EXTENSIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE AL CONCEPTO DE ÁREA

Memoria presentada por
Dña. Mónica Prat Villar

Dirigida por el profesor doctor
D. José Luis Llorens Fuster

Valencia, diciembre de 2015

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a mi director y tutor, el Profesor Doctor Don José Luis Llorens Fuster, Catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, no solo porque sin su ayuda hubiera sido imposible realizar este trabajo sino porque, desde que le conocí en 1995, siempre que he acudido a él me ha demostrado su total confianza y apoyo.

En segundo lugar me gustaría mostrar mi gratitud hacia mis alumnos. Ellos han sido mi principal motivación para embarcarme en este trabajo. Los de mis primeros cursos como docente me enseñaron que no todos *entienden* las Matemáticas del mismo modo, y menos aún como yo lo hago. Los de cursos posteriores me fueron dando diferentes tipos de *evidencias* que me hicieron deducir situaciones que durante mi investigación he podido confirmar. Y los de estos últimos cursos me han permitido disfrutar cada día más de la docencia, además de implicarse, algunos muy directamente, en el desarrollo de este trabajo.

Por último quiero agradecer la ayuda que he recibido de todos los que me rodean, amigos y familia, pues sin ellos no hubiera encontrado el tiempo ni el ánimo para seguir adelante, especialmente durante el último año. Gracias a todos los que han suplido de alguna manera mi ausencia como madre con mis hijas, sin duda mi mayor sacrificio. Aquí debo destacar a mi madre y, muy especialmente, a mi marido que además me ha ayudado en parte de este trabajo. Y cómo no, he de dar las gracias a mi padre por todo lo que me enseñó.

Termino este apartado dedicando esta memoria a mis hijas, Laura y Lucía.

RESUMEN

EXTENSIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE AL CONCEPTO DE ÁREA

La extensión del modelo de van Hiele fuera del ámbito de la geometría y de los niveles educativos elementales fue una cuestión abierta hasta la tesis, leída en 1994 en la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) por el prof. Llorens, en que se aplicaba al concepto de aproximación local en una de sus manifestaciones más visuales y geométrica: la recta tangente a una curva en un punto. En aquella memoria se sugerían otras posibilidades con tanto o más interés que la desarrollada y, además, se trazó una cierta "metodología" para abordarlas. Aunque se han publicado numerosos trabajos al respecto y, además, se han leído al menos cinco tesis doctorales que cabe considerar continuadoras –al menos, en parte– de aquella memoria, quedan aún pendientes no pocas cuestiones que podemos considerar del máximo interés.

Una de ellas, quizá la de mayor repercusión en las cuestiones docentes del bachillerato y de los fundamentos de análisis matemático, tanto por su interés directo como por la relación con el concepto de integral, es la que da título a nuestra memoria. Hemos extendido el modelo de van Hiele al concepto de **área** formulando los descriptores correspondientes y sugiriendo acciones metodológicas que favorecen el progreso en el nivel de razonamiento. Asimismo, hemos analizado la relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral. Todo ello con el esquema de trabajo que, como hemos dicho antes, se ha reiterado en las memorias de doctorado mencionadas.

En concreto, hemos usado, como *mecanismo* para aproximarnos a la fase-1 del concepto, una *descomposición en franjas* para un trapecio mixtilíneo, con componente visual y numérica. Esa componente numérica supone toda una novedad respecto de las extensiones del modelo antes citadas. Utilizando como herramienta una entrevista socrática, en el habitual proceso de *feed-back* de estas entrevistas, hemos logrado llegar a la formulación de los descriptores que

después se han corroborado usando el guion definitivo en una veintena de entrevistas.

Además, hemos desarrollado una prueba escrita que, sin la precisión de la entrevista pero con otras ventajas evidentes, usando las herramientas estadísticas apropiadas, nos ha permitido verificar la existencia de los niveles de razonamiento previamente descritos y la posibilidad de detectarlos.

Así pues, con este trabajo se ha probado que el modelo de van Hiele es capaz de describir el proceso de razonamiento en otro pilar más del análisis matemático. Y también evidencia que determinadas rutinas presentes en los sistemas educativos no favorecen el correcto aprendizaje de los conceptos. Hay demasiados estudiantes que no han alcanzado el nivel III pese a que por su nivel académico deberían haberlo hecho, pero el énfasis en cuestiones mecánicas o algebraicas merman la posibilidad de realizar otro tipo de trabajo más adecuado para que se produzca una buena comprensión. Es decir, se ha evidenciado que la destreza en las herramientas algebraicas no va ligada a un nivel de razonamiento elevado. En consecuencia, se vuelve a plantear el uso de la visualización para crear situaciones de aprendizaje que conduzcan al progreso en el nivel de razonamiento.

RESUM

EXTENSIÓ DEL MODEL DE VAN HIELE AL CONCEPTE D'ÀREA

L'extensió del model de van Hiele fora de l'àmbit de la geometria i dels nivells educatius elementals va ser una qüestió oberta fins la tesi, llegida al 1994 en la Universitat Politècnica de València (UPV) pel prof. Llorens, en la qual s'aplicava al concepte d'aproximació local en una de les seues manifestacions més visuals i geomètrica: la recta tangent a una corba en un punt. A aquella memòria es suggerien altres possibilitats amb tant o més interés que la desenvolupada i, a més a més, es va dissenyar una certa "metodologia" per abordar-les. Encara que s'han publicat nombrosos treballs al respecte i a més a més s'han llegit al menys cinc tesis doctorals que es poden considerar continuadores –al menys, en part– d'aquella memòria, queden encara pendents no poques qüestions que podem considerar del màxim interés.

Una d'elles, potser la de major repercussió en les qüestions docents del batxillerat i dels fonaments de l'anàlisi matemàtica, tant pel seu interés directe com per la relació amb el concepte d'integral, és la que dóna títol a la nostra memòria. Hem estés el model de van Hiele al concepte d'**àrea** formulant els descriptors corresponents i suggerint accions metodològiques que afavorisquen el progrés en el nivell de raonament. Així mateix, hem analitzat la relació amb el procés d'ensenyança-aprenentatge de la integral. Tot allò amb l'esquema de treball que, com hem dit abans, s'ha reiterat a les memòries de doctorat anomenades.

En concret, hem fet ús, com *mecanisme* per aproximar-nos a la fase-1 del concepte, una *descomposició en franjes* per a un trapeci mixtiline, amb component visual i numèrica. Eixa component numèrica suposa tota una novetat respecte les extensions del model abans dites. Utilitzant com ferramenta una entrevista socràtica, en l'habitual procés de *feed-back* d'aquestes entrevistes, hem aconseguit

arribar a la formulació dels descriptors que després hem corroborat fent ús del guió definitiu en unes vint entrevistes.

A més a més, hem desenvolupat una prova escrita que, sense la precisió de l'entrevista però amb altres avantatges evidents, utilitzant les ferramentes estadístiques apropiades, ens han permés verificar l'existència dels nivells de raonament prèviament descrits i la possibilitat de detectar-los.

Així, amb aquest treball ha quedat provat que el model de van Hiele pot descriure el procés de raonament en altre pilar més de l'anàlisi matemàtica. I també evidencia que determinades rutines presents als sistemes educatius no afavoreixen el correcte aprenentatge dels conceptes. Hi ha massa estudiants que no han aconseguit el nivell III encara que pel seu nivell acadèmic haurien d'haver-lo fet, però l'èmfasi en qüestions mecàniques o algebraiques disminueixen la possibilitat de realitzar altre tipus de treball més adequat per a que es produisca una bona comprensió. És a dir, s'ha evidenciat que la destresa amb les eines algebraiques no va lligada a un nivell de raonament elevat. En conseqüència, es torna a plantejar l'ús de la visualització per a crear situacions d'aprenentatge que conduisquen al progrés en el nivell de raonament.

ABSTRACT

THE EXTENSION OF VAN HIELE'S MODEL TO THE CONCEPT OF AREA

The extension of Van Hiele's model outside the geometrical sphere and of the basic educational levels has been an opened question up to the moment when Professor LLorens read his thesis in 1994 at the Polytechnic University of Valencia. Here the concept of local proximity was applied to one of its most visual and geometrical manifestations: the tangent line to a specific point in a curve. Some other possibilities were displayed there, together with a specific methodology to be used, in a similar or more interesting way than this present thesis. Even though a lot of works related to this topic were published and at least five doctoral theses were written, as a progressive extension of the previous one, there are some questions which are still considered to represent a high level of interest.

One of these questions, maybe the most relevant for the A level teaching and its mathematical foundations, is represented by the title of this thesis, both for its direct interest and the concept of whole. We have extended Van Hiele's model to the concept of area by formulating the corresponding descriptors and proposing methodological actions which are in favour of the progress of the reasoning process.

We have used the decomposition into areas of a mixtilinear trapezium, with visual and numerical components, as a mechanism to approach the first stage of the concept. The numerical component, related to the previous extensions, represents a breakdown. Using as a tool a Socratic interview, in the daily process of feedback of these interviews, we have reached a formulation of the descriptors which later on has been confirmed by means of a standard guideline answered in at least twenty interviews.

Apart from that we have developed a written test, which lacks the precision of an interview but with other advantages represented by the use of accurate statistic tools. This test enabled us to verify the existence of two levels of reasoning, previously described, and the possibility to detect them.

Hence this work has been able to prove that Van Hiele's model is able to describe the process of reasoning in other pillar of the mathematical analysis. Also it highlights that some educational routines do not favour the right learning of some concepts. There is a high number of students who, despite their academic results, have not reached the third stage. The emphasis in mechanical or algebraic topics decreases the possibility of realizing other type of work which may be more appropriate for a better comprehension. That is to say that, the skill in algebraic tools is not linked to a high level of reasoning. As a consequence, the use of visuals is reopened to debate in order to favour the create learning situations which lead to the increase in the level of reasoning.

ÍNDICE

Capítulo 1: La Educación Matemática y el modelo de van Hiele 1

Capítulo 2: El área (de una figura plana) 47

Capítulo 3: Objetivos de la memoria 65

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Tablas

Figuras

CAPÍTULO 1

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y EL MODELO DE VAN HIELE

1.0. El marco de la investigación en Educación Matemática

En este capítulo vamos a tratar diferentes aspectos de la Educación Matemática, tales como su evolución, su objeto de estudio y diferentes modelos educativos. Una vez ubicados en el marco de la investigación, centraremos nuestra atención en el modelo de van Hiele, pues es el modelo en el que se basa el estudio desarrollado en esta memoria.

1.0.1. La Educación Matemática

Hace medio siglo que la Didáctica de las Matemáticas se convirtió en una disciplina académica en la que intervienen otras como la sociología, la psicología, la antropología, la pedagogía y, desde luego, las propias Matemáticas. Eso es así porque muchas cuestiones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje deben considerarse desde todos estos aspectos.

La investigación en Educación Matemática empezó a cobrar importancia en la segunda mitad del siglo XX, por lo que se considera como un área relativamente joven. En sus comienzos seguía manteniendo una estrecha relación con la psicología y la pedagogía. Muestra de ello es el hecho de que el *conductismo* (estímulo-respuesta) tuviera en aquel momento una influencia importante en su desarrollo.

En efecto, a finales de los años cincuenta los esfuerzos se centraron en fijar unas pautas que rigieran la investigación de manera que los estudios estuviesen relacionados entre sí. Esta nueva actitud y el trabajo de Piaget sentaron las bases para que en los años sesenta se produjera un importante avance en la materia en Estados Unidos con la creación de revistas y organizaciones específicas.

Generalmente, en aquellos años, la pedagogía de las matemáticas se identificaba con la *claridad* de la exposición conceptual y trataba de medir la eficacia de la enseñanza a través de test. Posteriormente, con el desarrollo de la ciencia cognitiva, fue tomando fuerza el hecho de que hay otros aspectos a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En los años setenta y ochenta se produjo una reacción contra el conductismo gracias a la influencia de la psicología cognitiva. El modelo cognitivo incluye la idea de formación de los conceptos según el esquema acción-proceso-objeto y amplía el campo de estudio que, hasta ese momento, se había limitado a cuestiones y niveles elementales. Los métodos de investigación empiezan a integrar aspectos cualitativos (como las entrevistas clínicas) intentando identificar los aspectos y las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en cada concepto. Este tipo de herramientas, al identificar las desconexiones que presentan los estudiantes entre los conceptos y las imágenes que crean sobre ellos, permite enfocar los esfuerzos de forma que se corrijan o eviten las informaciones negativas.

En el momento actual el objetivo de la enseñanza de las matemáticas se basa en la idea de que "*saber matemáticas significa hoy hacer matemáticas, y que es mediante la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones, la investigación y la exploración, como los estudiantes llegan a saber matemáticas*" (Turégano, 2006, p. 36).

1.0.1.1. El objeto de la investigación

La investigación en Educación Matemática, mediante trabajos tanto teóricos como experimentales, trata de clarificar, por un lado, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, por otro lado, desarrolla estrategias docentes que tienen en cuenta los factores que tienen que ver en dichos procesos, es decir:

- aspectos específicos de las Matemáticas (tanto en áreas de conocimiento como en su método, tales como demostraciones, definiciones, etc.)
- factores cognitivos (resolución de problemas, errores de concepto, etc.)
- factores psicológicos, ambientales o metodológicos (tales como la motivación, la visualización de los conceptos, las clases, trabajo en grupos, uso de tecnología o material escrito, etc.)
- propuestas de cambios (individuales o institucionales, de programas o de contenidos, etc.)
- factores culturales (procedencia cultural o social, influencia de factores extraeducativos, etc.)

Partiendo de una reflexión sobre las propias Matemáticas y considerando los procesos que surgen en su enseñanza y aprendizaje, la investigación en Educación Matemática se ocupa de establecer propuestas que mejoren estos procesos teniendo en cuenta los diversos factores mencionados.

Como hemos dicho, si durante los años setenta se asociaba la pedagogía de las Matemáticas con la claridad en las explicaciones, poniendo todo el esfuerzo en la presentación *lógica* de los contenidos, más adelante y coincidiendo con el desarrollo de la ciencia cognitiva, se impone la idea de que "*una explicación lógica puede no ser apropiada para el desarrollo cognitivo del estudiante*" (Tall, 1991, p. 3). Esto no quiere decir, de ninguna manera, que la presentación de los contenidos deba ser ilógica, ni mucho menos. Lo que plantea es que hay otros muchos aspectos a tener en cuenta que son incluso más importantes que esa *claridad* en la explicación, que la mera corrección formal. Azcárate y Camacho reafirman las palabras de Tall diciendo que "*las investigaciones cognitivas están interesadas en estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico-formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante*" (Azcárate y Camacho, 2003, pp. 136-137). Todos los procesos que se activan en el estudiante durante su aprendizaje deben ser cuidados para que dicho aprendizaje se realice con éxito, entendiendo que es propio del estudiante y que el profesor debe dar las herramientas necesarias (información, prácticas, etc.) para conseguirlo.

La Educación Matemática no es una reflexión curricular, aunque en algunos casos pueda proponer o recomendar un cambio en el currículo, sino que los resultados apuntan a cambios metodológicos o a otras consideraciones. Uno de los aspectos de mayor trascendencia en los últimos años es un factor con componentes sociológicos: la tecnología. La proliferación no solo de aparatos tecnológicos sino de software específico para las matemáticas e, incluso, para su enseñanza y aprendizaje, abre un amplio abanico de posibilidades en la metodología de la enseñanza de las matemáticas que apenas existía veinticinco años atrás. Y, paralelamente, esa tecnología se ha hecho presente en nuestra vida cotidiana.

Hay tanta diversidad en los elementos de estudio y son tantos los factores a tener en cuenta que existen diversas tendencias dentro de la investigación en Educación Matemática (de algunas de ellas hablaremos más adelante). Si tenemos en cuenta el nivel de estudio de los estudiantes, observamos que existe una gran diferencia entre los contenidos trabajados en la educación primaria y los trabajados en los primeros cursos de universidad. No solo la dificultad en los contenidos mismos sino en la forma de razonamiento, la relación con conocimientos previos, la capacidad o necesidad de abstracción, etc., hacen que el elemento de estudio de la Educación Matemática para cada nivel sea sustancialmente diferente. De hecho, aunque inicialmente los estudios se centraban en la educación primaria, más tarde surgió la necesidad de ampliarlos hacia niveles superiores. Desde otra perspectiva, si enfocamos el estudio en las "capacidades" propias de cada estudiante, la casuística es tan elevada como el número de estudiantes con los que tratemos. En los últimos años ha tomado una gran relevancia la teoría de H. Gardner sobre las inteligencias múltiples (por ejemplo, *Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica*, 1995): Ya no se dice que un estudiante es inteligente o deja de serlo, sino que se analiza su rendimiento según diferentes tipos de inteligencia (emocional, espacial, lógico-matemática, etc.) y en consecuencia se consideran diferentes formas de aprendizaje según sea el desarrollo de esas inteligencias.

1.0.1.2. Metodología específica

Los métodos de investigación específicos de la Educación Matemática son muy diversos y se componen básicamente de dos tipos de procedimientos: cualitativos y cuantitativos. Dentro de los procedimientos cualitativos podemos considerar las *entrevistas clínicas,* estudios individuales que permiten observar el proceso mental que se produce durante el aprendizaje. Mediante el trabajo individual o en grupos reducidos se puede llegar a percibir aspectos (dificultades, errores, progresos, etc.) que en grupos grandes pasarían desapercibidos. Con la información y los datos extraídos de estas pruebas se pueden establecer conclusiones que permitan modificar o arrojar luz sobre el proceso de aprendizaje de un problema o situación. Los procedimientos cuantitativos están representados por todos los estudios estadísticos que se aplican ante diversas experiencias. Por ejemplo, cuando se aplica un cambio educativo –ya sea a nivel de metodología o de contenidos– y se quiere valorar su repercusión analizando y comparando un grupo experimental frente a otro de control.

La Educación Matemática no es una simple intuición sino que se basa en el estudio y la observación. Es fundamentalmente un “trabajo de campo”. La Educación Matemática evoluciona mediante la observación mientras que los resultados matemáticos evolucionan y se demuestran mediante razonamientos lógicos. Indiscutiblemente, la investigación en Matemáticas es sustancialmente diferente a la de la Educación Matemática, lo que no quiere decir que carezca de rigor y seriedad. El objeto de estudio en ambos casos es diferente y eso es condición suficiente para justificar sus diferencias. Una demostración o un resultado en Matemáticas es válido mientras no se descubra un error. En Educación Matemática cualquier resultado puede ser válido pero es importante que quede corroborado por otros estudios. Y si aparece una información adicional o nuevos factores (el propio objeto de estudio es cambiante) puede que aquello que parecía ser un resultado firme pase a ser nuevamente discutible.

En los trabajos clásicos de Matemáticas los investigadores buscan y necesitan la certeza absoluta de los resultados y se basan en razonamientos lógicos de tipo formal para obtenerlos. En Educación Matemática estudiamos y analizamos los procesos de pensamiento utilizados en esta ciencia, lo cual hace que los resultados no puedan ser exactos dado que el pensamiento no es una magnitud cuantificable. Las demostraciones tienen un carácter menos definido, pues se obtienen mediante la observación y la experimentación. Las conclusiones que se obtienen son globales, en el sentido de que se refieren a una gran mayoría de individuos, pero parece claro que siempre habrá personas que se salgan de las líneas generales y en este sentido la certeza nunca puede ser absoluta.

1.0.1.3. El investigador en Educación Matemática

¿Quién debe encargarse de la investigación en Educación Matemática? Esta es una pregunta que a veces genera una cierta controversia. No se sabe por qué las Matemáticas son un área sobre la que *todo el mundo* se siente dispuesto a opinar, valorar y juzgar tanto en su planificación como en su didáctica y su evaluación. Pero si somos conscientes de que, como hemos dicho anteriormente, uno de los aspectos clave para resolver las dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje radica en los propios contenidos matemáticos, queda claro que este campo de estudio pertenece a los matemáticos. "*¿Quién debe hacer este tipo de investigación? Los matemáticos. Porque, en caso contrario, ¿quién va a investigar cómo los estudiantes deben aprender álgebra?*" (Selden y Selden, p. 442). Aunque también es cierto que *no todos* los matemáticos, pues adentrarse en este mundo requiere de un grado de "inmersión" en el razonamiento del estudiante que no es general a todas las personas con amplia formación en Matemáticas. Es más, como refiere Turégano en *Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula* (2006) sobre *Dreyfus*, éste "*defiende que el profesor que ha hecho investigación en Didáctica de las Matemáticas entiende mejor los procesos de aprendizaje de los estudiantes de Matemáticas*".

Hoy en día existen corrientes que valoran métodos de enseñanza de las matemáticas ideados por personas ajenas a la materia. Uno de ellos está extendiéndose de manera generalizada en los centros de educación primaria: el método "Entusiasmat". En su web se puede ver que las referencias que aparecen en la justificación del proyecto son *Decroly*, *Montessori*, *Doman*, *Elmore* y *Tejada*, todos especialistas en medicina, neurología o pedagogía con mayor o menor reconocimiento de la comunidad científica, pero **ninguno** con especialidad en Educación Matemática. Pólya dice en este sentido: "*Mis opiniones son el resultado de una larga experiencia. (...) La enseñanza no es, en mi opinión, simplemente una rama de la* *psicología aplicada, al menos por el momento. La enseñanza está correlacionada con el aprendizaje. El estudio experimental y teórico del aprendizaje ha sido una rama extensa e intensamente cultivada por la psicología. A pesar de todo existe una diferencia. Nosotros estamos involucrados principalmente con complejas experiencias de aprendizaje, tales como el aprendizaje del Álgebra o el aprendizaje de la didáctica, y en sus amplios efectos educativos. Los psicólogos, sin embargo, dedican más su atención y hacen su mejor trabajo sobre situaciones simplificadas y muy acotadas. Por tanto, la psicología del aprendizaje puede proporcionar interesantes ayudas, pero no puede pretender tener la última palabra sobre los problemas de la didáctica (de las Matemáticas)*" (Pólya, 1981, pp. 99-100).

1.0.2. Teorías de aprendizaje y su influencia en la Educación Matemática

Las diferentes corrientes del aprendizaje del siglo pasado se pueden clasificar en dos grupos: conductismo y cognitivismo. En cada uno de ellos se encuentran diferentes modalidades que, aunque comparten una base común, muestran también diferencias entre sí.

1.0.2.1. Conductismo

El conductismo es una teoría que trata de entender los fenómenos psicológicos humanos partiendo de principios muy generales obtenidos en el estudio de la conducta de los animales. Considerando el entorno como un conjunto de estímulos-respuestas, defiende el uso de procedimientos experimentales para estudiar la conducta (comportamiento observable).

E. L. Thorndike es considerado el primer psicólogo de la educación. A lo largo de su carrera hizo importantes contribuciones al estudio de la inteligencia y de la medida de las capacidades, a la enseñanza de las matemáticas y de la lectura y escritura, y a la manera en que lo aprendido se transfiere de una situación a otra. Además, desarrolló una importante teoría del aprendizaje que describe de qué forma los estímulos y las respuestas se conectan entre sí. Mediante el uso de experimentos de aprendizaje con animales, Thorndike formuló su "*ley del efecto*" (premio/castigo) y los *principios del refuerzo*, que aplicó al desarrollo de técnicas de aprendizaje para utilizar en el aula.

A partir de 1920 el conductismo fue el paradigma de la psicología académica, sobre todo en Estados Unidos. Hacia 1950 el nuevo movimiento conductista había generado numerosos datos que condujeron a la formulación de diversas teorías sobre el aprendizaje y el comportamiento basadas en experimentos de laboratorio y no en observaciones introspectivas.

Enmarcada en esta corriente se inicia la investigación en Educación Matemática. En esta primera etapa los estudios eran de carácter aislado y sin un modelo unificador, por lo que había poca relación entre ellos. Estaban enfocados en cuestiones aritméticas o algebraicas de nivel elemental. La herramienta fundamental de estudio era el test y se evaluaba la eficacia del proceso de enseñanza según la mejora en los resultados de ese tipo de pruebas. La versión actual del conductismo es la teoría desarrollada por Robert Gagné, según la cual la instrucción se reduce a una secuencia de tareas que es necesario ir cumpliendo en un orden a partir de la adquisición de ciertas destrezas. Se trata de una teoría orientada hacia los resultados y las habilidades, no hacia los procesos de aprendizaje por parte de los estudiantes.

1.0.2.2. Cognitivismo y constructivismo. Autores relevantes de la Educación Matemática

Como contraposición a las ideas conductistas sobre las que trabaja Thorndike, en 1935 W. Brownell argumenta que la instrucción matemática necesita basarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos. Por tanto es necesario explorar y analizar detalladamente los procesos cognitivos. Se abre así una nueva forma de trabajo en la investigación, con un enfoque diferente, a partir del cual se desarrollan diversas teorías y modelos educativos entre los que se encuentra el modelo de van Hiele, que es la base de esta memoria.

La estructura que se deriva de la concepción cognitiva del proceso de aprendizaje provoca la división en etapas o niveles, lo que caracteriza los "*modelos de aprendizaje jerarquizados*", entre los que se encuentra el modelo de van Hiele, el análisis de Pólya y las taxonomías por objetivos de Bloom, por ejemplo, así como diferentes trabajos entre los que destacaremos los realizados por Piaget, que son la base para la teoría de aprendizaje de Dubinsky.

Vamos a exponer brevemente algunas de esas maneras de analizar los procesos cognitivos del aprendizaje de los conceptos matemáticos, más o menos complejos, que se utilizan en la investigación así como los autores más relevantes en cada caso. Estos modelos son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo. Tienen como objetivo mejorar la eficiencia del proceso de enseñanza-aprendizaje.

George Pólya dedicó su trabajo a conocer los mecanismos involucrados en los procesos mentales que se dan durante la comprensión, aprendizaje y enseñanza de la resolución de problemas, aspecto que considera clave de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Para Pólya la resolución de problemas es como un arte de carácter práctico y, por tanto, *solo puede aprenderse por imitación y práctica*. En 1945 publicó uno de sus primeros trabajos ("*How to solve it*", 1973) dedicado a este tema, que se ha convertido en todo un clásico. Algunos investigadores consideran a Pólya como quien "*más profundamente ha influenciado últimamente no solo la enseñanza de las matemáticas sino nuestra visión de las matemáticas en sí mismas. Todos los esfuerzos de Pólya para ayudar a los estudiantes y a los profesores derivan de su visión de que el mejor aprendizaje de las matemáticas se da cuando vemos su nacimiento, tanto siguiendo las etapas de sus descubrimientos históricos como realizando esos descubrimientos por nosotros mismos. Por tanto, ha buscado que los estudiantes vieran las matemáticas como algo en cuya construcción habían de participar y no simplemente como un producto terminado*" (Kilpatrick, 1987, p. 298). En su descripción del proceso de aprendizaje se encuentra el principio de las *fases consecutivas*, es decir, etapas por las que transcurre ese proceso de manera similar a las fases que veremos más adelante en el modelo de van Hiele.

Las taxonomías de aprendizaje de **Benjamin Bloom** se encuadran dentro de los modelos de aprendizaje jerarquizado. Bloom define como objetivos de conducta de los estudiantes "*los caminos a través de los que los individuos actúan, piensan o sienten como resultado de su participación en alguna unidad de instrucción*" (Bloom, 1956, p.12). Estos objetivos de conducta se organizan de forma jerárquica, del más sencillo al más complejo, de la siguiente manera:

1 Conocimiento, 2 Comprensión, 3 Aplicación, 4 Análisis, 5 Síntesis, 6 Evaluación

Es **Piaget** quien, con su trabajo dedicado a explicar el desarrollo de los conceptos matemáticos en los niños, sienta las bases del constructivismo. Ejerció una enorme influencia, especialmente a partir de 1950, cuando se hicieron notorias las deficiencias de la teoría conductista del aprendizaje, lo que llevó a buscar métodos más cualitativos. Se conoce como constructivismo un conjunto de teorías de aprendizaje (y no un método de enseñanza) que los profesores pueden aplicar en las aulas. Se trata de dar un nuevo enfoque a las clases intentando que los estudiantes construyan su propio conocimiento a partir de actividades adecuadas que habrán sido previamente seleccionadas. Esta teoría del aprendizaje agrupa varias escuelas con un referente común: *el estudiante construye su aprendizaje a través de las relaciones entre los planteamientos del profesor y sus estructuras previas*.

La estructura cognitiva individual es una representación mental del conocimiento matemático que incluye todos los atributos, procesos y algoritmos de un concepto, así como las relaciones entre conceptos. Esa estructura cognitiva se construye en la interacción con otros individuos (profesor y estudiantes). El aprendizaje se da, pues, en la corrección y en la ampliación de estructuras cognitivas previas del estudiante. La *abstracción reflexiva* es un término acuñado por Piaget para describir esa construcción de las estructuras lógico-matemáticas por un individuo durante el periodo de desarrollo cognitivo.

Dubinsky en 1988 adapta algunos aspectos de la teoría de Piaget para desarrollar su teoría de aprendizaje sobre la adquisición de los conceptos matemáticos a través de un proceso de abstracción reflexiva. Elaboró una descripción de las construcciones mentales específicas que el estudiante debe realizar con el fin de progresar en su entendimiento de un concepto. En total identificó cuatro tipos de construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y una serie de mecanismos que los interrelacionan. Esta teoría se conoce como APOE o APOS (*Action Process Object Schema*)

Ed Dubinsky lidera un grupo de investigadores denominado RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*) que propone un modelo cognitivo consistente en las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. El resultado de este análisis teórico se denomina *descomposición genética*. "*La descomposición genética de una noción matemática no es única y proporciona una* *trayectoria posible del estudiante para la formación del concepto, sin embargo no tiene que ser representativa de todas las trayectorias posibles que pueden realizar los estudiantes.*" (Boigues et al, 2010, p. 259)

Aunque hablaremos detenidamente del modelo de Vinner en el punto 1.3, incluimos en este repaso a las corrientes cognitivas la distinción que establecen **Tall** y **Vinner** (1981) "*entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos*". Denominan *concepto-imagen* a los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y *concepto-definición* a la definición formal del mismo. La concordancia entre ambos *conceptos* y la forma en la que el proceso cognitivo recurre a cada uno de ellos para dar respuesta a una situación, marcarán la correcta asimilación del concepto tratado o las dificultades de comprensión sobre él.

Para complementar este recorrido teórico de las investigaciones cognitivas acerca del conocimiento matemático superior, podemos citar la teoría de las representaciones semióticas desarrollada por **Duval**, quien considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica.

Se consideran como registros de representación semiótica aquellas producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significados y de funcionamiento. En Educación Matemática es una constante la articulación de diferentes registros semióticos en el uso de un concepto o proceso. Como ejemplo citaremos que una función se puede definir mediante su representación gráfica, a través de un enunciado, con una tabla de valores o usando una expresión algebraica, por ejemplo, lo que conjuga cuatro registros diferentes.

Los resultados de la investigación en Educación Matemática realizados en los últimos años fortalecen la postura de que el uso de diferentes registros de representación semiótica favorece el aprendizaje de una materia. En este sentido ya apuntaba R. Duval en "*Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée*" (1993) que "*toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa*" y "*la comprensión (integradora) de un contenido conceptual está* *basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión*".

No puede haber dudas de que el tema tratado en este trabajo relaciona los registros gráfico, algebraico, numérico y verbal. Tal como indican Camacho, Depool y Garbin (2008, p. 36), "*Duval argumenta que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento en el que haya una coordinación libre de contradicciones en, por lo menos, dos diferentes registros de representación semiótica del objeto. Al analizar el uso de los registros de representación semiótica, se deben tener en cuenta el reconocimiento del registro, las transformaciones en el interior de éste* (*tratamientos*) *y la conversión entre ellos*". En consecuencia deberemos preocuparnos por relacionar los registros señalados con el fin de crear una imagen del concepto más consolidada.

Todas las contribuciones destacadas en este punto tienen como denominador común haber servido de punto de partida a otras contribuciones, líneas de trabajo o escuelas especializadas desarrolladas con posterioridad. Cada una de estas aportaciones singulares, aunque diferentes en su planteamiento inicial, tienden a diluirse en algunos aspectos y pueden relacionarse unas con otras. En este sentido, el desarrollo de esta memoria va a ir mostrando cómo unas propuestas y otras se pueden complementar para estudiar y describir el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área de una figura plana. Por ello, en este primer capítulo centraremos nuestra atención en la descripción del modelo de van Hiele y el *modelo* de Vinner. En el capítulo 3 estableceremos un objetivo referente a la relación entre ambas propuestas que quedará constatado en el capítulo 4. También haremos referencia a la teoría de Duval cuando analicemos el uso de la componente numérica del área en nuestro estudio, elemento diferenciador de otros trabajos similares.

En el capítulo 2 nos ocuparemos del propio concepto de estudio y sus particularidades. En los siguientes capítulos de la memoria (objetivos, parte experimental y conclusiones), además de tratar el resultado central de nuestro trabajo, analizaremos, entre otras cosas, las dificultades que surgen en el proceso de enseñanza-aprendizaje y las vías de solución que se pueden dar, teniendo en cuenta que no solo la actitud del estudiante es importante, sino que es fundamental el diseño de actividades y experiencias que realice el profesor para lograr la eficiencia en ese aprendizaje.

1.1. El modelo de van Hiele

En los años cincuenta, el matrimonio holandés formado por Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, ambos profesores de educación secundaria, observaron que las tareas o problemas que proponían a sus estudiantes requerían, a veces, el uso de un vocabulario o propiedades que iban más allá de su nivel de razonamiento. Algo que habían leído ya en algunos trabajos de Piaget. A partir de su propia experiencia elaboraron un modelo de enseñanza que explica cómo se produce la evolución del razonamiento de los estudiantes y sugiere un método para que el profesor ayude a sus estudiantes a mejorar la calidad de ese razonamiento.

Según expresa el propio van Hiele:

"*Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los estudiantes no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión, podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: «no es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada?» En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviese hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento.*" (van Hiele, 1986, p. 39)

Para tener una idea de qué son esos niveles y cómo se puede progresar en ellos, el propio van Hiele explica así la existencia de los niveles de pensamiento en la enseñanza de la geometría:

"*Se dice que uno ha alcanzado determinado nivel de pensamiento cuando una nueva ordenación mental respecto de ciertas operaciones le permite aplicarlas a nuevos objetos. No se puede llegar a estos niveles con el estudio; sin embargo, el profesor puede, mediante una selección apropiada de tareas, crear una situación ideal para que el estudiante alcance un nivel de pensamiento superior. Se puede afirmar además que la consecución* *de un nivel superior aumenta considerablemente el potencial del estudiante, mientras que resulta muy difícil que un estudiante vuelva a caer a un nivel de pensamiento inferior. En cambio, la materia de estudio se suele olvidar muy fácilmente."* (van Hiele, 1957, p. 88)

En este apartado recogemos los elementos del modelo de van Hiele que tienen una relación más directa con los objetivos de esta memoria. En *Hoffer* (1983, pp. 205-227) se puede encontrar una descripción más detallada del modelo.

1.1.1. Qué es un modelo educativo

Un modelo educativo da una explicación *global* al proceso del aprendizaje. El término *modelo* se usa en el mismo sentido que se hace cuando se habla de un modelo económico o un modelo físico, con la diferencia de que en nuestro caso el objeto de estudio es el proceso de enseñanza-aprendizaje. Cuando en el apartado anterior hablábamos sobre la investigación en Educación Matemática, ya hemos dejado claro que el hecho de trabajar con seres humanos implica un cierto grado de imprecisión y eso afecta también a los modelos educativos. En este sentido, no se puede pretender que un modelo sea eficaz bajo cualquier circunstancia para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los modelos educativos *prueban* su eficacia desde un punto de vista general o global, lo que no excluye la posibilidad de que no sean útiles para algunos estudiantes en particular o si varían las condiciones de aplicación. Es esta característica la que motiva y justifica la investigación encaminada a perfeccionar un modelo.

El desarrollo de un modelo educativo se compone de tres etapas diferenciadas:

Observación: la primera etapa detecta la repetición de determinados patrones de comportamiento en los estudiantes bajo unas condiciones concretas.

Planteamiento: acorde a las regularidades observadas se definen y formulan las características del modelo, que describen cómo se produce el desarrollo o aprendizaje de los estudiantes.

Análisis: se realizan diversas experiencias que corroboren o rectifiquen los planteamientos hechos.

La validez y eficacia de un modelo será tanto mayor cuanto más general y duradera sea su aplicación, lo que depende del rigor con el que se realicen las fases que conducen a la definición del mismo.

El modelo de van Hiele siguió esas etapas, de tal manera que la versión actual es el resultado de diversas revisiones del modelo inicial. En los últimos años se ha *extendido* con éxito el campo de aplicación del modelo a contenidos de análisis matemático en cursos preuniversitarios y universitarios, pese a que en sus inicios el matrimonio van Hiele lo diseñó para contenidos de educación primaria y en temas de geometría. Nuestra memoria corresponde a este tipo de extensiones que se vienen dando desde la década de los noventa. Esta probada generalidad del modelo le confiere la solidez necesaria para recurrir a él como una descripción de las dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje de muchos contenidos, principalmente, con base geométrica.

1.1.2. Descripción del modelo

El modelo educativo establecido por van Hiele se puede enunciar de la siguiente manera (Llorens, 1994, p.18):

- Existen distintos niveles de razonamiento de los estudiantes, referidos a las Matemáticas.
- Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
- Por tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.
- El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que ese progreso se haga de un modo rápido y eficaz.

Los elementos y procesos enunciados en el modelo, se estructuran en sus tres componentes principales: el "***insight***", los **niveles de razonamiento** y las **fases de aprendizaje**.

El ***insight***, se puede traducir como *comprensión*, pero se interpreta de una forma más clara en la definición presentada por Ford y Resnik (1990) como *el reconocimiento de la estructura del problema*, que aceptaremos añadiendo *que tiene como propósito ayudar a los estudiantes a desarrollar la percepción*. Entendida en un lenguaje más actual en la enseñanza, sería adecuado definirlo como la *competencia* del estudiante en el tema tratado. En este sentido, la finalidad del *insight* es conseguir que los estudiantes sean competentes, es decir, capaces de actuar de forma correcta y adecuada en situaciones no familiares, con las acciones requeridas en cada situación. Los estudiantes aprenden qué tienen que hacer, por qué tienen que hacerlo y cuándo deben hacerlo, y son capaces de aplicar su conocimiento para resolver problemas.

En esa adquisición de la "comprensión" surge el segundo elemento, **los niveles de razonamiento**: Como ya hemos dicho, según van Hiele existen distintos niveles en el razonamiento de los estudiantes, referidos a las Matemáticas. Cada nivel supone una forma de comprensión, *un modo de pensamiento particular* en el que el estudiante puede comprender y razonar. Por tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante para que pueda ser comprendido y, una vez afianzado en su nivel, intentar el progreso al siguiente nivel.

Para eso están **las fases de aprendizaje**. Mediante las fases de aprendizaje los estudiantes pueden progresar de su nivel al inmediatamente superior. *Básicamente, las fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza* (Esteban, Vasco y Bedoya, 2004, p. 151); son: Indagación (*inquiry*); Orientación dirigida (*directed orientation*); Explicitación (*expliciting*); Orientación libre (*free orientation*); Integración (*integration*). Pero, en todo caso, el progreso en el nivel de razonamiento se produce cuando el estudiante realiza verdaderas experiencias de aprendizaje (tal como se establece en el cognitivismo del que deriva el propio modelo). Es decir, un estudiante progresará de un nivel de razonamiento al siguiente si realiza experiencias de aprendizaje propias del nivel superior pero que de alguna forma se apoyen en el que tiene en ese momento.

1.1.3. Niveles de razonamiento

Antes de entrar en la parte *formal* de los niveles de razonamiento (nomenclatura y descriptores) conviene aclarar algunas ideas. Los niveles de razonamiento no coinciden con los niveles educativos, aunque es cierto que en los diferentes niveles escolares la forma de expresarse, de trabajar y de razonar es distinta y que lo *razonable* sería que conforme se avanza en los cursos académicos el nivel de razonamiento sea superior. El nivel de pensamiento es más complejo que el nivel de desarrollo o madurez o el nivel académico: Hablamos de una habilidad del pensamiento, de una forma de razonar. Por otro lado, el nivel de razonamiento se estudia para cada contenido de manera independiente y no se puede extrapolar a otros contenidos, es decir, si un estudiante está en un nivel para un contenido puede presentar otro nivel diferente para otro contenido distinto. Si bien es cierto que el progreso en el nivel de razonamiento sobre un concepto puede favorecer el progreso en otros relacionados con él, e incluso se puede esperar un mismo nivel en conceptos que involucren procesos de razonamiento similares.

1.1.3.1. Nomenclatura de los niveles

La división y nomenclatura establecidas para los niveles inicialmente han ido variando en diferentes trabajos, tanto por parte de van Hiele como de otros autores. En un primer momento, el matrimonio van Hiele enumeró cinco niveles diferentes (Nivel 0 o básico y niveles I, II, III y IV). Nosotros vamos a utilizar la nomenclatura descrita por Llorens (1994) y adoptada por diversos autores (Esteban (2000), Navarro (2002)) que es la siguiente:

Nivel 0, predescriptivo;

nivel I, de reconocimiento visual;

nivel II, de análisis;

nivel III, de clasificación y relación;

nivel IV, de deducción formal.

El propio van Hiele, en una revisión de su teoría (1986), destaca la importancia de los tres primeros niveles (I, II y III). Asimismo, señala que es difícil discernir niveles superiores que además solo tienen interés teórico. En nuestro caso hemos descrito el nivel 0 y nos hemos centrado en la descripción y reconocimiento de los niveles I, II y III.

1.1.3.2. Características de los niveles (descriptores)

Entendemos por **descriptores** de los niveles de van Hiele las principales características que permiten reconocer cada uno de esos niveles de razonamiento matemático a partir de la actividad de los estudiantes. Mediante los descriptores se puede ubicar a cada estudiante en el nivel de razonamiento en el que se encuentra, pues indican las acciones que es capaz de llevar a cabo sobre el concepto. Además, como muestran qué dificultades tienen para progresar al siguiente nivel, permite focalizar los esfuerzos para poder ayudarles en su aprendizaje. El enunciado y justificación de los descriptores de los niveles para cuestiones distintas a la geometría se podía considerar, hasta 1994, como un *problema abierto*. Pero, como veremos posteriormente, desde el citado trabajo de Llorens (1994) hasta la actualidad, se ha extendido el modelo fuera de la geometría aunque sin prescindir totalmente del ambiente geométrico.

Los siguientes son ejemplos de descriptores de los niveles (en el contexto geométrico habitual):

NIVEL 0 (básico o predescriptivo)

Los estudiantes en este nivel distinguen diferentes elementos geométricos básicos tales como punto, recta, ángulo...

NIVEL I (de reconocimiento visual)

En este nivel hay un reconocimiento de las figuras por su apariencia global, pero no se establecen relaciones ni generalizaciones. Por ejemplo, reconoce un cuadrado por su "forma" pero no por sus ángulos y diagonales. Tampoco considera el cuadrado como un rectángulo, sino que lo considera una figura diferente. Describen las figuras geométricas por semejanza con otros objetos.

NIVEL II (de análisis)

En este nivel son capaces de analizar las partes o elementos que componen una figura geométrica y las propiedades que tienen. Por la observación de esas partes son capaces de deducir otras propiedades de esas figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase. Pero no relacionan distintas propiedades de las figuras por lo que no harán clasificaciones de esas figuras basándose en esas propiedades. Las deducciones tienen un carácter informal.

NIVEL III (de clasificación, de relación)

Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades. Reconocen que unas propiedades se deducen de otras. Pueden clasificar lógicamente y aprender las relaciones entre las distintas clases de figuras. Son capaces de establecer generalizaciones, seguir o establecer una secuencia de razonamientos, pero el tipo de argumentación es informal (aunque correcta) y recurren a argumentos manipulativas porque no comprenden la necesidad de una formalización.

NIVEL IV (de deducción formal)

Los estudiantes conocen la importancia de la precisión, el rigor y de la formalización. En este nivel hay un grado de rigor matemático que no se encuentra en los anteriores porque pueden valorar propiedades tales como la consistencia de un sistema deductivo y la completitud de sus postulados. Son capaces de plantear distintas demostraciones de alguna propiedad o percibir que dos definiciones de un mismo concepto son equivalentes.

1.1.4. Caracterización del modelo: propiedades de los niveles

Los niveles de razonamiento deben cumplir una serie de propiedades para que sean entendidos como *niveles de van Hiele*. El propio enunciado de los descriptores marca algunas de esas propiedades. Existen diversas formas de denotar y diferenciar estas propiedades según diversos autores, aunque en el fondo recogen las mismas características. Nosotros vamos a utilizar los nombres y características usados por Usiskin en "*Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry*" (1982).

Propiedad 1: **Secuencialidad fija**

No se puede alcanzar un nivel sin haber superado el nivel anterior, es decir, el tipo de razonamiento de un nivel es la base sobre la que se construye o se consigue el nivel de razonamiento superior.

Propiedad 2: **Adyacencia**

Algunos elementos del pensamiento que se utilizan de forma implícita en el nivel n, se explicitan en el nivel $n+1$. Podemos reconocer por tanto una *estructura recursiva* en la clasificación por niveles. Teniendo en cuenta esta propiedad, debemos remarcar en los estudiantes esa habilidad que usan de manera implícita para utilizarla en otras situaciones. Para ello habría que diseñar tareas que requieran el uso de dicha habilidad, ya que la práctica repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar.

Propiedad 3: **Distinción**

La adquisición de un nuevo nivel de razonamiento requiere la reorganización y reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel anterior.

Propiedad 4: **Separación**

Dos personas que razonen en dos niveles diferentes no podrán entenderse. No solo por el lenguaje utilizado sino por las estructuras mentales asociadas al nivel.

Propiedad 5: **Especificidad del lenguaje**

Hay una estrecha relación entre el nivel de razonamiento y el tipo de lenguaje utilizado. La adquisición de un nivel de razonamiento superior confiere al lenguaje de mayor rigor y precisión. Mientras que en los niveles inferiores tanto la forma de hablar como los términos son más "coloquiales", a medida que aumenta el nivel de razonamiento se hace necesario usar términos más concretos y cuidados, así como frases más complejas y mejor estructuradas. Se adquiere mayor formalismo tanto en el razonamiento como en el habla.

Propiedad 6: **Consecución**

El progreso de un nivel al siguiente se consigue de forma gradual. Se puede mostrar la adquisición de algunos descriptores de un nivel sin haber alcanzado por completo los descriptores del nivel anterior, pero hasta que no se logre un nivel no se podrá alcanzar plenamente el siguiente (secuencialidad). Ante situaciones problemáticas o dudosas, el estudiante regresa a razonar conforme al nivel en el que se siente seguro (regresión). Esto provoca que algunos autores hablen de niveles intermedios, que corresponderían con esos procesos de transición de un nivel al siguiente.

1.1.5. Las fases de aprendizaje

En último lugar tenemos **las fases de aprendizaje** que, como ya hemos visto en 1.1.2, permiten progresar de un nivel al inmediatamente superior. Las características de cada una son:

Fase 1: **Indagación** (*inquiry*)

Esta primera fase sirve para detectar los diferentes niveles en el grupo y tener una idea de lo que los estudiantes conocen respecto al tema que se va a tratar. En este aspecto sería equivalente a una evaluación inicial actual. Las actividades propuestas no tienen por qué tener la finalidad de ser resueltas, pueden servir simplemente para situar la problemática a tratar o plantear diversas opciones que de otra forma el estudiante no se plantearía.

Fase 2: **Orientación dirigida** (*directed orientation*)

Durante esta fase las actividades están guiadas por el profesor para introducir los nuevos conceptos. El material de esta fase debería estar constituido por tareas cortas diseñadas para obtener respuestas específicas.

El objetivo es que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos. Se introduce el nuevo vocabulario y se ilustran las nuevas situaciones en referencia a los conocimientos previos. Los conceptos y estructuras características se deben presentar de forma progresiva pues en esta fase se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel al que se quiere llevar al estudiante.

Fase 3: **Explicitación** (*expliciting*)

En esta fase los estudiantes llegan a ser conscientes de las relaciones, intentan expresarlas con palabras y aprenden el lenguaje técnico asociado. Es importante que los estudiantes expliquen cómo han resuelto las actividades pues esto les permitirá revisar el trabajo realizado, sacar conclusiones y practicar y perfeccionar su forma de expresarse.

El papel del profesor en esta fase pasa a un segundo plano, observando y revisando las intervenciones de sus estudiantes.

Fase 4: **Orientación libre** (*free orientation*)

Los estudiantes aprenden, con actividades generales y abiertas, a encontrar su propio camino en la red de relaciones. Para perfeccionar el razonamiento en el campo de estudio, los estudiantes deben aplicar los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores.

Fase 5: **Integración** (*integration*)

Los estudiantes revisan y resumen lo que han aprendido para formarse una idea general de la nueva red de objetos y relaciones. En esta fase el profesor puede hacer una síntesis global que consolide los resultados obtenidos pero sin presentar nada nuevo.

Las fases y niveles del modelo guardan similitudes con otras propuestas didácticas de modelos jerarquizados vistos en 1.0.2.2 como son las fases de Pólya o la taxonomía de Bloom, pero van Hiele presenta sobre todo un elemento diferenciador: el lenguaje. El lenguaje usado por el estudiante se convierte en un indicador de su nivel de razonamiento. Al mismo tiempo, el lenguaje usado por el profesor debe adaptarse al nivel del estudiante pues dos personas que usen lenguajes de diferentes niveles no se podrán entender.

Otra diferencia entre la taxonomía de Bloom y la fases de aprendizaje de van Hiele estriba en aquello que *gradúan*. Mientras Bloom se refiere a la consecución de objetivos en la conducta del estudiante, el modelo de van Hiele se refiere el proceso por el que se puede progresar en el nivel de razonamiento. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar ese progreso, de forma que se haga de un modo rápido y eficaz.

1.2. Repercusión del modelo de van Hiele en la investigación en Educación Matemática

1.2.1. Piaget y van Hiele

Como ya dijimos en 1.1, el trabajo de los van Hiele comienza tras la lectura de algunos trabajos de Piaget y la constatación, por su propia experiencia, de algunas situaciones descritas por éste. Esta circunstancia lleva al hecho de que entre las dos teorías haya muchas similitudes. En los dos casos se plantea el progreso sobre conceptos espaciales y geométricos desde posiciones más inductivas y manipulativas (observables) hacia otras más deductivas y abstractas. También comparten la detección de diversos niveles (para Piaget: *inter*, *intra* y *trans*). Pero también resulta enriquecedora e interesante la detección de las diferencias existentes entre ellas. Podemos englobar estas diferencias en dos aspectos fundamentales para van Hiele: el lenguaje y la experiencia.

En el modelo de van Hiele el lenguaje es un elemento fundamental para la detección de los niveles. El nivel de razonamiento va ligado estrechamente al tipo de lenguaje. Como ya dijimos en 1.1.4, esa mejora del razonamiento confiere más precisión y rigor al lenguaje empleado. El propio van Hiele afirma que "*Piaget no reconoce el importante papel del lenguaje en el movimiento desde un nivel al siguiente*" (van Hiele, 1986, p. 6).

Para Piaget el aprendizaje matemático y el desarrollo intelectual están relacionados con el desarrollo biológico.: "*El aprendizaje está subordinado al desarrollo y no al revés*" (Piaget, 1967, p. 332). Pero van Hiele dice:

"*La imposibilidad de los niños para pensar lógicamente no procede de una falta de maduración, sino de una ignorancia de las reglas del juego de la lógica. El niño no tiene a su disposición las estructuras a partir de las cuales se originan las preguntas. No puede entender las cuestiones porque no ha terminado el proceso de aprendizaje que le guía al nivel de pensamiento requerido. Es importante la edad de los niños en cuanto a que deben haber tenido tiempo suficiente para llevar a cabo el necesario proceso de aprendizaje*" (van Hiele, 1986, p. 65).

La teoría de Piaget es una teoría del desarrollo, no del aprendizaje, por lo que no se plantea cómo conseguir un avance en el nivel de los estudiantes. Es una investigación de carácter genérico en la que se considera que el paso de un nivel a otro depende del desarrollo "biológico". Para van Hiele la acumulación de experiencias adecuadas es la que ayuda en el progreso del estudiante en los niveles.

1.2.2. Las ideas que subyacen en el modelo de van Hiele y la enseñanza de las Matemáticas en la actualidad

El modelo de van Hiele presenta una didáctica de las Matemáticas basada en la experiencia. "*La idea central del modelo de van Hiele, en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, es que la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia"* (Llorens, 1994, p.29). El progreso de un estudiante hacia un nivel superior será difícilmente alcanzable si éste se muestra como un *agente pasivo*. Una de las labores del profesor es proporcionar tareas que ayuden al estudiante a progresar, a avanzar, jugando un papel parecido al de un entrenador. Esta idea planteada por los van Hiele a mitad del siglo pasado es hoy en día una de los pilares de la innovación educativa a nivel general: Que el estudiante aprenda a partir de su propia experiencia. Aunque no debemos olvidar las diferencias que hay entre las Matemáticas y otras áreas del conocimiento, por lo que metodologías que puedan resultar eficaces en Ciencias o en Historia, no tienen por qué serlo en la materia que nos ocupa.

Cuando hablábamos de las propiedades de los niveles hemos resaltado la adyacencia (propiedad 2) por la que aquella habilidad que se alcanzaba de forma implícita en un nivel era necesario explicitarla en el nivel superior. Esa toma de conciencia de lo que se ha hecho para poder aplicarlo en otros momentos se enmarca en lo que se denomina, hoy en día, *metacognición*. Qué he hecho, cómo lo he hecho, para qué lo he hecho, de qué me ha servido y en qué otras situaciones lo podría aplicar, constituye la escalera de la metacognición. Esta es una herramienta que se aplica hoy en día a nivel general para revisar el proceso de aprendizaje y ayudar a los estudiantes a alcanzar autonomía.

Un elemento clave en educación desde hace unos años son las *competencias* (ahora también los *estándares*). Cuando en 1.1.2 hemos hablado del *insight*, una de las tres componentes del modelo, ya hemos hecho referencia al concepto de competencia, es decir, la habilidad o capacidad de aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones diferentes a la usada inicialmente.

Por tanto, podemos observar que las ideas expuestas a mitad del siglo pasado siguen siendo válidas hoy en día.

1.2.3. Ámbito de aplicación

El modelo de van Hiele se enuncia de una manera general sobre el razonamiento en el área de Matemáticas, pero desde un principio la aplicación del modelo se ha venido haciendo sobre contenidos de geometría, tanto en unidades didácticas aplicadas en el aula como en proyectos generales de educación (1.2.4). Además, los niveles educativos sobre los que se utilizó inicialmente eran elementales. Eso es coherente con su detección porque hablamos de habilidades de razonamiento, repetimos una vez más, no de conocimientos adquiridos. Por tanto parecía muy lógico que se dirigiera a niveles educativos iniciales en los que los estudiantes tienen menos interacción con su formación previa. La geometría, por otro lado, parece el campo idóneo porque muchas otras cuestiones en matemáticas están fuertemente interrelacionadas con muchas otras. Y, de hecho, los escasos intentos anteriores a 1994 para extenderlo fuera de esos ámbitos generaban no pocas dudas acerca de su propia validez, de su integración en el modelo.

Sin embargo, Llorens en 1994, con su memoria de doctorado "*Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local*", abre un camino para la extensión del modelo a conceptos propios del análisis matemático, retomando la concepción *general* del modelo aunque, como señalaremos en 1.4.3, siempre sin perder de vista lo reiterado: ***Se trata de establecer que, en determinadas habilidades del razonamiento acerca de un concepto matemático, existen niveles que son detectables y cuyas propiedades coinciden con las postuladas por van Hiele***. Y, en coherencia con ese planteamiento, veremos que no vamos a abandonar el ambiente geométrico.

1.2.4. Trabajos y proyectos de investigación

El modelo de van Hiele permite organizar el currículum y el material de aprendizaje de una manera adecuada, por lo que ha tenido una gran influencia en la organización curricular de la geometría en diversos países, entre ellos, la antigua Unión Soviética. Los educadores soviéticos, al conocer el modelo y tras intensas investigaciones, lo incorporaron como base teórica para la reforma curricular de aquel país en 1964. A partir de la difusión general de las ideas de van Hiele a mediados de los años 70, el interés por el modelo y su uso fue en aumento. Entre otras cosas porque ha servido, por su descripción del aprendizaje, para establecer la eficacia del proceso de enseñanza de una forma objetiva: Si un proceso de enseñanza conduce a muchos estudiantes a los niveles superiores, podríamos concluir que es más eficaz que otro cuyos *resultados* sean más pobres, con el añadido de que ahora no hablamos de una evaluación puntual, basada en la mayor o menor destreza en habilidades algebraicas, sino que hablamos de niveles de razonamiento, es decir, estamos evaluando lo que tantas veces se atribuye o se quiere atribuir a las Matemáticas: Un sistema que favorezca más eficazmente que la mayoría alcance un nivel III sería *mejor* en algo que generalmente se considera como esencial y característico de las Matemáticas.

Ciertamente, el aspecto cognitivo de las Matemáticas presenta dificultades en su evaluación. Así, el hecho de que un estudiante sea capaz de resolver determinadas situaciones presentadas en una prueba no siempre responde a un buen razonamiento, ni siquiera a una buena comprensión de los conceptos ni de los procedimientos. La repetición y el entrenamiento en tareas similares pueden conseguir que el estudiante resuelva las situaciones por una cuestión memorística o mecánica, pero no por razonamiento. Sin embargo, a través del modelo de van Hiele se puede llevar a cabo esta evaluación del proceso cognitivo con más eficiencia.

Entre 1979 y 1982 se desarrollaron, de manera simultánea e independiente, tres proyectos de investigación con el objetivo común de llevar a cabo una revisión curricular de la geometría aplicando el modelo de van Hiele, lo que conlleva la descripción de los niveles en el contenido sobre el que se pretende aplicarlo.

- **Proyecto Chicago** ("*Van Hiele levels and achievements in secondary school geometry*", Universidad de Chicago, Usiskin, 1982)

Z. Usiskin dirigió este proyecto entre julio de 1979 y junio de 1982. El objetivo era "*analizar la teoría de van Hiele para describir y predecir el resultado de los estudiantes de geometría en la escuela secundaria*" (Usiskin, 1982, p. 8).

Entre los resultados obtenidos, cabe destacar:

1. El nivel IV no existe o no puede ser detectado.
2. A partir de este estudio se define la propiedad de secuencialidad fija de los niveles (1.1.4), que posteriormente corroboró Mayberry.
3. El modelo de van Hiele es un buen predictor del nivel de conocimientos que se puede alcanzar tras un año de estudio de la geometría.

- **Proyecto Oregon** ("*Assessing children's intellectual growth in geometry*", Universidad de Oregon; Burger, Shaughnessy, Hoffer y Mitchell)

Fue dirigido por W. F. Burger entre septiembre de 1979 y febrero de1982. El estudio se centró en tres cuestiones:

1. ¿Los niveles de van Hiele son útiles para describir los procesos de pensamiento en geometría?
2. ¿Es posible caracterizar *operativamente* los niveles a partir del comportamiento de los estudiantes?
3. ¿Se puede desarrollar un procedimiento de entrevistas que muestre los niveles predominantes de razonamiento sobre tareas geométricas específicas?

En todos los casos la respuesta a la pregunta fue afirmativa y además, corroboraron la naturaleza dinámica de los niveles, apoyándose en las oscilaciones que muestran algunos estudiantes y que se justifican por los estados de transición entre niveles consecutivos.

- **Proyecto Brooklyn** ("*Geometric Thinking among adolescents in inner city schools*", Brooklyn College; Fuys, Geddes, Lowette and Tischler)

Este proyecto fue dirigido por Fuys y Geddes entre noviembre de 1979 y enero de 1982. Se pretendía evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes entre 12 y 15 años y analizar el contenido curricular de geometría para esos niveles. Entre otros trabajos se llevó a cabo la traducción de los textos originales de van Hiele, el desarrollo de tres módulos de evaluación-instrucción para las entrevistas clínicas y el análisis del contenido geométrico de tres series de libros de texto, desde las perspectiva del nivel de las actividades en el modelo de van Hiele.

1.3. El *modelo* de Vinner. Visualización

1.3.1. El *modelo* de Vinner.

Si nos ceñimos a las características que vimos en 1.1.1. sobre qué es un modelo educativo, podremos concluir que la propuesta de Vinner que ahora describiremos no cumple plenamente con ellas, si bien localiza un problema crucial para la comprensión y sugiere la forma de resolverlo y, por eso, se suele citar de esa manera.

Según Vinner, la mayor parte de los profesores cree que sus estudiantes basan sus razonamientos y respuestas en las definiciones formales de los conceptos pero esa creencia es errónea en muchos casos. En este apartado vamos a tratar diferentes formas del proceso cognitivo descritas por Vinner para ilustrar esta situación.

Vinner plantea que una estructura cognitiva presenta dos aspectos. La primera la denotaremos *concepto-imagen* y describe "*la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. (…) Podemos referirnos a la porción del concepto imagen que se activa en un momento particular como el concepto imagen evocado*." La segunda la denotaremos *concepto-definición* que "*es la fórmula con palabras usada para especificar ese concepto*". (Tall y Vinner, 1981, p. 152)

El concepto-imagen se construye de forma gradual con las experiencias en las que participan los estudiantes. Lo ideal es que el concepto definición controle la imagen y que ésta se forme de manera ajustada a la definición. Lo deseable sería que, ante una pregunta, el estudiante fuera capaz de relacionar la imagen con la definición antes de generar una respuesta, tal y como se muestra en el siguiente gráfico.

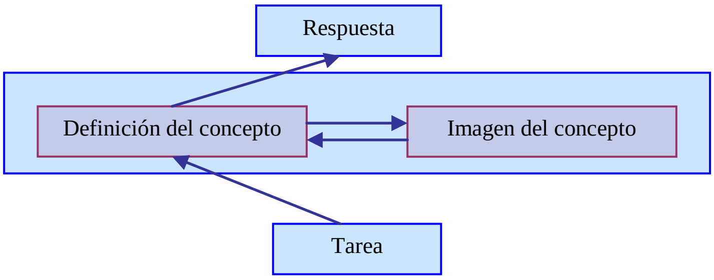


Figura 1. Diagrama de respuesta ideal.

Si no se tiene en cuenta el concepto-imagen el modelo de respuesta sería de deducción puramente formal:

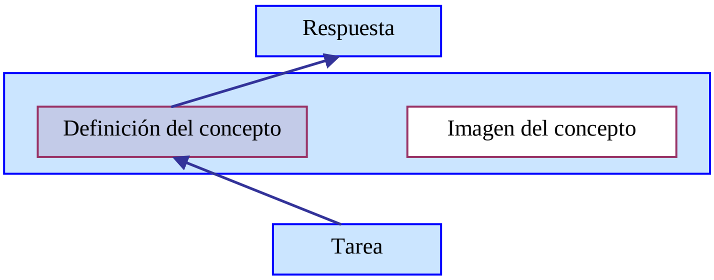


Figura 2. Diagrama de respuesta de deducción puramente formal.

Si el estudiante evoca el concepto-imagen en el primer momento de su razonamiento pero revisa la definición antes de dar una respuesta tenemos la situación ideal, un **pensamiento** deductivo-intuitivo.

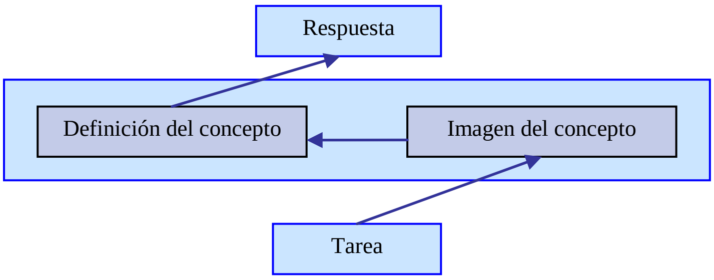


Figura 3. Diagrama de pensamiento deductivo-inductivo.

En todos los casos detallados anteriormente la respuesta se ilumina, finalmente, con la revisión que aporta la definición del concepto. Pero lo que sucede muchísimas veces en la realidad es que las respuestas de los estudiantes solo se producen después de evocar la imagen del concepto, sin revisar la definición o relacionarlo con ella, en lo que sería una **respuesta** intuitiva.

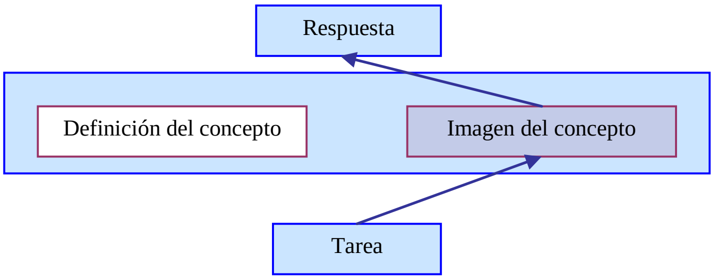


Figura 4. Diagrama de respuesta de deducción puramente formal.

Cuando no existe una verdadera comprensión de un concepto, es decir, cuando la imagen conceptual en el estudiante no es coherente con la definición, la respuesta es errónea. Porque el concepto-imagen es prevalente. Y eso ocurre de modo muy particular cuando existen contradicciones entre uno y otro, entre el concepto-imagen y el concepto-definición. Curiosamente, esas contradicciones pueden coexistir en la mente del estudiante sin apariencia de conflicto. Y en diferentes momentos o contextos se evoca una u otra. Solo cuando los aspectos contradictorios son evocados **simultáneamente** aparece una sensación de conflicto o confusión. Esta situación refleja una falta de comprensión del concepto y, debido a ello, el estudiante no puede avanzar en el aprendizaje.

En este contexto, es bien conocido el ejemplo de la definición de recta tangente a una curva en un punto, utilizado también por Llorens (1994). Si el estudiante mantiene una imagen conceptual del tipo "*la tangente es la recta que toca a la curva en un punto*" mantendrá esa imagen por mucho que haya aprendido, por ejemplo, que la derivada de una función en un punto puede usarse para obtener la ecuación de la recta tangente.

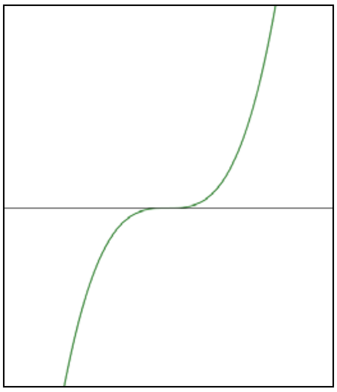


Figura 5. Recta tangente a $y=x^3$ en el origen.

Si no revisa específicamente la definición de tangente, su imagen conceptual no cambiará por mucho que, aparentemente, la hayamos modificado con la introducción del cálculo diferencial. Y, entonces, es fácilmente detectable que no existe integración entre ambos conceptos. Así, una representación gráfica de la tangente de $y=x^3$ en el origen será rechazada como imagen de una "tangente" (porque no "toca" solo en un punto, porque "corta" a la curva), por mucho que los cálculos le conduzcan a obtener fácilmente que $y=0$ es la ecuación de esa recta tangente y que, por tanto, la imagen mostrada es la correcta. Es decir, el estudiante puede "saber" simultáneamente que, efectivamente, la imagen anterior representa a esa curva y a su tangente en el origen, cuya ecuación sabe calcular, y, a la vez, rechazar esa imagen como la de una recta tangente a una curva en un punto porque se opone a su concepto-imagen.

Una situación parecida ocurre con el concepto de área de una figura plana. Si ese concepto no se revisa, por mucho que luego se introduzca al estudiante en el cálculo integral y sus aplicaciones, puede que mantenga imágenes conceptuales propias de la infancia, estáticas: El área sería algo que se obtiene aplicando una fórmula, por ejemplo. Sin una explicitación de esas imágenes a la luz de la revisión del concepto de área que permite la introducción del cálculo integral, convivirán en la mente del estudiante ambas imágenes conceptuales: La procedente de la nueva definición solo se activará en el contexto adecuado pero eso le conducirá a contradicciones y errores detectables porque mantendrá como imagen conceptual la idea de que el área de una figura es el resultado de aplicar una fórmula. A esta cuestión nos referiremos posteriormente, claro está.

1.3.2. Vinner y van Hiele

1.3.2.1. Semejanzas

En los trabajos de Vinner y otros relacionados (por ejemplo, Fischbein, 1991, p. 149) se habla, pues, de un nivel *intuitivo* y un nivel *conceptual*. Podemos identificar una cierta relación entre esos niveles y los del modelo de van Hiele: Mientras que un nivel intuitivo correspondería con los niveles I y II, el nivel conceptual del pensamiento matemático avanzado corresponde los niveles de razonamiento III y IV. Las contradicciones entre el concepto-imagen y el concepto-definición imposibilitan el progreso hacia los niveles superiores.

"*... es posible la formulación de un descriptor de los niveles superiores de pensamiento (niveles III o IV, en los términos de van Hiele), como la integración de los conceptos intuitivos o estáticos con los conceptos propios del pensamiento matemático avanzado o conceptos dinámicos*" (Llorens, 1994, p. 45).

Por tanto, la integración del concepto-imagen y el concepto-definición y la ausencia de conflicto entre ellos, nos define un descriptor de la transición hacia los niveles superiores. En consecuencia, la persistencia en el conflicto nos define un descriptor de los niveles inferiores.

1.3.2.2. Diferencias

Entre ambos modelos encontramos también diferencias lo que, sin embargo, no causa un distanciamiento entre las propuestas sino, como veremos en el apartado siguiente, una posibilidad de complementarse. El modelo de van Hiele es más exhaustivo en cuanto a la clasificación por niveles que el de Vinner. El pensamiento matemático avanzado puede corresponder a cualquiera de los niveles III y IV.

Otra diferencia sustancial es el ámbito de aplicación. Si bien el modelo de van Hiele, pese a ser en general una propuesta sobre el razonamiento en Matemáticas, se ha aplicaba sobre todo en geometría (1.2.3) y resulta difícil aplicarlo en niveles educativos superiores, el modelo de Vinner se orienta, más bien, a las dificultades de aprendizaje presentes en la transición hacia dichos niveles y a cuestiones muy variadas (incluyendo el Análisis Matemático).

1.3.2.3. Complementariedad

Si analizamos las diferencias y las semejanzas entre los dos modelos podremos ver que se complementan entre sí. Van Hiele propone un modelo sobre el aprendizaje, es un modelo educativo que analiza el proceso de manera global, la teoría de Vinner es más bien descriptiva y su propuesta metodológica (la visualización) es menos concreta que la de van Hiele (aunque adoptable por su modelo).

Respecto al término *visualización*, es necesario precisar que "*en el contexto de las matemáticas, sus connotaciones no son obvias. Nuestro uso difiere un tanto de su utilización en el lenguaje corriente y en psicología, donde el significado de la visualización se aproxima al de «formalización de imágenes mentales». Por ejemplo, hay estudios psicológicos que se centran en la capacidad del sujeto para formar y manipular imágenes mentales. En esos estudios no se considera la cuestión del uso del lápiz y papel; menos aún, la del ordenador, para contestar las preguntas. Desde la perspectiva de la visualización matemática, la restricción de que las imágenes deban ser manipuladas mentalmente, sin la ayuda de lápiz y papel, parece artificial. De hecho, en la visualización matemática, en lo que estamos interesados es, precisamente, en la capacidad del estudiante de dibujar un diagrama apropiado (con papel y lápiz o con ordenador) para representar un concepto matemático o un problema, y en el uso de la representación para conseguir comprender los conceptos y como una ayuda en la resolución de los problemas. Notemos que, típicamente, no hablamos de la visualización de un diagrama sino de un concepto o problema*" (Zimmerman y Cunninghan, 1991, p. 3).

Uno de los motivos que están llevando al redescubrimiento de la visualización es que permite presentar algunos conceptos matemáticos de la misma forma que se originaron e, incluso, reproducir los procesos para la resolución de los problemas de una manera más adecuada a esa perspectiva histórica.

Otro motivo es, precisamente, la misma posibilidad de utilizarla gracias al desarrollo y difusión de instrumentos informáticos, tal como hemos comentado antes. Nos detenemos un momento en esta cuestión:

1.3.3. Las nuevas tecnologías en la Educación Matemática

La concepción sobre la enseñanza de las matemáticas ha ido variando a lo largo del tiempo, más o menos de forma acorde con las teorías generales predominantes en cada época en la enseñanza. Sin embargo, hace poco más de treinta años, la irrupción de lo que aún hoy se llama genéricamente "nuevas tecnologías" ha aportado un elemento crucial tanto en la investigación en Educación Matemática como en las propuestas metodológicas que se derivan de ella y de la propia evolución social. Porque la difusión de instrumentos tecnológicos como las calculadoras, las calculadoras gráficas, internet, los teléfonos móviles con conexión a internet, las aplicaciones para ordenadores personales, etc., no solo han sido digamos herramientas que se usaban innovadoramente en algunas aulas sino que esos mismos instrumentos están presentes de forma radical en la vida cotidiana. Hoy vivimos en un *mundo de pantallas*.

Curiosamente, la utilización de los recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas ha seguido una evolución distinta de la social y muy diversa según los entornos. Por ejemplo, durante mucho tiempo hubo un rechazo generalizado en España (que no en otros países) a la incorporación de las calculadoras en el colegio y se afirmaba, sin ningún fundamento riguroso, que su utilización iba a frenar la capacidad de los niños para aprender las operaciones básicas con números. Pero lo cierto es que, mientras tanto, toda la sociedad ha incorporado las calculadoras como un elemento cotidiano: Desde el supermercado hasta cualquier pequeña transacción comercial, pasando por la vida doméstica.

Lo mismo se podría indicar de los ordenadores personales y de las aplicaciones específicas para las matemáticas. Los primeros forman parte casi insustituible de la cotidianeidad. Sin embargo, las aplicaciones orientadas directamente a las matemáticas, incluyendo los llamados *programas de cálculo simbólico*, no siempre han acompañado ese desarrollo. A veces porque el sistema educativo no lo ha facilitado por falta de medios u otras razones, otras veces por ciertas inercias y, en todo caso, siempre dependiendo mucho del entorno: Mientras países enteros han optado por una incorporación radical de esos instrumentos, en otros las cosas han sido más heterogéneas y la explicación de esas diferentes respuestas no siempre ha tenido que ver con los medios para usar esos recursos.

Por ejemplo, se repite el conflicto entre quienes consideran que el uso de esos recursos perjudica el aprendizaje de ciertas habilidades que el estudiante debe adquirir por la vía de la tradicional repetición de los ejercicios. Por ejemplo, para algunos, la obtención de la primitiva de una función de una variable (de los tipos que tradicionalmente se estudian) sería una habilidad que irrenunciablemente se debería inculcar, a pesar de que muchos de esos recursos facilitan de forma inmediata la cuestión. Enfrente, pues, estaría quien considera estas herramientas como una solución para resolver problemas rutinarios o colaborar en la construcción de los conceptos, por lo que los estudiantes deben aprender a manejarlos casi con la misma naturalidad que lo hacen en su casa y que lo harán en su ambiente laboral.

Intentando encontrar un punto medio entre estas dos posturas extremas, Buchberger planteó en 1989 su principió, White-Box/Black-Box, basado en lo que él denomina "*la espiral de la creatividad o de la invención*". Este principio consiste en establecer dos fases en el aprendizaje de un concepto/procedimiento. En la primera fase, mientras el concepto/procedimiento sea nuevo para los estudiantes (o su desarrollo cognitivo sea insuficiente), no pueden usar herramientas tecnológicas para desarrollar algoritmos relacionados directamente con el concepto/procedimiento que se está trabajando. Esta sería la fase White-Box (caja blanca). Cuando el estudiante ya ha superado el aprendizaje requerido, puede utilizar las herramientas tecnológicas. Está, pues, en la fase Black-Box (caja negra). En cualquier caso, la situación en la que se encuentra el estudiante respecto al nivel de aprendizaje y la fase correspondiente será determinada por el profesor.

La idea que subyace en este principio es secundada por diversos autores que aprueban el uso del ordenador en el aula de forma controlada. Por ejemplo, Monaghan (citado en Codes y Sierra (2005)) propone que el estudiante realice *a mano* los algoritmos que jueguen un papel importante en el desarrollo cognitivo o que tengan importancia para el desarrollo de un tema posterior. Cuando los procesos estén interiorizados o su desarrollo no aporte nada al aprendizaje, ya se puede recurrir a las herramientas tecnológicas. De forma similar, Dana-Picard y Steiner (2003) sostienen que el estudiante ha de usar en diferente grado los comandos según sea el grado de interiorización que posea.

Los recursos tecnológicos y, en particular, los programas de cálculo simbólico y las calculadoras gráficas, son indudablemente instrumentos que sirven para utilizar las técnicas de visualización a las que antes nos referíamos. La mera obtención de una representación gráfica que antes era algo esporádico y quizá costoso, ahora es algo elemental y perfectamente accesible.

La visualización es mucho más que esa posibilidad de recurrir a una gráfica y desde los años noventa son innumerables las experiencias acerca de la cuestión, es decir, de aplicaciones de la visualización para favorecer la comprensión de los conceptos o, incluso, para afianzar habilidades algebraicas. Es claro que el uso de esos recursos incrementa las experiencias de aprendizaje y, en ese sentido, siempre va a ser más eficaz en el contexto del modelo de van Hiele y en el de Vinner. Es decir, aunque solo fuese porque aportan alguna experiencia adicional, son positivas en el contexto indicado. Específicamente, en el repetidamente citado trabajo de Llorens (1994) se puso de manifiesto que el uso de la visualización en la modalidad de la incorporación habitual de recursos tecnológicos al proceso de enseñanza y aprendizaje (en concreto, el uso de un programa de cálculo simbólico) favorecía de forma muy llamativa el progreso en el nivel de razonamiento y la integración de las imágenes conceptuales.

Esta memoria no aborda directamente la cuestión pero, en la línea de aquel trabajo, sí que aportará alguna conclusión semejante, como veremos en su momento, referida a la eficacia de estas técnicas para favorecer el progreso de nivel.

1.4. Extensiones del modelo de van Hiele

1.4.1. Dificultades en la extensión del modelo

Ya hemos comentado varias veces que, aunque el enunciado original del modelo es general para el razonamiento matemático, desde sus primeras aplicaciones se ha visto relegado a cuestiones geométricas de niveles básicos. Es fácilmente comprensible que la complejidad que entrañan los contenidos de niveles educativos superiores dificulta la detección de los problemas del aprendizaje. Basta con tener en cuenta que las dificultades podrían provenir de los conocimientos previos, de los conceptos de niveles curriculares inferiores. Asimismo, la necesaria identificación de los descriptores hace especialmente complicada la extensión a otros tipos de conceptos, sobre todo por la interacción del lenguaje. Los descriptores deben enunciarse sobre la actividad de los estudiantes, deben ser descripciones operativas de éstos que permitan ubicarlos con facilidad en su nivel de razonamiento.

Así pues, las propuestas de extensión del modelo se centran en contenidos que no necesitan unos conocimientos *conceptuales* previos y que se pueden *construir* de manera adecuada en el nivel de estudios correspondiente. Sería absurdo plantearse los descriptores de un concepto para un nivel educativo en el que las relaciones lógicas de los estudiantes no permitieran alcanzar el nivel III.

El área se ajusta a estas condiciones pues, aunque es un tema tratado desde la infancia, no involucra en su comprensión apenas otros conceptos aunque sí precisa de un tipo de razonamiento que en las edades consideradas en nuestro estudio los estudiantes deberían tener adquirido. Además, advertimos un cierto paralelismo entre el concepto de área y el de aproximación local que fue el tema de la primera tesis que sentó las bases para la extensión del modelo, como veremos más adelante. Ambos son dos conceptos "dinámicos", por requerir la noción de límite, lo que en principio podría llevar a suponer que son abstractos y poco visualizables. Tanto el área de una figura plana como la recta tangente se introducen desde temprana edad de un manera "estática" y esa imagen es la que persiste en los estudiantes a no ser que se haga una revisión más adelante, cuando su capacidad de razonamiento se lo permita. De no ser así el estudiante seguirá pensando que un área se calcula usando una fórmula del mismo modo que considerará tangente a una curva a una recta que *toque* la curva en un punto.

1.4.2. Condiciones para que una clasificación por niveles pueda incluirse en el modelo de van Hiele

En 1991 encontramos un intento por extender el modelo de van Hiele: la tesis doctoral de J. E. Land, de la universidad de Boston, bajo el título "*Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions (mathematical functions)*". Pero esta tesis destaca de manera excesiva el aspecto *operacional* y poco el *razonamiento*, elemento central del modelo. Por este motivo la tesis de Land no se entiende como una correcta extensión del modelo y obliga a definir qué características deben tener los descriptores de los niveles para que se puedan enmarcar en el modelo de van Hiele.

Las condiciones que vamos a enumerar están, lógicamente, relacionadas con las propiedades descritas en 1.1.4. y son las enunciadas por Llorens (1994, p. 71) :

Condición 1: *Los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuenciales (propiedades 1, 2, y 4).*

Condición 2: *Deben formularse de modo que recojan el progreso en el nivel de razonamiento como resultado de un proceso gradual (propiedad 6), resultado de las experiencias de aprendizaje (propiedad 3).*

Condición 3: *Las pruebas –de cualquier tipo– diseñadas para detectar los niveles deben tener en cuenta la vinculación entre los niveles y el lenguaje (propiedad 5).*

Condición 4: *En todo caso, debe tenerse en cuenta la descripción (propiedad 2) y la esencia del modelo, esto es, su relación directa con el nivel de pensamiento, no de conocimientos o destrezas.*

En el caso de que el concepto a estudiar tenga una carga más memorística o conceptual que de razonamiento, deberemos plantearnos trabajar con otro tipo de clasificación más acorde con la situación, como puede ser la taxonomía de Bloom (1956).

1.4.3. Tesis enmarcadas en este contexto

En la tesis de Land (1991) se analizan las habilidades de tipo operacional de los estudiantes y no en el pensamiento de los mismos. Sin embargo, podemos considerarla como un precedente de los trabajos que iban a venir poco después, quizá porque esa tesis se presenta en una universidad prestigiosa, en un ambiente más bien ajeno a la pedagogía y está enfocada en un nivel educativo no elemental.

La memoria de José Luis Llorens Fuster titulada "*Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local*" y dirigida por el profesor Pedro Pérez Carreras, fue presentada en 1994 en la Universidad Politécnica de Valencia. Una de las principales aportaciones de este trabajo es la extensión del modelo de van Hiele al estudio de nociones de tipo *dinámico* propias de los fundamentos del Análisis Matemático, planteando nuevas perspectivas en la aplicación del modelo. El concepto elegido para ello fue el de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto. Mediante entrevistas clínicas semiestructuradas y de tipo socrático se formularon y confirmaron los descriptores de los niveles de razonamiento (I, II y III) para ese concepto. Además en la memoria se aportó también la importante novedad de diseñar y utilizar una prueba escrita que, tras su administración a ciertas muestras de estudiantes, permitió reforzar los resultados obtenidos (descriptores) por un procedimiento distinto e independiente, así como automatizar la adscripción de cada encuestado a su correspondiente nivel de razonamiento.

Con el uso de un software específico se pudo hacer uso de un método de visualización, el *zoom*, mediante el cual se pretendía romper el concepto-imagen preconcebido de los estudiantes que, según los trabajos de Vinner, se podría resumir diciendo que: "*la tangente toca a la curva pero no la corta*", para sustituirlo por otro en el cual la tangente a una curva en un punto A "*es la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica en un entorno de A*". El estudio realizado permitió establecer la relación existente entre los niveles de van Hiele descritos y la dualidad de conceptos del modelo de Vinner y puso de manifiesto la eficacia de los métodos de visualización tanto para favorecer el progreso en el nivel de razonamiento como para conciliar los conceptos imagen y definición, de acuerdo con los modelos de van Hiele y Vinner, en relación al concepto estudiado.

En esta misma línea de aplicación del modelo de van Hiele al estudio de conceptos de Análisis Matemático, Pedro Campillo Herrero presentó su tesis doctoral en 1999, también en la Universidad Politécnica de Valencia y dirigida por Pérez Carreras, bajo el título "*La noción de continuidad desde la óptica del modelo de van Hiele*". En este trabajo se presentaron los descriptores de los niveles I, II y III de razonamiento y se aplicó el modelo de van Hiele al concepto estudiado para proporcionar una nueva propuesta metodológica cuyo fin es la asimilación del concepto de continuidad de Cauchy. En este caso el método de visualización que utiliza como herramienta es el "*estiramiento*" de una curva, consiguiendo construir un concepto-imagen geométrico no intuitivo que no se apoya en la idea de "no rotura" de la curva sino en el *mecanismo* del "control de curvas", que usa para intentar crear en el estudiante la noción "curva controlable" como aquella que tiende a quedarse plana tras la realización de sucesivos estiramientos. De esta manera pretende crear en el estudiante un concepto-imagen nuevo que no se basa en lo que la palabra "continuidad" sugiere en el lenguaje coloquial, ni en las experiencias preuniversitarias que los estudiantes puedan haber tenido con respecto a este tema, sino que es la idea de "controlar localmente" una curva la que le lleva a conseguir un modelo mental adecuado para la asimilación del concepto de continuidad local. Al igual que en la tesis precedente se confirmó la eficacia de la entrevista clínica, semiestructurada y de tipo socrático para la detección del nivel de razonamiento en el que se encuentra un estudiante y basándose en ella, en la misma línea que Llorens, se diseñó una prueba escrita que permitió la detección del nivel de razonamiento en muestras de estudiantes más numerosas, así como la confirmación de un patrón de respuestas en cada nivel.

En el año 2000 se presentaron, de nuevo en la Universidad Politécnica de Valencia, otras tres memorias de doctorado en las que se continuaba aplicando el modelo de van Hiele a distintos conceptos de esta rama de las matemáticas:

La tesis de Andrés Felipe de la Torre Gómez, "*La modelización del espacio y el tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele*", también dirigida por Pérez Carreras, consta de dos partes que se realizaron de forma consecutiva. En la primera parte se establece una propuesta metodológica para la asimilación del concepto de equipolencia de agregados infinitos de puntos, para estudiantes del último ciclo de la escuela secundaria y de los primeros cursos de universidad, y prepara a los estudiantes para comprender la modelización del espacio y el tiempo que estudiará en la segunda parte. En esta primera parte implanta en el estudiante la idea de que la proyección es el instrumento que permite comparar dos conjuntos con infinitos elementos con el objeto de que llegue, mediante sus propios razonamientos, a la conclusión de que dos figuras geométricas tienen la misma cantidad de puntos si es posible proyectar una de ellas sobre la otra, de modo que los puntos queden en correspondencia uno a uno. En la segunda parte de la memoria el objetivo era la elaboración de una propuesta metodológica enfocada a la comprensión del proceso seguido en la formulación del modelo matemático del espacio y el tiempo, y a la explicación de los hechos del mundo representativo a la luz del modelo de van Hiele. En esta parte el autor sale del modelo geométrico para detectar los niveles de van Hiele verbalmente, analizando el razonamiento puro, y en esta fase se limita a la realización de entrevistas clínicas. En los dos casos se proporcionan los descriptores de los niveles I, II y III de van Hiele en los procesos de razonamiento asociados con los conceptos en cuestión y se estudian los obstáculos cognitivos que dificultan la comprensión de dichos conceptos.

En el trabajo de Pedro Vicente Esteban Duarte, titulado "*Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*" y dirigido por Llorens, se retoma el concepto de recta tangente a una curva en un punto para introducirlo mediante otro tipo de visualización: el haz de secantes, distinto al utilizado por Llorens en su memoria y usado tradicionalmente en la introducción del concepto de derivada de una función en un punto. De nuevo se establecen los descriptores de los niveles I, II y III del modelo de van Hiele a este concepto empleando para ello entrevistas clínicas semiestructuradas y de carácter socrático en las que utiliza el haz de secantes como *mecanismo* visual. Estas entrevistas sirvieron de base para diseñar una prueba escrita que permitía corroborar sus resultados en muestras de estudiantes más amplias. En una segunda fase, Esteban se plantea el objetivo de comparar los resultados que se obtienen al introducir el concepto por medio del *zoom* y del haz de secantes en grupos de estudiantes con características similares, llegando a la conclusión de la conveniencia de diseñar una entrevista clínica y un test escrito que combine ambos mecanismos. Por otra parte también compara, utilizando para ello el test diseñado por Vinner en 1982, los resultados obtenidos por tres grupos de estudiantes, a dos de los cuales se les introdujo el concepto utilizando el ordenador mediante el *zoom* y el haz de secantes, respectivamente, y al grupo restante sin hacer uso del mismo. La conclusión obtenida fue que "*el ambiente gráfico que se crea al trabajar en el ordenador hace que los conceptos queden claros para un mayor número de estudiantes*".

Carlos Mario Jaramillo López estudia en su tesis "*La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*", utilizando para ello una visualización a través de la imagen de la longitud de curvas planas (*zigzag*) mediante la que se plantea romper la preconcepción de los estudiantes de que la acumulación de una cantidad infinita de términos debe tener un resultado infinito. En este trabajo, dirigido por Pérez Carreras, el autor también utiliza entrevistas clínicas semiestructuradas y de tipo socrático para determinar los descriptores de los niveles I, II y III para el razonamiento en el concepto de serie convergente, diseña un test escrito que le permite corroborar los resultados obtenidos en la clasificación de los estudiantes en su correspondiente nivel y proporciona una nueva propuesta metodológica para la asimilación del proceso de convergencia de una serie.

María de los Ángeles Navarro Domínguez presentó su tesis "*Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*", dirigida por Pérez Carreras, en la Universidad de Sevilla en 2002. Este trabajo consta de dos partes. En la primera se determinan los descriptores de los niveles de razonamiento del proceso de convergencia de una sucesión, en concordancia con el modelo de van Hiele, analizando las pautas de razonamiento del alumnado universitario y preuniversitario seguidas en el estudio de este concepto. En la segunda parte se proporciona una propuesta metodológica sobre el proceso de convergencia de una sucesión de forma que se construya el concepto mediante la visualización elegida. Como en los trabajados precedentes, se desarrolló una entrevista semiestructurada de carácter socrático que sirvió para analizar el proceso de razonamiento sobre el concepto de convergencia y para identificar los momentos clave en la evolución del razonamiento. A partir de la entrevista, se diseñó un test que permitía su aplicación en un grupo más numeroso de estudiantes y su posterior clasificación en los diferentes niveles de razonamiento según las respuestas dadas. El propio guion de la entrevista proporciona la metodología adecuada para construir la imagen del concepto de convergencia de una sucesión.

Llorens estableció un precedente para la extensión de este modelo al Análisis Matemático y diseñó con su memoria una metodología adecuada para este tipo de estudio que, como hemos visto, es la que han seguido los autores de las posteriores aplicaciones a conceptos de esta rama de las matemáticas, es decir, la utilización de una visualización cuidadosamente elegida, implementada en un modelo–guion para la realización de entrevistas clínicas semiestructuradas de carácter socrático, que pretenden acompañar a los entrevistados en la construcción de los conceptos, obtener los descriptores de los niveles de van Hiele en los distintos conceptos estudiados y clasificar a cada uno de los entrevistados en su correspondiente nivel de razonamiento.

Las entrevistas clínicas constituyen en sí mismas nuevas propuestas metodológicas y experiencias de aprendizaje de los conceptos en cuestión, pues su objetivo principal es la formación de un concepto-imagen adecuado al concepto estudiado. El objetivo de las mismas no es medir habilidades o destrezas computacionales sino ayudar a que el estudiante construya poco a poco una cierta noción utilizando para ello sus propios razonamientos, guiados en todo momento por las preguntas que se le formulan y por las reflexiones a las que éstas les llevan.

El uso de nuevas tecnologías es fundamental en el diseño de este tipo de propuestas pues la capacidad representación de los ordenadores permite diseñar experiencias en las que esté presente la noción de infinito. Así, el estudiante puede ampliar y estirar una curva tantas veces como desee o dibujar tantas secantes como quiera, lo cual le hace llegar a tener un concepto-imagen correcto sin utilizar de forma explícita el concepto de límite. Se trata de conectar las intuiciones de tipo geométrico del estudiante con el concepto-definición a través del concepto-imagen construido mediante la entrevista clínica.

Esta memoria continúa con el mismo modelo de trabajo sobre el concepto de área, teniendo en cuenta que se trata de un concepto *dinámico* con una problemática semejante al trabajo original de Llorens, como veremos en el capítulo siguiente. Representa pues una nueva extensión del modelo de van Hiele con las pertinentes consecuencias que analizaremos en el capítulo 5.

Además presenta una novedad significativa respecto de los trabajos anteriores en el modelo, porque ***el área es un número*** que asociamos a una superficie. Por eso, en nuestro caso, además de trabajar con el concepto geométrico de manera visual (en nuestra memoria es la *descomposición en franjas*), vamos a introducir el uso del aspecto numérico de nuestro concepto. En este sentido vuelve a ser fundamental el uso de herramientas de cálculo (más allá de las calculadoras) como lo son los diferentes paquetes informáticos accesibles desde diferentes dispositivos. Ciertamente, en las aplicaciones del modelo de van Hiele, incluidas las más recientes que acabamos de citar, se huye de los aspectos numéricos porque estos involucran cuestiones de razonamiento adicionales que pueden interferir con lo que sea objeto del estudio. Sin embargo, aparte de la aportación que significa, en sí misma, esa incorporación a nuestro estudio, nos pareció que era imprescindible junto con la construcción geométrica, formando parte del *mecanismo* que nos sirve para la extensión del modelo, tal como detallaremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2

EL ÁREA (DE UNA FIGURA PLANA)

2.1. El área como concepto dinámico

2.1.1. Conceptos estáticos y dinámicos

Llorens y Pérez Carreras (1997, p. 715 y ss.) acuñaron la expresión de "***concepto dinámico***" para referirse a aquellos conceptos matemáticos que requieren el concepto de límite en cualquiera de sus manifestaciones. Enfrente se situarían los conceptos estáticos, cuya comprensión puede requerir hasta cierta capacidad de abstracción pero su complejidad es mucho menor porque el concepto de límite o, en general, los conceptos dinámicos representan en sí mismos una *habilidad del pensamiento*.

El dinamismo de un concepto aparece, pues, en cuanto es necesario un proceso de razonamiento infinito. No es solo que se *maneje* la idea de infinito como, por ejemplo, se puede hacer al empezar a usar los conjuntos numéricos. Se trata de que esa idea aparezca en el mismo proceso de razonamiento ligado al concepto. Después, en una segunda fase, llegará una formalización que, muchas veces, no será demasiado amable pero que también es imprescindible para el concepto matemático.

Cronológicamente, la primera idea acerca del infinito que aparece en el ambiente de las enseñanza de las matemáticas es la del infinito potencial que llevan consigo los números naturales. Esa idea todavía es asumida con una cierta comodidad: Los números naturales forman un conjunto *infinito* en el sentido de que dado cualquier número natural siempre podemos encontrar uno mayor que él (en la ordenación que tienen establecida). Que ese mismo infinito describa la *cantidad* de números enteros o de números racionales puede provocar alguna confusión o rechazo, pero normalmente se zanja esta cuestión rápidamente sin entrar en detalles que, por supuesto, aún son más obviados cuando se habla del conjunto de los números reales: Se trataría de un conjunto infinito por la misma razón indicada para los números naturales, pero pocas veces se insiste en la idea de la diferencia de categoría de infinitud que representan respecto de los naturales. Y eso, después, tiene no pocas consecuencias.

Por ejemplo, cuando se habla de la recta real o, en general, de cualquier recta, es muy frecuente encontrar fuertemente arraigada la idea de que "*una recta es una sucesión de puntos*". Eso, claro está, puede conducir a no pocos errores en contextos muy variados cuya raíz desde luego está relacionada con esta cuestión, es decir, con un desconocimiento de la naturaleza de los números reales o de su representación.

Los conceptos que involucran un proceso de razonamiento infinito aparecen en el currículo en el bachillerato cuando se introduce el concepto de límite o el de aproximación local en cualquiera de sus manifestaciones. En muchas ocasiones, esos procesos de razonamiento se eluden o se reducen a su mínima expresión seguramente porque su formalización es difícil. Así, el concepto de límite de una sucesión o de una función se acaba reduciendo a una colección de recetas para resolver indeterminaciones, es decir, a cuatro cuestiones puramente algebraicas, fácilmente evaluables en un examen convencional. Y si acaso se aborda el concepto como tal, o bien se hace con un reduccionismo lamentable o se recurre a sus aspectos puramente formales que, de todos modos, seguramente no serán evaluados.

Las paradojas de Zenón son un buen ejemplo de un proceso de razonamiento infinito. Otro ejemplo sería una *suma infinita* tal como

$$0'9 + 0'09 + 0'009 + \ldots$$

Esa suma no es *estática* (por culpa de los puntos suspensivos). Cuando un estudiante es capaz de concluir que la suma **es** 1 (no que se *aproxima* a 1) está manifestando que ha incorporado una habilidad de razonamiento diferente, un nuevo nivel. O cuando es capaz de explicar con claridad que lo único *equivocado* en las paradojas de Zenón es la conclusión, porque ciertamente Aquiles alcanza a la tortuga por la misma razón que la suma anterior es 1.

2.1.2. Fases de aprendizaje en un concepto dinámico

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto dinámico los mismos autores (Llorens, 1994, p. 87 y ss.) distinguían dos fases: El establecimiento intuitivo de cierto ***mecanismo*** que permite aproximarse al concepto y, después, su formalización. De hecho, aquella memoria y las que hemos citado anteriormente en 1.4.3 extienden el modelo de van Hiele a la *primera fase* del concepto dinámico que es objeto de su estudio. Porque, en efecto, en esa primera fase no solo se manifiesta el dinamismo del concepto (el proceso de razonamiento infinito) sino que se dan los elementos fundamentales de dicho concepto.

En el caso de la recta tangente a una curva en un punto, el mecanismo trataba de la magnificación de la representación gráfica de la curva en un entorno del punto. Los sucesivos *zoom* sugerían que algunas curvas tenían un comportamiento semejante y eran *localmente* rectas, aunque otras no se comportaban de la misma manera. Ese mecanismo (gráfico) facilitaba la aproximación al concepto pero el nivel de razonamiento avanzado se manifiesta no en la mera percepción del diferente comportamiento de unas curvas u otras sino cuando, a través de ese mecanismo, se llega a conclusión de que la recta tangente, si existe, es la que se obtendría por la prolongación del segmento al que conduce la ampliación indefinida de la representación gráfica.

Esa primera fase de un concepto dinámico no tiene por qué ser gráfica o geométrica, claro está. Pero para la extensión del modelo de van Hiele a la primera fase de un concepto dinámico lo deseable es que, en efecto, encontremos mecanismos despojados de otros conocimientos previos y en un ambiente visual y sencillo. Eso es lo que ocurre en el caso mencionado y eso mismo se reproduce también en esta memoria con relación al concepto de área de una figura plana pues ***nuestro objetivo es la extensión del modelo a esa primera fase de dicho concepto***, como detallaremos enseguida.

2.1.3. El problema del área de una figura plana

Como es sabido, la obtención del área de una figura plana es un problema que se remonta a la antigüedad. En su acepción más elemental, el área es un número (positivo) que representa *la medida* de una superficie (plana). Lo primero que habría que precisar es el significado de la palabra *superficie*: Se trataría de un determinado subconjunto del plano, pero no "cualquier" subconjunto del plano, pues no valdrían los semiplanos por ejemplo; tampoco una "curva" o una línea. Los elementos geométricos tales como recta, curva, plano, etc., son imprescindibles para esa delimitación, para precisar lo que entendemos por superficie plana. Pero, además, cuando hablamos de *medida* está claro que se requiere una comparación con un patrón y la elección de ese patrón puede condicionar la forma de llevar a cabo la medida.

La introducción curricular del concepto de área se hace actualmente en quinto curso de primaria, a los nueve-diez años, más o menos cuando se ha hecho siempre. En esa introducción se enfatiza esa acepción referida a figuras geométricas más o menos elementales, precisamente por su proximidad al patrón de medida.

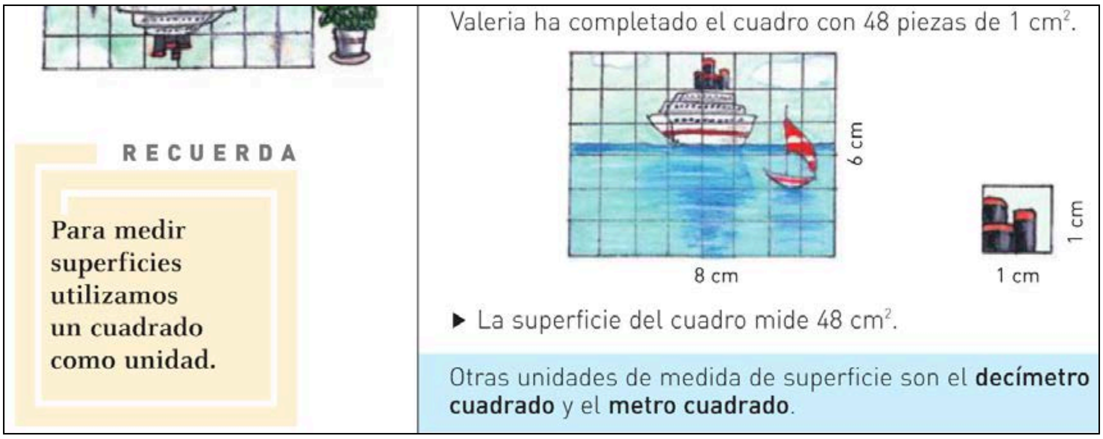


Figura 6. Introducción del concepto de área en 5º de Educación Primaria (Ed. SM).

La imagen anterior está tomada de un texto actual de ese nivel (Editorial SM, 2014) pero podemos encontrar imágenes semejantes en cualquier otro texto. Naturalmente, no se entra en una definición general de superficie plana sino que se habla de casos particulares: Polígonos regulares, triángulos, rectángulos, círculos. Desde luego, también figuras que puedan descomponerse en esos polígonos y, como es habitual en los textos recientes, con una constante referencia a lo cotidiano, como si esas figuras geométricas estuvieran presentes en la realidad y quizá insistiendo poco o nada en que esas figuras son modelos y no están presentes en la realidad misma.

Establecido que el área es esa medida, enseguida se resuelve el problema de obtenerla en situaciones diversas con la aplicación de ciertas fórmulas:

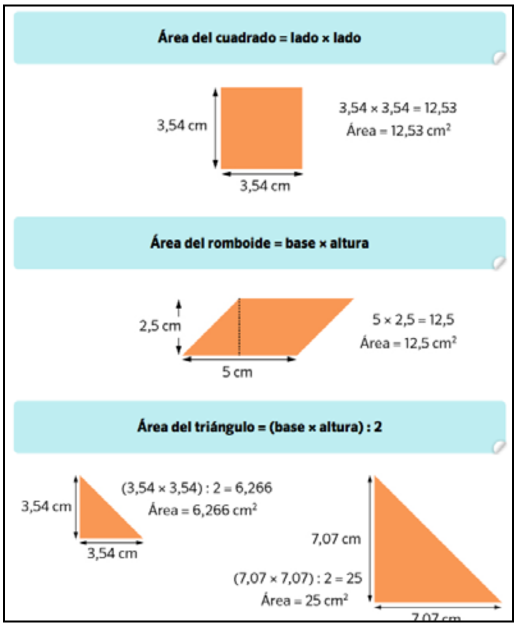
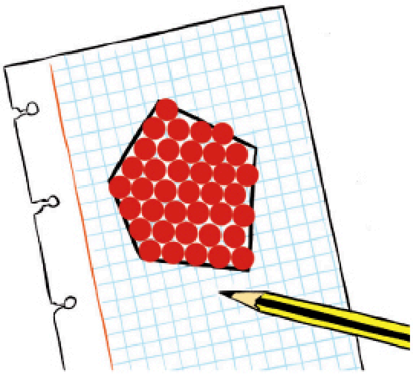


Figura 7. Introducción de obtención de áreas. (5º EP, ed. SM)

El círculo sería uno más de esos polígonos, con su fórmula particular. En algún caso hemos podido encontrar alguna mención a la idea de aproximación, como en el de la imagen siguiente:

Paso 2: Únete a un compañero y entre los dos cubrid con fichas las superficies que habéis dibujado.

Paso 3: Anotad el número de fichas que caben en cada figura. ¿Cuál es mayor?



Paso 4: Calculad el área de una ficha y estimad el área de las figuras en centímetros cuadrados y en decímetros cuadrados. Explicad si es correcta la estimación hecha con las fichas.

Figura 8. Aproximación de áreas (5º EP, ed. SM).

Incluso podemos señalar una curiosa "*demostración*" de la fórmula del área del círculo, quizá con el empeño de presentarlo como un polígono más aunque con "muchísimos" lados:

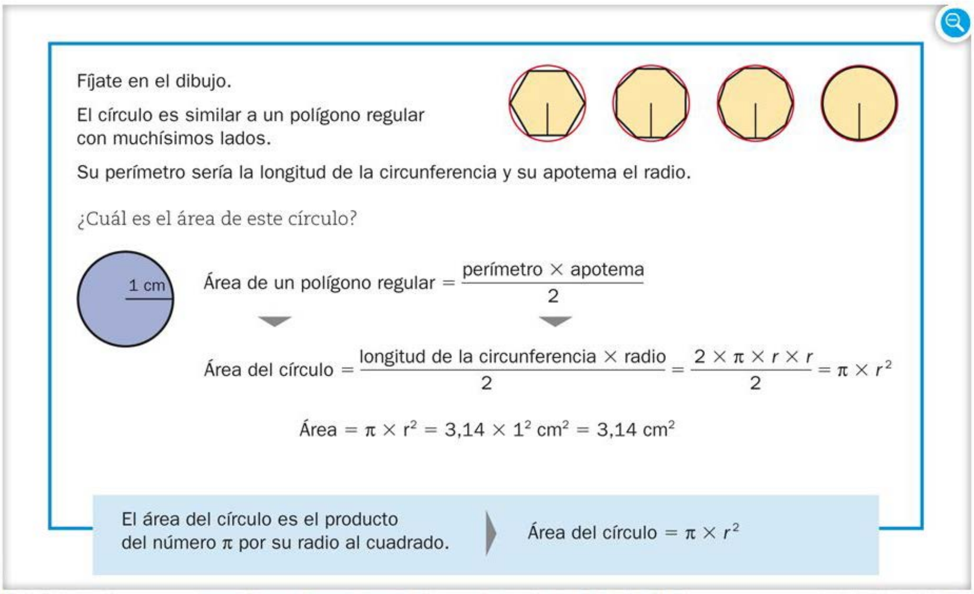


Figura 9. "Generalización" del círculo como polígono regular (5º EP, ed. SM).

Seguramente eso se hizo con el propósito de economizar fórmulas y distinciones: Nos vale la del área de un polígono regular, pero ahora el perímetro es la longitud de la circunferencia (que previamente se ha establecido como algo "conocido"). Es curioso también indicar que el número π se identifica (no se aproxima) con 3'14.

Esos ejemplos son muy ilustrativos porque en ellos se manifiesta con claridad que el área de una figura plana también tiene una componente meramente estática. Para algunas figuras, en efecto, bastaría hacer un par de mediciones y aplicar una fórmula y eso está muy bien. Sin embargo, lo del círculo es un abuso que no conduce a nada bueno, entre otras cosas porque estas ideas no se revisan ya nunca más en el currículo hasta la aparición del cálculo integral. Es decir, el área no se ve nunca como un concepto dinámico y, muchas veces, ni siquiera se vuelve a revisar a la luz de la introducción del cálculo integral, como luego señalaremos. De modo que el problema del área queda reducido, si acaso y como mucho, a ese ejemplo que hemos señalado en la ilustración, es decir, ante una figura que no se puede descomponer en rectángulos o triángulos, usaremos círculos (botones) para obtener una aproximación. Y hay que decir que eso es bastante excepcional: Lo habitual es ceñirse a la aplicación de las fórmulas y omitir cualquier figura que no se adapte a ellas.

Es claro que la imagen conceptual que se genera de esa forma (el área se obtiene aplicando la fórmula) podría quedar en entredicho fácilmente por la vida cotidiana, pero rara vez nadie se ve en la necesidad de hallar el área de una mancha de forma más o menos caprichosa. De modo que, lo normal será que esas ideas, esas imágenes conceptuales pervivirán en el estudiante mientras no se revisen, como ya sabemos. Además, el *llamado problema del área* pocas veces se aborda como tal, siquiera por la vía de la aproximación. Es decir, ¿qué ocurre cuando una figura plana no se puede descomponer en cuadrados, triángulos o rectángulos?

Como sabemos, ese problema se *resuelve* cuando se define el área usando las integrales. Una vez definida la integral y teniendo instrumentos suficientes para calcular una integral (o, al menos, para obtener un valor aproximado de una integral) se debe revisar el concepto de área para abordar ese problema pausadamente, es decir, estudiando las diversas dificultades que pueden plantearse.

El primer paso en la resolución de ese problema es, como sabemos, la **definición** del área de un trapecio mixtilíneo, es decir, de la superficie limitada por las rectas $x=a$, $x=b$, $y=0$ y una función $y=f(x)$ continua y positiva en $[a,b]$. Salvo casos particulares de la función, ese recinto no representa ninguna superficie de la que conozcamos "la fórmula" de su área.

La definición del área de esa superficie como la integral $\int_a^b f(x)dx$ puede generar nuevos problemas según como se presente el concepto de integral y su cálculo. Ciertamente, el área es un concepto dinámico porque lo es la integral, claro está. Sin embargo, muchas veces ese dinamismo se enmascara o, directamente, se pretende suprimir, como después veremos. Es decir, que para captar el dinamismo del concepto de área no solo es necesario hacer una revisión del concepto de área sino que es preciso presentar adecuadamente el concepto de integral. La omisión de cualquiera de esos dos pasos conducirá a mantener el concepto estático adquirido en la enseñanza primaria.

2.1.4. El mecanismo del área de una figura plana

El punto de partida para resolver el problema del área es dar una definición de área para el recinto indicado en el párrafo anterior. Nos planteamos, por tanto, explicitar el *mecanismo* correspondiente en el sentido de lo indicado al respecto en 2.1.2. Ese mecanismo, que denominamos ***descomposición en franjas***, casi de forma natural se construye del siguiente modo:

Hacemos una partición del intervalo $[a,b]$ de modo que obtenemos n subintervalos de la misma amplitud $(b–a)/n$. Ahora, en cada subintervalo elegimos un punto: En concreto, si la partición es $\{x_0, x_1, \dots , x_n\}$ $(x_0=a, x_n=b)$ y un subintervalo cualquiera es $I_i=[x_{i-1}, x_i]$, evaluamos $min\{f(x_{i-1}), f(x_i)\}=m_i$ y construimos $\sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1})$: Se trata, en definitiva, de una suma de *Riemann* (si la función no tiene demasiadas oscilaciones puede coincidir con una suma inferior de *Darboux*, pero eso es irrelevante).

La representación gráfica de esa construcción se corresponde, efectivamente, con franjas rectangulares. Usando un programa de cálculo simbólico es fácil obtener esa representación gráfica así como la evaluación correspondiente.

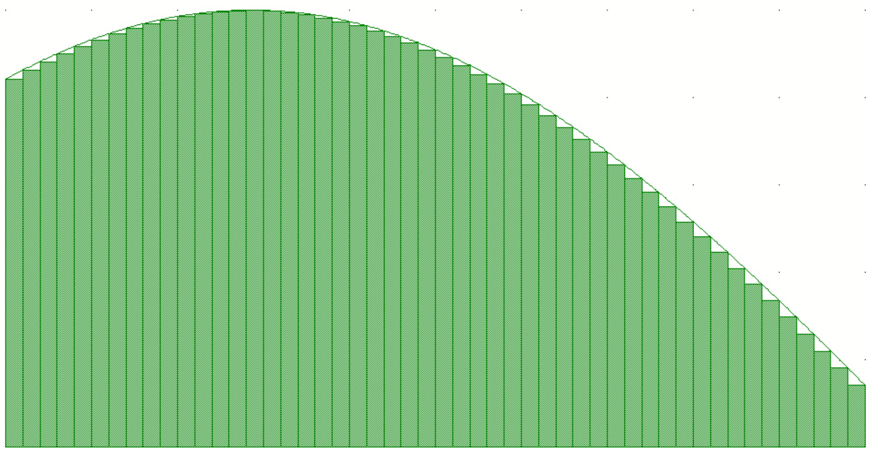


Figura 10. Descomposición en 50 franjas del área encerrada entre y=sen(x) y el eje OX en [1,3].

```
HMI(u, a, b, x) := MIN(Y(u, a), Y(u, b))

                           n   b - a      ⎛        b - a                  b - a       ⎞
IRIEMANN(u, a, b, n, x) := ∑  ───────·HMI ⎜u, a + ───────·(i - 1), a + ───────·i, x ⎟
                          i=1    n        ⎝          n                      n         ⎠

IRIEMANN(SIN(x), 1, 3, 50) = 1.509744908
```

Figura 11. Obtención del valor del área de las 50 franjas en que se descomponen el área encerrada entre y=sen(x) y el eje OX en [1,3].

Las ilustraciones anteriores corresponden a la representación gráfica del recinto que se obtiene con la gráfica de y=sen(x) en [1,3] y 50 franjas, así como a la evaluación correspondiente. Más adelante cambiaremos el nombre de la función que evalúa la suma de las áreas de las franjas a **S_REC** y enfatizaremos la dependencia del número n de franjas. Elegida una superficie como la indicada, es claro que el dinamismo del concepto se puede percibir con la variación de ese número, ***tanto gráfica como numéricamente***.

En resumen, nuestra propuesta de *aproximación* al concepto de área de una figura plana consiste, pues, en utilizar el primer paso en la resolución del problema del área, es decir, el trapecio mixtilíneo antes indicado que es la superficie limitada por las rectas $x=a$, $x=b$, $y=0$ y una función $y=f(x)$ continua y positiva en $[a,b]$. Sabemos que el área es la integral correspondiente, integral que, desde luego, existe por ser continua la función. Por esa misma razón, sabemos que las sumas de Riemann correspondientes convergen a la integral. Por tanto, una representación gráfica de esas sumas de Riemann debe manifestar esa convergencia, que podemos mostrar también numéricamente.

Como ya hemos indicado, esta primera fase contiene los elementos esenciales del concepto y, además, el mecanismo utilizado puede presentarse casi directamente, usando un vocabulario simple para tratar de centrarnos en la detección de los niveles de razonamiento. El uso de la herramienta numérica que suma las áreas de las franjas también es muy sencilla y solo se vincula al número de franjas, de rectángulos, que se utilice. Naturalmente, como veremos, la utilización de este mecanismo puede hacerse despojándolo hasta del nombre de la función y del intervalo al que se aplique, para resaltar únicamente los aspectos visuales y numéricos.

Para aquellos estudiantes que hayan cursado ya los fundamentos del cálculo integral, ese tipo de representación gráfica puede resultarles familiar y, de hecho, eso será relativamente frecuente. Pero ya sabemos que no siempre hay una correspondencia entre los niveles de razonamiento y el nivel académico, de modo que esa posible familiaridad es una cosa y otra la habilidad de pensamiento que puede manifestar un estudiante que comprenda y exprese que el proceso de descomposición en franjas converge al área cuando el número de franjas es infinito.

No obstante, vamos a examinar brevemente la relación que tiene la enseñanza del cálculo integral con el concepto de área.

2.2. Área e integral

Es un hecho que el aprendizaje de los fundamentos del cálculo infinitesimal entraña no pocas dificultades para los estudiantes. Quizá con la vana esperanza de simplificarlo o de conseguir ciertos niveles de suficiencia académica, muchas veces se limita a la transmisión de procesos algebraicos o algorítmicos que sirven para resolver ejercicios repetitivos. Difícilmente este tipo de enseñanza puede llevar a los estudiantes a conocer los conceptos con los que se trabaja y, en consecuencia, a usar de manera adecuada el razonamiento sobre ellos. Dentro de esta problemática general se encuentra el concepto de área vinculado al de integral y que, además, presenta algunas dificultades añadidas, tal como hemos venido señalando, pues se parte de una visión estática y reducida del concepto, la que se adquiere en la enseñanza primaria.

La revisión del concepto de área debe hacerse como consecuencia de la definición de integral y, además, aparece los planes de estudios cuando se suponen impartidos otros conceptos dinámicos como el de límite de una sucesión o el de una función. Es decir, aparece cuando ya se han tratado conceptos matemáticos que involucran procesos de razonamiento infinitos. O deberían hacerlo, porque, por lo señalado en el párrafo anterior, demasiadas veces se renuncia a abordarlos. Examinamos sucintamente a continuación algunos defectos y carencias que son consecuencia de ese enfoque reduccionista y que no se plantea el objetivo de la comprensión de los conceptos en lo que se refiere a la integral y al área.

2.2.1. Introducción de la integral como "antiderivada"

Muchos libros de texto introducen la integral como "la operación contraria a la derivada". Más aún: El cálculo de primitivas se convierte, con mucha diferencia, en el protagonista esencial del cálculo integral, tanto en el tiempo y esfuerzo que se le dedica como en el mismo vocabulario: *La integral de una función "es" su primitiva*. Eso no solo ocurre en el bachillerato, sino que (por muy sorprendente que esto pueda parecer) esto mismo aún se repite en los cursos de fundamentos matemáticos de muchas carreras universitarias científicas o técnicas. De modo que en la primera lección del epígrafe "cálculo integral" rara vez encontramos la definición de integral o cualquier cuestión motivadora al respecto sino que, más bien, lo primero es el cálculo de primitivas a las que, repetimos, se las llama integrales.

Sólo después de un adiestramiento más o menos intenso se habla de la integral propiamente dicha que, además, se suele apellidar con la palabra "definida" para distinguirla de las anteriores. Los diversos "métodos generales de integración" (o sea, la fórmula de integración por partes y el teorema del cambio de variable muchas veces presentado también como una mera fórmula), van seguidos de lecciones más o menos numerosas acerca de la obtención de primitivas de diversos tipos de funciones (racionales, irracionales, trigonométricas, etc.). Si se persiguen objetivos muy exigentes a este respecto, la dedicación de tiempo puede llegar a ser muy importante. Como muchas reformas de planes de estudio han recortado horas a las matemáticas, a veces la profusión de primitivas se ve reducida, pero hace no muchos años la parte correspondiente a esta materia en una Escuela de Ingeniería bien podía representar lo que ahora sería toda una asignatura de 4'5 o 6 ECTS o quizá más en algún caso exagerado.

Después de alcanzar una cierta pericia con diversos tipos de primitivas, por fin se dedican (si hay tiempo) dos palabras a la citada "integral definida" y, no pocas veces, por la prisa o por elección, muchas veces se omite el concepto, la propia definición de la integral, su construcción.

La sucesión de despropósitos continúa con una frecuente omisión del problema del cálculo de una integral. Porque tanto si se da algún resumen de la definición como si se omite completamente, lo inmediato es recurrir a la regla de Barrow para calcular las integrales (definidas) que, de esta forma, se usa para insistir en lo anterior: Se remacha así otra vez el cálculo de primitivas y se muestra su importancia porque sirve para aplicar la regla de Barrow.

Y, en realidad, así es exactamente solo que eso seguramente ni se menciona: El despropósito no es ése sino la omisión flagrante de que "no son pocas" las funciones de las que no conocemos su primitiva y, por tanto, el cálculo de su integral no puede hacerse usando la regla de Barrow. No hablamos ya de introducir algún método numérico de aproximación: Se trataría, siquiera, de usar el teorema de Riemann para aproximar el valor de la integral mediante una suma de Riemann. Por no mencionar que, en muchísimas aplicaciones, ese valor aproximado es más que suficiente y que, puestos a escoger, ante las limitaciones de tiempo, quizá es más conveniente (por ser más general) recurrir a estos métodos que al caso particular de la aplicación de la regla de Barrow.

En este punto o poco después, ese añadido de la integral (definida) se ***interpreta*** como el área encerrada entre la función (supuesta positiva), el eje *OX* y las rectas verticales correspondientes a los límites de integración. Es decir, frecuentemente no se revisa el concepto de área sino que se identifica con el de integral (definida) y ni se aborda el problema del área. De este modo la imagen que tienen los estudiantes sobre la integral es la de un concepto algebraico para el que, según la función considerada, se aplica un método determinado. La integral (definida) sería, pues, la mera aplicación de la regla de Barrow. Desde luego, el área seguiría siendo lo que era en la mente del estudiante (un concepto estático). Ese estudiante puede ser capaz de obtener primitivas de diversas funciones y con diversos métodos pero no sabrá qué es una integral, palabra que identificará con primitiva.

2.2.2. Uso "indiscriminado" de la regla de Barrow

Incluso podemos detallar un poco más algunas consecuencias tan lamentables como frecuentes que se producen en la secuencia relatada en los párrafos anteriores. Por ejemplo, la que se refiere al título de este epígrafe pues la regla de Barrow, aunque requiere la continuidad de la función en el intervalo considerado, al ser aplicada de forma casi automática ante cualquier integral (definida) que aparezca, genera situaciones como la descrita por Mundy (1984, p. 170-172). Ante la pregunta: "¿Por qué $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{1}x^{-2}dx=\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{1}=\left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1}=\frac{-1}{1}-\frac{-1}{-1}=-2$ es incorrecto?" se encontró con un porcentaje considerable de respuestas incorrectas entre 973 estudiantes que habían superado el primer curso de cálculo. Los resultados de Mundy quedaron corroborados por Llorens y Santonja (1997, p. 63) cuando, en un examen de Cálculo en una Escuela de Ingeniería de la Universidad Politécnica de Valencia, después de haber tratado el cálculo integral de manera "convencional" (y con un guion semejante al indicado en el epígrafe anterior) solo un 23% de los estudiantes respondió que $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-2$ era falso. El 77% restante dejó la respuesta en blanco o dijo que la igualdad era cierta.

Es evidente que esa sobreutilización de la regla de Barrow no favorece el rigor cuando se trata de aplicar propiedades y no ayuda a que validen las condiciones necesarias para aplicarlas. Además, es obvio también que no hay una imagen visual que acompañe esas manipulaciones. En el ejemplo, la función es positiva (y no hablamos de una función extraña) por lo que un resultado negativo en este caso debería sorprender.

2.2.3. "Imposibilidad" para obtener una primitiva

Aunque ya lo hemos indicado, la insistencia en el cálculo de primitivas y en la aplicación de la regla de Barrow, lleva a limitar los ejercicios y problemas únicamente a esas situación más bien ideal de funciones que tienen primitiva y cuya integral se puede calcular usando dicha regla. Sin embargo, no es difícil encontrar ejemplos *reales* muy aleccionadores justo en sentido contrario. Uno de ellos aparece detallado en Llorens (2002, p. 455-462) donde se refiere lo ocurrido en un trabajo final de carrera en la antigua Escuela de Ingeniería Técnica Agrícola de la U.P.V. (Oltra, 1997). En ese trabajo se pretendía aplicar el cálculo integral para obtener un método sencillo que permitiera aproximar el volumen de cierto fruto (en concreto, una variedad de kiwi). El objetivo era hacer tres mediciones en un ejemplar cualquiera de ese fruto, aplicar una fórmula y obtener el volumen con una precisión razonable. Efectivamente, eso se consiguió pero con el detalle de que la fórmula es una integral que no se puede calcular con la regla de Barrow pues pertenece a un tipo de funciones irracionales de las que se sabe que no tienen primitiva conocida (aunque son continuas). La conclusión es que todos los esfuerzos dedicados al cálculo de primitivas habían sido inútiles porque en un ejemplo *real* (quizá el único de toda su carrera y ejercicio profesional posterior) resulta que no servía para nada.

Esa integral solo puede calcularse (aproximarse) usando algún método numérico o utilizando algún programa de cálculo simbólico que lo lleve incorporado. En realidad, podría ser suficiente con obtener una suma de Riemann pues su aproximación es relativamente rápida con uno de esos programas (¡la misma función que mostramos antes podría servir!). Así que ni siquiera vale la objeción de la complejidad que podría suponer el recurso a los métodos numéricos: Basta explicar el concepto de integral y el teorema de Riemann para disponer de forma casi inmediata y fundamentada de un instrumento que permite obtener valores aproximados de las integrales.

Así pues, como no se suelen plantear situaciones como las del ejemplo sino, más bien al contrario, lo que se transmite es poco menos que siempre se puede obtener una primitiva de una función dada, se genera en los estudiantes esa idea equivocada que luego extienden a la integral "definida" e, incluso, para su posible aplicación al área (de un trapecio mixtilíneo, que ven como "aplicación" de esa integral "definida"): Como no se les presenta ninguna alternativa, se afianza la idea de que el área de esos recintos siempre es "exacta" y la pueden obtener con la misma exactitud que la integral.

2.2.4. Excesiva algebrización del concepto

La ausencia de una revisión del concepto de área no solo afianza una imagen conceptual estática del concepto sino que genera imágenes en conflicto, en el sentido de lo explicado desde el modelo de Vinner en 1.3.1. Son muy ilustrativos a este respecto los ejemplos ya citados de Mundy (1984) y Llorens y Santonja (1997): En el primer trabajo, se constata que el 95% de los estudiantes a los que se les pidió calcular $\int_{-3}^{3} |x+2| dx$ contestó de forma incorrecta o no lo hizo porque no conocen la primitiva de esa función y, por tanto, no son capaces de aplicar la regla de Barrow. En el segundo trabajo se presentan las siguientes imágenes:

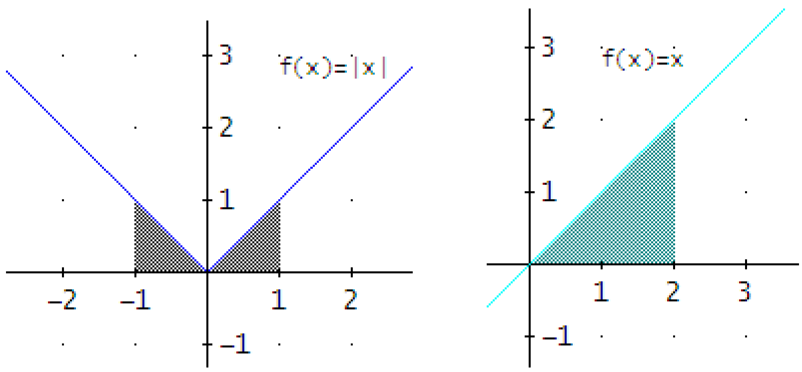


Figura 12. Imágenes de Llorens y Santonja (1997).

Cuando se pregunta el área de las zonas sombreadas la mayoría de las respuestas fueron $\int_{-1}^{1}|x|dx$ y $\int_{0}^{2}xdx$, respectivamente. El módulo que aparece en la primera integral provoca respuestas incompletas o absurdas. Este hecho nos indica que los estudiantes prefieren el registro algebraico al visual pese a sus dificultades, aún cuando para estos mismos alumnos sería trivial calcular el área de los triángulos que aparecen en las figuras.

También Eisenberg (1994) nos ofrece un ejemplo de la preferencia de los alumnos por el proceso analítico del problema frente al gráfico. En este caso se pidió representar gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} |x-2| & \text{si } 1<x<3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ y a continuación calcular $\int_{3/2}^{3}|x-2|\,dx$. El 90% de los estudiantes representó correctamente la función pero solo el 44% de ellos calculó correctamente la integral (el 72% por integración y el 28% a partir del análisis de la gráfica).

Como hemos apuntado anteriormente, los estudiantes conciben la integral como un proceso algebraico en el que el último fin es la aplicación de la regla de Barrow: Desde el punto de vista del concepto estático de área solo estaríamos ante otra "fórmula", a aplicar en ciertos casos, de forma completamente análoga al cuadrado, triángulo o círculo que vio en la niñez.

2.2.5. Dificultades con el dinamismo del concepto

El concepto (la definición) de integral involucra un proceso de razonamiento infinito que, como hemos indicado, requiere cierto *entrenamiento*. Aunque curricularmente se supone que los estudiantes ya han estudiado otros conceptos dinámicos, la realidad parece mostrar muchas deficiencias al respecto. Sobre esta cuestión, Turégano (2007, p. 18) apunta que "*hasta que no tienen dieciséis años, aproximadamente, los estudiantes no oyen ni siquiera hablar del infinito, de los límites, etc. La enseñanza del cálculo no pasa por una fase previa de carácter experimental. El resultado es que, a partir de ese momento, los estudiantes deben asimilar, al mismo tiempo, los fenómenos asociados a las apariciones del infinito y de los límites y los conceptos y teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente.*"

Quizá, más que una fase experimental (cuyo sentido no queda muy claro en la cita), a la luz de modelo de van Hiele y del *modelo* de Vinner, lo que procedería es tratar de provocar un progreso hacia un nivel III en todos aquellos conceptos dinámicos que aparecen en ese nivel académico. Seguramente, tal como han conjeturado diversos autores, es muy posible que si un estudiante alcanza el nivel III en alguna manifestación del concepto de aproximación local, pueda alcanzar fácilmente ese nivel en cualquier otro concepto dinámico. Por ejemplo, en el de área de una figura plana, al menos en ese primer estadio que hemos elegido para nuestra memoria.

Pero, en el extremo opuesto, cuando se rehúye una y otra vez generar experiencias de aprendizaje a ese respecto entonces es seguro que no habrá progreso de nivel. Tanto en la tangente a una curva en un punto como en el caso del concepto de área de una figura plana, hay también unos precedentes estáticos que no favorecen nada el progreso porque generan imágenes conceptuales contradictorias, por usar el lenguaje de Vinner. En ambos casos, ciertamente, existen aspectos estáticos de cada uno de esos conceptos que, además, se introducen en la niñez y que no se revisan precisamente hasta que se supone que el estudiante está en condiciones de asimilar conceptos dinámicos. El caso del área es aún más interesante porque aparece con bastante frecuencia en la vida cotidiana y, claro, muchas veces se rehúye la cuestión o se resuelve sistemáticamente con aproximaciones a figuras en las que *valen las fórmulas*.

Un profesor de física ya jubilado explicaba a los estudiantes de primer curso en la Facultad que podía calcular integrales con una balanza. En realidad lo que calculaba (de forma aproximada, claro está) era el área de una región irregular que se identificaba con cierta integral. Representaba gráficamente esa región en una hoja de papel milimetrado que previamente había pesado en la balanza. Después recortaba la región y volvía a pesar. Con una sencilla regla de tres podía obtener fácilmente la aproximación en cuestión, que sería tanto más precisa cuanto más exacta fuese la representación gráfica, la balanza y la pericia haciendo recortes. Pero, en general, solía funcionar bien y el ejemplo servía para romper el automatismo de que el área es algo que se calcula mediante una fórmula.

CAPÍTULO 3

OBJETIVOS DE LA MEMORIA

3.1. Objetivos

3.1.1. Objetivos relacionados con el modelo de van Hiele

En el capítulo 1 hemos analizado las características del modelo de van Hiele y en 1.1 se ha descrito de manera exhaustiva cada uno de los componentes que lo integran. También se ha dejado patente que el ámbito de aplicación del modelo quedó inicialmente restringido a cuestiones geométricas de niveles educativos elementales. Pero, como ya hemos dicho en 1.4.3, con la tesis de Llorens (1994) se abrió un nuevo campo de aplicación del modelo y fruto de ello surgieron otras cinco tesis doctorales sobre la extensión del modelo a la matemática avanzada pero siempre sobre conceptos con una componente geométrica. En ese contexto se enmarca esta memoria.

Por otro lado, en el capítulo 2 se ha hecho un estudio detallado sobre el concepto de área y sus dificultades, lo que nos lleva también a plantearnos acciones de mejora para solucionar esta problemática. Todo esto justifica la formulación del objetivo detallado en el mismo título de la memoria en relación al problema de la extensión del modelo de van Hiele:

Objetivo 1

Caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes en el concepto de área (de una superficie plana), mediante los descriptores de los niveles I, II y III del modelo de van Hiele.

Este objetivo se habrá logrado en el momento en el que se establezcan los descriptores y se hayan verificado:

- Teóricamente, viendo que cumplen las propiedades descritas en 1.1.4.
- Experimentalmente, detectándolos mediante los instrumentos que describiremos más adelante (3.2).

Como consecuencia de lo anterior, se pueden formular los objetivos experimentales siguientes:

Objetivo 2

Diseñar un modelo-guion para una entrevista socrática semiestructurada que permita identificar los descriptores de los niveles y, como consecuencia, clasificar al entrevistado en el nivel de razonamiento correspondiente.

Objetivo 3

Elaborar un test de respuesta múltiple que permita la adscripción a los diferentes niveles de razonamiento en grupos numerosos.

3.1.2. Objetivos relacionados con el modelo de Vinner y con la visualización

En 1.3.2 hemos comparado los modelos de Vinner y van Hiele. En este sentido planteamos el siguiente objetivo:

Objetivo 4

Relacionar los niveles de razonamiento de van Hiele con la dualidad de conceptos (definición e imagen) sobre el área (de una superficie plana).

Como consecuencia de lo anterior y teniendo en cuenta la visualización como una estrategia válida en el proceso de enseñanza-aprendizaje podemos enunciar también:

Objetivo 5

Establecer la idoneidad de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto para progresar en el nivel de razonamiento (van Hiele) como para conciliar el concepto-imagen y el concepto-definición (Vinner) en este mismo concepto.

3.1.3. Objetivos didácticos

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral se manifiestan muchas dificultades que han sido tratadas por diversos autores (Turégano, Camacho, Llorens y otros). Una de las acciones de mejora que se proponen es la reordenación de los puntos tratados en ese tema. Por citar un ejemplo, Turégano (1998, p. 235) apunta que con la entrada en vigor de la LOGSE en 1990 ya se puede secuenciar el currículo de forma que se conecten adecuadamente los conceptos de área e integral y, por eso, propone:

- *"Construir la noción de área como magnitud autónoma;*
- *Construir una aplicación «medida» entre superficies y números que se pueda extender al máximo de superficies planas;*
- *Construir el concepto de integral partiendo del concepto de área"*

Pero la realidad es que el orden de los contenidos en este tema, después de dos décadas, sigue siendo (según aparece en el currículo oficial de Bachillerato, DOCV núm. 5806):

- Primitiva de una función.
- Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable o por otros métodos sencillos. Integración de funciones racionales.
- Integrales definidas. Regla de Barrow.
- Cálculo de áreas de regiones planas.

Y con la LOMCE no hay variaciones significativas, pues según marca el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 3-1-2015 pp. 388 y 421) y las concreciones en la Comunidad Valenciana, tenemos:

Tabla 1. Contenidos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II para 2º de Bachillerado según la LOMCE (Ley Orgánica de Mejora de la Calidad de la Enseñanza).

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II		
CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
Concepto de primitiva. Cálculo de primitivas: Propiedades básicas. Integrales inmediatas. Cálculo de áreas: La integral definida. Regla de Barrow.	3. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables utilizando técnicas de integración inmediata.	3.1. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. 3.2. Aplica el concepto de integral definida para calcular el área de recintos planos delimitados por una o dos curvas.
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN (**DOCV núm. 7544 de 10.06.2015**)	COMPETENCIAS DEL CURRÍCULO (**DOCV núm. 7544 de 10.06.2015**)
	BL3.2. Calcular integrales, utilizando técnicas de integración inmediata para medir áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas fácilmente representables en contextos académicos y sociales.	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

Tabla 2. Contenidos de Matemáticas II para 2º de Bachillerado según la LOMCE (Ley Orgánica de Mejora de la Calidad de la Enseñanza).

<table>
<tr><th colspan="3">Matemáticas II</th></tr>
<tr><th>CONTENIDOS</th><th>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</th><th>ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Primitiva de una función. La integral indefinida. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. La integral definida. Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.</td><td>3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.
4. Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables y, en general, a la resolución de problemas.</td><td>3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.
4.1. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.
4.2. Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.</td></tr>
<tr><td>CRITERIOS DE EVALUACIÓN (DOCV núm. 7544 de 10.06.2015)</td><td>COMPETENCIAS DEL CURRÍCULO (DOCV núm. 7544 de 10.06.2015)</td></tr>
<tr><td>BL3.2. Calcular integrales de funciones sencillas para medir áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas fácilmente representables en contextos académicos y científicos utilizando las herramientas adecuadas (calculadoras gráficas, aplicaciones de escritorio, web o para dispositivos móviles).</td><td>Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
Competencia digital.</td></tr>
</table>

El punto común de las diferentes propuestas de reordenación curricular es comenzar revisando el concepto de área. Una herramienta para esta revisión podría ser la misma entrevista socrática que veremos más adelante, pues precisamente por su carácter socrático favorece que el estudiante explicite sus imágenes mentales le ayuda a reflexionar acerca de ellas si entran en conflicto con el concepto definición. En la realidad del aula resultaría inviable entrevistar a cada alumno, por lo que la mejor opción es el test. Además de recoger la información de una manera fácil y de permitir su aplicación tanto en el aula como desde casa, mantiene el carácter socrático que cumplirá con la función “pedagógica” que esperábamos de la entrevista. Y en cualquier caso, será una buena manera de conocer la realidad de la clase respecto al concepto del área, por lo que será una prueba inicial válida para programar la secuenciación de los contenidos de este tema. Por tanto, nos planteamos desarrollar el siguiente objetivo.

Objetivo 6

Establecer una herramienta efectiva y práctica que permita le revisión del concepto de área antes de la introducción del concepto de integral en el currículo de bachillerato.

3.2. Metodología de la investigación

La metodología seguida es la misma que se ha utilizado en estudios precedentes sobre la extensión del modelo de van Hiele descritos en 1.4.3. Consiste en tres pasos fundamentales que son: la entrevista clínica, el test de respuesta múltiple y el estudio estadístico.

3.2.1. Entrevista clínica

La entrevista clínica es una de las herramientas más adecuadas para explorar los procesos de pensamiento que se dan en la mente del estudiante. La relación directa con él, la verbalización demandada del razonamiento y el seguimiento continuo de todo el proceso permiten valorar de qué manera está razonando y qué dificultades tiene para avanzar en la comprensión de un concepto.

Esta técnica nos ha servido para determinar los descriptores de los niveles de razonamiento mediante un proceso de ida y vuelta. Partiendo de una propuesta inicial de los descriptores se han aplicado diversas entrevistas que han servido para modificarlos o matizarlos hasta llegar a la formulación definitiva que aparece como resultado en esta memoria. El diseño inicial del guion fue uno de los momentos clave para la determinación de estos descriptores.

Situándonos en el modelo de van Hiele nos encontramos con un elemento que resulta fundamental para la detección del nivel de razonamiento: el lenguaje. A través de una entrevista queda patente la forma en que el estudiante se expresa, los términos que utiliza para hacerlo y el tipo de frases que es capaz de construir, por lo que a lo largo de la entrevista se puede ver la relación que tiene con su nivel de razonamiento sobre el concepto en cuestión y permite determinarlo con mayor seguridad. Por la misma causa, la relación entre el lenguaje y el nivel de razonamiento, el entrevistador debe adecuar su lenguaje al entrevistado desde el inicio de la entrevista para ajustarlo a su nivel.

La entrevista se basa en un guion establecido que permite una cierta flexibilidad. El entrevistador puede alterarlo en función del entrevistado eliminando preguntas o retrocediendo a otras ya hechas para resaltar alguna contradicción, sugerir una generalización o cualquier otro motivo. Esto hace que cada entrevista se convierta en única más allá de las propias respuestas. El propósito es que el estudiante reflexione, no solo acerca de las preguntas que se le hacen, sino también acerca de sus propias respuestas. Se trata de que llegue a ser consciente de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos. Esperamos que el resultado de esa reflexión sea un concepto-imagen adecuado para el concepto de área y que sea capaz de definirlo verbalmente, aunque no sea de manera formal.

Eso es así porque las entrevistas se plantean de tal modo que son en sí mismas experiencias de aprendizaje. No es que el objetivo de la entrevista sea hacer progresar al alumno en el nivel de razonamiento, pues para ello se necesitan diversas experiencias de este tipo, aunque en algunos casos se haya podido dar ese progreso. Por este motivo se dota a las entrevistas de un carácter socrático, es decir, el entrevistador trata de actuar con el entrevistado del mismo modo en que Sócrates lo hace en los *Diálogos de Platón*. La técnica dialéctica de Sócrates consiste en el ejercicio de preguntas y respuestas que permitan llegar al entrevistado a conclusiones sobre diferentes temas. Partiendo de lo conocido guía su pensamiento hasta llegar a la naturaleza propia de las cosas, mostrándole las carencias o contradicciones que tiene en sus percepciones y haciendo que sea protagonista de su aprendizaje.

3.2.2. Test de respuesta múltiple

El objetivo del test es determinar el nivel de razonamiento según el modelo de van Hiele en un número elevado de estudiantes. La pretensión es que "sustituya" a la entrevista cuando su aplicación no sea viable. En este sentido el test sigue casi la misma estructura y secuencia de preguntas que el guion de la entrevista. Además, para conseguir que el test fuera una herramienta válida dentro del contexto de van Hiele, se han seguido las recomendaciones de Gutiérrez y Jaime al respecto:

"a) Se deben seleccionar actividades cuyas respuestas sean lo suficientemente largas como para que los estudiantes puedan hacer visibles sus ideas y su forma de razonar; al mismo tiempo, el planteamiento de las actividades debe incitar a los estudiantes a explicar los motivos de sus respuestas.

b) No debe confundirse el planteamiento de un cuestionario para conocer el nivel de razonamiento con un examen tradicional, en el que se trata de evaluar el nivel de conocimientos; son dos situaciones diferenciadas básicamente por el hecho de que llegar al resultado final correcto de los problemas no es tan importante en el primer caso como en el segundo. Por lo tanto, para determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así.

c) Aunque se tenga alguna idea previa sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes, las actividades deben seleccionarse de manera que cubran los cuatro niveles, o por lo menos los niveles I a III. Para hacer la selección de los ejercicios, es conveniente que el profesor se plantee cómo podrían contestar a cada uno personas de los diferentes niveles, para que de esa forma se pueda hacer una selección equilibrada.

d) Hay que evitar el error de asignar niveles a las preguntas y basarse en ellos para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes pues, en la mayoría de los casos, una actividad puede ser resuelta correctamente por estudiantes de diferentes niveles, pero sus formas de resolverla serán diferentes" (Gutiérrez y Jaime, 1990, p. 320-324).

Una de las dificultades que se presenta al pasar una prueba de este tipo en el entorno del modelo de van Hiele es el uso del lenguaje. Por un lado hay que intentar recoger diferentes opciones de respuestas en las que, más allá de ser o no correctas, permitan valorar la adecuación o precisión del lenguaje. Por otro lado, el lenguaje usado no debe ser obstáculo para la comprensión textual. Esto provoca que haya que adecuarlo para la comprensión desde un nivel de razonamiento básico, para evitar que la incomprensión de la respuesta sugerida impida la selección de la respuesta más adecuada. Cabe destacar que no se pretende dar en todos los casos una respuesta correcta y el resto erróneas, sino que puede haber más de una respuesta correcta pero una de ellas será la más adecuada (por precisión, seguridad, englobe de situaciones, etc.) a un nivel III. Antes de iniciar el cuestionario se informa al estudiante en este sentido, diciendo que aunque varias respuestas le parezcan "correctas" debe indicar la que le parezca más adecuada. Además, por si ninguna de las respuestas propuestas coincide con la valoración del estudiante, se deja la posibilidad de escribir libremente la respuesta. De esta forma también se puede valorar el uso del lenguaje, aunque la corrección pueda ser algo más laboriosa.

El primer objetivo que se planteó para diseñar el test fue que sirviera para confirmar los descriptores obtenidos a partir de las entrevistas. En ese sentido, las respuestas ofrecidas debían cubrir en cada pregunta, o bloque de preguntas, los diferentes niveles de razonamiento esperados (I, II y III). La mayor parte de las respuestas ofrecidas fueron respuestas o tipos de respuestas dados por los estudiantes a los que se les había hecho la entrevista clínica.

El cuestionario planteado no es un examen tradicional porque no busca valorar la exactitud de las respuestas sino el razonamiento que lleva a ellas. Es cierto que la codificación que daremos a las respuestas en el tratamiento estadístico destaca la opción más *correcta* (en el sentido de adecuación al nivel III) pero la valoración no se hace por una respuesta concreta sino por el comportamiento en grupos diferenciados de preguntas. Por último, cabe señalar que el carácter visual y geométrico de la prueba permite enmarcarla dentro del contexto del modelo de van Hiele. El área de una figura plana es un concepto evidentemente geométrico y en el cuestionario no se trata de una manera formal, por lo que todas las preguntas llevan consigo o están asociadas a una imagen, del mismo modo que sucede en la entrevista.

3.2.3. Estudio estadístico

La aplicación de una entrevista a un estudiante proporciona una valoración y determinación de su nivel de razonamiento atendiendo a su forma de responder y a los descriptores formulados, con lo que al acabar cada una se puede dar ya esa valoración. Pero cuando se aplica un test a un grupo numeroso se puede hacer una clasificación de los niveles de razonamiento de cada individuo a través de un proceso estadístico.

La clasificación diferencia distintos patrones de respuesta, por lo que nos hemos servido de los resultados para dar mayor validez a la formulación hecha de los descriptores formulados. Como veremos en la fase experimental, a tenor de las respuestas dadas y ajustándolas a los descriptores establecidos, ha sido posible determinar tres grupos diferenciados de respuestas que se corresponden con los niveles I, II y III del modelo de van Hiele: En efecto, el análisis *cluster* que realizamos posteriormente muestra la existencia de tres grupos diferenciados por sus patrones de respuestas (de manera cuantitativa) que coinciden con los patrones que determina el modelo a través de los descriptores detectados. De modo que ese estudio es una confirmación independiente de la propia existencia de los niveles de razonamiento y quita cualquier atisbo de subjetividad al trabajo.

3.2.4. Selección de la muestra

Se decidió realizar el estudio con estudiantes de entre 16 y 20 años. La mayor de parte de ellos ya había recibido formación sobre el cálculo integral e incluso lo habían aplicado al cálculo de áreas de figuras planas. Todos habían estudiado el concepto de límite de una sucesión y tenían nociones de cálculo infinitesimal. Por estos motivos consideramos adecuada la franja de cursos y edades (bachillerato y primeros cursos de universidad). Los estudiantes de menor edad, en general, tendrían algunos obstáculos para poder pasar del primer nivel y muchos para pasar del nivel II.

En la primera fase, la entrevista clínica, no teníamos como objetivo sacar ningún tipo de conclusiones respecto del tipo de estudiantes y el nivel demostrado. La pretensión era corroborar la validez de los descriptores de los niveles de razonamiento. El abanico de estudiantes "elegido" (recordemos que finalmente su ofrecimiento era voluntario) corresponde más al objetivo paralelo de recoger diversidad de respuestas para poder ofertarlas en el cuestionario de respuesta múltiple que a la detección en ellos de los niveles.

En la segunda fase, el test de respuesta múltiple, hubo dos tipos de acciones. Por un lado se pasó la prueba en un entorno "controlado" a alumnos de diferentes centros. Por otro lado se compartió el enlace a través de una red social, FaceBook, por lo que se recibieron respuestas de diferentes ámbitos. En este caso se analizó el grupo de preguntas de contexto para determinar si se consideraba o no cada respuesta.

3.3. Resultados

En este apartado nos vamos a centrar en el enunciado de los descriptores de los niveles, que corresponde al objetivo 1 indicado en 3.1. Tanto la entrevista clínica como el test de respuesta múltiple aparecen en sendos apéndices y serán analizados detalladamente en el capítulo 4, donde se justificarán el resto de objetivos (2, 3, 4, 5 y 6).

3.3.1. Descriptores de los niveles

A continuación vamos a detallar y analizar los descriptores de los niveles 0, I, II y III del concepto de área según el modelo de van Hiele (Llorens y Prat, 2015).

NIVEL 0: Predescriptivo

0.1	**El mero reconocimiento de los objetos (figuras geométricas planas elementales como cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio y círculo) constituye lo que consideramos nivel 0 o predescriptivo. Un estudiante en este nivel reconoce los diferentes tipos de polígonos nombrados y sus elementos (base, altura, lado, radio…). Asocia la idea de área con "la medida" de la superficie. Conoce que ni un punto ni una línea tienen área.**

NIVEL I: De reconocimiento visual.

Un estudiante en este nivel es capaz de obtener áreas mediante la aplicación directa de fórmulas. En casos de polígonos con lados rectos, descompone la figura en polígonos conocidos y obtiene el área total sumando las áreas parciales. Si algún lado no es recto busca la "proximidad" al círculo (o un trozo de él). Si no encuentra solución mediante estas opciones se ve incapaz de obtener el área.

I.1 **El nivel 1 se caracteriza porque su imagen conceptual sobre la obtención del área se reduce a la aplicación de una fórmula que conoce o es capaz de encontrar, basada en medidas de los lados u otras medidas complementarias.**

I.2 **Entiende el área como un valor (exacto) de comparación con la unidad patrón.**

Un estudiante en este nivel espera responder al problema del área mediante en número "exacto". No considera la posibilidad de dar una aproximación del área. Su experiencia ha sido la de responder siempre con un número para él exacto del valor del área. Considera así incluso las áreas de los círculos que ha obtenido mediante la fórmula $A=\pi r^2$ cuando ha usado para π la aproximación 3'14 (o puede que con algunos decimales más). No tiene conciencia de que el valor así obtenido es un resultado aproximado del valor del área y sigue confiado en que los valores que obtiene siempre son números "exactos", por lo que dará la misma precisión a los valores obtenidos en los tres casos siguientes.

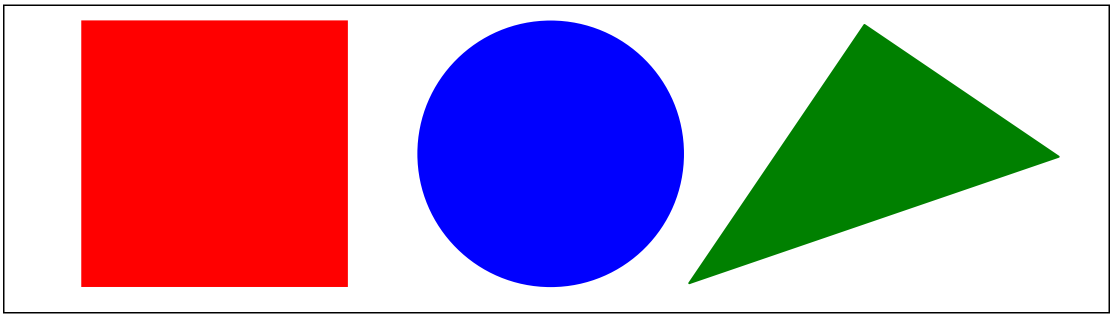


Figura 13. Figuras planas cuyas áreas se pueden obtener usando una fórmula (de forma estática).

I.3	**Es capaz de descomponer una figura de lados rectos en otras figuras conocidas para calcular el área mediante la suma de todas ellas.**

Utiliza la adición de áreas para calcular áreas de figuras que puede obtener mediante descomposición.

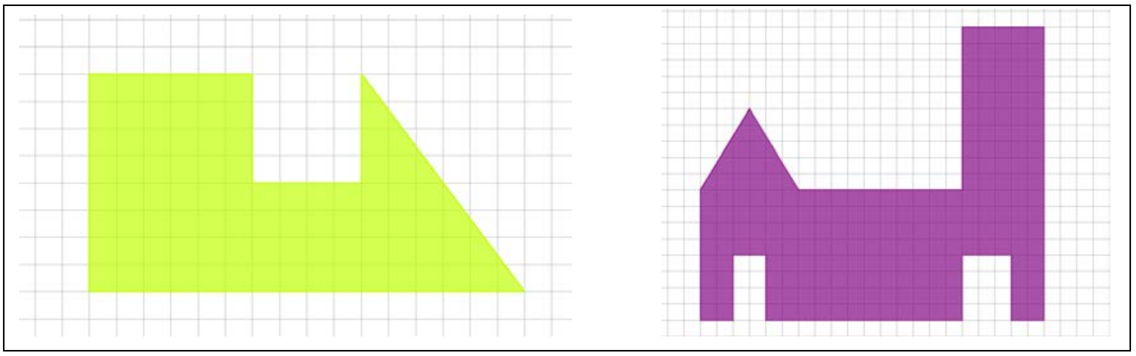


Figura 14. Figuras planas cuyas áreas se pueden obtener por descomposición I.

Así pues, un estudiante en este nivel se siente capaz de obtener el área de las siguientes figuras mediante descomposición pero, haciendo referencia al descriptor I.2, considera "exactos" ambos resultados aunque en el segundo caso haya hecho uso de una aproximación de π.

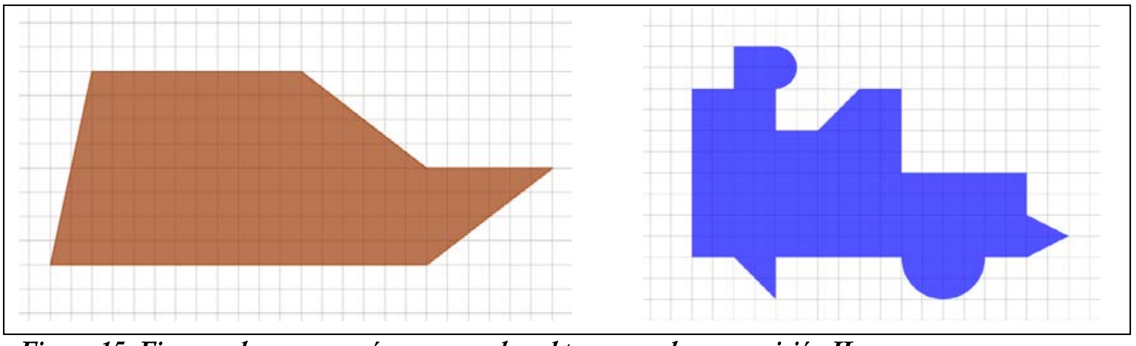


Figura 15. Figuras planas cuyas áreas se pueden obtener por descomposición II.

Separación del nivel II

I.4	**Ante figuras en las que no todos los lados son rectos, como un trapecio mixtilíneo, no es capaz de encontrar ningún modo de obtener el área ni una aproximación, aunque quizá intente ajustar la figura mediante rectángulos o trozos de círculos, esperando un ajuste "perfecto".**

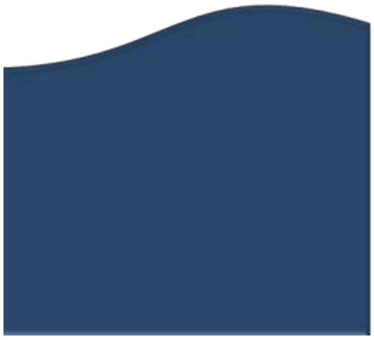


Figura 16. Trapecio mixtilíneo.

Esta situación resulta, en general, novedosa para los estudiantes de este nivel. Nunca antes se han enfrentado a una situación parecida y, si lo han hecho, ha sido como una forma de aplicar la integral (definida). En estos supuestos podemos esperar tres tipos de respuestas si el estudiante se encuentra en este nivel: Puede reconocer que es incapaz de obtener el área, puede querer descomponer la figura con otras conocidas (como hacía antes) usando trozos de círculo para las partes que no tienen lados rectos o puede decir con rotundidad que la obtendría con una integral. Si es este el caso espera, con total confianza, encontrar una función que defina la curva que limita el área y, posteriormente, una primitiva suya. Seguramente nunca se le ha planteado la posibilidad de que no sea tan sencillo obtener la expresión de esa función ni de que, por mucho que pueda conseguirla, tal vez no tenga primitiva conocida. Porque sus experiencias anteriores no suelen ser esas y, más bien, todas las funciones que se le han presentado trabajando con integrales correspondían a funciones con primitiva relativamente fácil de obtener, por lo que cree que siempre es así. En el momento se le dice que existe esa posibilidad se incorpora a una de las dos respuestas anteriores.

Hemos visto en el capítulo 2 que hoy en día los métodos numéricos han desaparecido del currículum de Bachillerato y que el concepto de integral suele omitirse. Eso conlleva que las situaciones tratadas acostumbren a tener solución desde esa perspectiva por lo que se priva a los estudiantes de la posibilidad de plantearse siquiera que podría darse esa situación que, por otra parte, podemos considerar la normal o habitual. Es algo parecido a lo que ocurriría si siempre que un estudiante resuelve una ecuación de segundo grado las soluciones que obtiene son racionales (o enteras): No considerará que podría tener una solución irracional o, si obtiene un resultado de ese tipo, pensará que algo está mal (restringiéndonos solo a soluciones reales).

NIVEL II: Relaciones entre los objetos y las propiedades.

Un estudiante que se encuentra en este nivel asume que puede responder al área de una figura mediante una aproximación. Esta aproximación puede iniciarse con cualquier tipo de polígono pero, a medida que intenta mejorarla (o se plantea calcular las diferentes áreas), el mecanismo le orienta hacia la descomposición en rectángulos (en algunos casos descomponen en trapecios). Usa de manera natural esta descomposición en franjas y es consciente de que cuantas más franjas use mejor aproximación tendrá. Pero se encuentra limitado para obtener el valor del área.

II.1 Usa la descomposición en franjas para aproximar el área de una figura plana tal como un trapecio mixtilíneo.

El estudiante sabe que el área de un trapecio mixtilíneo no tiene por qué ser un valor exacto y que puede obtenerla mediante una aproximación, usando trapecios o rectángulos.

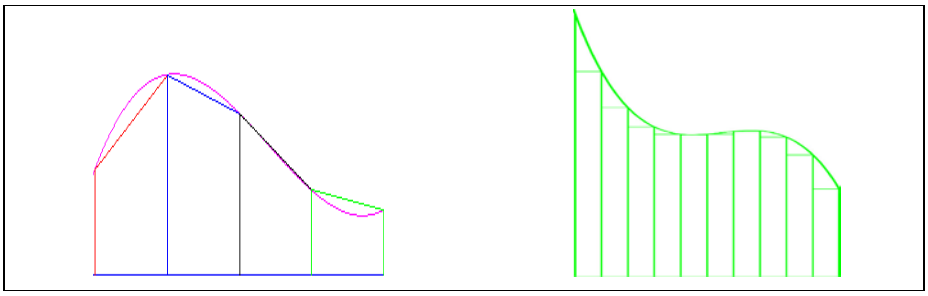


Figura 17. Aproximaciones de un trapecio mixtilíneo por trapecios y por rectángulos.

El salto respecto del nivel I consiste en que es capaz de dar una respuesta para la obtención del área sin recurrir a una fórmula. Y que ese método (según el descriptor siguiente) le proporciona un valor aproximado que puede, incluso, controlar o mejorar.

II.2 Reconoce que si se aumenta el número de franjas rectangulares, mejora la aproximación del área del trapecio mixtilíneo porque hay un mejor ajuste de la figura.

En este nivel el estudiante sabe que a medida que aumenta el número de franjas admite que hay una mejora de la aproximación (a nivel visual y, en consecuencia, numérico). Es capaz de aplicarlo para aproximar áreas de diferentes figuras.

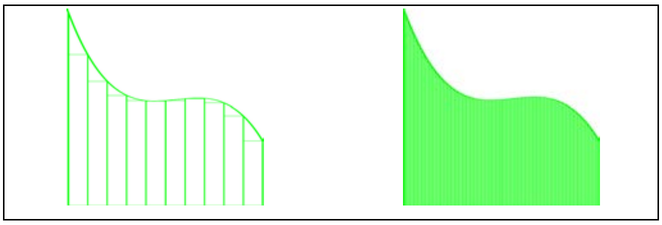


Figura 18. Aproximaciones de un trapecio mixtilíneo con diferente número de rectángulos.

Separación del nivel III

II.3 Sin embargo, reduce la estimación del área a un mero redondeo de los valores numéricos y no la percibe como un proceso indefinido de aproximación.

II.4 Así, si se pide que calcule el área de un trapecio mixtilíneo, sugiere utilizar un número grande de franjas para descomponerla, pero afirma que será imposible llegar a conocer su valor exacto porque "siempre quedarán huecos".

Un estudiante del nivel II no podrá progresar al nivel III puesto que su visión del área sigue siendo estática, a través de una fórmula. Aún en el caso de que utilice adecuadamente la integración a nivel algebraico, no deja de ser para él más que una "fórmula" que le da el valor buscado para el área. Es decir, sigue sin comprender el concepto de área de manera dinámica aunque demuestre cierta destreza algebraica en la obtención del área de un trapecio mixtilíneo.

Ante una sucesión de aproximaciones del área no tendrá en cuenta la idea de convergencia. Eso le impedirá progresar al siguiente nivel. Su respuesta a la vista de la sucesión será un valor obtenido por aproximación (no por convergencia) o la imposibilidad de dar un resultado puesto que entiende que al ser un proceso indefinido no habrá un valor "final" de tal proceso.

Esta situación se da a pesar de que los estudiantes puede que hayan trabajado el concepto de límite y quizá hayan calculado (incluso con éxito) multitud de límites, pero la imagen que tienen del límite no es acorde a su definición, por lo que no pueden progresar en los conceptos relacionados con él, como es el caso de cualquier concepto dinámico.

NIVEL III: De clasificación, de relación.

Cuando el estudiante se encuentra en este nivel ya sabe que, además de obtener aproximaciones de las áreas, puede conocer su valor si es capaz de encontrar el valor al que tienden sucesivas aproximaciones. Un estudiante de este nivel se caracteriza porque tiene en cuenta que el proceso de descomposición es infinito y considera la convergencia de ese proceso para conocer el área. Precisamente define el área como el límite de ese proceso aunque puede que no haga una definición "formal" del concepto.

III.1 Propone descomponer en infinitas franjas para hallar el área de un trapecio mixtilíneo y manifiesta que el proceso de descomposición en franjas no tiene fin.

III.2 Ante la correspondiente sucesión de aproximaciones numéricas del área obtenida mediante la descomposición en franjas, considera el límite de esa sucesión como el valor del área. Este límite puede ser considerado de manera formal o simplemente *intuirse* como la estabilización de los valores numéricos obtenidos.

En este nivel el estudiante, además de reconocer que con más franjas obtiene mejores aproximaciones, extiende ese proceso de mejora de forma indefinida.

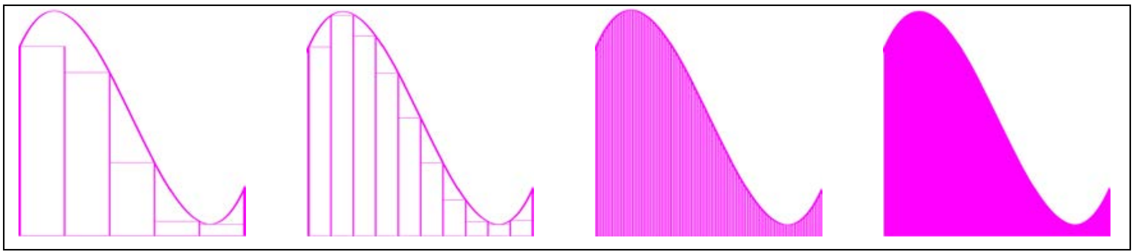


Figura 19. Aproximaciones sucesivas de un trapecio mixtilíneo con rectángulos.

Ahora sabe que ese proceso indefinido ***acaba*** en el área tanto gráfica como numéricamente. El reconocimiento de esa convergencia puede ser de manera formal, a través del concepto de límite, o por la observación de la estabilización de los valores numéricos obtenidos (lo que en algún caso puede llevar a reconocer el mismo concepto de límite).

III.3 Se siente capaz de obtener el área de cualquier figura plana, incluyendo figuras "amorfas" mediante el mismo proceso de descomposición en franjas y su correspondiente aproximación numérica.

Resuelto el problema del área para el trapecio mixtilíneo se siente capaz, incluso, de extender la misma técnica a otras figuras que pueden resultar más cotidianas (pero que, realmente, no encajan con el mecanismo utilizado):

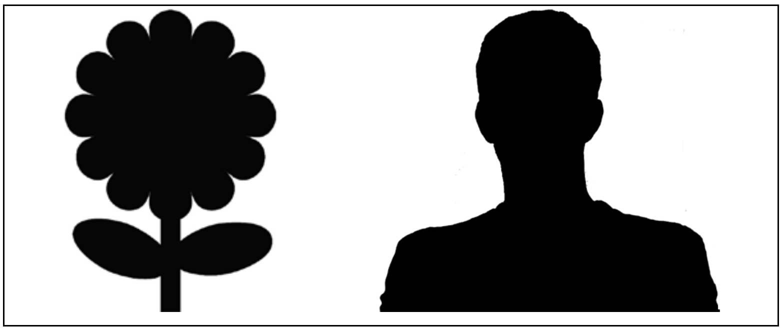


Figura 20. Formas cotidianas.

Progreso hacia el nivel IV

III.4 Es capaz de definir el área como el límite del proceso de aproximación mediante franjas.

El salto al nivel IV requiere un nivel formal tanto en la definición como en el vocabulario utilizado en la explicación de los procesos. En este trabajo no nos hemos planteado la discriminación ni la descripción de este nivel puesto que el trabajo desarrollado, tanto a nivel visual-geométrico como numérico, dificultan su reconocimiento.

3.3.2. Justificación teórica de que los descriptores corresponden al modelo de van Hiele y responden al modelo de Vinner

Vamos a comprobar que nuestros descriptores del concepto de área corresponden al modelo de van Hiele (objetivo 1) verificando que cumplen las condiciones descritas en 1.4.2. y que van ligadas a las propiedades de los niveles detalladas en 1.1.4. Inicialmente vamos a explicitar las condiciones 1, 2 y 4, es decir, la jerarquía, recursividad y secuencialidad de nuestros descriptores así como el progreso gradual, nivel a nivel, del razonamiento observado desde el pensamiento y no desde las destrezas.

El primer descriptor, 0.1, muestra los elementos básicos de conocimiento para poder construir el concepto de área. En los descriptores I.1 y I.2 se detallan los aspectos básicos e iniciales del cálculo de áreas en el currículo: aplicación directa de una fórmula y comparación con la unidad. El descriptor I.3 implica un grado más de complejidad pues requiere otro proceso añadido que es el de partición del problema. El descriptor I.4 nos muestra una dificultad, una barrera, para poder progresar al nivel II, por lo que si un estudiante da evidencias de esta situación, aunque pueda manifestar algún descriptor del siguiente nivel, retrocederá al primero ante cualquier situación de duda (regresión).

El descriptor II.1 denota un salto importante al nivel II y se empieza a considerar la aproximación como "solución" al problema. Además se aprecia claramente la propiedad de adyacencia respecto al descriptor I.3, pues generaliza la respuesta a otras situaciones. El siguiente descriptor, II.2, inicia una nueva actividad del pensamiento, la mejora de la aproximación. Esta es la base para poder progresar al nivel III. Los descriptores II.3 y II.4 nos vuelven a mostrar situaciones que impiden el progreso al siguiente nivel. El proceso de aproximación no se "extiende" suficientemente o de la manera adecuada. Puede estar confundiendo “aproximación” y “tendencia” lo que no le permite avanzar y enfrentarse a nuevas situaciones.

En los descriptores del nivel III se muestra la “extensión” de la aproximación, la continuación del proceso hasta las últimas consecuencias: la obtención del límite. El uso (o no) de este término es independiente de la consecución o demostración del nivel de razonamiento. De nuevo es evidente la adyacencia entre dos descriptores, el II.1 y el III.1, pues este último es consecuencia de la adquisición del primero.

En este recorrido “cronológico” por los descriptores se pueden observar todas las características detalladas en las condiciones 1, 2 y 4. Las evidencias observadas en el razonamiento del estudiante construyen paso a paso el concepto de área con una referencia visual encaminada a crear un concepto-imagen acorde a su definición. El progreso al nivel III señala la consideración del área como un concepto dinámico, mientras que en los niveles I y II es estático. Además, los descriptores de separación I.4, II.3 y II.4 corresponden a conflictos entre el concepto-imagen y el concepto-definición. Por todo ello se observa cómo se ha encajado el modelo de Vinner en la propuesta (objetivo 4).

Respecto a la condición 3, que incide en la vinculación entre el lenguaje y el nivel de razonamiento, las pruebas desarrolladas en esta extensión del modelo de van Hiele muestran esa relación. Más aún, se han desarrollado teniendo en cuenta este factor. En el siguiente apartado haremos un comentario respecto a cómo se ha aplicado en el desarrollo de la entrevista y en 3.2.2 ya se ha indicado qué papel jugaba el lenguaje en el planteamiento y desarrollo del test.

CAPÍTULO 4

DETALLE DE LA INVESTIGACIÓN (PARTE EXPERIMENTAL)

4.1. Descripción y estructura de la entrevista clínica

4.1.1. Características generales de la prueba

El objetivo principal de la entrevista es la formulación de los descriptores del concepto de área. Este ha sido no solo el resultado de la prueba sino que ha sido el punto de partida en su diseño. La formulación inicial de los descriptores de los niveles surge, por un lado, de la propia experiencia docente a través de la cual se han podido constatar diferentes formas de razonamiento y, especialmente, situaciones "complicadas" de resolver en este aspecto, que dificultan la posibilidad de avanzar o profundizar en el concepto de área. Por otro lado, se ha estudiado el tipo de situaciones formuladas en los descriptores de otros conceptos y se han buscado los aspectos clave para el avance en el nivel de razonamiento.

Partiendo de una propuesta inicial de descriptores del concepto de área se ha procedido a diseñar el guion de una entrevista semiestructurada que permitiera la evaluación de dichos descriptores. Con las primeras entrevistas realizadas se ha podido matizar o reformular los descriptores iniciales. Por tanto, la formulación final de los descriptores es el resultado de un proceso de *feed-back* entre descriptores y entrevistas. El guion que adjuntamos es el resultado final de ese proceso de refinamiento para la formulación de los descriptores: Esa última versión es la que ya proporciona seguridad en la detección de los niveles, de acuerdo con la formulación de los descriptores a la que finalmente se ha llegado.

Para poder "probar" los descriptores propuestos (ver si "definían" el nivel de razonamiento y observar las dificultades que impedían el progreso al siguiente nivel) se decidió trabajar, como ya hemos dicho anteriormente, con estudiantes de entre 16 y 20 años. En estas edades ya se ha desarrollado el currículo de matemáticas necesario para poder conocer el concepto de área. Es decir, ya debe haber aparecido el concepto de integral en mayor o menor profundidad y se ha trabajado el concepto de límite (asociado al dinamismo y al concepto de infinito). Los estudiantes de bachillerato de la muestra cursan matemáticas en su modalidad y los universitarios cursan diferentes tipos de ingeniería. Se puede considerar, pues, que los estudiantes están en situación de poder razonar sobre el concepto de área según los descriptores del nivel III. En total se han realizado 21 entrevistas: 10 a estudiantes de bachillerato y 11 a estudiantes de los primeros años de universidad.

Aunque se ha trabajado con un único guion se puede decir que cada entrevista ha sido diferente. Según el tipo de respuesta de cada entrevistado y del lenguaje utilizado (términos erróneos, en algunos casos) se han añadido preguntas clarificadoras sobre sus respuestas para intentar que llegaran a darse cuenta de sus incoherencias, pues a ningún entrevistado se le ha "corregido" sobre sus ideas sino que se le ha hecho replantearse su respuesta; en algunos casos se han podido saltar preguntas pues las contestaban en momentos anteriores; en otras ocasiones ha habido que volver a preguntas precedentes para ayudar a "reconstruir" o afianzar alguna idea que en algunos momentos parecía clara y más tarde dejaba de estarlo... Es decir, lo habitual en este contexto de entrevista semiestructurada y socrática, tal como hemos visto en el capítulo anterior.

Todos los entrevistados se ofrecieron a realizar la prueba de manera voluntaria y sabiendo que formaban parte de un estudio, aunque inicialmente ignoraban sobre qué concepto pues era necesario un cierto grado de improvisación en sus respuestas. Por este mismo motivo se pidió a los entrevistados que mantuvieran discreción sobre el tema y las preguntas, para evitar condicionar a otros estudiantes que hicieran la entrevista posteriormente. Todas las entrevistas fueron grabadas y aparecen anexadas a esta memoria. Antes de comenzar se advertía de esta condición –pues era necesario para el estudio– y todos los entrevistados accedieron sin ningún tipo de dificultad.

Como cualquier entrevista de este tipo, se procuró iniciarla en un ambiente relajado, dejando bien claro que no era un examen, que no se podía "hacer mal". Las primeras preguntas se utilizaban también para confirmar esa impresión y crear un ambiente más cómodo. Sin embargo, a medida que avanzaba la entrevista, algunas preguntas empezaron a suponer un esfuerzo, no solo de concentración sino también de razonamiento. Muchos de ellos dijeron haber terminado la entrevista cansados.

Siendo conscientes de la necesidad de mantener ese clima de tranquilidad y evitar que el entrevistado se sintiera presionado por algún motivo, se intentó que el tono de la entrevista fuera cordial, especialmente se evitó hacer gestos que pudieran hacer que el entrevistado pensara que actuaba mal cuando las respuestas eran conceptualmente incorrectas.

El aspecto numérico se introduce como una suerte de "mecanismo que permite sumar áreas de rectángulos y obtener su valor (aproximado)". Es decir, seguimos dentro de lo estático porque precisamente queremos escuchar qué significan para cada entrevistado ese mecanismo y los números que suministra. Nos pareció conveniente utilizar figuras simples junto con la idea de rectángulos que pudieran asimilarse a las representaciones gráficas de las sumas de Riemann, es decir, un mecanismo que sencillamente va incrementando ese número de rectángulos, del que después mostraríamos una visión numérica. Desde luego, no se utiliza la palabra «integral» en ningún momento y su mención por parte de algún entrevistado –casi siempre de forma imprecisa– no fue corregida.

La entrevista tiene un contenido esencialmente visual: Aunque las preguntas se formulaban verbalmente, en cada una se mostraba al entrevistado una hoja que reproducía el enunciado. En casi todas las preguntas se le dejaba ver alguna representación gráfica sobre la que versaba la pregunta (el guion completo puede verse en el apéndice-1) para ayudar a crear una imagen que fuera ligada al mecanismo numérico utilizado. Como puede comprobarse, en determinados momentos se entregaba información, coherentemente con el carácter socrático del guion de la entrevista.

Las representaciones evitan cualquier tipo de referencia visual a las funciones, no aparecen los ejes de coordenadas, etc. Si algún entrevistado ha relacionado las imágenes con la integral de Riemann ha sido porque ya tenía interiorizada esa imagen. Según avanza la prueba van desapareciendo las medidas de los lados de las figuras elementales que usamos para dejar en juego solo el proceso visual y forzar una explicación verbal que fuera más allá de dar una operación (por ejemplo, que en lugar de decir "3 por 6" que el entrevistado diga que multiplicaría los lados del rectángulo).

En el transcurso de la entrevista-diálogo se evitó entrar en las definiciones de los términos que se usaban: curvas, rectas, rectángulo, triángulo, puntos, gráfica (y, desde luego, área). Recordemos que el reconocimiento de esos mismos términos se relaciona con nuestros descriptores (0.1). El término *zoom* se usó acompañado de sinónimos tales como ampliar, lente de aumento, etc., pero no hubo ningún problema en su comprensión debido a lo habitual de esta herramienta en la tecnología actual.

El ritmo al que transcurría cada entrevista era bien distinto según el nivel que iba manifestando el entrevistado, hasta el punto de que pudiéramos considerar una posible relación entre ese nivel previo y el tiempo transcurrido en completarla, generalmente inferior a los treinta minutos.

Por lo que respecta al contenido de la prueba, el recorrido en líneas generales es:

- Partir de conceptos conocidos y cálculo de áreas sencillas.
- Extender la descomposición y adición para el cálculo o aproximación de áreas (concepto estático).
- Considerar el proceso de aproximación como un proceso infinito (concepto dinámico).

Las primeras preguntas (1 a 6) no solo pretenden evocar el área de un rectángulo sino que introducen la idea de la descomposición para obtener el área, que inmediatamente va a desembocar en una situación más compleja, donde la mera descomposición y la fórmula para un rectángulo no son suficientes (7 a 9).

En este momento introducimos el mecanismo numérico que permite sumar áreas de rectángulos para ver si, ligado a la aproximación gráfica, se evidencia el carácter dinámico del área. Después de trabajar con un trapecio mixtilíneo se retoma otra figura que podría tratarse de forma estática, el trapecio. Siendo capaces de obtener el área de esta figura se les enfrenta al uso del mecanismo numérico y se insiste en la secuencia numérica para, según el caso, consolidar la idea de convergencia o empezar a perfilarla.

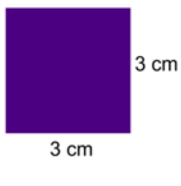
El final de la entrevista (15 a 16) sirve para mostrar la idea que el entrevistado tiene en ese momento (puede que no sea la misma que al principio de la entrevista) sobre el concepto de área y se invita a describir un método general.

Cabe destacar que la entrevista se presentaba también como una experiencia de aprendizaje. Resultó gratificante observar la implicación de los alumnos en su desarrollo así como su interés por saber cómo se podía hacer aquello a lo no habían sabido dar solución una vez acabada la entrevista.

4.1.2. Guion comentado

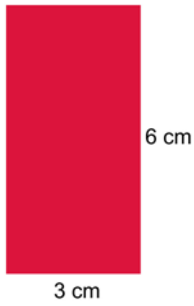
Las preguntas se presentan siempre en hojas independientes y en algunos casos se enseña el enunciado en diferentes fases. La estructura de la entrevista es progresiva. Se va avanzando poco a poco en el concepto así como en las estrategias necesarias para dar solución a las preguntas planteadas. Como ya hemos repetido, se pretende que la entrevista se convierta en una experiencia de aprendizaje, lo que no implica necesariamente un progreso del nivel de razonamiento pues para ello sería necesario acumular diferentes experiencias. Como ya hemos dicho también, el primer grupo de preguntas trata sobre el cálculo de áreas sencillas (cuadrado y rectángulo), la descomposición de figuras más complejas en otras sencillas y la adición de áreas.

1. ¿Cuál es el área de esta figura?

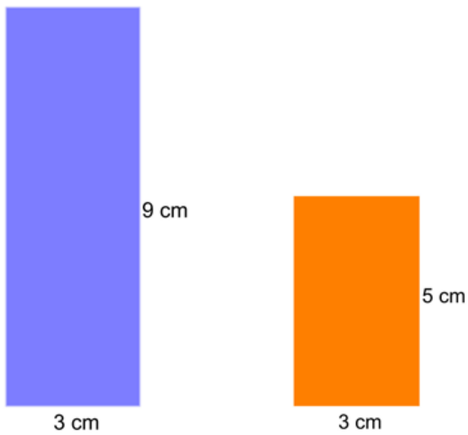


Se pide el área de un cuadrado, una figura que no entraña ninguna dificultad. La trivialidad persigue generar la sensación de que no se trata de una prueba complicada y, de paso, observar si el uso de la unidad de medida es correcto. A continuación se pide el área de un rectángulo y luego de otros dos.

2. ¿y de esta otra?



3. Indica ahora las áreas de las dos figuras siguientes

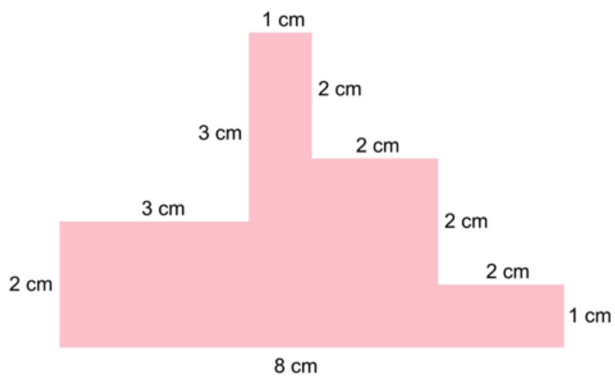


La sencillez de estas preguntas contribuye a mantener un ambiente cómodo. Se espera que, al tener que utilizar las dos dimensiones, se ajuste el uso de la unidad de medida si es que en la pregunta 1 no se ha aplicado bien.

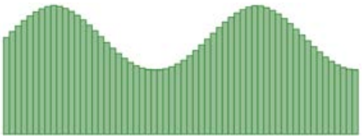
4. ¿Cuál será el área de la figura?

En la cuarta pregunta se empieza a considerar la adición de áreas, sentando las bases para el desarrollo posterior. La figura se presenta sin medidas pero los colores ayudan a relacionarlas con los rectángulos anteriores. Con ello pretendemos centrar la atención en el proceso aditivo y no en el cálculo. Es también una preparación para la pregunta 6. Lo que se haga ahora se podrá hacer después pues es una situación similar.

5. ¿Cómo obtendrías el área de?



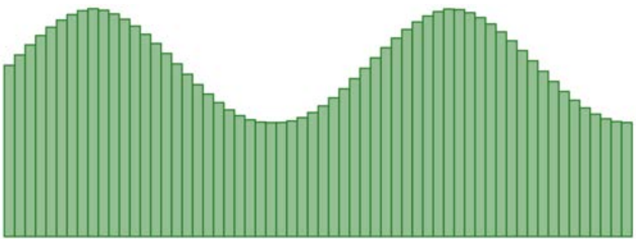
En la quinta pregunta se fuerza la descomposición en figuras conocidas. La figura presenta de nuevo medidas para generar cierta seguridad, aunque pretendemos que centren su atención en la descomposición. La pregunta no pide el valor del área sino el modo de obtenerla. Con esto se pretende introducir en la entrevista la idea de la descomposición (en franjas o cuadrados) para aplicarlo posteriormente.

6. ¿Y el área de  **?**

La pregunta 6 tiene una doble intención. En primer lugar pretende generar cierto desconcierto. Se ha buscado una figura compuesta únicamente por rectángulos que, según su grado de ampliación, puede parecer un trapecio mixtilíneo. Se espera que, para aquellos estudiantes cuyo concepto-imagen de la integral esté ligado a una figura semejante, la pregunta pueda crear cierta confusión.

A continuación se les muestra la imagen con más claridad, ampliada.

Con la imagen mejor definida vemos que tenemos

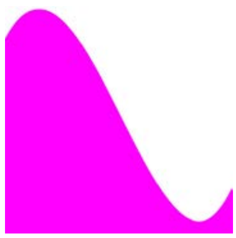


En este momento la mayoría apreciaba ya que solo eran rectángulos "pegados" como pasaba en la pregunta 4, pero otros seguían insistiendo en que veían una curva y podían aplicar una integral.

Como ya se ha dicho antes, la figura realmente tenía la intención de provocar cierta confusión a los entrevistados que, conociendo el concepto de integral, no tuvieran una imagen conceptual adecuada. Se buscó intencionadamente una figura que pudiera parecerse al *típico* trapecio mixtilíneo y que evocara esa imagen. En los casos en los que se mencionó esta idea se pidió que clarificasen a qué se referían con "calcular la integral" y todos dejaron claro (aunque con un vocabulario menos riguroso) que "buscarían" la ecuación de la curva y después obtendrían una primitiva. En este punto algunos querían saber dónde estaban los ejes y también necesitaban conocer los valores de x para obtener los límites de integración.

Hasta aquí el proceso que necesita realizar un estudiante para obtener el área se basa en la descomposición de la figura en otras de las que puede calcular el área mediante una fórmula y después sumar esas áreas. Con la pregunta siguiente se entra en otra fase de la entrevista. Las situaciones planteadas resultan más complicadas y, generalmente, el nivel de concentración tiene que ser mayor. Estas situaciones tendrán diferente tipo de respuesta según sea el nivel de razonamiento del estudiante. En general se plantean casos a los que quizá nunca antes se habían enfrentado y eso supondrá realizar un esfuerzo (quizá tanto mayor cuanto menor sea el nivel de razonamiento de cada estudiante).

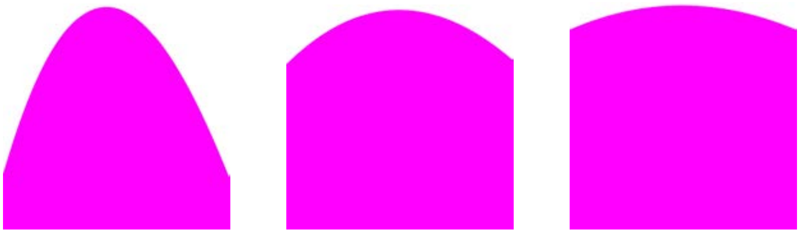
7. Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?



Ésta es una pregunta de choque. Rompe drásticamente con las situaciones anteriores. Si el entrevistado sabe cómo responder ante esta situación, las preguntas posteriores servirán para reforzar su idea o para matizarla si es necesario.

Si no sabe dar respuesta, en las preguntas posteriores se le sugerirá una forma de actuar que después podrá generalizar para usarla en otras figuras.

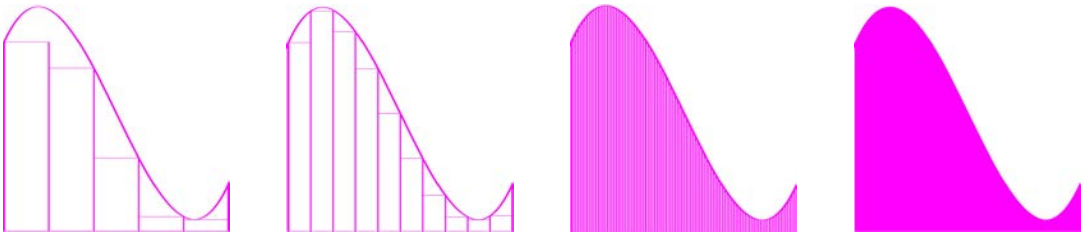
Haciendo varias veces *zoom* sobre la imagen observamos la secuencia.



Así, si quiere hacer uso de la descomposición en rectángulos, por creer que es un caso similar al de la pregunta 6, esta información sirve para dejar claro, mediante ampliaciones, que esta figura no es así. Ahora la parte superior sí es una curva.

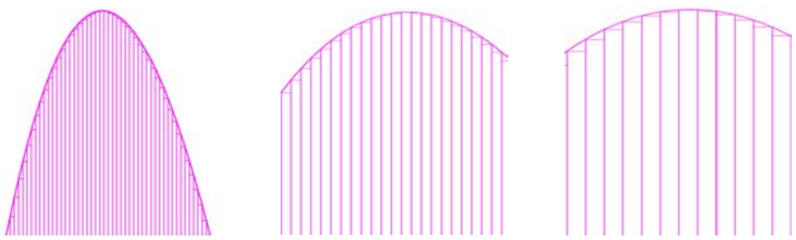
Pero la intención de la descomposición o esa búsqueda de los rectángulos prepara el terreno para continuar con la entrevista.

8. Ahora observa estas imágenes. ¿Qué se está haciendo?



Por primera vez en la entrevista se presenta, visualmente, un proceso de descomposición que aparenta continuar de manera indefinida. El entrevistado ya está familiarizado con la descomposición en rectángulos. Se espera que tome conciencia de que puede descomponer en franjas cualquier figura. Más aún, que ese proceso puede no tener fin. En la imagen aparece la figura de la pregunta 7 “ajustada” por rectángulos. En la primera imagen solo hay 5, en la segunda 10, en la tercera 100 y en la última 200.

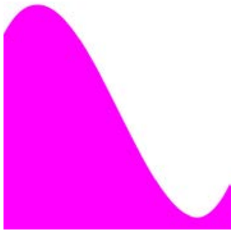
Observa estos *zoom* de la última imagen



La última imagen de la pregunta 8 puede dar la apariencia de estar “totalmente” pintada. Realmente es así por el elevado número de rectángulos en que se ha descompuesto y las limitaciones que tenemos para representarlos en esa escala. Se ofrecen las ampliaciones anteriores para clarificar este aspecto. Esta visión sugiere en el entrevistado la idea de volver a dividir en más rectángulos y preguntarse qué pasaría al ampliar de nuevo la imagen. Así se estaría sugiriendo la observación de una descomposición infinita.

9. ¿Tienes alguna sugerencia ahora respecto a la pregunta

7. Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?



Expuesta ya la idea de descomposición en franjas, aunque sea solo a nivel estático, se vuelve a plantear la pregunta 7 para ver si el entrevistado considera la descomposición como un método posible para obtener el área de esta figura. Puede que el entrevistado siga pensando que no hay solución, pero se puede esperar también que en general adopte la propuesta como un proceso válido para "acercarse" al valor del área buscada. Es una forma de aproximar el área.

10. Imagina que tenemos una "herramienta" a la que llamaremos S_REC que descompone una figura plana en franjas como en el ejercicio anterior y nos da la Suma de las áreas de los RECtángulos.

Ahora se presenta el mecanismo numérico que servirá para continuar con la entrevista. A partir de este momento la entrevista se plantea desde dos enfoques: el visual y el numérico. Se pretende trabajar desde las dos perspectivas para que se complementen entre sí, teniendo en cuenta el uso de diferentes registros semióticos para garantizar la comprensión integradora del concepto. Este es un aspecto relevante de la entrevista y de él nos ocuparemos en el próximo apartado (4.1.3).

Esta herramienta realiza la descomposición en franjas que se ha trabajado anteriormente, calcula el área de cada franja y las suma todas.

En el caso anterior tendríamos

S_REC(5)= 11,5296

S_REC(10)= 13,2648

S_REC(100)= 14,819415

S_REC(200)= 14,9096980725

¿Observas algo?

Por primera vez se plantea una cuestión numérica. Se pide que observe los resultados obtenidos para diferente número de rectángulos en la descomposición: 5, 10, 100 y 200. Las mismas particiones que aparecen de manera gráfica en la pregunta 8.

11. Aumentado el número de rectángulos tendremos:

S_REC(500)= 14,9638772849

S_REC(1000)= 14,9819383430

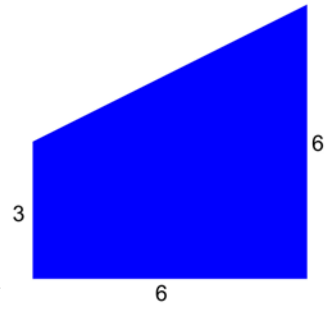
S_REC(10000)= 14,9981938342

¿Qué aprecias en los valores obtenidos?

Ahora se plantea la misma cuestión pero con más rectángulos en las particiones. Si en la pregunta 10 no ha podido apreciar cómo los valores se van estabilizando (realmente hay pocos datos), ahora se puede apreciar que esos valores parecen estabilizarse (porque aumentan de una forma extremadamente lenta y contenida). El límite en el ejemplo que estamos usando es 15, aunque no se pretende que con la información dada se llegue a esa conclusión pero sí a plantearse la idea de convergencia. De hecho, concluir que es 15 no evidenciaría nada bueno...

El caso es que se ha mostrado al estudiante que una descomposición en rectángulos (franjas) que, a medida que se aumenta su número, "rellena" mejor el área de la figura. Por tanto se ha establecido visualmente una acotación de la sucesión de los términos de S_REC. Y además la sucesión es creciente, por lo que se garantiza la convergencia. Con la información mostrada, un estudiante que tenga en cuenta esta convergencia dirá que el área será próxima a 15 o superior a 14,9981938342. Pero si no considera la convergencia podrá decir que no sabe cuánto puede valer el área puesto que los valores de S_REC siguen aumentando, o que es 15 por aproximar el mejor resultado obtenido.

12. ¿Cuál es el área de este trapecio?



Planteamos ahora una situación diferente. El trapecio es una figura en la que se puede aplicar una fórmula o una descomposición (rectángulo y triángulo) para obtener el área con las medidas dadas. No es necesario que el entrevistado recuerde la fórmula del trapecio. Si ve la descomposición se le puede ayudar a obtener el resultado: 27 cm^2.

El objetivo es ahora ayudar al estudiante a considerar que el proceso no tiene fin pero puede obtener (o plantearse obtener) el valor al que se acerca la sucesión numérica. Para ello le proponemos aplicar S_REC y ver qué nos da.

Vamos a aplicarle S_REC.

S_REC(1)= 18

S_REC(3)= 24

S_REC(5)= 25.2

S_REC(10)= 26.1

S_REC(20)= 26.55

S_REC(50)= 26.82

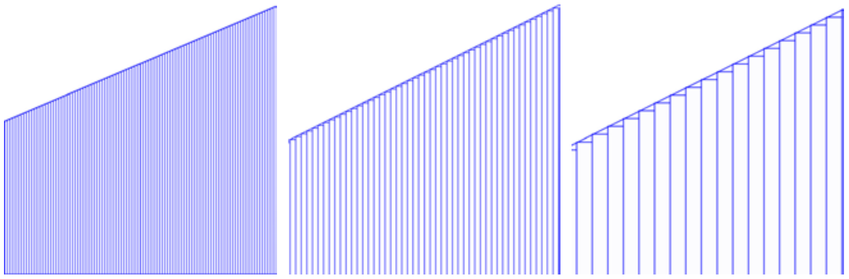
S_REC(100)= 26.91

S_REC(1000)= 26.991

S_REC(10000)= 26.9991

La situación en la que se encuentra es que conoce el valor del área pero la herramienta proporcionada no da ese valor. Se espera que reconozca que cada vez el resultado es más próximo a 27 y que debe ser el límite de esa sucesión, no porque los números obtenidos estén cada vez más próximos a 27 (pues también están cada vez más próximos, por ejemplo, a 26.99999999913427) sino porque han de converger al valor del área que en este caso es 27.

13. Observa qué pasa en la representación de S_REC(100) si hacemos *zoom*.



Retomamos la imagen, el aspecto visual, para enfatizar por qué S_REC no da el resultado exacto. La situación recuerda a la planteada en la pregunta 8. Esta pregunta se puede omitir si el entrevistado detecta esta situación a la vista de los resultados mostrados en la pregunta anterior.

14. ¿Cómo conseguirás obtener con S_REC el valor del área del trapecio?

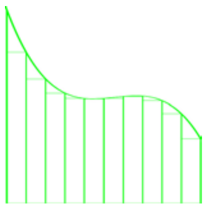
Una vez clarificado el problema se enfrenta a la posibilidad de obtener 27 usando S_REC. La situación es que S_REC de momento ha servido para tener una idea sobre cuánto vale el área de un trapecio mixtilíneo, por lo que ya parece que pueda calcular (más bien, aproximar) el área de cualquier figura y el estudiante se puede sentir algo tranquilo ya en ese sentido. Pero ahora, ante un trapecio sobre el que el entrevistado puede obtener el valor de su área, S_REC se encuentra limitado. Habrá quien piense que es imposible que S_REC dé el valor exacto, quien siga pensando que con otra cantidad mayor de rectángulos se conseguirá y quien plantee usar infinitos rectángulos o ver la tendencia de la sucesión (límite de S_REC). Esta forma de proceder conlleva ya la consideración del área como un concepto dinámico.

15. ¿Cómo obtendrías el área de  **?**

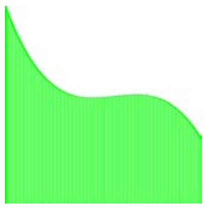
De nuevo la pregunta 7 pero con otro trapecio mixtilíneo. El entrevistado que considere ya el área como un concepto dinámico sabrá cómo conseguir ese valor, y se espera que el resto, después de las experiencias anteriores, sea capaz de expresar cómo aproximarlo. Después de escuchar su respuesta se les muestran los resultados de S_REC tanto gráfica como numéricamente.

Observa qué hace S_REC

S_REC(10)=14.8374



S_REC(100)=15.65578898



S_REC(200)=15.70283444

S_REC(500)=15.73112014

S_REC(1000)=15.74055781

Esta información puede servir para corroborar lo pensado o para sugerir nuevamente una solución al problema.

Un estudiante en el nivel I podría llegar a decir que el área será 14, 15 o 16 (o algún otro valor de los que ve) o que no lo sabe porque el número es cada vez mayor. No puede plantear la posibilidad de seguir el proceso ni considerar el último valor como la mejor aproximación del área que puede conocer con la información dada.

Si el estudiante razona según el nivel II puede responder que el valor del área es aproximadamente 15’74055781 (o una aproximación de ese número, por ejemplo, 15’7 o 15’75), porque sabe que es la mejor aproximación del área que tiene, pero no considera la convergencia para dar solución al problema del área.

En el nivel III de razonamiento el estudiante sabe que el valor del área es el límite de ese proceso de aproximación, el límite numérico de esa sucesión, pero no puede conocer el valor del límite con la información dada. El valor al que converge no es fácilmente imaginable por lo que su respuesta solo puede darse basándose en los valores presentados pero sin precisar el valor, solo aproximadamente. Es decir, no dirá que el área es 15’75 (que es realmente el límite de S_REC en este caso) ni 15’8, ni ningún otro valor, sino que *puede que sea* 15’75 o un valor cercano, o que es superior a 15’7. De todas formas, la pregunta no pide una respuesta numérica sino procedimental. Se pregunta *cómo* obtendrías, no *cuánto* vale. Un estudiante del nivel III expresará que obtendrá el área repitiendo de forma indefinida el proceso de descomposición u obteniendo el valor del límite de ese proceso.

16.¿Cómo expresarías el modo de obtener el área?

Se termina la entrevista pidiendo una definición del concepto del área a través de la descripción del proceso. No se espera una definición formal sino que se trata de observar si el aspecto dinámico del área ya es tenido en cuenta o si sigue siendo un concepto estático. Debemos considerar que el uso habitual en el entorno académico de las edades consideradas acostumbra a limitarse a la aplicación de una fórmula (que puede ser una integral pero considerada a nivel operacional) por lo que la idea que generalmente tiene el estudiante sobre el área es que es un número que se obtiene al aplicar una *fórmula*.

La respuesta a esta pregunta está muy relacionada con la anterior, se trata de la generalización de la respuesta ante el trapecio mixtilíneo a cualquier figura plana. Los estudiantes con un razonamiento acorde al nivel I solo dirán que no saben cómo hacerlo o ajustarán (aproximarán) la figura mediante polígonos o círculos. Pero no plantean la posibilidad de una mejora del ajuste. Si se encuentran dentro del nivel II plantearán realizar diversas descomposiciones en rectángulos (como hace S_REC) y obtener así una aproximación, mejor cuantos más rectángulos utilice. Solo los estudiantes del nivel III consideran el área como el límite, el valor al que converge, ese proceso de descomposición en diferente número de rectángulos.

4.1.3. Doble enfoque: visual y numérico

Las entrevistas que se desarrollaron en las tesis anteriores sobre diferentes extensiones del modelo de van Hiele, se centraban exclusivamente en la imagen visual-geométrica de los conceptos. En nuestro caso añadimos una novedad que va ligada de manera natural al concepto tratado: el aspecto numérico. El concepto de área es un concepto dinámico pero que es inseparable de que su objetivo es proporcionar un número. Este hecho indiscutible es el que nos ha llevado a plantear un doble enfoque durante la entrevista y, posteriormente, en la versión de test. Esta circunstancia viene reforzada por los resultados de R. Duval (vistos en el capítulo 1) sobre la conveniencia del uso de diferentes registros semióticos para garantizar la comprensión integradora del concepto.

En las primeras preguntas de la entrevista se pide al estudiante que responda mediante un número, más tarde solo se le pide un proceso que va ligado a una imagen y en el cuerpo central de la entrevista se le ofrece una herramienta numérica (S_REC) que resulta clave para observar los descriptores de los niveles de razonamiento II y III.

Los resultados que ofrece S_REC van a relacionarse con los procesos visuales para, desde los dos enfoques, conciliar una única imagen del concepto de área. Es decir, se va a desarrollar el proceso de obtención del área de una figura de dos maneras distintas: la visual y la numérica. El objetivo es crear en la mente del estudiante la integración de ambas situaciones aprovechando aquella que le resulte más "comprensible" para entender la otra y darles unidad. Este *juego* se plantea de tres formas distintas a lo largo de la entrevista. En un primer momento se plantea el proceso de manera visual y después de manera numérica (preguntas 8, 10 y 11). A continuación se plantea la situación numérica para más tarde plantear el problema de manera visual (12, 13 y 14). Al final aparecen juntos los resultados visual y numérico del proceso (15).

Como ya hemos comentado, uno de los problemas que nos encontramos al trabajar con conceptos dinámicos es la idea de límite de los estudiantes. Las situaciones que se les plantean en este sentido acostumbran a ser de tipo algebraico y su trabajo en estos casos es meramente operacional, por lo que la imagen que tienen de ese concepto no es la adecuada a su definición. Al plantearnos la comprensión del área necesitamos el concepto de límite (no necesariamente formal). A lo largo de la entrevista se recogen diferentes situaciones que plantean desde los dos enfoques esa "visualización" compartida de convergencia.

Nuestra propia experiencia docente nos lleva a ser conocedores de las dificultades de los estudiantes respecto a la "valoración" de los números, es decir, a su valor real. Como ejemplo podemos citar el caso de π. Por mucho que se ponga como ejemplo de número irracional, que se diga que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y que se trabajen con él diferentes errores de aproximación, gran parte de los estudiantes siguen afirmando (pasado el tema de "Números reales") que π *es* 3'14 (y no que se puede *aproximar* como 3'14). Este problema se plantea casi a diario con los resultados obtenidos en diferentes operaciones que no resulten ser números enteros o decimales exactos (pero que no tengan muchas cifras decimales). La confusión entre *ser* y *parecer* en cuestiones numéricas bien podría ser tema para un estudio posterior.

La situación descrita anteriormente tiene relevancia en nuestra entrevista porque hay que evitar la confusión entre la obtención del área como resultado de un proceso de convergencia y la respuesta al valor del área mediante la aproximación de los resultados obtenidos por diferentes aproximaciones. Así, si el estudiante obtiene la siguiente sucesión de resultados de S_REC:

2
2,25
2,375
2,4375
2,46875
2,484375
2,4921875
2,49609375
2,498046875
2,4990234375
2,49951171875
2,499755859375
2,4998779296875
2,49993896484375

podría adoptar tres posturas diferentes, al menos, según su nivel de razonamiento:

- no sé cuánto puede valer el área puesto que cada vez el resultado de S_REC es un número más grande,
- el área será 2,5 porque es lo que me da si aproximo 2,49993896484375 y

- el área será aproximadamente 2,5 (o un número superior a 2,49993896484375), por la convergencia de la sucesión numérica.

En este sentido, el grupo de preguntas 12, 13 y 14 comienza pidiendo el valor del área del trapecio (que los estudiantes saben obtener de forma estática) y después se comienza a trabajar el proceso de aproximación. El estudiante con un nivel III de razonamiento concluirá que S_REC solo podrá dar el valor del área cuando el número de rectángulos usado sea infinito o cuando se considere el límite de los valores de S_REC cuando el número de rectángulos tienda a infinito. En los demás casos solo se podrá decir que S_REC da valores aproximados del área, es imposible que dé 27, o que es 27 porque es la aproximación 26,9991.

4.2. Detección de los niveles a través de la entrevista

4.2.1. Muestras. Resultados de las entrevistas

Como ya hemos dicho, las entrevistas se han hecho a una muestra de 21 estudiantes, todos estudiantes de bachillerato (con matemáticas como asignatura de modalidad) y primeros años de universidad de diferentes ingenierías. El conjunto de respuestas escuchadas sirvió también para adentrarse mejor en la forma de pensar y de expresarse de algunos estudiantes. En todo caso, con esas respuestas se confeccionaron las alternativas de las contestaciones a las preguntas del test (algunas fueron transcritas directamente de las entrevistas).

De los veintiún estudiantes entrevistados se determinó que tres se encontraban en el nivel I de razonamiento, ocho en el nivel II y nueve en el nivel III. Hubo un estudiante que se consideró que estaba en una etapa de transición del nivel II al III. Entre los tres estudiantes del nivel I encontramos un alumno de 1º de bachillerato, con dificultades para superar el área de matemáticas, y dos de 2º de bachillerato con las matemáticas aprobadas. En el nivel II tenemos cinco alumnos de 2º de bachillerato y tres de los primeros años de universidad. En el nivel III hay un alumno de 1º de bachillerato y los otros ocho son estudiantes universitarios. El estudiante que se encuentra en transición entre los nivel II y III cursa 1º de bachillerato.

Más importante que la misma clasificación en niveles son las primeras impresiones que se obtuvieron de las entrevistas:

- Estudiantes que consiguen buenos resultados a nivel académico en bachillerato denotan una escasa relación entre las representaciones gráficas y los conceptos (visualización). Lo que vuelve a dar muestra de la "algebrización" de los contenidos matemáticos en la educación actual.

- Hay un desconocimiento generalizado sobre lo infinito (siquiera entendido como proceso que no tiene fin) debido a las pocas "experiencias" que los estudiantes viven sobre este concepto.

- Los términos "convergencia" y "límite" son utilizados por muy pocos estudiantes y habitualmente tras forzar mucho la situación. Son capaces de observar la "estabilización" numérica pero no saben transmitirla verbalmente con corrección pese a que teóricamente son capaces de obtener límites de diferentes tipos de funciones.

- El nivel de razonamiento no está directamente relacionado con el nivel curricular.

- Hay estudiantes capaces de relacionar el área con el cálculo de una integral definida que son incapaces de verbalizar los términos "infinito" o "límite". Además, denotan una cierta reticencia a usar aproximaciones y buscan, aún cayendo en incorrecciones, la forma de conseguir un resultado "exacto" o "preciso".

- En muchos casos llaman "triángulos" a los sectores circulares que aparecen entre el lado superior de cada rectángulo y la curva.

- Algunos de los estudiantes muestran una cierta "pereza" para hacer cálculos. Cuando con la pregunta 5 empiezan a aparecer imágenes con muchos rectángulos les preocupa tener que calcular todas esas áreas. De hecho, uno de ellos en esa pregunta 5 dijo que, para obtener el área total calcularía el área de un rectángulo y luego multiplicaría por el número de rectángulos (pese a que evidentemente no son todos iguales).

4.2.2. Análisis de las preguntas

4.2.2.1. Preguntas iniciales

Las primeras preguntas son sencillas, como hemos dicho anteriormente, para conseguir un cierto grado de comodidad. En general fue ese el resultado, pero para algunos ese hecho produjo el efecto contrario pues no creían que pudiera ser tan fácil y pensaban que "lo estaban haciendo mal". En esos casos sí se les dijo que "lo estaban haciendo bien" para conseguir que se relajasen.

La entrevista comenzaba pidiendo el área de un cuadrado de lado 3 cm. Las respuestas fueron numéricamente correctas (menos una) pero algunos no daban la unidad de medida o decían 9 cm.

A continuación, en las preguntas 2 y 3, se pedía el área de un rectángulo y luego de otros dos. Aquí hubo una persona que cometió un error de planteamiento (sumó los lados y dividió entre 2 el resultado). Al retroceder para ver qué había hecho en la pregunta 1 corrigió su respuesta. Llegados a este punto ninguno usaba el cm como unidad de medida. O decía que eran cm^2 o no daban ninguna unidad de medida.

Con la pregunta 3 el entrevistado que había respondido que el área en la primera pregunta era 3, rectificó su respuesta al darse cuenta de que multiplicaba lado por lado.

En la cuarta pregunta se empezaba a considerar la adición de áreas. La figura se presentaba ya sin medidas pero los colores ayudaban a relacionarlas con los rectángulos anteriores. Algunos pedían verlos de nuevo. Solo un entrevistado de nivel I no contestó de la manera adecuada. Tras varias preguntas se dio cuenta de que no había razonado bien y cambió su respuesta.

En la quinta pregunta se forzaba la descomposición en figuras conocidas. La figura presentaba de nuevo medidas pues les hacía sentir más seguros y queríamos que centraran su atención en la descomposición. Se les insistía en que no era necesario que dieran el valor del área, solo se les pedía que describieran qué harían para obtenerla. Todos contestaron adecuadamente aunque muchos prefirieron operar antes que expresar el procedimiento.

Hasta aquí el proceso que necesita realizar un entrevistado para obtener el área se basa en la descomposición de las figuras en otras de las que puede calcular el área mediante una fórmula (en general descomponen en rectángulos) y después sumar esas áreas. Todos los entrevistados, con mayor o menor rapidez, llegan a esa conclusión aunque unos pocos comenten errores numéricos o de operaciones. No se da mucha importancia a este hecho puesto que la pregunta no busca un resultado numéricamente correcto sino un desarrollo correcto del procedimiento.

La pregunta 6 generó un gran desconcierto. El abanico de respuestas fue muy amplio: muchos veían una curva, otros pedían las medidas, otros decían que harían una integral, otros que "ni idea",… Uno de los entrevistados dijo que "*los lados de arriba de los rectángulos dibujan un curva*".

A continuación se les mostraba la imagen con más claridad, ampliada. En este momento, todos (menos uno de los entrevistados) reconocieron que solo eran rectángulos "pegados" como pasaba en la pregunta 4. Ese estudiante y otro más seguían insistiendo en que podían aplicar una integral, el primero porque veía una curva y el segundo muchos rectángulos...

4.2.2.2. Proceso de descomposición en franjas

La pregunta 7 fue la más controvertida tanto en la entrevista como en la versión del test. Solo 6 entrevistados pensaron en hacer una aproximación por rectángulos. Tres de ellos dijeron primero que harían una integral. El resto no sabía qué hacer para conocer o tener una idea del valor del área. Algunos intentaron ajustar trozos de círculos. Uno de los entrevistados preguntó si la figura estaba formada por rectángulos. Se le mostraron las imágenes de las ampliaciones y vio que no. Esta información se preparó para dejar claro, mediante ampliaciones, que esta figura no estaba formada por rectángulos, como pasaba en la pregunta 6.

A partir de este momento se trabajó con la idea de ayudar a los entrevistados a encontrar una forma de resolver la situación, quienes mostraron mucho interés y estaban realmente implicados en el desarrollo de la entrevista: Querían saber cómo se podía conseguir el área pedida.

La pregunta 8 dirige hacia una descomposición visual. Se muestran las cuatro imágenes y se pide que expresen qué se está haciendo, cómo lo interpretan. Todos los entrevistados reconocen que se está "rellenando" al área con rectángulos. Pero llamó la atención que en cinco casos insistieron en que el espacio que queda entre el lado superior de cada rectángulo y la curva es un triángulo.

En esos casos decían que calculando las áreas de los rectángulos y de los triángulos, y sumándolas todas, tendrían el área exacta de la figura.

Ocho de los entrevistados hablaron ya de aproximación pero solo tres dijeron que el área se conseguiría con infinitos rectángulos. En seis casos detectaron que cuantos más rectángulos se utilizaran mejor sería la aproximación que se obtendría. Empezaron a considerar, pues, el área como un concepto dinámico.

La pregunta 9 volvía a plantear la pregunta número 7. Se trataba de ver si en este momento el entrevistado que no encontraba solución antes tenía ya alguna forma de proceder y si los que habían sugerido algún tipo de descomposición podían precisar mejor su respuesta. Entre las respuestas hubo tres casos que insistieron en no saber cómo actuar. Uno de ellos dijo que haría una integral, pero al decirle que podría ser una función que no tuviera primitiva conocida ya no supo qué hacer. De los demás, uno de ellos propuso descomponer en trapecios. El resto descompondría en rectángulos pero no todos con la misma consideración: Uno dijo que si la imagen está formada por muchos rectángulos pues se suman las áreas de todos y otro que dividiría en rectángulos (así obtendría el área de la figura) pero si son más pequeños tendría que hacer mucho más trabajo. No verbaliza en ningún momento que con más rectángulos (o rectángulos más pequeños) el área obtenida es más aproximada al área real. Otros dos seguían viendo triángulos en los “huecos”. Los demás ya tenían claro que con un número finito de rectángulos obtenían una aproximación.

4.2.2.3. Herramienta numérica

La pregunta 10 presentaba la herramienta numérica: S_REC. Con ella se puede obtener el valor numérico de la suma de todos los rectángulos considerados en la descomposición.

En primer lugar se mostraba el resultado de S_REC en los cuatro casos de descomposición de la pregunta 8 (5, 10, 100 y 200 rectángulos). Se pedía a los entrevistados que sacaran algún tipo de conclusión sobre los valores obtenidos. Algunos de los comentarios fueron: “*El valor es cada vez mayor porque se dejan menos espacios*”, “*Cuantos más rectángulos más aumenta el valor*”, “*El área varía porque hay trozos que no coges. Se va aproximando al área real porque se deja trozos más peque-*

ños", "*S_REC cada vez es más preciso, abarca más espacio*", "*Cuantos más rectángulos más vale el área pero cuando son altos menos cambian*", "*Cada vez que descompone en más rectángulos el área es más precisa*"… La mayoría relacionaba con los resultados numéricos con las imágenes mostradas anteriormente.

En la pregunta 11 las respuestas fueron muy similares. Todos apreciaron que los resultados sucesivos eran cada vez menos distantes pero la forma de interpretar qué pasaría si siguiera el proceso era diferente. Ninguno de los tres entrevistados de nivel I consiguió reconocer la "estabilización" numérica ni relacionaron el aspecto visual con el numérico. Uno de ellos dijo "***Aunque** cada vez hay más rectángulos la diferencia es más pequeña*". El resto de entrevistados hablaba de una buena aproximación del área usando el valor de S_REC(10000) o incluso planteaban averiguar la tendencia numérica para conocer el área. Unos pocos dijeron que sería 15 o cercano a ese valor.

4.2.2.4. Concepto estático-concepto dinámico

En este grupo de preguntas (12, 13 y 14) se volvía a crear una cierta confusión. Los entrevistados que en las preguntas anteriores habían empezado a usar la descomposición en franjas como una solución válida al problema del área, se encuentran ante una situación en la que la consideración estática del área les resulta más práctica. Es más, parece que la descomposición no llegaría a dar la solución exacta que ellos pueden calcular. Lo que hace un momento era una buena opción parece presentar problemas rápidamente.

Al analizar el guion ya se ha dicho que el objetivo es que se identifique el valor del área con el límite de las aproximaciones. Todos los entrevistados reconocieron la cercanía entre los valores de S_REC y el valor del área, 27. De nuevo las respuestas de los tres casos de nivel I dejaron evidencia de su desconocimiento del concepto de límite y del infinito. Cuando en la pregunta 14 se les pidió cómo conseguir 27 con S_REC los tres dieron un número finito de rectángulos. Incluso hubo un caso que pensó que con muchos más se pasaría de 27. Entre los demás hubo cuatro que dijeron que obtendrían 27 redondeando las aproximaciones de S_REC. Los demás verbalizaron que no se conseguiría con ningún número (finito), algunos dijeron que con infinitos rectángulos y solo cinco hablaron de usar el límite de la función cuando el número de rectángulos tiende a infinito. Estos últimos se cuentan entre los de nivel III.

4.2.2.5. Aplicación del proceso de descomposición

La pregunta 15 presentaba una situación similar a la pregunta 7, pero ahora todos habían tenido un "entrenamiento" que se evidenció en la mayoría de las respuestas. Antes de mostrar las imágenes y los resultados de S_REC casi todas las respuestas proponían la descomposición en franjas. Con la información facilitada por S_REC algunos se aventuraron a dar un valor para el área y solo los entrevistados de nivel III volvieron a hablar del límite como respuesta al área. Al margen de éstos, todos mantenían una visión estática del concepto de área aunque la mayoría había aprendido que la descomposición en franjas puede ser una buena solución para obtener el área de una figura plana cuando las formas y fórmulas que es capaz de reconocer no le sirven.

La última pregunta pedía la verbalización del proceso de obtención del área que el entrevistado había adquirido (o ya tenía). Las respuestas dadas eran acordes a su actuación ante la pregunta anterior. En algunos de los casos del nivel II se pudo constatar que sabían cómo obtener una buena aproximación del área, decían que tendrían que seguir añadiendo rectángulos para mejorar la aproximación pero no eran capaces de reconocer el área como el "final" de ese proceso de descomposición.

4.2.3. Socratismo de la entrevista

Los diez requisitos que según Jaramillo, Londoño y Jurado (2012) debe cumplir un diálogo de carácter socrático son: intencionalidad, lenguaje, conceptos básicos, experiencias previas, diálogo inquisitivo, pensamiento discursivo, aporte de información, problematización con las ideas, paso por tres momentos y red de relaciones.

Antes de verificar las diez características es importante indicar que aquí solo se comentan algunos casos para dar ejemplo de en qué manera se producen los aspectos enunciados, pero todas las entrevistas han evidenciado los diez aspectos aunque fuera en momentos diferentes a los aquí referidos.

1 Intencionalidad

Los objetivos de la entrevista deben estar muy claros para el entrevistador pero permitiendo respuestas espontáneas:

Desde el inicio de la entrevista el entrevistador tiene claros cuáles son los descriptores de los niveles de razonamiento que debe averiguar si el entrevistado cumple o no. Las preguntas y las diferentes variaciones sobre el guion principal van encaminadas a ello.

2 Lenguaje

Debe usarse un vocabulario adecuado para el entrevistado que le permita una cierta confianza y naturalidad en sus respuestas. Además, el lenguaje será un elemento clave para determinar su nivel de razonamiento.

Ya hemos dicho que el término "integral" no se ha usado a no ser que lo haya hecho el propio entrevistado. También se ha evitado usar términos como "límite" o "tendencia" hasta que él mismo lo ha hecho. En su lugar se hablaba de "acercarse", "ir hacia",... Los estudiantes que han reconocido y nombrado el concepto del límite han sido los que se encuentran en el nivel III. Este último aspecto viene a resaltar cómo el lenguaje va ligado al nivel de razonamiento.

3 Conceptos básicos

Las primeras preguntas deben servir para establecer si el entrevistado posee los conocimientos básicos necesarios para afrontar la entrevista, es decir, deben mostrar si cumple con los descriptores del primer nivel.

El primer grupo de preguntas afianzan el concepto de área y de descomposición necesarios para poder proseguir con el resto de preguntas y para consolidar la comprensión de la herramienta (visual y numérica) central de la entrevista.

4 Experiencias previas

A través de preguntas inquisitivas se indaga sobre lo que el entrevistado "sabe" y responde según sus experiencias anteriores.

La primera fase de la entrevista plantea preguntas muy sencillas en las que el entrevistado expresa sus conocimientos. En la pregunta 7 intenta basarse en situaciones anteriores pero, en general, le cuesta encontrar una situación similar. El recurso más utilizado ha sido hacer referencia a un círculo, posiblemente la única figura *con lados curvos* a la que se ha enfrentado en su vida. Algunos estudiantes de primer curso de universidad o de último de bachillerato que ya han trabajado (calculado) integrales dicen que mediante una integral se podría obtener al área pero necesitaría mucha información que no saben cómo obtener, según reconocen ellos mismos.

5 Diálogo inquisitivo

En esta relación entre entrevistador y entrevistado este último puede ampliar su red de relaciones o modificarla, ver conceptos que no conocía,… *"El entrevistador no le enseña nada al entrevistado, solo lo conduce mediante la indagación y el razonamiento"* (p. 121)

En diversos momentos el entrevistado parece dudar en sus respuestas. Esta situación le lleva a explorar diferentes opciones o soluciones, de las que él solo va descartando unas y tomando otras, ayudándole a comprender qué está haciendo y clarificando los conceptos. El razonamiento que realiza en estos momentos contribuye a aumentar o clarificar su red de relaciones. Un ejemplo de este proceso se ha dado en algunos entrevistados de los niveles II y III que han "reconocido" el concepto de límite tras varias experiencias en las que se les ha pedido un valor para el área conociendo algunos valores proporcionados por la herramienta numérica. Estos estudiantes ya habían calculado límites en la asignatura de matemáticas pero hasta el desarrollo de la entrevista no habían sido capaces de comprender lo que significa el límite de una sucesión.

6 Pensamiento discursivo

Algunas preguntas deben realizarse varias veces durante la entrevista. La primera respuesta muestra lo que el entrevistado sabe y las posteriores muestran si ha cambiado su comprensión del concepto a la vez que permite dar respuestas más elaboradas.

A lo largo de la entrevista hay preguntas que se repiten de manera continuada y que van mostrando cómo evoluciona la comprensión del concepto en el entrevistado. Incluso en algunas entrevistas se ha vuelto atrás, literalmente, para repetir parte de la entrevista puesto que surgían dudas ante nuevas situaciones y era necesario clarificar qué sabía y qué no sabía el entrevistado.

Al margen de estas situaciones más o menos comunes en las entrevistas, hay una pregunta que se plantea del mismo modo en dos ocasiones. La pregunta 7 vuelve a plantearse en la pregunta 9. El objetivo es determinar si el entrevistado incorpora la herramienta visual facilitada como una manera de resolver su problema. A partir de ahí se afianza la base para continuar con la entrevista.

7 Aporte de información

En algunos momentos se debe aportar información para ayudar a llegar a la comprensión del concepto pero "sin sugerir enseñanza ni explicación alguna" (p. 123).

Son diversos los momentos en los que las preguntas van acompañadas de información tanto visual (efecto *zoom*) como numérica. Pero los dos momentos clave de aportación de información son aquellos en los que se presenta la herramienta tanto en su versión gráfica (pregunta 8) como en su versión numérica (pregunta 10). Cabe observar que en ningún momento se indica al entrevistado cómo proceder sino que se le encamina poco a poco para poder encontrar la solución.

8 Problematización con las ideas

Algunas preguntas consiguen que el entrevistado tome conciencia de lo que sabe o lo explicite. Otras sirven para mostrar sus dificultades. En esos momentos esa contradicción le puede llevar a cambiar su red de relaciones previa para llegar a comprender el concepto.

Aunque según el entrevistado esta situación puede aparecer en diferentes momentos, el guion de la entrevista fuerza que surja en tres ocasiones:

Pregunta 6. Se presenta una figura con un lado de apariencia curva que crea una cierta duda que se resuelve rápidamente con la ampliación de la imagen.

Pregunta 7. En este caso el lado superior sí es una curva y a partir de ahí hay diversidad de respuestas. En todos los casos se muestra alguna dificultad que facilita la predisposición a querer saber más. A veces solo necesita una reafirmación sobre lo ya conocido.

Pregunta 14. Ante una figura, el trapecio, de la que se puede obtener el área mediante una fórmula (de manera estática) se pide al entrevistado que indique cómo obtenerla mediante la herramienta mostrada en la entrevista (proceso dinámico). La manera de dar respuesta a esta situación es un momento clave de la entrevista.

9 Paso por tres momentos

El entrevistado debe pasar por tres momentos o situaciones:

- *Cree saber la respuesta.*
- *Se da cuenta de que, posiblemente, no la sabe.*
- *Se plantea llegar a la comprensión del concepto*.

Han sido muchos y diversos los casos en que los entrevistados han pasado por estos tres momentos. Vamos a destacar aquí el caso de algunos estudiantes que ya han calculado integrales y se enfrentan a la pregunta 7.

Estos estudiantes indican que calcularían el área mediante una integral (creen saber la respuesta). Cuando se les hace ver que, aunque conocieran la expresión algebraica de la función tal vez no pudieran obtener una primitiva, entran en conflicto, nunca les había pasado (porque nunca se les había propuesto nada parecido) ni se lo habían planteado siquiera (se dan cuenta de que, posiblemente, no saben). Esto les lleva a querer encontrar respuesta y se muestran receptivos para seguir avanzando (se plantean llegar a la comprensión del concepto).

Más general ha sido la apreciación de estos tres momentos en la pregunta 15. Tras las experiencias de los dos trapecios creen saber responder con el mismo tipo de respuesta que habían usado antes. El hecho de que la tendencia numérica no sea a un entero (como había pasado en las otras dos veces) les lleva a dudar y replantearse cómo hacerlo.

10 Red de relaciones

Durante la entrevista el entrevistado debe construir o fortalecer su red de relaciones respecto al concepto en cuestión mediante los elementos y procesos que proporciona la propia entrevista para razonar o reflexionar.

Son muchos y muy diversos los casos en los que se modifica o amplía la red de relaciones de los entrevistados. Ya se ha comentado que algunos han "descubierto" el concepto de límite en el transcurso de la entrevista. El hecho de que en casi todos los casos se haya, al menos, entendido que mediante la descomposición en franjas se puede aproximar el área de cualquier figura plana supone que se ha ampliado la red de relaciones de muchos de ellos. Más todavía cuando se ha comprendido que el área es el límite de ese proceso de aproximación

Más allá de las diez características resaltadas en este apartado cabe destacar que en todos los casos, al acabar la entrevista, los estudiantes mostraron inquietud por *querer saber más*. Este es un aspecto que pocas veces se detecta en el aula y por el que surgen multitud de propuestas con escaso éxito. Se trata de la ***motivación***, conseguida en todos los casos en los que se ha aplicado le entrevista.

4.3. Descripción del test

4.3.1. Características generales

En el apartado 3.2.2 hemos analizado cómo se planteaba el cuestionario que ahora vamos a detallar. En concreto, allí se hablaba de la problemática que suscita un test con respuestas cerradas dentro del contexto del modelo de van Hiele. Esto nos llevó a plantear una prueba con respuestas cerradas pero que, en el caso de que ninguna fuera capaz de recoger suficientemente las impresiones del encuestado, le permitiera redactar su propia respuesta.

Esta situación lleva a una corrección individual de cada entrevista, pues para ser incluida en el estudio estadístico posterior le asignaremos una de las respuestas ofrecidas. Leyendo la respuesta dada por el encuestado podremos identificar el matiz que consideraba insuficiente en nuestra redacción y relacionarlo con la respuesta más acertada.

La precisión en la clasificación que se hace a través de una entrevista es incomparable con la de un test. Ese punto de vista, como indicamos también en aquel momento, ha llevado a algunos investigadores a poner en entredicho la validez de las pruebas de respuesta cerrada ya que, con gran facilidad, se convierten en medidas de destrezas y no de cualidades de pensamiento, lo que desvirtúa su encaje con el modelo.

Con la introducción de esa posibilidad de redactar la propia respuesta, nos parece que la prueba que planteamos se ajusta a las exigencias del modelo y además nos sirve para conseguir el objetivo 3 descrito en 3.1.1 y llevar a cabo el estudio estadístico que se relaciona con el objetivo 5.

Ciertamente, lo que se refiere a la descripción de los nivel de van Hiele (objetivos 1 y 2) podríamos considerarlo suficientemente probado a través de la entrevista. Incluso para la consecución del objetivo 5 podíamos haber utilizado, con las oportunas modificaciones, el mismo instrumento. Pero ese tipo de vinculaciones necesitan una muestra mayor para su estudio que la que nos puede permitir una entrevista.

En cualquier caso, es el tratamiento estadístico el que condiciona, sobre todo, disponer de un instrumento que pueda ser aplicado a muestras de estudiantes de tamaño significativo, sin los inconvenientes de carácter práctico que conlleva la entrevista individual. Es cierto que el test puede llevar consigo una cierta pérdida de precisión en la valoración individual, pero esta situación es asumible por la posibilidad de automatizar el proceso y, sobre todo, por la de sacar conclusiones de carácter global.

El test es la adaptación de la entrevista a un modelo de cuestionario. No solo coinciden en la mayoría de las cuestiones sino que las respuestas que se ofrecen se han extraído principalmente de las recibidas en las entrevistas. Se repiten por tanto en el test las características de la entrevista. Se trabaja desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista numérico. El carácter socrático pierde fuerza por la imposibilidad de interactuar con el encuestado, aunque el orden en el que se plantean las preguntas pretende que se replantee situaciones ya pasadas y que puedan generar algún tipo de controversia.

Los objetivos que se buscan son:

- Corroborar que los descriptores enunciados determinan los niveles de razonamiento I, II y III del modelo de van Hiele.
- Determinar los niveles de razonamiento en grupos numerosos.
- Usarlo como revisión del concepto de área antes de tratar el tema de la integral.

4.3.2. Análisis del contenido del test

La prueba se realizó a través de un formulario de Google, por lo que se podía realizar tanto desde un ordenador como desde un teléfono móvil. Además de plantearlo en determinadas clases, también se colgó en FaceBook por lo que ha sido accesible desde diferentes entornos. Las preguntas finales de contexto nos sirvieron para determinar la idoneidad de la respuesta dentro de la franja establecida para la muestra.

El enlace es http://goo.gl/forms/jrQVRTl4YL

Utilizando este tipo de formulario todas las respuestas se registran en el “Drive” (una “nube” de almacenamiento de Google) en una hoja Excel con una marca temporal. Esto permite un acceso directo a la información y una codificación inmediata de las repuestas. Además, se genera un “Resumen de respuestas” que indica el porcentaje de respuestas de cada tipo pregunta por pregunta. Mediante este resumen se puede saber qué preguntas han tenido más variabilidad en su respuestas y, en consecuencia, cuáles han resultado más discriminatorias respecto al nivel de razonamiento de los encuestados.

En la edición del formulario se tuvo en cuenta que no se pudiera dejar sin responder ninguna pregunta, para ello se marcaron todas las preguntas como obligatorias y solo se podía avanzar a una pregunta si se respondía a la anterior. Además, después de las pruebas realizadas y atendiendo a la sugerencia hecha por uno de los colaboradores en su puesta en marcha, se decidió añadir la barra de progreso del test. El comentario fue que de otra manera había momentos en que resultaba un poco cansado, pero sabiendo que no quedaba mucho el ánimo para seguir contestando era más favorable.

En el texto introductorio se pide que el encuestado no retroceda nunca a cambiar una respuesta, pues siempre está disponible el botón “atrás”. También se indica que en el grupo de respuestas puede que no haya respuestas claramente incorrectas por lo que debe elegir la que considere mejor.

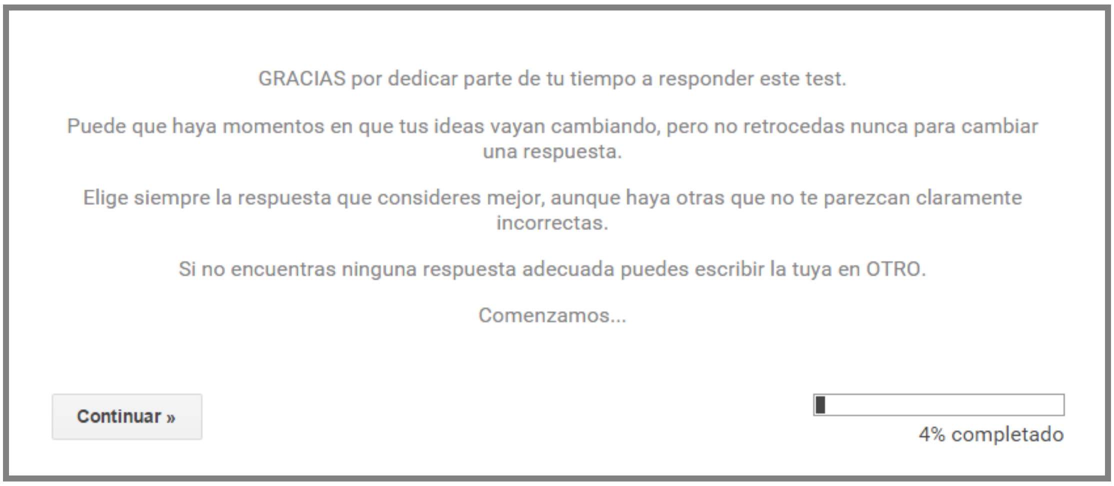


Figura 21. Test: Introducción al cuestionario.

Las preguntas del test son casi idénticas a las de la entrevista, por lo que no vamos a repetir de nuevo la intención con la que se han planteado. En algunos casos se han separado en dos puesto que, durante la entrevista el entrevistador controla la parte de información que entrega, pero en el test la forma de secuenciar esa información es ubicándola en una pantalla-pregunta diferente.

Como ya hemos dicho, la mayor parte de las respuestas ofrecidas en cada pregunta se han redactado tomando como referencia las respuestas recibidas en la entrevista. Otras han sido redactadas buscando diferenciar los niveles de razonamiento y, paralelamente, de expresión.

Antes de analizar los diferentes bloques conviene destacar que la valoración del nivel de razonamiento de una persona no se puede hacer por una o varias respuestas concretas, sino por su forma "general" de respuesta ante determinadas situaciones. En este sentido veremos que el trabajo estadístico considera las respuestas dadas en cada bloque y no cada respuesta de manera aislada.

El primer bloque de preguntas va de la 1 a la 6. Aquí se establece el proceso de descomposición y suma de áreas necesario en los bloques siguientes.

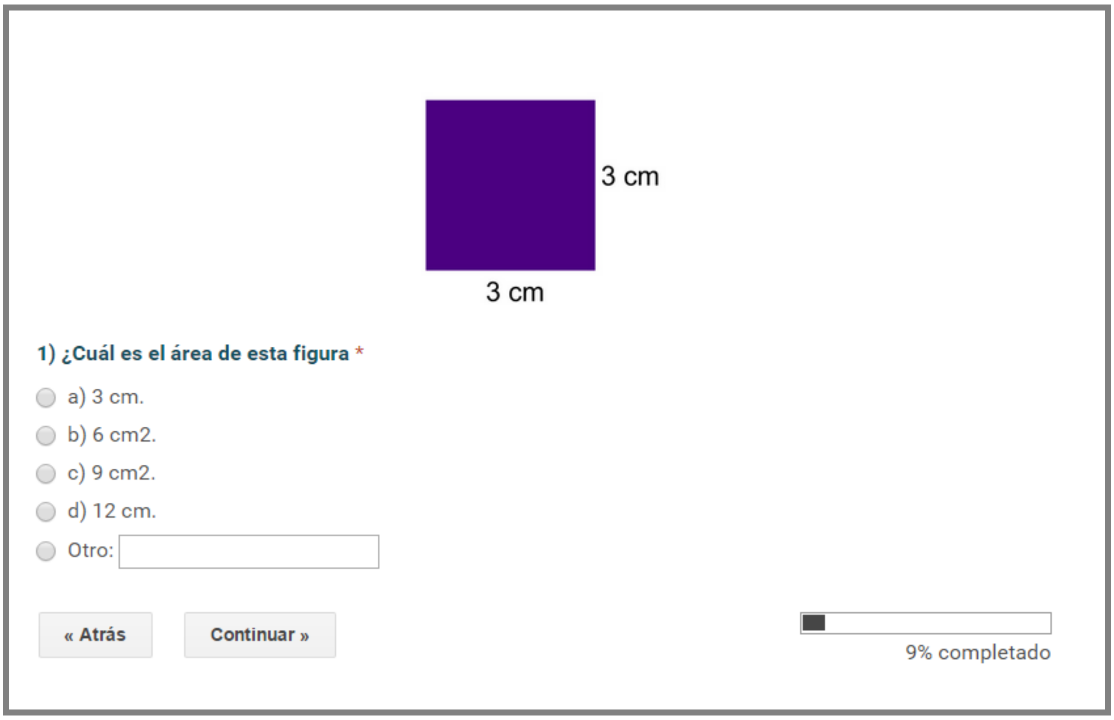


Figura 22. Test: Pregunta 1.

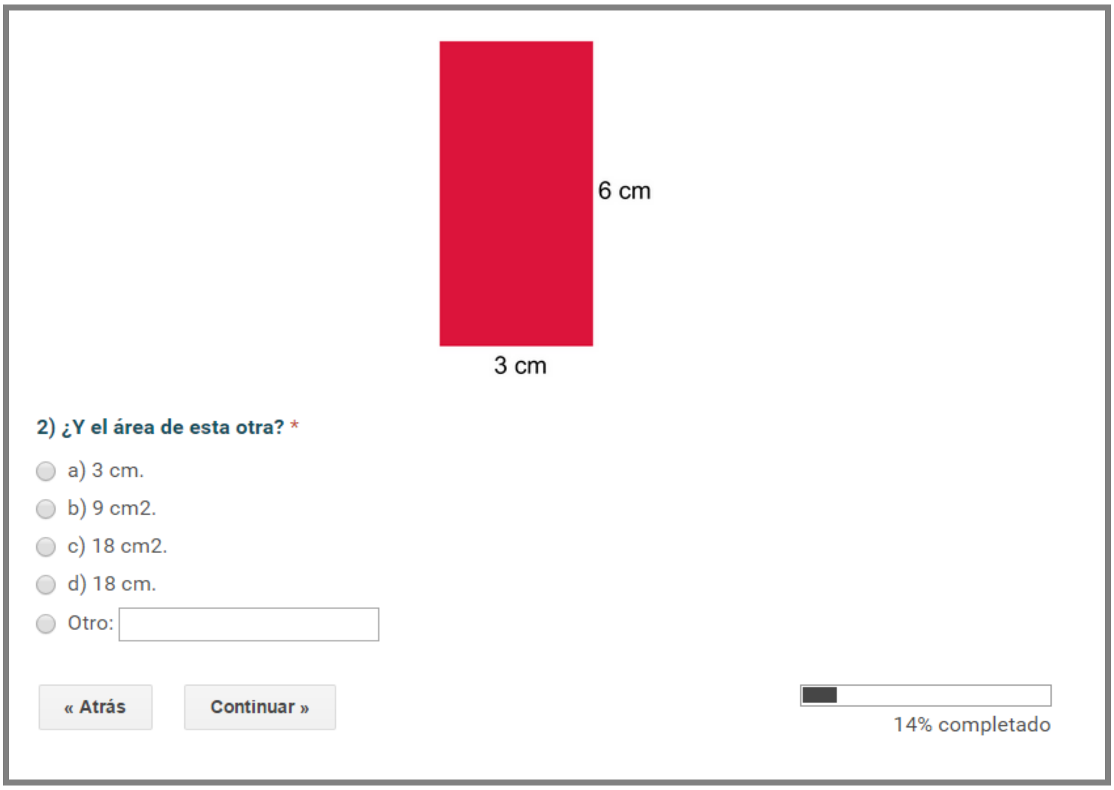
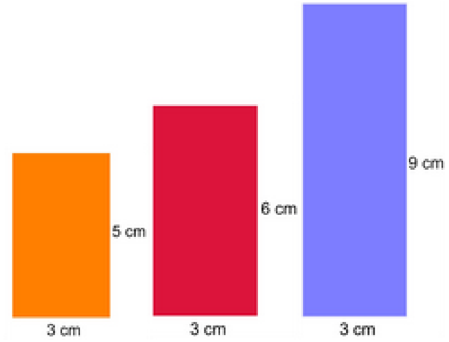
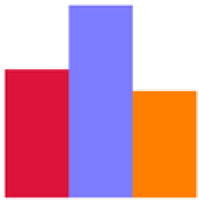


Figura 23. Test: Pregunta 2.



3) A la vista de los anteriores rectángulos, ¿cuál será el área de la figura? *

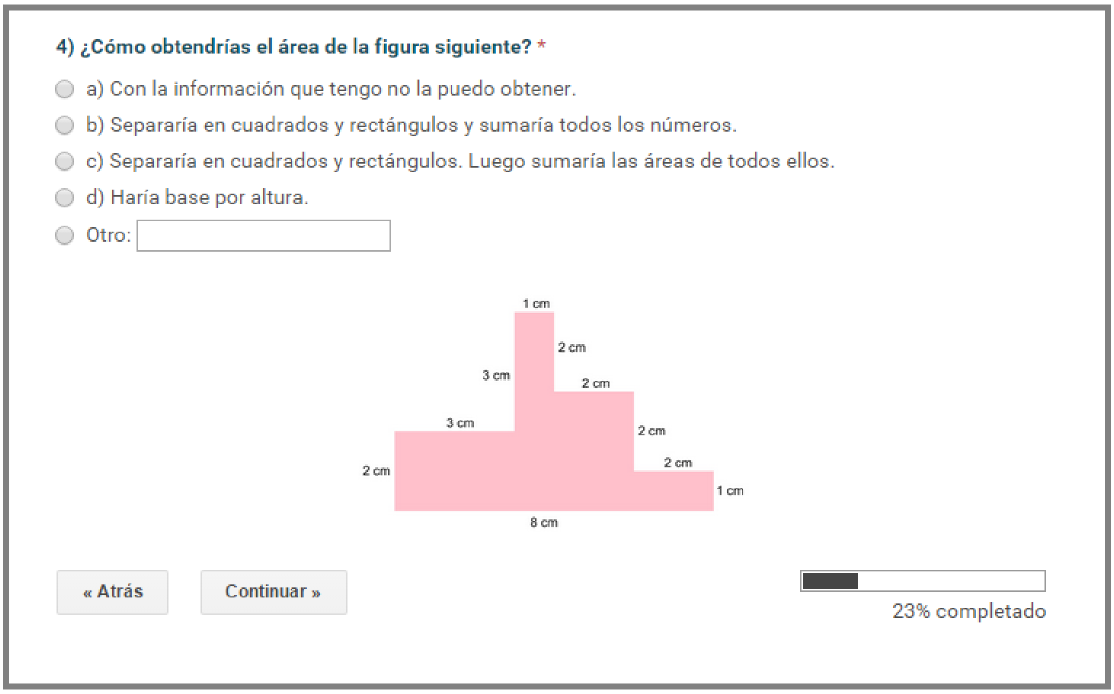
- a) 3 x 3 + 6 + 9 + 5
- b) 3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5
- c) 3 x 3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 3 x 6 + 3 x 3 x 9 + 3 x 3 x 5
- d) 3 x 6 x 9 x 5
- Otro:



« Atrás   Continuar »

19% completado

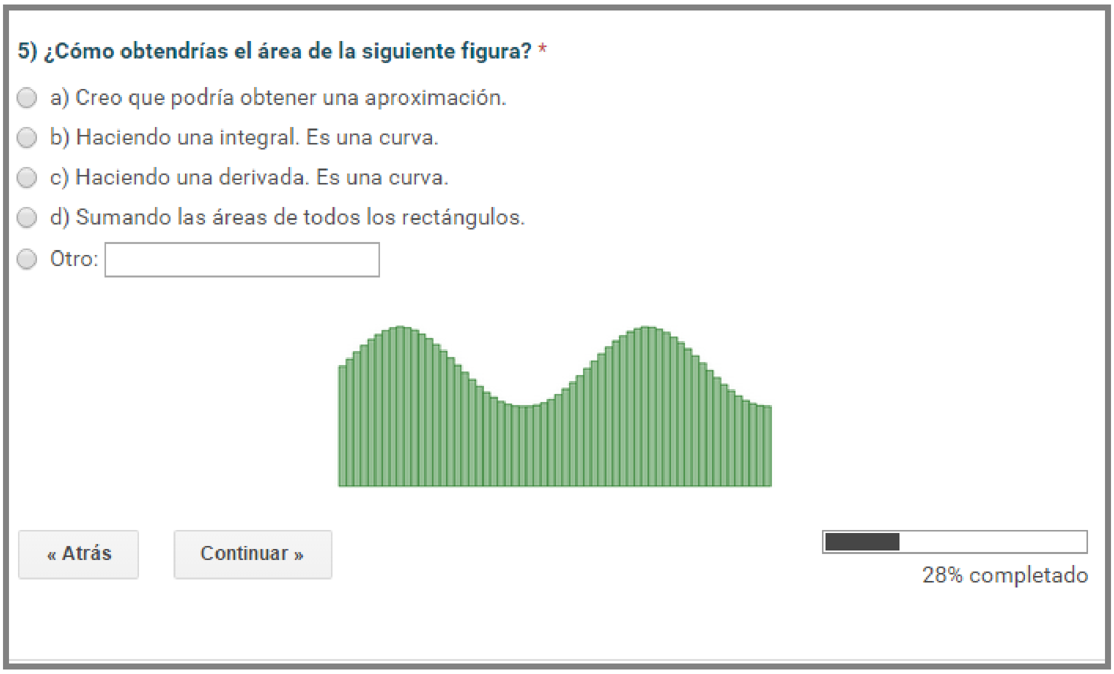
Figura 24. Test: Pregunta 3.



4) ¿Cómo obtendrías el área de la figura siguiente? *

- a) Con la información que tengo no la puedo obtener.
- b) Separaría en cuadrados y rectángulos y sumaría todos los números.
- c) Separaría en cuadrados y rectángulos. Luego sumaría las áreas de todos ellos.
- d) Haría base por altura.
- Otro:

Figura 25. Test: Pregunta 4.



5) ¿Cómo obtendrías el área de la siguiente figura? *

- a) Creo que podría obtener una aproximación.
- b) Haciendo una integral. Es una curva.
- c) Haciendo una derivada. Es una curva.
- d) Sumando las áreas de todos los rectángulos.
- Otro:

Figura 26. Test: Pregunta 5.

Tanto "integral" como "derivada" han sido respuestas dadas en la entrevista, por ese motivo se recogen aquí.

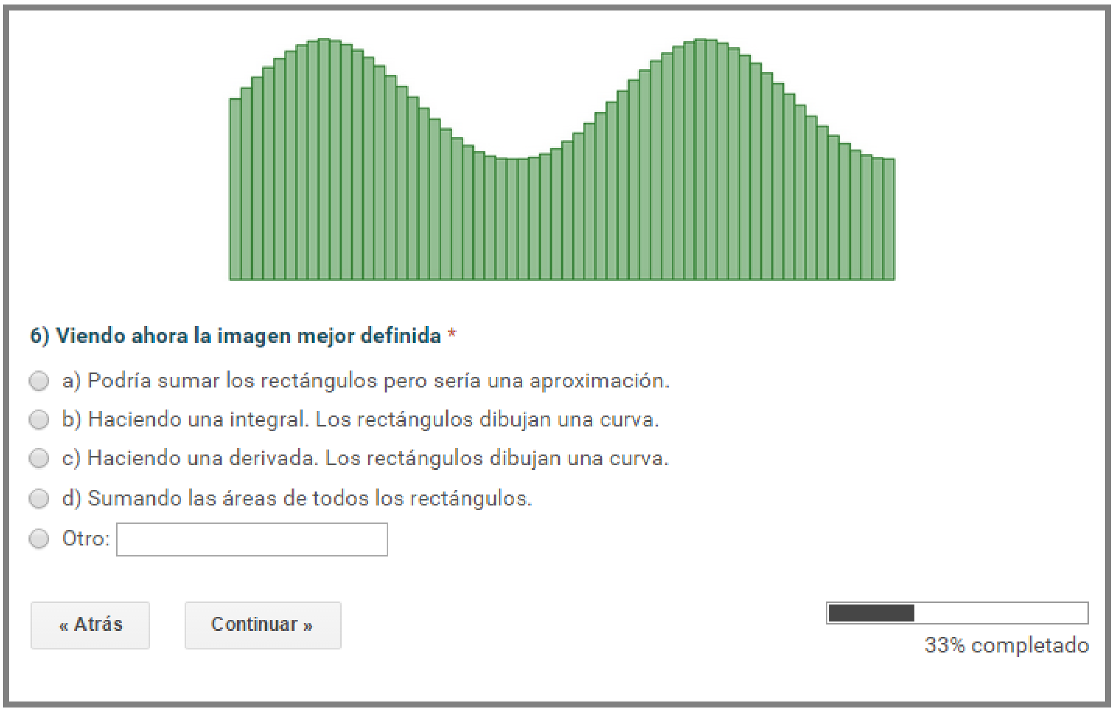
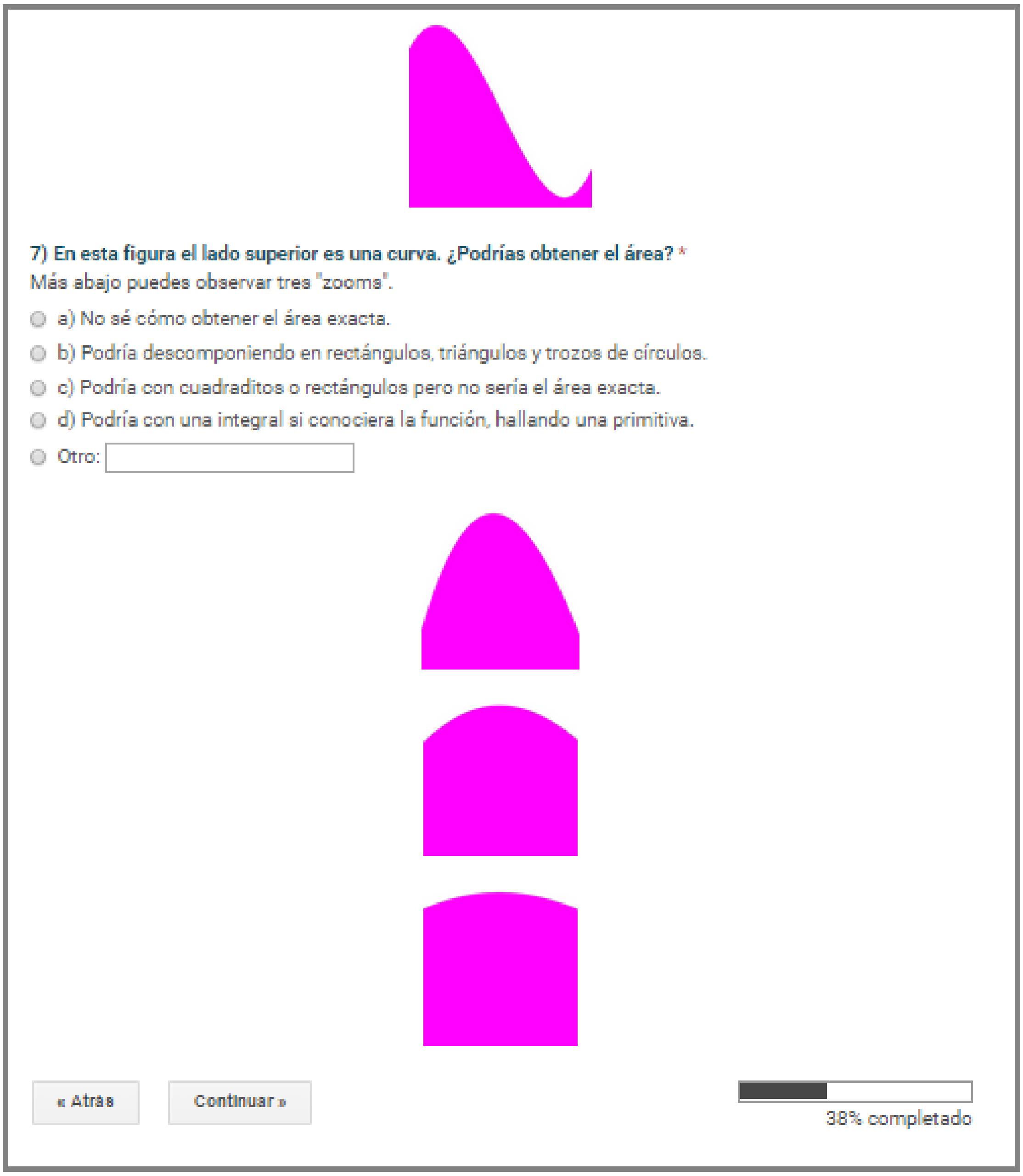


Figura 27. Test: Pregunta 6.

El segundo bloque de preguntas va de la 7 a la 14. En ellas se pretende establecer la descomposición en franjas como una forma de resolver el problema del área (si nos conformamos con una aproximación)

La pregunta 7 plantea el problema de obtener el área de un trapecio mixtilíneo.



7) En esta figura el lado superior es una curva. ¿Podrías obtener el área? *
Más abajo puedes observar tres "zooms".

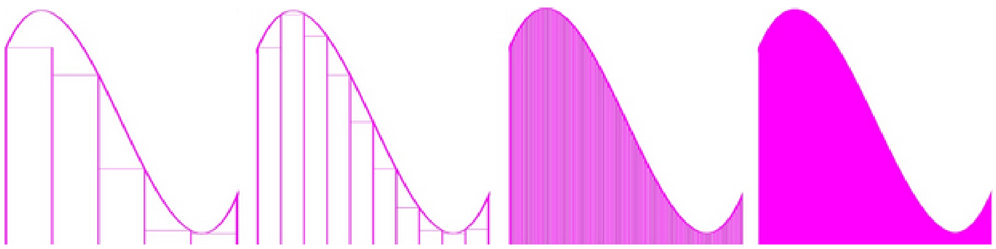
- a) No sé cómo obtener el área exacta.
- b) Podría descomponiendo en rectángulos, triángulos y trozos de círculos.
- c) Podría con cuadraditos o rectángulos pero no sería el área exacta.
- d) Podría con una integral si conociera la función, hallando una primitiva.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

38% completado

Figura 28. Test: Pregunta 7.

Las preguntas 8 y 9 presentan la descomposición en franjas trabajada de manera visual.



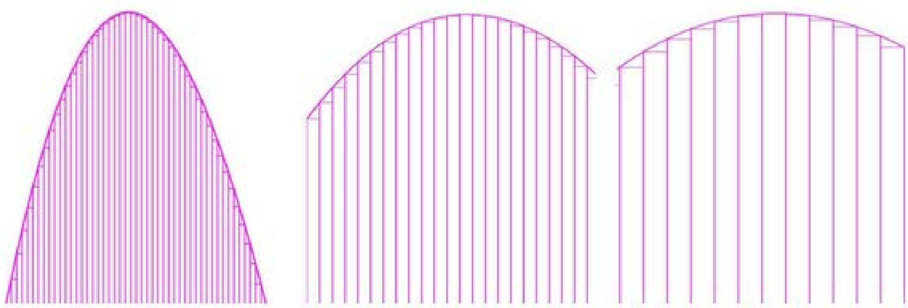
8) Ahora observa estas imágenes. ¿Qué se está haciendo? *

- a) Se va dibujando la curva con los rectángulos.
- b) Se rellena con muchos rectángulos.
- c) Se va aproximando el área con rectángulos.
- d) Se van poniendo rectángulos hasta que son todo rayas.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

42% completado

Figura 29. Test: Pregunta 8.



9) Observa estos "zooms" de la última imagen. ¿Qué te dicen? *

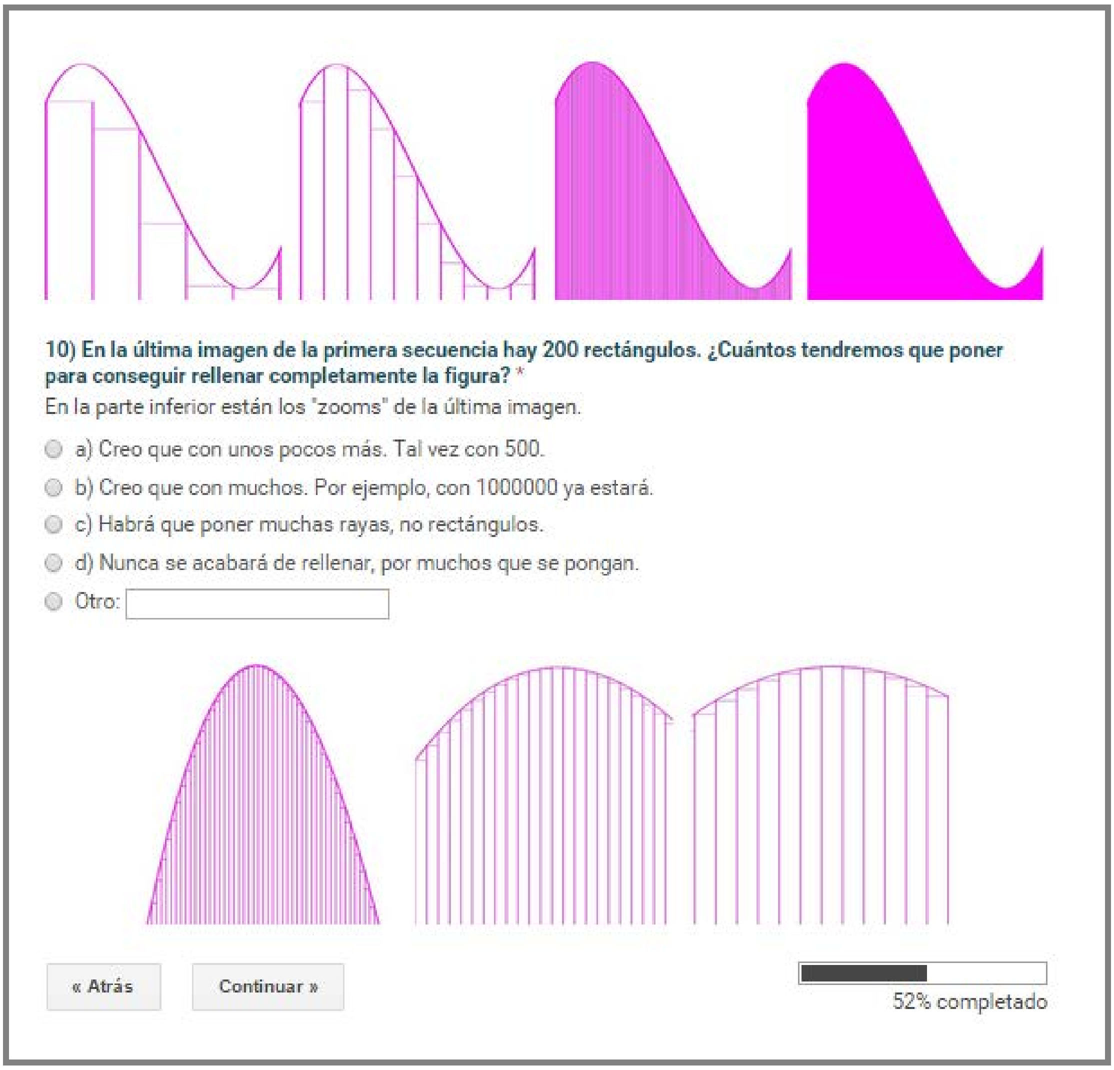
- a) Antes creía que la última imagen estaba toda pintada, pero ahora veo que no. Tiene rectángulos pequeños.
- b) Lo mismo que antes, pero ahora se puede ver claramente que hay muchos rectángulos.
- c) No puede ser la misma imagen, porque ahora hay rectángulos y antes no.
- d) No me dice nada.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

47% completado

Figura 30. Test: Pregunta 9.

En la pregunta 10 se plantea la necesidad de un proceso sin fin para poder "rellenar" el área con rectángulos.


10) En la última imagen de la primera secuencia hay 200 rectángulos. ¿Cuántos tendremos que poner para conseguir rellenar completamente la figura? *

En la parte inferior están los "zooms" de la última imagen.

- a) Creo que con unos pocos más. Tal vez con 500.
- b) Creo que con muchos. Por ejemplo, con 1000000 ya estará.
- c) Habrá que poner muchas rayas, no rectángulos.
- d) Nunca se acabará de rellenar, por muchos que se pongan.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

52% completado

Figura 31. Test: Pregunta 10.

De nuevo, en la pregunta 11, se plantea el mismo problema que en la pregunta 7, esperando que las preguntas anteriores hayan servido para dar un modo de resolver el problema. Pese a la sugerencia ofrecida, el transcurso de la prueba dependerá únicamente del nivel de razonamiento del estudiante.

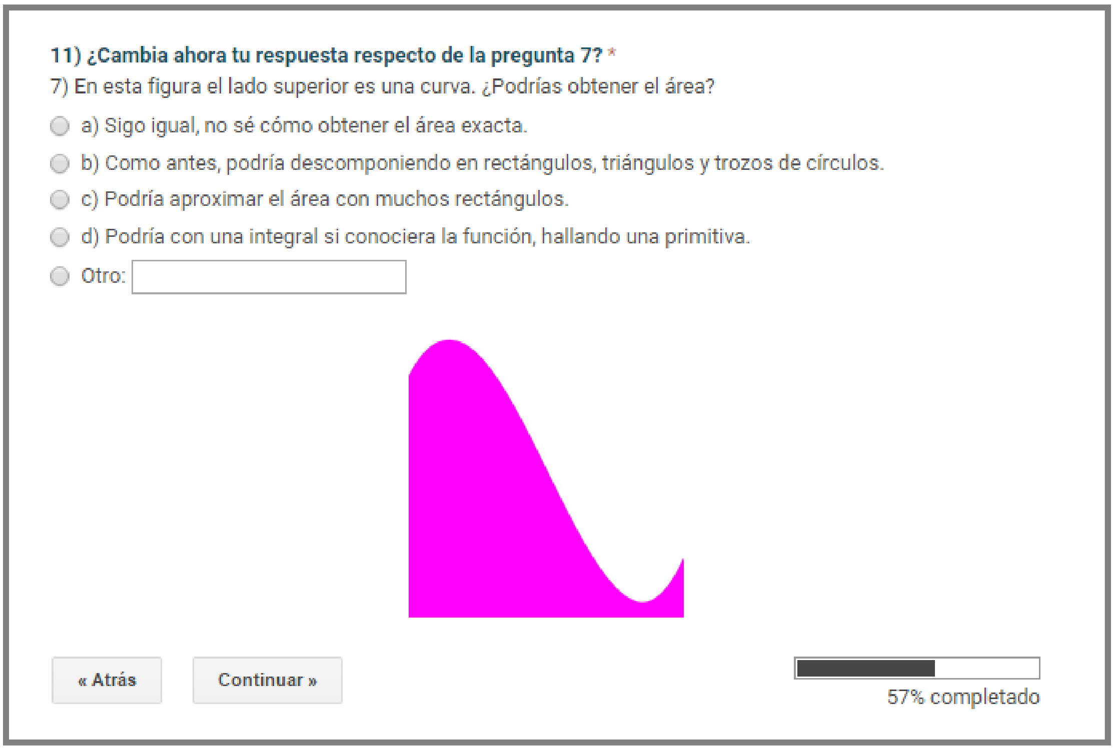
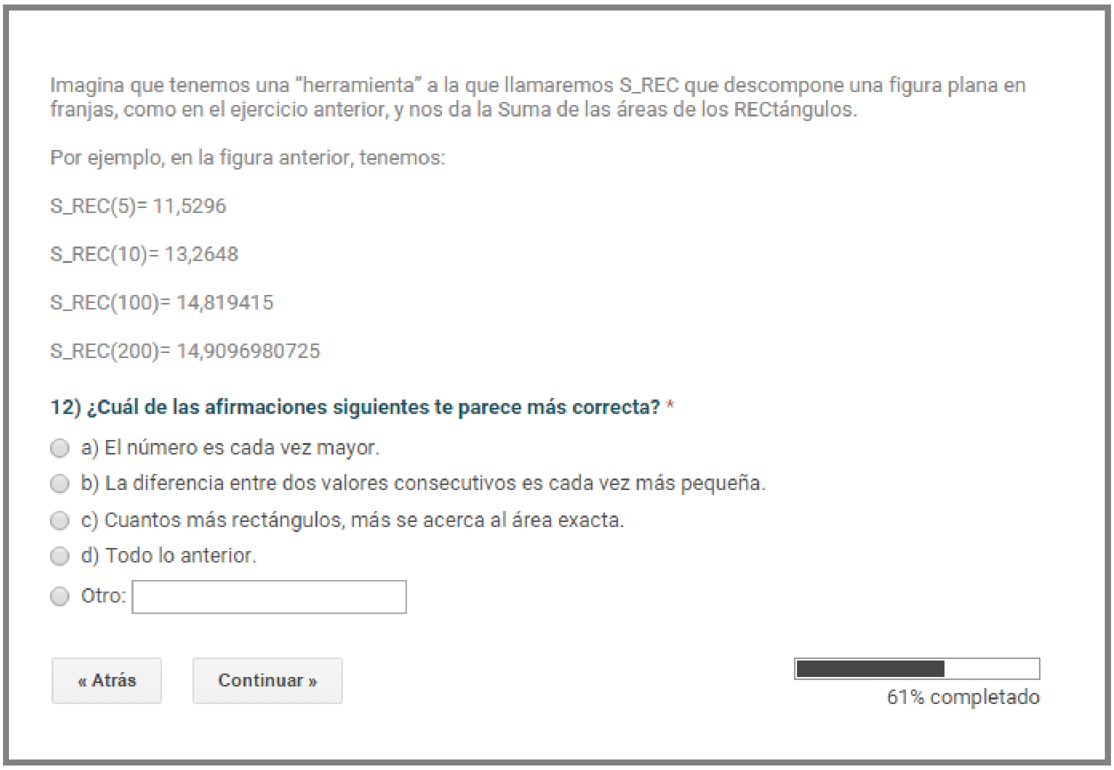


Figura 32. Test: Pregunta 11.

En la pregunta 12 se presenta S_REC como herramienta numérica que complementa a la descomposición visual. Tanto en esta pregunta como en la 13, se trata la idea de tendencia numérica usando los resultados dados por S_REC.



Imagina que tenemos una "herramienta" a la que llamaremos S_REC que descompone una figura plana en franjas, como en el ejercicio anterior, y nos da la Suma de las áreas de los RECtángulos.

Por ejemplo, en la figura anterior, tenemos:

S_REC(5)= 11,5296

S_REC(10)= 13,2648

S_REC(100)= 14,819415

S_REC(200)= 14,9096980725

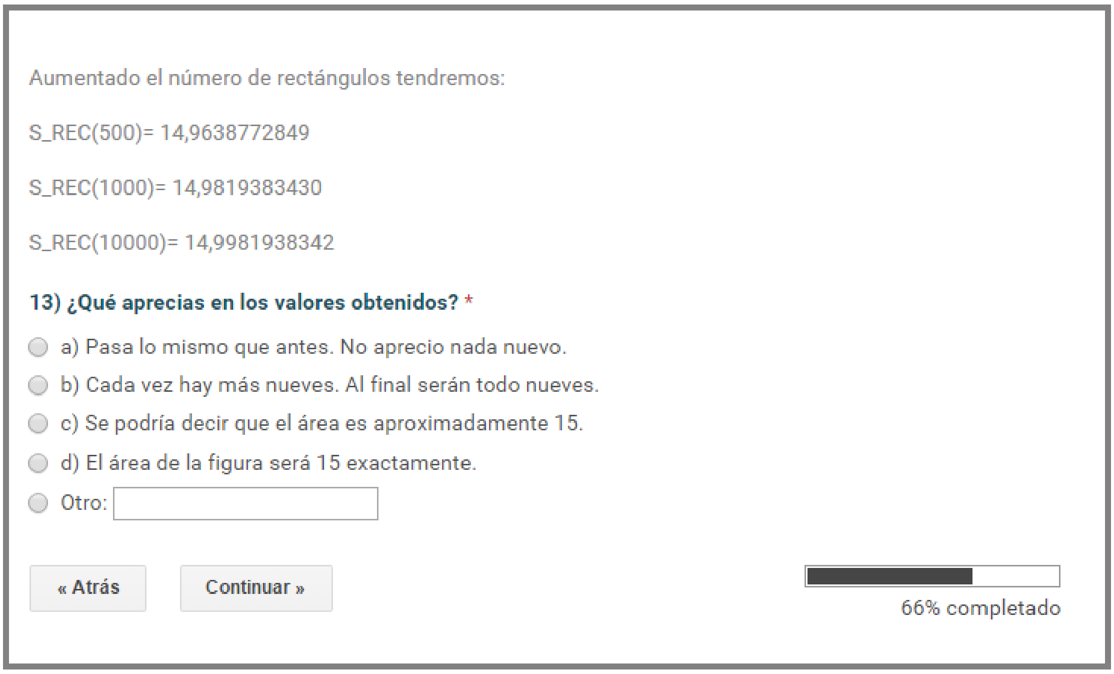
12) ¿Cuál de las afirmaciones siguientes te parece más correcta? *

- a) El número es cada vez mayor.
- b) La diferencia entre dos valores consecutivos es cada vez más pequeña.
- c) Cuantos más rectángulos, más se acerca al área exacta.
- d) Todo lo anterior.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

61% completado

Figura 33. Test: Pregunta 12.



Aumentado el número de rectángulos tendremos:

S_REC(500)= 14,9638772849

S_REC(1000)= 14,9819383430

S_REC(10000)= 14,9981938342

13) ¿Qué aprecias en los valores obtenidos? *

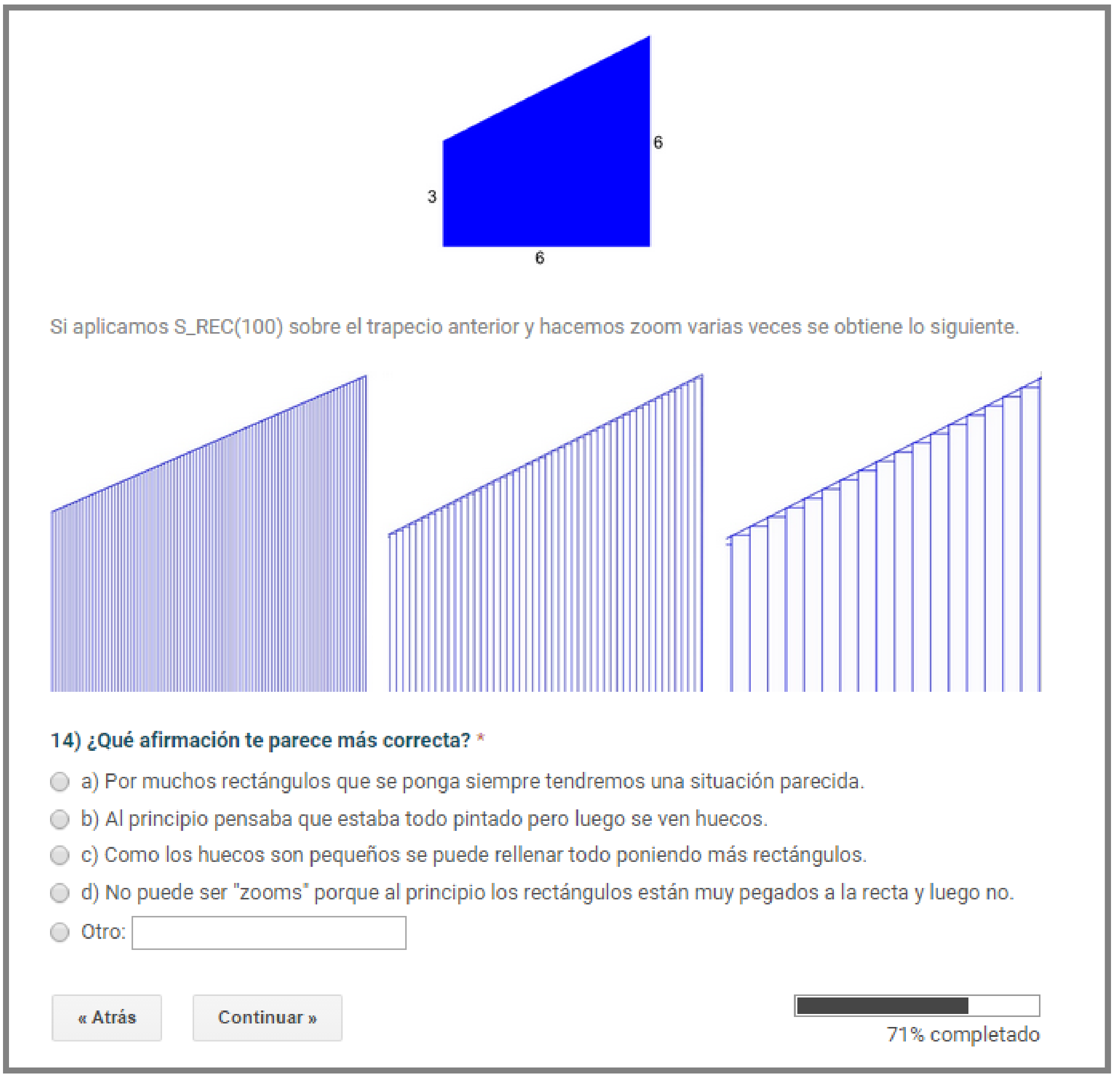
- a) Pasa lo mismo que antes. No aprecio nada nuevo.
- b) Cada vez hay más nueves. Al final serán todo nueves.
- c) Se podría decir que el área es aproximadamente 15.
- d) El área de la figura será 15 exactamente.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

66% completado

Figura 34. Test: Pregunta 13.

La pregunta 14, que es la antesala del tercer grupo de preguntas, presenta la necesidad de un proceso sinfín en el ámbito visual.



6

3

6

Si aplicamos S_REC(100) sobre el trapecio anterior y hacemos zoom varias veces se obtiene lo siguiente.

14) ¿Qué afirmación te parece más correcta? *

- a) Por muchos rectángulos que se ponga siempre tendremos una situación parecida.
- b) Al principio pensaba que estaba todo pintado pero luego se ven huecos.
- c) Como los huecos son pequeños se puede rellenar todo poniendo más rectángulos.
- d) No puede ser "zooms" porque al principio los rectángulos están muy pegados a la recta y luego no.
- Otro:

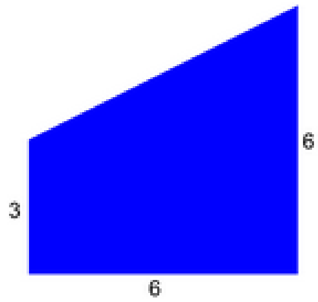
« Atrás Continuar »

71% completado

Figura 35. Test: Pregunta 14.

El tercer bloque de preguntas va de la 15 a la 19. Aquí se relaciona claramente área y límite. No se considera la opción del redondeo o la aproximación, solo la tendencia. La respuesta *d* de la pregunta 15 dice "*Como el área es 27, los valores son cada vez más próximos a 27*", que presenta una diferencia con la respuesta *c* de la pregunta 12 de dice "*Se podría decir que el área es aproximadamente 15*".

Llegados a este punto, los estudiantes que manifiesten un nivel III de razonamiento demostrarán que tienen una imagen dinámica del concepto de área, habrán "roto" esa imagen defectuosa del área como concepto estático. En este bloque se aúnan concepto-imagen y concepto-definición siguiendo la terminología de Vinner.



El área de este trapecio es 27.

Se puede obtener como (3 + 6) / 2 * 6 = 27.

Vamos a aplicarle S_REC a la figura.

S_REC(1)= 18

S_REC(3)= 24

S_REC(5)= 25.2

S_REC(10)= 26.1

S_REC(20)= 26.55

S_REC(50)= 26.82

S_REC(100)= 26.91

S_REC(1000)= 26.991

S_REC(10000)= 26.9991

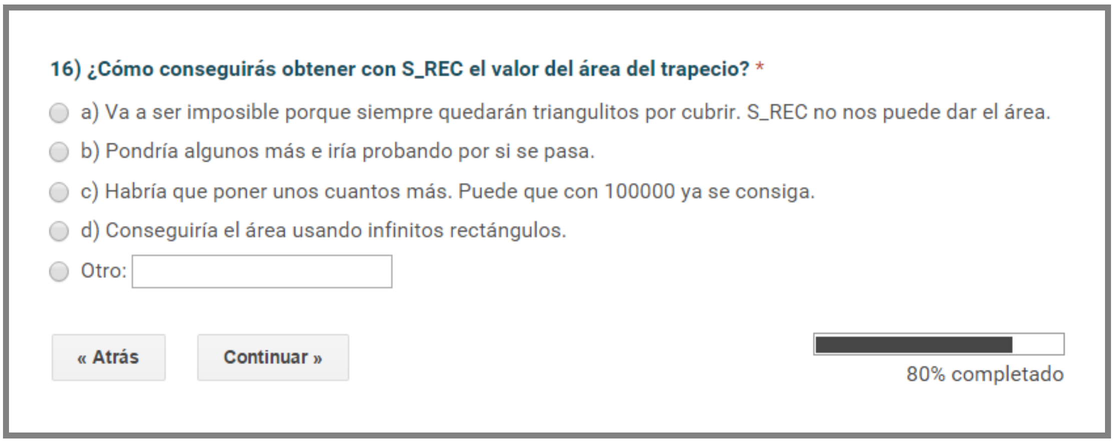
15) ¿Qué observas? *

- a) El número es cada vez mayor, pero no es 27.
- b) Cuantos más rectángulos, más se acerca a 27.
- c) Habrá que poner más rectángulos para que dé 27.
- d) Como el área es 27, los valores son cada vez más próximos a 27.
- Otro:

« Atrás   Continuar »

76% completado

Figura 36. Test: Pregunta 15.



16) ¿Cómo conseguirás obtener con S_REC el valor del área del trapecio? *

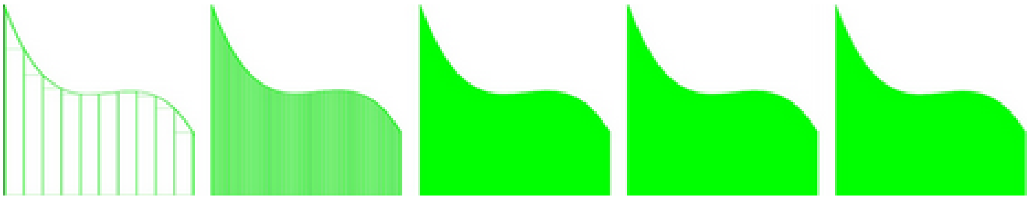
- a) Va a ser imposible porque siempre quedarán triangulitos por cubrir. S_REC no nos puede dar el área.
- b) Pondría algunos más e iría probando por si se pasa.
- c) Habría que poner unos cuantos más. Puede que con 100000 ya se consiga.
- d) Conseguiría el área usando infinitos rectángulos.
- Otro:

« Atrás   Continuar »

80% completado

Figura 37. Test: Pregunta 16.

Para esta figura, observa qué hace S_REC gráficamente.



Y ahora observa qué nos da S_REC numéricamente.

S_REC(10)=14.8374

S _REC(100)=15.65578898

S_REC(200)=15.70283444

S_REC(500)=15.73112014

S_REC(1000)=15.74055781

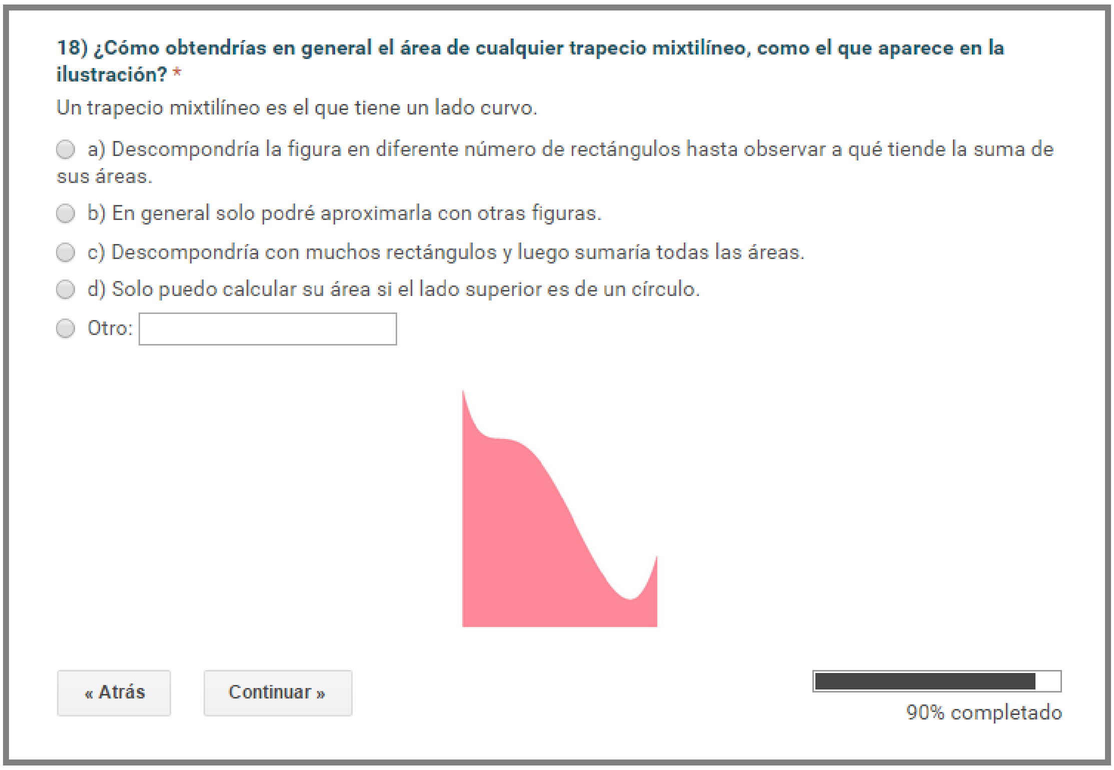
17) ¿Cuál es su área? *

- a) No lo sé. Cada vez es más grande.
- b) El área será 15'75, que es el valor al que se acerca la sucesión.
- c) El área será 16 porque cada vez es más grande.
- d) El área parece que estará por encima de 15'7, pero necesito más valores para saber cuál es.
- Otro:

« Atrás   Continuar »

85% completado

Figura 38. Test: Pregunta 17.



18) ¿Cómo obtendrías en general el área de cualquier trapecio mixtilíneo, como el que aparece en la ilustración? *

Un trapecio mixtilíneo es el que tiene un lado curvo.

- a) Descompondría la figura en diferente número de rectángulos hasta observar a qué tiende la suma de sus áreas.
- b) En general solo podré aproximarla con otras figuras.
- c) Descompondría con muchos rectángulos y luego sumaría todas las áreas.
- d) Solo puedo calcular su área si el lado superior es de un círculo.
- Otro:

« Atrás

Continuar »

90% completado

Figura 39. Test: Pregunta 18.

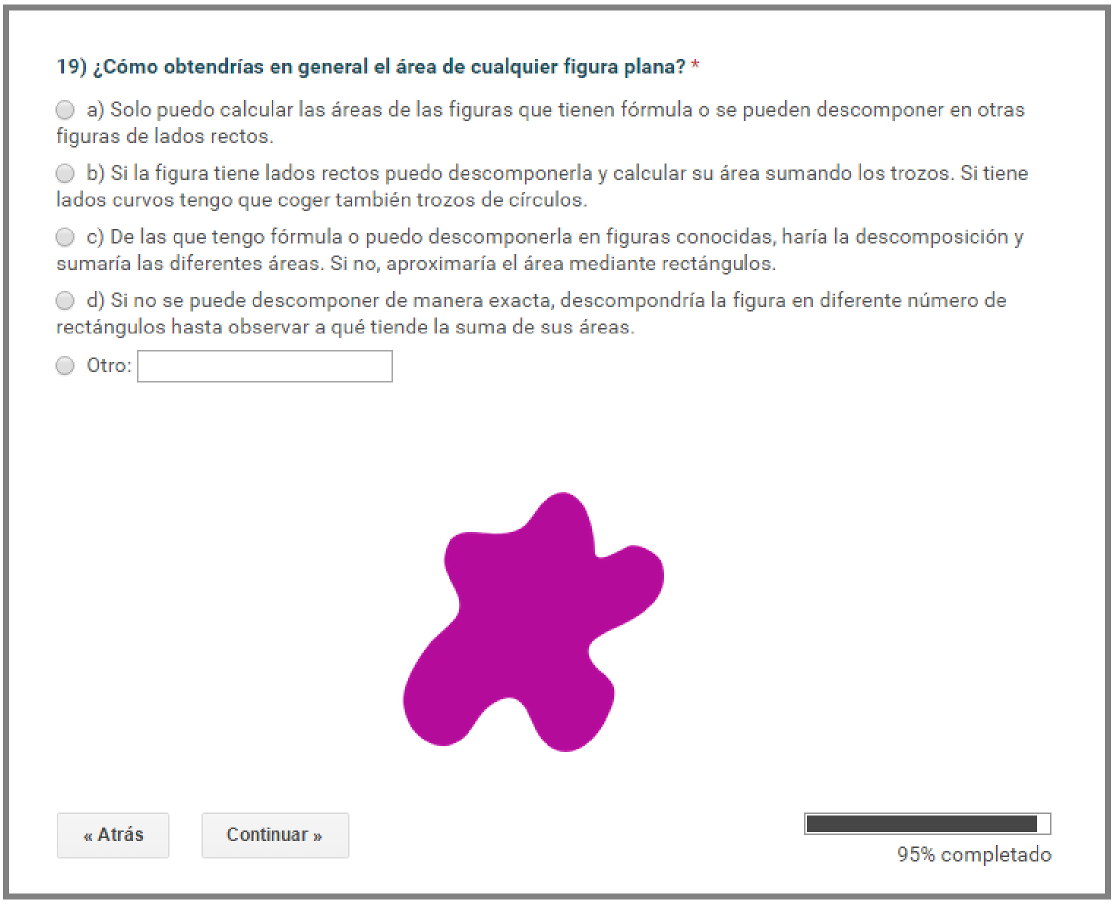


Figura 40. Test: Pregunta 19.

Hasta aquí el cuerpo de la prueba. A continuación se presentan las preguntas de contexto. Con ellas se pretende:

- Separar los elementos de la muestra según diversos factores (curso académico, uso de herramientas de visualización…) para dar respuesta al objetivo 5.

- Considerar las respuestas que se encuentran dentro de la franja determinada para la muestra. Recordemos que el enlace a la prueba se ha compartido en redes sociales y podemos tener respuestas que no resulte adecuado introducir en el estudio estadístico.

- Recoger la impresión del encuestado sobre la revisión del concepto de área que le ha supuesto contestar las preguntas del test.

Ya casi has terminado.

Agradecemos tu esfuerzo y sinceridad a la hora de responder, pues es la única manera de que el estudio en el que estás participando sea realista.

Ahora solo quedan unas pocas preguntas sobre tu nivel de estudios y poco más.

20) ¿Recuerdas cuándo te explicaron en Matemáticas algo referente al concepto de área? *

- 0) En Primaria y de nuevo en Secundaria.
- 1) Además de en Primaria y Secundaria, en este curso, en relación con la integral definida.
- 2) Además de en Primaria y Secundaria, en el curso anterior, en relación con la integral definida.
- 3) Además de en Primaria y Secundaria, en algún curso anterior (no en el último), en relación con la integral definida.
- 4) No recuerdo que me lo hayan explicado en Matemáticas.
- 5) En cursos anteriores o en el actual, pero sin relacionarlo con la integral definida.
- Otro:

21) Respecto al concepto de integral y su relación con el concepto de área... *

- 0) ... no recuerdo haberlo estudiado.
- 1) ... he dado integrales, pero no lo he relacionado con el área.
- 2) ... he dado las integrales, pero la relación con el área, un poco de pasada.
- 3) ... he dado las dos cosas, pero no recuerdo (o no sabría) cómo hallar el área de una región limitada por una curva y el eje OX conociendo una primitiva de la función.

22) ¿Conoces o has utilizado algún programa de cálculo simbólico como Derive, Mathematica u otro similar? *

- 0) Ni los conozco ni los he usado.
- 1) Sé que existen pero no los he utilizado.
- 2) Solo he visto alguno de ellos muy ocasionalmente.
- 3) He utilizado alguno de ellos para hacer prácticas más bien ocasionales.
- 4) He utilizado (o utilizo) alguno de ellos frecuentemente.
- Otro:

23) ¿Consideras que, como resultado de esta prueba, ha cambiado en algo tu idea sobre el concepto de área y cómo obtenerla? *

- 0) No, no ha cambiado en nada (o prácticamente en nada).
- 1) No, pero me ha hecho recordar cosas más bien olvidadas.
- 2) Sí, aunque aún no tengo claro cómo obtener el área.
- 3) Sí, porque me he dado cuenta de que lo que pensaba antes no era del todo correcto, pues no sirve para todas las situaciones.
- 4) Sí, y ahora creo que lo tengo claro.
- Otro:

24) Escoge la definición que ahora, al acabar la prueba, te parece más correcta para el área de una figura plana. *

- 0) Es el valor que se obtiene al aplicar una fórmula sobre la figura. Para cada figura hay una fórmula.
- 1) Es el valor que se obtiene al aplicar una fórmula sobre la figura. Para algunas figuras no hay una fórmula y no se puede calcular.
- 2) Es el valor que se obtiene al aplicar diversas fórmulas a los diferentes trozos en los que se puede descomponer la figura.
- 3) Es el valor al que se acerca S_REC cuando el número de rectángulos se acerca a infinito.

25) Indica en qué curso estabas en 2014-2015 (curso anterior). *

- 0) 1º Bachiller
- 1) 2º Bachiller
- 2) 1º Universidad
- 3) 2º o 3º Universidad
- Otro:

26) Centro de estudios del curso anterior. *

« Atrás   Enviar

100%: has terminado.

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Figura 41. Test: Preguntas de contexto (20-24).

4.4. Tratamiento estadístico

4.4.1. Planteamiento del trabajo estadístico

El propósito principal del tratamiento estadístico es conseguir el objetivo 3 descrito en 3.1.1 para poder automatizar el proceso de asignación de los diferentes niveles de razonamiento en grupos numerosos. Asimismo, se trata de dar respuesta al objetivo 5 visto en 3.1.2 para valorar el efecto del uso de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje y al objetivo 6 valorando la eficacia del test en la revisión del concepto de área.

Los objetivos específicos que perseguíamos con el estudio estadístico eran la corroboración de las conclusiones obtenidas a través de las entrevistas clínicas, así como una nueva confirmación del objetivo 1 referente al enunciado de los descriptores.

Ello implica, evidentemente, la selección de los instrumentos estadísticos oportunos. Los aspectos a determinar son:

- Elección de la muestra de estudiantes.
- Comprobación de la existencia de grupos de respuestas (patrones) suficientemente uniformes, que se puedan identificar con los niveles.
- Comprobación de la mejora de la media del nivel de razonamiento en alumnos que son atendidos con una acción metodológica basada en la visualización.
- Diseño de un procedimiento de valoración del test que automatice la clasificación de los estudiantes de acuerdo con su nivel de razonamiento en el concepto de área.

Para llevar a cabo este estudio comenzamos seleccionando las muestras de estudio de las que nos ocuparemos en 4.4.2. Una vez tomados los datos correspondiente a las entrevistas y codificada la información, se procedió a aplicar un algoritmo de determinación y clasificación en grupos (k-medias). Después se procedió a dar robustez a los resultados obtenidos aplicando diferentes consideraciones. De esta manera quedarían consolidados los descriptores de los niveles de razonamiento para el área según el modelo de van Hiele, que es el punto fundamental del desarrollo de esta memoria.

Con los resultados ya confirmados respecto al nivel de razonamiento de cada encuesta, se comenzó a segmentar los resultados según diferentes aspectos (curso, uso de la visualización, etc.) para poder responder a los objetivos destacados anteriormente.

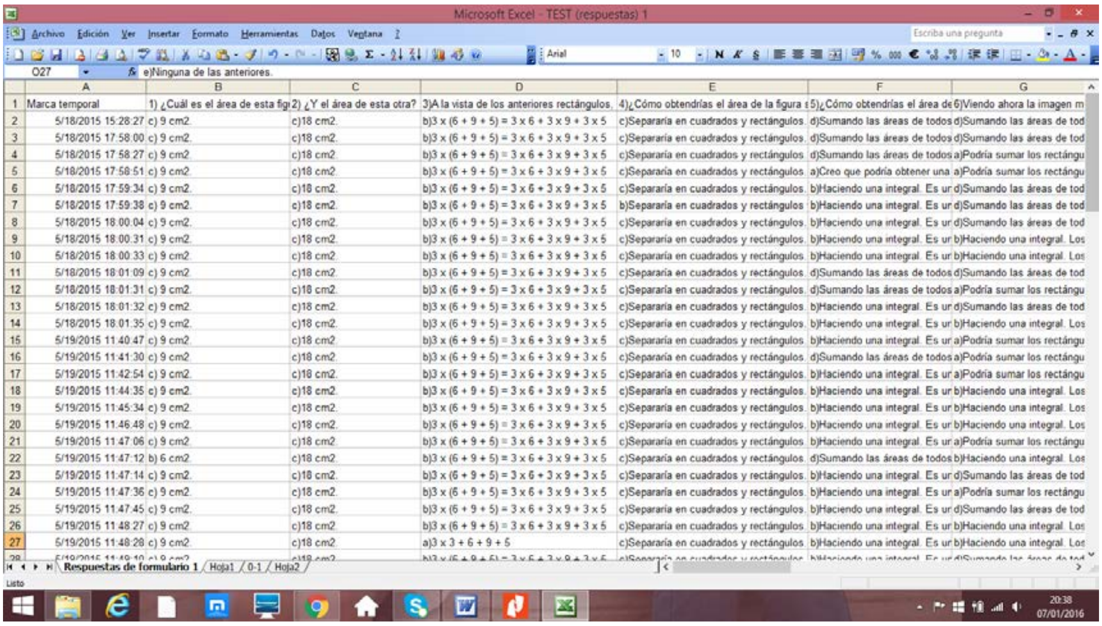
4.4.2. Las muestras

El test se ha administrado a estudiantes que cursaban matemáticas en bachillerato o una carrera científica o técnica (Ingeniería y Matemáticas).

En total han resultado válidos 157 test de los 164 recibidos. Se han eliminado del estudio los que no correspondían a la franja establecida o no indicaban su nivel curricular. Entre los válidos se contabilizan 46 de estudiantes de bachillerato, 65 de primero de universidad y 46 de segundo o tercero. Además de los datos obtenidos por redes sociales, se ha pasado la encuesta a estudiantes de dos centros de bachillerato y a estudiantes de Ingeniería de la Universidad Politécnica de Valencia y de Matemáticas de la Universidad de Valencia y de la Universidad Jaime I.

4.4.3. Procedimiento de obtención y codificación

Como hemos dicho en 4.3.2, el test se desarrolló como un formulario de Google lo que, entre otras cosas, facilita el proceso de recogida de la información, pues genera un documento compatible Excel en el “Drive” con una marca temporal y todas las respuestas dadas en cada encuesta. A continuación se muestra una parte de este documento abierto en Excel.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Marca temporal	1) ¿Cuál es el área de esta fig	2) ¿Y el área de esta otra?	3)A la vista de los anteriores rectángulos,	4)¿Cómo obtendrías el área de la figura	5)¿Cómo obtendrías el área de	6)Viendo ahora la imagen m
2	5/18/2015 15:28:27	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	d)Sumando las áreas de tod
3	5/18/2015 17:58:00	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	d)Sumando las áreas de tod
4	5/18/2015 17:58:27	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	a)Podría sumar los rectángu
5	5/18/2015 17:58:51	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	a)Creo que podría obtener una	a)Podría sumar los rectángu
6	5/18/2015 17:59:34	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	d)Sumando las áreas de tod
7	5/18/2015 17:59:38	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	b)Separaría en cuadrados y rectángulos	b)Haciendo una integral. Es ur	d)Sumando las áreas de tod
8	5/18/2015 18:00:04	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	d)Sumando las áreas de tod
9	5/18/2015 18:00:31	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
10	5/18/2015 18:00:33	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
11	5/18/2015 18:01:09	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	d)Sumando las áreas de tod
12	5/18/2015 18:01:31	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	a)Podría sumar los rectángu
13	5/18/2015 18:01:32	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	d)Sumando las áreas de tod
14	5/18/2015 18:01:35	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
15	5/19/2015 11:40:47	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	a)Podría sumar los rectángu
16	5/19/2015 11:41:30	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	a)Podría sumar los rectángu
17	5/19/2015 11:42:54	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	a)Podría sumar los rectángu
18	5/19/2015 11:44:35	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
19	5/19/2015 11:45:34	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
20	5/19/2015 11:46:48	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
21	5/19/2015 11:47:06	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	a)Podría sumar los rectángu
22	5/19/2015 11:47:12	b) 6 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	d)Sumando las áreas de todos	b)Haciendo una integral. Los
23	5/19/2015 11:47:14	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	d)Sumando las áreas de tod
24	5/19/2015 11:47:36	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	a)Podría sumar los rectángu
25	5/19/2015 11:47:45	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	d)Sumando las áreas de tod
26	5/19/2015 11:48:27	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	b)3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los
27	5/19/2015 11:48:28	c) 9 cm2.	c)18 cm2.	a)3 x 3 + 6 + 9 + 5	c)Separaría en cuadrados y rectángulos.	b)Haciendo una integral. Es ur	b)Haciendo una integral. Los

Figura 41. Respuestas recogidas en un documento Excel.

Así pues, para cada entrevista tenemos un vector de 27 variables (la marca temporal, las 19 respuestas del test y las 7 de contexto). La marca temporal carece de importancia para el estudio, por lo que no será tenida en cuenta. Las preguntas de contexto tendrán interés en la parte final, pues servirán para segmentar la muestra y extraer conclusiones. La parte fundamental del estudio lo determinan las respuestas del cuerpo del test, por lo que se define el patrón ideal de respuestas para poder continuar.

Teniendo todas las repuestas recogidas, el primer paso fue reasignar las respuestas dadas en "Otro" (respuesta personal). En realidad, lo realmente importante era valorar si la respuesta correspondía a la opción del patrón ideal de respuesta o si no era así.

Así se genera una nueva hoja dentro del mismo libro codificando con "1" las respuestas que coinciden con el patrón ideal de respuesta y con "0" el resto. Como resultado se obtiene el documento que se muestra a continuación.

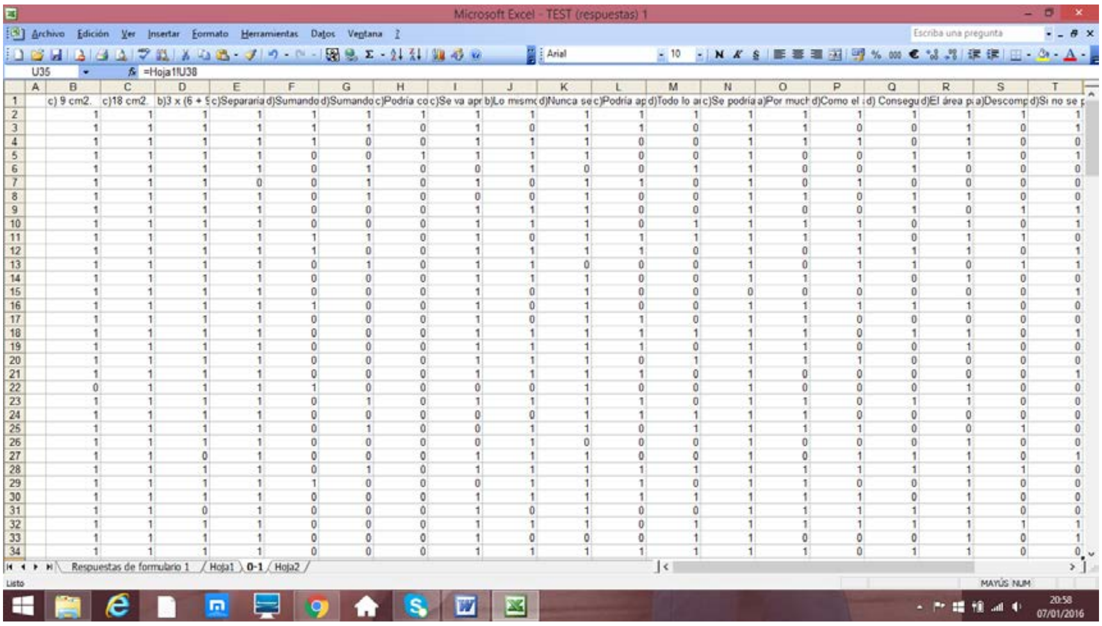


Figura 42. Respuestas codificadas en 0/1.

De esta manera tenemos un vector de 19 elementos 0/1 para cada encuesta.

Como ya se dijo antes al hablar del test en 4.3.2, no tiene sentido medir el nivel de razonamiento de una persona atendiendo a respuestas individuales sino al comportamiento generalizado ante una situación. Por ese motivo vamos a valorar el grado de corrección en los tres grupos de preguntas detallados en el citado apartado.

Cada bloque está relacionado con un nivel de razonamiento según el desarrollo de los descriptores enunciados en 3.3.1. El primer grupo corresponde a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El segundo grupo lo forman las preguntas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14. Y el tercer grupo está formado por la preguntas restantes (15, 16, 17, 18 y 19). Así pues, sumamos los valores 0/1 de cada bloque para cada entrevista quedando en cada una un vector de tres componentes con el que se llevará a cabo el proceso estadístico (g1, g2, g3).

Además de la recogida de todos los datos, el formulario genera un resumen de respuestas en el que para cada pregunta se expresa el número de respuestas de cada tipo, el porcentaje que representa y un gráfico de sectores. A continuación se muestran dos ejemplos.

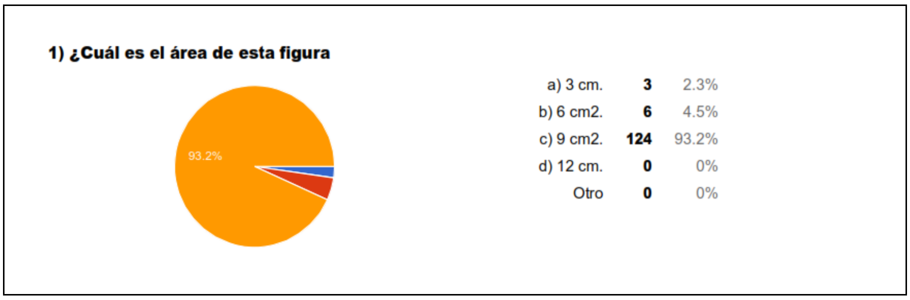


Figura 43. Datos y porcentajes relativos a la pregunta 1 tras 133 respuestas.

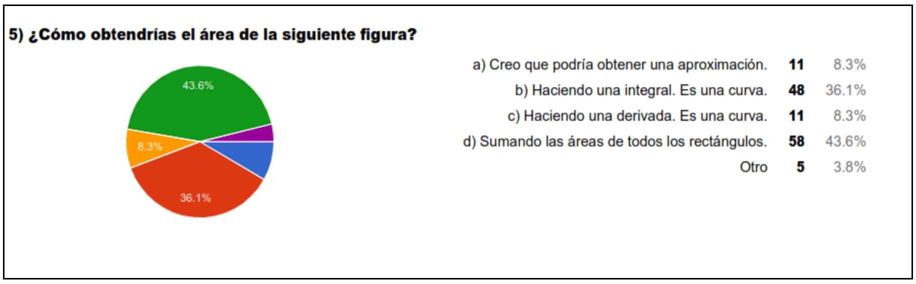


Figura 44. Datos y porcentajes relativos a la pregunta 5 tras 133 respuestas.

Con esta información que se genera de manera automática ya se tiene una idea sobre qué preguntas han presentado más variación en sus respuestas y se puede localizar con rapidez en qué puntos hay *dificultades*. Este aspecto contribuye a que el test, presentado por vía telemática, sea una buena herramienta a nivel didáctico para conocer la realidad del aula respecto al concepto de área de una manera rápida y eficaz, lo que se relaciona satisfactoriamente con el objetivo 6.

4.4.4. Algoritmo de clasificación (*k-means*)

4.4.4.1. Descripción del algoritmo

El algoritmo de las *k medias* en un algoritmo de clasificación en *cluster*. El proceso se inicia determinando el número de grupos a separar y un centro para cada uno de esos grupos.

Dados n elementos con p variables medidas en cada uno $x(i,j)$ para i=1, 2, …, n y j=1, 2, …, p; el algoritmo k-medias sitúa cada elemento en uno de los k grupos minimizando distancia interna (la suma de las distancias de los patrones asignados a un grupo al centroide de dicho grupo).

$$Sum(k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \left(x(i, j) - \overline{x(k, j)} \right)^2$$

Donde $\overline{x(k, j)}$ es la media de la variable *j* de todos los elementos del grupo *k*. Dada una partición inicial, el proceso es iterativo y reubica los diferentes elementos moviendo los puntos de un cluster a otro siempre que se minimice la suma de cuadrados intra-grupo. El algoritmo se repite hasta que no se producen variaciones en las asignaciones o se alcanza un máximo de iteraciones determinado. La clasificación obtenida puede variar dependiendo de los centros iniciales establecidos. Hay diferentes versiones del algoritmo según la forma de añadir los datos a los grupos y de recalcular los centros. En nuestro caso se ha considerado el algoritmo de *Hartigan-Wong.*

La selección del algoritmo se ha determinado según los resultados obtenidos en las medias de desviaciones entre grupos que nos daban los cuatro métodos que nos permite R, que ha sido el lenguaje utilizado para el estudio. Los métodos disponibles son Lloyd, Forgy, MacQueen y Hartigan-Wong. La recomendación para la elección del algoritmo es elegir aquél que tenga mayor distancia entre los *cluster*. Por tanto necesitamos el valor de las sumas de los cuadrados entre los diferentes *cluster* (between_ss). En la tabla siguiente se muestran las medias de las desviaciones entre los grupos tras 50 pruebas con cada método:

Tabla 3. Promedio de la suma de desviaciones entre-grupos tras 50 pruebas con cada método.

	Lloyd	Forgy	MacQueen	Hartigan-Wong
Promedio between_ss	**400,2246**	**401,6258**	**402,2429**	**409,0891**

Nuestro objetivo es confirmar que, en el conjunto de la muestra, se pueden distinguir tres grupos diferenciados. Por tanto pedimos al algoritmo que clasificara los datos en tres grupos. Esta cuestión no desvirtúa los resultados obtenidos. Es cierto que se podría pedir una clasificación en, por ejemplo, cinco o seis grupos pero las diferencias entre los grupos podrían no ser relevantes. No obstante, veremos en la aplicación del algoritmo que los grupos están fuertemente definidos y que la clasificación está relacionada con la definición hecha del modelo.

Debemos asumir desde un principio que vamos a tratar cuantitativamente un aspecto cualitativo, por lo que toda la preparación ha sido muy cuidadosa. Pero entenderemos como dentro de la normalidad que la asignación o agrupamiento que realice el algoritmo no sea del todo preciso y que algunos casos (los que se encuentren en la frontera de los cluster) sean asignados a grupos diferentes según el centro de partida. Recordemos que en el modelo de van Hiele es admisible que un estudiante se encuentre en una etapa de transición de un nivel al siguiente, por lo que sus respuestas pueden estar muy "cerca" de las del patrón del siguiente nivel. En las entrevistas encontramos únicamente un caso semejante, es decir, 1/21 = 4,7% del total de entrevistas realizadas. Por tanto, no resultará llamativo encontrarse con clasificaciones que conlleven un porcentaje de variación en la asignación al grupo igual o menor al anteriormente citado.

4.4.4.2. Aplicación y resultados

Más adelante veremos que los resultados obtenidos con la división en tres grupos están fuertemente relacionados con la descripción del modelo y la robustez de la clasificación obtenida que se mantiene estable en un alto porcentaje aunque se varíe el criterio inicial de clasificación. Tras la recogida de las respuestas procedimos a obtener los datos necesarios para realizar el estudio. En primer lugar definimos la respuesta patrón ideal como sigue:

Tabla 4. Patrón de respuestas ideal del bloque 1.

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
RESPUESTA	c	c	b	c	d	d

Tabla 5. Patrón de respuestas ideal del bloque 2.

PREGUNTA	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
RESPUESTA	c	c	b	d	c	d	c	a

Tabla 6. Patrón de respuestas ideal del bloque 3.

PREGUNTA	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
RESPUESTA	d	d	d	a	d

Recordemos que, tal y como se advertía en la introducción al test, puede haber diferentes respuestas en una misma pregunta que no resulten incorrectas pero se entenderá como respuesta ideal la propia del nivel III.

Con este patrón se obtiene el valor de 0/1 para cada respuesta. A partir de él se establecen las caracterizaciones iniciales de cada nivel/grupo según las coincidencias con el patrón ideal en cada grupo de preguntas (los descritos en 4.4.3). La determinación de estas caracterizaciones viene dada por la propia experiencia adquirida en el transcurso de las entrevistas, la vinculación entre preguntas y descriptores y la consideración de que algunas preguntas están más encaminadas a la "formación" del entrevistado que al "reconocimiento / evaluación" de los descriptores. Por ejemplo, la pregunta 7 es una pregunta de choque planteada para causar cierta confusión. "Acertar" o no esta pregunta no determina el nivel sino la manera en la que se actúa a partir de ella.

Con estas consideraciones establecimos las siguientes caracterizaciones:

Tabla 7. Número de coincidencias con el patrón ideal en cada bloque y nivel según el criterio A.

CRITERIO A	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3
NIVEL I	<5	<4	≤ 2
NIVEL II	≥ 4	≥ 4	≤ 2
NIVEL III	≥ 5	≥ 5	≥ 3

Según estas caracterizaciones de los niveles pudimos clasificar el 62'42% de la muestra que nos dieron el punto de partida para aplicar el algoritmo.

Debemos señalar de nuevo que estas asignaciones no significan que se pretenda caracterizar formalmente cada nivel de esa manera, pues no se puede confundir cierto grado de destreza en unas preguntas con el nivel de razonamiento. La caracterización dada establece una diferenciación clara entre los niveles I y II en el segundo bloque con medidas complementarias (que no es el caso del bloque 1), siendo igual la valoración en el bloque 3. Los niveles II y III marcan la diferencia en el tercer bloque, de nuevo mediante mediciones complementarias.

A continuación se muestran los porcentajes de "aciertos" (coincidencias con el patrón ideal de respuestas) por pregunta y nivel. Notemos que este porcentaje puede ser comparable entre diferentes niveles e incluso superior en un nivel inferior respecto a otro superior. Esto tiene sentido si recordamos que la corrección en una pregunta aislada no tiene vinculación a un nivel, sino el comportamiento general frente a un grupo de cuestiones.

CLUSTER INICIALES

Tabla 8. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel (criterio A).

PREGUNTA	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III
P1	**83,33**	**98,46**	**100**
P2	**83,33**	**95,38**	**95,24**
P3	**66,67**	**95,38**	**100**
P4	**94,44**	**98,46**	**100**
P5	**11,11**	**44,62**	**85,71**
P6	**5,56**	**53,85**	**95,24**
P7	16,67	13,85	28,57
P8	50,00	**81,54**	**80,95**
P9	22,22	**80,00**	**76,19**
P10	44,44	**75,38**	**90,48**
P11	5,56	**43,08**	**71,43**
P12	11,11	**63,08**	**76,19**
P13	44,44	**93,85**	**76,19**
P14	5,56	**84,62**	**90,48**
P15	11,11	27,69	**71,43**
P16	27,78	21,54	**80,95**
P17	33,33	36,92	**85,71**
P18	5,56	40,00	**76,19**
P19	22,22	33,85	**57,14**

A la vista de la tabla anterior se aprecia con claridad el bajo porcentaje de acierto de la pregunta 7 en el test (al igual que pasaba en la entrevista).

CLUSTER INICIALES

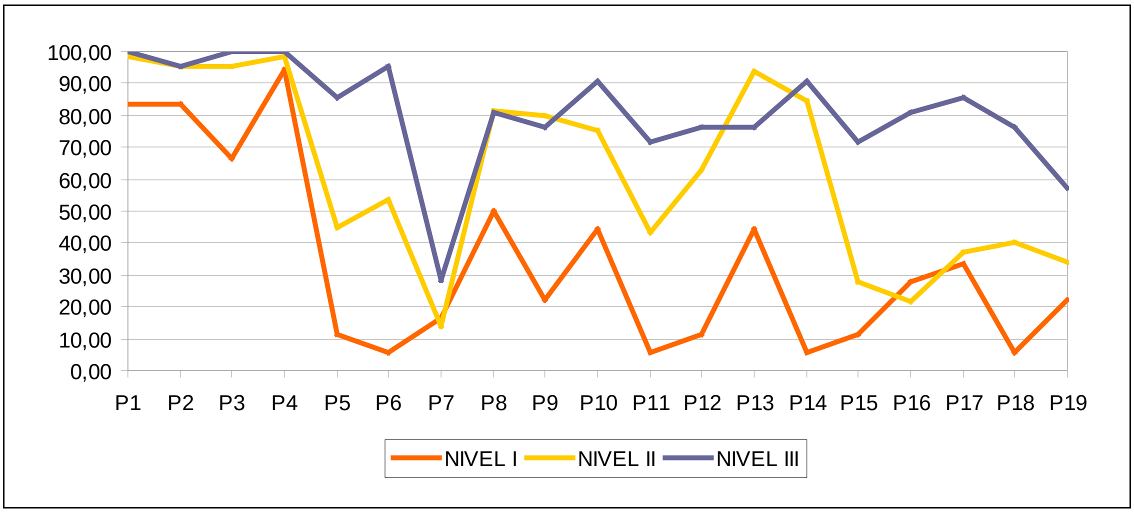


Figura 45. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel (criterio A).

Estos valores corresponden a la matriz de centros siguiente.

Tabla 9. Promedio de cada variable por nivel (criterio A).

	g1	g2	g3
NIVEL I	3’444	2’000	1’000
NIVEL II	4’862	5’354	1’600
NIVEL III	5’762	5’905	3’714

Con estos centros se aplica el algoritmo de las *k*-medias y se obtiene la siguiente asignación:

```
Clustering vector:
  [1] 1 3 1 3 1 3 3 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 3
 [29] 1 1 3 1 2 2 3 2 3 3 1 1 2 2 3 2 2 3 2 2 3 1 1 1 3 3 3 3
 [57] 3 2 2 1 3 2 3 2 2 2 1 2 2 2 1 3 2 3 2 2 3 3 1 2 2 3 1 3
 [85] 3 2 3 3 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1 1 1 3 3 3 2 3 2 3 2 3
[113] 1 2 3 1 1 2 3 3 2 3 2 1 2 3 1 1 2 3 3 3 1 2 3 1 2 1 3 3
[141] 1 2 2 3 3 3 3 2 3 3 2 2 3 1 3 3 2
```

Tabla 10. Estudiantes en cada nivel.

	Totales	**Porcentajes**
NIVEL I	41	26,11%
NIVEL II	62	39,49%
NIVEL III	54	34,39%
	157	

CLUSTER FINALES

Tabla 11. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel tras la aplicación del algoritmo.

PREGUNTA	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III
P1	**90,24**	**98,39**	**92,86**
P2	**90,24**	**95,16**	**97,62**
P3	**75,61**	**90,32**	**92,86**
P4	**95,12**	**100**	**97,62**
P5	**29,27**	**46,77**	**47,62**
P6	**34,15**	**54,84**	**61,90**
P7	7,32	16,13	21,43
P8	53,66	**83,87**	**88,10**
P9	31,71	**80,65**	**83,33**
P10	43,90	**77,42**	**95,24**
P11	24,39	**43,55**	**64,29**
P12	17,07	**62,90**	**71,43**
P13	56,10	**96,77**	**83,33**
P14	26,83	**87,10**	**97,62**
P15	17,07	25,81	**73,81**
P16	39,02	22,58	**78,57**
P17	31,71	40,32	**90,48**
P18	14,63	38,71	**64,29**
P19	31,71	33,87	**40,48**

CLUSTER FINALES

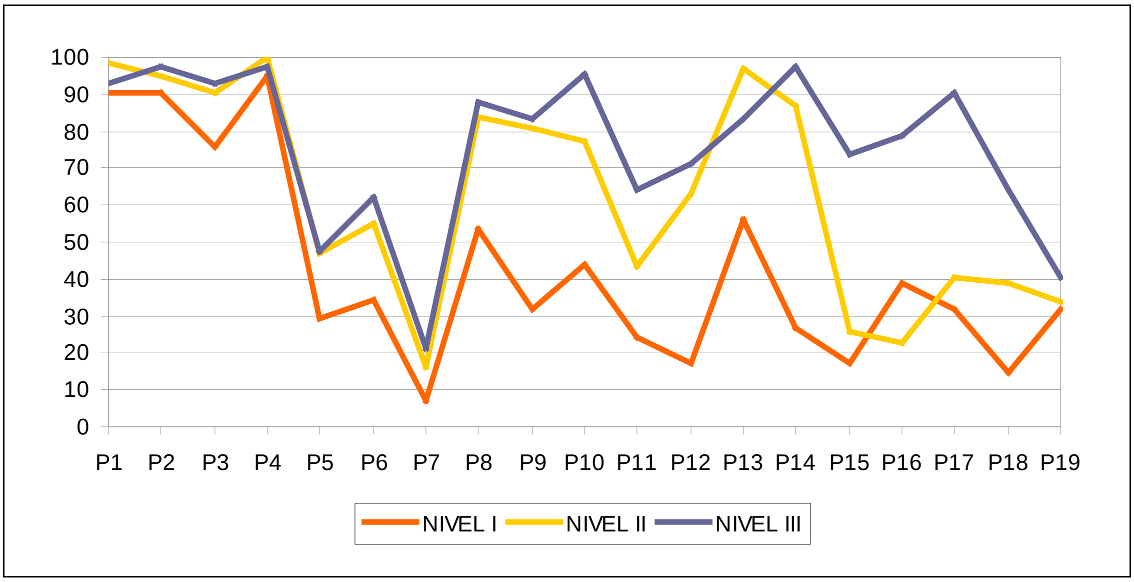


Figura 46. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel tras la aplicación del algoritmo.

Podemos observar que el porcentaje de acierto en la última pregunta baja drásticamente en el nivel III. Esta situación puede deberse a la necesidad de una definición más formal por parte de algunos de los estudiantes entrevistados. La respuesta más adecuada para el nivel III sería la *d) Si no se puede descomponer de manera exacta, descompondría la figura en diferente número de rectángulos hasta observar a qué tiende la suma de sus áreas.* La expresión "observar a qué tiende" concuerda con el propósito visual del test pero no tiene precisión formal, por lo que en algunos casos ha llevado a tomar como correcta la opción *c) De las que tengo fórmula o puedo descomponerla en figuras conocidas, haría la descomposición y sumaría las diferentes áreas. Si no, aproximaría el área mediante rectángulos.* En cambio, en la pregunta 24, "*Escoge la definición que ahora, al acabar la prueba, te parece más correcta para el área de una figura plana",* la respuesta *3) Es el valor al que se acerca S_REC cuando el número de rectángulos se acerca a infinito* tiene mejor porcentaje de aciertos en los niveles II (53,23%) y III (62,96%) mientras que en el nivel I se mantiene igual (31,71%). Considerando estos resultados tenemos la siguiente gráfica:

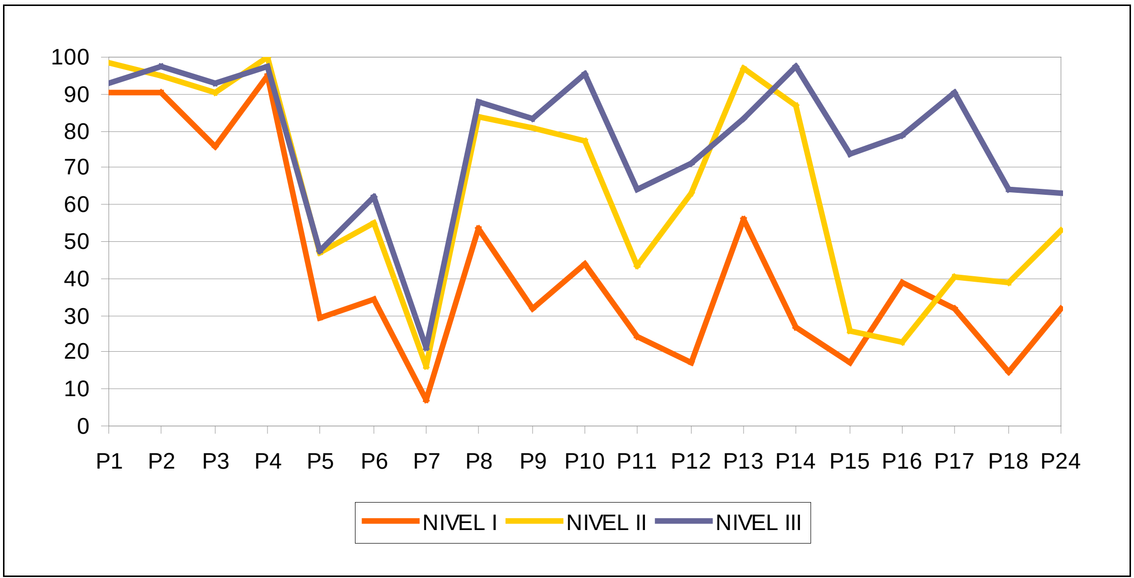


Figura 47. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel tras la aplicación del algoritmo (considerando la pregunta 24 en lugar de la 19).

La matriz de centros que se obtiene con la clasificación definitiva es:

Tabla 12. Promedio de cada variable por nivel tras la aplicación del algoritmo.

	g1	g2	g3
NIVEL I	4,146341	2,609756	1,341463
NIVEL II	4,854839	5,483871	1,612903
NIVEL III	4,666667	5,407407	3,648148

Vamos a observar gráficamente cómo han quedado distribuidos los grupos considerando para cada individuo las notas (número de aciertos) en los tres bloques de preguntas.

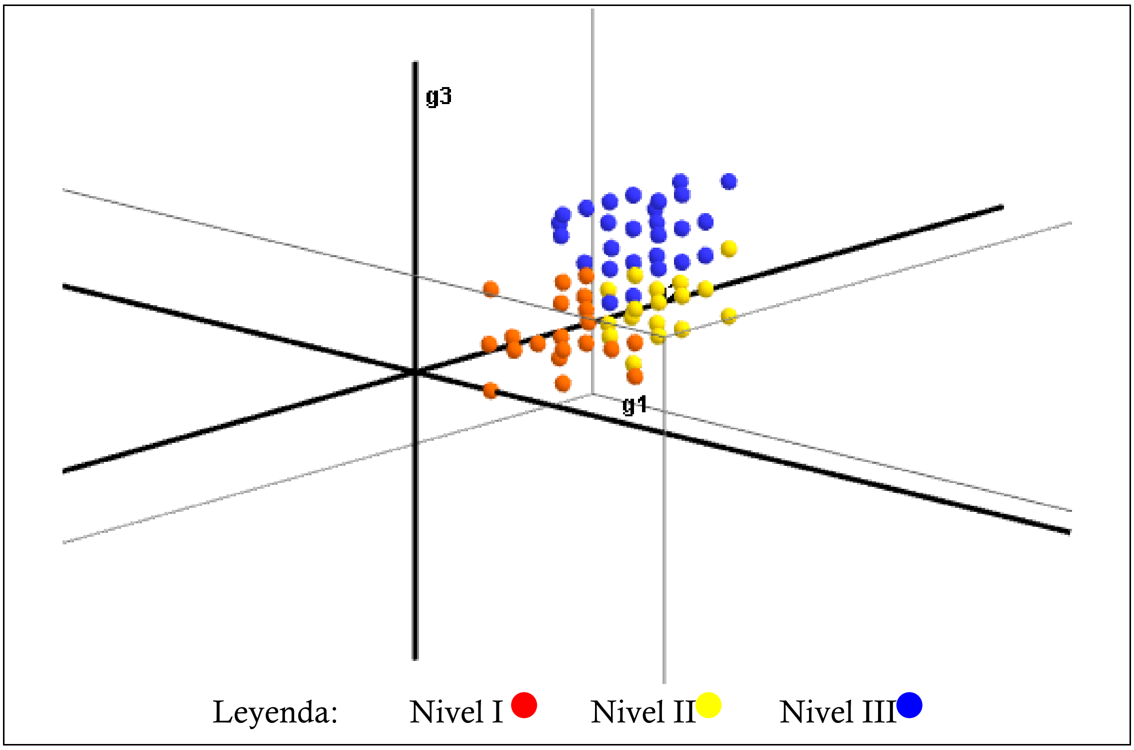


Figura 48. Representación de los datos (g1, g2, g3).

En esta imagen, que muestra una vista de la representación en 3D, se aprecia la separación entre los tres niveles (cluster). Para poder hacer una mejor valoración vamos a proyectar la distribución de puntos sobre los tres planos.

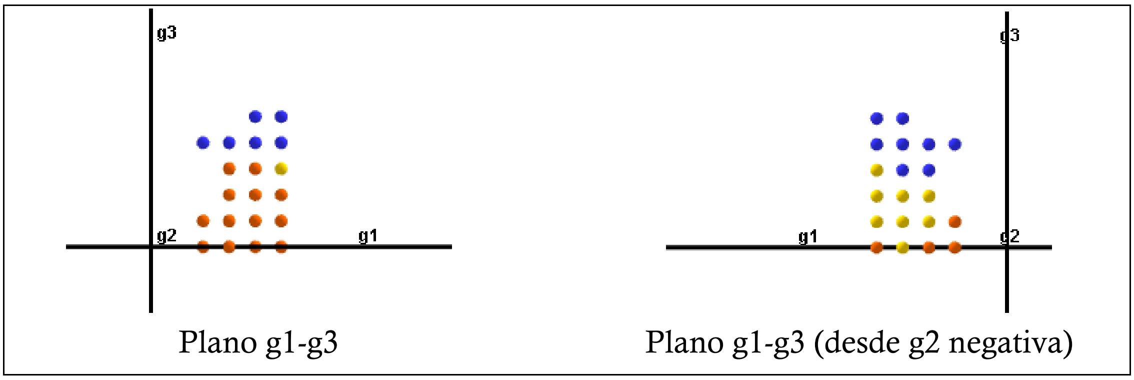
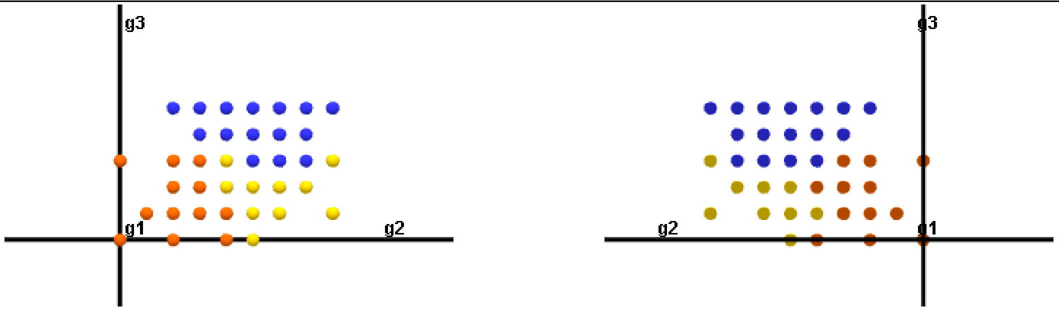


Figura 49. Proyecciones de los datos en el plano g1-g3.

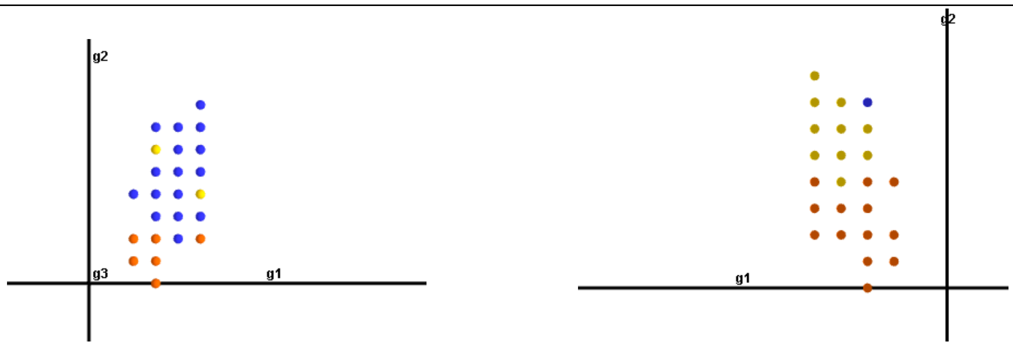
Aquí se observa cómo los niveles I y II tienen un número de aciertos similares en las preguntas de los grupos 1 y 3, pero los dos niveles difieren en los aciertos del grupo 2.



Plano g2-g3 | Plano g2-g3 (desde g1 negativa)

Figura 50. Proyecciones de los datos en el plano g2-g3.

En este caso las gráficas muestran los puntos dados por respuestas correctas del grupo 2 y del grupo 3 de preguntas. Se aprecia claramente que en el nivel I los aciertos en los grupos 2 y 3 son inferiores a los de los niveles II y III. En el caso de los niveles II y III tenemos que tienen resultados similares en el grupo 2 pero en el grupo 3 los resultados del nivel III son mejores que en los otros dos niveles.



Plano g1-g2 | Plano g1-g2 (desde g3 negativa)

Figura 51. Proyecciones de los datos en el plano g1-g2.

Aquí observamos que los resultados obtenidos en el grupo 1 tienen el mismo rango en todos los niveles pero al considerar las respuestas del grupo 2 se diferencia el nivel I de los niveles II y III.

4.4.4.3. Algunas conclusiones inmediatas

Como puede observarse en la imagen anterior, el comportamiento de las tres gráficas es muy similar en el bloque 1 (de P1 a P6). En el segundo bloque (de P7 a P14) la gráfica del nivel I se separa de las otras dos que continúan siendo parecidas. Y en el bloque 3 (de P15 a P19) las gráficas de los niveles I y II se acercan mientras la del nivel III se distancia de ellas.

Los resultados obtenidos mediante esta clasificación evidencian la fuerte vinculación entre los cluster y la corrección en las respuestas dadas en los diferentes bloques. En algunos casos los "aciertos" de una pregunta son superiores en un nivel inferior, lo que no presenta ningún tipo de contradicción pues, como ya se ha comentado con anterioridad, una pregunta por sí misma no determina el nivel de razonamiento.

En el primer bloque se obtienen porcentajes de aciertos similares en los tres niveles.

Tabla 13. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel del bloque 1.

PREGUNTA	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III
P1	90,24	98,39	92,86
P2	90,24	95,16	97,62
P3	75,61	90,32	92,86
P4	95,12	100	97,62
P5	29,27	46,77	47,62
P6	34,15	54,84	61,90

En el segundo bloque se aprecia la similitud entre los porcentajes de los niveles II y III. Esto prueba que las preguntas de este bloque diferencian el nivel II del nivel I pero no del III.

Tabla 14. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta del bloque 2 para los niveles II y III.

PREGUNTA	NIVEL II	NIVEL III
P7	16,13	21,43
P8	83,87	88,10
P9	80,65	83,33
P10	77,42	95,24
P11	43,55	64,29
P12	62,90	71,43
P13	96,77	83,33
P14	87,10	97,62

Y por último, en el bloque 3 los porcentajes de los niveles I y II son nuevamente parecidos, por lo que se prueba que las preguntas de este bloque discriminan los niveles II y III pero no el I y el II.

Tabla 15. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta del bloque 3 para los niveles I y II.

PREGUNTA	NIVEL I	NIVEL II
P15	17,07	25,81
P16	39,02	22,58
P17	31,71	40,32
P18	14,63	38,71
P19	31,71	33,87

Ahora vamos a diferenciar los resultados entre los estudiantes que reconocer hacer un uso más o menos frecuente de los programas de representación, es decir, de la visualización y los que no conocen o no usan este tipo de programas.

Tabla 16. Distribución por niveles entre los estudiantes que no usan visualización.

	SIN VISUALIZACIÓN	
NIVEL I	21	26,58%
NIVEL II	38	48,10%
NIVEL III	20	25,32%
	79	

Tabla 17. Distribución por niveles entre los estudiantes que usan visualización.

	CON VISUALIZACIÓN	
NIVEL I	20	25,64%
NIVEL II	24	30,77%
NIVEL III	34	43,59%
	78	

Como puede observarse encontramos mayor porcentaje de estudiantes en el nivel III entre aquellos que han hecho uso de la visualización. Lo mismo se observa diferenciando entre estudiantes de bachillerato y universitarios, por lo que volvemos a ratificar el objetivo 5.

Tabla 18. Distribución de estudiantes de bachillerato por niveles, con y sin visualización.

BACHILLERATO	GLOBAL	CON VISUALIZACIÓN	SIN VISUALIZACIÓN
NIVEL I	26,09%	50,00%	22,50%
NIVEL II	50,00%	16,67%	55,00%
NIVEL III	23,91%	33,33%	22,50%

Tabla 19. Distribución de estudiantes universitarios por niveles, con y sin visualización.

UNIVERSIDAD	GLOBAL	CON VISUALIZACIÓN	SIN VISUALIZACIÓN
NIVEL I	26,13%	23,61%	30,77%
NIVEL II	35,14%	31,94%	41,03%
NIVEL III	38,74%	44,44%	28,21%

Otro dato que nos afianza en el escaso uso de la visualización en el bachillerato es que de los 78 estudiantes que habitualmente hacen uso de ella 72 son universitarios, es decir, el 92’30%.

Los datos globales de clasificación por nivel académico son los que aparecen en la siguiente tabla.

Tabla 20. Resultados globales por curso y nivel.

	1º Bachillerato	2º Bachillerato	1º Universidad	2º/3º Universidad	Total
NIVEL I	10	2	18	11	**41**
NIVEL II	16	7	25	14	**62**
NIVEL III	6	5	22	21	**54**
TOTAL	**32**	**14**	**65**	**46**	

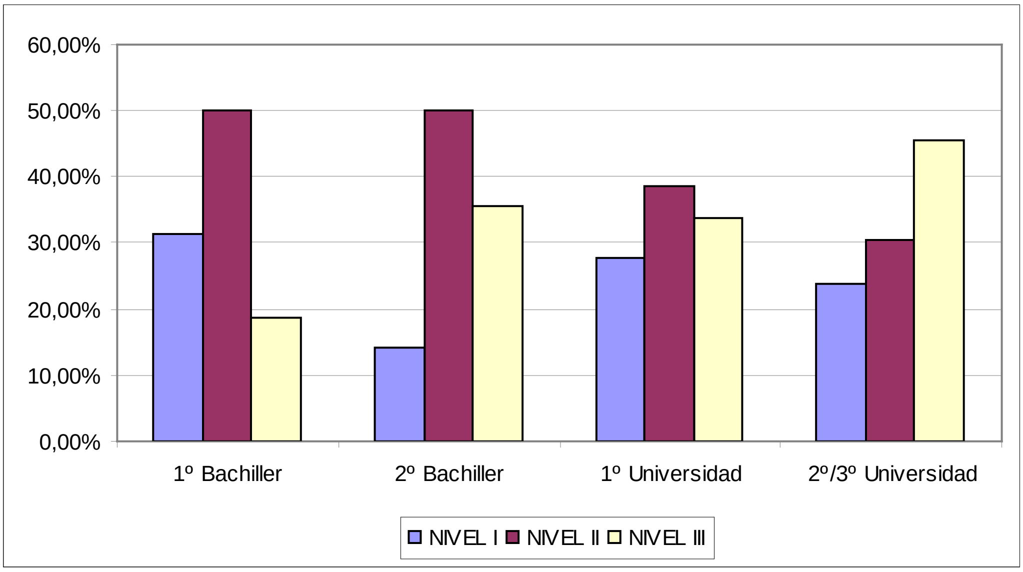


Figura 52. Porcentajes de estudiantes en cada nivel por curso.

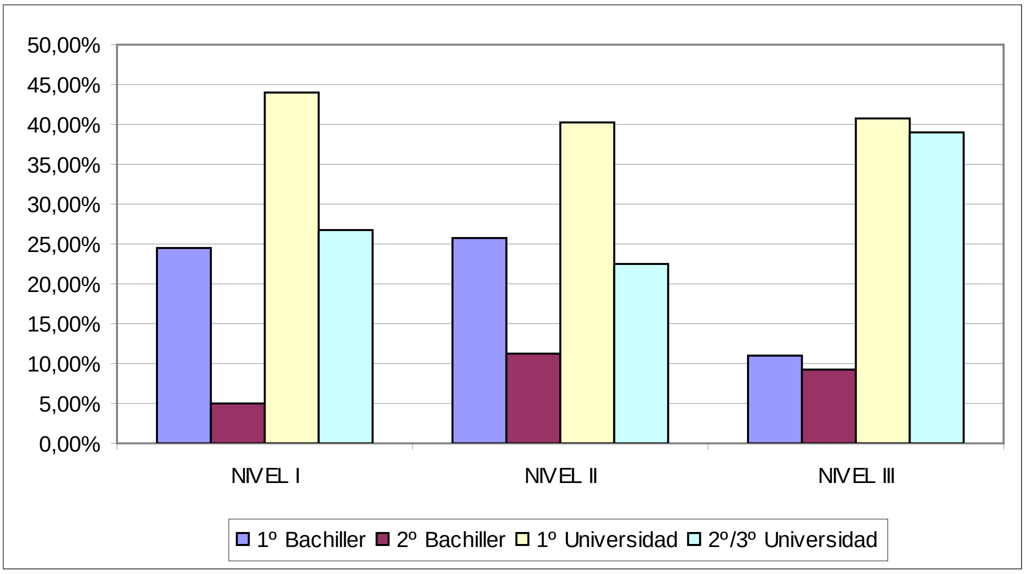


Figura 53. Porcentajes de estudiantes en cada curso por nivel.

Entre las preguntas de contexto se incluía una referente a si el test había cambiado el concepto de área que tenía el entrevistado. En este sentido, opinan que ha cambiado su concepto de área 71 de los 157 entrevistados, lo que representa un 45’22% del total. Este dato tiene importancia pues se relaciona con el objetivo 6.

Tabla 21. Estudiantes que expresan que su concepto de área ha cambiado tras el test.

Número de estudiantes que expresan que su concepto de área ha cambiado tras el test	
NIVEL I	18
NIVEL II	32
NIVEL III	21
TOTAL	**71**

4.4.4.4. Estabilidad del análisis

El algoritmo de las *k*-medias puede ofrecer resultados diferentes según los centros de partida dependiendo de la distribución de los datos. Por este motivo nos planteamos variar el criterio inicial sin perder por ello la coherencia con los antecedentes experimentales.

En este caso vamos a eliminar la condición de cada nivel relativa a las respuestas del grupo 1. Es decir, establecemos el siguiente criterio (B):

Tabla 22. Número de coincidencias con el patrón ideal en cada bloque y nivel según el criterio B.

CRITERIO B	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3
NIVEL I		<4	≤2
NIVEL II		≥4	≤2
NIVEL III		≥5	≥3

La matriz de centros obtenida en este caso es:

Tabla 23. Promedio de cada variable por nivel (criterio B).

	g1	**g2**	**g3**
NIVEL I	4,241	2,310	1,138
NIVEL II	4,729	5,314	1,557
NIVEL III	4,876	6,000	3,525

CLUSTER INICIALES

Tabla 24. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel (criterio B).

PREGUNTA	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III
P1	**89,66**	**97,14**	**95,00**
P2	**89,66**	**95,71**	**95,00**
P3	**79,31**	**88,57**	**92,50**
P4	**96,55**	**98,57**	**97,50**
P5	**34,48**	**42,86**	**52,50**
P6	**34,48**	**50,00**	**55,00**
P7	10,34	14,28	20,00
P8	51,72	**81,43**	**87,50**
P9	20,69	**80,00**	**82,50**
P10	41,38	**74,29**	**95,00**
P11	24,14	**42,86**	**57,50**
P12	13,79	**60,00**	**77,50**
P13	55,17	**94,29**	**87,50**
P14	13,79	**84,29**	**92,50**
P15	6,90	27,14	**72,50**
P16	41,38	21,43	**72,50**
P17	31,03	38,57	**87,50**
P18	6,90	37,14	**65,00**
P19	27,59	31,43	**55,00**

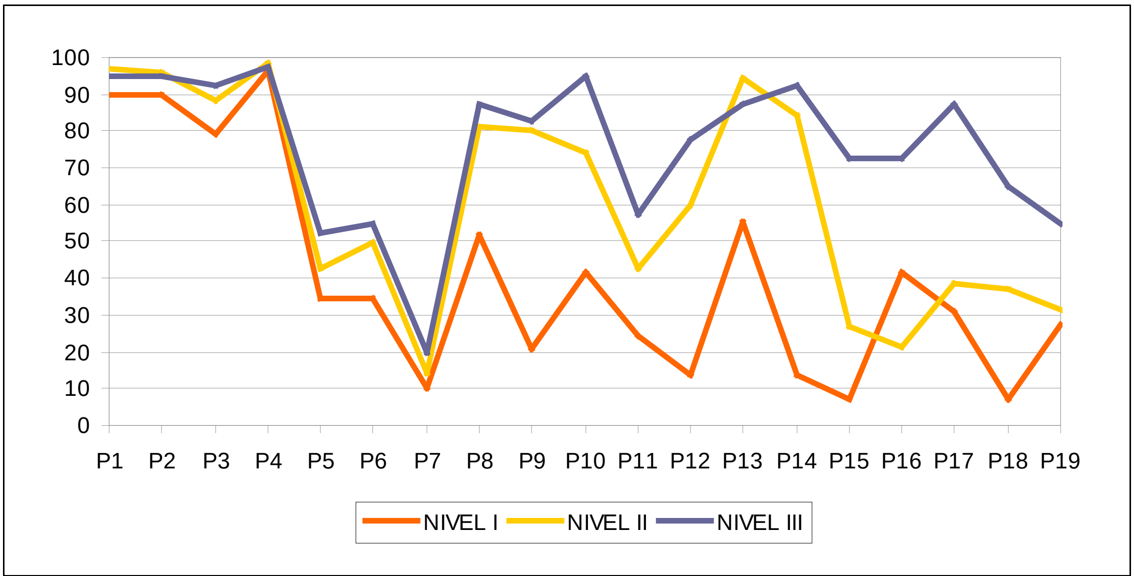


Figura 54. Porcentaje de coincidencias en cada pregunta y nivel (criterio B).

Los centros iniciales pues varían pero se obtiene exactamente la misma clasificación en cluster. Este resultado deja evidencia de la robustez de la clasificación obtenida. El criterio B clasifica 131 de los 157 test, lo que representa el 83'44%.

Después de trabajar con estos dos criterios que consideran cierto grado de "acierto" o "desacierto" en cada bloque, en función de la experiencia que nos ha proporcionado la entrevista, tomamos uno más drástico. Partimos del supuesto de que un estudiante en el nivel I de razonamiento contesta adecuadamente todas las preguntas del bloque 1 pero no lo hace en ninguna de los bloques 2 y 3. En el nivel II consideramos que solo no se contestan adecuadamente las preguntas del bloque 3. Y un estudiante con un razonamiento de nivel III contesta todas las preguntas del test adecuadamente. Es decir:

Tabla 25. Número de coincidencias con el patrón ideal en cada bloque y nivel según el criterio C.

CRITERIO C	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3
NIVEL I	6	0	0
NIVEL II	6	8	0
NIVEL III	6	8	5

En este caso consideramos matriz de centros iniciales coincide con el criterio establecido, es decir:

Tabla 26. Asignación inicial cada variable por nivel (criterio C).

	g1	**g2**	**g3**
NIVEL I	6,00	0,00	0,00
NIVEL II	6,00	8,00	0,00
NIVEL III	6,00	8,00	5,00

Con este criterio se obtiene la misma clasificación y los mismos cluster que en los dos casos anteriores. Lo que además da por buenos los criterios más realistas de clasificación aplicados para los casos A y B.

Así pues, no solo queda confirmada la existencia de los niveles defendida en nuestra tesis, sino que son detectables a través de una prueba escrita basada en los descriptores que hemos detallado en el capítulo 3.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1. Introducción

A lo largo de esta memoria hemos analizado aspectos dirigidos al análisis y la solución de la comprensión del concepto de área. En primer lugar hemos hecho una breve introducción sobre la Educación Matemática para centrarnos en nuestro modelo educativo, el modelo de van Hiele. Este modelo ofrece una actuación general sobre el proceso de la enseñanza-aprendizaje. A su vez lo hemos relacionado con la visualización (modelo de Vinner) que es una herramienta de ayuda en la comprensión de los conceptos. Establecido el marco teórico a nivel didáctico hemos analizado el concepto que nos ocupa: el área de una figura plana, que también hemos relacionado con el concepto de integral.

Finalmente hemos establecido los objetivos concretos de nuestro trabajo siendo el principal la descripción de los niveles de razonamiento de van Hiele. Estos descriptores se relacionan de manera intrínseca con la entrevista abierta semiestructurada de carácter socrático. A partir de esta entrevista hemos desarrollado un test conservando, en la medida de lo posible, las mismas características de aquella. Los resultados obtenidos nos han servido para confirmar la adecuación de los descriptores en la identificación de los niveles de razonamiento.

Contar con los descriptores de los niveles I, II y III del modelo de van Hiele en este concepto nos abre el camino para poder considerar el modelo con todos sus elementos y llevar a cabo un cambio en la propuesta educativa del concepto de área de una figura plana. Además, las herramientas de trabajo diseñadas para esta memoria (entrevista y test) tienen, desde la constatación de los descriptores, su aplicación directa en el aula.

5.2. Conclusiones

El área de una figura plana es un concepto que se supone conocido por todos pero que, según hemos comprobado en esta memoria, no es comprendido ni razonado por muchos. Esta situación, más allá de la propia dificultad sobre el concepto de área, provoca una dificultad sustancial en el razonamiento y en la compresión del concepto de integral, uno de los temas fundamentales del Análisis Matemático y un importante contenido del currículum de diferentes ciencias e ingenierías. Las dificultades de este campo de las Matemáticas (integral, aproximación local, sucesiones, series, límites…) tienen un denominador común: el *infinito* o, con más precisión, los procesos de razonamiento que descansan sobre el infinito potencial.

El propósito de este capítulo es mostrar propuestas concretas que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de área para, posteriormente, poder trabajar el concepto de integral desde un enfoque que permita mejorar su comprensión y razonamiento. Desde luego, creemos que la extensión al concepto de área de una figura plana tiene interés en sí mismo pues hablamos de un concepto fundamental, propio del análisis matemático, que está directamente relacionado con el de integral. Además, el carácter geométrico del concepto y su presentación inicial en niveles educativos elementales favorece la aplicación del modelo de van Hiele.

El concepto de área es un *concepto dinámico*, en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable. Desde luego, su comprensión solo puede darse a partir del nivel III de razonamiento. El concepto es introducido en la enseñanza primaria en un contexto puramente estático. Así, pronto se enseñan fórmulas que permiten medir el área de algunas figuras geométricas sencillas. Si años más tarde no se hace la adecuada revisión del concepto, se generan fácilmente esas imágenes a las que nos referíamos en el capítulo 2. La ausencia de una redefinición de área como consecuencia de la introducción del cálculo integral, puede llevar al estudiante a aferrarse a su imagen del área como una mera aplicación de una fórmula, válida para algunas figuras sencillas, por mucho que quizá sea capaz de aplicar la regla de Barrow en determinadas circunstancias.

Por otra parte, por la misma definición de área de una figura plana, nuestro trabajo tiene que abordar los aspectos numéricos. Es decir, no solo tratamos con aspectos visuales o geométricos sino que nos hemos de referir a la componente numérica del área y, en ese sentido, este trabajo aporta también esa significativa novedad que lo diferencia de sus precedentes. En efecto, aunque no se haya hecho de una forma exclusiva, se ha explorado esa vinculación con los aspectos numéricos del concepto. Al hacerlo nos apoyamos, en parte, en la misma imagen antes mencionada. Es decir, asumimos que *estamos de acuerdo* en que el área es un número (positivo) que se asocia a una cierta región del plano, pues esa es la *parte de verdad* que compartiría con la pura visión estática del concepto.

Ciertamente, el carácter dinámico del concepto de área se suele plantear por primera vez al considerar las aplicaciones de la integral, si es que eso se hace, claro está. Es decir, un estudiante puede seguir identificando "área" con la "fórmula" que permite calcularla mientras no se vea en la necesidad de aplicarla a una figura que se salga de sus modelos. El ejemplo más sencillo sería un trapecio mixtilíneo, a pesar de que pudiéramos pensar que hay mil situaciones cotidianas (como una mancha, la fotografía de un objeto, etc.) que podrían conducirle a considerar la insuficiencia de "su" concepto. Sin embargo, una vez más comprobamos que el aprendizaje ocurre cuando hay verdaderas experiencias de aprendizaje, de modo que será muy difícil que espontáneamente se genere, por mucho que mil objetos tengan un área que sería imposible calcular con la mera aplicación de una fórmula sencilla. Y, por eso mismo, es necesario conducir a una experiencia que muestre claramente esa insuficiencia, justo en el contexto de definir (de nuevo) lo que entendemos por área, usando la imagen del trapecio mixtilíneo.

5.2.1. Consecución de los objetivos

En el capítulo 3 se han establecido los seis objetivos de esta memoria. La constatación de la consecución de cada uno de ellos se ha tratado en 3.3 y a lo largo del capítulo 4.

Como resumen de todos ellos podemos decir que hemos establecido los descriptores de los niveles de razonamiento I, II y III del modelo de van Hiele para el concepto de área. El desarrollo de estos descriptores está directamente relacionado con la conciliación entre el concepto-imagen y el concepto-definición. De forma paralela a la obtención de los descriptores se ha redactado el guion de una entrevista de carácter socrático que permite (mediante el reconocimiento de los descriptores y la adecuada intervención del entrevistador) determinar el nivel de razonamiento del entrevistado.

Con el mismo objetivo se ha confeccionado un test de respuesta múltiple que, si bien muestra algunas limitaciones por su propia estructura, permite repetir la experiencia en un elevado número de casos. Del estudio estadístico realizado con las respuestas a este test, se desprende la idoneidad del uso de herramientas que contribuyan a mejorar la visualización de los conceptos matemáticos en la mejora del nivel de razonamiento de los estudiantes.

Tanto el test como la entrevista constituyen (cada uno en su medida) una experiencia de aprendizaje. El test tiene además la ventaja de permitir conocer el nivel de razonamiento sobre el concepto de área en un grupo numeroso (por ejemplo, los alumnos de una clase o un curso) por lo que a nivel didáctico se convierte en una herramienta útil en la detección de las dificultades y, asimismo, en una prueba inicial válida para programar la unidad acorde a la realidad del aula.

5.2.2. Futuras líneas de trabajo

Contar con los descriptores de un concepto en el modelo de van Hiele es un elemento fundamental para el desarrollo global del modelo, pero debemos recordar que los niveles de razonamiento son solo una de las tres componentes principales del mismo. Por tanto, desarrollar experiencias adecuadas a las diferentes fases de aprendizaje (basadas evidentemente en los descriptores desarrollados) se nos presenta como una nueva línea de trabajo para continuar con la extensión del modelo.

Otro problema que queda abierto es establecer si hay relación entre el nivel de razonamiento en diferentes conceptos para los que ya se han enunciado los descriptores según el modelo de van Hiele. En este caso tenemos la aproximación local (que se ha desarrollado desde dos enfoques diferentes), la noción de convergencia y la continuidad. Sospechamos que existirá una clara relación, de modo que el nivel de razonamiento será el mismo o fuertemente correlacionado si se hiciera el estudio a través de los respectivos test. Y es que, consecuentemente con los postulados del modelo de van Hiele, el nivel de razonamiento que permite a un estudiante concluir que para obtener el área de un trapecio mixtilíneo necesita hacer una descomposición infinita y estudiar la convergencia de ese proceso, no parece diferir de quien concluye, por ejemplo, que la tangente a una curva en un punto será, si existe, aquella recta que se obtenga por infinitas magnificaciones locales de la curva. Así pues, trataremos de verificar esa hipótesis razonable en trabajos posteriores.

Retomando la cuestión del área, el trabajo puede continuar con el estudio en situaciones que podríamos llamas *patológicas* o en áreas no planas.

En 3.3.1 decíamos que, debido al enfoque numérico y visual de las pruebas, resulta complicado detectar el nivel IV. Por tanto, queda pendiente describir y reconocer este nivel de razonamiento que debería basarse en un enfoque diferente que permitiera tratar el área desde un punto de vista formal.

5.3. Acciones de remedio

5.3.1. Uso de las TIC y visualización

La velocidad de cálculo que ofrecen, no ya las calculadoras, sino las hojas de cálculo (muchas veces terriblemente desaprovechadas para construir unas simples tablas) y, por supuesto, los programas informáticos de matemática simbólica, suponen un recurso importantísimo para seguir en ese intento por lograr conectar los contenidos curriculares con la realidad. Estas herramientas permiten rescatar los métodos numéricos de integración desaparecidos, como ya hemos dicho, del currículo de bachillerato. También, gracias a las TIC, se pueden usar estos métodos (su repetición) para profundizar en el concepto dinámico del área. Además, diferentes autores (por ejemplo, Davidson (1990)) apuntan que el uso de métodos numéricos de integración ayuda en la adquisición de un significado de la integral más asociado al problema del área.

Los diferentes programas de cálculo simbólico y representación disponibles hoy en día (Derive, Mathematica, GeoGebra…) facilitan, como nunca antes había pasado, el uso de la visualización como herramienta didáctica. Este recurso está gravemente desaprovechado (de manera especial en la enseñanza preuniversitaria) y, como se ha visto en esta memoria, el uso de la visualización mejora sensiblemente el nivel de razonamiento de los estudiantes. También ha quedado patente que el uso de herramientas informáticas que favorezcan la visualización queda relegado a la universidad y que los alumnos de bachillerato adolecen de su uso. Con el interés centrado en la expansión del uso de la visualización se presenta, en los apéndices 6 y 7, una forma de implementar con *Derive* la aproximación por franjas y los métodos numéricos, ambos aspectos desde la doble perspectiva: geométrica y numérica.

5.3.2. Acciones didácticas

La primera y más directa aplicación a nivel didáctico, como ya se ha dicho en el capítulo 4, es el uso del test como una evaluación inicial del concepto de área. Es en sí mismo una revisión de este concepto que sirve para continuar tanto con el concepto de área como con el de integral.

En un sentido más pedagógico, el modelo de van Hiele nos plantea la necesidad de adecuar el lenguaje y la metodología al nivel de razonamiento. A partir de ese reconocimiento se podrá trabajar mejor en la construcción de un concepto-imagen acorde a la definición del mismo. En la doble vía de Vinner y van Hiele se podrá buscar que el estudiante comprenda el concepto. Recordemos que los descriptores desarrollados para el área conducen a esa concordancia entre la imagen y la definición.

Así pues, la extensión del modelo de van Hiele al concepto del área desarrollada en esta memoria, proporciona los elementos fundamentales para innovar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto (y, en consecuencia, de la integral). Usando el test (o mejor aún la entrevista) se toma como punto de partida los conocimientos previos. A la vista de las dificultades observadas y a través de diferentes experiencias de aprendizaje, el estudiante puede mejorar su propio nivel de razonamiento (usando como referencia los descriptores enunciados). Esto implica que se planteen tareas que traten situaciones de indagación, planteamiento de conjeturas, análisis de situaciones… de manera que el estudiante sea parte activa de su aprendizaje. En esta metodología toma un sentido especial el uso de las TIC que pueden presentar situaciones menos habituales a las usadas comúnmente en los cursos previos a la universidad. Esto no va en contra de aplicar un trabajo más algebraico o formal sino todo lo contrario, pretende dotar de significado para el estudiante a todo ese trabajo amparado por la comprensión del concepto.

Valencia, diciembre de 2015.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

[1] Aldana, E.; González, M. T. (2009) *Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario*. En González, M. J; González, M. T; Murillo, J. (Eds.) Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

[2] Artigue, M. (1991) *Analysis*. En Tall. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London. pp. 167-198

[3] Azcárate, C.; Camacho, M. (2003) *Sobre la investigación en Didáctica del análisis matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2, pp. 135-149.

[4] Bloom, B.S. (1956) Taxonomy *of Educational Objectives: Cognitive Domain.* New York. David McKay Co Inc.

[5] Boigues, F.J.; Llinares, S.; Estruch, V. (2010) *Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Análisis a través de la lógica fuzzy*. Relime, Vol. 13 (3), pp. 255-282.

[6] Borromeo, F. (2012) *Mathematical thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics*. 12th International Congress on Mathematical Education.

[7] Buchberger, B. (2003) *The White-Box and Black-Box. Usage of Mathematical Software Systems.* Simposio "Matemáticas y nuevas tecnologías: ¿qué aprender, cómo enseñar?" Universidad Complutense de Madrid, Fundación Ramón Areces.

[8] Calvo, C. (2001) *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

[9] Camacho, M. (2005) *La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS* (*computer algebra system*). Investigación en Educación Matemática. Actas del IX Simposio de la SEIEM. Córdoba. pp.97-110.

[10]Camacho, M.; Depool, R.; Garbín, S. (2008) *Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos*. Educación Matemática, Vol. 20, Núm. 3, pp. 33-57.

[11]Camacho, M.; Depool, R. (2003) *Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) Derive.* Educación Matemática, Vol. 15, núm 3.

[12]Campillo, P.; Pérez Carreras, P. (1998) *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele.* Divulgaciones Matemáticas, v. 6, No. 1, pp. 69-80.

[13]Campillo, P.; Pérez Carreras, P. (2002) *Construcción de un concepto-imagen adecuado al concepto de continuidad de Cauchy.* Divulgaciones Matemáticas, v. 10, No. 1, pp. 51-62.

[14]Ceballos, L.; López, A. (2003) *Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele.* Revista educación y pedagogía, Vol. XV, No. 35, pp. 131-140.

[15]Codes, M.; Sierra, M. (2005) *Entorno computacional y educación matemática: una revisión del estado actual*. Informe de investigación. IX Simposio SEIEM, Córdoba.

[16]Collete, J.P. (1992) *Historia de las Matemáticas, vol. 2*. ISBN: 968-23-1363-5 Ed. Siglo XXI, pp. 498-499.

[17]D'Amore, B. (2006) *Objetos, significados, representaciones semióticos y sentido*. Relime, Número Especial, 2006, pp. 177-195.

[18]Dana-Picard, T.; Steiner, J. (2003) *Enhancing conceptual insight using a CAS*. JCT. Disponible en: http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/3-ShortPres-DanaPicard.pdf

[19]Davidson, N. (1990) *Cooperative learning in Mathematics: A handbook for teachers*. Menlo Prak, CA: Innovative Learning, Addison-Wesley, 1990.

[20]Depool, R. (2001) *Influencias del uso de las nuevas tecnologías en la actitud y rendimiento académico de los estudiantes de cálculo*. UNEXPO. Barquisimeto. Encuentro Regional de Currículo.

[21]DECRET 87/2015, de 5 de juny, del Consell, pel qual establixx el currículum i desplega l'ordenació general de l'Educació Secundària

Obligatòria i del Batxillerat a la Comunitat Valenciana, DOCV núm. 75444, de 10 de juny de 2015.

[22]Duval, R.(1993) *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*, en F. Hitt (ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II, México, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 173-201.

[23]Eisenberg, T. (1994) *On understanding the reluctance to visualize*. Z.D.M., 94/4, pp. 109-113.

[24]Esteban, P.V.; Vasco, E.D.; Bedoya, J.A. (2004) *Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo Van Hiele*. Concept Maps: Theory, Methology, Technoplogy. Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping, 2. Navarra, España: Universidad Pública de Navarra, vol. 2, pp. 151-154.

[25]Ford, W.; Resnick, L. (1990) *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.

[26]García, J.; López, M. (1981) *Matemáticas COU. Curso teórico-práctico.* Ed. Marfil. ISBN: 84-268-0280-X Pp. 597-604.

[27]Garbín, S. (2005) *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos*. Relime, Vol. 8, Núm. 2, pp. 169-193.

[28]Garín, M. y col. (2014) *Matemáticas. 5 Primaria. Savia.* Ed. SM. ISBN: 978-84-675-6993-3

[29]Hoffer, A.R. (1983) *Van Hiele-Based Research.* En *Adquisition of Mathematical Concepts and Processes.* Lesh, R. & Landau, M, ed. Academia Press. 1983.

[30]Ibarra, S.E.; Bravo, J.M.; Grijalva, A. (2001) *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. Disponible en:
http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Ibarra%20Olmos.pdf

[31]Jaramillo, C.; Campillo, P. (2001) *Propuesta teórica de Entrevista Socrática a la luz del Modelo de Van Hiele.* Divulgaciones Matemáticas 9, (1), pp. 65-84

[32]Jaramillo, C.; Londoño, R.; Jurado. F. (2012) *Una metodología altenativa para la comprensión de la noción de límite.* Alemania: Editorial Académica Española.

[33]Kilpatrick, J. (1987) *George Polya's Influence on Mathematics Education*. Mathematics Magazine, vol. 5.

[34]Llorens, J.L. (2001) *El impacto de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas (diez años de matemáticas con ordenador).* Épsilon nº 49, pp. 97-118.

[35]Llorens, J.L. (2002) *Tecnología para el realismo en la enseñanza del Cálculo Integral*. La Gaceta de la RSME, Vol. 5.2, pp. 455-462.

[36]Llorens, J.L. (2009) *Matemáticas con Derive 6.* Valencia, servicio de publicaciones de la UPV, ISBN. 978-84-937484-2-5. pp. 233-280.

[37]Llorens, J.L.; Pérez Carreras, P. (1997) *An Extensión of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation,* Int. J. Math. Educ. Sci. Techonol. 28, No. 5, pp. 713-726

[38]Llorens, J.L.; Prat, M. (2015) *Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área.* Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 45, 113-128. Recuperado de:
http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/660/1192

[39]Llorens, J.L.; Santonja, F.J. (1997) *Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral.* Divulgaciones Matemáticas, v. 5, No. 1/2, pp. 61-76.

[40]Mundy, J. (1984) *Analysis of Errors of First Year Calculus Students*, en Theory, Research and Practice in Mathematics Educations, Bell, A., Low, B. and Kilpatrick, J. (Eds.), Proceedings ICME-5.

[41]Oltra, M. (1997) *Aplicación práctica de modelos matemáticos para la obtención del volumen del kiwi.* Trabajo final de Carrera. UPV.

[42]Piaget, J. (1967*) Development and learning,* en Víctor, E; Lerner, M. (eds): Readings in Science Education for the Elementary School. Macmillan. N.Y. 1967.

[43]Pólya, G, (1981) *Mathematical Discovery.* Wiley, N.Y.

[44]Portal official de Tekman Books. *Más información sobre Entusiasmat.* www.tekmanbooks.com/newsite/wp-content/uploads/docs/Mas_informacion_EMAT_ESP.pdf [Consulta: 5 de mayo de 2015]

[45]Rasslan, S.; Tall, D. (2002) *Definitions and images for the Definite Integral Concept.* Proceedings of the 26th PME. 4. pp. 89-96

[46]REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE, 3 de enero de 2015, núm. 3, sección I, p. 419-422

[47]Selden, A; Selden, J. (1993) *Collegiate Mathematics Education Research: What Would That Be Like?* The College Mathematics Jurnal, v. 24, n. 5, pp.431-445.

[48]Tall, D.O.; Vinner, S. (1981) *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12 (2), pp. 151-169.

[49]Turégano, P. (1994) *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal.* Tesis doctoral en microftxes. Servei de Publicacions. Universitat de València.

[50]Turégano, P. (1998) *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo*. Enseñanza de las ciencias, 16 (2), pp. 233-249.

[51]Turégano, P. (2006) *Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula*. Ensayos (21), pp. 35-48.

[52]Turégano, P. (2007) *Imágenes del concepto de integral definida*. Ensayos (22), pp. 17-57.

[53]Usiskin, Z. (1982) *Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry.* CRRSGG Report, University of Chicago.

[54]Van Hiele, P.M. (1957) *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Tesis Doctoral.

[55]Van Hiele, P.M. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.* Academic Press.

[56]Vizmanos, J.R.; Alcalde, F. y Hernández, J. (2009): *Matemáticas 2, Bachillerato de Ciencias y Tecnología*, Madrid, S.M. ISBN 978-84-675-3472-6

[57]Zimmerman, W.; Cunningham, S. (1991) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. MMA Notes n. 19.

TESIS DOCTORALES SOBRE EXTENSIONES DEL MODELO DE VAN HIELE

[1] Llorens, J.L. (1994) Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. Universidad Politécnica de Valencia.

[2] Campillo, P. (1999) *La noción de continuidad desde la óptica del modelo de Van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia.

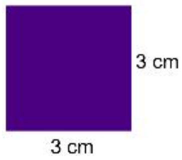
[3] de la Torre, A.F. (2000) *Modelización del espacio y el tiempo: su estudio vía el modelo de Van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia.

[4] Esteban, P.V. (2000) *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía del modelo de Van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia.

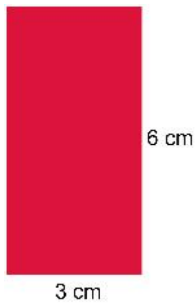
[5] Jaramillo, C.M. (2000) *La noción de serie convergente desde la óptica de los nivele de Van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia.

[6] Navarro, M.A. (2002) *Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo educativo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*. Universidad de Sevilla.

APÉNDICE 1
GUIÓN DE LA ENTREVISTA



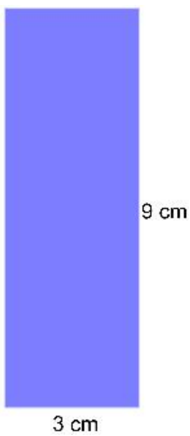
1. ¿Cuál es el área de esta figura?

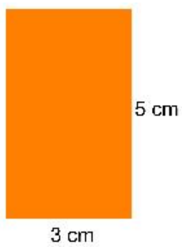


2. ¿y de esta otra?

---

3. Indica ahora las áreas de las dos figuras siguientes

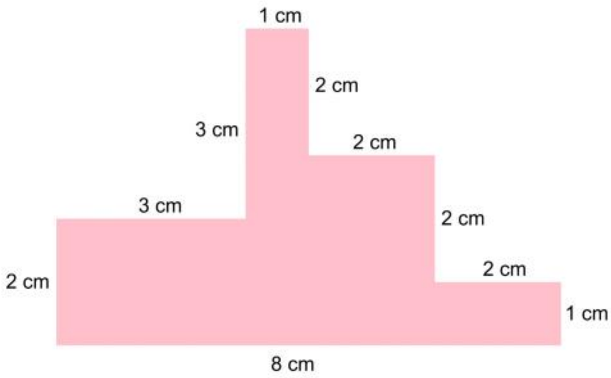


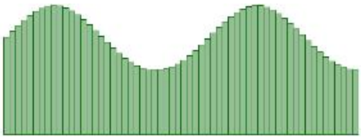


---

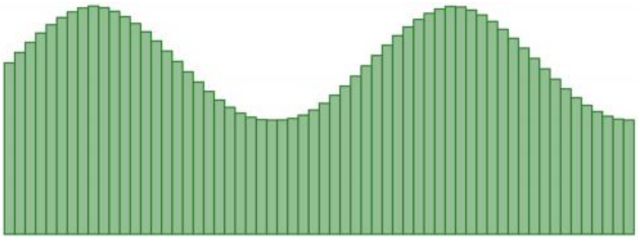
4. ¿Cuál será el área de la figura?

5. ¿Cómo obtendrías el área de?

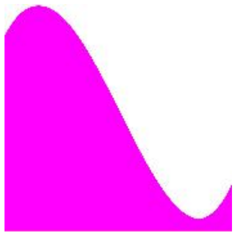


6. ¿Y el área de  ?

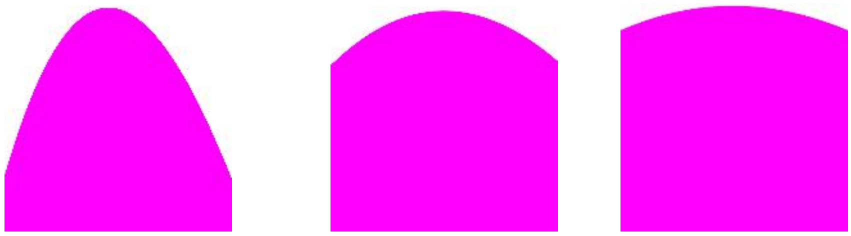
Con la imagen mejor definida vemos que tenemos



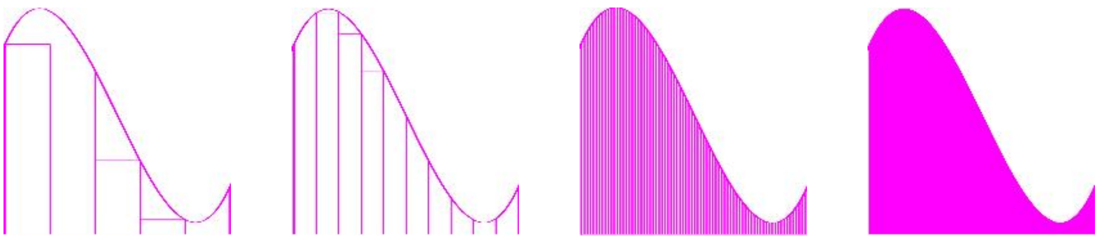
7. Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?



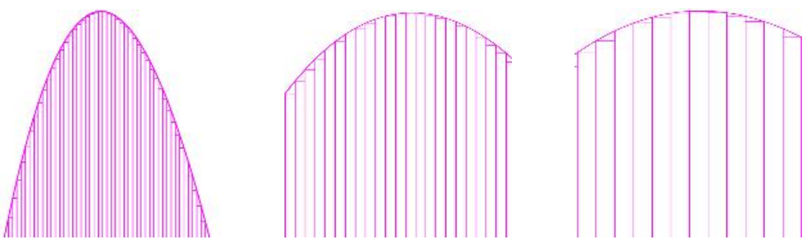
Haciendo varias veces *zoom* sobre la imagen observamos la secuencia.



8. Ahora observa estas imágenes. ¿Qué se está haciendo?

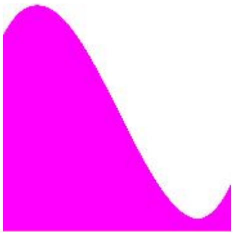


Observa estos *zoom* de la última imagen



9. ¿Tienes alguna sugerencia ahora respecto a la pregunta 7?

7. Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?



---

10. Imagina que tenemos una “herramienta” a la que llamaremos S_REC que *descompone* una figura plana en franjas como en el ejercicio anterior y nos da la **S**uma de las áreas de los **REC**tángulos.

En el caso anterior tendríamos

S_REC(5)= 11,5296

S_REC(10)= 13,2648

S_REC(100)= 14,819415

S_REC(200)= 14,9096980725

¿Observas algo?

---

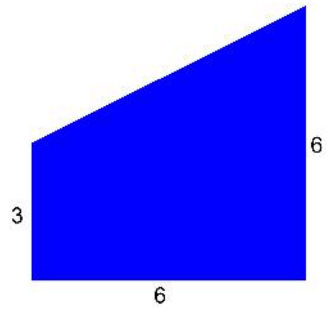
11. Aumentado el número de rectángulos tendremos:

S_REC(500)= 14,9638772849

S_REC(1000)= 14,9819383430

S_REC(10000)= 14,9981938342

¿Qué aprecias en los valores obtenidos?



12. ¿Cuál es el área de este trapecio?

Vamos a aplicarle S_REC.

S_REC(1)= 18

S_REC(3)= 24

S_REC(5)= 25.2

S_REC(10)= 26.1

S_REC(20)= 26.55

S_REC(50)= 26.82

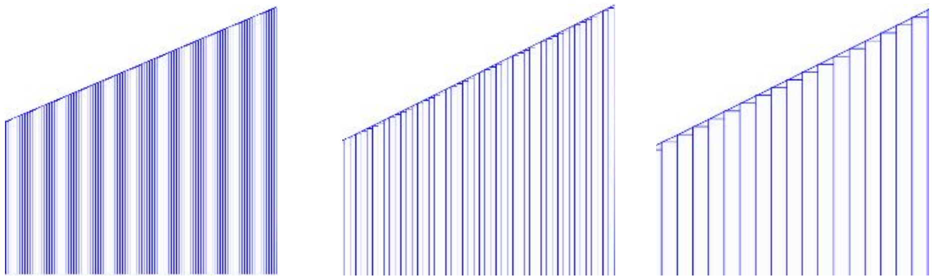
S_REC(100)= 26.91

S_REC(1000)= 26.991

S_REC(10000)= 26.9991

---

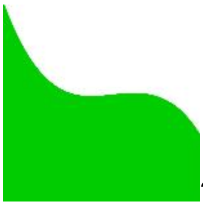
13. Observa qué pasa en la representación de S_REC(100) si hacemos *zoom*.



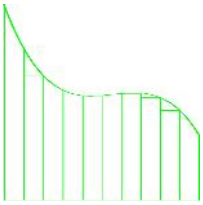
---

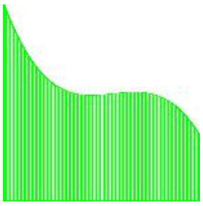
14. ¿Cómo conseguirás obtener con S_REC el valor del área del trapecio?

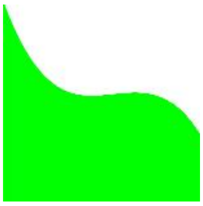
---

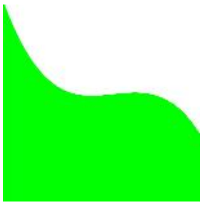
15. ¿Cómo obtendrías el área de ?

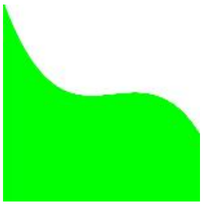
Observa qué hace S_REC

S_REC(10)=14.8374 

S_REC(100)=15.65578898 

S_REC(200)=15.70283444 

S_REC(500)=15.73112014 

S_REC(1000)=15.74055781 

16. ¿Cómo expresarías el modo de obtener el área?

APÉNDICE 2
TEST DE RESPUESTA MÚLTIPLE

GRACIAS por dedicar parte de tu tiempo a responder este test.

Puede que haya momentos en que tus ideas vayan cambiando, pero no retrocedas nunca para cambiar una respuesta.

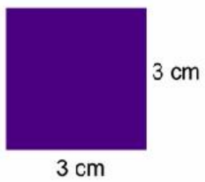
Elige siempre la respuesta que consideres mejor, aunque haya otras que no te parezcan claramente incorrectas.

Si no encuentras ninguna respuesta adecuada puedes escribir la tuya en OTRO.

Comenzamos...

Continuar »

4% completado

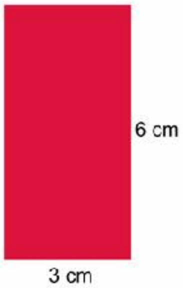


1) ¿Cuál es el área de esta figura *

- a) 3 cm.
- b) 6 cm2.
- c) 9 cm2.
- d) 12 cm.
- Otro:

« Atrás   Continuar »

9% completado

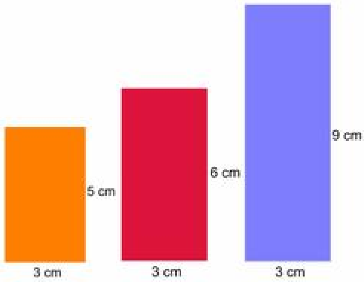


2) ¿Y el área de esta otra? *

- a) 3 cm.
- b) 9 cm2.
- c) 18 cm2.
- d) 18 cm.
- Otro:

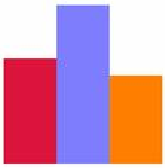
« Atrás Continuar »

14% completado



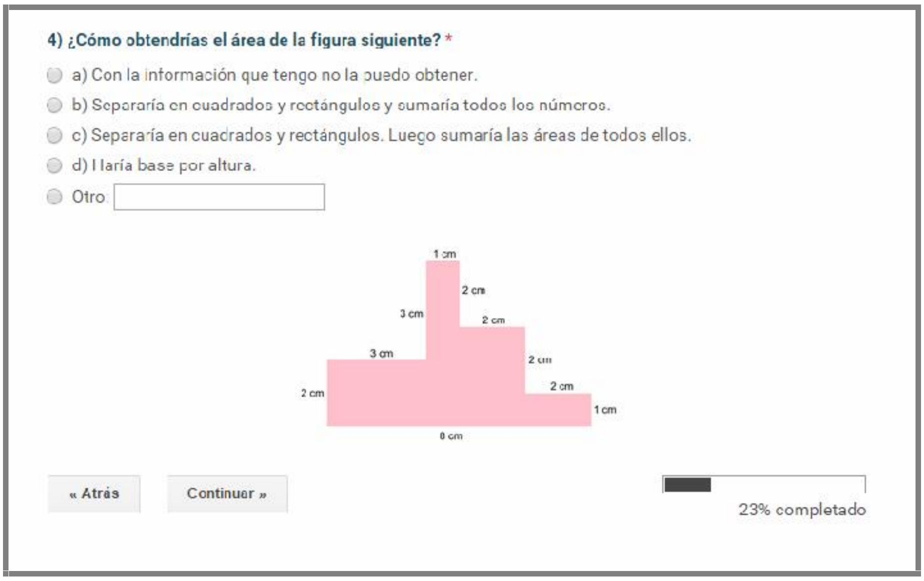
3) A la vista de los anteriores rectángulos, ¿cuál será el área de la figura? *

- a) 3 x 3 + 6 + 9 + 5
- b) 3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 6 + 3 x 9 + 3 x 5
- c) 3 x 3 x (6 + 9 + 5) = 3 x 3 x 6 + 3 x 3 x 9 + 3 x 3 x 5
- d) 3 x 6 x 9 x 5
- Otro:



« Atrás Continuar »

19% completado

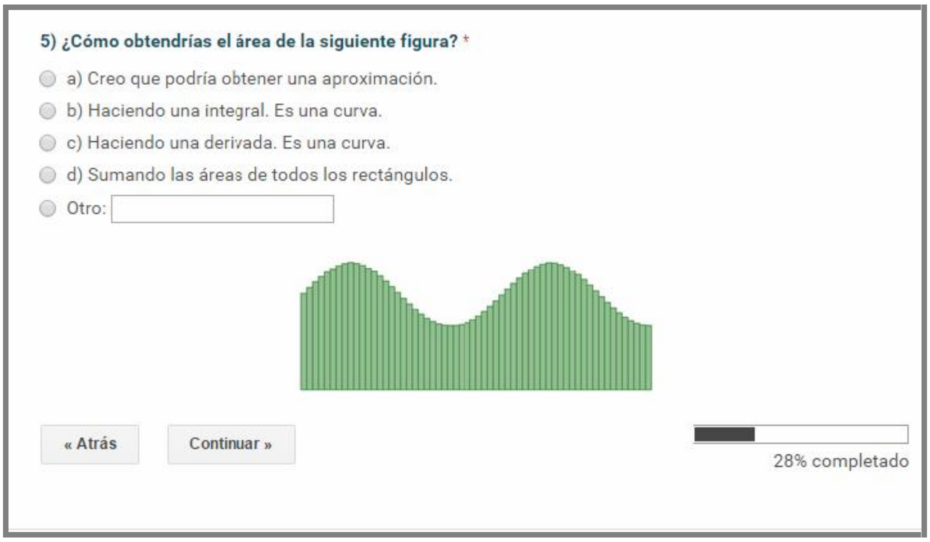


4) ¿Cómo obtendrías el área de la figura siguiente? *

- a) Con la información que tengo no la puedo obtener.
- b) Separaría en cuadrados y rectángulos y sumaría todos los números.
- c) Separaría en cuadrados y rectángulos. Luego sumaría las áreas de todos ellos.
- d) Haría base por altura.
- Otro:

« Atrás Continuar »

23% completado

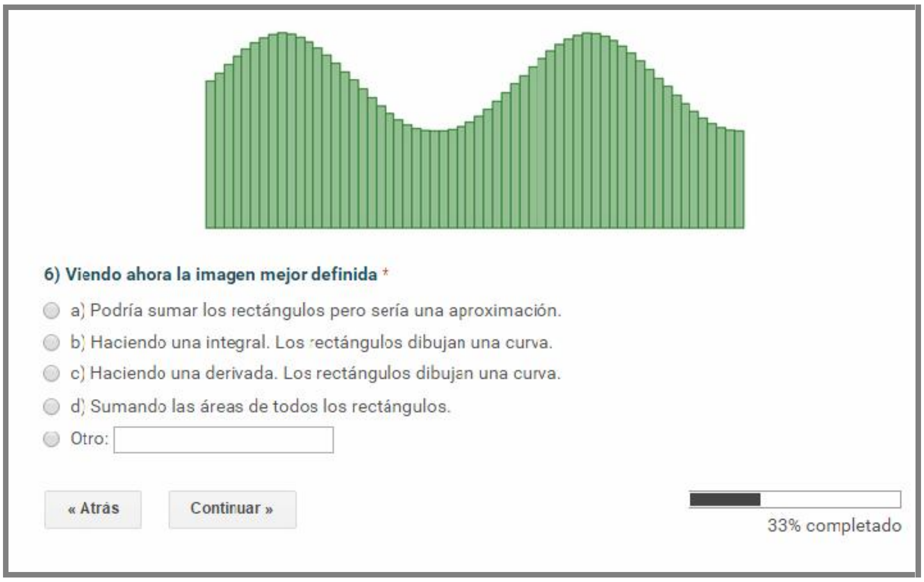


5) ¿Cómo obtendrías el área de la siguiente figura? *

- a) Creo que podría obtener una aproximación.
- b) Haciendo una integral. Es una curva.
- c) Haciendo una derivada. Es una curva.
- d) Sumando las áreas de todos los rectángulos.
- Otro:

« Atrás Continuar »

28% completado

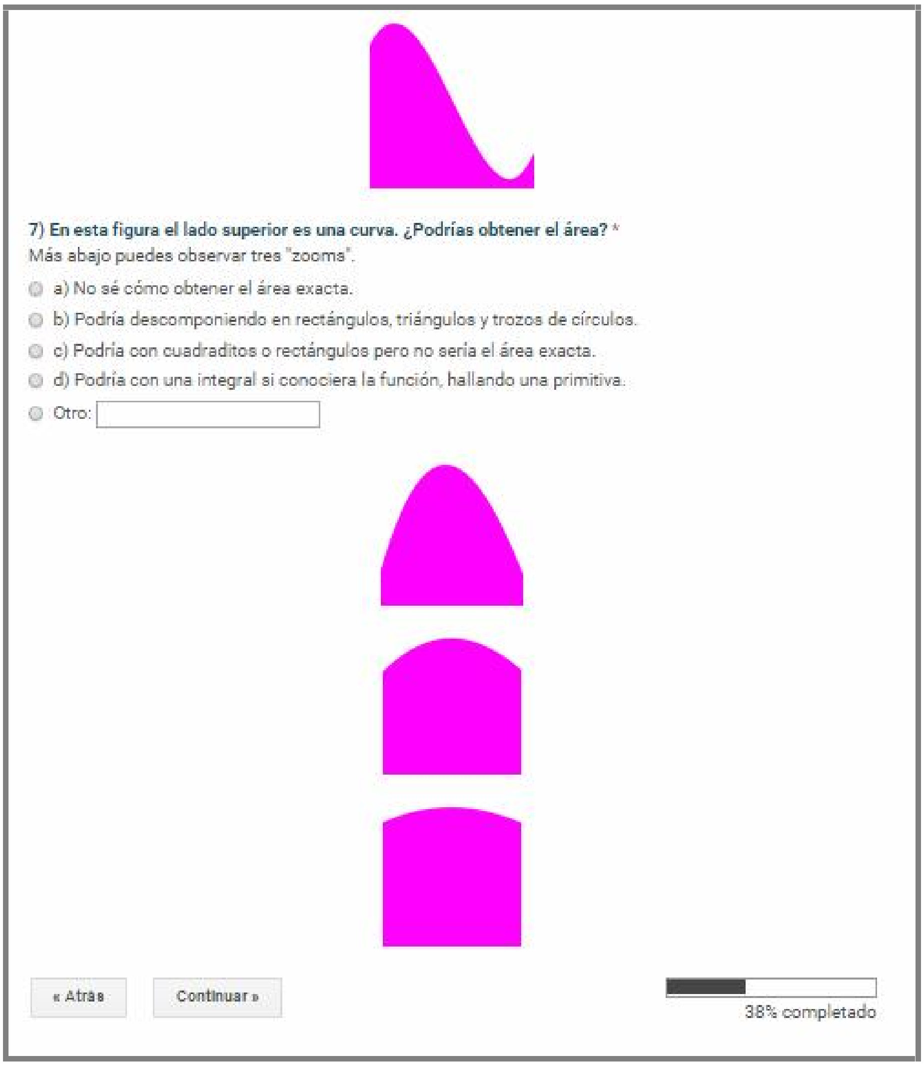


6) Viendo ahora la imagen mejor definida *

- a) Podría sumar los rectángulos pero sería una aproximación.
- b) Haciendo una integral. Los rectángulos dibujan una curva.
- c) Haciendo una derivada. Los rectángulos dibujen una curva.
- d) Sumando las áreas de todos los rectángulos.
- Otro:

« Atrás Continuar »

33% completado



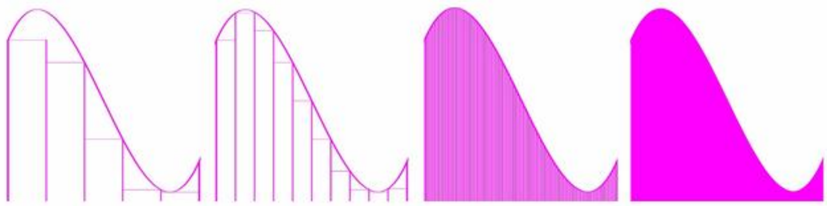
7) En esta figura el lado superior es una curva. ¿Podrías obtener el área? *

Más abajo puedes observar tres "zooms".

- a) No sé cómo obtener el área exacta.
- b) Podría descomponiendo en rectángulos, triángulos y trozos de círculos.
- c) Podría con cuadraditos o rectángulos pero no sería el área exacta.
- d) Podría con una integral si conociera la función, hallando una primitiva.
- Otro:

« Atrás Continuar »

38% completado

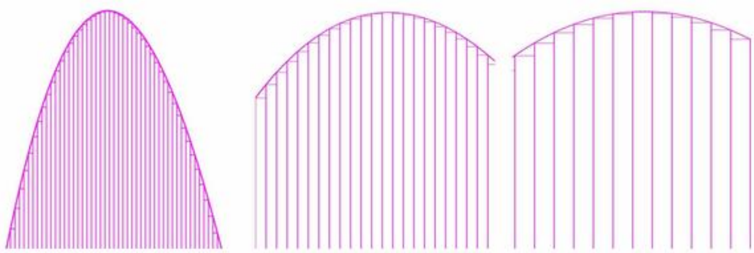


8) Ahora observa estas imágenes. ¿Qué se está haciendo? *

- a) Se va dibujando la curva con los rectángulos.
- b) Se rellena con muchos rectángulos.
- c) Se va aproximando el área con rectángulos.
- d) Se van poniendo rectángulos hasta que son todo rayas.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

42% completado

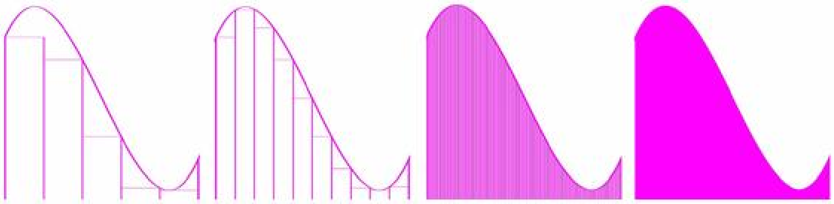


9) Observa estos "zooms" de la última imagen. ¿Qué te dicen? *

- a) Antes creía que la última imagen estaba toda pintada, pero ahora veo que no. Tiene rectángulos pequeños.
- b) Lo mismo que antes, pero ahora se puede ver claramente que hay muchos rectángulos.
- c) No puede ser la misma imagen, porque ahora hay rectángulos y antes no.
- d) No me dice nada.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

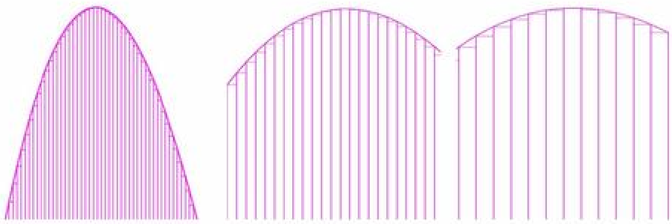
47% completado



10) En la última imagen de la primera secuencia hay 200 rectángulos. ¿Cuántos tendremos que poner para conseguir rellenar completamente la figura? *

En la parte inferior están los "zooms" de la última imagen.

- a) Creo que con unos pocos más. Tal vez con 500.
- b) Creo que con muchos. Por ejemplo, con 1000000 ya estará.
- c) Habrá que poner muchas rayas, no rectángulos.
- d) Nunca se acabará de rellenar, por muchos que se pongan.
- Otro:



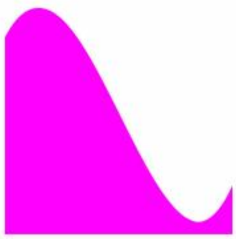
« Atrás | Continuar »

52% completado

11) ¿Cambia ahora tu respuesta respecto de la pregunta 7? *

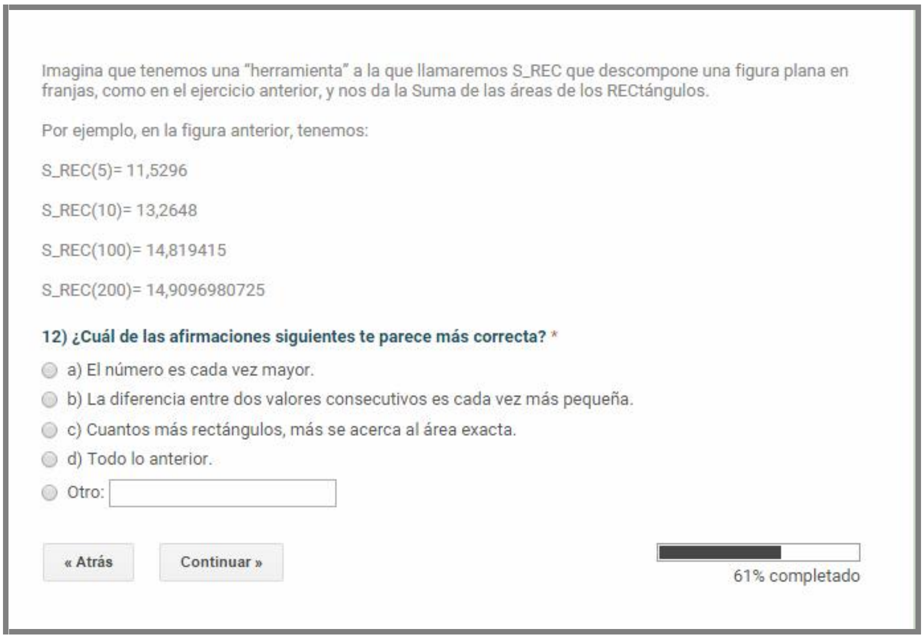
7) En esta figura el lado superior es una curva. ¿Podrías obtener el área?

- a) Sigo igual, no sé cómo obtener el área exacta.
- b) Como antes, podría descomponiendo en rectángulos, triángulos y trozos de círculos.
- c) Podría aproximar el área con muchos rectángulos.
- d) Podría con una integral si conociera la función, hallando una primitiva.
- Otro:



« Atrás | Continuar »

57% completado



Imagina que tenemos una "herramienta" a la que llamaremos S_REC que descompone una figura plana en franjas, como en el ejercicio anterior, y nos da la Suma de las áreas de los RECtángulos.

Por ejemplo, en la figura anterior, tenemos:

S_REC(5)= 11,5296

S_REC(10)= 13,2648

S_REC(100)= 14,819415

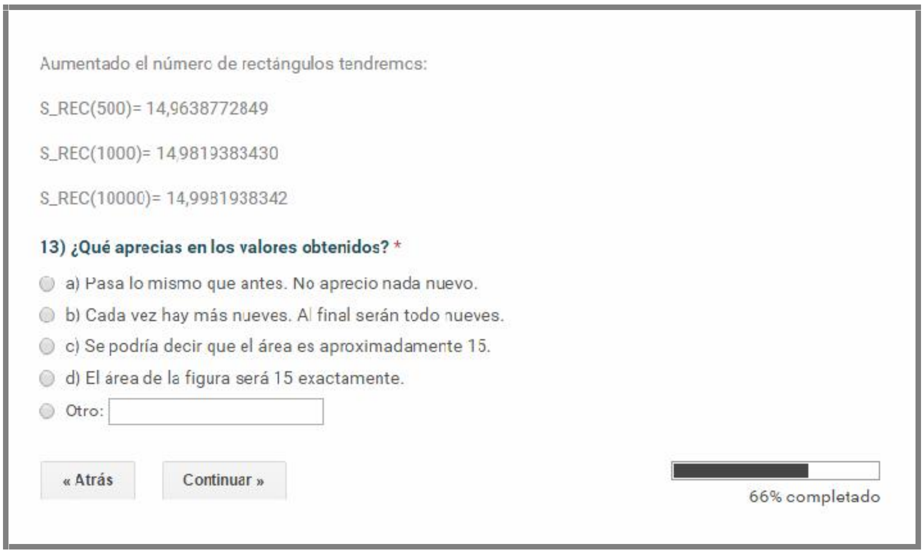
S_REC(200)= 14,9096980725

12) ¿Cuál de las afirmaciones siguientes te parece más correcta? *

- a) El número es cada vez mayor.
- b) La diferencia entre dos valores consecutivos es cada vez más pequeña.
- c) Cuantos más rectángulos, más se acerca al área exacta.
- d) Todo lo anterior.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

61% completado



Aumentado el número de rectángulos tendremos:

S_REC(500)= 14,9638772849

S_REC(1000)= 14,9819383430

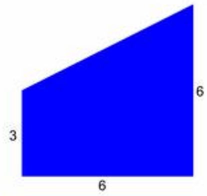
S_REC(10000)= 14,9981938342

13) ¿Qué aprecias en los valores obtenidos? *

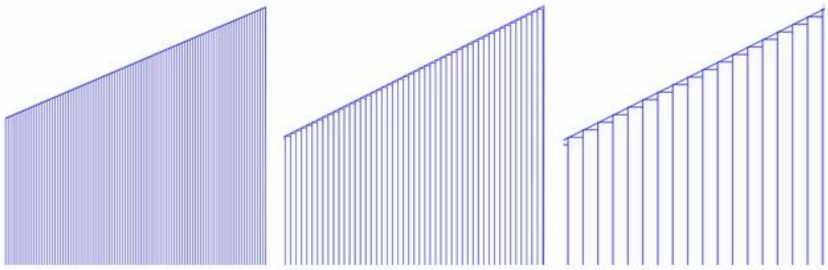
- a) Pasa lo mismo que antes. No aprecio nada nuevo.
- b) Cada vez hay más nueves. Al final serán todo nueves.
- c) Se podría decir que el área es aproximadamente 15.
- d) El área de la figura será 15 exactamente.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

66% completado



Si aplicamos S_REC(100) sobre el trapecio anterior y hacemos zoom varias veces se obtiene lo siguiente.

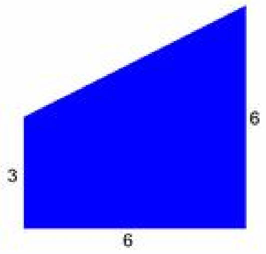


14) ¿Qué afirmación te parece más correcta? *

- a) Por muchos rectángulos que se ponga siempre tendremos una situación parecida.
- b) Al principio pensaba que estaba todo pintado pero luego se ven huecos.
- c) Como los huecos son pequeños se puede rellenar todo poniendo más rectángulos.
- d) No puede ser "zooms" porque al principio los rectángulos están muy pegados a la recta y luego no.
- Otro:

« Atrás   Continuar »

71% completado



El área de este trapecio es 27.

Se puede obtener como (3 + 6) / 2 * 6 = 27.

Vamos a aplicarle S_REC a la figura.

S_REC(1)= 18

S_REC(3)= 24

S_REC(5)= 25.2

S_REC(10)= 26.1

S_REC(20)= 26.55

S_REC(50)= 26.82

S_REC(100)= 26.91

S_REC(1000)= 26.991

S_REC(10000)= 26.9991

15) ¿Qué observas? *

- a) El número es cada vez mayor, pero no es 27.
- b) Cuantos más rectángulos, más se acerca a 27.
- c) Habrá que poner más rectángulos para que dé 27.
- d) Como el área es 27, los valores son cada vez más próximos a 27.
- Otro:

« Atrás Continuar »

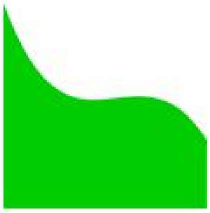
76% completado

16) ¿Cómo conseguirás obtener con S_REC el valor del área del trapecio? *

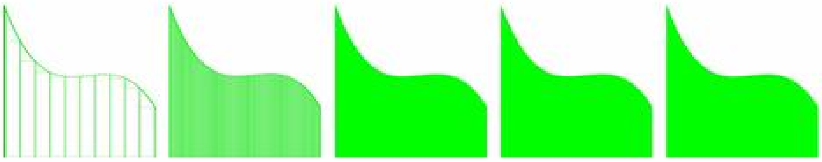
- a) Va a ser imposible porque siempre quedarán triangulitos por cubrir. S_REC no nos puede dar el área.
- b) Pondría algunos más e iría probando por si se pasa.
- c) Habría que poner unos cuantos más. Puede que con 100000 ya se consiga.
- d) Conseguiría el área usando infinitos rectángulos.
- Otro:

« Atrás Continuar »

80% completado



Para esta figura, observa qué hace S_REC gráficamente.



Y ahora observa qué nos da S_REC numéricamente.

S_REC(10)=14.8374

S _REC(100)=15.65578898

S_REC(200)=15.70283444

S_REC(500)=15.73112014

S_REC(1000)=15.74055781

17) ¿Cuál es su área? *

- a) No lo sé. Cada vez es más grande.
- b) El área será 15'75, que es el valor al que se acerca la sucesión.
- c) El área será 16 porque cada vez es más grande.
- d) El área parece que estará por encima de 15'7, pero necesito más valores para saber cuál es.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

85% completado

18) ¿Cómo obtendrías en general el área de cualquier trapecio mixtilíneo, como el que aparece en la ilustración? *

Un trapecio mixtilíneo es el que tiene un lado curvo.

- a) Descompondría la figura en diferente número de rectángulos hasta observar a qué tiende la suma de sus áreas.
- b) En general solo podré aproximarlo con otras figuras.
- c) Descompondría con muchos rectángulos y luego sumaría todas las áreas.
- d) Solo puedo calcular su área si el lado superior es de un círculo.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

90% completado

19) ¿Cómo obtendrías en general el área de cualquier figura plana? *

- a) Solo puedo calcular las áreas de las figuras que tienen fórmula o se pueden descomponer en otras figuras de lados rectos.
- b) Si la figura tiene lados rectos puedo descomponerla y calcular su área sumando los trozos. Si tiene lados curvos tengo que coger también trozos de círculos.
- c) De las que tengo fórmula o puedo descomponerla en figuras conocidas, haría la descomposición y sumaría las diferentes áreas. Si no, aproximaría el área mediante rectángulos.
- d) Si no se puede descomponer de manera exacta, descompondría la figura en diferente número de rectángulos hasta observar a qué tiende la suma de sus áreas.
- Otro:

« Atrás | Continuar »

95% completado

Ya casi has terminado.

Agradecemos tu esfuerzo y sinceridad a la hora de responder, pues es la única manera de que el estudio en el que estás participando sea realista.

Ahora solo quedan unas pocas preguntas sobre tu nivel de estudios y poco más.

20) ¿Recuerdas cuándo te explicaron en Matemáticas algo referente al concepto de área? *

- 0) En Primaria y de nuevo en Secundaria.
- 1) Además de en Primaria y Secundaria, en este curso, en relación con la integral definida.
- 2) Además de en Primaria y Secundaria, en el curso anterior, en relación con la integral definida.
- 3) Además de en Primaria y Secundaria, en algún curso anterior (no en el último), en relación con la integral definida.
- 4) No recuerdo que me lo hayan explicado en Matemáticas.
- 5) En cursos anteriores o en el actual, pero sin relacionarlo con la integral definida.
- Otro:

21) Respecto al concepto de integral y su relación con el concepto de área... *

- 0) ... no recuerdo haberlo estudiado.
- 1) ... he dado integrales, pero no lo he relacionado con el área.
- 2) ... he dado las integrales, pero la relación con el área, un poco de pasada.
- 3) ... he dado las dos cosas, pero no recuerdo (o no sabría) cómo hallar el área de una región limitada por una curva y el eje OX conociendo una primitiva de la función.

22) ¿Conoces o has utilizado algún programa de cálculo simbólico como Derive, Mathematica u otro similar? *

- 0) Ni los conozco ni los he usado.
- 1) Sé que existen pero no los he utilizado.
- 2) Solo he visto alguno de ellos muy ocasionalmente.
- 3) He utilizado alguno de ellos para hacer prácticas más bien ocasionales.
- 4) He utilizado (o utilizo) alguno de ellos frecuentemente.
- Otro:

23) ¿Consideras que, como resultado de esta prueba, ha cambiado en algo tu idea sobre el concepto de área y cómo obtenerla? *

- 0) No, no ha cambiado en nada (o prácticamente en nada).
- 1) No, pero me ha hecho recordar cosas más bien olvidadas.
- 2) Sí, aunque aún no tengo claro cómo obtener el área.
- 3) Sí, porque me he dado cuenta de que lo que pensaba antes no era del todo correcto, pues no sirve para todas las situaciones.
- 4) Sí, y ahora creo que lo tengo claro.
- Otro:

24) Escoge la definición que ahora, al acabar la prueba, te parece más correcta para el área de una figura plana. *

- 0) Es el valor que se obtiene al aplicar una fórmula sobre la figura. Para cada figura hay una fórmula.
- 1) Es el valor que se obtiene al aplicar una fórmula sobre la figura. Para algunas figuras no hay una fórmula y no se puede calcular.
- 2) Es el valor que se obtiene al aplicar diversas fórmulas a los diferentes trozos en los que se puede descomponer la figura.
- 3) Es el valor al que se acerca S_REC cuando el número de rectángulos se acerca a infinito.

25) Indica en qué curso estabas en 2014-2015 (curso anterior). *

- 0) 1° Bachiller
- 1) 2° Bachiller
- 2) 1° Universidad
- 3) 2° o 3° Universidad
- Otro:

26) Centro de estudios del curso anterior. *

« Atrás Enviar

100%: has terminado.

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

APÉNDICE 3
TRASCRIPCIÓN DE ENTREVISTAS

Entrevista número 1

P. Comenzamos la entrevista. ¿Cuál es el área de esta figura?

R. Pues 3 al cuadrado que sería 9. Siendo 3 cm este lado el área será el cuadrado del lado.

P. ¿Y de esta otra?

R. Un lado por el otro. 3 por 6, 18 cm^2.

P. ¿Y ahora de éstas?

R. Pues de uno un lado por el otro, 3 por 9, 27 cm^2 y en el otro, otro un lado por el otro lado, 3 por 5, 15 cm^2.

P. Y ahora mira esta otra figura, obsérvala. ¿Cuál sería el área?

R. Pues la suma de los tres rectángulos que se ven por los distintos colores, del más largo, el mediano y el más corto.

P. Y si la figura te la diera así ¿cómo obtendrías el área?

R. Pues iría dividiendo la figura en figuras que conociera cómo se calcula el área, porque al ser un poco más irregular pues iría mirando, la iría dividiendo en un rectángulo, otro rectángulo, según las medidas que tengo, para calcular las áreas de cada uno y después sumarlos todos.

P. Y ahora esta figura.

R. ¡Uf!, ésta ya. Hombre, parece que son como rectángulos más estrechitos. Entonces, si tuviera las distancias, las medidas de cada lado.

P. Mira a ver si esto te ayuda.

R. Vale sí. Aquí se ve más claro.

P. ¿Qué te parecía antes? La primera imagen que has visto, ¿al verla qué has pensado?

R. Que era más como una ola, como una curva, y al verla más grande es más…, se ven los rectángulos más definidos.

P. ¿Y entonces?

R. Aquí sí que podría calcular el área, si tuviera las medidas, sumando las de todos los rectángulos.

P. Pues seguimos. Y si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva, ¿podrías obtener el área?

R. ¡Puf!, hombre, puede que sí que se pudiera porque me da la sensación de que es, como si fuera simétrica. Si le diera la vuelta a la curva de arriba, si se pegara abajo, … si tuviéramos la distancia total de los lados, … si tuviéramos el área del rectángulo que forma me da esa impresión porque solamente con la curva

P. Te da la impresión de que encaja. ¿No?

R. Sí.

P. Vamos a ver ahora otras imágenes sobre esa misma figura. Son unos *zooms* hechos sobre la figura, ¿aprecias algo en la imagen?

R. Pues lo veo más o menos líneas curvas, entonces el área es más complicada de hallar. Hombre, si tuviera bastantes, bastantes datos a lo mejor sí que se podría llegar a sacar pero…

P. ¿Qué datos?

R. Pues la curva… claro es que se necesitaría tantos que yo no sé si conseguiría llegar a sacar el área.

P. Vale ahora fíjate. Esta imagen ¿la relacionas con la anterior? Fíjate, ¿ves algo?

R. Ah, vale, vale, son como… sería como la que hemos visto antes la que estaba ampliada que tenía muchos rectángulos pero al estar tan poco definidos los rectángulos que formarían la figura no se ve no se apreciaban pero sí que es verdad qué sabiendo que todos son rectángulos sí que se podría llegar a sacar. Al ver que no es una curva exacta sino que…

P. Es una curva, yo te he dicho antes que el lado superior es una curva. Eso no deja de ser una curva.

R. Pero ¿no se podría apreciar, pensar que la curva está formada por los lados de arriba de los rectángulos pero que no llegamos a distinguir los lados pero lo vemos como una curva?

P. Mira estos *zooms* de esta imagen, de esta última, son ampliaciones.

R. Claro hay espacios que están vacíos entonces no sé si exactamente se podría llegar o se podría dar una aproximación.

P. Entonces, visto esto ¿tienes ahora alguna sugerencia respecto a la pregunta 7 "y si tuvieras esta otra figura como se te ocurriría hacer el área"?

R. Pues si está formada por muchos rectángulos que por las ampliaciones da la sensación de que sí sabiendo las medidas de todos los rectángulos, sumándolos todos sí que se podría llegar a calcular el área

P. Pero te repito que el lado superior es una curva, no está escalonado

R. Pues entonces, por lo que hemos dicho de los espacios, entonces lo más probable es que esos pequeños espacios se quedarán como aproximaciones, es decir, que el área exacta a través de los rectángulos no se conseguiría sacar pero a través de la suma de todos llegaríamos a una aproximación bastante cercana.

P. Seguimos, imagina que tenemos una herramienta a la que llamaremos S_REC que descompone una figura plana como la que hemos visto antes en franjas como las del ejercicio anterior y nos da la suma de las áreas de los rectángulos de los que tú estás hablando. En el caso anterior tendríamos que si hacemos 5 rectángulos en esta figura esa suma vale 11,5296; si en vez de 5 pusiéramos 10 rectángulo éste sería el valor de esa figura, si pusiéramos 100 daría 14,81 y pico y si tuviéramos 200 14,909…Esos serían los valores que nos daría S_REC, esta herramienta, para la suma de las áreas de los rectángulos

R. En función de cuántos rectángulos se divide…

P. Exacto 5, 10, 100 o 200. ¿Observas algo en estos valores?

R. Sí que el valor que nos está dando cada vez es mayor porque los espacios que estamos dejando sin contar respecto a la curva sería más pequeños entonces al resultado se está aproximando cada vez más a la realidad

P. Y ahora seguimos la misma función pero con 500, 1000, 10000…

R. Siguen aumentando cada vez de forma más lenta pero sigue aumentando de forma más lenta pero sigue aumentando porque el espacio que quedaría hasta la curva el rectángulo al ser cada vez el lado más pequeño el espacio que queda es más pequeño pero tanto se deja de contar menos área real el resultado, más aproximado no sé si ha quedado claro osea quiero decir que cuanto más pequeña sean dos valores del rectángulo menos margen de error tenemos mayores son resultados porque menos espacio dejamos sin operar y más aproximado a la realidad sería el resultado que obtenemos

P. Te vuelvo a plantear la pregunta, ¿podrías dar el área de esta figura?

R. Exactamente me parece que no pero de una forma aproximada con la herramienta S_REC me parece que sí se podría,

P. Y ¿cuál me dirías que es?

R. Pues aproximadamente 14,998 y si tuviera un valor más aproximado a la realidad, ese valor.

P. Un trapecio, ¿cuál es el área?

R. Pues sé que está la fórmula del trapecio pero como en este momento no me acuerdo sería calculando el área a través de la fórmula pero en estos momentos la fórmula no recuerdo.

P. No me importa recordártela: semisuma de las bases por la altura.

R. Pues 3+6 son 9, 6 por 9, 54 entre 2 da 27 lo que sea cuadrados.

P. Muy bien, pues fíjate hemos hecho en esta figura lo mismo que antes aplicarle S_REC con un rectángulo, con 3, con 5, con 10, con 20, ¿qué pasa con los valores (…)?

R. Al igual que antes siguen aumentando cada vez más lentamente y claro al ser una diagonal también podría haber un margen de error porque habría pequeños espacios que no se contarían. Cuánto más pequeña es la unidad de medida menor es el espacio que queda sin contar, irá aumentando cada vez aproximándose más a la realidad de los 27 que habíamos dicho.

P. Observa, (en realidad es lo que tú estabas diciendo) el *zoom* sobre ese trapecio.

R. Vale, claro, hay un pequeño espacio que no se cuenta. Ese espacio, cuanto menor sea el rectángulo, intuyo, menor será el espacio que queda sin contar.

P. Pero tú antes me has dicho que el área de esta figura era ¿cuánto?

R. 27

P. Es esa. Y ¿cómo lo podrías obtener con S_REC?

R. Pues llegando a contar la figura con infinitos rectángulos.

P. Y ¿entonces qué dirías?

R. Pues que, a lo mejor, S_REC siempre nos va a dar un pequeño error, por muy pequeño que sea, nunca conseguirá llegar al valor exacto.

P. ¿Por qué no podrá llegar?

R. Porque siempre habrá un margen de error, ese pequeño espacio que siempre queda entre cada uno…

P. Porque tú, ¿cuántos quieres poner ahí? Donde pone 10000 ¿tú cuántos quieres poner?

R. Infinitos.

P. Otra figura.

R. Vale.

P. ¿Cómo obtendrías el área de esta figura? Observa lo que hace S_REC. Para 10, para100, 200, 500 y 1000 y el dibujo de (...)

R. Cada vez los rectángulos que usa son más pequeños reduciendo el espacio sin contar. El error ya que al no ser una línea recta no podríamos conseguir calcular.

P. Y ¿qué valor le darías tú para el área? Porque si yo te digo, dame el área de esta figura, así como allí me has dicho 27 ¿aquí que me dirías?

R. Aproximadamente al valor que sé que más se acerca a la realidad que sería el de 1000 rectángulos. 15,740 etc.

P. Y ahora ¿me podrías decir cómo expresarías el modo de obtener el área de cualquier figura que te presente?

R. Subdividiéndola en figuras de las que sí que conozca el área exacta para intentar aproximarme lo máximo a la realidad. Es decir, lo que hace S_REC. Intentaría hacer lo que hace S_REC. La figura, al no tener una fórmula exacta por dificultades de la representación gráfica que no hay una línea recta, sino que hay un pequeño error, intentar reducir ese error al máximo para que se aproxime al máximo a la realidad subdividiéndola en figuras que yo conozca. Reduciendo el error.

P. Vamos a retroceder un momento para ver si me dices una clave que estoy buscando de ti. ¿Eso cuánto valía, el área de este trapecio?

R. 27

P. Y ahora observa estos valores, qué les va pasando.

R. Que se van aproximando al número que habíamos dicho. Al número que para nosotros sería real pero que a lo mejor no lo es.

P. No, el número es real.

R. Las dificultades las tenemos en la representación. No podemos representar la realidad. Solamente una pequeña aproximación.

P. No la puedes representar con un número finito de rectángulos pero tú la representación la puedes hacer porque esto es un rectángulo...

R. Sí claro, la representación sí pero, quiero decir, el valor exacto de forma visual no se llegaría a conseguir.

P. Muchas gracias.

El resto de entrevistas no se han trascrito, solo fragmentos ilustrativos de algunas de ellas.

Entrevista número 2

P. Comenzamos la entrevista. Observa esta imagen y dime el área, si la conoces.

R. El área es 9 cm.

P. ¿Y de esta otra?

R. Sería 18, 6*3 (…)

P. ¿Y ahora de estas otras?

R. 15 y 27

P. Y ¿de esta figura?

R. La misma para las tres, porque son 3 rectángulos. (…) Sería base por altura de uno por 3. Porque hay tres figuras

P. Y ¿de esta otra?

R. Primero dividiría las figuras para que se me quedasen dos cuadrados y dos rectángulos (…)

P. Y ahora esta figura.

R. ¿El área de esta figura? Yo lo que veo son como rectangulitos muy pequeños, muy finitos y yo lo que haría sería hacer el área de cada uno.

P. Mira a ver si esto te ayuda. ¿Te ayuda un poco?

R Pues sí. Yo haría el área de un rectángulo y luego multiplicaría por todos los que hay.

P. ¿Me estás diciendo que multiplicas el área de un rectángulo por todos los rectángulos que hay?

R. Sí.

P. ¿De qué rectángulo, de ese, de ese,…?

R. Ah vale, ¿se supone que miden diferente?

P. Míralos, ¿tú cómo los ves?

R. Sí, claro. (…)

P. En qué los ves diferentes

R. En altura.

P. ¿Entonces?

R. Se multiplicaría cada uno. Por ejemplo, aquí que son los tres iguales, con que se haga una vez.

P. ¿Y aquí que son los tres diferentes?

R. Pues aquí sería un área de cada figura, (…) porque son diferentes en altura.

P. Y ¿si yo te pido el área de toda la figura?

R. Los sumo.

P. Entonces ¿aquí?

R. Pues, a ver. Sería en esta, también sumaría. (…) Vería cuáles son iguales y después sumaría el área de todos.

P. Ahora observa esta figura en la que el lado superior es una curva, ¿podrías obtener el área?

R. No, yo creo que no se puede obtener al área porque no es una figura definida ni conozco la fórmula.

P. Haciendo *zoom* sobre esa imagen obtenemos estas otras en las que el lado superior sigue siendo un trozo de esta curva.

R. ¿Y de esas se puede obtener el área?

P. Te pregunto.

R. Yo creo que si tuviésemos medidas, yo haría una recta para que tuviera un rectángulo, porque así… no se me ocurre.

P. Observa ahora estas imágenes, esta es la curva que tienes aquí encima. Esta es la misma figura. ¿Qué le estamos haciendo?

R. Dividirla por rectángulos. Aquí más grande y aquí más chiquitín.

P. Observa ahora la última imagen. ¿Cómo la ves?

R. Igual que esta.

P. Mira, estos son *zoom* de la última imagen.

R. Vale. O sea, cómo hallar el área.

(…)

P. ¿Ahora me podrías dar alguna idea sobre cómo trabajar con ella?

R. Sí. Lo que haría, viendo las otras imágenes, lo dividiría en rectángulos que permitiese la figura, en rectángulos grandes y después, a partir de esos rectángulos, si me diesen medidas, tomar las medidas y hallar el área. Porque si se hiciesen más pequeños, (…) tenemos que hacer el área y después sumarlas para el resultado total, de todos los rectángulos.

P. ¿Y qué pasa entonces?

R. Para mí es mucho más difícil hacerla así que en rectángulos grandes.

P. Entonces, trabajarías como en esta imagen de la pregunta 8 que son más grandes, en vez de, por ejemplo, con esta otra.

R. Sí.

P. ¿Y respecto a lo que vayas a obtener de una manera o de otra? (…) ¿Respecto al valor del área de la figura? (…)

R. Saldrá diferente el área

P. ¿Y cuál preferirías tú?

R. A ver, es que en esta figura también, ahora que me estoy fijando, es como que estos trozos no se han dividido mientras que en esta figura sí que se ha dividido toda la figura. Hasta el final de la curva. ¿Aquí está toda la figura? Ah, no, tampoco. También está escalonada.

P. ¿Entre utilizar estos 5 rectángulos o estos que hay aquí, que no sabemos ni cuántos son?

R. Yo me quedaría con el de los 5 (…) porque me da menos trabajo.

(...)

P. Entonces, 27 ¿qué sería?

R. Sería el área del trapecio.

P. Pues volvemos a coger a S_REC y lo aplicamos sobre el trapecio, con un rectángulo, con 3, con 5, con 10, con 20, 50, 100, 1000 y 10000. Y mira qué valores nos da S_REC en los diferentes casos, a ver si me cuentas algo.

R. Vale. Pues entre S_REC(1) y S_REC(3) se diferencia por unidades (…) y a partir de 20, 50, 100, 1000 y 10000 sí que son las mismas unidades pero se diferencian solo por la parte decimal.

P. Mira gráficamente, qué pasa con la representación de lo que hace S_REC.

(…)

P. ¿Hemos conseguido con S_REC el 27?

R. No, pero casi.

P. ¿Cómo conseguirías con S_REC el valor del área del trapecio?

R. Dividiéndolo en más. (…) Yo lo seguiría dividiendo para que diese 27.

P. ¿Y cuándo crees que te va a dar 27?

R. Yo creo que a las 100000.

P. Cambiamos de figura. Observa la figura que tienes ahí y los que hace S_REC (…) ¿Me puedes decir algo respecto a lo que ves que hace S_REC y los valores que nos va dando? Porque te pregunto ¿cómo obtendrías el área de esta figura?

R. Vale, pues, lo que va haciendo S_REC es como que va dividiendo en más rectángulos, entonces, lo que yo haría es que si para 100, 200, 500 y 1000 está dando la misma unidad 15’66, 15’70, 15’73 y 15’74 lo que haría sería ir dividiendo en más rectángulos hasta que me diese una unidad entera, por ejemplo, 16.

P. ¿Esperas que llegue a 16?

R. Yo espero que sí, dividiéndolo en más rectángulos yo creo que dará una unidad entera que será el área de esa figura.

(…)

Entrevista número 3

(...)

P. Nueva figura. (pregunta 7) Si tuvieras esta otra figura en la que el lado superior es una curva ¿podrías obtener el área?

R. Supongo.

P. ¿Y qué harías entonces?

R. ¿La figura está formada por rectángulos?

P. Vamos a acercarnos. Mira, si me acerco, ¿se ven rectángulos?

R. No. Es que tampoco son círculos.

P. No, es una curva.

R. ¿Entonces no? (…)

P. Ahora observa estas imágenes. Es la figura de la pregunta 7… ¿Qué estamos haciendo?

R. Realmente son rectángulos que van disminuyendo de altura.

P. ¿Qué diferencia aprecias de la primera a la segunda imagen?

R. Hay más rectángulos porque son más pequeños, más estrechos. De la primera a la segunda, que se han dividido en 2. Y aquí en muchas partes diferentes… Se han dividido en muchas más partes y en el dibujo no se aprecia.

(…)

Entrevista número 6

(...)

P. (Pregunta 14) ¿Y cómo conseguirías con la función S_REC esa área, 27?

R. Haciendo la media. Bueno, cogiendo el valor…, cuando lo descompones en rectángulos coges el valor de cuantos más rectángulos has cogido que es 26,9 y está más cerca de 27.

P. Y si tú pudieras ponerle a S_REC un valor que no fuera 10000 ¿qué valor le pondrías?

R. Uno mayor

P. ¿Por ejemplo?

R. 11.000

P. ¿Y con eso qué conseguirías?

R. Aproximarme más a 27

P. ¿Y cómo conseguirías el 27?

R. Dividiendo cada vez en más rectángulos, más pequeños…

P. ¿Y cómo conseguirías que te dijera S_REC “es 27”?

R. No creo que me diera 27 exacto (…) Me daría cada vez más decimales pero no me daría 27.

(…)

Entrevista número 9

(...)

P. (Pregunta 8) Observa ahora estas imágenes. Descríbeme qué aprecias aquí. De arriba a abajo. Aprecias algo?

Sí, que cada vez va utilizando más rectángulos para aproximarse más al área real de esta parte.

P. ¿Tú qué ves ahí bajo?

R. Pues infinitos rectángulos, podría decirse.

(…)

P. ¿Se te ocurre alguna forma de obtener el área de esta figura?

R. Pues sacando infinitos rectángulos, pero infinitos no puedo sacar, pues una cantidad lo suficientemente grande para saber esta área y que te vayas en muy pocos cm^2.

(…)

P. ¿Observas algo?

R. Pues como que converge a 15.

(…)

Entrevista número 10

(...)

P. (Pregunta 8) Observa estas imágenes…

R. Aquí lo que intentamos es, lo que te he dicho antes (…) Lo ha dividido en cinco rectángulos pero nos queda aquí, que de aquí el área,… esto que no lo podemos saber, porque aquí tenemos esta curva… Esta de aquí será mejor porque ya lo que se nos escapa es menor. Luego esta será mejor y ésta ya.

P. Esta tiene estos *zoom*.

R. Pero se nos sigue escapando por aquí. Con esto te confirmo que obtendría una aproximación.

(…)

Entrevista número 15

(...)

P. (pregunta 14) (…) Vamos a utilizar S_REC con el trapecio… La cuestión es que tú sabes cuánto vale esa área. ¿Y con S_REC te sientes capaz de obtener el valor del área?

R. Sí, 27.

P. ¿Cómo lo conseguirías?

R. Porque veo que con un número muy elevado… que de 1 a 3 sube un montón y aquí de 1000 a 10000 sube nada, aquí menos… yo creo que si le incluyes más a 20000 o 30000 va a seguir siendo 26,99999

P. ¿Llegarías a 27 con S_REC en algún momento?

R. No porque siempre quedaría algún hueco, a no ser que hicieses infinitos rectángulos, si a S_REC le pones infinitos… a lo mejor te pone 27.

(…)

P. (…) Tu problema es si la sustitución del infinito te vale. ¿Y si no te valiese? ¿Tienes alguna idea de cómo conseguir ese valor al que te acercas?

R. Con un límite.

(…)

APÉNDICE 4

RESULTADOS DEL TEST Y NIVELES

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
8	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
9	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
10	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
11	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
13	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
14	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
15	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
16	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
17	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
18	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
19	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
20	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
21	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
22	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
23	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
24	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
25	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
26	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
27	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
28	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
29	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
30	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
31	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
32	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
33	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
35	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19
36	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
37	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
39	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
40	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
41	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
42	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
43	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
44	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
45	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
46	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
47	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
48	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
49	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
50	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
51	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
52	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
53	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
54	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
55	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
56	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
57	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
58	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
59	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
60	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
61	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
62	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
63	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
64	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
65	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
66	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
67	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
68	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
69	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
70	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
71	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
72	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
73	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
74	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
75	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
76	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
77	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
78	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
79	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
80	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
81	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
82	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19
83	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
84	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
85	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
86	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
88	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
89	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
90	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
91	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
92	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
94	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
95	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
96	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
97	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
98	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
100	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
101	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
102	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
103	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
104	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
105	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
106	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
107	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
108	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
109	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
110	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
111	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1
112	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
113	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
114	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
115	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
116	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
117	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
118	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
119	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
120	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
121	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
122	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
123	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
124	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
125	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
126	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
127	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
128	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
129	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19
130	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
131	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
132	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
133	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
134	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
135	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
136	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
137	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
138	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
139	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
140	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
141	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
142	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
143	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
144	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
145	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
146	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
147	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
148	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
149	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
150	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
151	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
152	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
153	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
154	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
155	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
156	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
157	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0

	P20	P21	P22	P23	P24	P25	g1	g2	g3	NIVEL
1	0	3	2	1	2	1	4	2	1	1
2	0	0	4	4	2	1	6	6	3	3
3	0	0	1	0	3	1	4	4	1	1
4	0	0	0	3	3	1	5	3	4	3
5	5	0	4	2	2	1	6	2	1	1
6	0	0	1	3	3	1	6	5	5	3
7	0	0	0	3	3	1	4	6	3	3
8	0	0	0	2	3	1	4	6	2	2
9	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
10	5	0	3	0	0	1	6	3	0	1
11	4	0	0	1	2	1	2	1	1	1
12	5	2	2	0	2	1	6	5	1	2
13	5	0	0	4	3	1	5	5	2	2
14	0	0	0	2	1	1	3	1	2	1
15	5	0	0	4	3	1	5	5	2	2
16	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
17	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
18	5	0	0	4	3	1	4	5	2	2
19	5	0	0	4	3	1	4	5	2	2
20	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
21	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
22	5	0	0	4	3	1	5	5	2	2
23	5	0	0	4	3	1	4	5	2	2
24	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
25	5	0	0	4	3	1	6	5	2	2
26	0	0	1	0	1	1	3	1	3	1
27	5	2	0	0	1	1	6	7	1	2
28	0	0	0	4	0	1	4	5	3	3
29	0	0	0	0	2	1	4	4	2	1
30	0	0	0	2	2	1	4	2	1	1
31	5	1	3	0	3	1	5	5	3	3
32	0	1	0	2	2	1	3	4	1	1
33	5	1	2	4	2	2	3	6	0	2
34	1	3	1	3	3	2	6	7	1	2
35	1	3	1	3	3	2	3	6	3	3
36	5	2	2	2	3	2	5	5	2	2
37	1	4	2	1	3	2	5	4	5	3
38	0	0	1	1	2	2	6	6	3	3
39	3	3	3	1	2	2	3	2	1	1
40	1	4	2	1	3	2	6	3	2	1
41	1	2	1	1	1	2	6	5	1	2
42	2	4	3	0	3	2	5	5	2	2
43	0	2	1	4	2	2	6	5	4	3
44	1	4	1	0	3	2	3	5	2	2
45	2	3	1	3	2	2	5	5	1	2
46	0	4	2	1	3	2	3	6	4	3
47	1	3	3	2	3	3	6	5	2	2
48	3	4	1	4	0	3	5	5	2	2

	P20	P21	P22	P23	P24	P25	g1	g2	g3	NIVEL
49	1	3	4	0	3	3	4	5	3	3
50	2	4	4	4	2	3	5	3	1	1
51	2	3	4	1	2	3	4	4	1	1
52	2	4	1	0	3	3	5	3	2	1
53	5	4	2	2	2	3	4	4	3	3
54	3	4	4	1	3	3	4	6	3	3
55	2	0	4	0	2	3	6	6	3	3
56	2	3	3	0	2	3	5	5	4	3
57	2	4	1	2	2	3	5	3	4	3
58	2	4	1	3	1	3	4	5	2	2
59	1	4	4	1	3	3	3	5	2	2
60	3	2	4	2	3	3	3	4	0	1
61	0	4	4	0	3	3	5	4	3	3
62	3	4	4	1	3	3	4	5	0	2
63	1	2	4	1	3	3	4	7	3	3
64	1	2	4	0	2	3	4	6	1	2
65	0	0	0	3	2	3	4	6	1	2
66	1	1	4	2	2	3	4	5	1	2
67	1	4	3	2	2	3	4	2	1	1
68	3	4	3	0	2	3	5	6	2	2
69	1	0	1	2	3	3	4	5	0	2
70	1	4	4	1	2	3	5	5	2	2
71	5	4	3	1	3	3	4	2	1	1
72	5	2	3	1	3	3	3	4	4	3
73	1	4	4	0	3	3	4	5	1	2
74	2	3	4	3	2	3	5	7	4	3
75	1	3	4	3	1	3	5	5	1	2
76	4	2	1	0	3	3	4	7	2	2
77	3	4	4	1	3	3	3	4	3	3
78	1	4	4	1	3	3	4	6	5	3
79	2	4	4	4	2	3	4	3	2	1
80	0	3	4	1	2	3	4	7	2	2
81	0	4	0	0	2	3	4	5	1	2
82	2	4	4	2	2	3	4	7	3	3
83	2	4	4	3	3	3	4	4	2	1
84	1	3	4	1	3	3	6	5	3	3
85	1	4	3	0	2	3	4	7	4	3
86	1	3	3	0	2	3	6	8	1	2
87	5	1	0	3	2	3	6	7	3	3
88	3	4	1	4	3	3	4	6	4	3
89	5	4	4	2	3	3	6	3	2	1
90	1	3	3	2	2	3	4	3	2	1
91	1	2	4	2	3	3	4	5	2	2
92	2	4	4	0	3	3	4	4	2	1
93	1	4	3	0	3	3	6	6	2	2
94	0	0	0	0	1	3	2	2	1	1
95	0	0	1	1	2	3	4	3	3	1
96	0	0	1	0	0	3	3	3	0	1

	P20	P21	P22	P23	P24	P25		g1	g2	g3		NIVEL
97	2	4	3	3	3	3		4	5	2		2
98	1	3	0	2	1	3		4	2	0		1
99	2	3	0	2	3	3		4	5	2		2
100	3	2	0	2	2	3		5	5	1		2
101	2	2	2	1	1	3		3	0	0		1
102	2	2	2	1	1	3		3	0	0		1
103	0	3	0	0	0	3		6	3	1		1
104	2	4	3	1	3	3		4	7	3		3
105	0	0	0	2	3	3		4	6	3		3
106	2	4	3	0	3	3		4	4	5		3
107	3	4	0	0	1	3		4	5	2		2
108	3	4	2	0	3	3		6	5	4		3
109	0	0	3	2	2	3		4	7	2		2
110	5	4	4	2	3	3		6	6	4		3
111	1	3	2	2	2	3		5	7	2		2
112	1	4	3	0	3	4		6	5	4		3
113	2	3	3	4	3	4		6	3	2		1
114	1	4	3	0	3	4		5	6	2		2
115	2	4	3	3	3	4		3	4	4		3
116	1	4	2	3	3	4		5	3	1		1
117	1	4	2	3	3	4		5	3	1		1
118	1	4	3	1	0	4		5	6	1		2
119	3	4	3	0	3	4		4	4	4		3
120	1	4	3	1	2	4		5	5	3		3
121	2	2	3	3	3	4		5	5	2		2
122	1	3	3	0	2	4		5	5	3		3
123	3	4	3	0	3	4		6	4	1		2
124	0	3	3	1	2	4		4	3	2		1
125	2	4	4	1	2	4		4	5	2		2
126	2	4	4	0	2	4		4	6	3		3
127	1	4	4	1	3	4		4	3	2		1
128	0	0	3	0	2	4		3	2	0		1
129	3	4	2	1	3	4		6	8	2		2
130	0	4	3	1	2	4		6	7	3		3
131	3	4	0	0	2	4		4	6	3		3
132	0	1	0	4	3	4		6	6	3		3
133	2	0	4	2	2	4		5	2	2		1
134	3	3	0	1	2	4		6	5	2		2
135	2	1	0	0	3	4		6	7	4		3
136	2	2	2	2	1	4		5	2	3		1
137	5	1	0	1	2	4		4	6	1		2
138	1	2	1	2	1	4		4	4	0		1
139	1	4	4	4	3	4		4	4	5		3
140	3	4	4	0	3	4		4	6	3		3
141	5	2	4	1	3	4		5	2	4		1
142	2	4	2	0	2	4		6	6	1		2
143	3	4	3	1	2	4		5	5	2		2
144	3	2	3	1	3	4		5	3	4		3

	P20	P21	P22	P23	P24	P25		g1	g2	g3		NIVEL
145	2	4	3	0	3	4		4	6	3		3
146	5	2	0	4	3	4		4	3	5		3
147	5	2	2	3	2	4		4	6	4		3
148	3	4	4	0	2	4		4	6	1		2
149	1	4	4	0	2	4		4	6	3		3
150	2	3	3	3	2	4		3	4	3		3
151	0	4	1	0	3	4		5	5	2		2
152	1	4	3	0	2	4		6	8	2		2
153	3	4	4	0	3	4		6	8	5		3
154	0	4	3	0	2	4		4	3	1		1
155	3	4	3	0	3	4		6	5	5		3
156	3	4	4	1	3	4		6	8	5		3
157	0	4	2	0	2	4		5	4	2		2

APÉNDICE 5
TRABAJO ESTADÍSTICO

El estudio estadístico se ha realizado en el lenguaje de programación R. Para ello se han desarrollado diversos *script* con el fin de facilitar su uso.

mediainercia.R

```
data<-read.csv("datos_2.csv",sep=";")
Hartigan <- 0
Lloyd <- 0
Forgy <- 0
MacQueen <- 0
for (i in 1:50) {
    grupos <- kmeans(data, 3, iter.max = 100, algorithm = "Hartigan-
Wong")
    Hartigan <- Hartigan + grupos$betweenss
    grupos <- kmeans(data, 3, iter.max = 100, algorithm = "Lloyd")
    Lloyd <- Lloyd + grupos$betweenss
    grupos <- kmeans(data, 3, iter.max = 100, algorithm = "Forgy")
    Forgy <- Forgy + grupos$betweenss
    grupos  <-  kmeans(data,  3,  iter.max  =  100,  algorithm  =  "Mac-
Queen")
    MacQueen <- MacQueen + grupos$betweenss
}
H=Hartigan/50
Ll=Lloyd/50
F=Forgy/50
M=MacQueen/50

print(H)
print(Ll)
print(F)
print(M)
```

dendograma.R

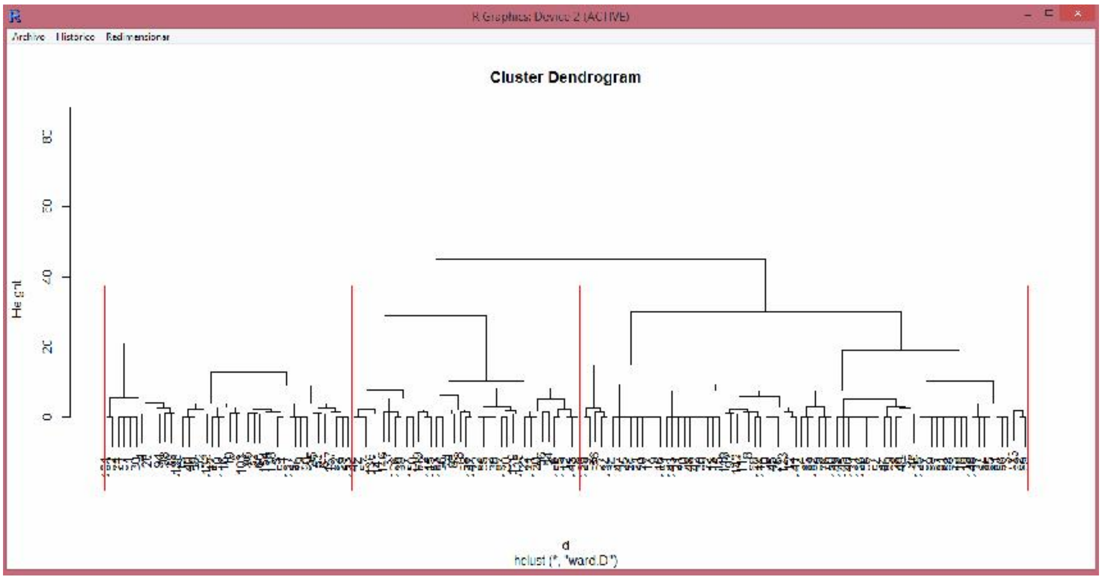
```
datos<-read.csv("datos_2.csv",sep=";")
d <- dist(datos, method = "euclidean")
fit <- hclust(d, method="ward")
plot(fit)
groups <- cutree(fit, k=3)
rect.hclust(fit, k=3, border="red")
```

kmedias.R

```
kmedias<-function(){
    if(!file.exists("datos_2.csv")){
        return("Guarda el archivo de datos con el nombre 'da-
tos_2.csv' en el directorio de trabajo")}
    data<-read.csv("datos_2.csv",sep=";")
    n.col<-dim(data)[2];
    cat("¿Número de centros?\n");
    centros<-scan(n=1);
    cat("¿Quieres fijar la matriz de centros?\n");
    opcion<-menu(c("SI","NO"));

    if(opcion==1){
        cat("introduce el primer vector\n");
        c<-scan(n=n.col);
        matriz<-rbind(c);
        for(i in 2:centros){
            cat("Introduce el siguiente vector\n");
            c<-scan(n=n.col);
            matriz<-rbind(matriz,c);
        }
        pp<-kmeans(data,centers=matriz, iter.max = 100);
    }else{pp<-kmeans(data,centers=centros);}
   return(pp);
}
```

Para elegir la versión del algoritmo de *kmeans* (entre los cuatro que nos permite R) que vamos a aplicar **mediainercia.R**.

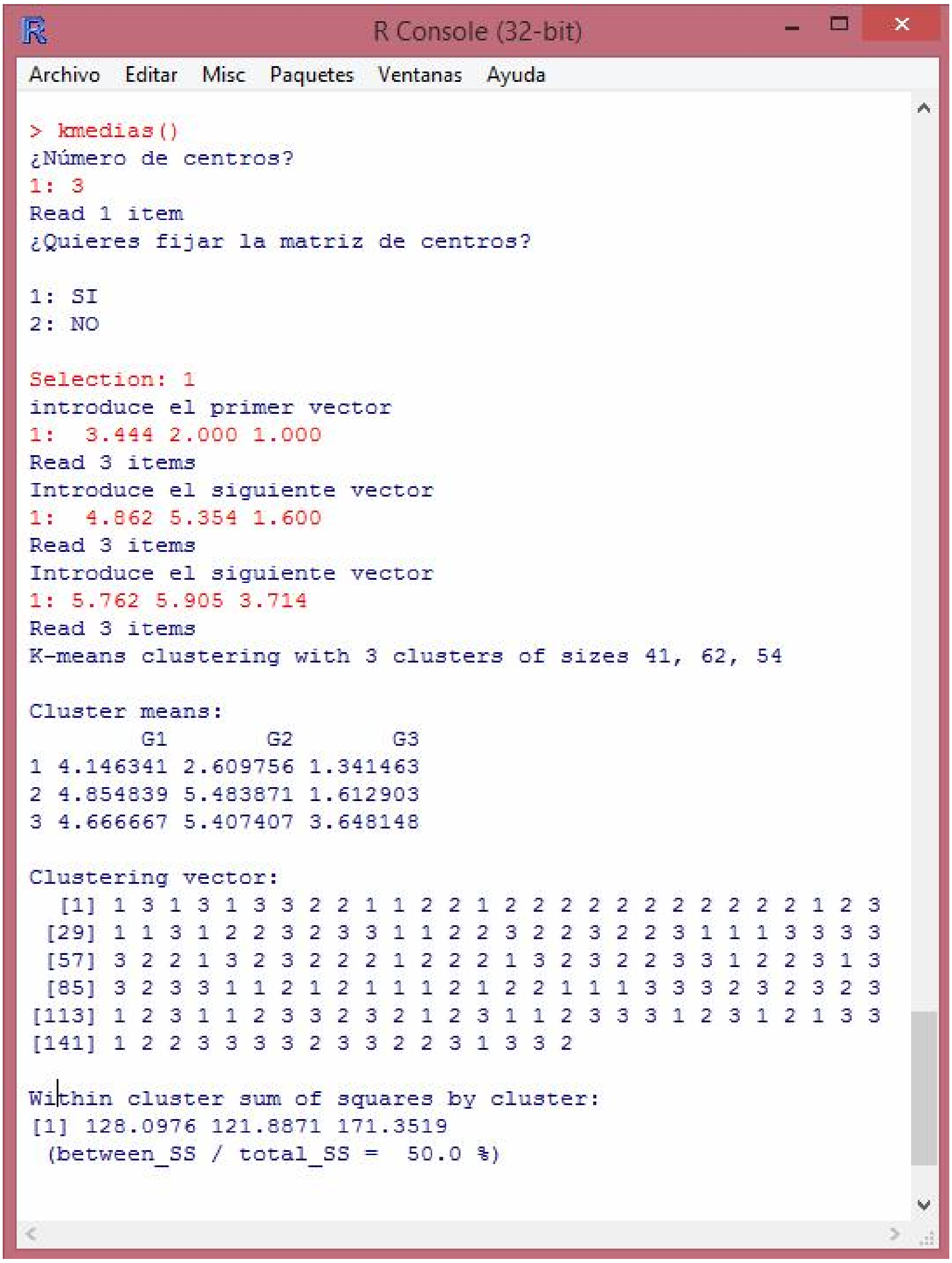
Haciendo uso de **`dendograma.R`** se obtiene:



A continuación aplicamos **`kmedias.R`** usando la función `kmedias()`. Primero introducimos los centros del **criterio A**.

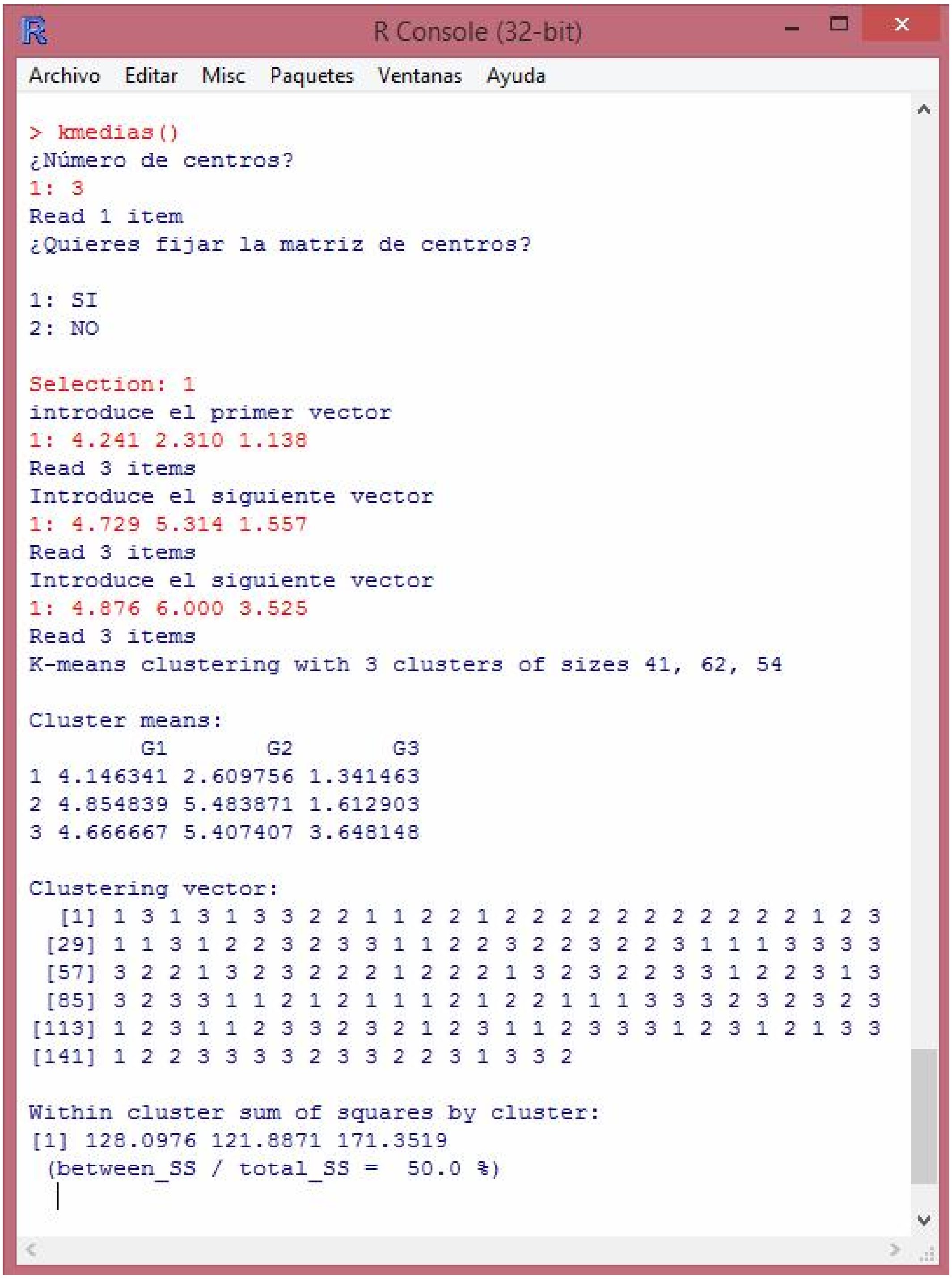
```
R Console (32-bit)
Archivo  Editar  Misc  Paquetes  Ventanas  Ayuda

> kmedias()
¿Número de centros?
1: 3
Read 1 item
¿Quieres fijar la matriz de centros?

1: SI
2: NO

Selection: 1
introduce el primer vector
1: 3.444 2.000 1.000
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 4.862 5.354 1.600
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 5.762 5.905 3.714
Read 3 items
```

Obteniendo la siguiente respuesta.



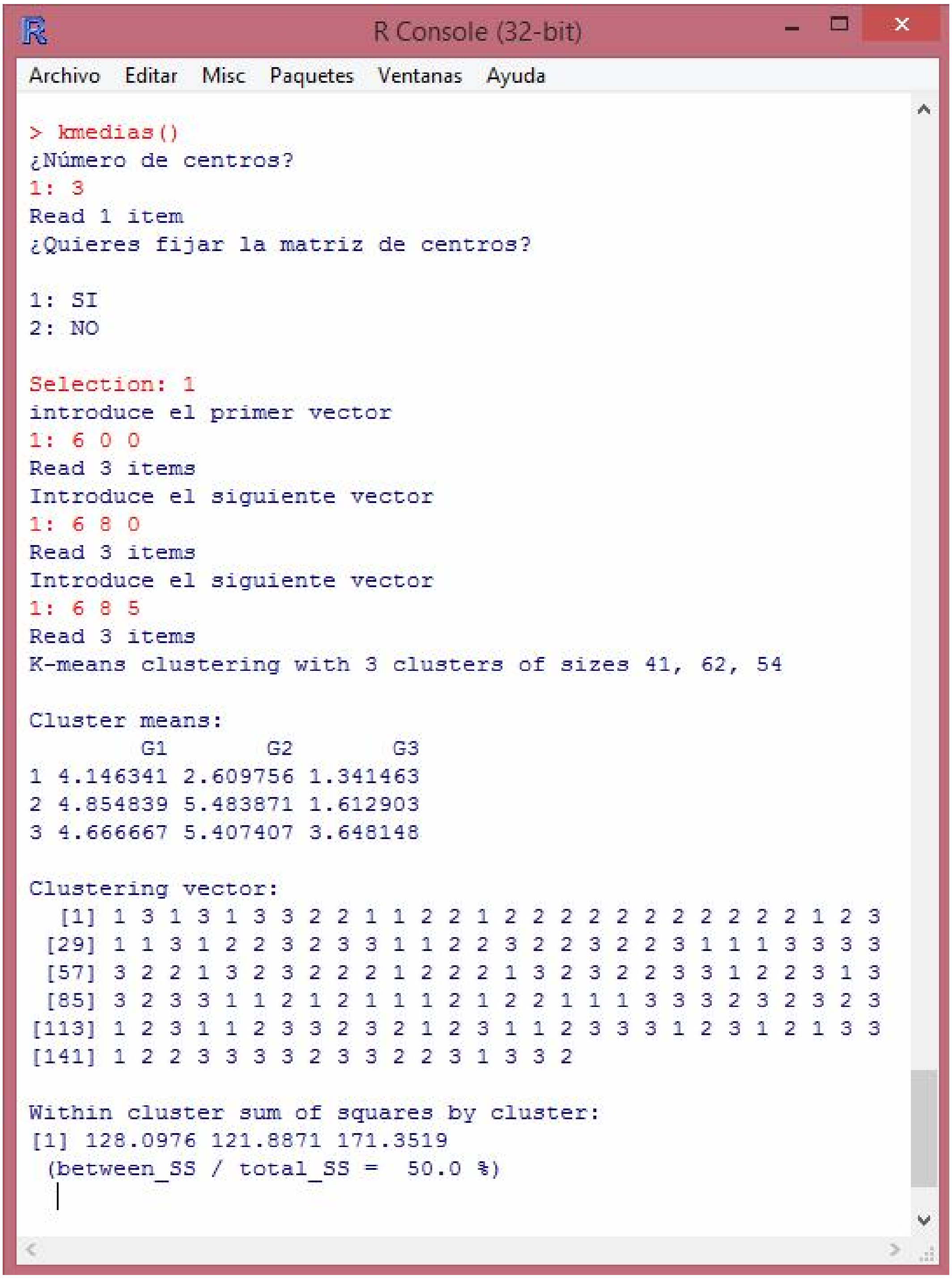
```
R Console (32-bit)
Archivo  Editar  Misc  Paquetes  Ventanas  Ayuda

> kmedias()
¿Número de centros?
1: 3
Read 1 item
¿Quieres fijar la matriz de centros?

1: SI
2: NO

Selection: 1
introduce el primer vector
1:  3.444 2.000 1.000
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1:  4.862 5.354 1.600
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 5.762 5.905 3.714
Read 3 items
K-means clustering with 3 clusters of sizes 41, 62, 54

Cluster means:
        G1       G2       G3
1 4.146341 2.609756 1.341463
2 4.854839 5.483871 1.612903
3 4.666667 5.407407 3.648148

Clustering vector:
  [1] 1 3 1 3 1 3 3 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 3
 [29] 1 1 3 1 2 2 3 2 3 3 1 1 2 2 3 2 2 3 2 2 3 1 1 1 3 3 3 3
 [57] 3 2 2 1 3 2 3 2 2 2 1 2 2 2 1 3 2 3 2 2 3 3 1 2 2 3 1 3
 [85] 3 2 3 3 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1 1 1 3 3 3 2 3 2 3 2 3
[113] 1 2 3 1 1 2 3 3 2 3 2 1 2 3 1 1 2 3 3 3 1 2 3 1 2 1 3 3
[141] 1 2 2 3 3 3 3 2 3 3 2 2 3 1 3 3 2

Within cluster sum of squares by cluster:
[1] 128.0976 121.8871 171.3519
 (between_SS / total_SS =  50.0 %)
```

Después con el **criterio B**.



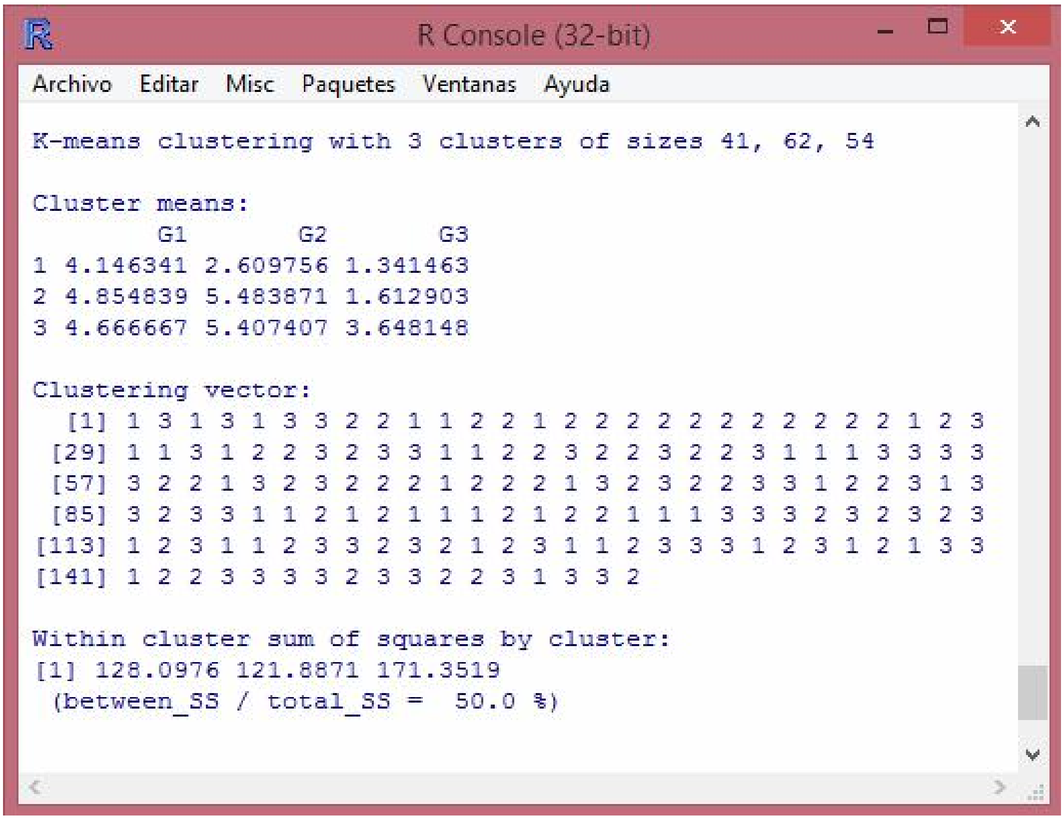
```
R Console (32-bit)
Archivo  Editar  Misc  Paquetes  Ventanas  Ayuda

> kmedias()
¿Número de centros?
1: 3
Read 1 item
¿Quieres fijar la matriz de centros?

1: SI
2: NO

Selection: 1
introduce el primer vector
1: 4.241 2.310 1.138
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 4.729 5.314 1.557
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 4.876 6.000 3.525
Read 3 items
K-means clustering with 3 clusters of sizes 41, 62, 54

Cluster means:
        G1       G2       G3
1 4.146341 2.609756 1.341463
2 4.854839 5.483871 1.612903
3 4.666667 5.407407 3.648148

Clustering vector:
  [1] 1 3 1 3 1 3 3 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 3
 [29] 1 1 3 1 2 2 3 2 3 3 1 1 2 2 3 2 2 3 2 2 3 1 1 1 3 3 3 3
 [57] 3 2 2 1 3 2 3 2 2 2 1 2 2 2 1 3 2 3 2 2 3 3 1 2 2 3 1 3
 [85] 3 2 3 3 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1 1 1 3 3 3 2 3 2 3 2 3
[113] 1 2 3 1 1 2 3 3 2 3 2 1 2 3 1 1 2 3 3 3 1 2 3 1 2 1 3 3
[141] 1 2 2 3 3 3 3 2 3 3 2 2 3 1 3 3 2

Within cluster sum of squares by cluster:
[1] 128.0976 121.8871 171.3519
 (between_SS / total_SS =  50.0 %)
```

Y por último con el **criterio C**.




```
> kmedias()
¿Número de centros?
1: 3
Read 1 item
¿Quieres fijar la matriz de centros?

1: SI
2: NO

Selection: 1
introduce el primer vector
1: 6 0 0
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 6 8 0
Read 3 items
Introduce el siguiente vector
1: 6 8 5
Read 3 items
K-means clustering with 3 clusters of sizes 41, 62, 54

Cluster means:
        G1       G2       G3
1 4.146341 2.609756 1.341463
2 4.854839 5.483871 1.612903
3 4.666667 5.407407 3.648148

Clustering vector:
  [1] 1 3 1 3 1 3 3 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 3
 [29] 1 1 3 1 2 2 3 2 3 3 1 1 2 2 3 2 2 3 2 2 3 1 1 1 3 3 3 3
 [57] 3 2 2 1 3 2 3 2 2 2 1 2 2 2 1 3 2 3 2 2 3 3 1 2 2 3 1 3
 [85] 3 2 3 3 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1 1 1 3 3 3 2 3 2 3 2 3
[113] 1 2 3 1 1 2 3 3 2 3 2 1 2 3 1 1 2 3 3 3 1 2 3 1 2 1 3 3
[141] 1 2 2 3 3 3 3 2 3 3 2 2 3 1 3 3 2

Within cluster sum of squares by cluster:
[1] 128.0976 121.8871 171.3519
 (between_SS / total_SS =  50.0 %)
```

Como se puede observar, en los tres casos se obtiene el mismo resultado.



```
K-means clustering with 3 clusters of sizes 41, 62, 54

Cluster means:
        G1       G2       G3
1 4.146341 2.609756 1.341463
2 4.854839 5.483871 1.612903
3 4.666667 5.407407 3.648148

Clustering vector:
  [1] 1 3 1 3 1 3 3 2 2 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 3
 [29] 1 1 3 1 2 2 3 2 3 3 1 1 2 2 3 2 2 3 2 2 3 1 1 1 3 3 3 3
 [57] 3 2 2 1 3 2 3 2 2 2 1 2 2 2 1 3 2 3 2 2 3 3 1 2 2 3 1 3
 [85] 3 2 3 3 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1 1 1 3 3 3 2 3 2 3 2 3
[113] 1 2 3 1 1 2 3 3 2 3 2 1 2 3 1 1 2 3 3 3 1 2 3 1 2 1 3 3
[141] 1 2 2 3 3 3 3 2 3 3 2 2 3 1 3 3 2

Within cluster sum of squares by cluster:
[1] 128.0976 121.8871 171.3519
 (between_SS / total_SS =  50.0 %)
```

APÉNDICE 6
DIVISIÓN EN FRANJAS Y *DERIVE* (visión gráfica y numérica)

En este punto vamos a utilizar *Derive* como herramienta gráfica con el propósito de atender a la componente visual del concepto de área.

Para ello definimos las siguientes funciones:

$$\mathrm{cajai}(u, a, b, x) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \mathrm{HMi}(u, a, b, x) \\ b & \mathrm{HMi}(u, a, b, x) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cajac}(u, a, b, x) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \mathrm{HCE}(u, a, b, x) \\ b & \mathrm{HCE}(u, a, b, x) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cajas}(u, a, b, x) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \mathrm{HMA}(u, a, b, x) \\ b & \mathrm{HMA}(u, a, b, x) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

que construyen los rectángulos de base el segmento $\overline{ab}$ y altura el mínimo entre u(a) y u(b), el valor de la función en el punto medio de a y b y el máximo entre u(a) y u(b), respectivamente.

A partir de estas funciones, definimos las siguientes en las que n indica el número de divisiones que se realizan en el intervalo y para cada una de ellas se construyen las cajas indicadas atendiendo a las tres posibilidades descritas anteriormente:

$$\mathrm{riemanni}(u,\ a,\ b,\ n,\ x) := \left[\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{cajai}\left(u,\ a + \frac{(b-a)\cdot(i-1)}{n},\ a + \frac{i\cdot(b-a)}{n},\ x\right),\ i,\ 1,\ n\right)\right]$$

$$\mathrm{riemannc}(u,\ a,\ b,\ n,\ x) := \left[\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{cajac}\left(u,\ a + \frac{(b-a)\cdot(i-1)}{n},\ a + \frac{i\cdot(b-a)}{n},\ x\right),\ i,\ 1,\ n\right)\right]$$

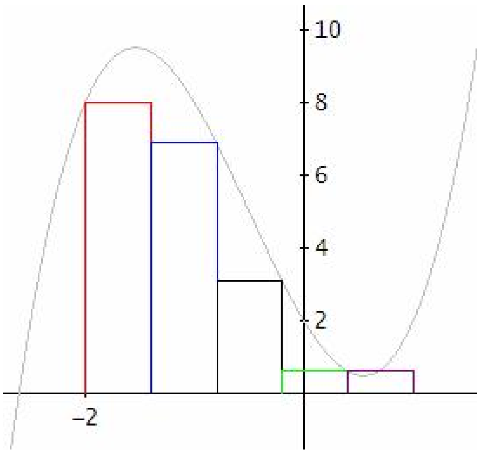
$$\mathrm{riemanns}(u,\ a,\ b,\ n,\ x) := \left[\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{cajas}\left(u,\ a + \frac{(b-a)\cdot(i-1)}{n},\ a + \frac{i\cdot(b-a)}{n},\ x\right),\ i,\ 1,\ n\right)\right]$$

EJEMPLO

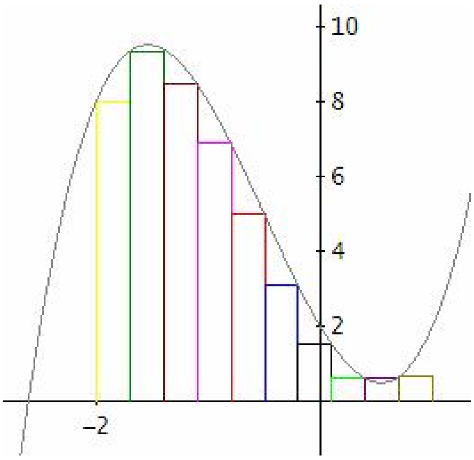
Apliquemos riemanni(u,a,b,n,x) sobre la función $y=2x^3+3x^2-5x+2$ en el intervalo [–2,1].

Antes de representar gráficamente las "cajas" debemos seleccionar en la pantalla gráfica el comando Pantalla del menú Opciones y en la pestaña Puntos seleccionar Conectar: Sí; Tipo de línea: Solid; Tamaño: Pequeño.

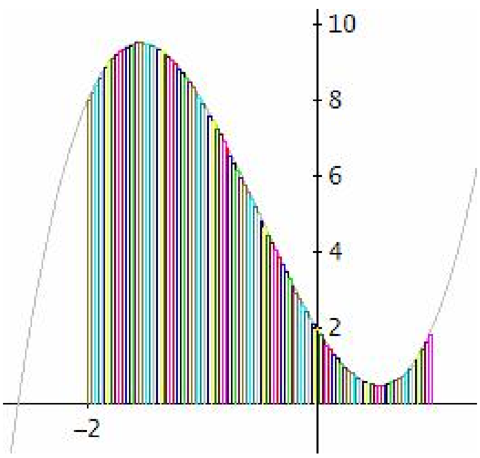
$$\mathrm{riemanni}(2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2,\ -2,\ 1,\ 5,\ x)$$



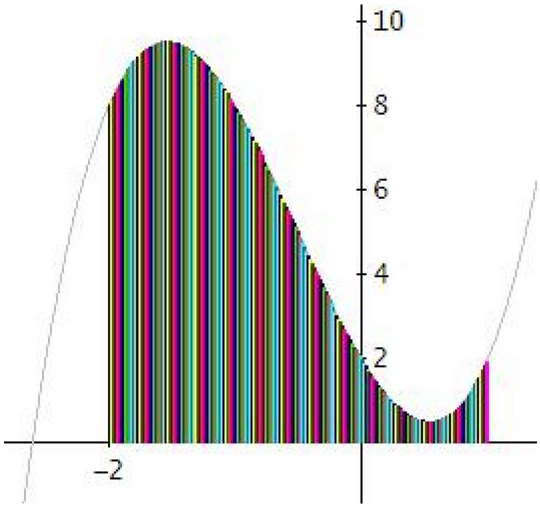
$$\text{riemanni}(2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2, -2, 1, 10, x)$$



$$\text{riemanni}(2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2, -2, 1, 100, x)$$

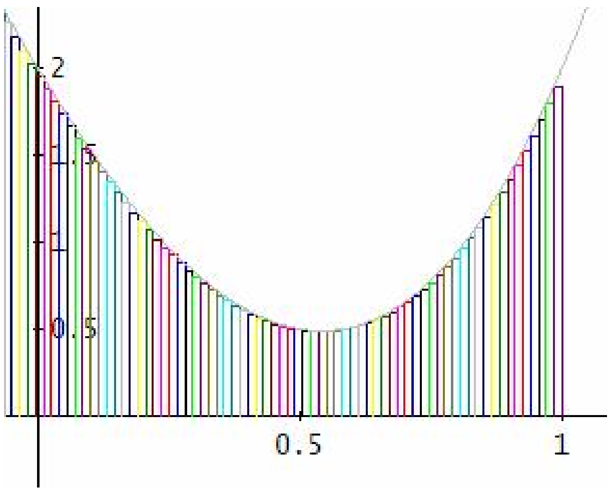


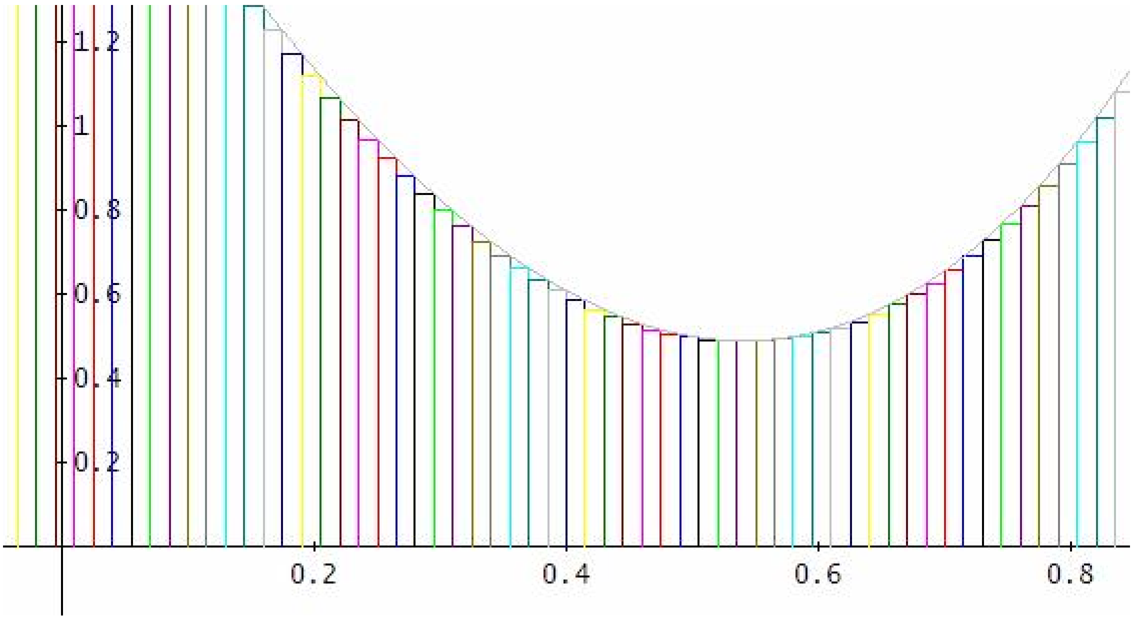
$$\text{riemanni}(2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2, -2, 1, 200, x)$$



El simple hecho de poder representar estos rectángulos que a medida que aumenta su número dentro del intervalo considerado ajustan mejor el área encerrada por la curva y el eje de abscisas, ayuda a asociar el concepto de área y de integral con el de límite.

Cabe destacar que, aunque en la última imagen "parece" que toda el área esté cubierta por las cajas, en realidad no es así. Haciendo *zoom* podremos apreciar de nuevo rectángulos que aproximan al área.





Para obtener el valor numérico de dicha área utilizaríamos la función iriemann que describiremos posteriormente.

De igual modo se puede proceder con las funciones riemannc y riemanns en lo que respecta a la representación obteniendo los valores numéricos correspondientes con criemann y sriemann.

Para simplificar la descripción con *Derive* de las sumas de Riemann, definimos las siguientes funciones:

#1: $y(u, a, x) := \mathrm{ITERATE}(u, x, a, 1)$

#2: $\mathrm{HMI}(u, a, b, x) := \mathrm{MIN}(y(u, a), y(u, b))$

#3: $\mathrm{HCE}(u, a, b, x) := y\left(u, \dfrac{a + b}{2}\right)$

#4: $\mathrm{HMA}(u, a, b, x) := \mathrm{MAX}(y(u, a), y(u, b))$

En la expresión #1 se define la función y(u,a,x) que evalúa la función *u* en el valor de x=a. En las expresiones #2, #3 y #4 se define, respectivamente, el mínimo de la función entre los dos extremos, el valor de la función en el punto medio del intervalo y el máximo de la función entre los dos extremos.

Vamos a considerar particiones en n partes iguales, por lo que la amplitud de los intervalos será $\frac{b-a}{n}$. Del mismo modo se pueden considerar los intervalos de amplitud $\frac{b-a}{2^n}$, lo que provocaría que por cada unidad que aumentemos a n se consiga una partición que refine a la anterior.

Con las definiciones vistas anteriormente y la amplitud de los intervalos considerada resulta sencillo describir con Derive las siguientes sumas de Riemann:

#5: $\text{iriemann}(u, a, b, n, x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \text{HMI}\left(u, a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1), a + \frac{b-a}{n}\cdot i, x\right)$

#6: $\text{criemann}(u, a, b, n, x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \text{HCE}\left(u, a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1), a + \frac{b-a}{n}\cdot i, x\right)$

#7: $\text{sriemann}(u, a, b, n, x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot \text{HMA}\left(u, a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1), a + \frac{b-a}{n}\cdot i, x\right)$

#8: $\text{riemann}(u, a, b, n, x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot y\left(u, a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1)\right)$

Estas funciones obtienen el valor de la suma de Riemann para la función *u* en el intervalo [a,b] mediante una partición en n divisiones iguales. El punto considerado para evaluar la función *u* ha sido: en #5 el extremo del intervalo en el que la función es menor, en #6 el valor central entre los extremos del intervalo y en #7 el extremo del intervalo en el que la función es mayor. En la expresión #8 el punto considerado es el extremo inferior del intervalo.

La elección de una u otra en términos de la convergencia es indiferente, pues por el teorema de Riemann la tenemos garantizada. Los valores dados por iriemann y sriemann no son en general aproximaciones por defecto o exceso, en este sentido habría que valorar la monotonía de la función en cada momento.

APÉNDICE 7
MÉTODOS NUMÉRICOS Y *DERIVE*

Los métodos numéricos que vamos a tratar a continuación proporcionan aproximaciones de la integral definida. Para centrarnos en el concepto de área basta considerar la función *f(x)* positiva en el intervalo tomado.

Cabe destacar que, salvo el método de Simpson en el que los valores de la función evaluados corresponden a valores equidistantes de la variable independiente, los métodos expuestos en este apartado son útiles tanto si se conoce la expresión algebraica de la función *f(x),* y por tanto se puede evaluar para cualquier valor de la variable independiente, como si no se conoce ninguna forma de evaluar la función pero sí se conoce su valor para algunos valores de x conocidos.

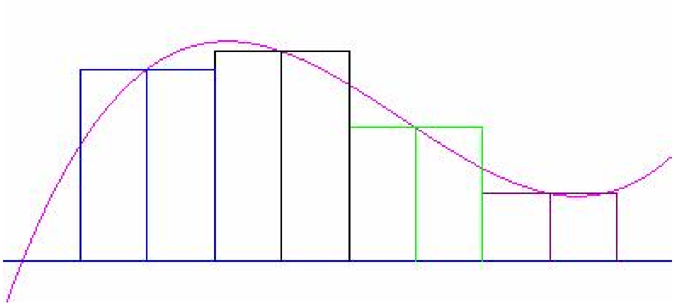
En los siguientes subapartados vamos a considerar una función *f(x)* continua, acotada y positiva en el intervalo real [a,b]. El objetivo va a ser aproximar el área encerrada entre esta función, el eje de abscisas, x=a y x=b. En lo sucesivo llamaremos A al valor de ese área, o lo que es lo mismo $\int_a^b f(x)dx$.

Llamaremos P={x_0, x_1, x_2, …, x_{n-1}, x_n} a una partición del intervalo [a,b] donde x_0=a y x_n=b.

Aunque para simplificar los desarrollos tomemos los intervalos de la partición de igual amplitud, esto no sería necesario para llevar a cabo la idea mostrada en cada método (salvo el de Simpson).

<u>Método de los rectángulos</u>

Este método consiste en considerar una partición con un número impar (2k+1) de elementos para aproximar A mediante 2k rectángulos de amplitud $x_i - x_{i-1}$, con $1 \le i \le 2k$ y de altura $f(x_{i-1})$ si i es par o $f(x_i)$ si i es impar.

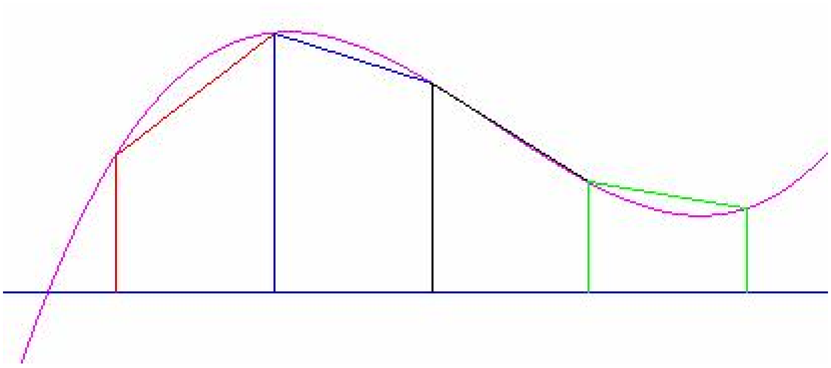


Considerando todos los rectángulos de igual base, $\Delta x = \frac{b-a}{2k}$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2.\ \Delta x.(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2k-1}))$$

<u>Método de los trapecios</u>

Con este método vamos a aproximar A mediante n trapecios de amplitud $x_i - x_{i-1}$, con $1 \le i \le n$ sustituyendo el arco de la función que delimita cada intervalo por el segmento que une $f(x_{i-1})$ con $f(x_i)$.



El área de cada trapecio será $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.(x_i - x_{i-1})$.

Considerando todos intervalos de igual amplitud, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, se tiene que:

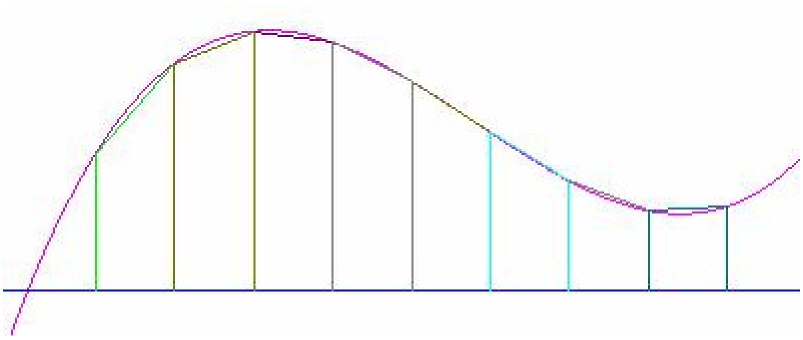
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}.\left[\left(f(x_0)+f(x_n)\right)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right)\right]$$

<u>Método de Simpson</u>

En este método se considera, como en el de los rectángulos, una partición con número impar (2k+1) de elementos, con lo que se delimitan 2k regiones dentro de A. Pero en este caso es necesario que los intervalos resultantes sean de igual amplitud.

Tomaremos los trapecios inscritos, como en el caso anterior, y llamaremos Ti a la suma de las áreas de estos trapecios inscritos

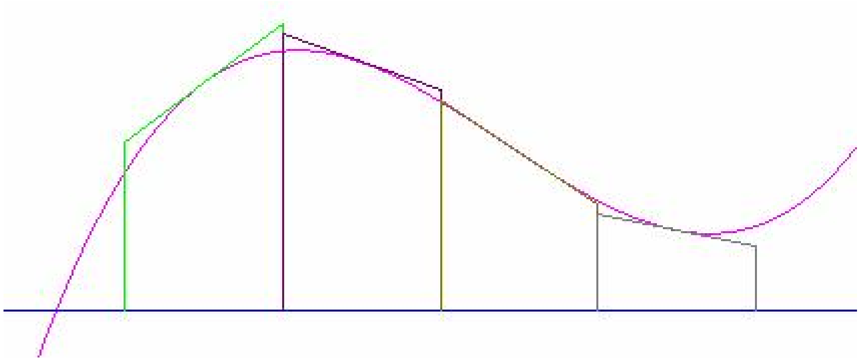
$$Ti=\frac{\Delta x}{2}.\left[\left(f(x_0)+f(x_{2k})\right)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2k-1})\right)\right].$$



También consideraremos k trapecios de doble amplitud que los anteriores correspondientes a los intervalos $[x_{2j}, x_{2j+2}]$, $0 \leq j \leq k-1$, delimitados superiormente por la recta tangente a f(x) en $(x_{2j+1}, f(x_{2j+1}))$.

El área de cada uno de estos trapecios será $(x_{2j+2} - x_{2j}).\ f(x_{2j+1}) = 2\Delta x.\ f(x_{2j+1})$, por lo que el área total de estos trapecios circunscritos, Tc, será

$Tc=2\Delta x.(\ f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2j+1})).$



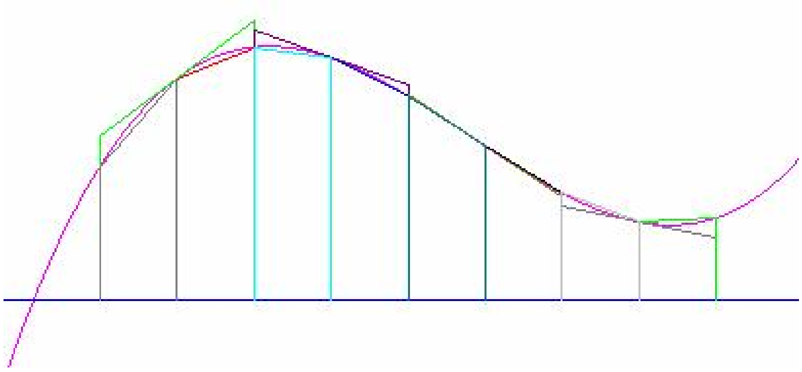
El método de Simpson aproxima A como Ti + $\frac{1}{3}$(Tc–Ti) o lo que es lo mismo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}.(2P + 4I + E)$$

siendo P = $f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2k-2})$;

I = $f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2k-1})$ y

E = $f(x_0) + f(x_{2k})$.



A la vista de la ilustración cabe notar que los diferentes trapecios considerados serán interiores o exteriores dependiendo de la concavidad de la función.

¿Cómo implementar los métodos numéricos con Derive?

En este sentido cabe destacar que el método de los rectángulos descrito anteriormente coincide con los resultados obtenidos aplicando las funciones criemann (numéricamente) y riemannc (gráficamente) del apéndice 3.

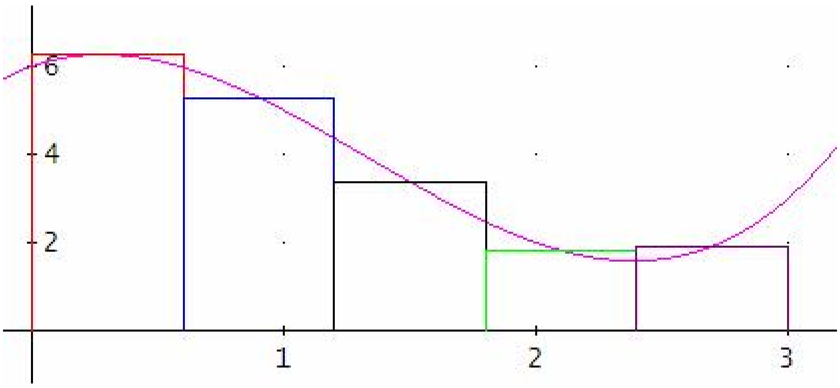
Recordemos que debemos seleccionar en la pantalla gráfica el comando Pantalla del menú Opciones y en la pestaña Puntos seleccionar Conectar: Sí; Tipo de línea: Solid; Tamaño: Pequeño, antes de la representación.

$$\mathrm{cajac}(u,\ a,\ b,\ x) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \mathrm{HCE}(u,\ a,\ b,\ x) \\ b & \mathrm{HCE}(u,\ a,\ b,\ x) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{riemannc}(u,\ a,\ b,\ n,\ x) := \left[\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{cajac}\left(u,\ a + \frac{(b-a)\cdot(i-1)}{n},\ a + \frac{i\cdot(b-a)}{n},\ x\right),\ i,\ 1,\ n\right)\right]$$

$$\mathrm{riemannc}(x^3 - 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 6,\ 0,\ 3,\ 5,\ x)$$

$$\left[\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6.267 \\ 0.6 & 6.267 \\ 0.6 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.6 & 5.289 \\ 1.2 & 5.289 \\ 1.2 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 1.2 & 3.375 \\ 1.8 & 3.375 \\ 1.8 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1.8 & 0 \\ 1.8 & 1.821 \\ 2.4 & 1.821 \\ 2.4 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 2.4 & 1.923 \\ 3 & 1.923 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right]\right]$$



El método de los trapecios también se puede programar mediante otra función similar a las anteriores. Para ello definimos

$$\mathrm{HME}(u,\ a,\ b,\ x) := \frac{y(u,\ a) + y(u,\ b)}{2}$$

$$\mathrm{mriemann}(u,\ a,\ b,\ n,\ x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\cdot \mathrm{HME}\left(u,\ a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1),\ a + \frac{b-a}{n}\cdot i,\ x\right)$$

Con esta función podemos obtener la aproximación del método de los trapecios para una división en n intervalos de igual amplitud. A continuación se muestran tres de estas aproximaciones para 10, 100 y 1000 intervalos, respectivamente, de la función *y*=sen(*x*) en el intervalo $\left[\frac{\text{®}}{4},\frac{3\text{®}}{4}\right]$.

$$\mathrm{mriemann}\left(\mathrm{SIN}(x),\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\cdot\pi}{4},\ 10,\ x\right) = 1.41130450577$$

$$\mathrm{mriemann}\left(\mathrm{SIN}(x),\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\cdot\pi}{4},\ 100,\ x\right) = 1.41418448365$$

$$\mathrm{mriemann}\left(\mathrm{SIN}(x),\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\cdot\pi}{4},\ 1000,\ x\right) = 1.41421327158$$

Si calculamos el valor del límite cuando n tiende a ∞ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{mriemann}\left(\mathrm{SIN}(x),\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\cdot\pi}{4},\ n,\ x\right) = \sqrt{2}$$

Por lo que respecta a la parte gráfica definimos

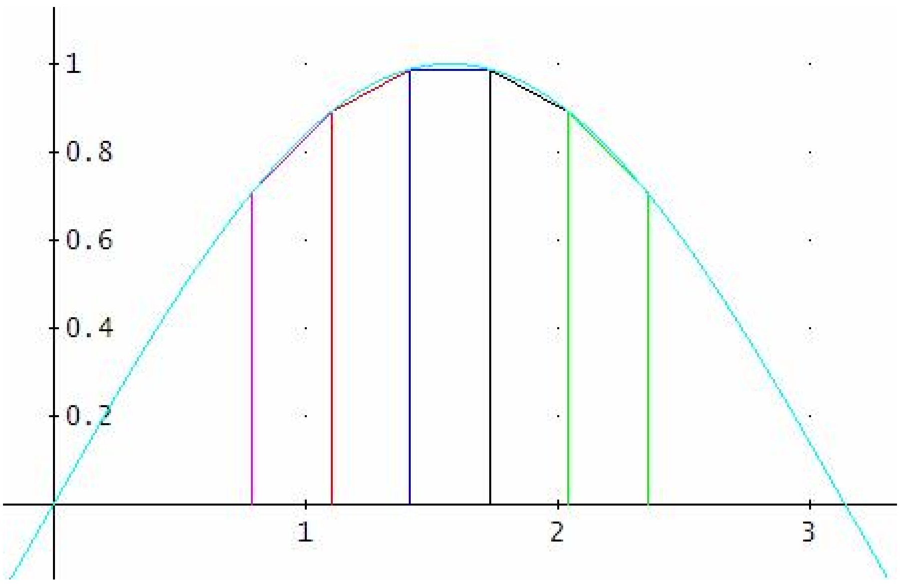
$$\text{trapecio}(u,\ a,\ b,\ x) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & y(u,\ a) \\ b & y(u,\ b) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{trapecios}(u,\ a,\ b,\ n,\ x) := \left[\text{VECTOR}\left(\text{trapecio}\left(u,\ a + \frac{(b-a)\cdot(i-1)}{n},\ a + \frac{(b-a)\cdot i}{n},\ x\right),\ i,\ 1,\ n\right)\right]$$

Y obtenemos

$$\text{trapecios}\left(\text{SIN}(x), \frac{\pi}{4}, \frac{3\cdot\pi}{4}, 5, x\right) = \left[\begin{bmatrix} 0.25\cdot\pi & 0 \\ 0.25\cdot\pi & 0.5\cdot\sqrt{2} \\ 0.35\cdot\pi & \text{COS}(0.15\cdot\pi) \\ 0.35\cdot\pi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.35\cdot\pi & 0 \\ 0.35\cdot\pi & \text{COS}(0.15\cdot\pi) \\ 0.45\cdot\pi & \text{COS}(0.05\cdot\pi) \\ 0.45\cdot\pi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45\cdot\pi & 0 \\ 0.45\cdot\pi & \text{COS}(0.05\cdot\pi) \\ 0.55\cdot\pi & \text{COS}(0.05\cdot\pi) \\ 0.55\cdot\pi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.55\cdot\pi & 0 \\ 0.55\cdot\pi & \text{COS}(0.05\cdot\pi) \\ 0.65\cdot\pi & \text{COS}(0.15\cdot\pi) \\ 0.65\cdot\pi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.65\cdot\pi & 0 \\ 0.65\cdot\pi & \text{COS}(0.15\cdot\pi) \\ 0.75\cdot\pi & 0.5\cdot\sqrt{2} \\ 0.75\cdot\pi & 0 \end{bmatrix}\right]$$

cuya representación es



El método de Simpson también admite un trabajo similar a los dos anteriores pero supone un esfuerzo mayor por parte de los alumnos (debido a la obtención de la recta tangente) que puede crear más problemas que ventajas en la visualización y en la creación de la imagen del concepto al perder de vista el verdadero propósito de la práctica.

ANEXO

GRABACIONES DE LAS ENTREVISTAS

Se puede acceder a todas las entrevistas realizadas en este trabajo a través del siguiente enlace:

https://drive.google.com/folderview?id=0B_bE59S6-5_8UTBsT1hhMXdjN3c&usp=sharing