamiento de este acoplamiento.

---

<sup>50</sup> Literalmente, “*For whom adopts this approach—tensor  $M$  first, force as its divergence—the Maxwell tensor acquires the status of primary entity in the theory: Maxwell's equations govern the field, Maxwell's tensor governs its effect on matter (hence, it answers all questions about forces)*”.

En este contexto, la densidad de fuerza obtenida como divergencia del tensor (2.39) fue tratada en (Sánchez-Grandía et al, 2008). Las densidades volumétricas y superficiales de fuerza se consideran para un medio **2** totalmente rodeado de un medio **1**, no necesariamente aire, como generalización de la expresión (2.3),

$$F_i = \oint_S T_{2,ij}^M n_j dS = \int_V T_{1,ij,j}^M dV + \oint_S (T_{1,ij}^M - T_{2,ij}^M) n_j dS \quad (2.48)$$

Este tratamiento posibilita la obtención de una densidad volumétrica de la forma

$$\mathbf{f} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{B} + \nabla G \quad (2.49)$$

en una expresión general que, obviamente, no coincide con ninguna densidad basada en los modelos de interacción magnética tratados en el Capítulo 1 de esta memoria. La densidad de fuerza superficial viene dada por

$$\mathbf{f}_s = \|(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}\|_2^1 + \|G\|_2^1 \mathbf{n} \quad (2.50)$$

para lo que se ha considerado la condición de contorno para el campo **B** de conservación de su componente normal en la superficie de separación de los medios. En la expresión (2.50) el símbolo  $\|A\|$  representa el salto o discontinuidad de la magnitud,  $A$

$$\|A\|_2^1 = A(1) - A(2) \quad (2.51)$$

en la superficie de separación de los dos medios.

Evidentemente, el tensor (2.47) reproduce el tensor de Maxwell clásico cuando se aplica al vacío. Consecuentemente, como ya se ha expuesto, puede ser utilizado en el cálculo de la fuerza global sobre un cuerpo, de acuerdo a la relación (2.3) cuando este cuerpo esté aislado

en el vacío o la relación (2.48) en el caso más general. Ahora bien, como también se ha constatado ya, las densidades de fuerza volumétricas y superficiales pueden distribuirse de diversas formas que proporcionen la misma fuerza global, como se ha especificado en el Capítulo 1 de esta memoria. Por otra parte, se ha constatado que las distribuciones de fuerza clásicas, no basadas en métodos variacionales, conducen a cuatro formas tensoriales (2.26)-(2.29), cuyas densidades de fuerza superficiales son también conocidas.

Obviamente, las expresiones (2.49) y (2.50) no coinciden, a priori, con ninguna de estas cuatro densidades clásicas (modelos de fuente magnética equivalente o modelos dipolares). Puede pensarse que el hecho de introducir una densidad nueva proporcione quizás un nuevo elemento de confusión y nada nuevo añade a la discusión sobre este aspecto, puesto que, sin una argumentación a posteriori, no hace sino mostrar la evidencia de la ambigüedad en la definición del tensor de tensiones magnetostáticas de Maxwell en un medio. Sin embargo, la forma general de las ecuaciones (2.49) y (2.50) permite fundamentar un análisis que puede conducir a algunas conclusiones.

Una primera conclusión se obtiene cuando se expresa la fuerza total en la forma

$$\mathbf{F} = \int_V ((\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{B}) dV + \int_V \nabla G dV + \oint_S G \mathbf{n} dS + \oint_S \|(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}\|_2^1 dS \quad (2.52)$$

El segundo término de la igualdad, en virtud del teorema de Gauss-Ostrogadsky, puede transformarse en una integral sobre la superficie, de forma que (2.52) adopta la forma

$$\mathbf{F} = \int_V ((\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{B}) dV + \oint_S G \mathbf{n} dS + \oint_S \|(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}\|_2^1 dS \quad (2.53)$$

de tal forma que, admitiendo una expresión tensorial en la forma (2.39), la fuerza total sobre cualquier cuerpo rodeado por cualquier medio magnético no depende de la densidad de coenergía en los

puntos del cuerpo. Por el contrario, la densidad de coenergía en el medio que rodea al cuerpo genera una distribución de fuerzas superficiales normales en cada punto del límite del cuerpo. La afirmación anterior obviamente está referida al caso del cálculo de la fuerza global sobre un cuerpo. La fuerza total sobre un elemento de volumen  $V'$  incluido en  $V$  se obtendrá por integración directa del tensor (3.39) en la superficie  $S'$  que limita el elemento  $V'$ ,

$$F' = \oint_{S'} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + G(\mathbf{H})\mathbb{I}) \mathbf{n} dS \quad (2.54)$$

donde los campos y la densidad de coenergía se refieren, naturalmente, al medio 2.

Otra consecuencia inmediata de la definición de un tensor de Maxwell en un medio es su carácter general. Ello permite obtener la expresión de fuerzas globales sobre un medio magnético imbuído en otro medio diferente al aire. La expresión (2.53) es general, en el sentido en que no se impone ninguna característica magnética al medio 1. Es una cuestión estrictamente algebraica la transformación de la expresión (2.53) en términos de las densidades de fuerza clásicas. En (Sánchez-Grandía et al, 2008) se exponen estas transformaciones para los casos de la densidad de Brown-Kelvin y las densidades de los procedimientos ESM, de cargas y corrientes. Tales expresiones pueden considerarse pues como extensiones de los procedimientos BKM, EQM y EJM al caso en el que el medio que rodea al cuerpo cuya fuerza se pretende determinar no sea el vacío.

Así, (2.53) toma la forma

$$\mathbf{F} = \int \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} dV + \oint_S \left[ \left( G_1 + \mu_0 \frac{\mathbf{H}_2^2}{2} \right) \mathbf{n} + \mathbf{B}_1 (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{H}_2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \right] dS \quad (2.55)$$

El término superficial en (2.55), suponiendo que el medio  $I$  fuese el vacío, e imponiendo también la conservación de la componente tangencial del campo magnético  $\mathbf{H}$ , reproduce la densidad de fuerza asociada clásicamente al procedimiento de Brown-Kelvin. Un desarrollo similar se realiza en este trabajo para los métodos EQM y EJM. Sin embargo, en este trabajo no se obtuvieron independientemente las transformaciones que conduzcan diferenciadamente a cada uno de estos dos procedimientos, sino que se obtiene la equivalencia de (2.53) con la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \int \left( -\frac{\mu_0}{2} (\nabla \cdot \mathbf{m}) \mathbf{H} + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{m}) \times \mathbf{B} \right) dV \\ & + \oint_S \left[ \left( G_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2) + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \right] \mathbf{n} dS \\ & + \oint_S \left( \mathbf{B}_1 (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) - \frac{\mu_0}{2} \mathbf{m}_2 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) dS \end{aligned} \quad (2.56)$$

De nuevo, considerando al medio  $I$  como el vacío, y aplicando las condiciones de contorno para el campo  $\mathbf{H}$ , se reproducen los términos superficiales de los métodos EQM y EJM y se llega a la conclusión

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}^Q + \mathbf{F}^J}{2} \quad (2.57)$$

Aunque este resultado no se analiza en (Sánchez-Grandía et al, 2008), el hecho de que a partir del tensor (2.39) no puedan deducirse exclusivamente las densidades correspondientes al método EQM, o exclusivamente las propias del método EJM, es consecuencia de que ninguno de estos métodos responde a una tensor que sea una forma diádica de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , como ocurre con (2.39) y, por lo tanto, sin componente antisimétrica. De hecho, a partir de las igualdades

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{m} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{m} \otimes \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (2.59)$$

se concluye que

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) + (\mathbf{m} \otimes \mathbf{B})^A - \mu_0 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (2.60)$$

en la que el primer tensor del segundo término de la igualdad se corresponde con la media de las formas diádicas asociadas a los métodos EQM y EJM.

En (Sánchez-Grandía et al, 2008) se aplica este desarrollo tensorial únicamente al tensor (2.39), obtenido, como ya se ha indicado, a través de la variación de la densidad de energía, y no se realiza sobre el tensor (2.38), obtenido a partir de la variación de la densidad de coenergía. De hecho, en ese trabajo, se concluye que la diferencia entre las fuerzas globales sobre un cuerpo rodeado de un medio  $\mathbf{I}$  aplicando los tensores (2.38) y (2.39) viene dada por la expresión

$$\mathbf{F}^F - \mathbf{F}^G = \oint_S (\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 \times \mathbf{H}_1)) dS \quad (2.61)$$

diferencia que sólo se anula cuando los campos externos  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{H}_1$  sean colineales en todos los puntos de la superficie del cuerpo, situación que se da con carácter general si el medio que rodea al cuerpo es el vacío, o en el que la relación  $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$  sea válida (por tanto, en

medios isotropos sin imantación permanente). La distinción entre fuerzas derivadas de la densidad de energía o de coenergía estuvo siendo objeto de controversia científica<sup>51</sup>, puesto que, de hecho, esta distinción no está presente en trabajos sobre diseño magnetomecánico.

En diseño de sistemas en los que no sea de interés la distribución de fuerzas internas, esta distinción, por lo expresado anteriormente, carece de sentido, puesto que los elementos mecánicos del sistema están rodeados de aire. No obstante, en (Sánchez-Grandía et al, 2006) se analizan las tensiones internas derivadas de uno u otro tensor y estas tensiones muestran claras diferencias en imanes permanentes o materiales anisótropos. Así pues, es esta una cuestión que es necesario clarificar. En (Aucejo-Galindo, 2010) se analiza este problema, refiriéndose a los resultados de (Sánchez-Grandía et al, 2006). Efectivamente, en este último trabajo, el tensor de tensiones magnetostáticas de Maxwell se obtenía a partir de la relación

$$\delta F = \mathbb{D} \bullet (\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + (F(\mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \mathbb{I}) \quad (2.62)$$

donde  $F(\mathbf{B})$  es la densidad de energía libre, dependiente de la inducción  $\mathbf{B}$ ,  $\delta F$  es la variación virtual de esta densidad ante una variación virtual del campo  $\mathbf{B}$ .  $\mathbb{D}$  es el tensor de variación virtual, que proporciona la variación virtual  $\delta \mathbf{r}$  de un elemento diferencial de desplazamiento  $d\mathbf{r}$ ,

$$\delta \mathbf{r} = \mathbb{D} d\mathbf{r} \quad (2.63)$$

---

<sup>51</sup> Véase, por ejemplo, (De Medeiros et al, 2000)



El tensor  $\mathbb{D}$  es formalmente análogo al tensor de deformaciones elásticas en un medio continuo, simétrico, y su traza representa la relación entre la variación virtual  $\delta V$  de un elemento de volumen  $dV$ ,

$$\delta V = \text{Tr}(\mathbb{D})dV \quad (2.64)$$

En (2.62) el símbolo  $\bullet$  representa la contracción de dos tensores de orden dos, y el término escalar que multiplica al tensor identidad es la densidad de coenergía  $G(\mathbf{H})$ ,

$$G(\mathbf{H}) = F(\mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (2.65)$$

En (Sánchez-Grandía et al, 2006) se identifica, debido a la expresión (2.62), al tensor con el que se contrae el tensor de variación virtual como el tensor de tensiones magnetostáticas derivado de la variación virtual de la densidad de energía, (2.39). Sin embargo, en (Aucejo-Galindo, 2010) se muestra que la componente antisimétrica del tensor (2.39), al estar contraída con el tensor simétrico  $\mathbb{D}$  no proporciona variación virtual de densidad de energía. Sólo la componente simétrica del tensor (2.39) provoca esta variación virtual, por lo que se propone en ese trabajo el tensor simétrico

$$\mathbb{T}^{M,F} = \frac{\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H}}{2} + G(\mathbf{H})\mathbb{I} \quad (2.66)$$

como un nuevo tensor de tensiones magnetostáticas de Maxwell obtenido a partir de la variación virtual de la densidad de energía magnetostática. Posteriormente se demuestra en (Aucejo-Galindo, 2010) que ese tensor coincide con el obtenido por variación virtual de la densidad de coenergía, concluyéndose así que los tensores de Maxwell derivados de la densidad de energía o de coenergía coinciden.

Con la adopción de este tensor simétrico, la expresión de la densidad de fuerza es ahora

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}((\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{H})\mathbf{B}) + \nabla G \quad (2.67)$$

y la densidad de fuerza superficial es

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} \|(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})\mathbf{B}\|_2^1 + \|G\|_2^1 \mathbf{n} \quad (2.68)$$

En (Aucejo-Galindo, 2010) se procede también a comprobar, mediante tratamiento algebraico, que la adopción de este tensor simétrico reproduce las densidades superficiales de fuerza del procedimiento BKM, así como la expresión (2.57)<sup>52</sup>. Mostrada la equivalencia teórica entre los métodos BKM, EQM y EJM con el obtenido a partir del tensor simétrico (2.66), en (Aucejo-Galindo, 2010) se procede a la simulación numérica de las fuerzas globales en un dispositivo constituido por dos paralelepípedos de 50 mm de arista, enfrentados y situados a una distancia variable en el eje denominado Y, perpendicular a sus caras enfrentadas. Uno de los cubos es un imán permanente, uniforme, de magnetización  $m = 1.2 \text{ T}$  y el otro es una pieza compuesta de hierro dulce de comportamiento lineal con permeabilidad relativa  $\mu_r = 1000$ . Utilizando FLUX 3D se obtuvieron los valores de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ , lo que posibilitó, mediante programación, el cálculo de densidades volumétricas y superficiales de fuerza, con las que poder obtener los valores de las fuerzas globales, tanto sobre el hierro como sobre el imán. Estos resultados se

---

<sup>52</sup> Son aquí igualmente aplicables las consideraciones realizadas en torno a la diferencia sustancial entre los tensores simétricos propios de los métodos EQM y EJM con los tensores antisimétricos de los métodos BKM y EMM.

contrastaron con los obtenidos por aplicación del Método de Trabajos Virtuales, a través del propio programa FLUX 3D.

Los resultados obtenidos confirman la equivalencia de estos cuatro procedimientos en el caso del cálculo de la fuerza sobre el hierro y muestran alguna divergencia en el cálculo de la fuerza global sobre el imán utilizando el método BKM frente a los otros tres procedimientos. Este mismo resultado se reproduce cuando se simulan las fuerzas sobre dos imanes, de iguales características geométricas y con la magnetización indicada anteriormente. A partir de estos datos, no obstante, no cabe inferir con carácter general que la aplicación del procedimiento BKM en imanes permanentes proporcione diferentes resultados a los obtenidos por los restantes procedimientos. En (Aucejo-Galindo, 2010) no se incluyó los resultados de simulación de la distribución local de fuerzas, que se desarrolló, en la misma configuración experimental, posteriormente<sup>53</sup>.

En las figuras 2.1-2.4 se representan estos resultados. La divergencia entre las distribuciones de fuerza en el imán es evidente. En estas representaciones, el vector densidad de fuerza se representa siempre con origen en el imán.

---

<sup>53</sup> En la expresión (2.66) se utiliza en este caso  $G = -\frac{1}{2} \left( \frac{B^2}{\mu_0} - \mu_0 m^2 \right)$

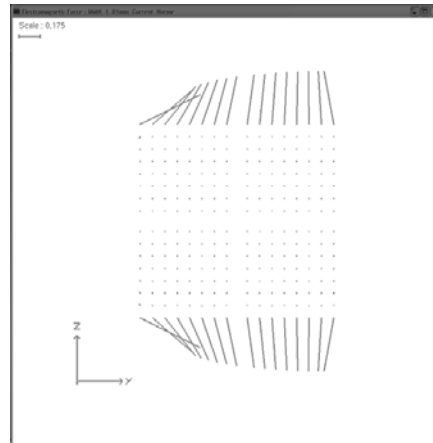


Figura 2.1 Distribución de fuerzas en un imán - EJM

En la Figura 2.1 se observa que la componente de la fuerza en la dirección del eje  $Y$ , dirección de la fuerza global del imán se produce en las caras no enfrentadas al hierro y en los puntos más alejados del hierro (que está situado a la derecha del imán). La distancia de separación es de 1 mm. Esta distribución contrasta fuertemente con la obtenida a partir del procedimiento EQM, que se representa en la Figura 2.2.

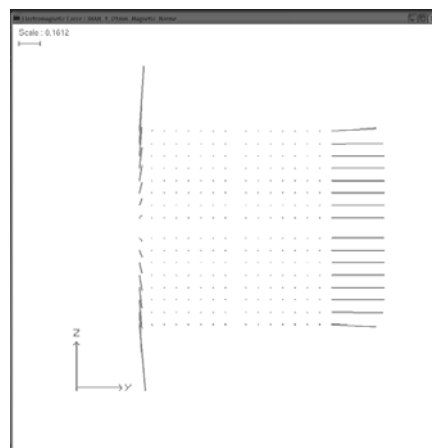


Figura 2.2 Distribución de fuerzas en un imán - EQM

En este caso, la densidad de fuerza aparece prácticamente localizada en su totalidad en la superficie enfrentada al hierro, mientras que no se observan fuerzas superficiales en las caras no enfrentadas. En la cara enfrentada más alejada aparecen fuerzas en la dirección Z que se compensan y unas pequeñas componentes en la dirección de movimiento. En la figura 2.3 se representan las densidades de fuerza obtenidas por aplicación del procedimiento BKM.

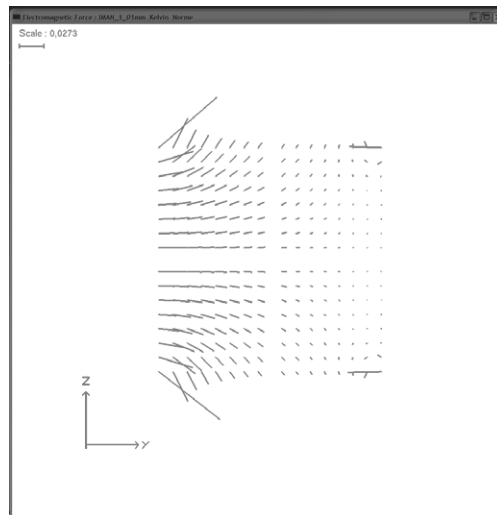


Figura 2.3 Distribución de fuerzas en un imán –BKM

Como se observa en la Figura 2.3, la mayor parte de la fuerza que experimenta el imán según el modelo BKM está localizada en la cara del cubo posterior mientras que la cara directamente enfrentada al hierro apenas experimenta fuerza en sus puntos. Por último, la distribución de fuerzas obtenida por aplicación directa de (2.67) y (2.68) se representa en la Figura 2.4

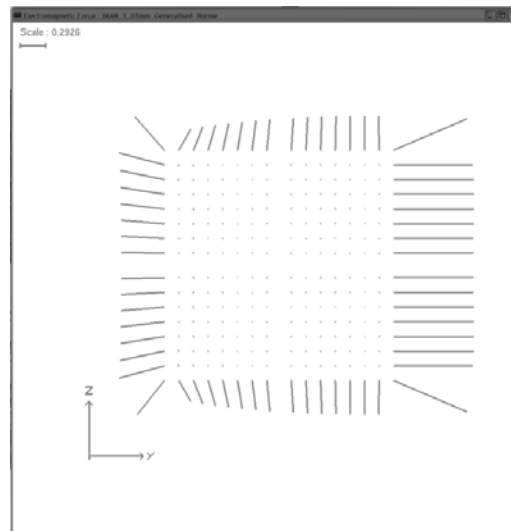


Figura 2.4 Distribución de fuerzas en un imán – Tensor simétrico

En este caso, la fuerza atractiva se observa localizada totalmente en la cara directamente enfrentada al bloque de hierro, mientras que la cara posterior experimenta una fuerza repulsiva que resta fuerza global de atracción. Las caras laterales no proporcionan componentes en la dirección del movimiento.

La respuesta mecánica del imán, mantenido en reposo, ante estas modelizaciones es también claramente divergente. Mientras que con la aplicación del método EJM el imán no experimentaría tensiones en la dirección del movimiento, la dimensión transversal a ésta está sometida a tracción. Esta dimensión transversal no está sometida a esfuerzos normales bajo los procedimientos EQM y BKM y, de nuevo sometida a tracción cuando se aplica el método basado en el tensor simétrico. La dimensión  $Y$ , está sometida a tracción en los procedimientos EQM y el basado en el tensor simétrico, mientras que

está sometida a compresión cuando se utiliza el método basado en la densidad de Brown-Kelvin.

La distribución de fuerzas mostrada en la Figura 2.4 es coherente con distribuciones de fuerzas en imanes permanentes obtenidas mediante aplicación del principio de Trabajos Virtuales<sup>54</sup>. Las simulaciones realizadas no son suficientes, en todo caso, para concluir que la densidad de fuerzas (2.67) y (2.68) sean más adecuadas en la descripción de la distribución de fuerzas locales que las obtenidas por otros procedimientos. Sin embargo, sustentan la hipótesis de admisión de densidades de fuerza no obtenidas por los procesos de interacción clásicos, sino derivadas de tensores magnetostáticos de Maxwell. Por otra parte, como ya se ha expuesto, tensores en las formas diádicas en las formas  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$  y  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  han sido descritos y su relación con procesos variacionales sobre las densidades de energía y de coenergía también ha sido documentada. La posibilidad de derivar tensores simétricos en tales formas diádicas se ha planteado en este esquema de aplicación del Método de Trabajos Virtuales.

Para avanzar en este punto es necesario recurrir a un reciente trabajo (Bossavit, 2015a). Se propone en este trabajo una generalización del tensor de Maxwell que pueda ser aplicado en cualquier superficie, aunque ésta comprenda parte del medio en el que se pretende obtener la fuerza magnetostática. Este tensor es aplicable en materiales no lineales y anisótropos y es simétrico, “*On propose une généralisation du tenseur de Maxwell qui permet à la surface d’intégration de traverser la matière aimantée, y compris dans le cas d’une loi de comportement non linéaire et anisotrope. Le tenseur ainsi*

---

<sup>54</sup> Puede consultarse, por ejemplo, (Fu et al, 2004). Se representa en este trabajo la distribución de fuerzas internas en dos imanes próximos.

*modifié se trouve être toujours symétrique*”<sup>55</sup>. El análisis efectuado en este trabajo<sup>56</sup> parte de la forma clásica del tensor de Maxwell

$$\mathbb{T} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})\mathbb{I} \quad (2.69)$$

como un tensor que permite calcular la fuerza magnética global sobre un cuerpo rodeado por una superficie  $S$ , a condición de que esta superficie esté enteramente contenida en una región donde sea válida la relación  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , donde la permeabilidad  $\mu$  es un escalar dependiente únicamente de la posición<sup>57</sup>. Se plantea una cuestión importante en este trabajo, textualmente: “*C’est suffisant pour faire de  $MT$ <sup>58</sup> un outil intéressant, mais plusieurs choses laissent perplexes:*

<sup>55</sup> “Se propone una generalización del tensor de Maxwell que permite que la superficie de integración atraviese la materia imantada, incluso bajo un comportamiento no lineal y anisótropo. Se comprueba que el tensor así obtenido es siempre simétrico”.

<sup>56</sup> Se mantiene el significado de “divergencia por la derecha” empleado en esta memoria, aun cuando emplea notación contravariante para vectores y tensores. La distinción entre componentes contravariantes y covariantes no es significativa en el desarrollo efectuado en esta memoria, dado que se utiliza la métrica euclídea.

<sup>57</sup> Obsérvese que en este trabajo la aplicación del tensor de Maxwell no está limitada a cuerpos rodeados por el vacío, como suele describirse en múltiples textos o trabajos. De hecho, la densidad volumétrica de fuerza en un entorno con las características señaladas es nula, sea cual sea la superficie de integración, de tal forma que la integración del tensor de Maxwell sólo proporciona la fuerza en el medio. La demostración incluida en (Bosssavit, 2015) parte de otros supuestos.

<sup>58</sup> Tensor de Maxwell



*Faut-il que ce soit  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$  plutôt que,  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  par exemple? Après tout, ces termes sont égaux (et donc  $\mathbb{T}$  est symétrique) lorsque  $\nu$ <sup>59</sup> dans  $\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}$  est scalaire. Et il y a cette vieille question, est-il permis de choisir une surface  $S$  traversant une région où la loi  $B-H$  est non-linéaire? Ou même, seulement, linéaire anisotrope?”<sup>60</sup> La cuestión de la ambigüedad en la elección de la forma diádica en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  ya ha sido enunciada en este trabajo y, por otra parte, los tensores propuestos (2.32), (2.33), (2.38), (2.39), (2.66) no están limitados por las restricciones que afectan al tensor de Maxwell (2.69) y, por lo tanto, pueden *atravesar* una región donde la relación entre los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  no sea lineal o isótropa; la obtención de estos tensores se basaba en supuestos generales entre los que no se consideraba la naturaleza del material. Como se verá posteriormente, en (Bossavit, 2015a) se limita su aplicación a materiales que no presentan magnetostricción.*

En (Bossavit, 2015a) se define un *par magnético* como los campos físicos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  relacionados por la ley constitutiva

$$\Psi(\mathbf{B}) + \Phi(\mathbf{H}) = \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (2.70)$$

---

<sup>59</sup> Reluctividad, inversa de la permeabilidad

<sup>60</sup> “Es suficiente para hacer del tensor de Maxwell una herramienta interesante, pero demasiadas cosas causan perplejidad. ¿Es necesario que sea  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$  antes que  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ , por ejemplo? Al fin y al cabo, estos términos son iguales (y, por tanto,  $\mathbb{T}$  es simétrico) cuando  $\nu$  en  $\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}$  es escalar. Y existe esta antigua cuestión, ¿es posible escoger una superficie  $S$  que atravesase una región donde la ley  $B-H$  sea no lineal? ¿O, incluso, solamente, lineal anisótropa?”

donde la integral está definida sobre todo el espacio y con la condición

$$\bar{\nabla} \mathbf{B} = 0 \quad (2.71)$$

Los sumandos de la expresión (2.70) son las integrales, también extendidas a todo el espacio, de las densidades de energía  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{B}(\mathbf{r}))$  y de coenergía  $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r}))$ , respectivamente

$$\Psi(\mathbf{B}) = \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV \quad (2.72)$$

$$\Phi(\mathbf{H}) = \int \phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) dV \quad (2.73)$$

y la ecuación (2.70) es la expresión integrada a todo el espacio de la relación constitutiva en cada punto,

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{B}(\mathbf{r})) + \phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.74)$$

que constituye la expresión clásica de la relación entre las densidades de energía y de coenergía. En este contexto, en (Bossavit, 2015a) se enuncia una proposición, consistente en

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \left( \frac{(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})}{2} - \phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) \right) = \\ (\bar{\nabla} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \bar{\nabla} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) - \bar{\nabla}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Puede comprobarse mediante cálculo vectorial, que la expresión (2.75)<sup>61</sup> es equivalente a la obtenida en (Aucejo-Galindo, 2010), admitiendo que el rotacional del campo magnético es nulo en ausencia de corrientes.

La densidad de fuerza (2.75) fue obtenida previamente por (Bossavit, 2014) por procedimientos variacionales y es válido, según se indica en este trabajo, para todo material en ausencia de magnetostricción y se reduce al tensor clásico de Maxwell cuando se mantiene la relación  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Pero en el caso más general de que los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  sean paralelos (es decir, cuando hay isotropía, lineal o no), en (Bossavit, 2014) se indica que el tensor cuya divergencia se expresa en (2.75) (o el tensor simétrico (2.66)) se reduce al tensor (2.38) o (2.39), por lo que concluye Bossavit, citando (Sánchez-Grandía et al, 2006), que el tensor (2.38) o (2.39) puede considerarse como una generalización del tensor de Maxwell adaptado al caso de relaciones isotrópicas no lineales entre los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . Pero también indica que el tensor simétrico (2.66) tiene un dominio de aplicación más amplio.

Ya se ha indicado que en (Sánchez-Grandía et al, 2006) y (Sánchez-Grandía et al, 2008) se mencionan tensores derivados bien de la densidad de energía o bien de la coenergía. En (Bossavit, 2015a), se analiza este punto estudiando la viabilidad de un tensor en la forma

---

<sup>61</sup> Los resultados sobre esta materia presentados en (Aucejo-Galindo, 2010) no pudieron ser publicados, precisamente por la resistencia por parte de un revisor en admitir la asimetría de las expresiones obtenidas en (Sánchez-Grandía, 2006) en las expresiones de los tensores de Maxwell obtenidos en ese trabajo previo, aun cuando, como ya se ha expuesto, tal asimetría se rompía con la adecuada interpretación de la expresión (2.62)

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}) - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{B}(\mathbf{r})) \mathbb{I} \quad (2.76)$$

en virtud de una posible simetría entre las formulaciones basadas en las densidades de energía y de coenergía. Se comprueba que el tensor (2.76) no es compatible con (2.75) y con el tensor

$$(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) - \phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) \mathbb{I} \quad (2.77)$$

La investigación en este punto, por tanto, como enuncia el propio autor, aún permanece abierta: *“En d’epit de ces échecs, l’intuition selon laquelle une telle symétrie doit exister n’est pas totalement trompeuse, comme on le verra dans la version longue de cette communication.”*<sup>62</sup>. Es interesante hacer notar que tal simetría en cuanto a la obtención de fuerzas a partir de la aplicación del principio de trabajos virtuales a las densidades de energía y de coenergía no conduce en (Sanchez-Grandía et al, 2006) al tensor (2.76), sino, utilizando la notación de (Bossavit, 2015a), al tensor

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}) - \phi(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) \mathbb{I} \quad (2.78)$$

y que es precisamente el hecho de que la componente diagonal de ambos tensores sea la densidad de coenergía el que permitió en (Aucejo-Galindo, 2010) la obtención de un tensor simétrico. La versión extensa de (Bossavit, 2015a) se ha publicado muy recientemente (Bossavit, 2015b). En este trabajo se aborda la

---

<sup>62</sup> *“A pesar de estos errores, la intuición de que debe haber tal simetría no es totalmente engañosa, como se verá en la versión extendida de este artículo.”*

obtención de fuerzas en contacto entre imanes permanentes y se propone el tensor

$$\mathbb{T}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H}) - \varphi(H)\mathbb{I} + \sigma_M \quad (2.79)$$

donde el tensor  $\sigma_M$  es un tensor magnetostrictivo. Con la adición de este último término, el tensor (2.79) puede ser utilizado para la obtención de la densidad de fuerza no solamente en medios no lineales o anisótropos, sino también considerando magnetostricción. La denominación de este tensor en (Bossavit, 2015b) es de tensor de Maxwell aumentado. Textualmente, *“If the B–H law is isotropic,  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ , so this augmented tensor generalizes Sanchez et al.'s proposal in [7] and [8]<sup>63</sup> (which is  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \varphi(\mathbf{H})\delta$ , in our notation) by accounting for anisotropy forces (whose omission may make observable difference, as shown in [9]) and for magnetostriction”*. El término anisotrópico referido en (Bossavit 2015b) es, precisamente, el que determina la contribución superficial de fuerza dada por la ecuación (2.61).

#### 4.- Discusión

En la primera sección de este Capítulo se han obtenido los tensores de Maxwell correspondientes a las densidades de fuerza tratadas y sistematizadas en el Capítulo 1 de esta memoria. Se han constatado las diferencias entre tales tensores. En este sentido, cabe anotar respecto a estos tensores una argumentación semejante a la

---

<sup>63</sup> (Sánchez-Grandía et al, 2006) y (Sánchez-Grandía et al, 2008)

establecida en las conclusiones del Capítulo anterior. La posibilidad de definir un tensor de Maxwell en la materia es de un alto interés, puesto que, en primer término, podría contribuir a una clarificación de las cuestiones relativas a las diferencias entre las fuerzas locales obtenidas por modelización de la interacción de la materia con un campo externo.

En segundo término, tal tensor permite la obtención de fuerzas magnetostáticas entre cuerpos que se encuentran en contacto, salvando de esta forma las limitaciones ya descritas de tales métodos de fuerza, que se hacen extensibles también a los métodos de Maxwell o al basado en la aplicación del principio de Trabajos Virtuales. Y, en tercer término, tal tensor de Maxwell tendría una notable aplicación en el análisis del acoplamiento magnetoelástico.

Pero, por diversos autores, y, en todos los casos, aplicando principios variacionales, han sido obtenidos tensores de Maxwell cuyo término diagonal es dependiente de la densidad de energía o de coenergía en cada punto. Han sido descritas en este Capítulo la potencia de tales tensores, puesto que pueden definirse independientemente del comportamiento magnético del material, en cuanto a la anisotropía o linealidad de la magnetización en relación al campo magnético existente o en la existencia de una componente permanente en tal magnetización. Su carácter general es obvio y es importante constatar que, en todos los casos, han sido obtenidos partiendo del principio de Trabajos Virtuales, en un contexto estrictamente teórico o a partir, o valorando, el desarrollo de tal principio mediante métodos numéricos. Evidentemente, tal tensor, como ocurre con los tensores obtenidos a partir de densidades de fuerza conocidas, ha de reproducir el tensor de Maxwell en el vacío como un caso particular.

La admisión de una única forma tensorial de Maxwell, válida para el vacío y para cualquier medio magnético<sup>64</sup> permite obtener la fuerza total sobre un cuerpo como suma de una contribución de volumen, obtenida a partir de la divergencia del tensor, y una contribución superficial determinada por la discontinuidad del tensor entre dos medios con diferente naturaleza magnetostática. Ha podido documentarse que, mediante este procedimiento, se han reproducido los resultados obtenidos por los métodos de fuentes equivalentes o por el método de Brown-Kelvin. Naturalmente, la densidad de fuerza obtenida como divergencia de estos tensores no coincide con ninguna de las documentadas en el Capítulo 1 de esta memoria, y es éste un objeto de interés científico, puesto que tal densidad puede ser analíticamente contrastada con las obtenidas a partir de algún modelo de interacción magnetostática con la materia.

No obstante, como también se ha indicado, se han obtenido diferentes tensores genéricos aplicando el principio de los Trabajos Virtuales a las densidades de energía o de coenergía. Esta cuestión obviamente era preocupante y se manifiesta principalmente en el cálculo de fuerzas globales en medios en contacto, puesto que las densidades de energía en el cuerpo obtenidas a partir de ellos dependían del material con el que el cuerpo estaba en contacto.

Se ha descrito en la investigación en este campo un tensor simétrico en los campos  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  que puede ser obtenido indistintamente a partir de la variación de la energía o de la coenergía. Este tensor ha sido también obtenido desde metodologías diferentes. Este conjunto de argumentaciones permite, en el momento actual, considerar que tal tensor puede responder a la naturaleza exigida a un tensor de Maxwell

---

<sup>64</sup> Sin considerar, como ya se ha descrito, procesos de magnetostricción

---

en la materia y su divergencia corresponder con la densidad general de fuerza magnetostática en un medio continuo. Sin embargo, aún no se han expuesto suficientes contrastaciones experimentales o numéricas que validen las argumentaciones expuestas en los procesos de deducción de este tensor simétrico.







### 3. APROXIMACIÓN A LA INTERACCIÓN MAGNETOELÁSTICA

#### 1.- Introducción

En los capítulos precedentes se ha analizado la cuestión histórica de los modelos de densidades de fuerza magnetostática en el medio continuo. Se han manifestado claramente las divergencias entre tales fuerzas locales y, consecuentemente, las dificultades inherentes de formalización de modelos de acoplamiento magnetoelástico basados en cualquiera de ellas. La ambigüedad en la definición de estos modelos es consecuencia inevitable de la falta de validación de alguno de estos procedimientos de representación de fuerzas locales. Por otra parte, la posibilidad de definir tensores de Maxwell en la materia, es decir, la posibilidad de obtener densidades de fuerza no obtenidas por modelos de interacción magnetostática (sean de fuentes magnetizantes equivalentes o modelos dipolares) abre el campo del desarrollo de modelos de acoplamiento al permitir su formulación a través de estos tensores de Maxwell en la materia.

Se ha puesto también de manifiesto que, en el momento actual, aun cuando algún tensor <sup>65</sup> pueda considerarse suficientemente argumentado como para que pueda considerarse definitivamente esta opción como la más adecuada a la realidad experimental, la cuestión de la obtención de un tensor de Maxwell en la materia es todavía una cuestión abierta.

---

<sup>65</sup> De acuerdo a las últimas referencias, un tensor simétrico en los campos **H** y **B** con un término diagonal correspondiente a la densidad de coenergía magnetostática en cada punto

Y, por último, del análisis de los trabajos desarrollados en el ámbito del acoplamiento magnetoelástico, que se expondrá en la sección 9 de este capítulo, se infiere que tales trabajos no justifican la elección de una determinada densidad de fuerza frente a otras, desarrollando así modelos dependientes de tal elección y, por lo tanto, imposibles de confrontar.

En este capítulo se desarrolla un modelo de acoplamiento magnetoelástico desde la perspectiva de su compatibilidad con cualquier tensor de Maxwell o cualquier densidad de fuerza. Los marcos de referencia teóricos son la mecánica del medio continuo, el formalismo termodinámico y la electrodinámica del medio continuo. Como se observa, un campo interdisciplinar amplio, razón por la que se ha optado por descartar en esta memoria una exposición teórica completa de los elementos teóricos que las definen, para, en su lugar, plantear una metodología expositiva en la que tales elementos se vayan introduciendo conforme sean requeridos por la argumentación expuesta.

Así, en la sección 2 de este capítulo se abordarán simultáneamente cuestiones termodinámicas y elásticas, en primer término, para definir el trabajo elástico y el concepto de tensor de tensiones de Cauchy. Se considerarán con especial interés los argumentos relativos a la simetría de tal tensor de tensiones, puesto que tales argumentos serán relevantes en el análisis de la cuestión de la simetría del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy. En un segundo término, se analizará la variación de energía interna, por tanto, también desde una perspectiva termodinámica, determinada por la interacción magnetostática. Estos dos elementos, el trabajo elástico y magnetostático son requerimientos de la formalización teórica del acoplamiento magnetoelástico. Por último, ya en el campo de la mecánica del medio continuo, se propone una expresión general para el tensor de tensiones magnetoelásticas basada en una descripción del modelo en el sistema de referencia actual y con la adopción del tensor de Cauchy-Green por la izquierda como variable representativa del estado de deformación en un punto.

La sección 3 de este Capítulo está destinada a la modelización del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, una vez determinadas, en la sección anterior, tanto la expresión general de tal tensor como la relación constitutiva entre los campos magnético, inducción magnética y magnetización. La modelización se establece en términos de un conjunto de invariantes formado por el tensor de Cauchy-Green por la izquierda y la inducción magnética, variable de estado escogida en esta modelización. La dependencia de la densidad de energía libre interna respecto a estos parámetros permite analizar, en la sección 4, el problema de la unicidad de la ecuación de conservación del momento lineal, o ecuación de balance de fuerzas. Introducido este problema, en la sección 5 se introducen las principales hipótesis sobre las que se desarrolla el modelo de interacción propuesto en esta memoria.

Efectivamente, un tratamiento formal de las dos relaciones básicas del modelo, la forma genérica del tensor de tensiones magnetoelásticas y la relación constitutiva entre los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{m}$ , podría determinar una única componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, componente que estaría constituida por el producto tensorial de los campos magnético e inducción magnética. Pero este tratamiento estrictamente formal supondría la imposibilidad de configurar un marco teórico en el que se pudiera abordar el comportamiento magnetoelástico para cualquier densidad de fuerza o cualquier tensor de Maxwell. Para permitir este tratamiento es necesaria la introducción de una serie de parámetros de acoplamiento, de naturaleza magnética y magnetoelástica, que deben responder al ajuste necesario ante diversos tensores de Maxwell para asegurar la univocidad de un tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy referencial, entendido este concepto como un único tensor de tensiones magnetoelásticas en una determinada configuración experimental y para un determinado sistema magnetomecánico. Tal tensor ha de ser determinado, pues, experimentalmente. Ello determina que este tensor de Cauchy puede descomponerse en tres componentes, la estrictamente elástica, la estrictamente magnética y la estrictamente magnetoelástica. Se comprueba que, efectivamente, bajo

la asunción de estas hipótesis, la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas puede adoptar, a través de los coeficientes de acoplamiento magnético, diferentes expresiones que, unidas al tensor magnético de Maxwell, determinan una única componente magnética del tensor referencial. Pero el problema esencial de esta modelización consiste en que, dado que el tensor magnético de Maxwell no tiene componente magnetoelástica, se ha de asegurar también el carácter unívoco de la componente magnetoelástica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy así obtenido y esta sección queda completada con esta demostración.

La sección 6 tiene por objetivo analizar el carácter antisimétrico del tensor de tensiones de Cauchy obtenido en esta memoria. Se comprobará que, independientemente del tensor de Maxwell adoptado en la modelización, el tensor de Cauchy es antisimétrico.

La sección 7 trata específicamente el tensor magnético obtenido como adición de la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas, dependiente de parámetros magnéticos de acoplamiento, y el tensor de Maxwell. Como se ha indicado, la divergencia del tensor de Maxwell conduce a una densidad magnética de fuerza y se analiza la posibilidad de que tal densidad de fuerza, unida a la divergencia de la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, pueda conducir también a una densidad de fuerza referencial, y, consecuentemente, de carácter experimental, de tal forma que las diferencias observadas entre las densidades de fuerza provenientes de modelos de interacción o de diferentes tensores de Maxwell pudieran ser compensadas por la divergencia de la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, dependiente también de los coeficientes magnéticos de acoplamiento. Esta densidad de fuerza extendida incluiría, por lo tanto, una componente relacionada con el comportamiento elástico de la materia frente a tensiones magnéticas.

La sección 8 está dedicada al desarrollo de las condiciones de contorno del tensor total de tensiones, obtenido como suma de los tensores de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y las tensiones magnéticas del tensor de Maxwell. Estas condiciones de contorno pueden permitir el desarrollo de una estrategia experimental para la

determinación del tensor referencial de Cauchy fundamentada en la invariancia de la componente magnetoelástica de este tensor frente a cambios en el tensor de Maxwell adoptado.

En la sección 9 se realiza un estudio comparado entre el modelo de interacción propuesto en esta memoria y diferentes modelos propuestos en la literatura técnica o científica. Como se comprobará, estos modelos suelen incluir, además del tensor de Maxwell adoptado en la modelización, diferentes componentes magnéticas en el tensor de Cauchy. Ello permite situar estos modelos en el marco desarrollado en esta memoria.

La discusión de los resultados de este capítulo se presenta en la sección 10.

## 2.- Elementos para una aproximación a la interacción magnetoelástica compatible con diferentes tensores de Maxwell

### 2.1.- Trabajo magnetoelástico: tensor de Cauchy

Considérese un sistema continuo sometido a interacciones magnetostáticas. La posición de un elemento diferencial de masa  $dm$  de tal sistema ha de definirse inicialmente en el denominado sistema de referencia *material*, bajo el que se describe el estado del sistema con anterioridad a las variaciones que experimente en el proceso de interacción. La posición espacial de un elemento diferencial de masa en tal sistema material se denotará bajo el símbolo  $X_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  y la

posición de este elemento en un instante  $t$  quedará unívocamente definida a través de la función<sup>66</sup>

$$x_i = x_i(X_\alpha, t) \quad (3.1)$$

donde  $x_i, i=1,2,3$  representan las tres coordenadas espaciales en el sistema de referencia denominado como *espacial o actual*. Se admite también usualmente en mecánica del medio continuo que la función inversa de (3.1) está bien definida, de tal forma que dos elementos diferenciales correspondientes a diferentes puntos del sistema inicial no pueden ocupar una misma posición en el sistema de referencia actual en algún instante  $t$ . Además, suele admitirse que (3.1) es continua y continuamente diferenciable y que el determinante de la matriz Jacobiana

$$F_{i\alpha} = \partial x_i / \partial X_\alpha = x_{i,\alpha} \quad (3.2)$$

ha de ser no nulo para toda posición  $X$  y todo instante  $t$

$$J = |x_{i,\alpha}| \neq 0 \quad (3.3)$$

La matriz (3.2) se denomina usualmente como *gradiente de deformación*. El determinante (3.3) determina (Hutter et al., 2006:11) la relación entre la densidad inicial  $\rho_0$  y la densidad  $\rho$  en un mismo

---

<sup>66</sup> El uso de subíndices griegos para denotar las componentes del elemento diferencial en el sistema sin deformar facilita la representación de, especialmente, las derivadas respecto a estas componentes.



punto material, o entre el elemento de volumen deformado  $dV$  y el mismo elemento sin deformar  $dV_0$

$$J = \frac{dV}{dV_0} \quad (3.4)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{J}$$

Definiendo el *vector desplazamiento*  $u_i$  de un punto  $X$  por medio de la relación

$$u_i = x_i - X_i \quad (3.5)$$

puede definirse (Landau y Lifshitz, 1969: 4) el tensor de deformación para pequeñas deformaciones, ámbito natural de la teoría de la elasticidad<sup>67</sup>, como

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \quad (3.6)$$

En términos del tensor de deformación, la relación (3.4.a) puede expresarse (Landau y Lifshitz, 1969:5) como

$$\frac{dV}{dV_0} = 1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} = 1 + Tr(u_{ij}) \quad (3.7)$$

---

<sup>67</sup> Se retoma sólo en este punto la notación latina para las componentes del vector posición en el estado sin deformar.

donde  $u^{(i)}, i=1,2,3$  son los tres valores propios del tensor de tensiones, cuya existencia queda garantizada por la simetría del tensor, y donde  $Tr(u_{ij})$  representa la traza del tensor de tensiones, invariante tensorial ante transformaciones del sistema de referencia.

Como se detallará posteriormente, la densidad será considerada especialmente en el desarrollo de un modelo de interacción magnetoelástica. Las expresiones (3.4.a) y (3.7) indican que puede formularse este modelo en términos del determinante del gradiente de la deformación o en términos de la traza del tensor de deformación. La densidad de energía magnetoelástica ha de construirse, por otra parte, en términos de invariantes de las variables tensoriales o vectoriales consideradas. Así pues, podría considerarse el gradiente de la deformación como variable elástica y la densidad de energía elástica en términos de los invariantes de este tensor, entre los que se encuentra su determinante, o bien el tensor de deformación como variable elástica y la densidad de energía elástica en términos de sus invariantes, entre los que se encuentra su traza. Como ya se ha indicado, la consideración específica de la densidad en el modelo obliga necesariamente a la elección de una de estas dos descripciones.

En este trabajo se optará por la primera de ellas, usualmente empleada en la mayor parte de los modelos de interacción magnetoelástica desarrollados en la actualidad. No obstante, en otros ámbitos de modelización de interacciones<sup>68</sup> suele recurrirse al tensor de deformación como variable elástica fundamental. Es difícil ahora establecer alguna argumentación adicional que avale la conveniencia

---

<sup>68</sup> Por ejemplo, los acoplamientos de modelos elásticos o plásticos con variables de daño en materiales

de esta primera elección<sup>69</sup> sin que se haya realizado una comparación entre modelizaciones magnetoelásticas desarrolladas bajo ambas formulaciones.

Desde un punto de vista termodinámico, la variación de energía interna  $U$  por densidad de volumen  $F$  en un proceso reversible viene dado por la expresión

$$dU = TdS + \zeta d\rho + \sum_i A_i d\lambda_i \quad (3.8)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta del sistema y  $S$  su entropía por unidad de volumen.  $\zeta$  se denominará potencial másico<sup>70</sup> (en sentido genérico, mide la dependencia de la energía interna respecto al número de partículas, o cantidad de materia, incluidas en un elemento dado de volumen (Landau y Lifshitz, 1988:55), (Landau y Lifshitz, 1981:58-59),  $\lambda_i$  son las variables que determinan el estado del sistema, dependientes de las interacciones que se consideren que afectan a tal estado termodinámico y  $A_i$  son las funciones de estado asociadas a tales variables, de tal forma que

---

<sup>69</sup> No obstante, es conveniente indicar que en desarrollos estrictamente mecánicos (modelos elastoplásticos, con o sin acoplamiento con daño u otras variables que midan la fatiga en materiales) suelen plantarse unas aplicaciones prácticas en las que es muy conveniente el planteamiento en términos del tensor de deformaciones y de su variable termodinámicamente conjugada, el tensor de tensiones.

<sup>70</sup> Potencial químico en (Landau y Lifshitz, 1988)

$$A_i = \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \right)_{S, \rho} \quad (3.9)$$

donde los subíndices indican las variables consideradas como constantes en la derivación. Aun cuando ésta es una nomenclatura ampliamente extendida en tratados de termodinámica, en lo sucesivo se prescindirá, en la notación de una derivada parcial, de los subíndices que indican las variables que permanecen constantes en la derivación, admitiendo con ello que tales variables son todas a excepción de la considerada en la derivación y, por supuesto, que el conjunto de variables adoptadas son consideradas como independientes.

Las ecuaciones (3.8) y (3.9) son centrales en la definición de un modelo en el que se integren contribuciones energéticas provenientes de diferentes interacciones. En el caso en que se centra este trabajo, se considerarán interacciones de origen elástico y magnetostático y la formulación del modelo debe incluir por tanto la definición de las variables  $\lambda_i$  correspondientes a la variación de energía elástica y de energía magnetostática.

La densidad de fuerza elástica puede expresarse (Landau y Lifshitz, 1969: 5-7) como la divergencia del tensor de segundo orden denominado como tensor de tensiones elásticas,

$$f_i^e = \sigma_{ij, j} \quad (3.10)$$

de tal forma que la fuerza total elástica  $\mathbf{F}^e$  ejercida por las tensiones internas en un volumen  $V$  de un sólido deformable vendría dada por la expresión<sup>71</sup>

$$F_i^e = \int_V f_i^e dV = \oint_S \sigma_{ij,j} dV = \oint_S \sigma_{ij} n_j dS \quad (3.11)$$

donde se ha considerado el teorema de Gauss-Ostrogadski. En la expresión (3.11)  $S$  es la superficie del volumen  $V$  considerado y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal en cada punto a tal superficie y dirigido hacia fuera del elemento de volumen.

El tensor de tensiones elásticas es necesariamente simétrico (Landau y Lifshitz, 1969: 8),

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.12)$$

si se impone la condición de que el momento de las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen  $V$  ha de poder transformarse en una integral de superficie. Así, si se desarrolla el tensor momento de las fuerzas elásticas, consideradas éstas como divergencia del tensor de tensiones, e integrando posteriormente por partes, se obtiene el desarrollo

---

<sup>71</sup> Este resultado es consecuencia directa de la consideración de que las fuerzas elásticas son consideradas como fuerzas de corto alcance, de forma que la fuerza total sobre un elemento de volumen es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la superficie de este elemento. La validez de este argumento puede extenderse al cálculo del momento de las fuerzas elásticas (Véase (Landau, 1969:8).

$$\begin{aligned}
L_{ij}^e &= \int_V (x_i f_j^e - x_j f_i^e) dV = \\
&\int_V (x_i \sigma_{jk,k} - x_j \sigma_{ik,k}) dV = \int_V (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik})_{,k} dV \\
&+ \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) dV
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La primera integral en el segundo término de la igualdad (3.13) puede transformarse en una integral superficial, de nuevo bajo la aplicación del teorema de Gauss-Ostrogadski, que podría considerarse nula en el caso de que la superficie de integración se extienda a una zona libre de tensiones,

$$L_{ij}^e = \int_V (x_i f_j^e - x_j f_i^e) dV = \oint_S (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}) n_k dS + \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) dV \tag{3.14}$$

pero se mantendría un término de volumen que únicamente puede anularse si el tensor de tensiones es simétrico.

Es importante indicar que la condición de simetría del tensor de tensiones elástico responde pues a la consideración de que las fuerzas de naturaleza elástica, debidas a pequeños desplazamientos de las partículas respecto a su posición de equilibrio son de corto alcance y, como tal, la resultante de tales fuerzas y el momentos resultante provocado por ellas sobre un elemento de volumen han de poder ser expresadas como integrales extendidas a la superficie de tal elemento de volumen. Obviamente, en modelos de interacción magnetoelástica esta condición no puede ser exigida y, por tanto, el tensor de tensiones magnetoelásticas no debe ser necesariamente simétrico.

El diferencial de trabajo elástico correspondiente a una variación diferencial de la deformación puede obtenerse inmediatamente a partir de la ecuación (3.10),

$$\delta W^e = f_i^e \delta x_i = \sigma_{ij,j} \delta x_i = \sigma_{ij,j} \delta u_i \tag{3.15}$$

En (Landau y Lifshitz, 1969: 11) se utiliza esta expresión para el cálculo del trabajo por unidad de volumen. La integración para un volumen  $V$  se realiza a través de una transformación previa,

$$\sigma_{ij,j}\delta u_i = (\sigma_{ij}\delta u_i)_j - \sigma_{ij}\delta u_{i,j} \quad (3.16)$$

de tal forma que la integración en el volumen del cuerpo del primer término puede extenderse a una integral sobre una superficie arbitraria que comprenda a  $V$ . Esta integral superficial puede extenderse al infinito y el tensor de tensiones ser nulo en sus puntos. De esta forma el trabajo elástico por unidad de volumen puede considerarse<sup>72</sup> como

$$\delta W^e = -\sigma_{ij}\delta u_{i,j} \quad (3.17)$$

Si se considera que el tensor de tensiones es simétrico, la relación anterior puede expresarse como

$$\delta W^e = -\sigma_{ij}\delta u_{ij} \quad (3.18)$$

Admitiendo esta simetría, la variación de energía interna por unidad de volumen es entonces, para un proceso reversible,

$$dU^e = TdS + \zeta d\rho + \sigma_{ij}du_{ij} \quad (3.19)$$

en concordancia con (3.8) y de tal forma que es válida la expresión

---

<sup>72</sup> En el sentido de que el trabajo total en el cuerpo puede obtenerse por integración de este elemento diferencial

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial u_{ij}} \quad (3.20)$$

Las expresiones (3.19) y (3.20) determinan que, en un proceso elástico, la variable de estado es el tensor de deformación y la función de estado asociada es el tensor de tensiones. Esta interpretación no puede mantenerse en procesos de interacción magnetoelástica dado que el tensor de tensiones ha de considerar el efecto de la densidad de fuerza magnetostática debida a la interacción del medio con un campo externo. Para tales densidades de fuerza no puede considerarse que su resultante, así como su momento resultante, sobre un elemento de volumen deba poder obtenerse exclusivamente como integrales extendidas a la superficie del medio.

El tensor de tensiones es usualmente denominado como tensor de Cauchy. Se ha expuesto anteriormente que el tensor de Cauchy de tensiones elásticas es necesariamente simétrico y que no puede considerarse que esta simetría sea válida en el acoplamiento magnetoelástico. La denominación de tensor de Cauchy es consecuencia directa del conocido como teorema de Cauchy. De acuerdo a este teorema, el vector tensión  $\mathbf{t}$  en un punto de la superficie de un medio continuo es únicamente dependiente del vector unitario normal  $\mathbf{n}$  a la superficie en ese punto y dirigido hacia fuera de ella y, además, tal dependencia es lineal. La dependencia exclusiva con el vector normal fue establecida inicialmente por Augustin-Louis Cauchy como hipótesis<sup>73</sup> y posteriormente demostrada por Walter

---

<sup>73</sup> Cauchy, A.L. (1823). Bulletin de la Societé Philomatique, 9-13.



Noll<sup>74</sup>. En consecuencia, el vector  $\mathbf{t}$  se obtendrá, en mecánica del medio continuo, bajo la expresión

$$t_i = T_{ij} \cdot n_j \quad (3.21)$$

expresión en la que  $T_{ij}$  son las componentes  $i j$  del tensor de Cauchy  $\mathbb{T}$ . Todo tensor de Cauchy satisfará por lo tanto la ecuación (3.11),

$$F_i = \int_V f_i dV = \oint_S T_{ij,j} dV = \oint_S T_{ij} n_j dS = \oint_S t_i dS \quad (3.22)$$

Como se ha indicado anteriormente, el tensor de tensiones elásticas es un tensor de Cauchy simétrico y no puede imponerse la condición de simetría del tensor debido a la presencia de fuerzas locales de carácter magnetostático.

En consecuencia, el trabajo provocado por las tensiones magnetoelásticas en la deformación del medio se obtendrá a través de la expresión (considerar aquí el resultado (3.17))

$$\delta W = -T_{ij} \delta x_{i,j} \quad (3.23)$$

donde se ha tenido en cuenta que, por (3.5),

---

<sup>74</sup> Noll, W. (1959). The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics, 266-281. *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics (Symposium at Berkeley, 1957), North-Holland Publishing Co., Amsterdam.*

$$\delta u_i = \delta x_i \quad (3.24)$$

## 2.2.- Trabajo magnetostático

Es de interés en este punto el cálculo de la variación de energía interna que experimenta un medio continuo cuando se ve sometido a un campo magnético. La variación de esta energía sólo puede ser debida al campo eléctrico producido por una variación del campo magnético, dado que, de acuerdo con la ley de Lorentz (Landau y Lifshitz, 1973: 68),

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{p}$  es la cantidad de movimiento de un electrón de carga  $e$  y velocidad  $\mathbf{v}$  sometido a la interacción de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y de un campo magnético  $\mathbf{H}$ , la fuerza actuante sobre tal electrón es perpendicular a su velocidad y, en consecuencia, no puede provocar incremento en su energía cinética:

$$\frac{dEc}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (3.26)$$

El campo eléctrico generado por una variación del campo magnético viene dado por la ecuación<sup>75</sup> de Maxwell

---

<sup>75</sup> La variación del campo magnético respecto al tiempo se considera aquí únicamente provocada por el medio magnético en interacción con un campo magnético externo.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.27)$$

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  generado por la variación del campo magnético provocado por la interacción del material con el campo externo provocará una variación de energía en el medio que debe ser igual y de signo contrario a la variación de energía provocada por las corrientes externas generadoras del campo, de forma que el trabajo efectuado por unidad de tiempo sobre tales corrientes es, considerando (3.26)<sup>76</sup>

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \cdot dV \quad (3.28)$$

La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  viene determinada por la ecuación de Maxwell para campos eléctricos estacionarios (1.50),

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.29)$$

Utilizando ahora la identidad vectorial

$$\nabla(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) - \mathbf{U} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (3.30)$$

siendo  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  dos campos vectoriales arbitrarios, la integral (3.28), considerando (3.29), puede ser expresada como

---

<sup>76</sup> Se utiliza aquí el símbolo diferencial  $\delta$  para evitar la confusión con el símbolo  $d$  entendido éste como el diferencial volumétrico de la correspondiente magnitud.

$$\frac{\delta W}{\delta t} = - \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, dV - \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} \, dV \quad (3.31)$$

La primera integral (Landau y Lifshhitz, 1981: 152) puede ser transformada en una integral sobre una superficie arbitraria infinitamente alejada, con lo que puede considerarse nulo el campo eléctrico generado por la variación del campo magnético y por tanto puede anularse tal primera integral. De esta forma, la variación de trabajo por unidad de tiempo sobre el medio magnético puede ser obtenida por

$$\frac{\delta W}{\delta t} = - \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} \, dV \quad (3.32)$$

Teniendo ahora en cuenta la ecuación (3.27), la ecuación (3.32) puede ser escrita como

$$\delta W = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \, dV \quad (3.33)$$

2.3.- Densidad de energía libre magnetostática: una forma general del tensor de tensiones magnetoelástica de Cauchy

La variación de energía interna por unidad de volumen puede expresarse como, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.8) y (3.23),

$$dU = TdS + \zeta d\rho + T_{ij} dx_{i,j} + H_i \cdot dB_i \quad (3.34)$$

De acuerdo a esta expresión, la densidad de energía interna para un medio magnético es, en principio<sup>77</sup>, una función termodinámica de las variables entropía, densidad, gradiente de deformación e inducción magnética,

$$U = U(S, \rho, x_{i,j}, B_i) \quad (3.35)$$

Es usual introducir en este punto la función densidad de energía libre  $F$ , que permite describir los procesos reversibles del estado en términos de la temperatura  $T$ ,

$$F = U - T.S \quad (3.36)$$

de forma que su variación viene dada por:

$$dF = dU - T.dS - S.dT = -SdT + \zeta d\rho + T_{ij}dx_{i,j} + H_i dB_i \quad (3.37)$$

La densidad de energía libre es función pues, en principio<sup>78</sup>, de las variables temperatura, densidad, gradiente de deformación y campo magnético:

$$F = F(T, \rho, x_{i,j}, B_i) \quad (3.38)$$

y su variación temporal quedará dada por la ecuación siguiente

<sup>77</sup> Como se verá posteriormente, la densidad es función del propio tensor de deformación.

<sup>78</sup> Misma consideración que la expuesta anteriormente.

$$\dot{F} = -ST + \zeta\dot{\rho} + T_{ij}\dot{x}_{i,j} + H_i\dot{B}_i \quad (3.39)$$

La ecuación anterior es válida para sistemas magnetoelásticos en procesos reversibles en los que no se produce flujo de calor. En lo sucesivo, se desarrollará este modelo admitiendo además que los procesos de acoplamiento magnetoelástico reversible son básicamente isotermos, de modo que la ecuación (3.39) toma ahora la forma:

$$\dot{F} = \zeta\dot{\rho} + T_{ij}\dot{x}_{i,j} + H_i\dot{B}_i \quad (3.40)$$

con lo que la energía libre magnetoelástica quedará modelizada a partir de las variables densidad, gradiente de deformación e inducción magnética <sup>79</sup>,

$$F = F(\rho, x_{i,j}, B_i) \quad (3.41)$$

Para el desarrollo posterior de esta modelización, es conveniente expresar las derivadas temporales de las deformaciones en (3.40) en términos del tensor gradiente de deformación (3.2),

$$\dot{x}_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \right) \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j} = \dot{F}_{i\alpha} F_{\alpha j}^{-1} \quad (3.42)$$

con lo que la variación de la densidad de energía libre por unidad de volumen podrá expresarse ahora como

$$\dot{F} = \zeta\dot{\rho} + T_{ij}\dot{F}_{i\alpha} F_{\alpha j}^{-1} + H_i\dot{B}_i \quad (3.43)$$

---

<sup>79</sup> De nuevo, ha de tenerse en cuenta la anterior consideración.

La expresión (3.43) indica que la variación temporal de la energía interna es función de las variaciones temporales de la densidad, del tensor gradiente de deformación y del campo magnético. Si se considera ahora la ecuación de continuidad para cuerpos homogéneos<sup>80</sup>,

$$\dot{\rho} + \rho \dot{x}_{i,i} = 0 \quad (3.44)$$

la ecuación (3.43) puede expresarse como

$$\dot{F} = -\zeta \rho \dot{F}_{i\alpha} F_{\alpha i}^{-1} + T_{ij} \dot{F}_{i\alpha} F_{\alpha j}^{-1} + H_i \dot{B}_i = (T_{ij} - \zeta \rho \delta_{ij}) \dot{F}_{i\alpha} F_{\alpha j}^{-1} + H_i \dot{B}_i \quad (3.45)$$

La ecuación (3.45) indica que las variables tensor gradiente de deformación y el campo magnético son las mínimas y suficientes para la determinación de la función de estado densidad de energía libre magnetoelástica:

$$F = F(F_{i\alpha}, B_i) \quad (3.46)$$

de tal forma que

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial F_{i\alpha}} \dot{F}_{i\alpha} + \frac{\partial F}{\partial B_i} \dot{B}_i \quad (3.47)$$

y, comparando con (3.45),

---

<sup>80</sup> Ecuación clásica en física del medio continuo. Véase, por ejemplo, (Hutter et al, 2006).

$$\begin{aligned} (T_{ij} - \zeta \rho \delta_{ij}) F_{\alpha j}^{-1} &= \frac{\partial F}{\partial F_{i\alpha}} \\ H_i &= \frac{\partial F}{\partial B_i} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Se va a desarrollar este modelo admitiendo la invariancia de la densidad de energía libre con respecto a la métrica del sistema actual de referencia. Por esta razón las variables en la definición de la densidad de energía libre han de ser variables invariantes frente a transformaciones del sistema de referencia actual. Ahora bien, el tensor gradiente de deformación  $\mathbb{F}$  involucra variables en ambos sistemas de referencia. Es por esta razón por la que se considera en esta memoria la utilización del tensor de deformación por la izquierda de Cauchy-Green,  $\mathbb{G}$ , definido por la expresión<sup>81</sup>

$$G_{ij} = F_{i\alpha} F_{j\alpha} \quad (3.49)$$

Para ello es necesario comprobar que la variación temporal de la densidad de energía libre expresada en términos del tensor de deformación es igual a la variación de esta densidad expresada en términos del tensor de deformación por la izquierda de Cauchy-Green. Efectivamente, a partir de (3.49) es inmediato que

---

<sup>81</sup> Ampliamente utilizado en mecánica del medio continuo. Generalmente representado por la notación  $B_{ij}$ , se utiliza en esta memoria la notación  $G_{ij}$  para evitar confusiones con la notación de campo magnético (ver, por ejemplo, (Hutter et al, 2006:8)).



$$\frac{\partial F}{\partial F_{j\alpha}} = 2 \frac{\partial F}{\partial G_{jk}} F_{k\alpha} \quad (3.50)$$

y, entonces, por la simetría del tensor  $\mathbb{G}$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial F_{j\alpha}} \dot{F}_{j\alpha} = 2 \frac{\partial F}{\partial G_{jk}} F_{k\alpha} \dot{F}_{j\alpha} = 2 \frac{\partial F}{\partial G_{jk}} \left( \frac{1}{2} \dot{G}_{jk} \right) = \frac{\partial F}{\partial G_{jk}} \dot{G}_{jk} \quad (3.51)$$

La expresión (3.51) indica que la variación temporal de la densidad de energía libre puede expresarse de forma equivalente en términos de los tensores  $\mathbb{F}$  y  $\mathbb{G}$ .

Considerando las ecuaciones (3.48)<sub>1</sub> y (3.49), se obtiene la expresión del tensor de Cauchy de tensiones magnetostáticas en términos del tensor de deformación por la izquierda de Cauchy-Green,

$$T_{ij} - \zeta \rho \delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial F_{i\alpha}} F_{j\alpha} = 2 \frac{\partial F}{\partial G_{ik}} F_{k\alpha} F_{j\alpha} = 2 \frac{\partial F}{\partial G_{ik}} G_{kj} \quad (3.52)$$

con lo que

$$T_{ij} = 2 \frac{\partial F}{\partial G_{ik}} G_{kj} + \zeta \rho \delta_{ij} \quad (3.53)$$

La expresión obtenida en (3.53) es la forma general del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy obtenida bajo el formalismo presentado en este trabajo. Es conveniente en este punto resumir las hipótesis que se han tenido en cuenta en su desarrollo, ya que este aspecto es de interés en la valoración de la generalidad de la expresión obtenida.

El tensor (3.53) describe las tensiones magnetoelásticas en un proceso reversible e isoterma en un medio homogéneo sometido a interacciones magnetoestáticas. Se ha optado también por la expresión general para el trabajo magnetostático (3.33). En otros modelos de

interacción se utilizan expresiones para el trabajo magnetostático que utilizan como variable la magnetización  $\mathbf{m}$  en su interacción con el campo magnético  $\mathbf{H}_0$  exterior y presente en el medio antes de su interacción. Esta formulación es de especial interés en la medida de la energía de interacción del material magnético con un campo magnético externo pero no considera la energía debida a la variación del campo magnético  $\mathbf{H}$  en el seno del material provocada por la propia interacción de éste con el campo externo. La consecuencia inmediata de esta elección consiste en que el modelo desarrollado se formulará en términos de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  en el medio, en contraposición a otras descripciones en que la variable magnetostática escogida es la magnetización  $\mathbf{m}$ . De igual forma, hubiera sido posible el desarrollo de un modelo en el que la magnitud magnetostática adoptada como variables hubiera sido el campo magnético  $\mathbf{H}$ . Tal descripción partiría de la suposición de que la variación de la energía libre del material debida a la interacción magnetostática se correspondiera con la variación de la densidad de co-energía  $G$  del mismo. La discusión de las diferencias entre la adopción de las densidades de energía libre  $F$  o de co-energía  $G$  en el estudio de las densidades de fuerza magnetostática ha sido expuesta en el Capítulo 2 de esta memoria.

La relación (3.48)<sub>2</sub> se denomina ecuación o relación constitutiva del material magnético, puesto que determina la relación entre los campos magnético  $\mathbf{H}$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}$  en el medio y, hasta este punto, no se ha establecido ninguna hipótesis sobre esta relación.

El potencial másico  $\zeta$  se relaciona directamente con la presión magnetostática sobre la masa contenida en el volumen considerado y  $\zeta_{\rho}$  representa la componente de un tensor diagonal del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, es decir, un esfuerzo de compresión o tracción uniformemente repartido sobre la superficie del elemento de volumen considerado. Su determinación dependerá por tanto de la selección de la modelización de la función de densidad de energía libre.

### 3.- Modelización del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy

El tensor (3.53) se expresa en términos de las derivadas de la densidad de energía libre respecto al tensor de tensiones por la izquierda de Cauchy-Green. Por otra parte, las variables de estado consideradas en esta modelización son el tensor por la izquierda de Cauchy-Green  $\mathbb{G}$  y la inducción magnética en el medio  $\mathbf{B}$ . Como se ha indicado anteriormente, la densidad de energía libre ha de ser invariante frente a transformaciones del sistema de referencia actual, por lo que necesariamente las variables de estado de esta densidad de energía libre han de ser invariantes frente a transformaciones del sistema referencial. Se considerarán por tanto tres invariantes tensoriales del tensor de orden dos,  $\mathbb{G}$ , que se denotarán como

$$I_i(\mathbb{G}) \quad i = 1,2,3 \quad (3.54)$$

y que se denominarán invariantes estrictamente elásticos, puesto que en su definición no intervienen magnitudes magnetostáticas. Por otra parte, con el tensor  $\mathbb{G}$  y el campo  $\mathbf{B}$  se definirán tres invariantes métricos, que se denotarán como

$$J_i(\mathbb{G}, \mathbf{B}) \quad i = 1,2,3 \quad (3.55)$$

definidos como

$$J_1 = B_i B_i \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 \quad (3.56)$$

$$J_2 = B_i G_{ij} B_j \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbb{G} \mathbf{B} \quad (3.57)$$

$$J_3 = B_i G_{ij} G_{jk} B_k \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbb{G}^2 \mathbf{B} \quad (3.58)$$

y que se denominarán en este trabajo invariantes magnetoelásticos<sup>82</sup>.

Considerando estos seis invariantes, argumentos de la función de estado densidad de energía magnetoelástica, las derivadas de la densidad de energía libre con respecto a las componentes del tensor por la izquierda de Cauchy-Green pueden obtenerse a partir de tales invariantes:

$$\frac{\partial F}{\partial G_{ij}} = \left( \frac{\partial F}{\partial G_{ij}} \right)_e + \frac{\partial F}{\partial J_2} B_i B_j + \frac{\partial F}{\partial J_3} (B_i G_{jk} B_k + B_j G_{ik} B_k) \quad (3.59)$$

o, en forma simbólica:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} = \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} \right)_e + \frac{\partial F}{\partial J_2} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \frac{\partial F}{\partial J_3} (\mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \quad (3.60)$$

donde el primer término representa las derivadas de la densidad de energía libre respecto a los invariantes estrictamente elásticos  $I_i$ . Para el desarrollo de este trabajo no se considera necesario el desarrollo explícito de estos términos estrictamente elásticos, ya que no afectan al modelo de acoplamiento en sí mismo. Es necesario ahora desarrollar la relación constitutiva (3.48)<sub>2</sub>,

---

<sup>82</sup> Aunque el primero de ellos, obviamente, es un invariante estrictamente magnético. Como se observa, se considera en esta memoria un desarrollo del acoplamiento magnetoelástico hasta términos de segundo orden en el tensor por la izquierda de Cauchy-Green.

$$H_i = \frac{\partial F}{\partial B_i} = 2 \left( \frac{\partial F}{\partial J_1} B_i + \frac{\partial F}{\partial J_2} G_{ij} B_j + \frac{\partial F}{\partial J_3} G_{ij} G_{jk} B_k \right) \quad (3.61)$$

o, simbólicamente,

$$\mathbf{H} = 2 \left( \frac{\partial F}{\partial J_1} \mathbf{B} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \mathbb{G}\mathbf{B} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \mathbb{G}^2\mathbf{B} \right) \quad (3.62)$$

Para simplificar el desarrollo formal de las expresiones, se introducirán las notaciones:

$$\alpha_i = \frac{\partial F}{\partial J_i} \quad (3.63)$$

Considerando las ecuaciones (3.48), (3.55), (3.58), (3.62) y (3.63), el modelo de acoplamiento magnetoelástico propuesto en este trabajo se resume en las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathbb{T} = 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} \right)_e \mathbb{G} + 2(\alpha_2 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \alpha_3 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}^2\mathbf{B} + \alpha_3 \mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B}) + \zeta \rho \mathbb{I} \quad (3.64)$$

donde  $\mathbb{I}$  es el tensor identidad, y

$$\mathbf{H} = 2(\alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbb{G}\mathbf{B} + \alpha_3 \mathbb{G}^2\mathbf{B}) \quad (3.65)$$

#### 4.- Unicidad del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy ante diferentes densidades de fuerza magnetostáticas

El tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy dado obtenido en la sección anterior ha sido desarrollado atendiendo a la ecuación de equilibrio energético para un volumen dado. En la formulación de esta ecuación, también denominada en mecánica del medio continuo como ecuación de balance de energía, se han tenido en cuenta los dos primeros principios de termodinámica y es válida sólo en la modelización de procesos reversibles a temperatura constante. En la obtención del tensor (3.64) se ha tenido también en cuenta la ecuación de continuidad de la masa (3.44) expresada en forma local y bajo la suposición de que el medio considerado es homogéneo.

El problema que se analiza en esta sección se refiere a la ley de balance de momento lineal o de cantidad de movimiento. La forma local de esta ley es<sup>83</sup> :

$$\rho x_i = T_{ij,j} + f_i \quad (3.66)$$

La componente  $T_{ij,j}$ , según se mostró en (3.22) representa la densidad de fuerza magnetoelástica, obtenida como la divergencia del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy. En (3.66)  $f$  es la densidad de fuerza externa aplicada al elemento considerado. La expresión (3.66) es el núcleo por tanto de cualquier modelización de interacciones, dado que es la densidad de fuerza  $f$  la magnitud determinante de la expresión del tensor de Cauchy. En este caso  $f$  es la

---

<sup>83</sup> Ecuación clásica en la mecánica del medio continuo. Puede consultarse, por ejemplo, en (Hutter et al, 2006)

densidad de fuerza magnetostática y no se considerará en este trabajo ninguna otra fuerza de diferente naturaleza.

Como ya se ha descrito en el Capítulo 1 son diferentes las expresiones de densidad de fuerza magnetostática consideradas tanto en procesos de diseño de dispositivos electromecánicos en los que no se considera relevante la distribución de esfuerzos internos como en el desarrollo de modelos de interacción magnetoelástica. Se han descrito resultados técnicos y científicos en los que se desarrollan y aplican modelos de interacción magnetoelástica considerando una determinada expresión para la fuerza magnetostática. Ahora bien, es una evidencia que la elección de una determinada expresión de fuerza en (3.66) va a determinar una específica solución para el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y es por tanto evidente que ello muestra una ambigüedad que es necesario analizar, dado que, ante una determinada configuración magnetostática, la respuesta mecánica del material magnético ha de ser única y, por tanto, independiente de la modelización que se adopte para la densidad de fuerza magnetostática.

Esta argumentación de naturaleza experimental es relevante, puesto que puede proporcionar información relativa a las divergencias observadas en las distribuciones de fuerza basada en las diferencias entre las respuestas elásticas ante ellas.

Como se ha expuesto en el Capítulo 2, las fuerzas magnetostáticas pueden considerarse derivadas de diferentes tensores de Maxwell  $\mathbb{T}^M$ , con lo que la ecuación (3.66) puede expresarse como

$$\rho \ddot{x}_i = (T_{ij} + T_{ij}^M)_{,j} \quad (3.67)$$

Con carácter general, esta ambigüedad únicamente puede salvarse considerando que el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy (es decir, la distribución espacial y direccional de los esfuerzos magnetoelásticos en el medio) ha de depender del tensor de Maxwell escogido para la modelización, pero ello implica

necesariamente que la modelización de tal tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy ha de ser lo suficientemente amplia como para que su suma con cualquier tensor de Maxwell conduzca a una única forma tensorial.

Ahora bien, cuando se utilice en este trabajo la denominación de una “única forma tensorial” resultante de la suma del tensor de Cauchy asociado a un determinado tensor de Maxwell y tal tensor de Maxwell ha de entenderse que tal forma tensorial es dependiente de la selección de un conjunto mínimo y suficiente de parámetros que deberán considerarse entonces como parámetros de diseño o, en otros términos, parámetros cuyo valor ha de obtenerse experimentalmente.

Por lo tanto, la descripción expuesta en el Capítulo 2 relativa a los tensores de Maxwell obliga a que el desarrollo de esta única forma tensorial referencial deba realizarse para la forma más genérica de un tensor de Maxwell. Se ha mostrado que la variable magnetostática escogida para la descripción de la densidad magnetoelástica es la inducción magnética  $\mathbf{B}$  estando el campo magnético  $\mathbf{H}$  dado por la ecuación constitutiva (3.65). Es por esta razón por la que ha de escogerse la forma más general de un tensor de Maxwell escrita en términos de estos dos campos, a saber:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^M(\eta_s, \eta_A, \kappa, \varphi) = & \mu_0 \mathcal{G} \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \eta_s (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ & + \eta_A (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \kappa \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \varphi (\mathbf{B}, \mathbf{H})^{\mathbb{I}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Efectivamente, una forma genérica para el tensor de Maxwell debe estar formulada por combinaciones lineales de los cuatro tensores  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  y  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ , dado que esta forma tensorial genérica de Maxwell ha de reproducir el tensor de Maxwell en el vacío.

El análisis que se realizará posteriormente sobre la simetría del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy aconseja usar



diferenciadamente las componentes simétrica y antisimétrica de los tensores  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$  y  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ ,

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \quad (3.69)$$

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}) \quad (3.70)$$

en lugar de los tensores  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}$  y  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ . En la expresión (3.68) los valores de los parámetros  $\varrho, \eta_s, \eta_A, \kappa$  son racionales y la función  $\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H})$  es escalar y dependiente de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . De acuerdo a (3.68), se definirá en este trabajo un tensor magnetoelástico total  $\mathbb{T}^T$  por la ecuación

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T} + \mathbb{T}^M \quad (3.71)$$

de forma que la ecuación de balance de cantidad de movimiento (3.67) puede expresarse como la divergencia del tensor total de tensiones magnetoelásticas

$$\rho \ddot{x}_i = T_{ij,j}^T \quad (3.72)$$

En la sección siguiente se desarrollará el modelo de acoplamiento definido por las ecuaciones (3.64) y (3.65) desde la perspectiva derivada de las consideraciones expuestas en esta sección.

#### 5.- Desarrollo de un modelo de acoplamiento magnetoelástico compatible con una forma general de tensor de Maxwell

Como se ha indicado el modelo de acoplamiento magnetoelástico propuesto en esta memoria se desarrollará a partir de las ecuaciones

$$\mathbb{T} = 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} \right)_e \mathbb{G} + 2(\alpha_2 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \alpha_3 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}^2 \mathbf{B} + \alpha_3 \mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B}) + \zeta \rho \mathbb{I} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{H} = 2(\alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbb{G}\mathbf{B} + \alpha_3 \mathbb{G}^2 \mathbf{B}) \quad (3.65)$$

desde la perspectiva de buscar la compatibilidad del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy con la forma genérica de un tensor de Maxwell

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^M(\mathcal{G}, \eta_s, \eta_A, \kappa, \varphi) &= \mu_0 \mathcal{G} \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \eta_s (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ &+ \eta_A (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \kappa \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \varphi (\mathbf{B}, \mathbf{H}) \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.68)$$

en la obtención de un único tensor total de tensiones magnetoelásticas<sup>84</sup>

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T} + \mathbb{T}^M \quad (3.71)$$

Esta es la formulación concreta del problema planteado. Para proceder a su análisis se ha de considerar en primer término que existe una clara relación entre (3.64) y el desarrollo del producto tensorial  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  obtenido a partir de la relación constitutiva (3.65),

---

<sup>84</sup> Considérese la concepción ya detallada de forma tensorial única: dependiente de un conjunto *mínimo* de parámetros experimentales

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = 2(\alpha_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \alpha_3 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}^2\mathbf{B}) \quad (3.73)$$

Como se observa comparando las expresiones (3.64) y (3.73) la componente del tensor de tensiones de Cauchy no simétrica puede expresarse en términos del tensor  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ , de manera que, formalmente, es posible representar el tensor (3.64) como:

$$\mathbb{T} = 2\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}}\right)_e \mathbb{G} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - 2\alpha_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + 2\alpha_3 \mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \zeta \rho \mathbb{I} \quad (3.74)$$

Dado que la componente elástica del tensor (3.74) es necesariamente simétrica<sup>85</sup>, la única componente antisimétrica del tensor (3.74) es la propia componente antisimétrica del tensor  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} = & 2\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}}\right)_e \mathbb{G} + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ & - 2\alpha_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + 2\alpha_3 \mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \zeta \rho \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.75)$$

En este punto se puede analizar ya las condiciones bajo las cuales el tensor (3.75) puede ser compatible con un tensor de Maxwell genérico en la forma (3.68). Efectivamente, la composición del tensor (3.75) con diferentes tensores de Maxwell no puede conducir a una forma única (aunque genérica) si las componentes tensoriales  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S$  y  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A$  no pueden compensar las diferencias entre estas mismas componentes de los tensores de Maxwell empleados.

---

<sup>85</sup> Considérese lo expuesto en torno a la simetría del tensor de Cauchy para deformaciones estrictamente elásticas en la Sección 2.2 de este Capítulo

Considérese la forma de los tensores  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S$  y  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A$  teniendo en cuenta la relación constitutiva (3.65),

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S = 2\alpha_1(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + 2[\mathbf{B} \otimes (\alpha_2\mathbb{G} + \alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^S \quad (3.76)$$

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A = 2[\mathbf{B} \otimes (\alpha_2\mathbb{G} + \alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^A \quad (3.77)$$

La única forma de salvar las dificultades expuestas anteriormente consiste en admitir que la adición de un determinado tensor de Maxwell obliga a una distribución de los términos de las igualdades anteriores. Expresado en una forma semejante, los tensores  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S$  y  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A$  deberán descomponerse, en la forma indicada por las ecuaciones (3.76) y (3.77) en los tensores indicados en los segundos términos de ambas igualdades, efectivamente, pero de forma diferente para diferentes tensores de Maxwell.

Una forma de plasmar esta distribución entre los términos de las ecuaciones (3.76) y (3.77) puede llevarse a cabo mediante la introducción de siete parámetros de acoplamiento diferentes, de tal forma que el término  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  en (3.73) pueda expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = & \beta_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + 2\beta_1\alpha_1(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \\ & 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2\alpha_2\mathbb{G} + \beta_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^S + \\ & \gamma_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2\alpha_2\mathbb{G} + \gamma_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^A \end{aligned} \quad (3.78)$$

Por otra parte, y, de nuevo analizando la necesidad de compatibilidad con cualquier tensor de Maxwell, es necesario considerar la ausencia de términos de la forma  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$  en (3.74). Ahora bien, tal producto puede expresarse en términos de la componente simétrica del tensor  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$ . Efectivamente, considerando que la modelización que se ha propuesto en esta memoria considera

hasta términos de segundo orden en términos magnetoelásticos, puede comprobarse fácilmente la relación

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^s = \frac{\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}}{4} + \alpha_1(\alpha_1 - 1)\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \alpha_2^2 \mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} \quad (3.79)$$

Teniendo en cuenta esta última expresión, la forma más general de acoplamiento magnetomecánico del producto tensorial  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = & \beta_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^s + 2(\beta_1\alpha_1 + \beta_4\alpha_1^2)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \\ & 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2\alpha_2\mathbb{G} + \beta_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^s + \\ & \gamma_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2\alpha_2\mathbb{G} + \gamma_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}] + \beta_5\alpha_2^2\mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Por lo que el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy puede expresarse en términos de diez parámetros de acoplamiento,

$$\begin{aligned} \mathbb{T} = & 2\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}}\right)_e \mathbb{G} + \alpha_0(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) + \beta_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^s \\ & + \gamma_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4\alpha_1^2)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \\ & 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2\alpha_2\mathbb{G} + \beta_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^s \\ & + 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2\alpha_2\mathbb{G} + \gamma_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^A + (2\alpha_3 + \beta_5\alpha_2^2)\mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \zeta\rho\mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Por sencillez en la argumentación, es conveniente expresar las componentes del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy como suma de un tensor elástico  $\mathbb{T}_e$ , un tensor magnetostático  $\mathbb{T}_m$ , un tensor magnetoelástico  $\mathbb{T}_{me}$ ,

$$\mathbb{T}_e = 2\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}}\right)_e \mathbb{G} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m &= \alpha_0(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) + \beta_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ &+ \gamma_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4\alpha_1^2)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{me} &= 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2\alpha_2\mathbb{G} + \beta_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^S + \\ &2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2\alpha_2\mathbb{G} + \gamma_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^A + (2\alpha_3 + \beta_5\alpha_2^2)\mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} \\ &+ \zeta\mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Como se observa, el tensor estrictamente magnético depende de cinco parámetros de acoplamiento y el tensor magnetoelástico de otros cinco. Por esta razón a los parámetros  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  se les denominará parámetros de acoplamiento magnético, mientras que los parámetros  $\beta_2, \beta_3, \beta_5, \gamma_2, \gamma_3$  recibirán la denominación de parámetros de acoplamiento magnetoelástico.

Considérese ahora la adición del tensor de tensiones magnetoelásticas obtenido (3.81) y del tensor de Maxwell (3.68). El tensor resultante  $\mathbb{T}^T$  tendrá como expresión genérica:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^T &= \mathbb{T}_e + (\alpha_0 + \mu_0\mathcal{G})\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + (\beta_0 + \eta_s)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ &+ (\gamma_0 + \eta_A)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ &+ \left( \kappa \frac{1}{\mu_0} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4\alpha_1^2) \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ &+ \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H})\mathbb{I} + 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2\alpha_2\mathbb{G} + \beta_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^S \\ &+ 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2\alpha_2\mathbb{G} + \gamma_3\alpha_3\mathbb{G}^2)\mathbf{B}]^A \\ &+ (2\alpha_3 + \beta_5\alpha_2^2)\mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \zeta\mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.85)$$

El tensor (3.85) muestra una dependencia definida de los parámetros de acoplamiento magnético  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  con el tensor

de Maxwell seleccionado y definido por los parámetros  $\vartheta, \eta_S, \eta_A, \kappa$  admitiendo una única forma tensorial definida para el tensor (3.85).

Por razones de claridad en la exposición, se denominará a este tensor como tensor referencial<sup>86</sup>. Expresado en otros términos, admitiendo un único tensor referencial total de tensiones magnetoelásticas, para un proceso y un sistema dados, la adopción de un determinado tensor de Maxwell para describir la densidad de fuerza magnetostática es siempre posible sin modificar las componentes de tal tensor referencial: los parámetros de acoplamiento magnético  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  se ajustarán a los parámetros del tensor de Maxwell  $\vartheta, \eta_S, \eta_A, \kappa$  para mantener la invariancia de ese tensor referencial. Es evidente entonces que la componente estrictamente magnética  $\mathbb{T}_m$  en un determinado tensor referencial es invariante ante un cambio en el tensor de Maxwell.

Considérese pues un tensor referencial que tomará la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^T = & \mathbb{T}_e + \lambda_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ & + \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) \mathbb{I} + 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \beta_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S \\ & + 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \gamma_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A + (2\alpha_3 + \beta_5 \alpha_2^2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \check{\varphi} \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde

---

<sup>86</sup> Como se ha indicado anteriormente, este tensor referencial vendrá determinado por una serie de parámetros que deberán determinarse experimentalmente.

$$\alpha_0 + \mu_0 \vartheta = \lambda_0$$

$$\beta_0 + \eta_S = \lambda_1$$

$$\gamma_0 + \eta_A = \lambda_2$$

$$\kappa \frac{1}{\mu_0} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) = \lambda_3$$

(3.87)

La relación constitutiva (3.80) toma la forma, en función de estos coeficientes,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} &= (\lambda_0 - \mu_0 \vartheta)(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) + (\lambda_1 - \eta_S)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ &+ \left( \lambda_3 - \frac{\kappa}{\mu_0} + 2\alpha_1 \right) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \\ &+ (\lambda_2 - \eta_A)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \beta_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S \\ &+ 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \gamma_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A + \beta_5 \alpha_2^2 \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Ahora bien, la invariancia del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy ha de extenderse también a la componente magnetoelástica de tal tensor referencial,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{me} &= 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \beta_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S \\ &+ 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \gamma_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A \\ &+ (2\alpha_3 + \beta_5 \alpha_2^2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \zeta \rho \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Pero, por otra parte, los tres últimos términos de la ecuación (3.88) han de mantenerse constantes ante variaciones de los parámetros que definen el tensor de Maxwell  $\vartheta, \eta_S, \eta_A, \kappa$ . Dado que



los parámetros  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  han de considerarse fijados para un tensor de referencia dado, para mantener la igualdad (3.88) ha de admitirse una dependencia del funcional  $\alpha_1$  con el coeficiente  $\kappa$  del tensor de Maxwell utilizado en la modelización, de tal forma que las componentes estrictamente magnéticas de (3.88) se compensen entre sí y asegurar, de esta forma, la invariancia de las componentes magnetoelásticas en (3.88). Determinada esta dependencia, los coeficientes  $\beta_1$  y  $\beta_4$  han de verificar la condición de ajuste al tensor referencial (3.87)<sub>4</sub>

$$\kappa \frac{1}{\mu_0} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4\alpha_1^2) = \lambda_3$$

En lo que se refiere al funcional  $\alpha_2$ , la invariancia de la componente magnetoelástica del tensor referencial (3.89) muestra una dependencia de tres de los cinco coeficientes de acoplamiento magnetoelástico  $\beta_2, \beta_5, \gamma_2$  respecto a tal funcional  $\alpha_2$  dada la constancia de los términos  $\beta_2\alpha_2$  y  $\gamma_2\alpha_2$  y  $\beta_5\alpha_2^2$  en (3.88).

En relación al tercer funcional  $\alpha_3$  se observa en esta modelización que es independiente de la selección de un determinado tensor de Maxwell y, en cuanto a los dos restantes parámetros de acoplamiento  $\beta_3, \gamma_3$ , una dependencia de ellos respecto a tal funcional  $\alpha_3$  en (3.88).

De esta forma, se ha comprobado que una modelización de la densidad de energía libre adecuada para la obtención de un tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy compatible con la elección de un determinado tensor de Maxwell ha de tener en cuenta que el funcional  $\alpha_1$  ha de adecuarse al tensor de Maxwell considerado en la definición del modelo, mientras que los funcionales  $\alpha_2, \alpha_3$  son independientes de tal elección. Este resultado es coherente con el hecho de que  $\alpha_1$  es un funcional que muestra la variación del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy con respecto al invariante

estrictamente magnético  $J_1$  y, por tanto, relacionado con las componentes del tensor de Maxwell de naturaleza estrictamente magnética. De esta forma, las componentes magnetoelásticas del tensor de Cauchy pueden configurarse independientemente de la adopción de un determinado tensor de Maxwell.

Por lo expuesto, un tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy puede expresarse como,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^T = & \mathbb{T}_e + \lambda_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \\ & \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) \mathbb{I} + 2[\mathbf{B} \otimes (\xi_2 \mathbb{G} + \xi_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S + \\ & 2[\mathbf{B} \otimes (\nu_2 \mathbb{G} + \nu_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A + (2\alpha_3 + \tau_2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \zeta \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.90)$$

en la que los subíndices 2 y 3 en los coeficientes  $\xi, \nu, \tau$  indican su relación con los funcionales  $\alpha_2, \alpha_3$ . En términos de estos coeficientes, los parámetros de acoplamiento magnético  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  determinados por las relaciones (3.87), para un determinado valor del funcional  $\alpha_1$ , los parámetros de acoplamiento magnetoelástico  $\beta_2, \gamma_2, \beta_5$  determinados a través de las expresiones

$$\begin{aligned} \beta_2 \alpha_2 &= \xi_2 \\ \gamma_2 \alpha_2 &= \nu_2 \\ \beta_5 \alpha_2^2 &= \tau_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

y los parámetros de acoplamiento magnetoelástico  $\beta_3, \gamma_3$ , determinados por

$$\begin{aligned} \beta_3 \alpha_3 &= \xi_3 \\ \gamma_3 \alpha_3 &= \nu_3 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Una última consideración debe realizarse en el análisis de la compatibilidad del tensor de tensiones de Cauchy obtenido bajo esta modelización con cualquier tensor de Maxwell. Se refiere a la componente diagonal del tensor total de tensiones representado en (3.90). La componente diagonal del tensor de Maxwell  $\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H})\mathbb{I}$  está presente en todo tensor de Maxwell. De esta forma, la obtención de un tensor referencial incluye una componente diagonal estrictamente magnética específica. El uso de otro tensor de Maxwell con diferente componente diagonal será compensado por la componente diagonal del tensor magnetoelástico  $\mathbb{T}_{me}$  (3.90)<sup>87</sup>, de tal forma, que, para dos tensores de Maxwell diferentes la relación entre los potenciales másicos vendrá dada por

$$\zeta\rho + \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) = \zeta^r \rho + \varphi^r(\mathbf{B}, \mathbf{H}) \quad (3.93)$$

donde el superíndice  $r$  indica los valores adoptados para el tensor referencial. La relación (3.93) indica que el potencial  $\zeta$  en (3.8) dependa, al menos, de los campos magnetostáticos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . Efectivamente, la ecuación (3.48)<sub>1</sub>

$$\left(T_{ij} - \zeta\rho\delta_{ij}\right)F_{\alpha j}^{-1} = \frac{\partial F}{\partial F_{i\alpha}} \quad (3.48)_1$$

indica que el potencial  $\zeta$  puede depender de las mismas variables de las que depende el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy.

---

<sup>87</sup> No se ha supuesto que la componente diagonal obtenida en el tensor de tensiones de Cauchy sea la única componente diagonal de este tensor. Sin embargo, la componente diagonal obtenida en este desarrollo asegura la invariancia del tensor total referencial ante cambios del tensor de Maxwell.

De hecho, podría plantearse una descomposición de este potencial en los mismos términos en que se ha descompuesto el propio tensor de Cauchy,

$$\zeta = \zeta_e + \zeta_{me} + \zeta_m \quad (3.94)$$

de tal forma que la componente magnética  $\zeta_m$  sería la única involucrada en la ecuación (3.93).

#### 6.- Componente antisimétrica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy: balance de momento angular

La forma local o diferencial de la ley de balance de momento indica que la componente antisimétrica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy ha de coincidir con el momento  $l_{ij}^m$  por unidad de volumen de las fuerzas externas de carácter magnético (Hutter et al., 2006:11), es decir,

$$T_{[ij]} = l_{ij}^m \quad (3.95)$$

La componente antisimétrica del tensor de tensiones magnetoelásticas obtenido es, de acuerdo con (3.74),

$$\mathbb{T}^A = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \quad (3.96)$$

con lo que la densidad de momento magnético es

$$l_{ij}^m = B_{[i} H_{j]} \quad (3.97)$$

que, teniendo en cuenta la relación básica (1.1)

$$B = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{m}) \quad (1.1)$$

puede expresarse en la forma usual (Hutter et al, 2006)

$$l_{ij}^m = m_{[i} H_{j]} \quad (3.98)$$

La ecuación (3.98) ha sido obtenida independientemente de la modelización de la densidad de fuerza utilizada, por lo que no se da ambigüedad alguna en el carácter no simétrico del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy en su relación con la elección de un determinado tensor de Maxwell.

Conviene indicar que la componente antisimétrica del tensor de Cauchy (3.98) puede considerarse en la forma dada por la ecuación (3.78)

$$(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A = \gamma_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \gamma_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A \quad (3.99)$$

como suma de componentes estrictamente magnéticas y componentes magnetoelásticas.

7.- La componente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas

La componente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m^T = & (\alpha_0 + \mu_0 \mathcal{G}) \mathcal{G} \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + (\beta_0 + \eta_s) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ & + (\gamma_0 + \eta_A) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \left( \kappa \frac{1}{\mu_0} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \quad (3.100) \\ & + (\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) + \zeta_m) \mathbb{I} \end{aligned}$$

como suma de la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, definida por los parámetros de acoplamiento magnético  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  y una forma genérica de tensor de Maxwell, dada por los parámetros  $\vartheta, \eta_S, \eta_{A, \kappa}$ .

Se ha mostrado que los coeficientes de cada uno de los tensores  $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}, (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S, (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A, \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$  pueden compensarse entre sí para determinar una única forma tensorial. Por otra parte, también se ha comprobado que es posible la unicidad de la componente magnetoelástica del tensor de tensiones de Cauchy para cualquier tensor de Maxwell. Además, la ecuación

$$\rho \ddot{x}_i = T_{ij, j}^T \quad (3.67)$$

indica que la fuerza total por unidad de volumen en el medio puede obtenerse como la divergencia del tensor total de tensiones. Esta densidad de fuerza total tiene cuatro componentes:

$$\rho \ddot{x}_i = \left( T_{e, ij} + T_{me, ij} + T_{m, ij} + T_{ij}^M \right)_{, j} \quad (3.101)$$

En la ecuación (3.101), las dos primeras componentes de la fuerza total tienen origen elástico o magnetoelástico, involucrando por tanto variables elásticas (en concreto, magnitudes formadas a partir del tensor por la izquierda de Cauchy-Green). Pero las dos últimas componentes tienen naturaleza estrictamente magnetostáticas. La primera de estas dos componentes se deriva de la componente estrictamente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, mientras que la segunda es la densidad de fuerza adoptada en la modelización del acoplamiento, derivada de un determinado tensor de Maxwell.

Por lo tanto, en el modelo de acoplamiento desarrollado en esta memoria, el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy genera

una componente tensorial estrictamente magnética ante una determinada densidad de fuerza magnetostática exterior. Tal componente magnética depende del tensor de Maxwell empleado, tal y como se ha expuesto en la sección anterior. De esta forma, es posible definir una densidad de *fuerza magnetostática extendida*  $\mathbf{f}^e$  con dos componentes: la densidad de fuerza magnetostática utilizada  $\mathbf{f}$ , gradiente de un determinado tensor de Maxwell, y la densidad de fuerza magnetostática  $\mathbf{f}^C$  obtenida como el gradiente de la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^C + \mathbf{f} \quad (3.102)$$

$$f_i^C = \left( \begin{array}{l} \alpha_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \beta_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \gamma_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \zeta_m \mathbb{I} \end{array} \right)_{ij,j} \quad (3.103)$$

$$f_i = \left( \begin{array}{l} \mu_0 \mathcal{H} \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \eta_s (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \eta_A (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ + \kappa \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) \mathbb{I} \end{array} \right)_{ij,j} \quad (3.104)$$

La densidad de fuerza magnetostática (3.104) es la adoptada en el modelo de acoplamiento, mientras que la densidad de fuerza (3.103), derivada del tensor de Cauchy (o expresado en otros términos, obtenida como respuesta del medio elástico a la densidad de fuerza magnetostática considerada), depende de los parámetros de acoplamiento magnético  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  y de la dependencia de la energía libre interna respecto al invariante magnetostático  $B^2$  a través del coeficiente  $\alpha_1$ .

Se plantea entonces una cuestión de interés. La respuesta del material magnético ante una acción magnetostática externa (y, por tanto, ante una determinada densidad de energía magnetostática o ante

su correspondiente tensor de Maxwell) incluye necesariamente una componente magnética, la dada por la ecuación (3.103). Habida cuenta de que cabe admitir necesariamente una única distribución de tensiones magnéticas independiente del tensor de Maxwell utilizado, en el sentido de lo desarrollado en la sección anterior, también cabe admitir necesariamente una única densidad magnetostática de fuerza, que se ha denominado anteriormente como *densidad magnetostática extendida*<sup>88</sup>. Pero esta suposición, necesaria, conduce a la admisión de que los modelos de fuerza considerados en la actualidad han de verse complementados por un término adicional, el obtenido como divergencia de la componente estrictamente magnética del tensor de tensiones de Cauchy, para describir sus efectos en un medio material.

Admítase por tanto que, para un determinado proceso de acoplamiento o configuración experimental, se admite como válida una densidad de *fuerza magnetostática extendida* de referencia en la forma

$$f_i^e = \left( \begin{array}{l} \lambda_0 (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \lambda_4 \mathbb{I} \end{array} \right)_{ij,j} \quad (3.105)$$

Admitida una *densidad extendida de referencia* los parámetros de acoplamiento magnetostático  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  y el potencial

---

<sup>88</sup> Como se expuso en el caso del tensor de tensiones magnetoelásticas de referencia, esta densidad extendida de fuerza no es única, en el sentido de que es propia de cada configuración experimental y, por lo tanto, su determinación ha de realizarse necesariamente bajo experimentación. La unicidad de esta expresión se refiere pues a su invariancia frente a las diferentes densidades de fuerza.



másico  $\zeta_m$  del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy vienen determinados por las relaciones:

$$\alpha_0 + \mu_0 \mathcal{G} = \lambda_0$$

$$\beta_0 + \eta_S = \lambda_1$$

$$\gamma_0 + \eta_A = \lambda_2 \quad (3.106)$$

$$\kappa \frac{1}{\mu_0} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) = \lambda_3$$

$$\zeta_m = \lambda_4 - \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H})$$

donde los términos  $\mathcal{G}, \eta_S, \eta_A, \kappa, \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H})$  corresponden al tensor de Maxwell escogido para la modelización.

#### 8.- Condición de contorno del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy

La condición de contorno para el tensor total de tensiones  $\mathbb{T}^T$  en la superficie de separación entre un medio **2** en contacto con otro

medio  $I$  requiere que el esfuerzo normal a dicha superficie en cada punto no experimente modificación<sup>89</sup>

$$\|\mathbb{T}^T\|_2^1 \mathbf{n} = 0 \quad (3.107)$$

donde el símbolo  $\|A\|_2^1 = A_1 - A_2$  representa el salto o variación de la magnitud  $A$  entre los medios  $I$  y  $2$  y el vector  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal en un punto de la superficie de separación dirigido hacia fuera del medio  $I$ .

Considérese entonces un medio  $2$  rodeado del vacío. En el vacío, el tensor total de tensiones se reduce al tensor de Maxwell en el vacío,

$$\mathbb{T}^{T(0)} = \mathbb{T}^{M(0)} = \mu_0 \left( \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{H^2}{2} \mathbb{I} \right) \quad (3.108)$$

donde el superíndice (0) indica que el medio considerado es el vacío, de tal forma que la ecuación (3.107) es en este caso, eliminando por sencillez la referencia al medio  $I$  para el tensor en el medio,

$$\left( \mathbb{T}_e + \mathbb{T}_{me} + \mathbb{T}_m + \mathbb{T}^M \right) \mathbf{n} = \mathbf{n} \mathbb{T}^{M(0)} \quad (3.109)$$

y, por lo tanto,

---

<sup>89</sup> Condición usual en mecánica del medio continuo. Puede consultarse, por ejemplo, (Hutter et al, 2006)

$$(\mathbb{T}_e + \mathbb{T}_{me})\mathbf{n} = (\mathbb{T}^{M(0)} - (\mathbb{T}^M + \mathbb{T}_m))\mathbf{n} = (\mathbb{T}^{M(0)} - \mathbb{T}_m^T)\mathbf{n} \quad (3.110)$$

El segundo término de la ecuación (3.110) representa la densidad de fuerza superficial de carácter magnetostático en un punto dado de la superficie, mientras que el primer término representa la misma densidad de fuerza, pero expresada en términos de esfuerzos elásticos y magnetoelásticos. Representa pues esta ecuación la relación entre la tensión magnetostática y los esfuerzos elásticos y magnetoelásticos producidos por estas tensiones. Los tensores magnetoelástico  $\mathbb{T}_{me}$  y la componente magnética del tensor total de tensiones  $\mathbb{T}_m^T$ , vienen dados, respectivamente, para un determinado tensor de referencia, por

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m^T = & \lambda_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ & + \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \lambda_4 \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{me} = & 2[\mathbf{B} \otimes (\xi_2 \mathbb{G} + \xi_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S + \\ & 2[\mathbf{B} \otimes (\nu_2 \mathbb{G} + \nu_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A + (2\alpha_3 + \tau_2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \zeta_{me} \rho \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.112)$$

La ecuación (3.110) puede escribirse por tanto, teniendo en cuenta las representaciones (3.111) y (3.112) como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_e \mathbf{n} + & \left( \begin{array}{l} 2[\mathbf{B} \otimes (\xi_2 \mathbb{G} + \xi_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S + \\ 2[\mathbf{B} \otimes (\nu_2 \mathbb{G} + \nu_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A \\ + (2\alpha_3 + \tau_2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \zeta_{me} \rho \mathbb{I} \end{array} \right) \mathbf{n} = \\
= & - \left( \begin{array}{l} \left( \lambda_0 - \frac{1}{\mu_0} \right) (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left( \lambda_4 + \mu_0 \frac{H^2}{2} \right) \mathbb{I} \end{array} \right) \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

La ecuación (3.113) puede contribuir a la obtención numérica o experimental de un determinado tensor referencial válido para cualquier tensor de Maxwell adoptado.

Efectivamente, en una determinada configuración experimental, la selección de los parámetros de acoplamiento magnetoelásticos presentes en el primer término de la igualdad (3.113) puede determinarse independientemente de la elección del tensor de Maxwell considerado en la modelización. El estudio de las tensiones elásticas y magnetoelásticas en la superficie de separación del medio puede contribuir a la selección de tales parámetros.

Estos esfuerzos pueden ser contrastados, utilizando la ecuación (3.113) con los esfuerzos magnetostáticos en la sección de separación del cuerpo, con vistas a la selección de los parámetros  $\lambda_i, i = 0 \dots 4$ . Una vez determinados estos parámetros, los coeficientes de acoplamiento magnético  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  y la función  $\zeta_m$  quedarán determinados a partir de los coeficientes asociados a un determinado tensor de Maxwell.

El procedimiento indicado en los párrafos anteriores consiste por tanto, básicamente, en la determinación del tensor magnético que provoca un determinado estado de tensiones magnetoelásticas en la superficie de separación de un medio con el vacío. El hecho de que tal

estado de tensión magnetoelástica no dependa de la modelización escogida (en lo que se refiere a la selección de un tensor de Maxwell en el medio o una determinada densidad de fuerza) puede contribuir a la selección de un tensor magnético referencial, conformado por el tensor de Maxwell escogido y la componente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy).

#### 9.- Análisis del modelo en relación a resultados previos

En (Pao, Y.H. y Yeh, C.S., 1973) se elabora un modelo de interacción magnetoelástica para medios lineales, que ha sido ampliamente tomado como referencia en el desarrollo y análisis de diversas aplicaciones. En este modelo se parte de la densidad de fuerza de Brown-Kelvin (1.15), y, por lo tanto, tomado como  $\mathbf{H}$  el campo magnético actual, para imponer posteriormente las condiciones de contorno con el campo magnético exterior, que proporcionan los términos de densidad de fuerza superficial. El tensor de Maxwell adoptado para esta densidad es

$$T_{ij}^{M, Pao} = B_i H_j - \frac{\mu_0}{2} H^2 \delta_{ij} \quad (3.114)$$

que coincide con el tensor transpuesto del tensor asociado a la distribución de Brown-Kelvin (2.10)<sup>90</sup>. Partiendo de (Brown, 1966),

---

<sup>90</sup> Utiliza el criterio  $f_j = \frac{\partial T_{ij}^M}{\partial x_i}$ , por lo que el tensor de Maxwell utilizado es necesariamente el transpuesto al (2.10).

en el cálculo de la derivada temporal de la energía por unidad de volumen, se plantean en este trabajo las ecuaciones de conservación de la interacción magnetoelástica,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dv_i}{dx_i} = 0 \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \mu_0 m_i \frac{\partial H_j}{\partial x_i} = \rho \frac{dv_j}{dt} \quad (3.116)$$

$$T_{[jk]} + \mu_0 m_{[j} H_{k]} = 0 \quad (3.117)$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \mu_0 \rho H_i \frac{d}{dt} \left( \frac{m_i}{\rho} \right) \quad (3.118)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del elemento considerado,  $T_{ij}$  son las componentes  $i, j$  del tensor de tensiones de Cauchy y  $U$  es la energía interna por unidad de masa. Bajo este modelo, y utilizando las relaciones constitutivas propias del campo magnético estacionario (relación entre los campos  $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{m}$ , divergencia de la inducción magnética nula y rotacional del campo magnético nulo en ausencia de corrientes libres), se obtienen las ecuaciones

$$T_{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial F_{j,\alpha}} F_{i,\alpha} \quad (3.119)$$

$$\mu_0 H_i = \frac{\partial U}{\partial (m_i / \rho)} \quad (3.120)$$

Las ecuaciones (3.119) y (3.120) son las equivalentes en este modelo a las ecuaciones (3.48) presentadas en esta memoria<sup>91</sup>. Los invariantes independientes considerados en (Pao, Y.H. y Yeh, C.S., 1973) son

$$C_{\alpha\beta} = F_{k\alpha} F_{k\beta} \quad (3.121)$$

$$N_\alpha = \left( \frac{m_k}{\rho} \right) F_{k\alpha} \quad (3.122)$$

La ecuación (3.121) representa el tensor de Cauchy-Green por la derecha. En términos de este tensor se utiliza en ese trabajo el tensor de deformación Lagrangiano

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \quad (3.123)$$

de forma que en este modelo la energía interna por unidad de masa es función de (3.121) y (3.123). En términos de estos invariantes, las ecuaciones (3.119) y (3.120) adoptan la forma

---

<sup>91</sup> Como se indica en (Pao, Y.H. y Yeh, C.S., 1973), la energía interna por unidad de masa puede hacerse equivalente a la energía libre por unidad de masa, por las mismas razones que las expuestas en esta memoria. Considérese también que en esta memoria  $F$  es la energía libre por unidad de volumen.

$$T_{ij} = \rho F_{i\alpha} \frac{\partial U}{\partial E_{\alpha\beta}} F_{j\beta} + m_j \frac{\partial U}{\partial N_\alpha} F_{i\alpha} \quad (3.124)$$

$$\mu_0 H_i = \frac{\partial U}{\partial N_\alpha} F_{i\alpha} \quad (3.125)$$

de tal forma que una componente del tensor de tensiones de Cauchy es estrictamente magnética,

$$T_{ij} = \rho F_{i\alpha} \frac{\partial U}{\partial E_{\alpha\beta}} F_{j\beta} + \mu_0 H_i m_j \quad (3.126)$$

La aplicación de este modelo, siempre en el campo de materiales lineales, se realiza a través de las expresiones (Lin y Yeh, 2002),

$$T_{ij} = \tau_{ij} + \frac{\mu_0}{\chi} m_i m_j \quad (3.127)$$

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.128)$$

donde  $\lambda, G$  son los coeficientes de Lamé<sup>92</sup>,  $u_{ij}$  el tensor de deformación definido por la ecuación (3.6) y  $\chi$  la susceptibilidad magnética. El tensor  $\tau_{ij}$  es pues el tensor estrictamente elástico. En

---

<sup>92</sup> Los coeficientes de Lamé determinan la dependencia de la energía libre elástica en términos del tensor de deformación. Véase, por ejemplo, (Landau y Lifshitz, 1969: 14)



(3.127), la componente magnética del tensor de tensiones de Cauchy se ha expresado en términos únicamente de la magnetización  $\mathbf{m}$  del material. Un modelo absolutamente similar al desarrollado en (Pao y Yeh, 1973) se aplica en (Hasanyan y Harutyunyan, 2009) en un medio no lineal y en (Liang et al, 2002).

Es evidente la adecuación del modelo propuesto en esta memoria con el desarrollo planteado en (Pao y Yeh, 1973). Como se observará en la exposición de esta sección, la introducción de una componente estrictamente magnética en el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy es una constante en todas las modelizaciones, aun cuando tales componentes estrictamente magnéticas difieran según el modelo de densidad de fuerza (o tensor de Maxwell equivalente) utilizada en la modelización, en consonancia con lo desarrollado en este Capítulo de esta memoria.

Así, en el modelo de (Pao y Yeh, 1973), el tensor total de tensiones magnetostáticas, obtenido como suma del tensor de Maxwell y la componente magnética del tensor de Cauchy es

$$\mathbb{T}_{ij}^{T,Pao} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} + \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{m} \quad (3.129)$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{M,Pao} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \quad (3.130)$$

puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{m,ij}^{T,Pao} &= \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} = \\ &= -\mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + 2(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^s - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.131)$$

y, comparando con (3.100), se obtendrían los valores de los parámetros:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} = 0 &\Rightarrow \alpha_0 = -1 \\
\eta_s = 1/2 &\Rightarrow \beta_0 = 3/2 \\
\eta_A = 1/2 &\Rightarrow \gamma_0 = -1/2 \\
\kappa = 0 &\Rightarrow 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.132}$$

y

$$\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) + \zeta_m = -\frac{\mu_0}{2} H^2 \tag{3.133}$$

con las consideraciones ya establecidas respecto al funcional  $\alpha_1$  en el modelo desarrollado en esta memoria.

Un modelo también basado en el tensor (3.114)<sup>93</sup> es desarrollado en (Vandavelde et al, 2004), tomando como base el modelo propuesto por (Vandavelde y Melkebeek, 2002). En este trabajo, se define un *tensor de tensiones magnéticas equivalente* en la forma:

$$\mathbb{T}_m^* = \left( \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \right) - \mu_0 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{H})^A + \mathbb{T}_{me} \tag{3.134}$$

donde  $\mathbb{T}_{me}$  es un tensor magnetoelástico que, para el caso de medios isótropos toma la forma

$$\mathbb{T}_{me} = -\alpha_1 \mu_0 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \alpha_2 \mu_0 m^2 \mathbb{I} \tag{3.135}$$

---

<sup>93</sup> Aunque los autores no mencionan ninguna densidad de fuerza específica

Siendo los parámetros adimensionales  $\alpha_1, \alpha_2$  funciones de la magnetización  $\mathbf{m}$  y del tensor de deformación. La adición del tensor (3.134) al tensor denominado en este trabajo como *tensor de tensiones mecánicas equivalentes*, estrictamente elástico, determina el tensor total de tensiones de Cauchy. Obviamente existe una diferenciación clara en esta modelización respecto a la propuesta en esta memoria y se refiere a la componente magnetoelástica. La dependencia de los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2$  del tensor de deformación es la que otorga carácter de acoplamiento magnetoelástico al tensor (3.135) y la naturaleza de esta dependencia se obtiene experimentalmente (Vandervelde et al, 2004).

En los términos desarrollados en esta memoria, el tensor (3.134) es el tensor magnético total, suma del tensor de Maxwell y una componente magnética adicional. Ahora bien, a diferencia del modelo presentado en este trabajo, la justificación de la adición del tensor  $-\mu_0(\mathbf{m} \otimes \mathbf{H})^A$  al tensor de Maxwell obedece a cuestiones de simetría<sup>94</sup>, ya que de esta forma el *tensor de tensiones magnéticas equivalente* es simétrico.

Esta componente antisimétrica, que anula la componente antisimétrica del tensor de Maxwell “*may be due to anisotropy (and/or, in hysteretic material, due to rotational excitation)*” (Vandervelde et al, 2004) . Hay que considerar aquí que el tensor de tensiones mecánicas equivalente, tal y como es definido en (Vandervelde et al, 2004) es simétrico, de tal forma que el tensor total,

---

<sup>94</sup> La cuestión de la simetría del tensor de tensiones magnetomecánicas es todavía una cuestión abierta (ver, por ejemplo, (Bossavit, 2015a))

obtenido como suma de las componentes elástica, magnética y magnetoelástica es simétrica.

Una cuestión central planteada en esta memoria es la compatibilidad de la componente estrictamente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy en el uso de diferentes tensores de Maxwell. Esta componente magnética total es en (Vandervelde et al, 2004)

$$\mathbb{T}_m = \left( \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \right) - \mu_0 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{H})^A = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S - \frac{\mu_0}{2} H^2 \mathbb{I} \quad (3.136)$$

con lo que la comparación con (3.100) proporciona los parámetros de compatibilidad

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = 0 &\Rightarrow \alpha_0 = 0 \\ \eta_s = \frac{1}{2} &\Rightarrow \beta_0 = \frac{1}{2} \\ \eta_A = \frac{1}{2} &\Rightarrow \gamma_0 = -\frac{1}{2} \\ \kappa = 0 &\Rightarrow 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

y

$$\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) + \zeta_m = -\frac{\mu_0}{2} H^2 \quad (3.138)$$

En (Kankanala y Triantafyllidis, 2004) se propone un modelo de interacción magnetostática en materiales isótropos definido por las ecuaciones<sup>95</sup>

---

<sup>95</sup> Es interesante comprobar cómo se llega a un resultado en términos del tensor asociado al método de cargas magnéticas equivalentes partiendo de un modelo de fuerza de Maxwell-Minkowski (1.30) y el correspondiente tensor (2.19).

$$\mu_0 \mathbf{H} = 2 \left( \frac{\partial F}{\partial J_1} \mathbb{I} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \mathbb{G} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \mathbb{G}^2 \right) \mathbf{m} \quad (3.139)$$

donde la densidad de energía libre es función de invariantes construidos con el tensor por la izquierda de Cauchy-Green y de los invariantes  $J_1, J_2, J_3$  construidos como

$$\begin{aligned} J_1 &= m^2 \\ J_2 &= \mathbf{m} \mathbb{G} \mathbf{m} \\ J_3 &= \mathbf{m} \mathbb{G}^2 \mathbf{m} \end{aligned} \quad (3.140)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^T &= \rho \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} \mathbb{G} + \mathbb{G} \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} + \mu_0 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{m}) \right) \\ &+ \mu_0 \left( \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} H^2 \mathbb{I} \right) \end{aligned} \quad (3.141)$$

El desarrollo de las ecuaciones fundamentales de este modelo (3.139) y (3.141) conduce en (Kankanala y Triantafyllidis, 2004) a

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} \mathbb{G} + \mathbb{G} \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} = \mathbb{T}_e + \mathbb{T}_{me} \quad (3.142)$$

es decir, a una componente estrictamente elástica y a otra de carácter magnetoelástico. Ésta última es de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{me} &= \frac{\partial F}{\partial J_2} (\mathbf{m} \otimes \mathbb{G}\mathbf{m} + \mathbb{G}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial J_3} (\mathbf{m} \otimes \mathbb{G}^2\mathbf{m} + \mathbb{G}^2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + 2\mathbb{G}\mathbf{m} \otimes \mathbb{G}\mathbf{m}) \end{aligned} \quad (3.143)$$

El tensor de tensiones magnetostático obtenido en este caso es simétrico y parte de un determinado modelo de densidad de fuerza. Sin embargo, coincide con la propuesta planteada en esta memoria en algunos aspectos, como el uso del tensor por la izquierda de Cauchy-Green y la elección del sistema de invariantes magnetoelásticos, si bien en (Kankanala y Triantafyllidis, 2004) se ha adoptado como variable magnética de acoplamiento la inducción magnética  $\mathbf{m}$ . Las condiciones de compatibilidad se obtienen considerando el tensor total magnetostático obtenido a partir de (3.141),

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m^T &= \mu_0 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{H} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{m}) + \mu_0 \left( \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} H^2 \mathbb{I} \right) = \\ &2(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \mu_0 \left( \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} H^2 \mathbb{I} \right) \end{aligned} \quad (3.144)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = 1 &\Rightarrow \alpha_0 = 0 \\ \eta_s = 0 &\Rightarrow \beta_0 = 2 \\ \eta_A = 0 &\Rightarrow \gamma_0 = 0 \\ \kappa = 0 &\Rightarrow 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

y

$$\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) + \zeta_m = -\frac{\mu_0}{2} H^2 \quad (3.146)$$

Este mismo modelo ha sido aplicado posteriormente en (Danas et al, 2011) y (Danas et al, 2012). Como se observa, el modelo

desarrollado en (Kankanala y Triantafyllidis, 2004) utiliza el tensor de Maxwell cuya densidad conduce a la densidad de fuerzas correspondiente al modelo de cargas magnéticas equivalentes, EQM. Sin embargo, en este trabajo el tensor de tensiones elásticas sometido a interacción magnetostática requiere de una componente adicional igual al doble de la componente simétrica del tensor  $\mathbf{m} \otimes \mathbf{H}$ .

Un mismo sistema de determinación de invariantes magnetoelásticos ha sido utilizado en el modelo desarrollado para materiales incompresibles por (Dorfmann et al, 2004). En este caso, los invariantes magnetoelásticos son

$$\begin{aligned} J_1 &= B^2 \\ J_2 &= \mathbf{B} \mathbb{G} \mathbf{B} \\ J_3 &= \mathbf{B} \mathbb{G}^2 \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.147)$$

La componente magnetoelástica para el tensor de Cauchy es de la forma,

$$\mathbb{T}_{me} = \gamma_5 \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \gamma_6 (\mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \mathbb{G}^2 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) \quad (3.148)$$

y la relación constitutiva se establece entre la imantación  $\mathbf{m}$  y la inducción  $\mathbf{B}$ , en la forma

$$\mathbf{m} = -(\gamma_4 \mathbf{B} + \gamma_5 \mathbb{G} \mathbf{B} + \gamma_6 \mathbb{G}^2 \mathbf{B}) \quad (3.149)$$

En este modelo, la densidad de fuerza adoptada es la de Eringen-Maugin (1.31)<sup>96</sup>. En (Dorfmann et al, 2004) se requiere la simetría del tensor de tensiones magnetostáticas de Cauchy. Aun cuando se asume la densidad de fuerza de Eringen-Maugin, se adopta en este texto un tensor de Maxwell como (2.29), directamente asociado al método de las corrientes magnetizantes equivalentes, al cual se le resta una componente adicional<sup>97</sup>, de forma que el tensor total de tensiones magnetoelásticas es de la forma<sup>98</sup>

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T} + \frac{1}{\mu_0} \left( \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbb{I} \right) + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \mathbb{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{m} \quad (3.150)$$

Así pues, este procedimiento parte del tensor de Eringen-Maugin. El desarrollo del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy conduce en (Dorfmann et al, 2004) conduce a un tensor total del tensiones dado por

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T}_e + \left( \gamma_4 + \frac{1}{\mu_0} \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbb{T}_{me} \quad (3.151)$$

donde

---

<sup>96</sup> Aunque no se explicita el origen de la expresión de la densidad de fuerza adoptada.

<sup>97</sup> Fundamentándose en (Kovetz, A. 2000). *Electromagnetic Theory. Springer, New York*

<sup>98</sup> Tensor que coincide, por otra parte, con el tensor (2.27)



$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{me} = & \gamma_5 (\mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B}) \\ & + \gamma_6 (\mathbb{G}\mathbf{B} \otimes \mathbb{G}\mathbf{B} + \mathbb{G}^2\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}^2\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (3.152)$$

Una comparación con esta forma simétrica con la equivalente (3.84) obtenida en esta memoria conduce a las relaciones paramétricas

$$\begin{aligned} \beta_2 \alpha_2 &= \gamma_5 \\ \beta_3 \alpha_3 &= \gamma_6 \\ 2\alpha_3 + \beta_5 \alpha_2^2 &= \gamma_6 \\ \gamma_2 \alpha_2 = \gamma_3 \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

Como se observa, todas las componentes del tensor (3.151) son simétricas. La compatibilidad con el modelo propuesto en esta memoria se establece a través del conjunto de relaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = 0 &\Rightarrow \alpha_0 = 0 \\ \eta_s = \frac{1}{2} &\Rightarrow \beta_0 = -\frac{1}{2} \\ \eta_A = \frac{1}{2} &\Rightarrow \gamma_0 = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.154)$$

$$\kappa = 0 \Rightarrow 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) = \left( \gamma_4 + \frac{1}{\mu_0} \right)$$

y

$$\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) + \zeta_m = 0 \quad (3.155)$$

Una completa exposición de los fundamentos teóricos de este procedimiento, basado en la *formulación de Kovetz*<sup>99</sup> del sistema constituido por las ecuaciones de balance de momento lineal, angular y energía y por la desigualdad de Clausius-Duhem<sup>100</sup> en un medio continuo en interacción electromagnética, puede encontrarse en (Steigmann, , 2009). Se han desarrollado aplicaciones específicas de este procedimiento. Así, por ejemplo, su tratamiento numérico ha sido expuesto en (Belahcen et al, 2008) o en (Bustamente et al, 2011) y resultados experimentales en (Otténio et al, 2008). Por otra parte, un razonamiento equivalente ya había sido considerado previamente en (Hirsinger y Billardon, 1995). En este trabajo no se parte de una densidad determinada de fuerza, sino que, en referencia al texto de Eringen y Maugin<sup>101</sup>, considera que es necesario añadir al tensor de tensiones elásticas la componente antisimétrica  $-\mathbf{m} \otimes \mathbf{B}$  para obtener el tensor completo no simétrico de tensiones<sup>102</sup>. En cualquier caso, se reproduce en este trabajo el tensor (3.136), cuya divergencia reproduce la densidad de Eringen- Maugin.

---

<sup>99</sup> Ver nota 97

<sup>100</sup> Expresión general de la irreversibilidad de un proceso en un medio continuo sometido a todo tipo de interacción, fundamentado en la segunda ley de termodinámica. No se ha tenido en cuenta en el desarrollo de esta memoria, que no pretende describir las condiciones de estabilidad termodinámica del medio sometido a una interacción magnetostática.

<sup>101</sup> Eringen, A.C. y Maugin, G.A. *Electrodynamics of continua*. Springer Verlag, 1990.

<sup>102</sup> Literalmente, *Because of the body couples due to magnetization, the complete non-symmetric stress tensor is the following:  $\sigma = \sigma^s - \mathbf{m} \otimes \mathbf{B}$* , donde  $\sigma^s$  es el tensor simétrico de tensiones elásticas.

En (Vu y Steinmann, 2007) se desarrolla un procedimiento variacional para la obtención de las ecuaciones de balance de momento elastoestáticas, magneto-elastoelásticas y electro-elastoelásticas. Es de interés este trabajo en un contexto teórico, dada la similitud de las ecuaciones obtenidas para estos tres tipos de interacciones. En el caso de la interacción magnetoelástica, la densidad de fuerza utilizada es la que se ha denominado en esta memoria como de Eringen-Maugin y, de nuevo, el tensor de Maxwell (2.29).

Uno de los escasos trabajos en los que se utiliza la densidad de fuerza de Maxwell-Minkowski (1.30) y el correspondiente tensor de Maxwell (2.19) puede encontrarse en (Kiefer y Lagoudas, 2006). Se trata en este caso de un trabajo de naturaleza experimental que no formaliza un modelo de acoplamiento y que no permite entonces una contrastación del modelo desarrollado en esta memoria. No obstante, se ha optado por incluir este trabajo en estas referencias por el hecho de usar una densidad de fuerza poco habitual en este tipo de desarrollos.

Aun cuando el estudio de la interacción magnetomecánica en fluidos no es objeto de desarrollo en esta memoria, es interesante considerar que la introducción de tensores magnéticos adicionales como componentes del tensor de tensiones de Cauchy se observa en trabajos en los que la modelización de fuerza es la de Eringen-Maugin o la de Brown-Kelvin. Así, en (Felderhof et al, 2010), se plantea una componente magnética en el tensor de tensiones de Cauchy en la forma

$$t_{hyd,ij}^{(1)} = \kappa H_i m_j + \lambda m_i H_j + \zeta(m_k H_k) \delta_{ij} \quad (3.156)$$

con  $\kappa, \lambda$  y  $\zeta(m_k H_k)$  valores escalares junto a un tensor de Maxwell correspondiente a la densidad de fuerza de Eringen-Maugin.

## 10.- Discusión

Se ha desarrollado un nuevo modelo de interacción magnetoelástica bajo las hipótesis de que la interacción magnetostática con un medio homogéneo se produce en un proceso isoterma, sin flujo de calor y en ausencia de corrientes eléctricas. El comportamiento magnético del material, es decir, la relación constitutiva entre los campos inducción magnética  $\mathbf{B}$ , campo magnético  $\mathbf{H}$  y magnetización  $\mathbf{m}$ , se ha establecido con carácter general,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{m})$$

no especificando ninguna relación determinada entre la magnetización y el campo magnético. De esta forma, el modelo puede ser de aplicación tanto para imanes permanentes como para materiales con cualquier tipo de respuesta magnética, no necesariamente lineal o isotropa. La admisión de una variación de energía magnetostática expresada en términos de la variación de la inducción magnética  $\mathbf{B}$ , admitiendo por lo tanto que la variable de la función de estado es este campo, responde al interés de representar la interacción magnética entre los campos primarios  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . Como consecuencia, la variable magnetostática de acoplamiento con las variables de deformación elástica será el propio campo inducción magnética y la relación constitutiva entre los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  la obtenida a través de la variación de la densidad de energía libre respecto a la variable  $\mathbf{B}$ . Como se ha podido comprobar, se han desarrollado otros modelos en los que la variable de acoplamiento es la magnetización  $\mathbf{m}$ . No ha podido establecerse con carácter general la prevalencia de una descripción frente a la otra, puesto que no se han encontrado estudios comparativos en este sentido.

La formulación se ha realizado exclusivamente en el sistema de referencia actual y se ha omitido la transcripción de los resultados obtenidos al sistema de referencia material. Ello responde al objetivo central de esta memoria, centrada en la posibilidad de establecer un

marco teórico unificado en el que se pudiera modelizar la interacción magnetoelástica independientemente de la densidad de fuerza magnetostática adoptada o, en su caso, el tensor de Maxwell escogido en esta modelización. Efectivamente, las densidades de fuerza documentadas en el Capítulo 1 de esta memoria lo son por unidad de volumen y están referidas a los valores *actuales*, es decir, en cualquier instante de la evolución del sistema, de los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . Una consecuencia inmediata de esta elección consiste en que el modelo de acoplamiento desarrollado se ha hecho en términos del tensor de Cauchy-Green por la izquierda  $\mathbb{G}$ , y se ha podido comprobar que esta elección concuerda con resultados científicos previos. La transcripción del modelo al sistema de referencia material es de particular interés en su implementación numérica y es esta una línea de desarrollo que deberá acometerse posteriormente.

También se ha optado por escoger como función de estado la energía interna (y, posteriormente, la energía libre) por unidad de volumen, o densidad de energía interna, en contraposición a otros modelos sistematizados a partir de la densidad de energía interna o libre por unidad de masa. Esta elección también responde a las consideraciones establecidas en el apartado anterior y quizás haya permitido una mayor sencillez en la formalización del modelo, a causa de la necesaria introducción en ese caso de un potencial másico  $\zeta$ , entendido como la variación de la densidad de energía libre por unidad de volumen con respecto a la densidad, manteniendo las variables magnéticas y elásticas constantes. Una consecuencia inmediata de tal elección es la obtención, con relativa sencillez formal, de un término diagonal en el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy, cuestión ésta central, dado que tal elemento diagonal se muestra como imprescindible a la hora de compensar las diferencias observadas en los términos diagonales en los diferentes tensores magnetostáticos de Maxwell que pudieran ser considerados.

Los aspectos mencionados anteriormente constituyen dos elementos de previos de formalización importantes, pero no constituyen la aportación sustancial sobre la que se sustenta la

obtención del tensor de tensiones magnetoelásticas propuesto en esta memoria. Este elemento central se refiere a la interpretación de la ecuación constitutiva (3.65)

$$\mathbf{H} = 2(\alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbb{G} \mathbf{B} + \alpha_3 \mathbb{G}^2 \mathbf{B})$$

y su inserción en la forma genérica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy (3.64),

$$\mathbb{T} = 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbb{G}} \right)_e \mathbb{G} + 2(\alpha_2 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \alpha_3 \mathbf{B} \otimes \mathbb{G}^2 \mathbf{B} + \alpha_3 \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B}) + \zeta \rho \mathbb{I}$$

Efectivamente, una interpretación estrictamente formal de la ecuación (3.65) conduciría inmediatamente a un tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy en términos del tensor  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  como el obtenido en la ecuación (3.74) que impide *de facto* la obtención de una forma general del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy independiente de la elección de un tensor de Maxwell. Es ésta una consideración importante, puesto que, como ya se ha mencionado, esta memoria parte de la exigencia de que el estado tensional total obtenido como suma de las tensiones elásticas, magnetoelásticas y magnéticas en unos determinados sistema y configuración experimental han de estar unívocamente definidas. Se trata pues esta exigencia de una evidencia experimental que no puede soslayarse y que obliga a la introducción de un determinado número de parámetros de acoplamiento que determinan, en última instancia, la naturaleza misma de la forma en que este proceso de acoplamiento se puede modelizar atendiendo a las diferentes densidades de fuerza magnetostáticas que puedan ser consideradas.

Así pues, los parámetros de acoplamiento magnético y magnetoelásticos introducidos en el desarrollo de este modelo han de ser interpretados en un doble contexto. En primer término, la ya indicada necesidad de ser capaces de definir unívocamente, más allá de la modelización de las fuerzas, el estado tensional en un punto de

un sólido deformable sometido a interacciones magnetostáticas. Y, en segundo término, a la documentada evidencia de que, aún en este momento, no es posible argumentar científica o tecnológicamente, cuál es la correcta distribución de las densidades de fuerza magnetostáticas en un medio continuo. La propuesta desarrollada en esta memoria no hace sino responder a la evidencia de la limitación de nuestro conocimiento acerca de cómo se distribuyen las fuerzas magnetostáticas, pero admitiendo, a pesar de ello, que la respuesta del material ante tales interacciones ha de ser única, medible y, en términos científicos, predecible o soportada por una argumentación teórica consistente.

Conviene, así, analizar, ya en esta discusión, una posible crítica que cabría formular a este modelo, y que se referiría a su complejidad formal. La introducción de cinco parámetros magnéticos y otros cinco magnetoelásticos de acoplamiento ante diferentes densidades de fuerza puede entenderse como un mero ejercicio teórico que pueda permitir validar la totalidad de tales densidades de fuerza en la descripción del modelo de interacción magnetoelástico y que, por lo tanto, no aporte ninguna información adicional sustancial a los modelos de interacción ya desarrollados. Ante ello, cabría argumentar una serie de consideraciones.

La primera de ellas es de carácter epistemológico; puede admitirse, ante la evidencia del continuo e irresuelto problema de la determinación real de la distribución de fuerzas, que tal problema es lo suficientemente complejo como para que los modelos de interacción descritos sólo puedan ser considerados como aproximaciones condicionadas por sus hipótesis de partida, y, que, por lo tanto, la resolución de tal problema sólo pueda obtenerse en un contexto más amplio o complejo, en el que todas estas aproximaciones han de tener su espacio natural. Tal marco teórico más amplio puede ser la forma en la que respondería el medio continuo sólido y deformable ante tales aproximaciones de fuerzas locales de origen magnetostático. Esta memoria trata pues de responder a esta cuestión.

La segunda consideración que puede formularse en torno a este problema es de carácter experimental. Como se ha observado en el análisis de los modelos de acoplamiento magnetoelásticos realizado en este tercer Capítulo, tales modelos requieren usualmente de un ajuste experimental a través de la introducción de parámetros de acoplamiento. Y hay que hacer aquí la anotación de que no puede establecerse con rigor hasta qué punto tales parámetros son dependientes de la formulación escogida en su ajuste a los valores experimentales u obtenidos por simulación numérica. Expresado en otros términos este problema: ¿cómo variarían el número, naturaleza y valor de los parámetros de acoplamiento utilizados bajo una determinada adopción de una densidad de fuerza si tal densidad de fuerza fuese modificada?. ¿Es por tanto ésta una cuestión que debería ser tenida en cuenta por el experimentador a la hora de escoger una determinada densidad de fuerza en su modelo de acoplamiento? O, en definitiva, ¿está limitado el alcance o la potencia del modelo desarrollado por la densidad de fuerza o tensor de Maxwell escogido?

En esta memoria se ha introducido un tensor total de tensiones magnetoelásticas de Cauchy *referencial*. Este tensor únicamente puede ser determinado experimentalmente, y es de la forma dada por (3.86), que puede ser escrito como suma de una componente estrictamente elástica  $\mathbb{T}_e$ , una componente magnética  $\mathbb{T}_m$  y una componente magnetoelástica  $\mathbb{T}_{me}$ . Por otra parte, la relación (3.94) permite considerar a la componente magnética de tal tensor *referencial* en la forma dada por (3.111)

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m^T = & \lambda_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ & + \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \lambda_4 \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.111)$$

o, en términos de los coeficientes de acoplamiento magnéticos y los coeficientes de las componentes del tensor de Maxwell, en la forma dada por (3.100),



$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m^T &= (\alpha_0 + \mu_0 \mathcal{G}) \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + (\beta_0 + \eta_s) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ &+ (\gamma_0 + \eta_A) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \left( \kappa \frac{1}{\mu_0} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ &+ (\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) + \zeta_m) \mathbb{I} \end{aligned}$$

Las relaciones entre los parámetros del tensor de referencia  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  y los parámetros de acoplamiento  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \beta_1, \beta_4$  son compatibles para cualquier tensor de Maxwell.

Por otra parte, se ha comprobado que la componente magnetoelástica  $\mathbb{T}_{me}$ , dada por (3.112),

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{me} &= 2[\mathbf{B} \otimes (\xi_2 \mathbb{G} + \xi_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S + \\ &2[\mathbf{B} \otimes (\nu_2 \mathbb{G} + \nu_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A + (2\alpha_3 + \tau_2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \zeta_{me} \rho \mathbb{I} \end{aligned}$$

es independiente del tensor de Maxwell o densidad de energía magnetostática seleccionada para la formalización del modelo de acoplamiento.

Dado entonces un determinado sistema sometido a una interacción magnetoelástica, los coeficientes del tensor referencial  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  y  $\xi_2, \xi_3, \nu_2, \nu_3, \tau_2$  pueden ser determinados mediante procedimientos de simulación numérica o contrastación experimental.

Sin embargo, aun cuando estos coeficientes hayan sido determinados o contrastados experimentalmente, las relaciones de compatibilidad entre los parámetros del tensor referencial, los parámetros de acoplamiento magnético y las componentes del tensor de Maxwell adoptado no permitirían, en principio, obtener alguna conclusión significativa en torno a la adecuación de un determinado tensor de Maxwell en la modelización, dado que, para cualquier tensor de Maxwell es posible obtener coeficientes de acoplamiento que

reproduzcan las componentes experimentales del tensor magnético referencial. No obstante, la relación general (3.80)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} = & \beta_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + 2(\beta_1 \alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \\ & 2[\mathbf{B} \otimes (\beta_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \beta_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S + \\ & \gamma_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + 2[\mathbf{B} \otimes (\gamma_2 \alpha_2 \mathbb{G} + \gamma_3 \alpha_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}] + \beta_5 \alpha_2^2 \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} \end{aligned}$$

ha de ser verificada en cualquier caso y, por tanto, los parámetros de acoplamiento magnético y magnetostático pueden quedar determinados. Por ello, se propone como línea de posterior desarrollo de lo expuesto en esta memoria la formalización de una metodología de análisis numérico que permitiese, en primer término, la determinación numérica y experimental de los parámetros de acoplamiento magnetoelásticos, dado que tales parámetros no van a depender de la selección de un determinado tensor de Maxwell. Posteriormente, una determinación numérica y experimental de los coeficientes de la componente magnética referencial permitiría, considerando la restricción dada por (3.80), obtener resultados sobre los parámetros de acoplamiento magnético y, con ellos, la forma tensorial de Maxwell que mejor se ajustara a los resultados experimentales. Obviamente, se trata de un proceso complejo cuyo desarrollo sería de gran interés en la obtención de resultados relativos a la densidad de energía magnetostática en el medio continuo.

En este sentido, se ha introducido también en este trabajo una densidad de fuerza extendida como suma de la densidad de fuerza obtenida como la divergencia del tensor de tensiones de Maxwell (3.104),

$$f_i = \left( \begin{array}{l} \mu_0 \mathcal{A} \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \eta_s (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \eta_A (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \\ + \kappa \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{H}) \mathbb{I} \end{array} \right)_{ij,j} \quad (3.104)$$

y una densidad de fuerza, también magnetostática, obtenida como la divergencia de la componente magnetostática del tensor de tensiones elásticas de Cauchy (3.103).

$$f_i^c = \left( \alpha_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} + \beta_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S + \gamma_0 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A \right)_{ij,j} + 2((\beta_1 - 1)\alpha_1 + \beta_4 \alpha_1^2) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \zeta_m \mathbb{I} \quad (3.103)$$

dependiente de los coeficientes de acoplamiento magnético. De esta forma, las mismas consideraciones expuestas antes en torno a la determinación de los parámetros de acoplamiento magnético ante una elección determinada de un tensor de Maxwell pueden extenderse a las densidades (3.103) y (3.104).

La densidad de fuerza (3.104) corresponde a la divergencia del tensor de Maxwell escogido para la formulación del modelo y (3.103) debería entenderse como una densidad de fuerza que complementaría cada densidad de fuerza específica en la reproducción de la densidad de fuerza real. Tal densidad de fuerza depende por tanto de la resolución del procedimiento de determinación de los parámetros de acoplamiento expuesto anteriormente. Expresado en otros términos, sólo con la determinación experimental de la componente magnetoelástica del tensor de tensiones de Cauchy podría obtenerse alguna conclusión significativa respecto a la adecuación o idoneidad de cada densidad de fuerza en la descripción del modelo de acoplamiento.

Pero, además, las consideraciones derivadas de la aplicación de las condiciones de contorno al tensor magnetoelástico total, suma del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y del tensor de Maxwell, permite de nuevo implementar la metodología apuntada anteriormente, pero referida ahora a la fuerza total ejercida sobre un cuerpo aislado en el vacío. La invariancia de la componente magnetoelástica del tensor de tensiones de Cauchy ante diferentes tensores de Maxwell permite, considerando la ecuación (3.113)

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_e \mathbf{n} + \left( \begin{array}{l} 2[\mathbf{B} \otimes (\xi_2 \mathbb{G} + \xi_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^S + \\ 2[\mathbf{B} \otimes (\nu_2 \mathbb{G} + \nu_3 \mathbb{G}^2) \mathbf{B}]^A \\ + (2\alpha_3 + \tau_2) \mathbb{G} \mathbf{B} \otimes \mathbb{G} \mathbf{B} + \zeta_{me} \rho \mathbb{I} \end{array} \right) \mathbf{n} = \\ = - \left( \begin{array}{l} \left( \lambda_0 - \frac{1}{\mu_0} \right) (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) + \lambda_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^S \\ + \lambda_2 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})^A + \lambda_3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left( \lambda_4 + \mu_0 \frac{H^2}{2} \right) \mathbb{I} \end{array} \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

evaluar la densidad de fuerza superficial total en términos de componentes elásticas y magnetoelásticas o bien en términos de componentes estrictamente magnéticas, de tal modo que, bien localmente o bien por integración a toda la superficie, puedan obtenerse relaciones significativas relativas a los parámetros de acoplamiento magnetomecánico.

Es conveniente discutir la cuestión de la simetría del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy obtenido en este trabajo. Como se ha comprobado, la componente antisimétrica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy se ha comprobado que es igual a la expresión (3.96), equivalente a (3.98) y ello de forma independiente a cualquier densidad de fuerza. En consecuencia, el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy no es necesariamente simétrico, en consonancia con lo expuesto en la sección 3.2 de esta memoria. Ahora bien, en el caso en que el comportamiento del material sea isótropo y la permeabilidad magnética pueda ser considerada como una función escalar, lineal o no, del campo magnético  $\mathbf{H}$ , el tensor  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$  será simétrico y, con él, el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy.

Una cuestión diferente es la simetría del tensor total de tensiones, obtenido como suma del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y el tensor de Maxwell. Como se ha

indicado en el análisis de las referencias, en algunos trabajos se ha impuesto la simetría de este tensor total como una cuestión necesaria. Sin embargo, en comportamientos magnéticos en los que el tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy no sea simétrico, la adición de un tensor de Maxwell no simétrico que anulase la componente antisimétrica del tensor de tensiones de Cauchy podría suponer la obtención de un tensor totalmente simétrico pero, en definitiva, tal simetría es cuestión únicamente, en principio, de la elección de un tensor de Maxwell y, por lo tanto, no es una cuestión necesaria. Así, a modo de ejemplo, la imposición de simetría del tensor total de tensiones tendría como consecuencia inmediata que, en el modelo desarrollado en esta memoria, los tensores de Maxwell simétricos no podrían ser utilizados en modelos de acoplamiento. Ello invalidaría, por ejemplo, el uso de los modelos ESM o de tensores simétricos como los expuestos en el Capítulo 2 de esta memoria.



## CONCLUSIONES

Atendiendo a lo expuesto en la sección de Discusión de cada uno de los Capítulos que componen esta memoria, se establecen las siguientes conclusiones, que son presentadas bajo la misma secuencia argumentativa con la que se ha desarrollado esta Tesis Doctoral.

### RESPECTO AL ESTADO ACTUAL DE LOS MODELOS DE DENSIDADES DE FUERZA MAGNETOSTÁTICA

**1** Los modelos de representación de las propiedades magnéticas de la materia con un campo externo se reducen a seis, dos de los cuales obedecen a modelos de fuentes magnetizantes equivalentes y los cuatro restantes a modelos dipolares, siendo éstos simétricos dos a dos en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ . Las cuatro densidades volumétricas significativas son:

- Densidad correspondiente al modelo de Brown-Kelvin:

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} \quad (\text{C1})$$

- Densidad correspondiente al modelo de Eringen-Maugin:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{B} \otimes \vec{\nabla})^T \mathbf{m} \quad (\text{C2})$$

- Densidad correspondiente al modelo de cargas magnéticas equivalentes:

$$\mathbf{f} = -\mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{H} \quad (\text{C3})$$

- Densidad correspondiente al modelo de corrientes magnetizantes equivalentes:

$$\mathbf{f} = (\vec{\nabla} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{B} \quad (\text{C4})$$

y las dos densidades simétricas en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  a las de Brown-Kelvin y Eringen-Maugin,  $\mathbf{f} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$  y  $\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{H} \otimes \nabla)^t \mathbf{m}$ , respectivamente, han sido utilizadas en mucha menor medida en estudios técnicos o científicos.

**2** La fuerza total sobre un medio magnético situado en el vacío puede obtenerse como la integral volumétrica de las densidades (C1)-(C4) si los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  son considerados como los campos externos al medio o como la integral volumétrica de las densidades (C1)-(C4) y la integral sobre la superficie del cuerpo de las correspondientes densidades superficiales si los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  son considerados como los campos actuales o presentes en el medio. En todos los casos, tales fuerzas globales coinciden con las calculadas mediante los procedimientos de integración del tensor de Maxwell en el vacío y con el método de aplicación del principio de Trabajos Virtuales.

**3** No se ha documentado ninguna refutación teórica relativa de alguna o algunas de las densidades de fuerza (C1)-(C4), se han documentado grandes diferencias entre las distribuciones de fuerza (C1)-(C4), y en sus correspondientes densidades superficiales, pero no se han publicado resultados experimentales o numéricos significativos que determinen la prevalencia de alguna de ellas respecto a otras.

**4** Se han publicado trabajos de investigación que extienden los procedimientos basados en las densidades (C1), (C3) y (C4) a fuerzas sobre cuerpos en contacto.



---

RESPECTO A TENSORES DE MAXWELL EN EL MEDIO  
CONTINUO

**5** Una extensión del tensor de Maxwell en el vacío, suficientemente genérica para determinar las tensiones magnéticas en un medio cualquiera, permitiría determinar las fuerzas entre cuerpos en contacto.

**6** Los tensores de Maxwell que reproducen las densidades  $C_1$  y  $C_2$  son formas diádicas en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ , no son simétricos y difieren únicamente en el término diagonal, mientras que los tensores de Maxwell que reproducen las densidades  $C_3$  y  $C_4$  son formas diádicas simétricas en los campos  $\mathbf{H}$  o  $\mathbf{B}$  y sus términos diagonales son diferentes. Los tensores que reproducen las formas simétricas en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  de las densidades  $C_1$  y  $C_2$  coinciden con los obtenidos para estas dos densidades, por lo que puede concluirse que son cuatro los tensores de Maxwell que reproducen las densidades de fuerza obtenidas bajo alguna modelización de la interacción de la materia con un campo magnetostático externo.

**7** Se han documentado diversos tensores de Maxwell por aplicación del principio de Trabajos Virtuales a la densidad de energía o de coenergía magnetostática en cualquier medio bajo diferentes metodologías. En algunos casos, se documentaron diferencias entre los tensores obtenidos a partir de la densidad de energía de los obtenidos a partir de la densidad de coenergía, pero tales diferencias han sido finalmente corregidas.

**8** Desde diferentes procedimientos o metodologías, se ha comprobado que el tensor simétrico obtenido a partir de las formas diádicas en los campos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  con un término diagonal igual a la

densidad de coenergía magnetostática es coherente con la densidad de fuerza obtenida por aplicación del principio de Trabajos Virtuales en cualquier medio, en ausencia de magnetostricción.

#### RESPECTO AL MODELO DESARROLLADO DE APROXIMACIÓN A LA INTERACCIÓN MAGNETOELÁSTICA

**9** El tensor de Cauchy de tensiones magnetoelásticas propuesto en esta memoria se descompone en un tensor estrictamente elástico, expresado en términos del tensor por la izquierda de Cauchy-Green, un tensor estrictamente magnético, expresado en términos del campo magnético y de la inducción magnética y un tensor de acoplamiento magnetoelástico expresado en términos del tensor por la izquierda de Cauchy-Green y la inducción magnética.

**10** La componente estrictamente elástica del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy es independiente de la densidad de fuerza adoptada o tensor de Maxwell considerado en la interacción.

**11** La componente estrictamente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy depende de cinco parámetros magnéticos de acoplamiento que dependen de la densidad de fuerza adoptada o tensor de Maxwell considerado en la interacción.

**12** La componente magnetoelástica del tensor de tensiones de Cauchy depende de cinco parámetros magnetoelásticos de acoplamiento que son independientes de la densidad de fuerza adoptada o tensor de Maxwell considerado en la interacción

**13** Se ha introducido un tensor total de tensiones magnetoelásticas obtenido como la suma del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y el tensor de Maxwell adoptado en el modelo de interacción.

**14** Se ha introducido un tensor total de tensiones magnetoelásticas referencial, obtenido experimentalmente para un sistema dado en una determinada configuración experimental. Las componentes de este tensor sólo pueden determinarse experimentalmente.

**15** La componente estrictamente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas referencial, obtenido como suma de la componente estrictamente magnética del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y el tensor de Maxwell adoptado en el modelo de interacción, es compatible con cualquier densidad de fuerza magnetostática o tensor de Maxwell considerado en la descripción de la interacción a través de la variación de los coeficientes magnéticos de acoplamiento.

**16** Se ha introducido una densidad extendida de fuerza magnetostática como la divergencia de la componente estrictamente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas.

**17** La densidad de fuerza magnetostática extendida referencial, obtenida como la divergencia de la componente estrictamente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas referencial es compatible con cualquier densidad de fuerza magnetostática considerada en la descripción de la interacción a través de la variación de los coeficientes magnéticos de acoplamiento.

**18** Las condiciones de contorno que afectan al tensor total de tensiones magnetoelásticas permiten diseñar un procedimiento experimental para la determinación tanto de la componente estrictamente magnética del tensor total de tensiones magnetoelásticas referencial como de la densidad de fuerzas magnetostática extendida referencial.

**19** El tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy no es simétrico independientemente del modelo de densidad de fuerza o de tensor de Maxwell considerados en la descripción de la interacción.

#### RESPECTO AL PROBLEMA DE LA DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN *REAL* DE DENSIDAD DE FUERZA MAGNETOSTÁTICA EN UN MEDIO CONTINUO

A continuación se describen conclusiones derivadas de las expuestas anteriormente, en atención, principalmente, a la continuidad de los resultados desarrollados en esta memoria en futuros trabajos de investigación. Constituyen, por tanto, una interpretación valorativa y, aunque estén fundamentadas en tales resultados, han de ser consideradas como hipótesis de trabajo.

**20** Los seis modelos de densidades de fuerza basados en la descripción de la materia en su interacción con campos magnéticos externos son insuficientes para describir las fuerzas locales de origen magnetostático en un medio continuo. Por lo tanto, la descripción de la materia en términos de fuentes magnetizantes o dipolos localizados en un espacio vacío es únicamente una primera aproximación, en el marco del electromagnetismo clásico, del comportamiento magnético de la materia. Esta primera aproximación permite únicamente unos

mismos resultados en cuanto a la obtención de la fuerza global sobre un cuerpo en el vacío.

**21** La densidad de fuerza magnetostática extendida introducida en este trabajo permite aumentar el grado de adecuación a la realidad de los modelos clásicos de interacción con la materia al incorporar la divergencia de un término estrictamente magnético del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy y, así, incluir una componente magnética derivada de la respuesta elástica del material ante una determinada expresión de fuerza o un determinado tensor de Maxwell.

**22** El tensor simétrico en los campos magnético e inducción magnética, con componente diagonal dada por la densidad de coenergía, parece, de acuerdo a las referencias descritas, adecuarse con suficiente grado de generalidad a las fuerzas de origen magnético en cualquier medio, pero ha de complementarse con el adecuado término estrictamente magnético del tensor de tensiones magnetoelásticas de Cauchy a través de una verificación experimental en el marco de la metodología propuesta en esta memoria referido a un tensor total de tensiones magnetoelásticas.

**23** La aproximación a la determinación de las fuerzas de origen magnetostático en un medio continuo que incluya los términos obtenidos como consecuencia del comportamiento elástico de la materia, en los términos descritos en las dos conclusiones anteriores, ha de considerarse como una mejor descripción de tales fuerzas, pero es necesario considerar que la descripción de éstas podrá siempre verse modificada bien por interacciones de diferente naturaleza (como, por ejemplo, la térmica), bien por elementos que condicionan la descripción de la materia como un medio continuo de carácter homogéneo (como, por ejemplo, el daño) o bien por el desarrollo u optimización de las metodologías de análisis y modelización.



## BIBLIOGRAFÍA

AUCEJO-GALINDO, V., (2010). Méthode tensorielle générale pour une modélisation multiphysique de dispositifs magnéto-mécaniques rapides. *Thèse de Doctorat. École Doctorale de Lorraine. Université Paul Verlaine, Metz, France.*

BARRE, O., BROCHET, P. Y HECQUET, M. (2006). Experimental Validation of Magnetic and Electric Local Force Formulations Associated to Energy Principle”, *IEEE T. Magn.*, 42, 4, 1475-1478.

BELAHSEN, A., FONTEYN, K., HANNUKAINEN, A. Y KOUHIA, R. (2008). *On numerical modeling of coupled magnetoelastic problem. 21 Nordic Seminar on Computational Mechanics, NSCM-21. Barcelona, España.*

BOSSAVIT, A. (2011). Virtual power principle and Maxwell’s tensor: which comes first?. *COMPEL- The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 30, 6. 1804 – 1814.

———, (2013). La question des forces en électromagnétisme. Seminar, LMSSC, Cnam, Paris.

———, <http://www.lmssc.cnam.fr/fr/content/la-question-des-forces-en-electromagnetisme>

———, (2014). On forces in magnetized matter. *IEEE Trans. Magn.*, 50, 2, 229-32.

———, (2015a). Un tenseur de Maxwell non-linéaire et symétrique. *8ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2015). Université de Nantes. Saint-Nazaire. France*, de próxima publicación en *Eur. J. Electr. Engng.*

———, (2015b). Bulk Forces and Interface Forces in Assemblies of Magnetized Pieces of Matter. Pendiente de publicación en *IEEE Trans. Magn.* DOI 10.1109/TMAG.2015.2481939, *IEEE Transactions on Magnetics*

BOYER, T.H. (1987). The force on a magnetic dipole. *Am. J. Phys.*, 56,8, 688- 691.

BROWN, W.F. (1966). *Magnetoelastic Interactions*. Springer.

BUSTAMANTE, R., DORFMANN, A., OGDEN, R.W. (2011). Numerical solution of finite geometry boundary-value problems in nonlinear Magnetoelasticity. *Int. J. Solids Structur.* 48, 874-883.

CARPENTER, C.J. (1959). Surface Integral Methods of Calculating Forces on Magnetized Iron Parts. *The Insitution of Electrical Engineers. Monograph N°342*, 19-28.

CHOI, H-S., LEE, S-H. Y PARK, I-H. (2005). General Formulation of Equivalent Magnetic Charge Method for Force Density Distribution on Interface of Different Materials. *IEEE Trans. Mag.*, 41, 5, 1420-1423

—, (2006a). Generalized Equivalent Magnetizing Current Method for Total Force Computation of Magnetized Bodies in Contact. *IEEE Trans. Magn.*, 42, 4, 531-534.

—, (2006b). Electromagnetic body force calculation based on virtual air gap. *J. Appl. Phys.*, 99, 08H903, 1-3.

DANAS, K., KANKANALA, S. Y TRIANTAFYLLIDIS, N. (2011). Magnetorheological Elastomers: *Experiments and Modeling: 10<sup>e</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 9-13 May, Presqu'île de Giens, France (CSMA)*.

—, (2012). Experiments and modeling of iron-particle-filled magnetorheological elastomers. *Int. J. Solids Structur.* 60, 120-138.

DE MEDEIROS, L.H, REYNE, G., MEUNIER, G. Y YONNET, P. (1998a). Distribution of Electromagnetic Force in Permanents Magnets. *IEEE Trans. Magn.*, 34, 3012-3015.



DE MEDEIROS, L.H, REYNE, G. Y MEUNIER, G. (1998b). Comparison of Global Force Calculations on Permanent Magnets. *IEEE Trans. Magn.*, 34, 3560-3563.

———, (1999). About the distribution of forces in permanent magnets. *IEEE Trans. Magn.*, 35, 1215-1218.

———, (2000). A Unique Distribution of Forces in Permanent Magnets Using Scalar and Vector Potential Formulations. *IEEE Trans. Magn.*, 36, 3345-3348.

DELFINO, F. (2001). Some Numerical Aspects in Electrodynamics of Magnetic Materials. *Technical article. ICS Newsletter*, 8, 3. 1-10.

DORFMANN, A., OGDEN, R.W. Y SACCOMANDI, G. (2004). Universal relations for non-linear magnetoelastic solids. *Int. J. Solids Structur.* 39, 1699-1708.

ENGEL, A., (1981). Comment on 'Invalidation of the Kelvin Force in Ferrofluids. *Phys. Rev. Lett.* 86, 4978.

FELDERHOF, B.U., SOKOLOV, V.V. Y ÉMINOV, P.A. (2010). Ferrofluid dynamics, magnetic relaxation, and irreversible thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics*, 132, 184907-1,7.

FERRARO, V.C.A., (1956). Electromagnetic Theory. *Athlone Press*, London.

FU, W.N., ZHOU, P., LIN, D., CENDES, Z.J., (2004). Magnetic Force Computation in Permanent Magnets Using a Local Energy Coordinate Derivative Method. *IEEE Trans. Magn.*, 40, 2, 683-686.

HASANYAN, D.J. Y HARUTYUNYAN, S. (2009). Magnetoelastic interactions in a soft ferromagnetic body with a nonlinear law of magnetization: Some applications. *Int. J. Sol.Struct.*, 46, 2172-2185.

HAUS, H.A. Y MELCHER, J.R. (1989). Electromagnetic Fields and Energy. MIT. OpenCourseWare. <http://ocw.mit.edu>.

HENROTTE, F., DELIÉGE, G Y HAMEYER, K., (2004a). The eggshell approach for the computation of electromagnetic forces in 2D and 3D. *COMPEL (The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering)*, 23-4. 996-1005.

HENROTTE, F., VANDE SANDE, H., DEILIÉGE, G, Y HAMEYER, K. (2), (2004b). Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material. *IEEE. Trans. Mag.* 40,2, 553-556.

HENROTTE, F., HAMEYER K., (2007). A Theory for Electromagnetic Force Formulas in Continuous Media. *IEEE. Trans. Mag.*, 43, 4, 1445-1448.

HIRSINGER, L Y DAHER, N. (2013). Les Tenseurs de contraintes électromagnétiques. 21<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique. Bordeaux, 1-6.

HIRSINGER, L Y BILLARDON, R. (1995). Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects. *IEEE Trans. Magn.*, 31, 1877- 1880.

HIRSINGER, L Y BILLARDON, R. (1995). Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects. *IEEE Trans. Magn.*, 31, 1877- 1880.

HUTTER, K., VAN DE VEN, A.A. Y URSESCU, A., (2006). Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. *Lect. Notes Phys. 710, Springer, Berlin Heidelberg.*

JACKSON, J.D. (1962). Classical Electrodynamics. *Wiley, New York*, 149.

JEONG, G-Y., CHOI, H-S., KIM, H-J., KIM, H-G. Y LEE, S-H. (2011). Evaluation of Magnetic Force Distribution and Torque Due to Smooth

Interaction Body Force Density in Permanent-Magnet Materials. *IEEE Trans.Magn.*, 47, 10, 2819-2822

JIN, K., KOU, Y. Y ZHENG, X., (2010). Magnetoelastic Model of Magnetizable Media. *PIERS Proceedings*, 1278-1282.

KANKANALA,S.V. Y TRIANTAFYLLIDIS, N. (2004). On finitely strained magnetorheological elastomers. *Int. J. Solids Structur.* 52, 2869-2908.

KIEFER, B. Y LAGOUDAS, D.C. (2006). Application of a magnetic SMA constitutive model in the analysis of magnetomechanical boundary values problems. *Proc.SPIE 6170, Smart Structures and Materials: Behavior and Mechanics. San Diego, California, USA.*

KOVANEN, T., TARHASAARI, T. Y KETTUNEN, L. (2011). Computation of Local Electromagnetic Force. *IEEE Trans. Magn.*, 47, 5, 894-897.  
—, (2012). Localization of Electromagnetic Force Based on Materials Models. *IEEE Trans. Magn.*, 48, 1, 13-17.

LANDAU, L. Y LIFSHTIZ, E., (1969). Curso de Física Teórica. Teoría de la Elasticidad. *Reverté, Barcelona.*

—, (1973). Curso de Física Teórica, Teoría clásica de los campos. *Reverté, Barcelona.*

—, (1981). Curso de Física Teórica. Electrodinámica del medio continuo. *Reverté, Barcelona.*

—, (1988). Curso de Física Teórica. Física Estadística. *Reverté, Barcelona.*

LEE, H-Y., KIM, I-H., CHANG, J-H., CHOI, S-Y. Y LEE, S-H. (2012). Interaction Body Force Density and Mechanical Deformation in Soft Magnetic Materials With External Field by Freezing Procedure of Magnetization. *IEEE Trans. Appl. Superconductivity*, 22, 3. DOI:10.1109/TASC.2011.2179695

LEE, S-H., PARK, I-H Y LEE, K-S. (2000). Comparison of Mechanical Deformations Due to Different Force Distributions of Two Equivalent Magnetization Models. *IEEE Trans. Mag.*, 34, 4, 1368-1372.

LEE, S-H, HAN, S-J, CHOI, H-S, LEE, J-H Y PARK, I-H. (2004). Magnetic Force Distributions in Saturated Magnetic System Using Magnetic Charge Method and Other Methods. *IEEE Trans. Mag.*, 14, 2, 682-685.

LEE, S-H., HE, X., KIM, D-K., ELBORAI, S., CHOI, H-S, PARK, I-H. Y ZAHN, M. (2005). Evaluation of the mechanical deformation in incompressible linear and nonlinear materials using various electromagnetic force density methods. *J. App. Phys.*, 97, 10E108, 1-3.

LEE, S-H., CHOI, H-S Y PARK, I-H. (2007). Introducing the Virtual Air-Gap Scheme to the Kelvin Force Densities With External and Total Field. *IEEE Trans. Magn*, 43, 4, 1457-1460.

LIANG, W., FANG, D., SHEN Y. Y SOH, A.K. (2002). Nonlinear magnetoelastic coupling effects in a soft ferromagnetic material with a crack. *Int. J. Solids Structur.* 39, 3997-4011.

LIN, C.B. Y YEH, C.S. (2002). The magnetoelastic problem of a crack in a soft ferromagnetic solid. *Int. J. Solids Structur.* 39, 1-17.

LIVENS, G.H., (1918). The Theory of Electricity. *Cambridge U.P.* London and Edimburgh.

MCDONALD, K.T. (2003). Methods of Calculating Forces on Rigid Magnetic Media. arXiv:physics/0312027 [physics.class-ph], 1-7.

MULLER, W. (1990). Comparison of different methods of force calculation. *IEEE Trans. Mag.* 26, 1058-1061.

PAO, Y.H. Y YEH, C.S., (1973). A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.* 11,4. 415-436

PETIT, M., KEDOUS-LEBOUC, A., AVENAS, Y., TAWK, M. Y ARTEGA, E., (2011). Calculation and analysis of local magnetic forces in ferrofluids. *PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY (Electrical Review)*, ISSN 0033-2097, R. 87 No 9b/2011.

ODENBACH, S. Y LIU, M., (2001). Invalidation of the Kelvin Force in Ferrofluids. *Phys. Rev. Lett.*, 86, 2, 328-332.

OTTÉNIO, M., DESTRADE, M. Y OGDEN, R.W. (2008). Incremental Magnetoelastic Deformations, with Application to Surface Instability. *Journal of Elasticity*, 90, 19-42.

REN, Z. (1994). Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling. *IEEE Trans. Mag.* 30, 3471-3474.

ROCHE, J.J. (2000). B and H, the intensity vectors of magnetism: A new approach to resolving a century-old controversy. *Am. J. Phys.* 68 (5), 438-449.

SADOWSKI, N., LEFEVRE, Y., LAJOIE-MAZENC, M. ET BASTOS, J.P.A. (1992). Sur le calcul des forces magnétiques. *J. Phys. III France* 2, 859-870.

SÁNCHEZ-GRANDÍA, R., VIVES-FOS, R. Y AUCEJO-GALINDO, V., (2006). Magnetostatic Maxwell's tensors in magnetic media applying virtual works method from either energy or co-energy. *Euro. Phys. J.A.P.*, 35, 61.

SÁNCHEZ-GRANDÍA, R., AUCEJO-GALINDO, V., USIETO-GALVE, A. Y VIVES-FOS, R., (2008). General Formulation for Magnetic Forces in Linear Materials and Permanent Magnets. *IEEE Trans. Magn.*, 44, 9, 2134 – 2140.

SLEPIAN, J. (1950). Electromagnetic ponderomotive forces within material bodies. *Physics*, 36, 485-497.

STEIGMANN, D. (2009). On the formulation of balance laws for electromagnetic continua. *Mathematics and Mechanics of Solids, SAGE Publications(UK and US)*, 14, 390-402.

STRATTON, J.A., (1941). Electromagnetic Theory. *McGraw-Hill*, New York and London.

VAN LEEUWEN, H.J. (1921). Problèmes de la théorie électronique du magnétisme. *J. Phys. Radium*, VI, 2, 12, 361-367.

VANDELVELDE, L. Y MELKEBEEK, J.A.A. (2002). Modeling of magnetoelastic material. *IEEE Trans. Magn.*, 38, 993-996.

VANDELVELDE L., GYSELINCK, J., DE WULF, A.C. Y MELKEBEEK, J.A.A. (2004). Finite-Element Computation of the Deformation of Ferromagnetic Material Taking Into Account Magnetic Forces and Magnetostriction. *IEEE Trans. Magn.*, 40, 565-568.

VOLTAIRAS, P.A., FOTIADIS, D.I., MASSALAS, C.V., (2003). Modelling the hyperelasticity of magnetic field sensitive gels. *Journal of Applied Physics*, 93, 6. 3652-3656.

VU, D.K Y STEINMANN, P. (2007). Nonlinear electro- and magneto-elastostatics: Material and spatial settings. *Int. J. Solids Structur.* 44, 7891-7905.

ZELAZO, R.E. Y MELCHER, J.R., (1969). Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions. *J. Fluid. Mech.*, 39, 1, 1-24.

ZHOU, Y. Y ZHENG, X., (1999). A generalized variational principle and theoretical model for magnetoelastic interaction of ferromagnetic bodies. *Science in China (Series A)*, 42, 6. 618-626.