

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Departamento de informática de Sistemas y Computadores



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Análisis y clasificación de imágenes repetitivas mediante técnicas de simetría computacional

Tesis doctoral

Manuel Agustí i Melchor

Directores:

Dr. José Miguel Valiente González

Dr. Ángel Rodas Jordá

Enero de 2016

*A mi mujer, Inma,
y a mis hijos, Manel y Miriam;
que han tenido que poner mucho de su parte para que pueda llegar hasta aquí.*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Inma por estar a mi lado y alentar a terminar esta larga andadura. A Míriam y a Manel por sus sonrisas, sus besos y sus pegatinas y dibujos de ánimo.

A Rosa y Manolo, a Carmen y Gregorio, a Raquel, Robin, Claudia y Arianne, por su apoyo y comprensión. A toda la familia que te pregunta, con curiosidad, a pesar de que no entienden que se pueda prolongar tanto en el tiempo.

A Vicente, Fernando, Alberto, Juan Carlos, Ximo, Pepe, Gabriela y Floreal, mis compañeros del grupo de investigación de Visión por Computador, por sus comentarios y su interés. A mis directores de tesis, José Miguel y Ángel, que se enzarzaron en largas discusiones, detalles de implementación y horas de experimentación.

A mis amigos, por preguntar con interés, como si lo entendieran.

A los desarrolladores de software libre y a las comunidades que los acompañan, ya que gracias a ellos he tenido herramientas y documentos para trabajar con estándares como SGML/XML que han permitido elaborar este documento y gran parte de la implementación y experimentación que aquí se recoge.

Gracias a todos, de todo corazón.

Trabajemos sin razonar, eso hace la vida más soportable (Voltaire).

Resumen

Actualmente manejamos mucha información de carácter visual. Vemos, creamos y usamos imágenes en gran medida para nuestra comunicación. Las técnicas de análisis basadas en características de bajo nivel son, en muchas ocasiones, poco descriptivas o representativas para el usuario humano. Esto es debido en parte a que son muy dependientes de las condiciones de adquisición de cada imagen y, también, a la dificultad de asociar el contenido de la imagen con una gran cantidad de valores numéricos que describen detalles muy pequeños de la misma.

Buscando acercar la forma computacional a la humana de describir el contenido de una imagen, las tendencias actuales están encaminadas a la construcción de descripciones que implican el uso de conceptos más complejos. Estas abstracciones se consiguen construyendo descripciones más elaboradas que asuman la variabilidad (y las tolerancias) con que los humanos tomamos las decisiones a la hora de describir el contenido visual de las imágenes.

En esta tesis se aborda el uso de la simetría y la determinación de qué combinaciones de simetrías aparecen en una imagen para su descripción en base a patrones de simetría en lugar de por ejemplo patrones de píxeles, basados en las texturas, el color, etc.

El problema de la descripción de imágenes en estos contextos se puede ver como uno de clasificación, debido a su relación con la teoría de grupos en el plano (*WallPaper Group Theory*) también denominada de mosaicos o teselación que se formula como la determinación del grupo de simetría al que pertenecen, caracterizado por un conjunto de simetrías interiores a un elemento básico que condensa todo el contenido del diseño. Si somos capaces de determinar si existe contenido repetitivo en una imagen, podremos obtener un patrón que permita describir la imagen en términos de un área que se repite de forma indefinida en el plano (sin dejar huecos y sin solapes), en pasos discretos marcados por las dos direcciones de simetría de traslación que define la retícula. Bajo esta formulación, el contenido de la imagen se puede expresar a partir de una forma elemental mínima, que no contiene ninguna simetría interior.

Abstract

Currently we handle a lot of visual information. We see, create and use many images in our diary lives and work. Analysis techniques based on low level features are, in many cases, little descriptive or representative for the human user. This is partly because they are highly dependent on the conditions of acquisition of each image and also, due to the difficulty of matching the content of the image with a high number of numeric values that describe very small details of the image.

In the way of approximating the computational process to describe the image content to the human way of reasoning, current trends are aimed at the construction of descriptions that involve the use of more complex concepts. These abstractions are achieved by building more elaborate descriptions assume the variability (and tolerances) with which humans make the decisions when it comes to describe the visual content of images.

This thesis addresses the use of symmetry and uses the combinations of symmetries presents in an image for description based on symmetry patterns rather than pixels patterns (textures).

The problem of image description in these contexts can be viewed as a classification, because of its relationship to plane group theory (*WallPaper* Group Theory) also called mosaic or tessellation groups, is formulated as the determination of symmetry group an image belongs to. The number of these groups is finite (there are only seventeen in 2D) and are described by a set of internal symmetries with respect to a basic element that encapsulates the entire contents of the design. If we can determine the existence of repetitive content in a picture, we get a pattern for describing the image in terms of an area that is repeated indefinitely in the plane (no gaps, nor overlaps), in discrete steps obtained from the two directions of translational symmetry that defines the grid. Under this formulation, the image content can be expressed from a minimum elemental form, which contains no internal symmetry.

Resum

Actualment fem ús de molta informació de caràcter visual. Veiem, creem i fem ús d'imatges en gran quantitat per a la nostra comunicació. Les tècniques d'anàlisi basades en característiques de baix nivell són, moltes voltes, poc descriptives o representatives per a l'usuari humà. Açò és degut en part a què són molt dependents de les condicions d'adquisició de cada imatge i, per la dificultat d'associar el contingut de la imatge amb una gran quantitat de valors numèrics que descriuen detalls molt menuts de la imatge.

Per aproximar la forma computacional a la humana de descriure el contingut d'una imatge, les tendències actuals estan encaminades a la construcció de descripcions que impliquen l'ús de conceptes més complexos.

Estes abstraccions s'aconsegueixen construint descripcions més elaborades que assumisquen la variabilitat (i les toleràncies) amb que els humans prenem les decisions a l'hora de descriure el contingut visual de les imatges. En esta tesi s'aborda l'ús de la simetria i la determinació de quines combinacions de simetries apareixen en una imatge per a la seua descripció basant-se en patrons de simetria en comptes de patrons de píxels (textures) .

El problema de la descripció d'imatges en estos contextos es pot veure com un de classificació, degut a la seua relació amb la teoria de grups en el pla (*WallPaper Group Theory*) també denominada de mosaics o teselació, es formula com la determinació del grup de simetria a què pertanyen, que és de cardinal finit (només hi ha dèsset en 2D) i es descriuen per un conjunt de simetries interiors a un element bàsic que condensa tot el contingut del disseny. Si som capaços de determinar si n'hi ha contingut repetitiu a una imatge, podrem obtindre un patró que permeta descriure la imatge en termes d'una àrea que es repeteix de forma indefinida en el pla (sense deixar buits i sense solapaments), en passos discrets marcats per les dos direccions de simetria de translació que definix la malla. Davall esta formulació, el contingut de la imatge es pot expressar a partir d'una forma elemental mínima, que no conté cap simetria interior

Índice

1	Presentación.....	17
1.1	Objetivos y aportaciones.....	19
1.2	Propuesta de sistema de análisis basado en el uso de simetrías.....	21
2	Introducción.....	25
2.1	Sobre la simetría y el diseño gráfico.....	26
2.2	Sobre la definición de simetría y su uso en VxC.....	28
2.3	La simetría como módulo principal para recuperación por contenido.....	29
3	Estado del arte.....	37
3.1	Cálculo y detección de simetrías desde el punto de vista de VxC.....	38
3.2	Introducción a la teoría de grupos de simetría en el plano.....	42
3.3	Metodología aplicable a la detección de periodicidad.....	52
3.4	Clasificación de imágenes repetitivas.....	61
3.5	Estado del arte de la recuperación por contenido.....	71
3.6	Discusión.....	80
4	Simetría computacional aplicada a la detección de la periodicidad en la imagen.....	85
4.1	Detección de periodicidad: simetría y geometría computacionales.....	87
4.2	Extracción del retículo.....	99
4.3	Evaluación de los resultados.....	102
4.4	Discusión.....	110
5	Simetría computacional aplicada a las simetrías interiores del patrón repetitivo.....	115
5.1	Selección y reducción del número de características.....	117
5.2	Extracción de características.....	119
5.3	Evaluación de los resultados.....	148
5.4	Discusión.....	151
6	Clasificación de imágenes por grupos de simetría.....	155
6.1	Expresividad de las características y complejidad del clasificador.....	156
6.2	Clasificadores desarrollados.....	159
6.3	Evaluación de los resultados.....	167
6.4	Discusión.....	180
7	Experimentos.....	183
7.1	Colección de imágenes creada y base de verdad.....	184
7.2	Evaluación de las características.....	196
7.3	Evaluación del sistema.....	200
7.4	Discusión.....	204
8	Conclusiones, líneas abiertas y trabajos futuros.....	207
8.1	Resumen de las aportaciones y contribuciones de la tesis.....	208
8.2	Líneas abiertas.....	209
8.3	Trabajos futuros.....	212
	Bibliografía y referencias.....	215

Índice de figuras

Figura 1: Imágenes del sitio web “Symmetry Detection from Real World Images . A Competition”	18
Figura 2: Esquema de bloques de un sistema de CBIR típico	21
Figura 3: Arquitectura del sistema de análisis empleado en el trabajo previo	22
Figura 4: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto	22
Figura 5: Imágenes de tipo “wallpaper“ extraídas de las colecciones de (Joyce, 2007) en el caso de la primera y de (Edwards, 2009) en la segunda fila	26
Figura 6: Ejemplos de las isometrías estándares (Liu, 2010)	27
Figura 7: La presencia de la simetría en diferentes campos de la Visión por Computador (extraído del curso Computational Regularity)	28
Figura 8: a) Imagen de consulta. b)Ejemplo de resultado obtenido por el sistema con una presentación de las imágenes más similares una dada en un conjunto cerrado de pruebas	30
Figura 9: Instanciación de descriptores de diferente nivel para un sistema CBIR	31
Figura 10: Ejemplo de imagen en la que hay que definir tolerancias para determinar que existen simetrías en ella: a) “Objetos” simétricos detectados, b) Espiral y c) Flor	33
Figura 11: Un ejemplo de retícula sobrepuesta a una imagen, con los parámetros que definen la rejilla sobre la celda unidad	33
Figura 12: Mr. Palillez: ejemplos de GSP realizados con Cinderella < http://www.imaginary-exhibition.com/cinderella/new/index-Spanish.html > sobre un mismo objeto	34
Figura 13: Definición gráfica de la medida de distancia, Figuras obtenidas de (Zabrodsky, et ál., 1995)	39
Figura 14: Resultado de aplicar el una combinación de esquema multiresolución y regiones especularmente simétricas: a) Imagen original. b) Las simetrías especulares. c) Mapas de simetría. d) Regiones localmentw simétricas. Figuras obtenidas de (Zabrodsky, et ál., 1995)	40
Figura 15: Resultado del trabajo de detección específica de ejes simetría de reflexión. Obsérvese como aparece un segundo eje de simetría global discutible. Imagen tomada de (Ho Li et ál., 2005)	41
Figura 16: Ejemplos de resultados obtenidos al aplicar la técnica de detección de fase de Kovesei con imagen real (a) y sintética (b) para la obtención de simetrías	42
Figura 17: Representación gráfica de la estructura de una imagen repetitiva y los parámetros que la definen	44
Figura 18: Grupos de frisos indicando las posibles reflexiones en el eje transversal , reflexiones y deslizamientos en el longitudinal y giros que los definen	46
Figura 19: Posibles retículas para los mosaicos regulares	47
Figura 20: Distintos paralelogramos unidad son posibles sobre una misma rejilla	48
Figura 21: Ejemplos de isometrías (A) y órbita en una figura (B), un triángulo equilátero	49
Figura 22: Representación gráfica de los diecisiete grupos de simetría en el plano incluyendo su notación estándar y la situación de las isometrías que los caracterizan. Extraído de (Schattschneider , 1978)	51
Figura 23: División del dominio espacio-frecuencia a) regular y b) multiescala. Sobre las gráficas se muestran ejemplos de las componentes utilizadas para realizar cada transformación. Figuras extraídas de (Graps, 1995)	53
Figura 24: Ejemplo gráfico de la correlación cruzada de una imagen y una máscara	55
Figura 25: Resultado de la autocorrelación aplicado a una imagen regular: (a) imagen original; (b) la autocorrelación en una vista 3D; (c) la autocorrelación vista como una imagen en niveles de gris	55

Figura 26: Descomposición de una señal cuadrada y una triangular en sus series de Fourier. El eje vertical muestra el punto de máxima congruencia de fase: en un caso es de asimetría (a) y en el otro de simetría (b). Extraída de (Kovesi, 1997).....	57
Figura 27: Relación entre fase y energía. Extraída de (Kovesi, 1997).....	58
Figura 28: Resultado de aplicar los filtros en cuadratura a una señal 1D.....	59
Figura 29: Imagen original, simetría de fase y congruencia de fase (ecualizada). Extraída de (Kovesi, 1997).....	61
Figura 30: Resultado de aplicar el análisis de fase: a) imagen original, b) simetría de fase y c) congruencia de fase (ecualizada).....	61
Figura 31: Test de reconocimiento de GSP de Schattschneider. Fuente (Schattschneider , 1978).....	63
Figura 32: Algoritmo de clasificación propuesto por Liu a partir del trabajo de Schattschneider.....	64
Figura 33: Método de clasificación utilizado en (Liu et ál., 2004a) sobre la idea inicial de Schattschneider.....	64
Figura 34: Primera propuesta del algoritmo de Liu.....	65
Figura 35: Algoritmo final de Liu.....	66
Figura 36: Diagrama de etapas de la herramienta de análisis de imagen en FECETEX (fuente: informe interno del proyecto FECETEX).....	68
Figura 37: Ejemplo de resultados del análisis de FECETEX: (a) Imagen original. (b) Extracción de objetos. (c) Agrupación de objetos. (d) Formación de motivos. (e) Paralelogramo fundamental y malla teórica.	
(f) Reconstrucción por malla teórica.....	70
Figura 38: Diferentes catalogaciones del diseño original al considerar solo algunos de los objetos/motivos de éste.....	71
Figura 39: Ejemplo de "agrupación de imágenes por contenido".....	73
Figura 40: Ejemplos de sistemas de navegación y recuperación por contenido de Google (a y b) y Yahoo! (c).....	73
Figura 41: Ejemplo de recuperación por contenido utilizando primitivas de texturas: para la imagen de consulta (a), el conjunto de imágenes (b). Extraído de (Lin et ál., 1999).....	75
Figura 42: Ejemplo de recuperación de (Lin et ál., 1999), en que se han obtenido imágenes de diferentes grupos de simetría.....	75
Figura 43: Ejemplos de resultados del sistema de CBIR de (Djibril y Thami, 2008).....	76
Figura 44: Un ejemplo de la teoría de grupos de friso aplicado a la clasificación de imágenes de histología animal que muestran simetría rotacional.....	77
Figura 45: Concepto de precisión y exhaustividad.....	80
Figura 46: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto (a) y de la secuencia del bloque "Detección de la rejilla" (b).....	86
Figura 47: Resultado de la autocorrelación en imágenes de niveles de gris. A la izquierda los picos de la autocorrelación, a la derecha el enrejado resultante de conectar los picos.....	88
Figura 48: Resultados de la autocorrelación (Liu et ál., 2004a): (a) Imagen original; (b) Autocorrelación; picos obtenidos con (c) un umbral global; (d) el método de Lin et al. (1999); (e) los 32 más grandes de Lin et al. (1999). (f) Los 32 más dominantes de (Liu et al., 2004a).....	89
Figura 49: Resultado de aplicar el análisis de fase: a) imagen original, b) simetría de fase y c) congruencia de fase (ecualizada).....	92
Figura 50: Elementos del filtro específico para una orientación desglosado en sus dos componentes: a) intervalo de longitudes de onda y b) direccionalidad (spread).....	94
Figura 51: Rango de variación del exponente involucrado para el cálculo de la función spread obtenido con LabPlot.....	94
Figura 52: Separación de componentes resultantes del análisis de simetría de fase por polaridad....	96

Figura 53: Hipótesis de periodicidad calculadas para una imagen: rejilla tentativa.....	98
Figura 54: Resultados de la unión de un conjunto de puntos (a) con diferentes grafos: MST (b), DT (c) y RNG (d). Extraído de Toussaint G. T. (1980).....	100
Figura 55: Representación gráfica de las conexiones topológicas encontradas sobre la imagen wall10 de la colección Wallpaper.....	100
Figura 56: Vista en 3D de la votación de vectores directores para la imagen wall10 de la colección Wallpaper.....	102
Figura 57: Obtención de las uniones entre objetos simétricos más repetidas en la imagen: ejemplo de esas dos uniones sobre los objetos de simetría (a), ejemplo de resultado de detección de la rejilla sobre la imagen (b) y patrón extraído (c).....	102
Figura 58: Ejemplo de reconstrucción: aplicado a la imagen (a), a partir del PF (b) y los pasos de la reconstrucción hasta el tamaño de la imagen original (c-f).....	103
Figura 59: Ejemplo de particionado contiguo.....	104
Figura 60: Ejemplo de particionado en el dominio del retículo, con $i \in [1 .. r]$	104
Figura 61: Diagrama modificado de la obtención de la geometría de la rejilla.....	107
Figura 62: Dos ejemplos de normalización de la geometría del PF en función de los ángulos de los vectores directores.....	109
Figura 63: Resultados erróneos de la autocorrelación como base para la detección de la rejilla....	110
Figura 64: Diagrama de bloques del primer módulo de descripción de la imagen: detección del retículo.....	111
Figura 65: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto.....	116
Figura 66: Simetrías observables en imágenes regulares: global (a) Traslación e interiores (b) Rotación, (c) Reflexión y (d) Reflexión con desplazamiento.....	118
Figura 67: Enumeración de todas las simetrías interiores posibles para construir un posible vector de características de simetrías. Se indican los ejes de reflexión (er) y los de reflexión con deslizamiento (erd).....	119
Figura 68: Cálculo de la simetría de orden 4 (90°) respecto al punto central de la imagen (I) obteniendo una imagen transformada (It), mediante correlación del PF transformado (imgPFt) con I.	121
Figura 69: Imagen original (izquierda) con el PF sobreimpreso y el mapa de simetrías (derecha) para la rotación de orden 2.....	122
Figura 70: Aplicado al cálculo de la simetría de rotación a la imagen original (a), con alfa de 180 (b) 120 (c), 90° (d) y 60° (e)	124
Figura 71: Aplicado al cálculo de la simetría de reflexión a lo largo de los ejes centrales: a) Original. b) Ejes sobre los que se refleja. c) Reflexión eje horizontal. d) Reflexión eje vertical....	124
Figura 72: Ejemplo de obtención del perfil de reflexión , sobre un eje arbitrario (a) , mapa de simetría (b) y perfil (c).....	126
Figura 73: Ejemplo de compactación del perfil (a) y su interpretación (b).....	127
Figura 74: Ejemplo de uso de la partición continua para el cálculo de las simetrías.....	130
Figura 75: Ejemplo del uso de particiones dispersas para el cálculo de las simetrías.....	131
Figura 76: Sistemas de referencia de la imagen (cartesiano), del enrejado (oblicuo) y del PF.....	132
Figura 77: Transformación de rotación. Equivalencia entre rotar la imagen o rotar el enrejado. ...	145
Figura 78: Ejemplo de particionado disperso para el caso medir la reflexión respecto al Lado L1.	150
Figura 79: Ejemplo de particionado disperso para el caso medir la rotación de orden 3 (120°).....	151
Figura 80: Contraejemplo de uso de la partición continua para el cálculo de la simetría de rotación de orden 2.....	151
Figura 81: Problema del orden del estadístico para medir la simetría de un diseño.....	152

Figura 82: El estadístico de la varianza es adireccional. No tiene en cuenta el mapa de bits bajo de los puntos que define la partición original (a) y la transformada (b).....	153
Figura 83: Ejemplos de imágenes regulares, acompañadas de la descripción gráfica del GSP al que pertenecen las imágenes.....	154
Figura 84: Ejemplo de VCS para una imagen del grupo PGG donde deben aparecer presentes las características 1, 9 y 10.....	156
Figura 85: Diagrama de bloques del primer módulo de descripción de la imagen: detección del retículo.....	159
Figura 86: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto.....	162
Figura 87: Jerarquía de los grupos de simetría en el plano.....	165
Figura 88: Módulos del esquema clásico de análisis de imágenes de contenido regular.....	166
Figura 89: Ampliaciones al esquema clásico de análisis de imágenes de contenido regular.....	167
Figura 90: Módulos del esquema de análisis de imágenes de contenido regular.....	167
Figura 91: Algoritmo ANN: a) Espacio de características y prototipos; b) áreas prohibidas; c) adaptación de las fronteras entre clases y d) desambiguación final.....	171
Figura 92: Proyecciones en 2D y 3D de la colección de imágenes disponibles.....	173
Figura 93: Tendencias de los valores de características presentes y ausentes para las características clásicas (a) y las propuestas(b).....	175
Figura 94: Valores promedios de los VCS de las imágenes del grupo P1 utilizando las características clásicas (a) y las propuestas (b).....	176
Figura 95: Evolución del rango de valores de las características clásicas (en rojo) y las propuestas (en azul).....	176
Figura 96: Imágenes de prueba para observar el efecto la normalización de características, pertenecientes a los grupos P1 (1), PMM (2), PGG (3) y P31M (4).....	178
Figura 97: Valores promedio de características presentes y ausentes, por metodología de cálculo de características (clásico en la columna izquierda y propuesto en la derecha) y por metodología de normalización (primera fila para la normalización por rango dinámico y en la segunda fila por regularidad de contenido).....	182
Figura 98: Evolución del intervalo de valores de las características observado en cada tipo de VCS computado para diferentes imágenes.....	183
Figura 99: Comportamiento individual de las características clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo PMM.....	184
Figura 100: Comportamiento individual de las características clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo P1.....	185
Figura 101: Comportamiento individual de las características clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo PGG.....	185
Figura 102: Comportamiento individual de las características clásicas clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo P31M.	185
Figura 103: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de la colección Wallpaper.....	192
Figura 104: Ejemplos de imágenes reales de patrones regulares de la colección Wikipedia.....	193
Figura 105: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de la colección wikiGeom.....	194
Figura 106: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de trazos gruesos de la colección Quadibloc.....	195
Figura 107: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de trazos finos de la colección Quadibloc.....	196
Figura 108: Ejemplos de imágenes sintéticas de patrones regulares en color de la colección Quadibloc.....	196
Figura 109: Ejemplos de imágenes sintéticas de patrones regulares de la colección SPSU.....	197

Figura 110: Ejemplos complejos del grupo P1 en SPSU.....	198
Figura 111: Ejemplos complejos del grupo P6 en SPSU.....	198
Figura 112: Imágenes regulares de colecciones de textil. La rejilla, en cada caso, se define con la geometría del patrón repetido está marcada.....	202
Figura 113: Evolución de la precisión para las distintas colecciones de imágenes en función del umbral y de las características (en rojo las clásicas y en azul las propuestas) normalizadas por rango dinámico.....	204
Figura 114: Evolución de la precisión en función de las características (en rojo las clásicas y en azul las propuestas) y el umbral, utilizando la normalización por regularidad, para las distintas colecciones de imágenes.....	205
Figura 115 Las combinaciones de simetrías de reflexión dan lugar a todas las simetrías: a) identidad, b) reflexión especular, c) rotación, d) translación y e) reflexión con desplazamiento....	216
Figura 116: Segmentación robusta frente a fondos texturizados.....	218
Figura 117: Segmentación robusta frente a cambios de iluminación.....	219

Índice de tablas

Tabla 1: Notación internacional extendida y abreviada para los grupos cristalográficos en el plano.....	50
Tabla 2: Visualización de los resultados obtenidos al seleccionar los parámetros del algoritmo de análisis de simetría de fase de Kovési.....	92
Tabla 3: Evaluación de los valores de geometría de la rejilla para las imágenes de la colección Wallpaper.....	106
Tabla 4: Resultados de la normalización de ubicación.....	108
Tabla 5: Perfiles característicos de reflexión.....	128
Tabla 6: Valores de los parámetros constantes para cada tipo de simetría.....	139
Tabla 7: Resumen de las ecuaciones.....	147
Tabla 8: Matrices de transformación, en coordenadas homogéneas, para cada una de las simetrías involucradas.....	149
Tabla 9: Resumen de la propuesta de características de simetría representando la asociación de particiones (original PTy extendida (PE), funciones de transformación (T) y espacios de parámetros y de búsqueda.....	153
Tabla 10: Resultados máximo y mínimo obtenidos de los mapas de simetría para cada características según la implementación clásica.....	155
Tabla 11: Resultados máximo y mínimo obtenidos de los mapas de simetría para cada característica según nuestra propuesta de cálculo con particiones dispersas.....	155
Tabla 12: Prototipos binarios para las diecisiete clases de los GSP.....	169
Tabla 13: Prototipos para las diecisiete clases de GSP (KNN) y las trece metaclasses (ANN).....	170
Tabla 14: Vector de valores normalizados por escalado con el valor de simetría traslacional.....	179
Tabla 15: Vector de valores normalizados por rango dinámico.....	180
Tabla 16: Vector de valores normalizados por regularidad de contenido.....	180
Tabla 17: Colecciones de imágenes utilizadas para la experimentación.....	190
Tabla 18: Distribución original por grupos de simetría.....	191
Tabla 19: Distribución final por grupos de simetría.	191
Tabla 20: Representación gráfica de la información guardada en la base de datos de verdad de una colección de ejemplo.....	200
Tabla 21: Relación de las colecciones de imágenes realizada sobre las imágenes disponibles.....	201
Tabla 22: Vectores de simetría de imágenes de la fig. 112 y su correspondiente GSP.....	202
Tabla 23: Resultados de clasificación utilizando normalización por rango dinámico individual... ..	203
Tabla 24: Resultados de clasificación utilizando la normalización por regularidad.....	206
Tabla 25: Resultados de clasificación con algoritmos implementados en Weka.....	207
Tabla 26: Resultados de clasificación con los algoritmos propuestos y las características calculadas de la forma clásica.....	208
Tabla 27: Resultados de clasificación con los algoritmos propuestos y el método de cálculo de características propuesto.....	208
Tabla 28: Resultados de clasificación experimental de ANNC, con valores de rango 2 y 3.....	210

Capítulo 1.

Presentación

Este capítulo comprende la motivación de la tesis realizada, los objetivos del trabajo y la distribución del contenido de la presente memoria. Para ello se presentarán las cuestiones básicas para el análisis de imágenes centrado en la detección de simetría como elemento clave, que se abordan en esta tesis: terminología, motivación y contexto de aplicación. Se expondrán dónde encajan las aportaciones obtenidas y en qué contexto cabe situarlas para entender sus restricciones de uso.

En un contexto real como el del diseño gráfico, existe tal volumen de información de contenido visual que para poder hacer uso del mismo es necesaria una organización que permita la exploración, búsqueda y recuperación. Las dificultades inherentes de las representaciones textuales de estas colecciones por el gran tamaño y la subjetividad de la percepción humana, han impulsado una aproximación basada en el contenido de las imágenes.

La presente tesis aborda la descripción y caracterización de imágenes de mapa de bits por parte de un computador de forma autónoma. Si bien este tema permanece sin resolver en contextos abiertos, en nuestro caso se abordará con las características que definen el contexto del textil y la cerámica, las artes gráficas y, en general, el diseño gráfico aplicado al plano utilizando un motivo que se repite. En este escenario de aplicación la repetitividad inherente en las imágenes lleva a la necesidad de determinar la periodicidad del patrón que las genera y los métodos de diseño a hablar de los contenidos visuales en términos de existencia o no de reflexiones y rotaciones. En ambos casos estamos hablando de conceptos geométricos abstractos relativos a la simetría que pueda existir en estas imágenes.

La simetría, véase (Zabrodsky, 1990) y (Kootstra et ál., 2008), se ha venido utilizando en un gran número de campos tanto artísticos como científicos. La simetría y la asimetría se han utilizado como elementos estéticos en arquitectura, escultura o pintura. La simetría ha sido modelada en matemáticas con los grupos de simetría; simetría y quiralidad (*chirality*) se utilizan en modelos físicos y químicos a nivel molecular. También en el análisis de imágenes médicas (Liu, 2010) tanto en etapas iniciales de segmentación como en procesos finales de caracterización o clasificación de objetos.



Figura 1: Imágenes del sitio web “Symmetry Detection from Real World Images . A Competition”

La determinación de la existencia de simetrías se lleva realizando en el campo de la **Visión por Computador** (en adelante VxC) desde casi sus inicios y está aún por resolver en situaciones abiertas. La fig. 1 muestra algunos ejemplos¹ cotidianos de estas imágenes. Se ha aplicado, por citar unos pocos, a:

- Sistemas de segmentación automática inteligente (Valiente et ál., 2001).
- Restauración de imágenes véase (Liu, 2000).
- Determinación de puntos de interés en imágenes por su correlación con el modelo de la

1 Imágenes de ejemplo de la competición sobre detección de simetrías de
<<http://vision.cse.psu.edu/research/symmComp/index.shtml>>..

visión humana. Tanto para preprocesado (en términos de análisis de la escena) como para aplicaciones prácticas de guiado de robots (Kootstra et ál., 2009a).

Hasta ahora se ha trabajado básicamente con imágenes que se segmentan de manera dirigida por el usuario y en las que se busca determinar la existencia de simetría de reflexión o de rotación a escala de la imagen. Este trabajo abordará:

- El uso de imágenes sin segmentar.
- La posible existencia de más de una simetría en la imagen.
- La necesidad de determinar la relevancia de cada simetría encontrada en la imagen a través de su ámbito espacial.
- La determinación de la simetría de traslación y la reflexión con desplazamiento de una manera unificada a la de reflexión respecto a un eje y la de rotación alrededor de un punto.

Una de las aplicaciones del presente trabajo consiste en incorporar los resultados del análisis y clasificación de imágenes repetitivas a un sistema de recuperación de imágenes por contenido que ayude al usuario a establecer una relación entre una imagen propuesta y la colección de imágenes a las que tenga acceso el sistema (Agustí et ál., 2001). El sistema inspecciona la imagen, determina cómo expresar su contenido y muestra al usuario, de forma ordenada, las imágenes en función de la proximidad en el contenido con la imagen de muestra. El objetivo de estos sistemas no es tanto la búsqueda exacta, puesto que la imagen de muestra puede no estar en la colección, sino establecer la similitud de contenidos visuales expresada en términos de una descripción de alto nivel de abstracción, basada en la existencia de simetrías. En las imágenes reales la determinación de la existencia de simetrías depende de la escala de observación y debe tener unos márgenes de tolerancias para los casos en que no se puedan determinar de forma absoluta.

En esta dirección se centra el tema de esta tesis y, así, se puede resumir el objetivo del presente trabajo en el de obtener una descripción del contenido visual de la imagen a partir de características de alto nivel semántico que permitan hablar del contenido de una imagen en términos de componentes constructivos. Además, en la medida de lo posible, se buscará obtener parámetros de la imagen robustos a cambios de escala, orientación, ruido en las imágenes y pequeñas deformaciones lineales.

Los trabajos iniciales de esta tesis se encaminaron a resolver el problema de la recuperación por contenido en colecciones abiertas de imágenes con el uso de versiones de una misma imagen a diferentes niveles de detalle, véase (Agustí et ál., 2003) y (Agustí et ál., 2003b), aplicando un análisis multiresolución con el uso de las *wavelets*. Los resultados son, en muchas ocasiones, son difícilmente interpretables con un sentido físico a partir de las magnitudes obtenidas. De cara a poder ofrecer una descripción del contenido visual o modelo sintáctico de una imagen hay que elaborar un proceso propio y distintivo de la aplicación que se va a realizar, como se ha hecho con éxito en casos como la catalogación de mapas, planos o el reconocimiento de caras.

En las colecciones de imágenes de la **industria textil y la cerámica**, por ser este el campo de aplicación de la presente tesis, se ha observado la existencia de la **teoría de los Grupos de Simetría** y el uso de las técnicas de **simetría computacional** para calcular estos detalles y, así, sustentar el análisis y la catalogación de imágenes en este contexto concreto.

1.1 Objetivos y aportaciones

En la presente tesis se proponen métodos algorítmicos para su uso en aplicaciones de codiseño,

control del calidad, almacenamiento, reconstrucción o recuperación de imágenes por contenido aplicado a campos donde las imágenes tienen naturaleza repetitiva. Esto se concreta en los objetivos siguientes:

- Análisis de imágenes con contenido repetitivo. Cómo se puede determinar si existe repetitividad en una imagen y cual es el patrón que se repite.
- Caracterización de los tipos de simetría presentes en imágenes repetitivas en contextos reales: qué simetrías pueden existir en imágenes sometidas a deformaciones.
- Determinación computacional de las simetrías presentes, con características de robustez que permita aplicarlo a imágenes sintéticas y reales.
- Detección de grupos de simetría implementados con clasificadores clásicos y sus ambigüedades.
- Obtención de una clasificación a partir de la descripción que permita comparar la similitud entre dos imágenes.
- Desarrollo de una metodología para obtener las características de simetría en la imagen de una forma unificada y basada en la estadística, como base que conjuga la adaptación a las condiciones esperadas y las propias de cada imagen.
- Propuesta de un método de evaluación aplicable a las técnicas desarrolladas que permita establecer la bondad de los algoritmos.

Estos se han materializado en las aportaciones que se proponen y evalúan en esta tesis:

- Obtención de un método de análisis de periodicidad novedoso.

En (Agustí et ál., 2008) se ha descrito la importancia de las técnicas de análisis de simetría de fase de Kovesi. Es novedoso, en tanto que aquí, se utilizarán en un contexto diferente de su definición original y que en nuestro dominio de aplicación las metodologías existentes tampoco han optado por implementar. Es un estudio sobre el uso de los operadores de Kovesi comparado con la correlación, para determinar la simetría traslacional (simetría global existente en las imágenes objeto de estudio) y que tiene unas restricciones de partida menos críticas que la correlación.

- Geometría computacional usada en análisis.

Para completar la determinación de lo que ocurre en la imagen en (Agustí et ál., 2008) se han empleado técnicas de análisis local, sobre las que se realizan hipótesis de sus interrelaciones a base de razonamientos sobre la topología, yendo de más próximos a más alejados y aplicando las restricciones propias de una imagen regular para obtener la caracterización del contenido repetitivo que exista en una imagen.

- Evaluación de propuestas existentes con el mismo objetivo.

Estudiar el estado del arte del análisis de imágenes regulares basado en el uso de simetrías, (Agustí et ál., 2011), nos lleva a identificar en la literatura la manera de abordar esta temática. Evaluar el método es necesario puesto que las publicaciones se basan en diecisiete muestras. Buscaremos crear una colección de imágenes etiquetada para comparar.

- Detección y catalogación de simetrías.

Revisar el estado del arte llevará a determinar el método existente más eficaz, sobre el cual se puede elaborar una estadística en nuestro campo de actuación, estudiar los factores que limitan sus resultados, proponer mejoras y ofrecer nuevas propuestas:

- Sobre la detección de grupos de simetría, (Agustí et ál., 2011), implementados con clasificadores heurísticos vs KNN y metaclases.
- Acerca de detección de grupos de simetría, (Agustí et ál., 2011b), implementados con clasificadores clásicos vs aprendizaje.
- Sobre la nueva metodología estadística, (Agustí et ál., 2011c), que ha conducido a enunciar una nueva formulación para obtener las características de simetría en la imagen.
- Mejorar el método existente. Nueva propuesta para unificar, (Agustí et ál., 2013), el cálculo de las simetrías articuladas en publicaciones actuales.

1.2 Propuesta de sistema de análisis basado en el uso de simetrías

El uso de estas técnicas de análisis de imágenes se puede aplicar como se referencia en (Liu et ál., 2010) a sistemas de segmentación automática inteligente, restauración de imágenes y, de manera más destacada, como un **módulo de descripción** de la imagen para implementar un sistema de **recuperación de imágenes por contenido**, en adelante CBIR (*Content Based Image Retrieval*), como se muestra en la fig. 2. En ella se muestran los dos grandes bloques de la solución propuesta: una obtención de la descripción de la imagen que se adapte a las condiciones de esta y que extraiga de ella una serie de características que permitan su comparación con las existentes en la colección, más un elemento de interfaz con el usuario que permitiría a este a partir de la visualización de los resultados modificar los pesos de los criterios y así dirigir la consulta en el sentido de su búsqueda cuando no pueda ser esta explicitada o extraída por el sistema de forma autónoma a partir de la imagen de consulta.

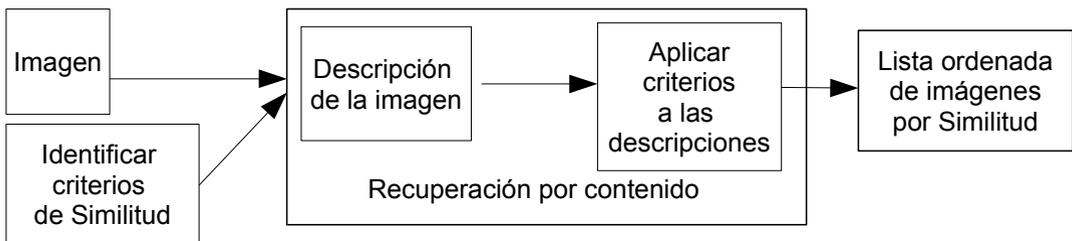


Figura 2: Esquema de bloques de un sistema de CBIR típico.

La necesidad de ese módulo de descripción ha sido estudiado en los trabajos previos a la tesis de análisis del contenido de la imagen analizando características de bajo nivel como se describe en (Valiente et ál., 2001) y (Agustí et ál., 2001). Estas experiencias preliminares condujeron al planteamiento y realización de un sistema de CBIR que, de manera simplificada, se muestra esquematizado en la fig. 3. En resumen, los objetivos de estos estudios fueron:

- Establecer el conjunto de descriptores que permitan analizar y clasificar imágenes de contenido regular, de manera autónoma y que maneje conceptos abstractos.
- Obtener una ponderación numérica de la similitud de imágenes y la certeza de la decisión.

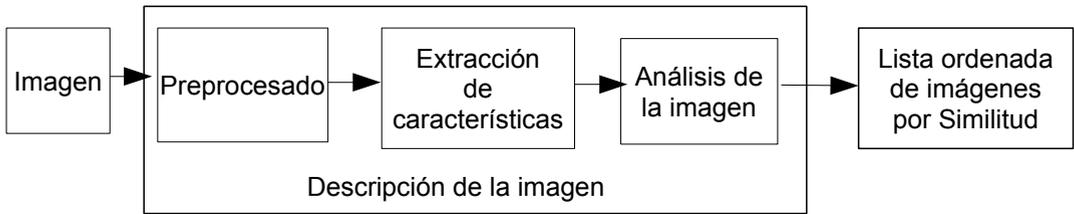


Figura 3: Arquitectura del sistema de análisis empleado en el trabajo previo.

Y los resultados obtenidos arrojaron tres grandes conclusiones:

1. La necesidad de utilizar un enfoque jerárquico. Esto es, realizar un análisis de la imagen a diferentes niveles permite extraer automáticamente una descripción del contenido de la imagen.
2. La importancia de estructura frente a la identidad exacta entre objetos individuales en la imagen. Esto es, tiene desde el punto de vista de la percepción más relevancia reconocer la estructura global de la imagen que el detalle local de los objetos que aparecen en la misma. Para el usuario humano, la estructura modular es el elemento que más contribuye a la hora de determinar la similitud entre imágenes.
3. En imágenes reales con contenido repetitivo, hay que admitir unos valores de tolerancia porqué no se suele dar la coincidencia exacta a nivel de píxeles. Este es un factor secundario en la similitud entre imágenes.

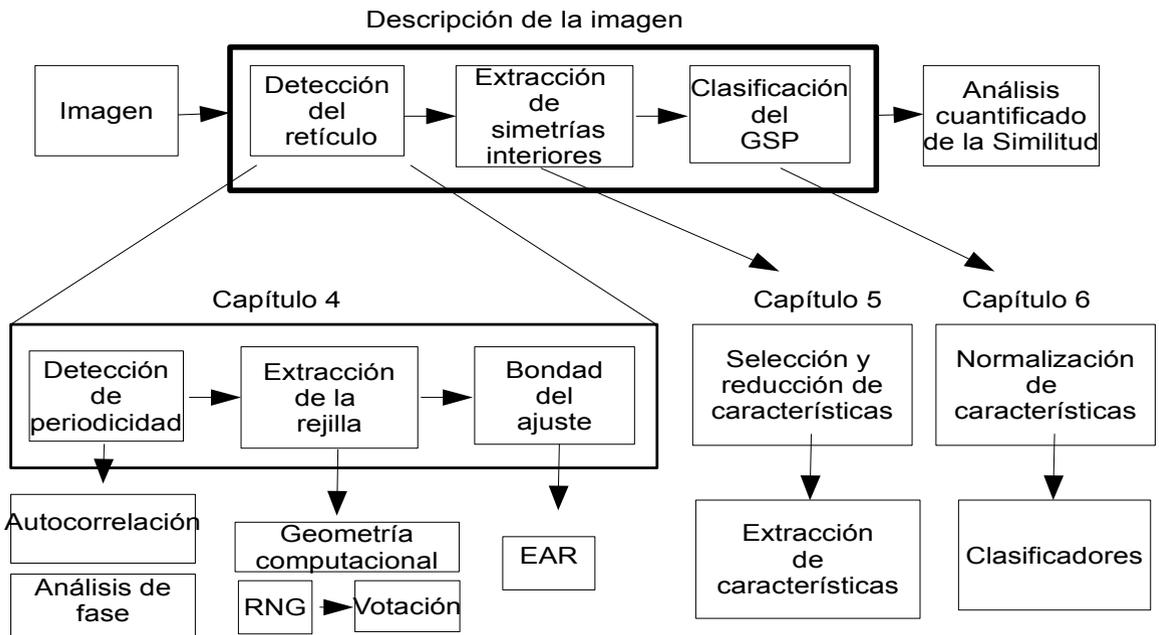


Figura 4: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto.

La arquitectura del sistema que se propone en esta tesis, frente al trabajo previo, está basada en el análisis de simetrías como concepto de alto nivel. La fig. 4 muestra el esquema propuesto de bloques, avanzando los objetivos a llevar a cabo en cada etapa y que el resto de la memoria se encarga de detallar. El bloque de descripción de la imagen se ha reescrito con los nombres de las operaciones que abordaremos en los capítulos siguientes. El bloque de interfaz con el usuario, se ha reducido a la parte relacionada con la cuantificación del proceso de $V \times C$, como se justifica en el próximo capítulo.

Iniciaremos esta memoria introduciendo el contexto, definiendo algunos conceptos y exponiendo algunas problemáticas que se resolverán a lo largo de esta memoria en el capítulo dos.

En el capítulo tres, se recogen los trabajos relacionados existentes en la literatura, para puntualizar como todos hacen usos particulares de la simetría con restricciones pertinentes a cada caso y que no suelen ser directamente aplicables en este caso.

El desglose de las técnicas y algoritmos desarrollados ocuparán los capítulos del cuatro al seis, como se avanza en la fig. 4, de la que cabe destacar:

- La propuesta de uso del **análisis de simetría de fase** como método alternativo al de la correlación para la determinación de la periodicidad en el capítulo cuatro.
- El uso de la **geometría computacional** como herramienta para la cuantificación y el análisis del resultado de la existencia de regularidad en una imagen. Que será retomado más tarde para evaluar el resto de simetrías en el capítulo cinco.
- La determinación de similitud entre imágenes en base a la **teoría de grupos de simetría** para obtener una clasificación ordenada y automática de las imágenes en el capítulo seis.

Las experiencias globales se realizarán con el sistema como bloque y se analizarán las influencias de los parámetros que se han identificado en el capítulo siete, aunque cada capítulo finaliza con una evaluación de los resultados obtenidos en cada punto y la comparativa de las diferentes técnicas que se hayan utilizado en cada paso.

El capítulo ocho recoge las conclusiones y propone como trabajos futuros las líneas abiertas en la realización de este trabajo. La memoria termina con la bibliografía y las referencias en el capítulo nueve.

Capítulo 1. Presentación

Capítulo 2.

Introducción

Este capítulo sirve de nexo entre los dos enfoques del problema que la tesis utiliza: la terminología propia del campo del diseño gráfico y el análisis de imágenes propio de la VxC centrado en la detección de simetría como elemento clave. Se expondrá también qué dificultades están pendientes de resolver en el planteamiento de solución avanzado al final del capítulo de presentación.

2.1 Sobre la simetría y el diseño gráfico

La presente tesis se aplica a imágenes hechas a partir de la repetición de un patrón, muy usuales en sectores industriales como la cerámica, el textil o las artes gráficas. También aparecen este tipo de imágenes en otras áreas de aplicación como la física de partículas, la cristalografía, la arquitectura, el diseño, la imagen médica o el análisis geodésico (topográfico). Estas imágenes están compuestas, por regla general, de patrones o motivos que se repiten rellenando parte o la totalidad de la imagen. A estas imágenes se las denomina **mosaicos regulares**, imágenes de wallpaper o simplemente *wallpapers*. Algunos ejemplos se muestran en la fig. 5, extraídos de colecciones de textil.



Figura 5: Imágenes de tipo “wallpaper” extraídas de las colecciones de (Joyce, 2007) en el caso de la primera y de (Edwards, 2009) en la segunda fila.

Un patrón **wallpaper** es una estructura regular hecha por repetición de una imagen en mapa de bits con forma de paralelogramo llamada **paralelogramo fundamental** y también celda unidad, *Unit Lattice* o *Unit Tile*. La simetría que pueda existir en este paralelogramo se describe mediante las operaciones geométricas que la transforman en ella misma (isometrías), manteniendo las distancias existentes en el dominio de partida (motivo por el cual también se las conoce como deformaciones rígidas). Las isometrías estándares (véase fig. 6) son: los desplazamientos (o simetría traslacional), las rotaciones, las reflexiones y las reflexiones con desplazamiento (*glide reflection*).

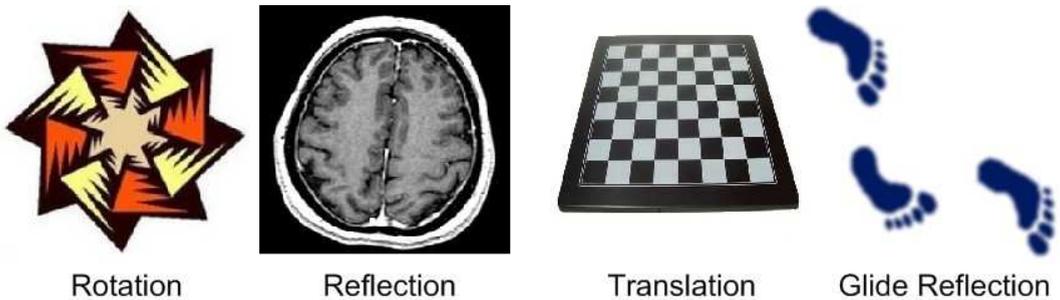


Figura 6: Ejemplos de las isometrías estándares (Liu, 2010).

Solo un número finito de combinaciones de estas isometrías se dan al mismo tiempo, en función del contenido de la CU. Por ejemplo, el primer patrón más a la izquierda de cada fila de la fig. 5 tienen solo simetría traslacional; por el contrario, los otros patrones tienen rotaciones y reflexiones.

Cuando varias isometrías son aplicables al patrón forman un **grupo de simetría**. La conocida teoría de los Grupos de Simetría (Horne, 2000) establece que debido a restricciones geométricas, solo se pueden definir un número finito de grupos de simetría. Concretamente, en el caso bidimensional, hay diecisiete **grupos de simetría en el plano**.

Más adelante se mostrará el detalle de cada uno de los diecisiete grupos, así como su notación estándar. Se han encontrado ejemplos de todos ellos en (Ramírez y Usón, 2002) las yeserías del mudéjar aragonés y en los arabescos de la Alhambra, (Pérez, 1987), por citar algunos ejemplos.

El aspecto relevante de la teoría de la simetría para esta tesis es el de la clasificación de patrones del plano generados por una figura que se repite regularmente siguiendo ciertas pautas. En la naturaleza, los cristales presentan esa peculiaridad y la necesidad de organizar y comprender mejor la estructura de los cuerpos cristalinos fue el motivo que llevó a los cristalógrafos a su clasificación en grupos cristalográficos.

El **enfoque de esta tesis** es la modelización computacional del análisis y razonamiento sobre este tipo de imágenes de contenido regular. Para ello la propuesta de solución al problema se base en un enfoque centrado en la perspectiva de la $V \times C$, que ahora entraremos a detallar, que se apoya sobre los aspectos formales de la geometría y de la teoría del diseño.

Como estos dos aspectos son colaterales, no se desarrollan en este trabajo. Se recomienda consultar los trabajos de (Johnson y Rodríguez 2003), (Baez, 2008) y (Gilsanz, 2011) para una exposición más detallada de la teoría algebraica, las definiciones matemáticas y la notación que se ha utilizado en esta memoria de tesis para formalizar el concepto de simetría.

Al respecto de la teoría de diseño gráfico y, en concreto, al respecto de los conceptos de patrones y embaldosados (a los que también se les refiere como mosaicos, teselaciones o pavimentos), así como la **teoría de grupos de simetría** (también denominada *wallpaper groups* o *plane symmetry groups* o *plane crystallographic groups*) se sugiere consultar trabajos como los de (Budden, 1972), (Shubnikov y Koptsik, 1974), (Schattschneider, 1978), (Martin, 1982), (Coxeter, 1984), (Grünbaum y Shephard, 1987), (Alsina y Trillas, 1992) y (Abas y Salman, 1992); o el trabajo de (Valor, 2002) que recoge y compara los algoritmos clásicos.

2.2 Sobre la definición de simetría y su uso en VxC

Simetría o regularidad es un concepto esencial y omnipresente en la naturaleza, las ciencias y el arte, la fig. 7 muestra algunos ejemplos² en diferentes campos. En general, otros campos como la cristalografía, arquitectura, diseño, arte, composición musical, medicina, ... hasta la web y los móviles, utilizan la simetría como elemento constructivo. La familiaridad del concepto para el usuario, aunque no domine la base formal, hace extraño que, todavía hoy, no tengamos un algoritmo unificado que resuelva la detección y determinación (cuantificación) de la existencia de simetrías en la imagen.



Figura 7: La presencia de la simetría en diferentes campos de la Visión por Computador (extraído del curso Computational Regularity).

Es importante entender la simetría como concepto global, general: una descripción abstracta, un concepto de alto nivel que se usa para explicitar el contenido de una imagen. El análisis que se realizará sobre las imágenes está encaminado, en primer lugar, a analizar la estructura de estas para la detección y cuantificación de las simetrías existentes. En el campo de la VxC, la simetría se utiliza además como operador para tareas específicas: segmentación, detección de puntos de interés, detección de objetos, reconocimiento de formas, etc. El interés en el sector se puede constatar en (Liu, 2010): *"Los seres humanos, los animales y los insectos tienen una habilidad innata para percibir y tomar ventaja de la simetría, que es un fenómeno generalizado que se presenta en todas las formas y escalas, tanto en ambientes naturales como en los construidos por el hombre. Aunque nuestra comprensión de los patrones repetidos se genera a partir del concepto matemático de la simetría y la teoría de grupos y que la búsqueda de la simetría a partir de datos digitales lleva ya más de cuatro décadas, pocas herramientas computacionales eficaces están disponibles en la actualidad. La percepción y el reconocimiento de la simetría aún no se han explorado a fondo en la inteligencia artificial y, en particular, en la visión por computador."*

La periodicidad, por ejemplo, es la constatación de que existe simetría de traslación. Otros tipos de simetría son observables en las imágenes y la constatación de que pueden aparecer determinadas combinaciones de ellas también. Muchas estructuras biológicas, naturales o fabricadas por la mano

² Extraído de Computational Regularity <http://www.cse.psu.edu/~yanxi/Fall2011_CR.htm>.

del hombre utilizan la simetría como principio de diseño o como un aspecto esencial de sus funciones. Tanto sea debido a la evolución como al diseño, la simetría conlleva un potencial estructural que la hace presente universalmente. Mucho de nuestra comprensión del mundo está basado en la percepción y reconocimiento de estructuras recurrentes (tanto en el espacio como en el tiempo), como por ejemplo nuestro sentido de lo bello.

Esta observación hace hincapié en la búsqueda de una operativa que permita reconocer de forma computacional los patrones de simetría que aparecen en las imágenes del mundo real de forma evidente y, en ocasiones, de forma aproximada, conocidos como *real world regular or near-regular patterns*. Matemáticamente, la teoría de Grupos de Simetría es el fundamento sobre el que se sustenta el razonamiento de qué cabe esperar encontrar, al menos teóricamente, en el contenido de una imagen regular. El factor clave en el uso de esta teoría abstracta para que se convierta en una herramienta computacional consiste en adaptarla a las condiciones de cada imagen, donde se da un gran abanico de valores próximos a los valores discretos que maneja la formalidad de la teoría: existe o no existe cada tipo de simetría.

La **Simetría Computacional** es el nombre que se ha dado, véase (Liu et ál., 2000) y (Hagit, 2005), a las metodologías encaminadas a hacer uso de las bases teóricas y la práctica de análisis de imágenes, como dice la autora: “... *para construir "puentes" conectando la simetría, la teoría de grupos de simetría, contenidos regulares y aplicaciones del mundo real*”. El objetivo final es la obtención de algoritmos aplicables a datos del mundo real (imágenes u otros) de una manera robusta y aplicable de forma unificada a todos los tipos de simetría. Este problema está todavía sin resolver de manera general a pesar de los muchos años de uso de estos conceptos en el análisis de imágenes.

2.3 La simetría como módulo principal para recuperación por contenido

Hablar de recuperación de imágenes se puede enfocar desde diferentes puntos de vista. En este trabajo lo abordamos desde el punto de vista más abierto, esto es liberando al usuario de ser responsable del análisis de la imagen en el sentido de que es habitualmente quien guía o decide explícitamente qué es de interés en la imagen. Se trata de exponer cómo convertirlo en un proceso en el que es el computador el que ha de tomar decisiones, realizado de manera autónoma, neutral y adaptándose a cada imagen que le viene dada con independencia de su proceder, esto es, lo hace a partir del contenido de la imagen.

Como aplicación más importante del uso de simetrías, estas se pueden ver como un bloque constructivo en la definición del **modelo de una imagen**. Este puede ser clave para aplicaciones de CBIR, limitadas por la expresividad de las características que pueden utilizar. En este sentido cabe citar los trabajos de (Smeulders et ál., 2000) y (Smith, 2001) que, a principios del nuevo siglo establecían preguntas y criterios acerca de las limitaciones y la imposibilidad de generalizar la evaluación de los resultados obtenidos en diferentes sistemas (Jacobs et ál., 1995), (*Wikipedia*, 2012), (Wanjale et ál., 2010) y (Liu, 2007) y así poderlos comparar o evaluar entre sí.

Puesto que los usuarios (diseñadores de nuevos motivos o usuarios de los existentes) utilizan una **nomenclatura basada en la simetrías presentes en la imagen** y que estas no pueden aparecer en cualquier forma en los motivos que se usan en el campo del textil y los azulejos hay que definir esta situación de un modo claro. Para ello se utilizará la teoría de los grupos de simetría en el plano. El trabajo sobre CBIR se redefine como el de determinar el contenido de las imágenes desde el punto de vista de su periodicidad y simetrías que definen un “wallpaper”.

Como trabajo inicial se propuso un sistema de experimentación de CBIR para analizar la influencia de las descripciones y del interfaz de usuario. A partir de la evaluación de este prototipo se trabajó en la búsqueda de descriptores con significado físico en el contexto propuesto. Trabajar en esta temática nos llevó a concluir que:

- Es necesario un enfoque de alto nivel, una descripción de la imagen de alto nivel de abstracción que pueda ser calculada computacionalmente. El uso de las técnicas de multiresolución permite implementar este comportamiento.
- El uso de la transformada *wavelet* se adapta mejor que otras técnicas a la forma en que el ser humano procesa las imágenes. Hay que determinar experimentalmente la elección de qué tipo de *wavelet* utilizar y queda difuso el sentido físico de estas en las imágenes.

Por simplicidad de la exposición, se utiliza un conjunto de imágenes que son versiones de una sola, tal que estas variantes se han obtenido a base de reordenar los planos de color y de introducir un cierto nivel de ruido en la misma. Así, aunque todas las imágenes tienen la misma estructura compositiva, se verán diferentes contenidos puesto que se ha ido cambiando el orden de las componentes RGB y sirve para para comprobar la robustez del proceso.

La fig. 8 contiene un ejemplo de resultado simple de lo que se quiere conseguir como resultado final del sistema de recuperación. Así, a partir de la imagen original (fig. 8a) como imagen de consulta, se obtiene esta misma en primer lugar (fig. 8b) y los demás, ordenados con el uso de los tres niveles de representación.

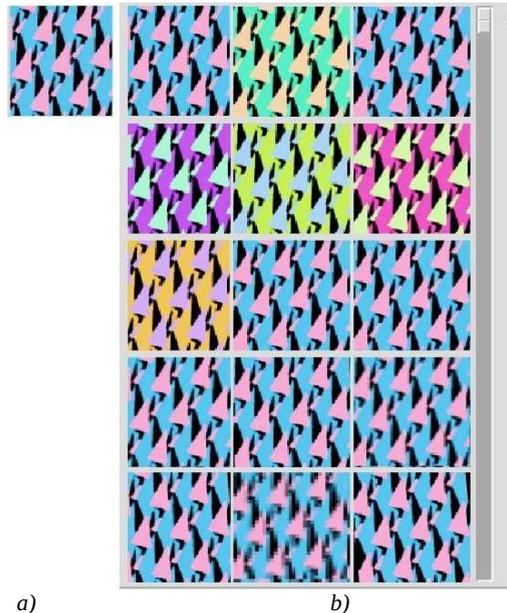


Figura 8: a) Imagen de consulta. b)Ejemplo de resultado obtenido por el sistema con una presentación de las imágenes más similares una dada en un conjunto cerrado de pruebas.

Este ejemplo también evidencia una de las complejidades inherentes a un sistema de recuperación visual: ¿cual debería ser la función de ponderación de similitud entre dos imágenes a emplear? ¿Se

puede traducir a una medida cuantitativa la similitud entre imágenes?. En el caso de características de alto nivel es posible considerar, cuantificar y discretizar valores hasta el punto de determinar si, por ejemplo, existe simetría o no existe nada de simetría. Considerando la simetría como una característica continua, el computador puede poner en forma numérica la “cantidad” de simetría que existe. En cambio, hablando de características de bajo nivel (es decir, de poca expresividad vista desde el punto de concepto que maneja el usuario humano) es muy ambiguo pensar que un sistema diseñado para un contexto pueda ser utilizado en conjuntos de imágenes diferentes (bien porque exhiben niveles de ruido diferentes, bien por que han sido tomadas en otras condiciones de adquisición, etc.) aunque pertenecientes al mismo “contexto” de aplicación para el usuario humano.

La respuesta a esta indeterminación se viene dejando de mano del usuario final quien, a través de los controles del interfaz da valores a los pesos de los diferentes factores que se han considerado al diseñar el sistema. Así se obtienen respuestas como la de la fig. 8b en la que una versión con un valor pequeño de ruido introducido (la tercera de la primera fila) resulta ser menos similar a la original que una versión en la que se ha cambiado el valor de una componente de color por otra (la segunda de la primera fila), pero más que las restantes combinaciones de ese mismo espacio de color. Esto demuestra que aunque el usuario parece tener el control de indicar al sistema lo que considera relevante, la expresividad de estas características está íntimamente ligada con cuestiones propias de la elección de RGB como espacio de definición del color.

Para obtener esta descripción multinivel, se propone emplear un sistema en el que se pueda implementar y cuantificar cada nivel indicado, por lo que se propone, para el resto del trabajo de la tesis, utilizar el **análisis estructural de las imágenes basado en características de alto nivel** que es el elemento más novedoso, puesto que para los otros dos existen ya operadores plausibles para su implementación.

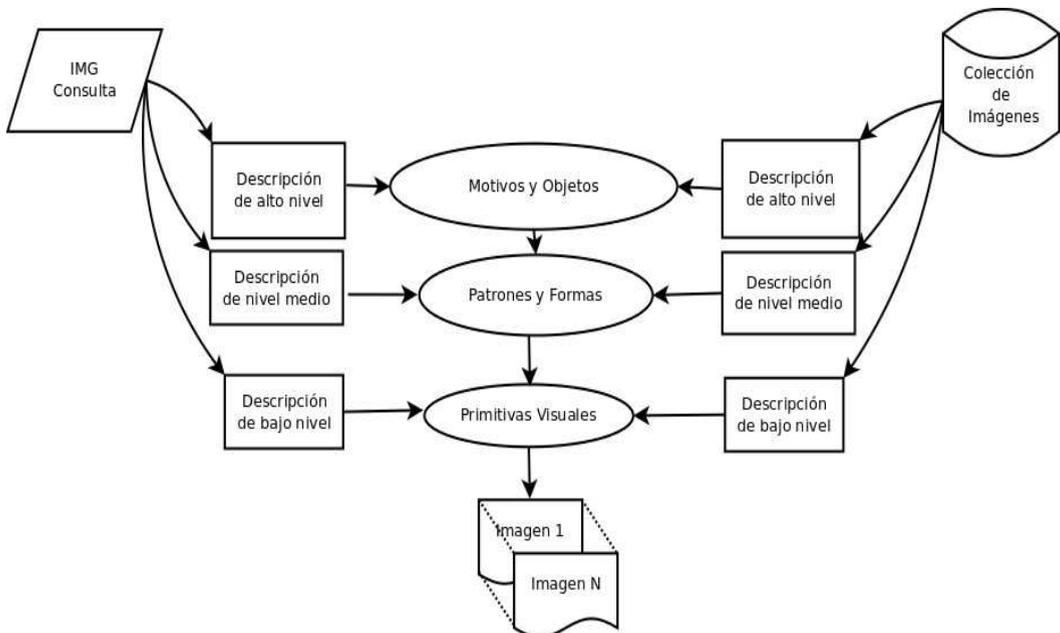


Figura 9: Instanciación de descriptores de diferente nivel para un sistema CBIR.

Como conclusión de ese trabajo previo a la tesis, se constató que para conseguir esta aproximación a lo perceptible por un sistema algorítmico, el computador ha de ser independiente de las distribuciones de color y de las formas. Esto es, hay que subir el nivel semántico de la descripción de una imagen realizado. Además, las características de bajo nivel que se han venido utilizando son poco expresivas para el usuario humano que utiliza un nivel abstracción mayor en su descripción del contenido visual de la imagen. Para realizar el análisis automático de una imagen se propuso un sistema que en primer lugar sea capaz de describir la misma en términos de características de alto nivel. Para ir refinándolas con otras de menor nivel semántico. Así se plantea utilizar, en este orden de relevancia, tres niveles de descripción del contenido de una imagen (véase fig. 9):

- Alto nivel. Relativas a descubrir la estructura de la imagen como las relaciones espaciales entre objetos.
- Nivel intermedio. Relacionadas con las formas de los objetos presentes en la escena, o patrones.
- Bajo nivel. Relacionadas con estadísticos que describen el color, las primitivas visuales más directamente extraídas de los valores de la imagen.

Como resumen de la crítica a los resultados obtenidos en esta primera aproximación y que justifica el desarrollo de un sistema de alto nivel semántico, podemos citar dos argumentos principales:

- i. La dificultad de expresar la noción, que maneja cada usuario, de similitud entre imágenes.
- ii. Las posibilidades, para el usuario, de ajustar el comportamiento del sistema a sus necesidades.

El primero se refiere a la importancia de un bloque de descripción de la imagen, que es **el centro de los contenidos de esta tesis**: frente a un análisis basado en características de bajo nivel se va a buscar el uso de características abstractas que tiene más significado semántico para el usuario humano. El segundo, de identificación y ponderación de criterios, no será estudiado con más profundidad puesto que es un ámbito que precisa del estudio la interfaz del usuario, así como del comportamiento y las necesidades del usuario, debiendo ser ajustado a cada caso de aplicación. Dado que la VxC no es el principal elemento de esta parte ya no volveremos sobre ello.

2.3.1 Problemática de la determinación de simetrías en las imágenes

Establecido que tiene interés ofrecer técnicas de modelado del contenido de una imagen en general y, en particular, sustentadas en descriptores abstractos como la simetría, cabe plantearse ¿cómo llevar a cabo la cuantificación o caracterización de simetrías en imágenes?.

Esta es una cuestión sutil en casos como el que muestra la fig. 10. En ella se puede observar que:

- Está formada por dos “objetos” o patrones de texturas que, se intuye, se repiten a lo largo de toda la imagen. No hay más repeticiones, así que es una hipótesis de trabajo: esta imagen es justamente el patrón que se repite en el plano en el caso del mundo real de donde se ha obtenido la imagen.
- Cabe considerar las tolerancias que conforman un descriptor de “alto nivel”. Por un lado la **extensión espacial** de la simetría para tenerla en cuenta, puesto que dentro del objeto “espiral” (fig. 10b) hay un centro de menor extensión con un número de simetrías mayor. El experto humano ignorará ese centro para determinar cual es la simetría del “objeto”. Por otro lado la **precisión espacial**, como lo que sucede en el objeto “flor” (fig. 10c) que muestra una simetría desplazada respecto a los diferentes colores que lo componen (el azul frente al conjunto de rojo y verde) que sería ignorado por el experto, quien sugeriría un valor muy alto de simetría

en función de su forma “claramente circular”.

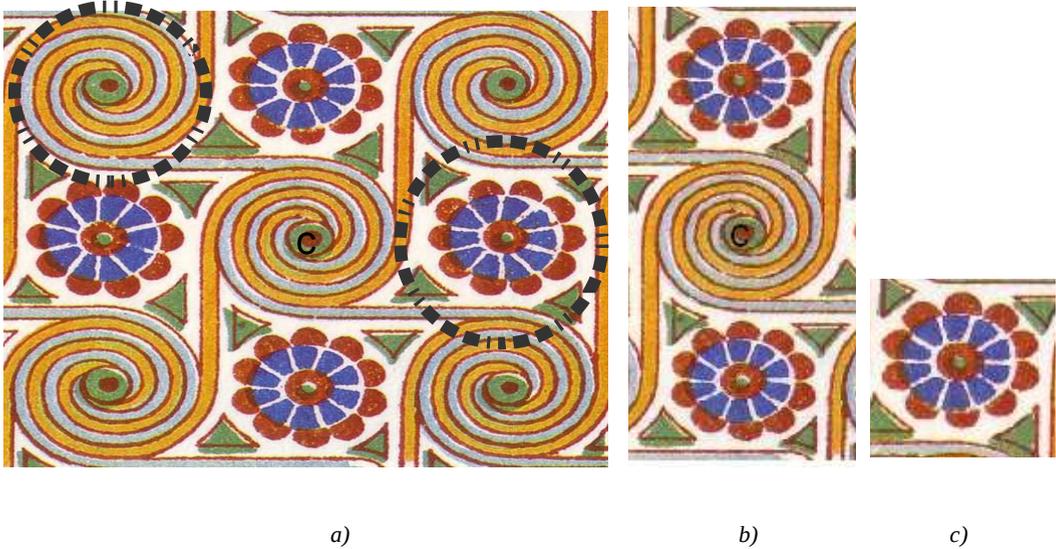


Figura 10: Ejemplo de imagen en la que hay que definir tolerancias para determinar que existen simetrías en ella: a) “Objetos” simétricos detectados, b) Espiral y c) Flor.

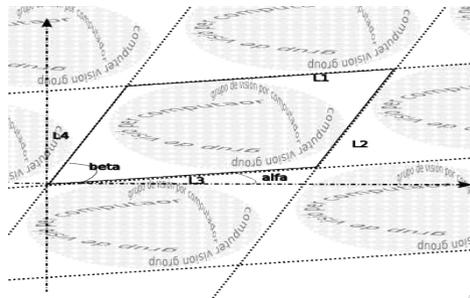


Figura 11: Un ejemplo de retícula sobrepuesta a una imagen, con los parámetros que definen la rejilla sobre la celda unidad.

¿Cual es la solución a esta necesidad de discriminar entre qué valores son aceptables de similitud para considerar que un objeto es simétrico o asimétrico? El modelo matemático actual más completo es la **teoría de Grupos de Simetría**. Esta postula que en el plano cabe encontrar dos tipos de simetría:

- Simetría global. De traslación, la que caracteriza la repetitividad en la imagen. Esta ha de permitir descubrir la retícula, véase fig. 11 y, a partir de ella, el motivo, representado como mapa de bits (textura), que se repite en las dos direcciones del plano.

Esta simetría siempre estará presente en las imágenes que son objeto de estudio en esta tesis. En caso contrario la imagen no cumple con las premisas de partida. Habrá que comparar diferentes métodos para ver si pueden trabajar con dos, o incluso menos repeticiones, en cada uno de los ejes del plano.

• Simetrías locales, que solo pueden ser simetría de reflexión, de rotación y de reflexión con deslizamiento. Estas simetrías interiores a los paralelogramos fundamentales pueden aparecer en diferentes combinaciones, pero no cualquiera, puesto que de estas simetrías solo se pueden dar determinados valores como demuestra la restricción cristalográfica. Así, en el plano, la teoría de Grupos de Simetría, explica que solo existen diecisiete posibles combinaciones o patrones de simetría (los grupos de simetría en el plano). Estos se describirán con más detalle en el cap. 3 de “ Estado del arte“. Como ejemplo se muestran algunas variaciones de los posibles grupos a partir de un mismo motivo inicial: el dibujo de Mr. Palillez en la fig. 12.

En resumen, hay dos grandes tareas a realizar en una imagen y por lo tanto el algoritmo que se encarge de analizar el contenido de las imágenes debe reflejar estas:

- La primera es la relativa a la detección de simetría, encaminada a la obtención de los descriptores de simetría, tanto de la global como de las tres locales.
- En una segunda fase, las simetrías han de ser asociadas a uno de los diecisiete grupos, lo que constituye una tarea de clasificación. Además, el resultado debe ir acompañado de una ponderación cuantitativa de la bondad de la misma.

Examinaremos diferentes técnicas para llevar a cabo estos dos procesos fundamentales.

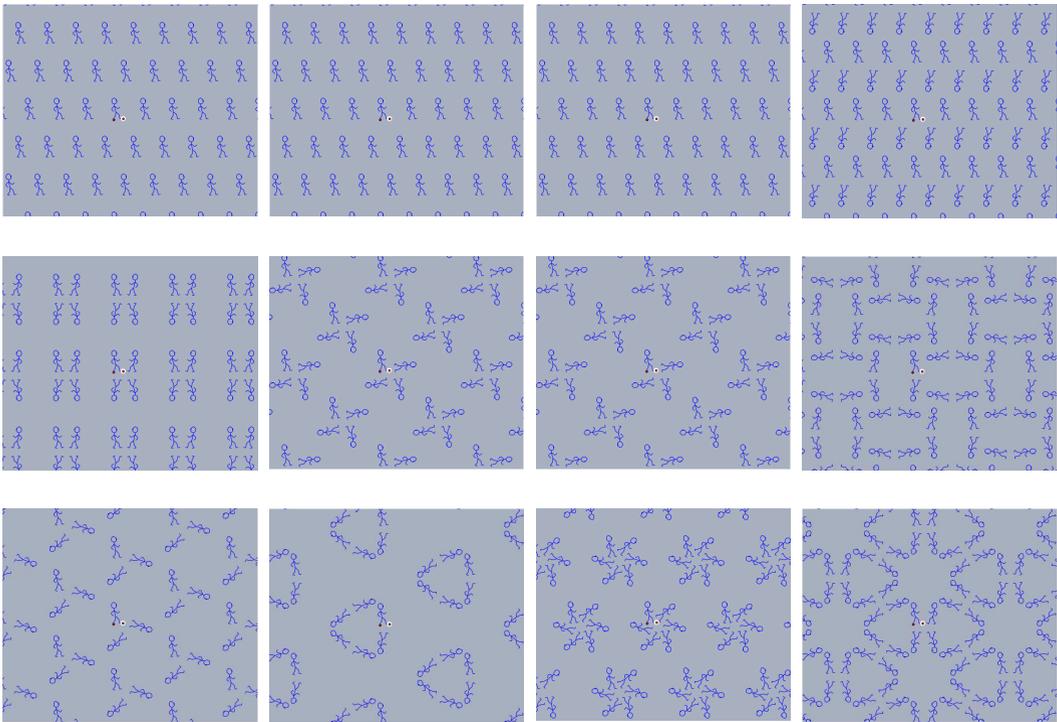


Figura 12: Mr. Palillez: ejemplos de GSP realizados con Cinderella <<http://www.imaginary-exhibition.com/cinderella/new/index-Spanish.html>> sobre un mismo objeto.

Capítulo 3.

Estado del arte

En esta tesis se propone un conjunto de operaciones basado en medidas continuas de simetría para clasificar imágenes reales y sintéticas de patrones repetitivos en dos dimensiones. La formalización de los conceptos de simetría y grupo de simetría, así como el establecer qué elementos se han desarrollado anteriormente sobre este campo, son los objetivos de este capítulo. Este capítulo se estructura alrededor de las dos perspectivas que el uso de las simetrías tiene en el contexto de esta tesis:

1. La de los diseñadores, para los que la simetría es un concepto abstracto fácilmente reconocible por los seres humanos. En sectores industriales como el textil, la cerámica o el diseño gráfico, el concepto de simetría está siempre presente como un elemento estético y es indispensable en cada nuevo diseño. Al utilizar un motivo simétrico, un determinado patrón es repetido espacialmente hasta llenar el plano de acuerdo a estrictas reglas compositivas. La tradicional **teoría de patrones y embaldosados** (Horne, 2000) describe los fundamentos de este proceso de creación y construcción. Los resultados son diseños comúnmente denominados mosaicos regulares, imágenes *wallpaper*, patrones *wallpaper* o simplemente *Wallpapers*. Pocos trabajos han abordado la temática de análisis y clasificación de las imágenes con estas características.
2. La de la VxC, en la que la detección de simetrías en las imágenes tiene un largo camino recorrido. El término **simetría computacional** se refiere al tratamiento algorítmico de la simetría, como medio de analizar el contenido de una imagen, en este caso buscando la existencia de simetrías y sus agrupaciones. El interés de este modelado computacional, en la VxC y la síntesis de imágenes ha sido reconocido en (Liu et ál., 2010) que ha explorado la relevancia y el potencial de la simetría computacional, pero como dicen los autores del mismo al respecto del uso de imágenes del mundo real “después de décadas de esfuerzo, un sistema totalmente automatizado basado en detección de simetrías, sigue siendo un reto para aplicaciones del mundo real”. Los autores destacan dos elementos clave: imperfecciones en los datos y capacidad de representación computacional. El primero hace referencia a la formulación computacional de los conceptos de teoría de grupos cuando los datos del mundo real son imperfectos: hay ruido en la imagen, los patrones son ambiguos, están deteriorados e incluso, a veces, no son totalmente visibles en las imágenes. El segundo elemento concierne a la naturaleza discreta de la representación de los datos en un computador y de que existe un límite en su capacidad de cuantificar la información que puede llegar a no diferenciar elementos de detalle fino.

Para ello, este capítulo se subdivide en diferentes revisiones de los aspectos de la literatura que confluyen en esta tesis: bajo la perspectiva de la VxC y la de los diseñadores, las implementaciones existentes de periodicidad y de la teoría de grupos de simetría. Por último, el estado del arte de la recuperación por contenido expondrá las necesidades que tiene este tipo de aplicaciones y cómo el uso de las simetrías es una aportación que se puede utilizar como concepto abstracto en la descripción del contenido de las imágenes.

3.1 Cálculo y detección de simetrías desde el punto de vista de VxC

En la literatura se pueden encontrar referencias a la detección de simetrías como elemento que aparece una sola vez, con entidad propia y relevante, en el contenido de las imágenes. Diferentes operadores han sido propuestos como generalización de un concepto que parece, de partida, tener una naturaleza discreta.

Mucho trabajo se ha realizado desde los trabajos de (Bolles, 1979) y (Marola, 1989) para acelerar el proceso o convertirlo en una detección más especializada en algún tipo de simetría específica.

Bolles abordó la detección de simetrías de reflexión y de rotación en texturas aplicada a imágenes binarias de un solo objeto, generalmente piezas regulares de entornos industriales. Marola se basa en un proceso de búsqueda de patrones para la detección de simetría para imágenes de niveles de gris, con solapamiento y robustez al ruido.

(Reisfeld et ál., 1990) propone el uso de la simetría para la obtención de puntos de interés en las imágenes en tiempo real y dentro del campo de la visión activa. El interés es que permite obtener respuestas cercanas a lo que el ser humano fija su atención y sin necesidad de conocimiento previo de las imágenes. Lo aplicará a la detección de rostros y de partes de la cara incluso en presencia de ruido en las imágenes. Esta línea de trabajo culminará con la *transformada generalizada de simetría (Generalized Symmetry Transform o GST)* en (Reisfeld et ál., 1995).

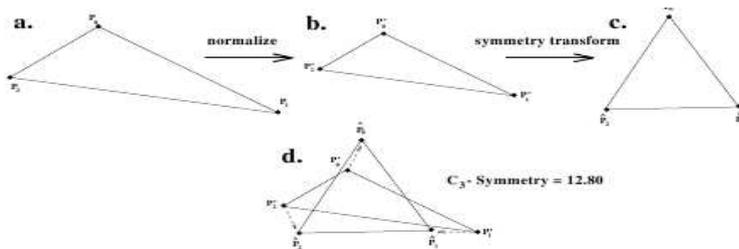


Figura 13: Definición gráfica de la medida de distancia, Figuras obtenidas de (Zabrodsky, et ál., 1995).

En el mismo grupo de investigación (Zabrodsky, 1990) realiza un estudio desde el punto de vista de la escuela de la *Gestalt* sobre la percepción de la simetría, que le lleva a la determinación de una medida continua de la simetría, véase fig. 13. En (Zabrodsky et ál., 1995) la simetría es tratada como una característica continua y se define una medida de similitud entre figuras a partir de la distancia de simetría de estas. La distancia de simetría de una figura se define como la mínima distancia necesaria para mover los puntos de una figura en orden a obtener una figura simétrica. Esta medida permite comparar el “grado” de simetría de diferentes figuras y la “cantidad” de diferentes simetrías de una figura. Esta medida es aplicable a cualquier tipo de simetría e independiente del número de dimensiones y es robusta a oclusiones y a datos ruidosos. En principio, esta medida se obtiene a partir de la determinación de la frontera exterior de los objetos, por lo que precisaría un paso previo de segmentación o una intervención manual del usuario para escoger los puntos que describen este borde. Aunque lo aplica a mapas de bits en niveles de gris, se emplea solo para encontrar objetos simétricos de reflexión, sus áreas y su orientación, véase fig. 14.

(Di Gesú y Valenti, 1996) aborda esta problemática y propone el uso de la transformada discreta de simetría (*Discrete Symmetry Transform* o DST) como medida local de simetría en imágenes digitales. Es fácilmente paralelizable, al poderse expresar como suma de convoluciones y se puede acelerar su cálculo utilizando una formulación piramidal, porque el nivel más bajo de resolución en el que se puede obtener información útil se puede determinar y la jerarquía de simetrías se utiliza para encontrar puntos de interés con diferentes niveles de detalle. Por ello, el autor la propone para aplicaciones de tiempo real, visión activa, segmentación de patrones visualmente complejos, clasificación de imágenes y análisis de movimiento.

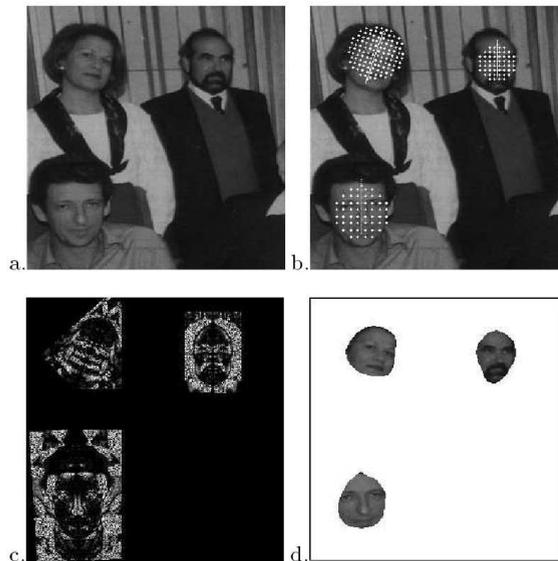


Figura 14: Resultado de aplicar el una combinación de esquema multiresolución y regiones especularmente simétricas: a) Imagen original. b) Las simetrías especulares. c) Mapas de simetría. d) Regiones localmentw simétricas. Figuras obtenidas de (Zabrodsky,et ál., 1995).

(Ardizzone, 1996) ya desarrolló un prototipo³ para indización automática de vídeo que combina características globales y locales de la imagen. Las primeras derivadas del análisis del movimiento y del color; las segundas, dependiendo de la clase de imágenes a indizar, incluyen la simetría y el esqueleto entre otras. Se utiliza sobre imágenes en grises para segmentarlas y lo aplica exclusivamente a imágenes de constelaciones. Depende de parámetros como el tamaño del filtro que aplica o el umbral de lo que considera un valor de simetría a tener en cuenta. Estos valores se obtienen a partir de información a priori por la observación de la imagen o del histograma de esta. Cabe destacar que el mismo autor ya ponía en énfasis en el empleo de métodos multiresolución para la implementación de este operador, como muestra en (Zavidoque, 2000) y (Di Gesù y Valenti, 2003).

Posteriormente han aparecido operadores para la detección de simetrías específicas. Para aplicaciones relacionadas con el guiado de robots y la manipulación de objetos (Ho Li, et ál., 2005) proponen un método que utiliza imágenes de gradiente, junto con la información de bordes, para detección de simetría de reflexión en tiempo real, fig. 15. Comparada con la GST no necesita fijar la escala, pero no es capaz de detectar simetrías locales. Stentiford (Stentiford, 2005) describe un método de detección de ejes de simetría en caras que no requiere ninguna condición previa en las imágenes a analizar. Esta aproximación parte de un trabajo anterior de detección de atención visual que identifica regiones de interés y simetría traslacional. (Kootstra et ál., 2009b) han propuesto alternativas a la detección de puntos de interés utilizando la técnica de SIFT para *Simultaneous Localization and Mapping* (SLAM). Uno de los principales problemas es encontrar los puntos característicos dada la influencia del ruido y de los pequeños cambios de perspectiva de la secuencias de imágenes de una misma cámara. El problema derivado del detector de puntos de interés de SIFT es el alto número de puntos que no son estables entre los diferentes cuadros. Para

³ JACOB (Just a A Content Based query system for video databases).

este problema los autores proponen el uso de la simetría local para encontrar regiones de interés. Dado que la simetría es un elemento habitual en los entornos en que mueven los robots y por lo tanto es un factor a tener en cuenta. Además, la redundancia propia de las formas simétricas favorece la robustez de las aplicaciones y el uso de regiones, en lugar de puntos, es más estable. La simetría de rotación se ha utilizado (Loy y Zelinsky, 2002) como un detector de simetría radial para obtener regiones y puntos de interés en tiempo real.



Figura 15: Resultado del trabajo de detección específica de ejes simetría de reflexión. Obsérvese como aparece un segundo eje de simetría global discutible. Imagen tomada de (Ho Li et ál., 2005).

Siguiendo este camino (Xiao y Wu, 2007) hablan de métodos basados en gradiente frente a métodos basados en fase para clasificar los algoritmos existentes en detección de simetrías. Analizan un buen conjunto de métodos existentes y exponen **problemas que permanecen abiertos** en esta temática. Respecto del primer grupo concluyen que la mayoría de los detectores de simetría adolecen de tres problemas. El primero es que se diseñan para imágenes que solo contienen un objeto; además muchos trabajan sobre la imagen segmentada. En segundo lugar, generalmente usan técnicas derivadas del gradiente, lo cual ofrece resultados que no son consistentes con el sistema de percepción humano, como el hecho de que una circunferencia blanca brillante es considerada más simétrica que una de menor contraste; así que no se obtiene un valor absoluto del grado de simetría de un objeto, sino coordenadas de la imagen donde se dan máximos de simetría local y, aunque muchas técnicas son invariantes a rotaciones, no lo son al contraste y los cambios de luminosidad derivados del uso de la información del gradiente. Por último, muchos son efectivos en la detección de uno o dos tipos de simetría, generalmente la de reflexión y la de rotación, pero no son generales. También concluyen que la información de fase es más congruente con los aspectos inherentes al modo de percibir la realidad que tiene el sistema de visión humano.

A su vez, podemos situar los métodos de análisis de fase dentro del dominio más general de la frecuencia, como contraposición a la clasificación anterior. Aquí podemos destacar los clásicos: autocorrelación ((Liu y Collins, 2000),(Liu et ál., 2004a)) y análisis de Fourier que se han venido empleando para obtener la periodicidad o repetitividad de una imagen. Estos métodos necesitan un número mínimo de repeticiones que no se da en muchas de las imágenes disponibles en los catálogos actuales. Además estas técnicas no permiten la localización espacial de las simetrías o su relativización en función de su presencia en la imagen. Así, otras transformaciones se han venido empleando, como la Fourier-Mellin (Derrode y Ghorbel, 2003), cuyo coste computacional es elevado.

En la actualidad, existen varios métodos de análisis multiresolución basados en *wavelets* que proporcionan un marco de trabajo en un dominio espacio-temporal compaginando así las dos vertientes. En esta línea podemos situar los trabajos de (Kovesi, 1996) y (Kovesi, 1997). En ellos el autor define como, a partir de la información de fase, se pueden calcular los ejes de simetría presentes en una imagen (véanse dos ejemplos en la fig. 16). El trabajo originalmente está enfocado a obtener características acerca de la naturaleza de las fronteras de los objetos sobre imágenes sin segmentar. Está basado en el análisis local del dominio frecuencial para obtener una medida de simetría robusta a condiciones de iluminación o contraste presentes en la imagen. En este sentido coincide mucho con los trabajos ya relatados de Zabrodsky, pero no hay ningún resultado que elabore una metodología de detección de ningún tipo de simetría presente en la imagen más allá de utilizarlo como justificación de que existirán fronteras alineados con estos valores.

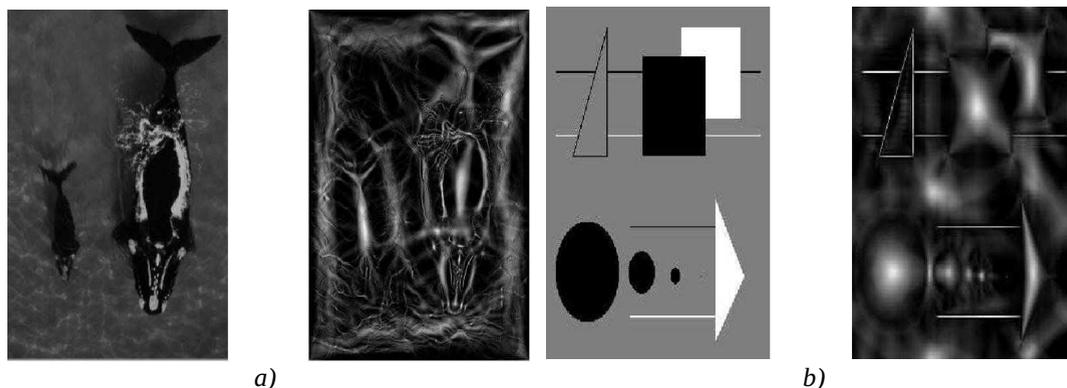


Figura 16: Ejemplos de resultados obtenidos al aplicar la técnica de detección de fase de Kovesi con imagen real (a) y sintética (b) para la obtención de simetrías.

3.2 Introducción a la teoría de grupos de simetría en el plano

Un grupo es un patrón de simetrías, por lo tanto estudiar los grupos implica comprender aspectos de la forma en que varias de esas simetrías se dan al mismo tiempo. Para ello se seguirá la nomenclatura utilizada en cristalografía y la teoría de grupos de simetría para dar la formalidad necesaria al estudio de los grupos. Este apartado constituye una breve revisión de la terminología que se emplea en el campo del diseño gráfico referente a la teoría de grupos de simetría y que da cuerpo de doctrina a lo que se está dando en denominar **simetría computacional**.

Con esta teoría es posible caracterizar todas las disposiciones que puede adoptar un patrón o forma en el plano, esto es todas las isometrías rígidas. Esto se realiza a partir de la determinación de una estructura sobre la que se dispone una forma o figura: el patrón que se repite en el plano a lo largo de las dos direcciones que se escojan para definir la repetición.

Se recomienda consultar los trabajos de Johnson (Johnson y Rodriguez, 2003) o el de Baez (Baez, 2008) para una exposición más detallada de la teoría algebraica de la que solo se pretende unificar la nomenclatura que se utilizará en esta tesis. En la teoría de diseño gráfico también existen diferencias en la nomenclatura en este campo y sus consideraciones se pueden ver en el trabajo de Valor (Valor, 2002).

Puesto que los diferentes sectores y autores consultados utilizan términos variados que se han

venido aplicando en su contexto, este punto es la recopilación propia de conceptos de la teoría utilizada en el contexto de aplicación de las herramientas desarrolladas en esta tesis y que se puede encontrar desglosada con mayor detalle en otras tesis de carácter más específico que se citan y que exponemos brevemente en los siguientes apartados por completitud de la exposición.

3.2.1 Periodicidad y simetría traslacional

La determinación del enrejado que resume la naturaleza repetitiva de una imagen es lo que denominamos la extracción de la rejilla. Esta se elabora alrededor de la determinación de la simetría traslacional que se observa en la imagen y de cómo esta explica su periodicidad

Nuestro contexto de aplicación son las **imágenes de naturaleza repetitiva**, típicas mayoritariamente en procesos industriales relacionados con el área del diseño gráfico. Estas imágenes están formadas por la combinación de motivos regularmente repetidos, usando transformaciones geométricas, hasta llenar el plano 2D sin solapes ni huecos. Este tipo de **particiones** del plano definen un enrejado o **retículo** que es una de las características principales de este tipo de imágenes. Este es el término usual en la literatura matemática, también se le denomina rejilla y, en la bibliografía en inglés, *lattice*, *grid* o *regular tiling*. Estas imágenes, que son las más comunes expresiones de uso de patrones en el plano, son creadas siguiendo un estricto conjunto de reglas geométricas que son descritas en la ya mencionada **teoría de diseño basado en patrones y embaldosados**⁴ (Horne, 2000), que se sustenta en la de grupos de simetría. En resumen, esta teoría establece que cualquier diseño en el plano debe estar compuesto por dos simetrías de traslación así como también otras simetrías como rotaciones, reflexiones o reflexiones con desplazamiento. También establece que solo hay diecisiete combinaciones o grupos de esas transformaciones *isométricas* que se denominan grupos **Wallpaper** o **grupos de simetría del plano** (en adelante, GSP). Así pues, la descripción estructural de estos diseños se compone de las simetrías de traslación (el *retículo*), el grupo de simetría del plano al que pertenece (el GSP) y el **motivo** (también llamado dominio fundamental) para crearlos.

En este apartado nos vamos a centrar en el primer problema: la determinación del retículo. Las imágenes regulares (o imágenes *wallpaper*) siempre presentan simetrías traslacionales, lo que significa que la imagen puede ser reconstruida mediante la repetición del patrón o motivo, utilizando dos direcciones de desplazamiento linealmente independientes. Por esta razón la determinación del retículo se puede formular como el problema de obtener el enrejado de puntos discretos que están relacionados por existir entre ellos una separación de un número entero de veces la longitud del motivo en ambas direcciones.

Este enrejado se describe, como muestra la fig. 17, por dos vectores directores (\vec{u} y \vec{v}) o, lo que es lo mismo, por cuatro valores numéricos: los dos ángulos (a_1 y a_2) y las dos longitudes (L_1 y L_2). El paralelogramo definido por estos vectores es llamado el **paralelogramo fundamental** (en adelante **PF**) o celda unidad (CU). Idealmente, la imagen de este PF es el motivo original que se ha usado para crear el patrón. Desde el punto de vista de la determinación de la rejilla, no es importante el punto inicial de este enrejado (X_0, Y_0). Puesto que cambiar este punto solo cambia los contenidos del PF, pero no los parámetros del enrejado. Donde quiera que se ubique el inicio del enrejado, la imagen puede ser reconstruida por repetición del PF.

Por estas razones, la extracción del retículo se expresa a menudo en términos de encontrar la periodicidad en la imagen o la geometría del PF. Esto implica redefinir el problema de la periodicidad en términos de la existencia de simetrías locales, lo cual nos lleva al concepto de enrejado previamente enunciado. Idealmente, en imágenes sintéticas, es posible calcular la

4 En inglés *Tiling and Pattern Design Theory*.

repetitividad con total precisión. En cambio, el problema con las imágenes reales, es debido a las deficiencias que hacen imposible encontrar una coincidencia exacta entre parejas de píxeles y, por lo tanto, necesitan el ajuste automático de algunas tolerancias en cada imagen. Ejemplos típicos de estas deficiencias en imágenes de contextos reales, como el textil y la cerámica, son ruidos y distorsiones de perspectiva introducidos en el proceso de adquisición de la imagen, pequeñas variaciones en el proceso industrial de manufactura o variaciones inherentes a la producción manual.

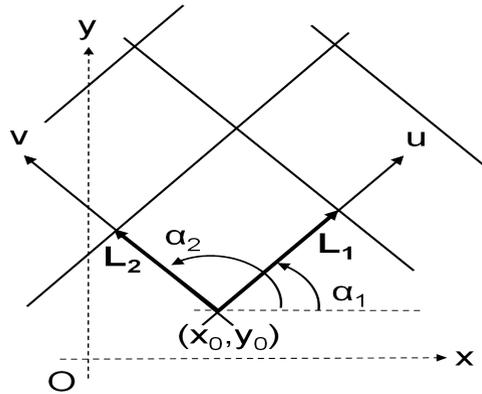


Figura 17: Representación gráfica de la estructura de una imagen repetitiva y los parámetros que la definen.

Se utilizará a partir de este capítulo una notación que tiene relación con la teoría de grupos de simetría del plano. De manera formal y resumida, partimos de que se puede observar en el plano que existen un conjunto de movimientos que dejan al mismo invariable. Estos se denominan **transformaciones** y son: la identidad; la rotación sobre un punto; la traslación; la reflexión alrededor de una línea que se denominada eje de reflexión del plano y la reflexión con desplazamiento (*glide reflection*) alrededor de un eje en el plano.

Al conjunto de todas estas transformaciones en el plano se le denomina **grupo Euclídeo** y se simboliza por E . El conjunto de todos los elementos de este grupo E , tales que al aplicar una transformación sobre una región finita del mismo (patrón) obtienen el mismo patrón de partida, se denomina **grupo de simetría del plano** (*wallpaper group*) de ese patrón y se simboliza con la letra G . El subconjunto de los puntos del plano obtenidos al mover un punto cualquiera, P , únicamente con traslaciones, pertenecientes a G , se denomina **retículo** o **rejilla de G** . Para cualquier punto, las versiones trasladadas de él por simetrías de traslación de un patrón forman un retículo.

El punto de interés de esta aproximación está en que la periodicidad tiene un destacado papel en nuestro contexto de aplicación: las imágenes de los productos de las empresas del textil y la cerámica. También otras disciplinas participan de este interés y utilizan los grupos de simetría. De hecho se habla de conceptos geométricos en el campo de la cristalografía. La mayor diferencia con nuestro contexto es que en la cristalografía se han definido formalmente estructuras de elementos desde una dimensión, hasta un número arbitrario de dimensiones. Para formalizar estos conceptos de repetición y geometría recurriremos a la cristalografía, la rama de la geometría que trata con patrones que se repiten indefinidamente. Véanse los trabajos de (Sólyom, 2007) y (Lifshitz, 1996) para poner en contexto las aplicaciones en este campo. Por ejemplo, en dos dimensiones describe como las baldosas cubren el suelo y en tres dimensiones hace referencia a la descripción general de

cómo se disponen los átomos o las moléculas en cristales.

Nuestro interés en particular en su aplicación en dos dimensiones, se debe a que pueden utilizarse para responder a dos cuestiones típicas en recuperación de imágenes por contenido: cuándo dos imágenes son iguales y cuándo son distintas. Definiendo esos términos de igual o diferente en cuanto a que exhiben una estructura similar. Esto hace referencia a describir el contenido de una imagen o extraer un esquema de una imagen. En cualquier caso, capturar la información contenida en una imagen con una cierta abstracción de los valores de cada punto de la misma.

Se puede hablar de un número infinito de posibles retículos en el plano a partir de que el punto de origen de los mismos es cualquier punto del plano. Se puede hablar de un “retículo general” como el formado por los puntos resultado de la intersección de las situaciones espaciales de los patrones en el plano, considerando que este se ha dispuesto de forma repetitiva, sin solapes y exhaustiva (sin dejar espacios), de forma que ha cubierto completamente todo el plano.

Se dice que un grupo de simetría del plano es un **grupo topológico** discreto de isometrías del plano euclídeo que contiene dos traslaciones linealmente independientes. Por esto, para describir la rejilla es necesario fijar un origen, que debería ser uno de esos puntos que forman la rejilla y una base, los vectores generadores que describen cómo se interconectan los puntos. Entonces, un punto cualquiera de la rejilla x,y se reescribe entonces a partir del punto (O_x,O_y) escogido y los vectores T_1, T_2 linealmente independientes lo que permite reescribir, de forma paramétrica, la rejilla como en la ec. 1.

$$O_x, O_y \in \mathbb{R}^2, \vec{T}_1, \vec{T}_2 \in \mathbb{R} \text{ linealmente independientes} \quad (1)$$

$$\text{rejilla} = \{x, y / x = O_x + m\vec{T}_1, y = O_y + n\vec{T}_2\}; m, n \in \mathbb{Z} \wedge m, n > 0$$

Lo mismo es aplicable para cualquier otro punto del plano así generado, siempre que el punto origen sea uno situado en la misma posición del entorno o motivo. Que sea discreta quiere decir que el módulo de los dos vectores de traslación es constante y un múltiplo entero de su valor que solo será cero en el caso del punto tomado como origen (en ambos casos) o de los puntos espacialmente inmediatos a este y en ese caso lo será una de las dos traslaciones únicamente.

La definición de rejilla y, en concreto, su característica de variar a intervalos de valores discretos, impone una serie de restricciones que pueden no ser obvias a primera vista. Aunque hay muchos tipos de simetría, solo unas pocas pueden ser aplicadas en una rejilla real. Por ejemplo, mientras la simetría rotacional existe para cualquier valor real, solo la de grado dos, tres, cuatro y seis harán que todos los puntos de la rejilla se vuelvan a disponer sobre la misma rejilla. Esto se denomina la **restricción cristalográfica**. De hecho el número de grupos es limitado en cada dimensión (Joyce, 1997): siete en 1D, 65 puntuales y 17 en el plano en 2D; 320 en 3D y 4783 en 4D. Para dimensiones mayores todavía no se ha determinado, pero se sabe que es finito.

3.2.2 Simetrías en las figuras planas: grupos de simetría

El estudio de la simetría en las figuras planas se aborda bajo diferentes consideraciones (Gilsanz, 2011). Podemos decir que en función del número de dimensiones a lo largo de donde se aplican las simetrías podemos encontrar: los grupos puntuales, los grupos de frisos (unidimensionales) y grupos en el plano (bidimensionales) o mosaicos regulares.

Los **grupos puntuales**, también llamados grupos de Leonardo, son los grupos que contienen un número finito de isometrías. Pueden clasificarse en dos categorías: grupos diedrales, que poseen reflexiones, y grupos cíclicos, que solo poseen giros. En general, se les denomina rosetas por su origen arraigado a estos elementos de la arquitectura del renacimiento.

Los **grupos de frisos** se componen de una figura repetida con regularidad a lo largo de una recta. Se llama friso (en inglés *frieze*) a toda figura del plano cuyo grupo de simetría cumple la condición de que las traslaciones que contiene son las generadas por una única traslación, que será la traslación de longitud mínima. Un resumen de los siete grupos de frisos se muestra en la fig. 18 indicando las simetrías que exhiben y su nomenclatura en notación internacional.

Grupo	Ejemplo	Refl.T.	Refl.L.	Des.LL.	Giros
F_{11}					
F_{12}					✓
F_{1g}					✓
F_{1m}				✓	
F_{m1}		✓			
F_{mg}		✓		✓	✓
F_{mm}		✓	✓	✓	✓

Figura 18: Grupos de frisos indicando las posibles reflexiones en el eje transversal , reflexiones y deslizamientos en el longitudinal y giros que los definen.

Se denomina región unidad traslacional o, abreviadamente, **región unidad** de un friso a la menor región que genere el friso completo al aplicarle la familia de traslaciones. La parte del friso contenido en una región unidad se denomina **motivo**. Al aplicar la familia de traslaciones a la región unidad, el motivo dará lugar al friso completo.

Se denomina **región mínima** y también **región fundamental** de un friso a la menor región plana que genere el friso al aplicarle sucesivamente las simetrías del friso. La región mínima puede coincidir con la región unidad -en los frisos que solo contienen la familia de traslaciones- o ser una parte de ella, por ejemplo la mitad o una cuarta parte, como ocurre en los grupos de frisos que contienen simultáneamente reflexiones transversales y reflexión longitudinal. La parte del friso contenida en una región mínima se denomina **motivo mínimo**. Al aplicar las simetrías del friso a la región mínima, el motivo mínimo marcado en ella dará lugar al friso completo.

A los **grupos de simetría del plano** (GSP o, PSG para la bibliografía en lengua inglesa por *Plane Symmetry Group*), se les denomina **de patrones** o **de mosaicos** o también de **mosaico periódico en el plano**, grupos cristalográficos planos o, en inglés, *wallpaper groups*. Se definen como toda figura que contiene dos traslaciones T_v y T_w determinadas por vectores \vec{v} y \vec{w} de distinta dirección. Además, cualquier otra traslación debe ser composición de estas. Un mosaico periódico que posea las dos traslaciones de vectores \vec{v} y \vec{w} también deberá poseer muchas otras traslaciones, todas las que se obtienen al componer aquellas entre sí. Así, debe contener la traslación de vector $n\vec{v}$ para cualquier n entero, obtenida al componer T_v -o su inversa- consigo misma, la de vector $m\vec{w}$ para cualquier m entero y, en general, la determinada por cualquier vector $n\vec{v} + m\vec{w}$, donde n y m son números enteros.

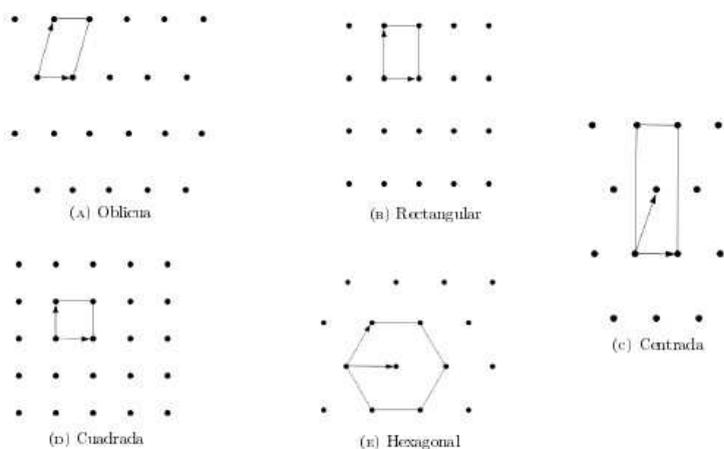


Figura 19: Posibles retículas para los mosaicos regulares.

Al aplicar la familia de traslaciones a un punto cualquiera del plano se obtiene el **retículo** cuyos vértices adyacentes forman paralelogramos de lados \vec{v} y \vec{w} . Dependiendo del ángulo que formen dichos vectores y sus longitudes, existen cinco posibles retículas, como muestra la fig. 19:

- Hexagonal o romboide, fig. 19e. Cuando el paralelogramo resultante lo es de la intersección de dos bandas oblicuas desiguales.
- Cuadrada, fig. 19d. Cuando es un paralelogramo regular que tiene los cuatro lados iguales y los ángulos rectos. Sus diagonales son iguales y se cortan en su punto medio formando ángulos rectos.
- Rectangular centrada o rombo, fig. 19c. Cuando el paralelogramo está formado por la intersección de dos bandas iguales y oblicuas. Sus lados son iguales y paralelos dos a dos, sus ángulos son iguales dos a dos y las diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
- Rectangular, fig. 19b. Cuando el paralelogramo está formado por la intersección de dos bandas desiguales y perpendiculares. Tiene: los lados paralelos dos a dos, los ángulos rectos, las diagonales iguales y se cortan en un punto medio.
- Oblicua o paralelogramo, fig. 19a. En el resto de casos de posibles cuadriláteros (los lados opuestos son paralelos).

Se define formalmente el **paralelogramo fundamental**⁵ (Hilbert y Cohn-Vassen, 1999), que venimos denotando por **PF**, como: la región conectada de tamaño máximo que no contiene un par de puntos equivalentes en su interior. Esto es, que si se le hace crecer, incumplirá esta propiedad. Una imagen, propia de un grupo de simetría en el plano, puede ser generada por las traslaciones que se aplican a una región conectada. Dentro del paralelogramo, en la mayoría de grupos, se pueden encontrar simetrías que permiten descomponer este en una región de menor tamaño. Esta es la **región fundamental** (RF), la menor división de una imagen tal que por aplicación de isometrías se puede construir la imagen completa. Obsérvese que:

- La RF puede ser una parte de la celda unitaria o igual a esta.
- Tanto el PF como la RF no son únicas.

Análogamente al caso unidimensional, se denomina región unidad traslacional o **región unidad de un grupo cristalográfico plano** a cualquier región plana, de mínima superficie, que genere el plano al aplicarle la familia de traslaciones. La región unidad siempre puede tomarse con forma de paralelogramo, que a veces es un rectángulo, un rombo, o un cuadrado, dependiendo del grupo cristalográfico. Por este motivo también se le denomina PF. Dicho paralelogramo tiene sus vértices en puntos del retículo y, en su interior, no hay ningún otro punto del mismo. Para un mismo retículo es posible elegir paralelogramos de distinta forma, pero todos ellos tienen idéntica superficie (fig. 20). Dado un mosaico cualquiera, la parte de la figura contenida en una región unidad se denomina motivo y, al aplicar las traslaciones a la región unidad, el motivo dará origen a la figura completa del mosaico.

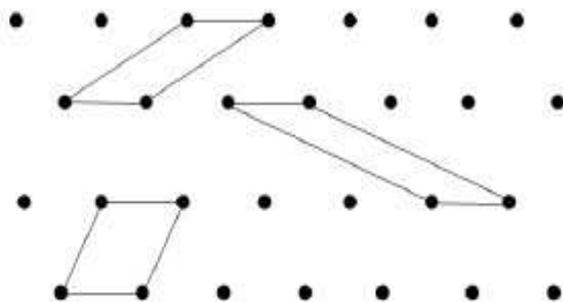


Figura 20: Distintos paralelogramos unidad son posibles sobre una misma rejilla.

También en el caso bidimensional se habla de región y de motivo. Se denomina región mínima y también **región fundamental de un mosaico** a cualquier región plana, de mínima superficie, que genere el mosaico completo al aplicarle sucesivamente las simetrías del mosaico. La región mínima puede coincidir con la región unidad o ser una mitad, una cuarta parte, o incluso una doceava parte de ella, como ocurre en los mosaicos que contienen el mayor número de simetrías. La parte de la figura contenida en una región mínima se denomina motivo mínimo. Al aplicar las simetrías del mosaico a la región unidad, el motivo mínimo marcado sobre ella dará origen a la figura completa del mosaico.

En el grupo de simetría del mosaico también pueden existir simetrías de otro tipo: reflexiones, giros

⁵ Hay que volver a insistir en que en la literatura también recibe los nombres de *unit cell*, *unit mesh*, *primitive cell*, *fundamental cell* o *lattice unit*.

y deslizamientos. Dos diseños diferentes pueden presentar las mismas simetrías, que constituyen la estructura subyacente de ambos diseños, esto es, su pauta de repetición o de generación, que es independiente de la figura inicial que se repite, las clasifica y permite obtener un motivo que pueda generar todo el mosaico.

Dada una figura y un punto P de la misma, al conjunto de puntos que son imagen de P mediante cualquier simetría de la figura se denomina **órbita de P**. La fig. 21 muestra las isometrías de un triángulo equilátero y una órbita formada por seis puntos del triángulo. Una órbita permanece invariable mediante las simetrías de la figura. La figura es unión de las órbitas de sus puntos.

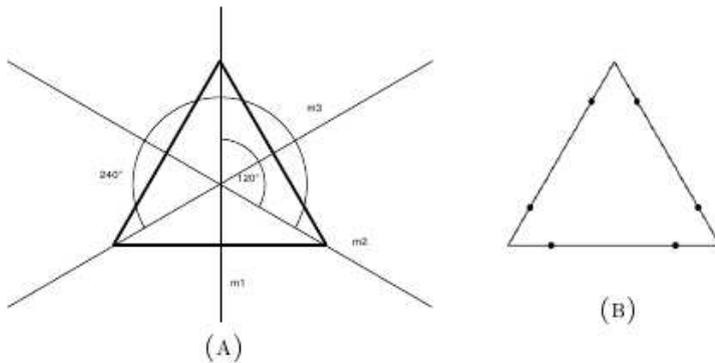


Figura 21: Ejemplos de isometrías (A) y órbita en una figura (B), un triángulo equilátero.

Los grupos de simetría de frisos y mosaicos periódicos **son grupos discretos**, pues el hecho de exigir la existencia de una traslación de longitud mínima implica que las figuras correspondientes cumplen la condición de que es posible trazar un círculo centrado en cada punto P de la figura de manera que no haya ningún punto de la órbita de P en el interior de dicho círculo. Ello descarta considerar como friso o mosaico ciertas figuras, por ejemplo, las formadas por una o varias bandas paralelas, donde todos los puntos de una recta son homólogos, por lo que no hay una traslación de longitud mínima.

Pero, la detección de la rejilla no es la única información necesaria para describir el contenido de una imagen en base a un grupo de simetría, puesto que un mismo grupo de simetría se dan varias posibles combinaciones de direcciones o rejilla. Dentro del paralelogramo, en la mayoría de grupos, se pueden encontrar simetrías que permiten descomponer este en una región de menor tamaño. A modo de resumen, estas se muestran en la fig. 22, donde se representa una posible instanciación de sus celdas unidad o paralelogramos fundamentales de cada uno de los diecisiete grupos de simetría en el plano incluyendo su notación estándar. En estas representaciones figura la situación de los ejes de simetría de reflexión (especular y con desplazamiento) y los centros de las simetrías de rotación de orden n que los identifica.

Los mosaicos periódicos del plano pueden clasificarse en **diecisiete grupos**, dependiendo de las simetrías que posean. Se denominan grupos de simetría del plano y también grupos cristalográficos planos o, en inglés, **wallpaper groups**. Para identificar, cuál de los diecisiete grupos de simetría en el plano se dan en un caso concreto (Gilsanz, 2011) describe un proceso manual y cita que existen "algoritmos que guían mediante preguntas muy concretas en esta tarea de identificación del grupo de simetría". Todos los autores consultados, al analizar y describir los GSP, plantean cuáles son las isometrías características de cada grupo. Lo interesante es que apenas existe coincidencia en cuanto

a las isometrías generadoras del grupo. (Coxeter, 1984) en este aspecto se mantiene prudente al indicar que las isometrías que apunta como generadoras de un GSP son “posibles”, es decir que pueden ser las que él indica u otra combinación. El estudio de (Martin, 1982) acerca de los GSP parte de las consideraciones geométricas que deben verificarse cuando existen unas determinadas isometrías, por lo tanto estas propiedades geométricas deben de considerarse como inherentes a cada grupo. Así mismo, aunque no de manera explícita, los diferentes gráficos, de cada uno de los autores estudiados, representativos de cada GSP, llevan implícitos una serie de medidas y posiciones relativas de las isometrías respecto al PF. El trabajo de (Valor, 2000) compara estos trabajos, señalando sus singularidades y propone un superconjunto de las definiciones de los GSP.

La notación cristalográfica (Schattschneider, 1978) consiste en cuatro símbolos que identifican la CU. Usualmente se elige una cuyos centros de rotación de más alto orden estén en los vértices. En un par de casos se ha escogido una celda centrada para que los ejes de reflexión sean normales a uno o a los dos lados de la celda. El eje X es el lado izquierdo de la celda y se supone dirigido hacia abajo. La interpretación de este código internacional es, de izquierda a derecha, como sigue:

- El primer símbolo es la letra p ó c , que denota que se ha escogido la celda primitiva o la centrada.
- El segundo es un entero n denota el mayor orden de rotación de la celda.
- El tercer símbolo denota un eje de simetría normal al eje X : m (reflexión especular), g (reflexión con deslizamiento), 1 indica que no hay eje de reflexión.
- El cuarto símbolo denota si existe un eje de simetría con un ángulo α respecto al eje X , su valor depende de n . Para valores de n de 1 ó 2, α es 180° y para 4 es de 45° y para 3 ó 6 es 60° . Este símbolo toma los mismos valores que el tercero: m, g ó 1 .

De esta forma la notación extendida y la abreviada se corresponden como se muestra en la tabla 2. Excepto en el caso de P3M1 y P31M, todos los demás se puede abreviar sin perder información. Esta forma corta es la más utilizada.

p111	c1m1	p1m1	p1g1	p211	c2mm	p2mm	p2mg	p2gg	p311	p3m1	p31m	p411	p4mm	p4gm	p611	p6mm
p1	cm	pm	pg	p2	cmm	pmm	pmg	pgg	p3	p3m1	p31m	p4	p4m	p4g	p6	p6m

Tabla 1: Notación internacional extendida y abreviada para los grupos cristalográficos en el plano.

Referente a los trabajos de clasificación existentes, la notación y terminología no está normalizada. Un mismo término se utiliza por diferentes autores para denominar conceptos distintos. Schattschneider pone de manifiesto una desafortunada confusión de los grupos cristalográficos p31m y p3m1 por parte de varios autores y aporta una tabla de equivalencia entre siete distintos criterios o puntos de vista que dan lugar a diferentes denominaciones de los grupos. (Aarts, 2008) ofrece un análisis comparativo entre los trabajos de varios autores: (Shubnikov y Kopstik, 1974), (Martin, 1982), (Grünbaum y Shephard, 1987) y (Schattschneider, 1978), que pone de manifiesto diferencias en los esquemas de los distintos grupos de simetría aportados por ellos. Asimismo, el concepto de región mínima recibe distintas denominaciones como célula, célula unidad, célula primitiva, región fundamental y región generadora, y el concepto región unidad traslacional también se conoce como unidad de retícula. Por otro lado, Grünbaum hace también referencia a las diferentes denominaciones y definiciones de los conceptos básicos en los trabajos precedentes, y en particular se refiere al concepto de teselación (en inglés *tiling*), diferenciándolo del concepto de patrón (en inglés *pattern*).

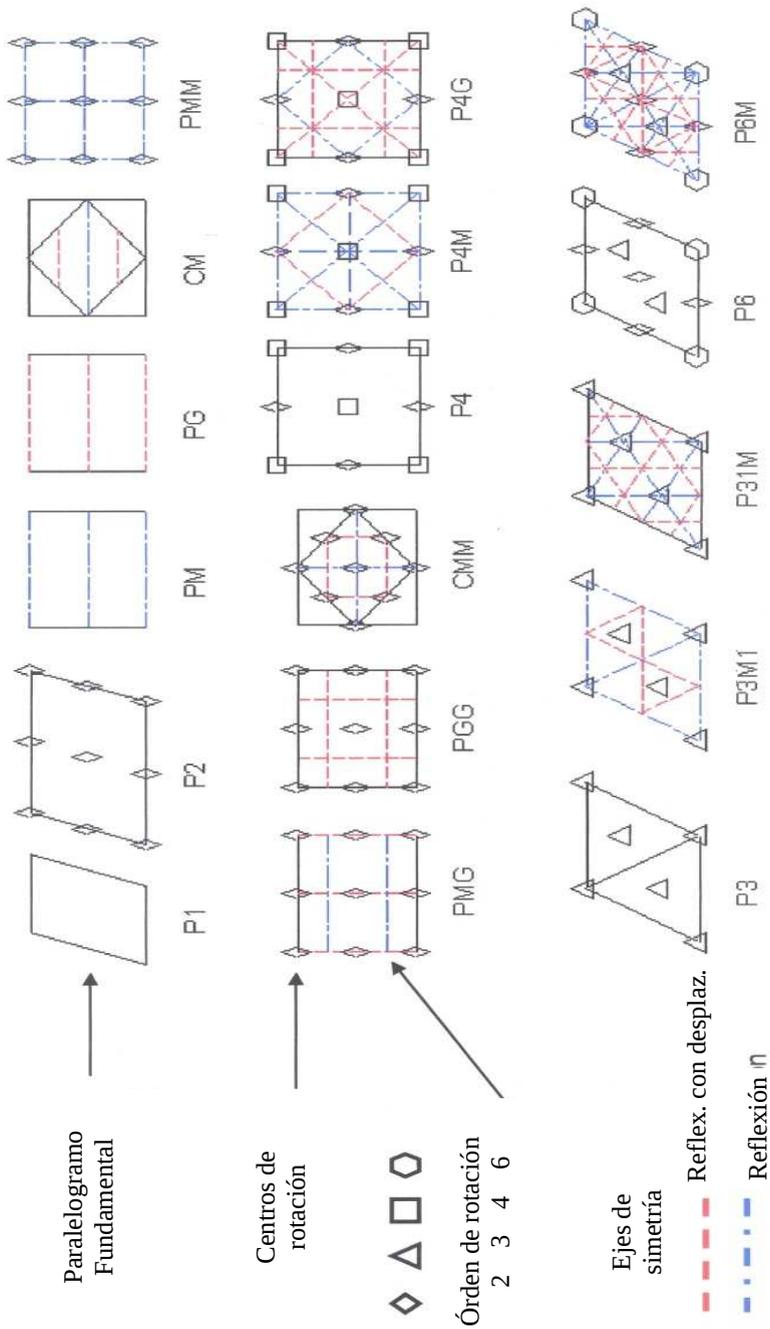


Figura 22: Representación gráfica de los diecisiete grupos de simetría en el plano incluyendo su notación estándar y la situación de las isometrías que los caracterizan. Extraído de (Schattschneider, 1978).

Dada esta indeterminación, en esta tesis se ha optado por seguir usando la descripción de Schattschneider, fig. 22, que ha sido utilizada en los trabajos similares anteriores a este para poder evaluar los resultados, comparándolos con aquellos.

3.3 Metodología aplicable a la detección de periodicidad

En cuanto a la determinación de la periodicidad y su correspondiente simetría en las imágenes, se han venido empleando diferentes técnicas para abordar el problema de la periodicidad en 2D, como se describe en detalle en (O'Mara, 2002). Podemos hablar de diferentes enfoques para definir este concepto y, así, en la literatura encontramos tres grandes planteamientos para abordar esta cuestión: métodos basados en el dominio de la imagen o en el dominio de la frecuencia,

En los **métodos basados en el dominio de la imagen** las relaciones espaciales de los píxeles ha llevado a establecer el concepto de regularidad de una textura. Para calcularlo se ha recurrido a diferentes técnicas que hemos agrupado en cuatro categorías: estadísticos, basados en el uso de momentos, segmentación de la textura y sintácticos.

Los métodos estadísticos, como las matrices de coocurrencia o la autocorrelación, aplicados a los valores de luminancia de cada píxel o funciones de determinación del contraste que tienen como desventaja la sensibilidad al ruido. Bajo estas ideas (Liu et ál., 2004a) presenta un sistema de clasificación que se sostiene también sobre la teoría de grupos de simetría.

Los momentos generalizados o axiales (Di Gesù y Valenti, 1995), proponen un operador basado en la transformada discreta de simetría (*Discrete Symmetry Transform* o DST) como una definición de esta en base a lo que sucede alrededor de un eje (en general, de una curva) y que da pie a un operador para medir la simetría local en imágenes de niveles de gris. Otras definiciones de momentos también utilizados son los propios del procesamiento de texturas basados en cálculo de características sobre estas, como las de *Wold* (Liu y Picard, 1994) o *Tamura* (Lin et ál., 2001), donde se habla de propiedades como *coarseness*, *contrast*, *directionality*, *regularity*, *line-likeness* o *roughness*.

La textura como forma de análisis de su contenido ha dado pie a la aparición de algunos “operadores” para cuantificarla, como los algoritmos de esqueletización (JAI) o el MAT (*Medial Axes Transform*). Bajo la consideración de que la simetría (aunque suela ser considerada binaria) es de naturaleza continua, ya que existen valores intermedios que denotan “cantidades” intermedias de simetría Zabrdodsky, (Zabrdodsky, 1993), define la distancia de simetría (*Symmetry Distance*, SD) como el mínimo esfuerzo para transformar un objeto en su simétrico. Se aplica a imágenes considerando estas como mapas de altura en 3D y considerando cuál es el eje de reflexión de la superficie que minimiza la medida.

Métodos sintácticos o constructivos, por ejemplo, el uso de la transformada de Hough (Valor, 2002), para lo cual será necesario binarizar la imagen o hacer uso de técnicas de vectorización; en cualquier caso se requiere una precisa etapa previa de segmentación. Todos estos procesos son altamente complejos por ser difíciles de parametrizar en contextos abiertos. El uso de la transformada de trazos o *Trace transform* (Kadyrov, y Petrou, 2001) es la generalización de la de Radon (cuyo caso más simple es la de Hough) permite su aplicación en imágenes no binarias, pero adolece también de falta de localización espacial.

En cuanto a los **métodos basados en el dominio de la frecuencia**, se puede definir la periodicidad como la cualidad de que algo ocurra a intervalos regulares y su medida es la frecuencia. Para

calcularlo se puede recurrir a dos tipos de técnicas, que trasladan el problema al dominio de la frecuencia o al espacio-frecuencial.

Métodos basados en el uso de la transformada de Fourier y el **estudio del espectro de frecuencias** de la señal. Aunque esta carece de una falta de correspondencia espacial con la periodicidad que se puede extraer a partir del análisis de las frecuencias existentes. Por ese motivo variantes a esta como la STFT (*Short Time Fourier Transform*) se han venido empleando. En estos casos la necesidad de establecer un valor de “ancho de ventana” para fijar espacialmente los resultados de la transformada es un elemento demasiado restrictivo. La fig. 23a, muestra gráficamente la relación señal y tamaño de la ventana de exploración. Estas técnicas establecen una división regular del dominio espacio-temporal.

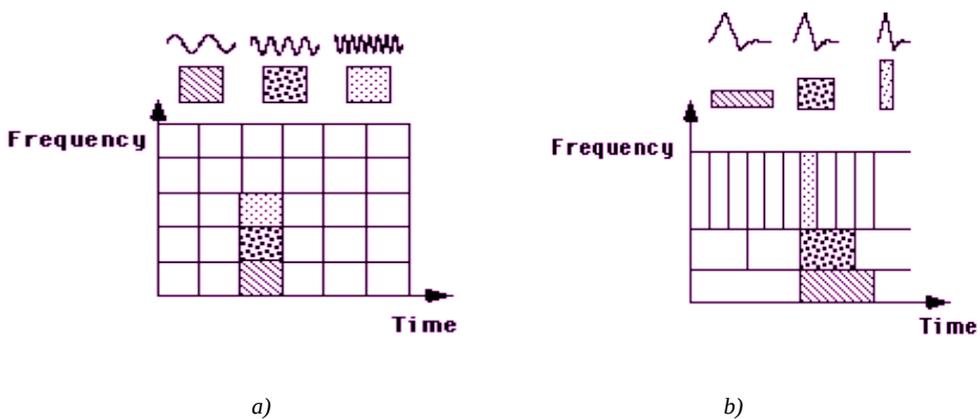


Figura 23: División del dominio espacio-frecuencia a) regular y b) multiescala. Sobre las gráficas se muestran ejemplos de las componentes utilizadas para realizar cada transformación. Figuras extraídas de (Graps, 1995)

Métodos basados en el **dominio espacio-frecuencial**, fig. 23b, que nos ofrecen la precisión respectiva de los dos anteriores, junto a una mayor inmunidad al ruido, inherente a los procesos de imagen en color y al campo donde se quiere aplicar. Así en las propuestas que incluye el estándar MPEG-7 (Sookocheff, 2004) se propone su uso en clasificación utilizando una medida de *structuredness*, que habla de periodicidad en texturas y que está siendo implementada con *wavelets* (de Gabor mayormente en este caso) u otras junto a esquemas multiresolución en el caso de JPEG2000.

Para abordar esta perspectiva, se pueden utilizar métodos derivados de detección de elementos característicos: como los del área de *Feature points*. (Kovesi, 1996), (Kovesi, 1999), (Kovesi, 2002) y (Kovesi, 2003), o los basados en el modelo de energía local y la congruencia de fase (Aw et ál., 1998) y (Robbins, 1996). En esta línea se encuentran los desarrollos de (Kovesi, 1997) que aunque no ofrece un camino cerrado para determinar la presencia de simetrías globales, ni tampoco se describe una aplicación final (dentro de las propias referencias del autor), será utilizado en las primeras etapas que aquí se exponen.

En esta tesis, proponemos una aproximación diferente. En lugar de utilizar los valores de niveles de gris para encontrar la repetitividad entre puntos de la imagen, **utilizaremos un espacio de**

simetrías cuyos valores dependen de las simetrías locales en el entorno de vecindad de cada punto de la imagen. Puesto que las imágenes regulares tienen fuertes simetrías inherentes, los valores en este nuevo espacio resaltarán con claridad y serán menos dependientes del contraste y del ruido en la imagen

Esta transformación del dominio de la imagen al de un espacio de simetrías se realiza con la discrepancia (o congruencia) de fase entre componentes frecuenciales locales de cada punto de la imagen. Estas componentes frecuenciales son calculadas en diferentes orientaciones y escalas utilizando filtros de *wavelets*. El análisis de fase permite la detección automática de estas simetrías localmente orientadas y, así, se obtendrá un valor alto de entropía o simetría cuando estime la orientaciones y la escala correspondientes a una periodicidad o distancia entre dos situaciones similares de las simetrías que aparezcan. Si aparecen muchas simetrías locales a diferentes orientaciones para la misma periodicidad, la confianza en ese valor de periodicidad se incrementará. De forma resumida, el proceso obtiene la periodicidad de la señal a partir de la identificación de dos simetrías locales que aparecen de manera repetida en el nuevo espacio.

Profundizaremos en las técnicas que utilizamos como punto de partida antes de ver nuestras propuestas que utilizarán tanto métodos estadísticos como en el dominio de la frecuencia y del espacio. No se incluyen resultados del grupo de métodos compositivos o sintácticos porque es necesaria la intervención del usuario en la determinación de los parámetros del proceso y nuestro planteamiento busca ser autónomo.

3.3.1 Autocorrelación

La correlación se utiliza para encontrar patrones periódicos, incluso en señales con ruido, caracterizar patrones similares en compresión de datos y medir la resolución espacial de un sistema de adquisición de imágenes con ruido blanco en la entrada. Para el caso 2D, la correlación de dos imágenes puede ser calculada como muestra la ec. 2 y se puede ver un resultado típico en la fig. 24. Esta figura muestra el resultado de correlar una imagen con una máscara (fila superior). El resultado de la autocorrelación se ha etiquetado como ACF (*AutoCorrelation Function*) y se muestra (en la fila inferior) como una imagen y como una superficie en 3D para denotar que en el punto de coordenadas (x_{acf}, y_{acf}) se observa el valor más alto que corresponde al mejor encaje de la máscara en la figura.

$$Imagen \cdot Mascara(x, y) = \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N Imagen(i, j) Mascara(x+i, y+j) \quad (2)$$

Cuando la correlación se aplica a una señal y variantes desplazadas de esta se denomina **autocorrelación**. Esta se puede ver como una función que mide la similitud entre un conjunto de muestras y sus versiones desplazadas, siendo el desplazamiento el parámetro variable de esta función. Una alta correlación indica que existe periodicidad en la señal con el valor correspondiente al desplazamientos en las dos direcciones (filas y columnas). Se puede obtener el resultado con todos los desplazamientos posibles correlando la imagen completa, En ese caso, el resultado de la autocorrelación, es un **mapa de autocorrelación**, una imagen tal que cada valor de sus píxeles (x', y') representa lo similar que es una imagen con una versión de sí misma desplazada en las dos posibles direcciones x' e y' .

Para asegurar que se puede constatar la repetición, las imágenes de entrada deben contener, al menos, dos repeticiones completas del motivo. Por lo que podemos utilizar la mitad superior izquierda para convolucionar con la imagen original sin problemas de bordes.

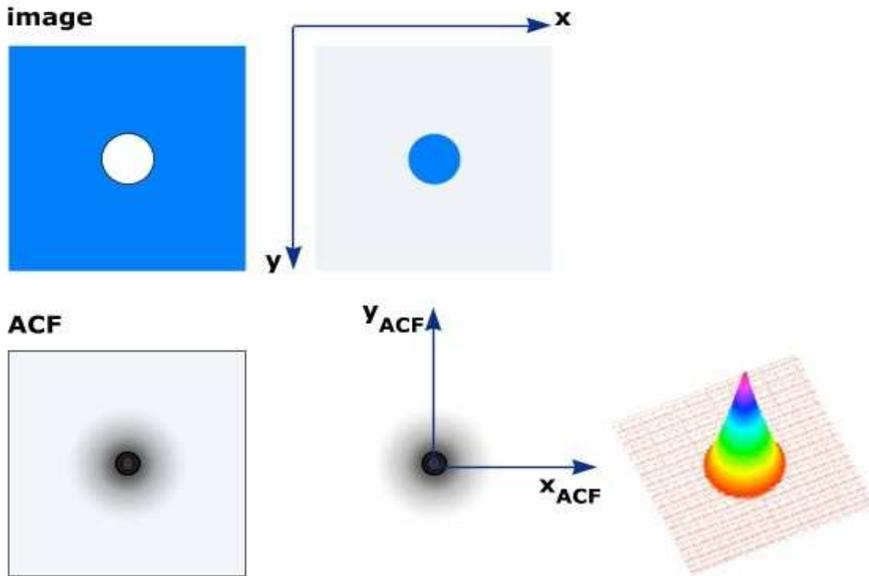


Figura 24: Ejemplo gráfico de la correlación cruzada de una imagen y una máscara.

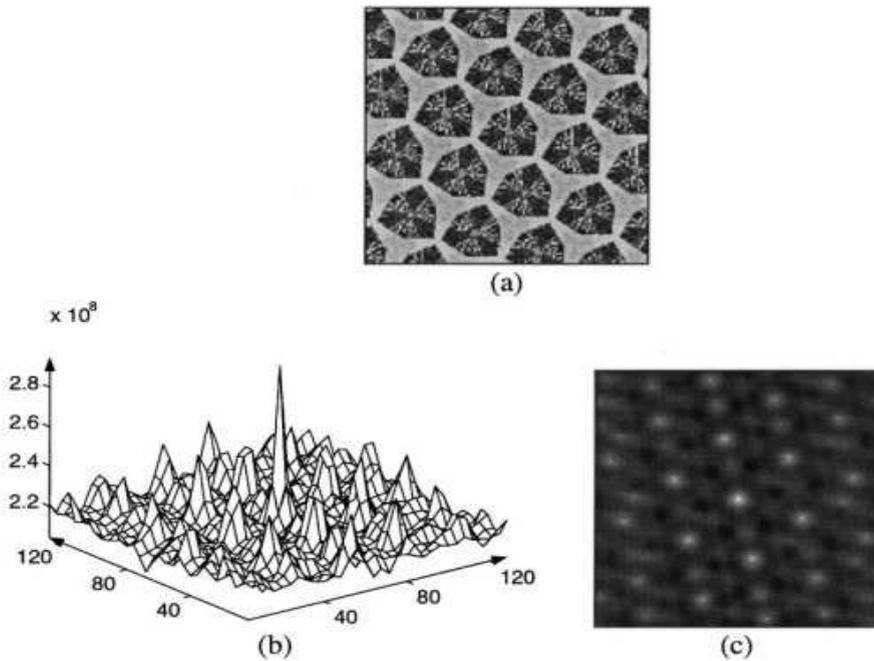


Figura 25: Resultado de la autocorrelación aplicado a una imagen regular: (a) imagen original; (b) la autocorrelación en una vista 3D; (c) la autocorrelación vista como una imagen en niveles de gris.

Para imágenes de contenidos regulares, véase fig. 25, cabe esperar obtener un mapa que, como se observa en la fig. 25b, muestra la repetitividad de un cierto patrón como la aparición de picos en este mapa de autocorrelación.

Utilizaremos la autocorrelación para encontrar los principales máximos locales, como los picos del mapa de la autocorrelación. De las relaciones espaciales entre los máximos se pueden obtener los vectores que las definen y, con estos, proponer la geometría del enrejado observable en la imagen. Los problemas de esta técnica vienen dados por la determinación del valor de umbral que permite definir que puntos cabe conectar, puesto que en muchas situaciones, por el ruido en la imagen, los diferentes picos no tienen el mismo valor numérico y se pueden confundir con otros máximos locales o puntos cercanos a los picos. Hablaremos de esta problemática al exponer el uso de la autocorrelación para la detección de la periodicidad en el capítulo 4.

3.3.2 Análisis de fase

Los métodos espaciales adolecen de la necesidad de establecer umbrales. Por su parte, las técnicas en el dominio de la frecuencia determinan el valor de periodo existente entre las frecuencias presentes en la imagen pero no son capaces de asociar una posición espacial en la imagen donde se da esta situación. Para ello sería necesario recurrir a las versiones locales de estos métodos (como la STFT respecto de la FFT), que obligan a fijar un tamaño de ventana de inspección que habría que determinar para adaptarse a las características de cada imagen en particular.

Por ello, este punto está enfocado a definir nuestra aportación en cuanto a la definición de una metodología para la detección de la periodicidad de una imagen: un método capaz de trabajar en un dominio tanto espacial como frecuencial. Es un ejemplo de método piramidal y, dentro de estos, la transformada *wavelet* se erige como herramienta de trabajo. Este apartado constituye una revisión de los conceptos y la notación de esta metodología, para pasar después a ajustar esta al propósito de la presente tesis.

El siguiente apartado describe el algoritmo empleado, empezando por situar lo obtenido directamente con la técnica y los valores genéricos originales, avanzando por la discusión de los parámetros del proceso y cómo se pueden ajustar a cada imagen en función de lo que habíamos aprendido anteriormente de los métodos multiresolución, de las imágenes que se disponían y de la teoría de grupos de simetría.

El método y la implementación de análisis de fase que utilizamos es de (Kovesi, 1997). Su trabajo se enmarca en la búsqueda de medidas que describan la relevancia de puntos característicos de una imagen como los bordes (*edges*). Estas medidas deben ser adimensionales, absolutas e invariantes con respecto a los condicionantes de las imágenes (como por ejemplo, iluminación y escala). Los problemas de las implementaciones existentes llevan a Kovesi a desarrollar una nueva reformulación de la *congruencia de fase* que dará pie a la de **simetría de fase** (en adelante **SDF**) que utilizamos en esta tesis.

Las ideas de Kovesi parten del modelo de energía local (utilizado en detección de puntos característicos) que postula que las características son percibidas en puntos de la imagen donde las componentes de Fourier son máximas en fase o puntos donde se da la **congruencia** máxima de la imagen. Por ejemplo, al mirar a las series de Fourier que descomponen a una onda cuadrada, véase fig. 26, todas las componentes de Fourier son ondas senoidales que están exactamente en fase en el punto de 0 y 180 grados. El eje vertical muestra el punto de máxima congruencia de fase que en un caso es de asimetría y en el otro de simetría. En ambos diagramas se han dibujado unos pocos de los primeros términos de la serie de Fourier con trazos discontinuos y la suma de estos términos en línea continua. Obsérvese como las componentes Fourier están en fase en los flancos en el caso de

la onda cuadrada. En todos los otros puntos de la onda cuadrada la congruencia de fase es baja. En los picos y valles de la onda triangular sucede lo mismo: se encuentran los valores máximos de la congruencia de fase en los puntos de ángulo 90 y 270 grados.

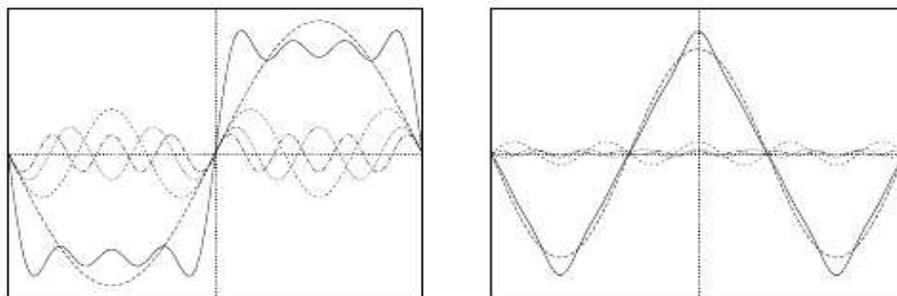


Figura 26: Descomposición de una señal cuadrada y una triangular en sus series de Fourier. El eje vertical muestra el punto de máxima congruencia de fase: en un caso es de asimetría (a) y en el otro de simetría (b).
Extraída de (Kovesi, 1997).

Casi todo el trabajo se concentra alrededor de encontrar los puntos de congruencia de fase máxima. Sin embargo, la energía local es una cantidad dimensional que depende del contraste local. Es imposible especificar de antemano qué nivel de energía local corresponde a una situación significativa. Aquí nos concentramos en el cálculo de la congruencia de fase en sí, como una medida adimensional. Así, los valores de congruencia variarán entre un máximo de 1 (cuando indique que es muy significativa) descendiendo hasta cero (para indicar que no es significativa). Esto permite especificar un umbral antes de ver el contenido de la imagen.

El modelo de energía local este está basado en:

- La definición de la **congruencia de fase** en función de los términos de la expansión en series de Fourier. En un punto x de una señal se expresa como muestra la ec. 3.

$$PC(x) = \frac{\max_{\Phi(x) \in [0, 2\pi)} (\sum_n A_n \cos(\Phi_n(x) - \bar{\Phi}(x)))}{(\sum_n A_n)} \quad (3)$$

- Que los puntos de congruencia de fase máxima pueden ser calculados de manera equivalente a partir de la búsqueda de picos en el modelo de energía local. En el caso unidimensional, la energía se define como en la ec. 4

$$E(x) = \sqrt{F^2(x) + H^2(x)} \quad (4)$$

La congruencia de fase es directamente proporcional a la energía local. Se formula a partir de la acumulación para todas las orientaciones de la energía local, o lo que es lo mismo a partir de la ponderación de la suma de las amplitudes de Fourier, ec. 5.

$$E(x) = PC(x) \sum_n A_n \quad (5)$$

Así, la función de energía local es directamente proporcional a la función de congruencia de fase, de modo que los picos de energía local corresponderán a picos de congruencia de fase. Las relaciones entre congruencia de fase, energía y la suma de las amplitudes de las componentes de Fourier se pueden ver geoméricamente en la fig. 27 que muestra, en base a la representación polar de los

números complejos, las componentes de Fourier sumadas. La proyección en el eje real, $F(x)$, representa la señal sin la componente de continua, mientras que la proyección en la vertical, $H(x)$ representa la función de Hilbert. La fase, Φ , y la energía total, $E(x)$, en ese punto son el ángulo y el módulo del vector resultante. Se puede observar que $E(x)$ es $\sum_n A_n \cos(\Phi_n(x) - \bar{\Phi}(x))$. Esta disposición ilustra que la energía se calcule como la suma de las amplitudes y la congruencia de fase a partir de las fases de la transformada de Fourier de la señal.

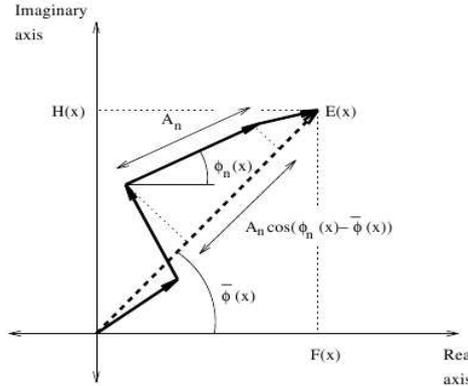


Figura 27: Relación entre fase y energía. Extraída de (Kovesi, 1997).

Kovesi, utiliza la transformada wavelet para obtener información local de frecuencia de una señal y wavelets de Gabor para la implementación de los filtros se puede obtener la amplitud como la ec. 6 y la fase a partir de la ec. 7.

$$A_n = \sqrt{e_n(x)^2 + o_n(x)^2} \tag{6}$$

$$\phi(x) = \text{atan2}(e_n(x) + o_n(x)) \tag{7}$$

Para calcular la congruencia de fase (*Phase Congruency*, que denota por PC), se ha de considerar que:

- Hay que evitar los puntos no definidos de esta ecuación (la división por cero).
- El ruido presente en la señal puede disimular el valor máximo y falsear el resultado.
- La congruencia de fase es tanto mayor cuanto mayor sea el rango de frecuencias que suceden en el punto en cuestión.

En ese sentido, el autor propone un valor T (como estimación del ruido), una función W como estimación del cardinal del conjunto de frecuencias implicado, una estimación del valor de energía en función del valor de ángulo promedio y un valor infinitesimal *epsilon* (ϵ) que permita evitar la indeterminación del cálculo. Con lo que resulta una nueva formulación de la congruencia de fase como en la ec. 8 que, en dos dimensiones, se reescribe como la ec. 9.

$$PC(x) = \frac{W(x) * |(E(x) - T)|}{\sum_n A_n} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 PC_2(x) &= \frac{\sum_n W(x) * [E(x) - T]}{\sum_n A_n} = \\
 &= \frac{\sum_o \sum_n W_o(x) * [A_{no}(x) \Delta \phi_{no}(x) - T]}{\sum_o \sum_n A_{no} + \epsilon'}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Se observa que los puntos característicos en las imágenes son **transiciones** (desde bordes hasta bandas) en los que la transformada de Fourier tiene sus componentes en fase con valores de congruencia de fase numéricamente altos. En cambio, los puntos con simetría que también estarán en fase, tienen valores pequeños de congruencia.

Así introduce dos cantidades adimensionales, la congruencia de fase y la simetría de fase (*Symmetry*, que denota por *Sym*), que proporcionan medidas absolutas de la relevancia de esos puntos característicos. El uso de la congruencia de fase para etiquetar esas características tiene ventajas sobre los métodos basados en gradiente relativas a su invarianza a los cambios de brillo y contraste en las imágenes. Además no requiere conocimiento a priori o segmentación de la imagen, lo que permite utilizar umbrales que se pueden aplicar a un amplio rango de imágenes.

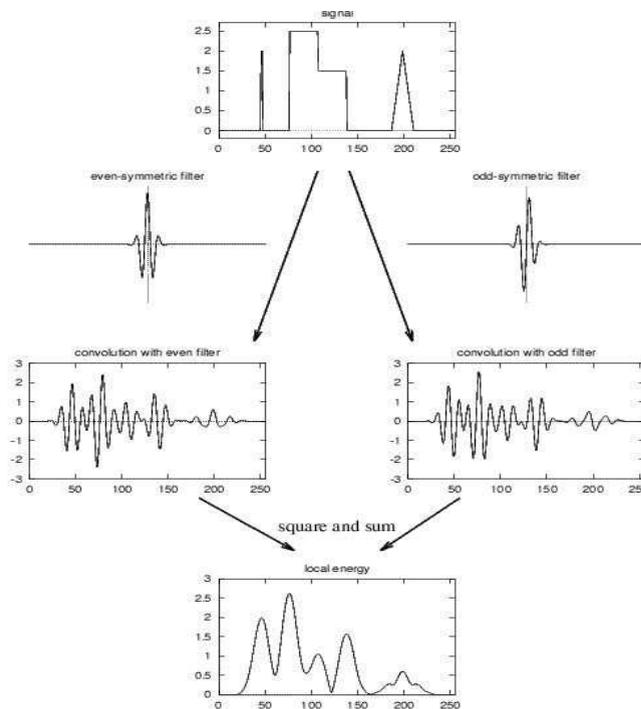


Figura 28: Resultado de aplicar los filtros en cuadratura a una señal 1D.

Kovesi propone obtener esas características en base a la determinación de energía a nivel local. Su método se basa en el uso de una aproximación multiresolución basada en un par de filtros de *wavelets* Gabor (M^e, M^o), véase fig. 28, que acumulen las respuestas que se obtienen para cada

escala (s), y orientación (o), obtenida utilizando la ec. 10.

$$[ef_{s,o}(x), of_{s,o}(x)] \leftarrow [I(x) * M_{s,o}^e, I(x) M_{s,o}^o] \quad (10)$$

Los valores $ef_{s,o}(x)$ (*even*) y $of_{s,o}(x)$ (*odd*) pueden verse como la partes real e imaginaria de los valores complejos de las componentes de frecuencia de la transformada de Fourier. Estos valores permiten reescribir el contenido de una imagen de grises como una combinación de componente de fase (A_s) y de orientación (Φ) calculadas como en la ec. 11.

$$\begin{aligned} A_{s,o}(x) &= \sqrt{ef_{s,o}^2(x) + of_{s,o}^2(x)} \\ \Phi_{s,o}(x) &= \text{atan2}(ef_{s,o}^2(x) + of_{s,o}^2(x)) \end{aligned} \quad (11)$$

La medida de Simetría se calcula con la expresión del la ec. 12. Es este un valor de simetría local al combinar los valores de las componentes de fase y orientación obtenidas de las respuestas a los filtros sobre varias escalas y orientaciones.

$$Sym(x) = \frac{\sum_{o=1}^O \sum_{s=1}^S [A_{s,o}(x) [|\cos(\Phi_o(x))| - |\sin(\Phi_o(x))|] - T_o]}{\sum_{o=1}^O \sum_{s=1}^S A_{s,o}(x) + \epsilon} \quad (12)$$

Donde T_o la media de los ángulos (las fases), un término de compensación de ruido que estime el ruido en la imagen y ϵ es una pequeña constante para evitar situaciones en las que no está definida esta función debidas a valores muy pequeños de la amplitud, esto es para evitar las divisiones por cero. La ec. 13 puede ser reescrita como en la ec. 13, lo que expresa que el valor de simetría es la diferencia entre las respuestas, en valor absoluto, de los filtros. Este valor varía en el rango [-1 .. +1] y es prácticamente lineal con la desviación de fase. Se puede parametrizar para buscar solo un tipo de transiciones cambiando el término que define la respuesta combinada de los filtros.

$$Sym(x) = \frac{\sum_{o=1}^O \sum_{s=1}^S [A_{s,o}(x) [ef_{s,o}^2(x) + of_{s,o}^2(x)] - T_o]}{\sum_{o=1}^O \sum_{s=1}^S A_{s,o}(x) + \epsilon} \quad (13)$$

Este parámetro recibe el nombre de **polaridad**. Utilizando la expresión para un solo tipo de transición (polaridad positiva) se obtiene un rango más amplio de valores de simetría, lo que facilita la búsqueda de valores similares. Con este término es posible escoger la dirección de las transiciones:

- Hacia puntos de mayor brillo $-ef_{s,o}^2(x) - |of_{s,o}^2(x)|$ o polaridad positiva.
- Hacia puntos oscuros $+ef_{s,o}^2(x) - |of_{s,o}^2(x)|$ o polaridad negativa.
- En los dos sentidos $+ef_{s,o}^2(x) - |of_{s,o}^2(x)|$ o no polaridad.

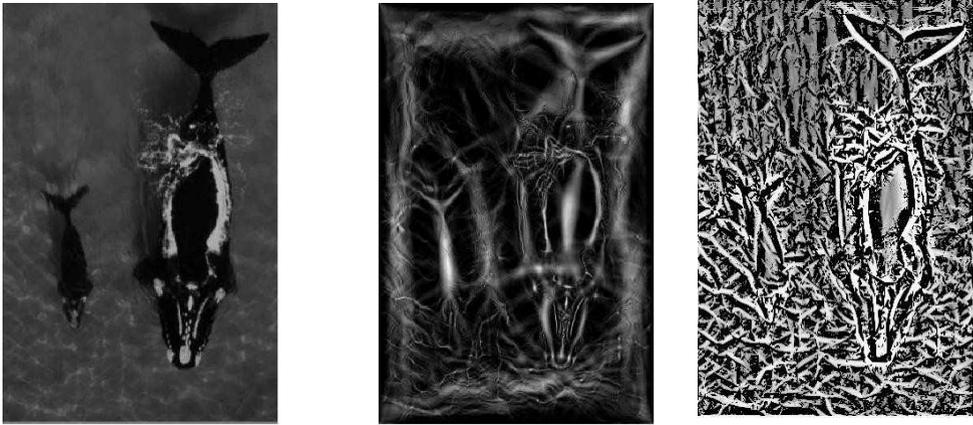


Figura 29: Imagen original, simetría de fase y congruencia de fase (ecualizada). Extraída de (Kovesi, 1997).

La fig. 29 muestra un ejemplo en el que se muestra gráficamente el significado visual de la congruencia y la simetría de fase. El autor no realiza ningún proceso más sobre estos resultados. Al aplicarlo sobre imágenes repetitivas se obtienen los resultados que se muestran en la fig. 31 en la que observa que hay mucha información condensada en estos cálculos para determinar el papel de los puntos característicos por propiedades de simetría de una imagen.

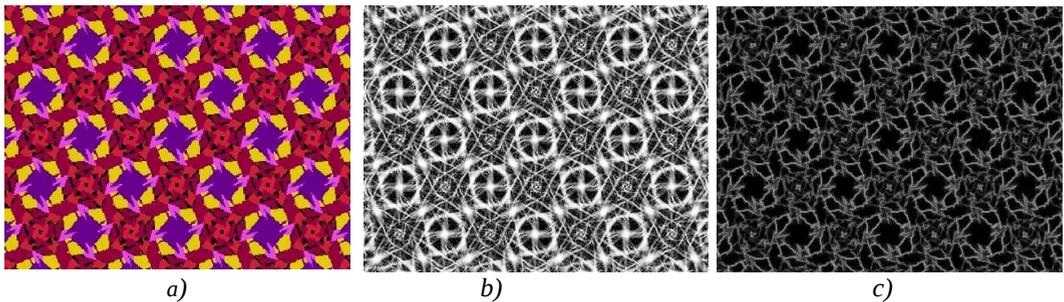


Figura 30: Resultado de aplicar el análisis de fase: a) imagen original, b) simetría de fase y c) congruencia de fase (ecualizada).

3.4 Clasificación de imágenes repetitivas

En este punto vamos a estudiar la manera en que se emplea la información de simetrías presentes en una imagen para clasificar imágenes de contenido repetitivo de forma computacional. En el campo del diseño se habla de catalogación para nombrar a esta etapa, denotando así el hecho de hacer un listado de muestras con relación a un cierto motivo; tanto si es con el fin de realizar un catálogo impreso o simplemente de enumerar las imágenes que cumplen esa relación en una cierta proporción. Este apartado recoge los problemas relacionados con los algoritmos existentes de clasificación que se pueden encontrar más citados en la literatura. Algunos de estos métodos son examinados en profundidad en el trabajo de (Valor, 2002), la conclusión del cual es que todos ellos tienen críticas de falta de completitud. Ese es el motivo esgrimido por casi todos los autores para

proponer su propio diseño, aunque en ningún caso se da una prueba formal. En el resto de los casos que no argumentan la falta de alguna consideración en el algoritmo de otros, la razón esgrimida es la sencillez o la rapidez del proceso.

El estado del arte de estos algoritmos se ha separado en dos grandes grupos: algoritmos que hemos denominado clásicos (basados en el uso de heurísticas) y aproximaciones computacionales.

3.4.1 Algoritmos clásicos

Los algoritmos clásicos para catalogar mosaicos regulares son procedimientos a utilizar por usuarios humanos basados en heurísticas. Al respecto se sugiere consultar los trabajos de Valor (Valor, 2002), Alsina (Alsina y Trillas, 1992), Grunbaüm (Grunbaüm y Shepard, 1987) y Schattschneider (Schattschneider, 1978). Los analizados en este trabajo parten de la identificación del paralelogramo (motivo) o rejilla, y son debidos a: Rose y Stafford, Schattschneider, Wikipedia, Brian Sanderson (o su equivalente de Dror Bar-Natan). Todos los métodos se basan en la observación de las **simetrías interiores** del PF y en la valoración de si se da o no un conjunto de aquellas distintivo de cada grupo a procesar.

Están formulados como árboles de decisión cuyas ramas son escogidas en función de preguntas que el usuario ha de responder mirando el diseño. Su gestación tiene una componente empírica muy alta. Las ambigüedades observadas en sus formulaciones impone una complejidad elevada a la implementación de estos “conjuntos de reglas” como aplicaciones para un computador.

Estos “diagramas” son, en esencia, una condensación de las características en bruto, una selección y extracción de las características relevantes. De esta forma, el usuario, recorre el grafo (que es un árbol binario) hasta alcanzar la clasificación. Aunque se ha hecho una conversión de ellos con un lenguaje de programación, se han encontrado etapas descritas tan ambiguamente que no es posible implementarla de forma computacional, sino solamente heurística por parte de un observador humano.

Los algoritmos existentes en la literatura se articulan alrededor de un número finito (generalmente 3tre) de pasos o preguntas a las que el usuario humano ha de responder de manera binaria. Aunque la complejidad y ambigüedad de las formulaciones hace que necesiten un proceso complejo. Veamos algún ejemplo:

- ¿Existen ejes de simetría?
- ¿Hay ejes de simetría que no sean paralelos?
- ¿Hay ejes de deslizamiento que sean perpendiculares a los de simetría?
- Considerar el menor ángulo de giro, no negativo, que pertenezca al grupo.
- ¿Hay un eje de rotación no sobre un eje de reflexión especular?
- Si el máximo orden de rotación es tres y hay una reflexión especular ¿hay un centro de rotación fuera de la reflexión especular?

De todos los autores enunciados, se ha escogido el test de Schattschneider, fig. 31, por ser utilizado en otros trabajos y poder ser así comparables los resultados que se obtengan. Dado que las clases y sus representantes están bien establecidos, hemos considerado la utilización directa de los prototipos identificados por esta autora. En este también se han observado algunas ambigüedades, como se da en todos los grupos que pueden tener un PF debido a más de un tipo de rejilla.

RECOGNITION CHART FOR PLANE PERIODIC PATTERNS

Type	Lattice	Highest Order of Rotation	Reflections	Non-Trivial Glide Reflections	Generating Region	Helpful Distinguishing Properties
<i>p1</i>	parallelogram	1	no	no	1 unit	
<i>p2</i>	parallelogram	2	no	no	1/2 unit	
<i>pm</i>	rectangular	1	yes	no	1/2 unit	
<i>pg</i>	rectangular	1	no	yes	1/2 unit	
<i>cm</i>	rhombic	1	yes	yes	1/2 unit	
<i>pmm</i>	rectangular	2	yes	no	1/4 unit	
<i>pmg</i>	rectangular	2	yes	yes	1/4 unit	parallel reflection axes
<i>pgg</i>	rectangular	2	no	yes	1/4 unit	
<i>cmm</i>	rhombic	2	yes	yes	1/4 unit	perpendicular reflection axes
<i>p4</i>	square	4	no	no	1/4 unit	
<i>p4m</i>	square	4	yes	yes	1/8 unit	4-fold centers on reflection axes
<i>p4g</i>	square	4	yes	yes	1/8 unit	4-fold centers not on reflection axes
<i>p3</i>	hexagonal	3	no	no	1/3 unit	
<i>p3m1</i>	hexagonal	3	yes	yes	1/6 unit	all 3-fold centers on reflection axes
<i>p31m</i>	hexagonal	3	yes	yes	1/6 unit	not all 3-fold centers on reflection axes
<i>p6</i>	hexagonal	6	no	no	1/6 unit	
<i>p6m</i>	hexagonal	6	yes	yes	1/12 unit	

CHART 3. A rotation through an angle of $360^\circ/n$ is said to have order n . A glide-reflection is non-trivial if its component translation and reflection are not symmetries of the pattern.

Figura 31: Test de reconocimiento de GSP de Schattschneider. Fuente (Schattschneider , 1978).

3.4.2 Aproximación computacional

El trabajo de Liu ((Liu y Collins, 2000) y (Liu et ál., 2004a)) es el primer algoritmo para clasificación automática de grupos de friso y del plano. Es nuestro algoritmo de referencia. Trabaja en el dominio de la imagen y la estructura del mismo es:

- Determinar la rejilla existente mediante la detección de máximos en la autocorrelación de la imagen de partida.
- Obtener un paralelogramo promedio entre todos los existentes en la imagen. Decidir a qué grupo de simetría pertenece la imagen mediante la determinación de las transformaciones existentes en la imagen por comparación del paralelogramo extraído y transformado por cada una de esas isometrías.

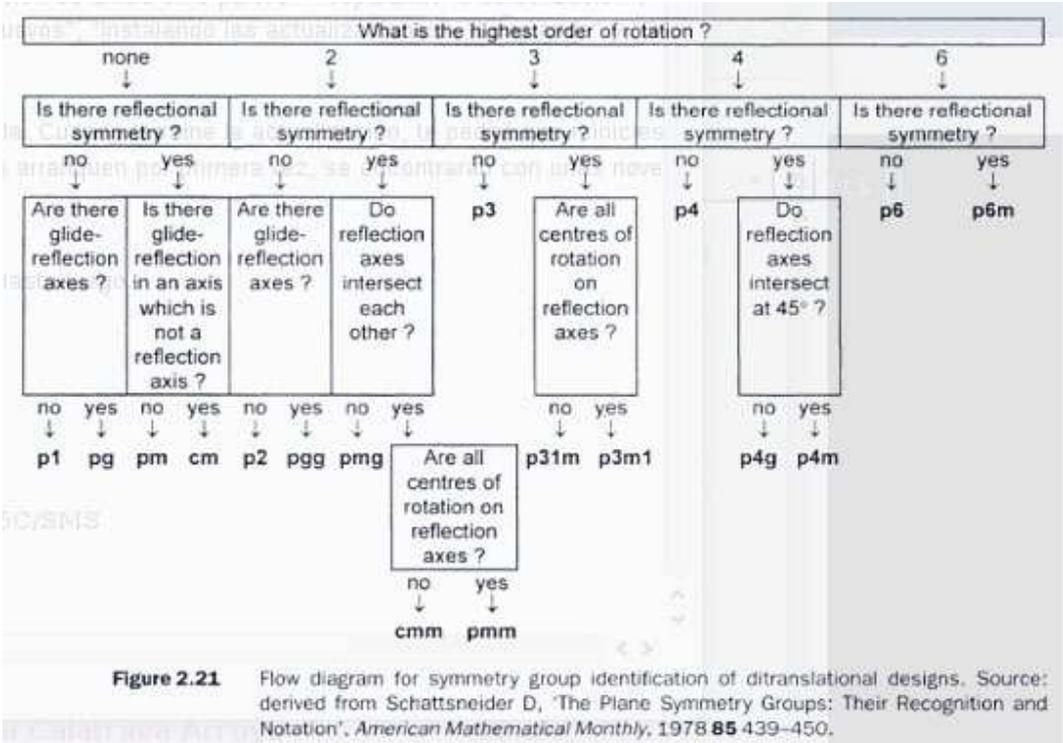


Figura 32: Algoritmo de clasificación propuesto por Liu a partir del trabajo de Schattschneider.

El algoritmo, fig. 32, propone, a partir de la interpretación de la tabla de estados de Schattschneider, (Schattschneider , 1978) un sistema completo de clasificación del GSP. Es el trabajo de referencia con el que nos compararemos con mayor exhaustividad puesto que es la instanciación más cercana a implementar uno de los algoritmos que aparecen en la literatura con resultados de su uso.

	p1	p2	pm	pg	cm	pmm	pmg	pgg	cmm	p4	p4m	p4g	p3	p3ml	p31m	p6	p6m
2		Y				Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y				Y	Y
3													Y	Y	Y	Y	Y
4										Y	Y	Y					
6																Y	Y
T1			Y	Y(g)		Y	Y(g)	Y(g)			Y	Y(g)			Y		Y
T2						Y	Y	Y(g)			Y	Y(g)			Y		Y
D1					Y				Y		Y	Y		Y	Y		Y
D2									Y		Y	Y					Y

Figura 33: Método de clasificación utilizado en (Liu et ál., 2004a) sobre la idea inicial de Schattschneider.

Liu parte de una tabla simplificada de la elaborada en principio por Schattschneider, que se muestra

en la fig. 33. Se ha simplificado la determinación de los grupos de simetría a partir de el de máximo orden de rotación presente, y las reflexiones en ejes (T_i) y en Diagonales (D_i).

El trabajo de Liu parte de las consideraciones de (Lin et ál., 1999) que será revisado en el apartado 3.5 “Estado del arte de la recuperación por contenido” para obtener el retículo. Se diferencia en la evaluación de las características con las que define el patrón, para aplicar el concepto de grupos de simetría en la definición de similitud entre imágenes. A pesar de esta expresión que sí es relativo a la percepción, a diferencia del trabajo de H. C. Lin, el resultado de esta clasificación adaptado a un sistema de CBIR no es explorado en los trabajos de X. Liu.

Las simetrías se obtienen como valores de similitud en dos etapas. Primero, se calcula el máximo de la correlación entre la imagen transformada por la simetría que se quiere medir y la original. Después, en la coordenadas de ese máximo se extrae un PF en ambas imágenes y se computa su parecido en cuanto a niveles de intensidad, como la suma de cuadrados de la diferencia de ambas subimágenes. Para obtener valores binarios que se puedan aplicar en el algoritmo de clasificación de Schattschneider se utiliza un umbral. En un trabajo inicial (Liu et ál., 2000), se obtiene de forma experimental y se aplica el mismo a todas las imágenes; posteriormente se introduce una formulación más robusta que utiliza el test de chi-cuadrado ($\chi^2(N)$) para obtener el valor de umbral como función del número de puntos (N) del PF.

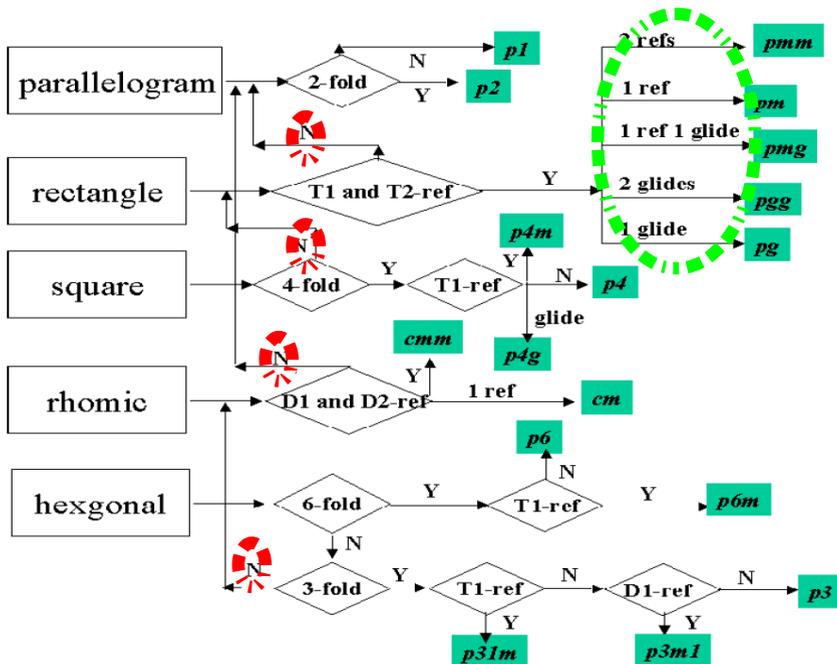


Figura 34: Primera propuesta del algoritmo de Liu.

En una **primera implementación** (Liu y Collins, 2000), realiza un algoritmo que parte de la determinación de la rejilla, fig. 34. Como ya se ha comentado, este punto de partida es ambiguo. Este esquema expresa el algoritmo de Schattschneider en forma de un árbol de decisión, donde la determinación de cada grupo de simetría se corresponde con una secuencia de preguntas, de longitud diferente en función del grupo y con respuesta siempre binaria: existe o no una

determinada simetría. Obsérvese como la primera pregunta es el tipo de rejilla que se ha determinado, la repetición debida a la simetría traslacional. La segunda no siempre es el orden de simetría, pero en función de la respuesta a la segunda pregunta, si es negativa, se pasa a considerar otra forma de rejilla. En cada paso, se utilizan diferentes umbrales para obtener las respuestas discretas a las preguntas que se formulan.

Este algoritmo aparece **revisado** en las publicaciones posteriores (Liu et ál., 2004a) como se muestra en la fig. 35. En este caso, el algoritmo reescribe el modelo de Schattschneider como un árbol, donde cada simetría corresponde con una secuencia única de respuestas (binarias) a cuándo el patrón contiene las simetrías interiores. Se puede ver como un clasificador de árbol de decisión que utiliza valores binarios de simetría.

Estos valores se calculan como puntuaciones que se obtienen a partir de:

- La autocorrelación entre la imagen transformada (al aplicarle la simetría que se quiere medir) y la original.
- En la posición del máximo de esta autocorrelación, se extrae un PF y se compara entre los correspondientes valores de intensidad del PF original (el extraído sobre la imagen sin transformar) y el transformado.

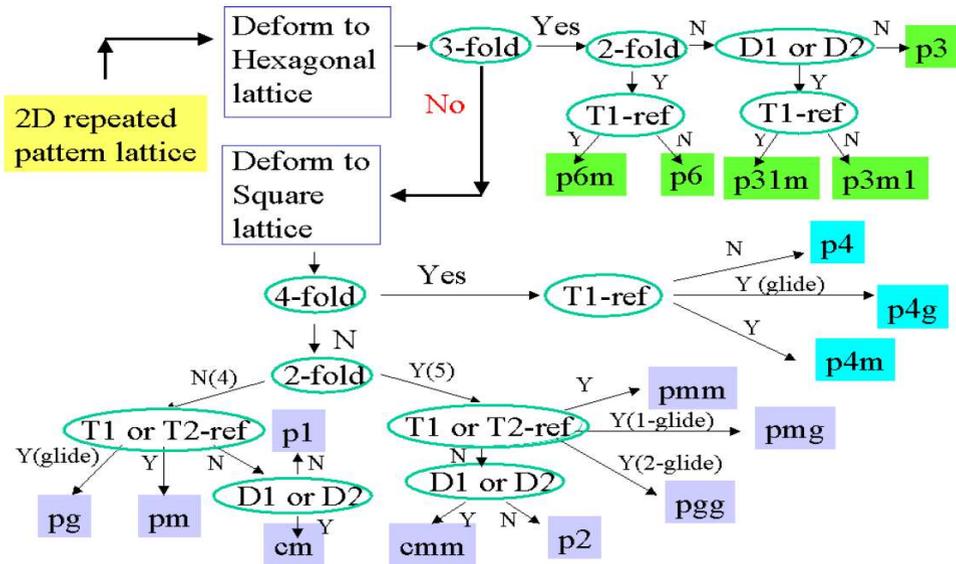


Figura 35: Algoritmo final de Liu.

Para poder utilizar estos datos como punto de partida, Liu introduce una serie de decisiones:

- Para la detección de la rejilla se utiliza el mapa resultado de la autocorrelación de la imagen y, de esta, se extraen los valores máximos a partir de una técnica basada en el concepto de región dominante. Los picos se escogen de un área central que va incrementando su radio hasta determinar la rejilla, buscando Las parejas de puntos más alejadas entre sí. Constituye una variante de detección de máximos locales, una especie de *non-maximum suppression*, con un tamaño de ventana arbitrario.

- Un número de puntos máximos de la autocorrelación, que se ha fijado en treinta y dos por que los experimentos han resultado posibles con este valor.
- Para determinar el parecido entre la imagen transformada y la original, se mide la correlación entre ellas utilizando la suma de diferencias al cuadrado del paralelogramo transformado aplicado a una parte de la imagen.
- De los valores obtenidos, mediante un algoritmo de *k-medias* (con $k = 2$) se les asigna el grupo de simetría.

Todos estos elementos implican la existencia de **umbrales con valores tentativos**, obtenidos de forma experimental y cuya validez no puede ser corroborada. De hecho, los propios autores sugieren utilizar una etapa diferente en el algoritmo para los casos de imágenes ruidosas donde la autocorrelación puede falsear resultados.

Como que cada uno de estos pasos son sensibles al ruido, al espacio de representación de color y a las irregularidades de la imagen; trabajos posteriores relacionados con los autores, como en el de (Reddy y Liu, 2005), se sugiere introducir algunas variaciones como:

- Obtener la rejilla a partir de la determinación de las dos direcciones que más se dan entre todos los puntos resultantes del análisis de la autocorrelación.
- Ajustar el número de puntos mediante la verificación de la rejilla, comparando la imagen con la composición del paralelogramo obtenido siguiendo las direcciones que forman la rejilla.
- Cambiar la evaluación de la determinación de las isometrías existentes en diferencias entre los valores de los puntos de la imagen (como suma de cuadrados de la diferencia, conocida por sus siglas en inglés como SSD) a una técnica basada en registrado y comparación de bordes.
- Dar un “pequeño margen” al algoritmo de agrupación para decidir el grupo asignado a la imagen, puesto que otras técnicas no mejoran los resultados obtenidos.
- El trabajo en una única versión de grises de la imagen original (en color) puede falsear el resultado de la comparación punto a punto de los valores de luminosidad, pero se deja abierto el camino hacia el que dirigirse.

Nuestra experiencia demuestra que ambas aproximaciones tienen **limitaciones** y que pueden ser ajustadas para obtener buenos resultados con la colección de (Joyce, 2007). Aún así, hay que hacer notar que, en el primer método, la obtención del valor de umbral no se puede generalizar para otras colecciones de imágenes puesto que se obtiene experimentalmente al buscar el mejor resultado sobre todas las imágenes del conjunto. En el segundo método se asumen que la simetría traslacional tiene una desviación estándar no nula, por lo que no se puede aplicar a imágenes sintéticas. Además, el uso de este tipo de clasificador obtiene un solo resultado sin una medida de bondad del mismo. Por lo tanto es necesario revisar las propuestas de (Reddy y Liu, 2005), para mejorar la solución existente y evaluarla.

Para finalizar, cabe destacar los trabajos desarrollados en los proyectos CICYT denominados “Herramientas gráficas para la catalogación y diseño de revestimientos cerámicos y tejidos” (1FD97-0402) y “Metodología y sistema de información para la ayuda al diseño gráfico: Aplicación a los sectores textil y cerámico” (DPI2001-2713). Algunos aspectos de esta temática se desarrollan también en los proyectos: “Interfaces caligráficas para herramientas avanzadas de diseño” (CTIDIB/2002/51) de la Generalitat Valenciana; y en el proyecto “Metodología de diseño basadas

en el concepto de ingeniería concurrente” (PPI-05-01 6030) de la Universidad Politécnica de Valencia. Estos trabajos se describen en detalle en la tesis de Francisco Albert Gil (Albert, 2008) y, más recientemente, en (Albert, 2015).

En estos trabajos se plantea el desarrollo de un conjunto de herramientas informáticas para el análisis y catalogación de diseños, específicamente en el contexto de los sectores textil y cerámico, que permitan la reutilización del inmenso patrimonio histórico compuesto por diseños textiles y cerámicos depositados en museos y empresas de los citados sectores. El hilo conductor de estos proyectos es la elaboración de un Sistema de Información de Motivos de Diseño (SIMOD). Se trata de un sistema de recuperación por contenido gráfico que permita incorporar los elementos de diseño presentes en los miles de muestras históricas, de forma tal que los diseñadores actuales puedan acceder a ellos para labores de rediseño.

De entre todas las herramientas propuestas o desarrolladas, hay que destacar la destinada al análisis de las imágenes, denominada FECETEX, que se comienza a desarrollar en el primero de los proyectos citados, y cuyo objetivo principal es, citando literalmente a los autores: “Obtención de una herramienta en forma de un software gráfico que permita la catalogación automática de motivos de embaldosados y textiles, a partir de imágenes de los mismos, utilizando para ello la teoría de grupos de simetría. Al mismo tiempo se pretende que dicha herramienta pueda utilizarse como instrumento de diseño y de rediseño de embaldosados o de motivos textiles a partir de patrones extraídos de las imágenes procesadas o de nueva creación, respectivamente.”. Como se puede apreciar, se trata de un trabajo fuertemente conectado con el que se describe en la presente tesis, si bien la metodología empleada es notablemente diferente.

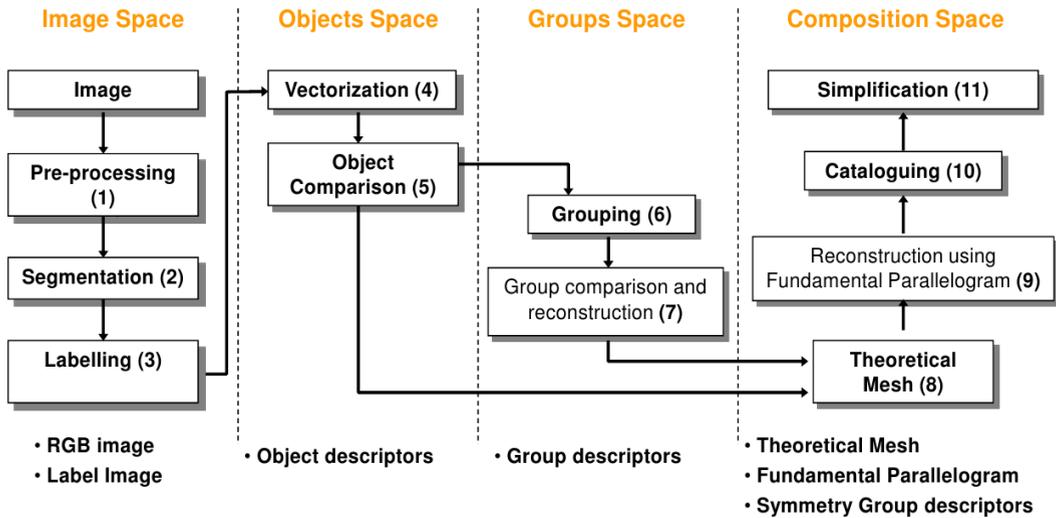


Figura 36: Diagrama de etapas de la herramienta de análisis de imagen en FECETEX (fuente: informe interno del proyecto FECETEX).

De forma sumaria, el análisis de las imágenes se desarrolla en las siguientes etapas (véase la fig. 36):

- Captura de imagen: se obtienen imágenes en color, de gran resolución, de textiles y embaldosados en condiciones de laboratorio, bajo iluminación constante. Se trata de

imágenes fuertemente periódicas (*wallpapers*) como la mostrada en la fig. 37-a.

- Segmentación de la imagen: se obtienen los objetos de diferentes colores mediante una técnica de segmentación de color (agrupación de píxeles por colores basada en la media deslizando).
- Cada objeto o región de color se etiqueta y su contorno se aproxima mediante una entidad gráfica (curvas de *Bezier*). A partir de aquí, todo el proceso posterior se realiza en un espacio vectorial (gráfico), abandonando el espacio de la imagen. Esta es la principal diferencia con respecto a la metodología empleada en esta tesis.
- La siguiente etapa consiste en la clasificación de los objetos similares, basada en la similitud de contornos y características geométricas. La fig. 37-b muestra un ejemplo de los objetos extraídos de la imagen de partida. Se aprecia que los mismos objetos aparecen en distintas posiciones y orientaciones. En esta etapa se obtienen también las propiedades de simetría puntual de cada objeto.
- A continuación se agrupan los objetos de acuerdo con parámetros perceptuales (*Gestalt*) formando grupos. La fig. 37-c muestra los grupos formados atendiendo a criterios de proximidad, co-circularidad y superposición.
- En esa misma etapa de grupos se comparan los diferentes grupos formados para determinar los que son similares, produciendo una uniformización de los mismos, como se muestra en la fig. 37-d. El resultado son los grupos representativos o “motivos” del diseño.
- Por último se entra en una etapa de composición, donde se obtiene el Paralelogramo Fundamental junto con los motivos que lo componen, así como sus propiedades geométricas. (fig. 37-e). Estas propiedades determinan el grupo de simetría al que pertenece el diseño (catalogación) y permiten su reconstrucción para formar el diseño original (fig. 37-f).

Todo el proceso citado es semi-automático, pues requiere la intervención del usuario para fijar los parámetros pertinentes en algunas de las etapas. Aun cuando existen unos parámetros estándar, que dan lugar a un resultado, el usuario puede modificarlos para ajustar mejor dicho resultado a lo que el usuario considere que se aproxime más a la descripción gráfica del diseño. El propósito es obtener la descripción teórica completa del diseño y el conjunto de los elementos gráficos que lo componen, que son almacenados en el sistema de información para su futuro uso.

Así mismo, el sistema es muy versátil pues permite realizar la catalogación “más global de todo el patrón”, sino que también ofrece un conjunto de catalogaciones que cumplen “parcialmente” el diseño. Esto se realiza considerando todos los distintos Paralelogramos Fundamentales y Grupos de Simetrías que se observan al considerar únicamente determinados motivos o la posibilidad de considerar o no el color en las comparaciones de objetos. La fig. 38 muestra un ejemplo de todo esto.

La validación experimental de esta herramienta se realizó con más de 150 ejemplos como se muestra en (Albert, 2008). No se pueden ofrecer medidas concretas pues el proceso es supervisado, con lo cual siempre se obtiene un resultado satisfactorio desde el punto de vista del usuario. La aplicación exige un cierto “aprendizaje” para poder utilizarla: la intervención del usuario es necesaria para validar el resultado, dada la complejidad de realizar una segmentación algorítmica para determinar los “objetos” que aparecen en las imágenes. Así, en los casos donde no se obtiene o no es el correcto, modificar los parámetros del análisis para esa imagen como la identificación del “fondo” de la imagen o el interés de considerar el color de los “objetos” segmentados para comparar

sus formas e identificar a los que representan un mismo tipo de “objeto”. Los fallos, de producirse, provienen de los errores en el proceso de segmentación de la imagen (imágenes mal contrastadas o motivos defectuosos).

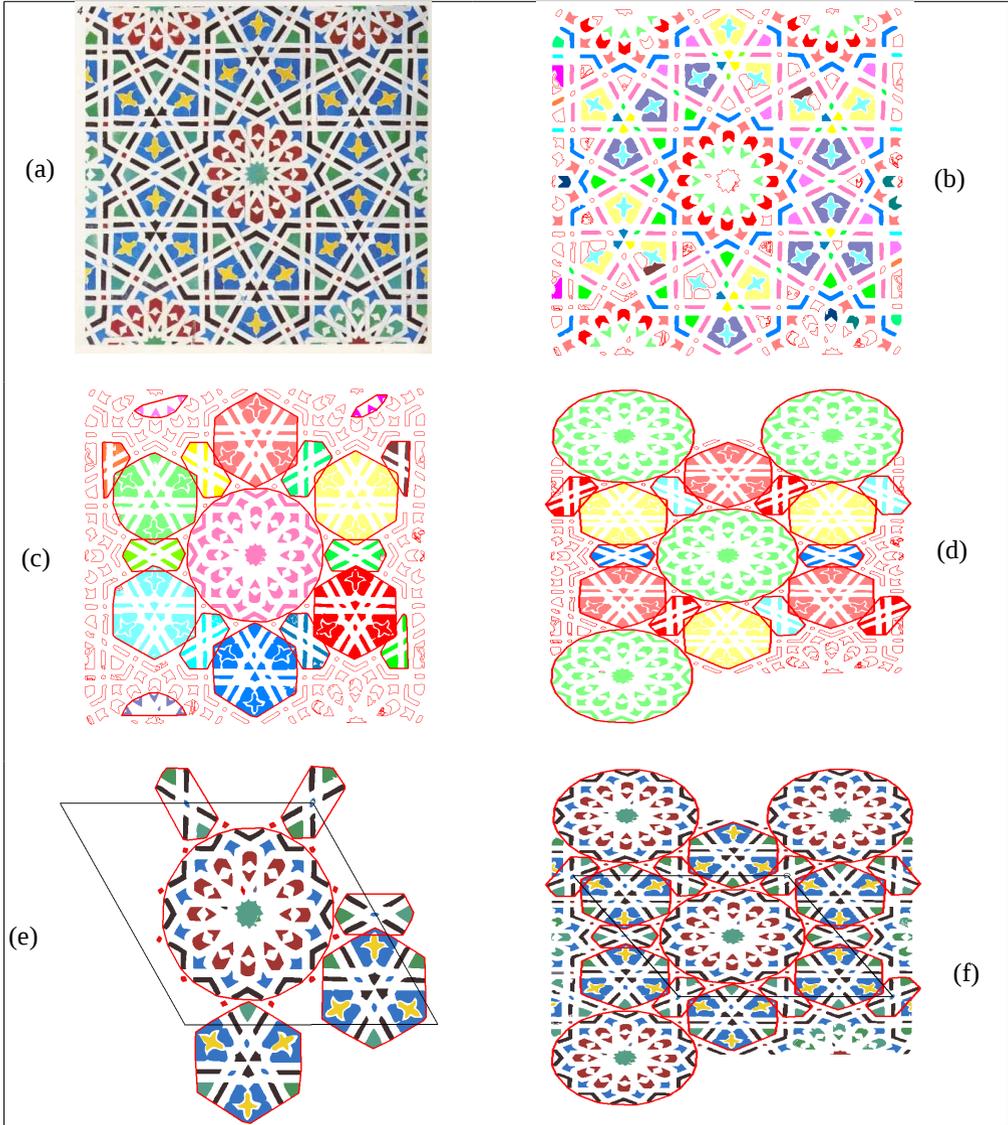


Figura 37: Ejemplo de resultados del análisis de FECETEX: (a) Imagen original. (b) Extracción de objetos. (c) Agrupación de objetos. (d) Formación de motivos. (e) Paralelogramo fundamental y malla teórica. (f) Reconstrucción por malla teórica.

Por último, insistir de nuevo en las similitudes de este planteamiento con respecto a los trabajos de la presente tesis. Queda claro el objetivo común del análisis de imagen de patrones repetitivos de obtener el grupo de simetría al que pertenece el patrón. Difieren notablemente en cuanto a la

metodología, pues en esta tesis se presenta una metodología basada exclusivamente en el análisis en el espacio de la imagen, frente al análisis en un espacio vectorial o gráfico del FECETEX. Son, en definitiva, planteamientos complementarios que pueden enriquecerse mutuamente en futuros trabajos.

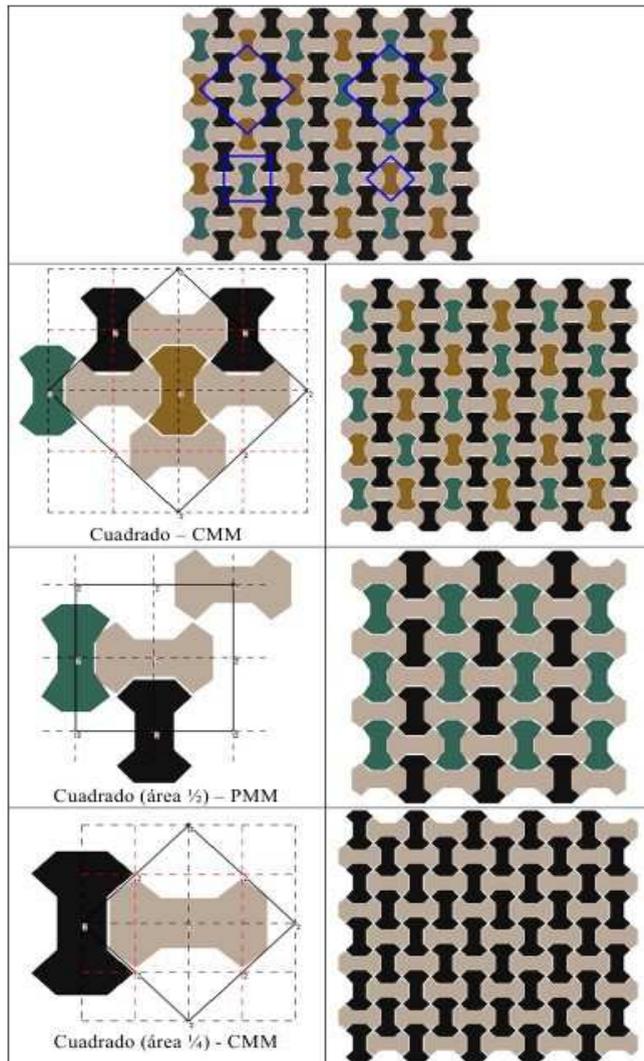


Figura 38: Diferentes catalogaciones del diseño original al considerar solo algunos de los objetos/motivos de éste.

3.5 Estado del arte de la recuperación por contenido

En el presente trabajo se analizan las necesidades de una descripción de las imágenes que permita el análisis y la descripción de las mismas de forma automática, por lo que su uso en CBIR es una

aplicación interesante. La revisión de las metodologías de estos sistemas es el objetivo de este apartado para cerrar el contexto de esta tesis, aunque se hará de manera breve, refiriéndose a los trabajos previos en que se ha desarrollado esta temática.

Los primeros trabajos de esta tesis estuvieron encaminados a la propuesta de un sistema de recuperación por contenido de carácter general. El estado del arte de estos fue revisado (Agustí, 1999) y (Agustí 2001), analizando los sistemas más citados (como por ejemplo *PhotoBook*, *QBIC*, *Excalibur*, *SIMPLicity*, *Netra*, *PickToSee*, *CANDID*, *Chabot*, *WebSeek*, etc.) en la literatura al respecto y proponiendo una metodología jerárquica de análisis del contenido de las imágenes que permitiera subsanar el diferente nivel de descripción que la máquina y el usuario humano manejan habitualmente. La utilización de una aproximación multiresolución implementada con *wavelets* se escogió y demostró en (Agustí y Valiente, 2003) y su uso en el campo del textil en (Agustí et ál., 2003).

En general, se propone que se utilicen herramientas que ayuden en la recuperación de información visual o, como se vienen denominando, colecciones de imágenes. El problema principal es la necesidad de un acceso eficiente a la información de contenido visual, integrado por un conjunto de características, como por ejemplo: las formas de los objetos más relevantes, distribuciones o áreas de un determinado color, texturas o la disposición visual de los elementos en la imagen.

Las limitaciones de los métodos de indexación manual para resolver estos problemas hace que se busque obtener una descripción de las imágenes que permita la clasificación de las mismas de forma automática. En general, un sistema eficiente de recuperación de información visual debe ser capaz de:

- i) Definir elementos de recuperación que sean significativos en el contexto de la aplicación.
- ii) Proporcionar un método de consulta que permita al usuario especificar de forma natural características selectivas así como información imprecisa.
- iii) Definir métricas de similitud que sean satisfactorias para la percepción del usuario.

La complejidad del problema viene dada por diferentes aspectos. Las técnicas clásicas de reconocimiento de objetos en *VxC* no pueden abordar un problema tan complejo, puesto que en principio se pretende abordar contextos abiertos, donde cualquier objeto aprendido puede no aparecer y ser necesario identificar lo que haya en la imagen. El paradigma de interacción (consulta por ejemplos visuales) permite la imprecisión y la falta de completitud de la expresión, al permitir a los usuarios esbozar la imagen; pero requiere que las características visuales sean extraídas de las imágenes y utilizadas como índices en la fase de recuperación. Finalmente, la subjetividad del observador deja abierto a que el usuario perfile su consulta en tiempo de ejecución, utilizando criterios de búsqueda capaces de manejar imprecisiones y falta de información

Existen ya sistemas *CBIR* que trabajan con conjuntos de descriptores de bajo nivel (descritas en función de elementos básicos como el color, la textura o la forma); con resultados ambiguos al cambiar el conjunto de imágenes disponibles. Otros han escogido descriptores dependientes del contexto de la aplicación y que suponen la organización de información relativa a las imágenes en conceptos de nivel intermedio o alto de abstracción. Estos últimos, más cercanos a la terminología del usuario humano del sistema se están imponiendo por sus resultados y la posibilidad de establecer comparativas entre diferentes algoritmos. El trabajo previo realizado se ha encaminado a recoger información relativa a las diferentes propuestas que en la literatura han marcado las publicaciones sobre el tema y que han llevado a la construcción de un sistema básico que, a partir de los parámetros estadísticos extraídos de las imágenes, implementa, mediante un algoritmo de fuerza bruta, un sistema de recuperación de información visual sin ninguna característica propia del

contexto. Con esta aproximación de bajo nivel semántico se ha evidenciado la necesidad de obtener una descripción del contenido de la imagen a partir de características de mayor nivel semántico: uno que permita hablar del **contenido de una imagen en términos de componentes constructivos**. A continuación se resumen las realizaciones más cercanas a la temática de la tesis que hacen uso también de componentes visuales.

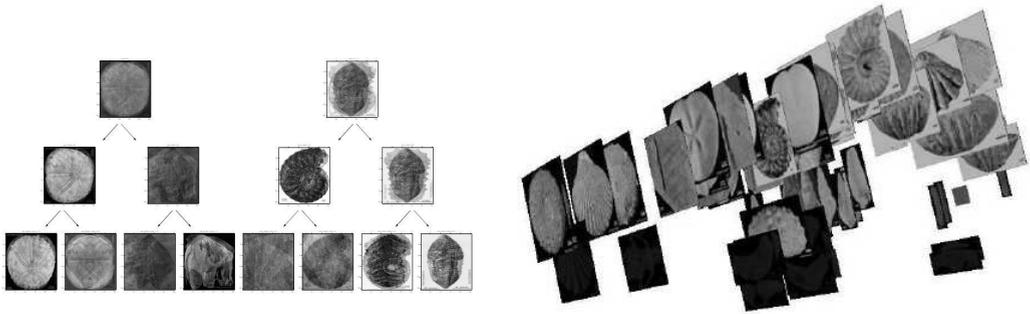


Figura 39: Ejemplo de "agrupación de imágenes por contenido".

La aportación de ((Landré et ál., 2001) y (Landré et ál., 2006)) a la navegación visual asistida por el contenido de una imagen en una colección de imágenes de gran tamaño como alternativa a los sistemas CBIR de recuperación por consulta mediante consulta visual. Esta metodología busca establecer familias, agrupaciones, entre las imágenes disponibles antes de una consulta para facilitar el recorrido de la misma en entornos web donde la inmediatez de la respuesta es importante, véase un ejemplo en la fig. 39. Trabajando con una descomposición multiescala basada en *wavelets*, va creando modelos que representen a las imágenes que se ha decidido agrupar por cumplir unos criterios de similitud de contenido en el dominio de la transformada *wavelet*. Exponiendo estos modelos en una representación de árbol, el usuario navega por la colección especificando su consulta por elección de las imágenes que se le muestran, si necesidad de proponer una inicial.

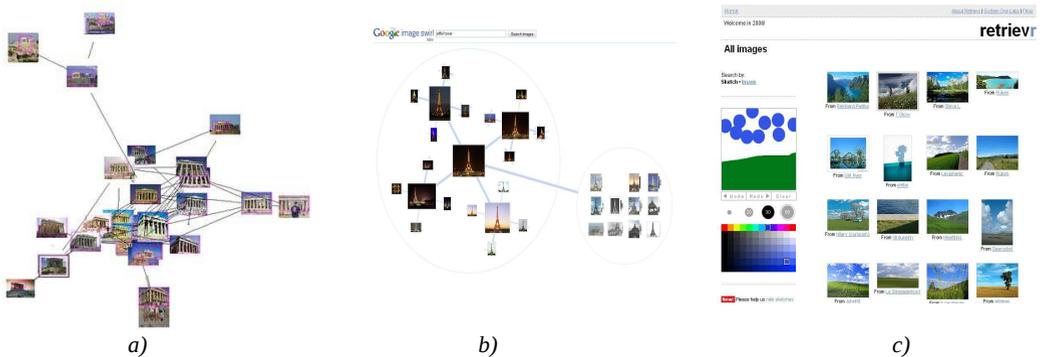


Figura 40: Ejemplos de sistemas de navegación y recuperación por contenido de Google (a y b) y Yahoo! (c).

Cabe señalar que, en la actualidad, esta idea se está popularizando entre los buscadores web más

sobresalientes, por ejemplo los proyectos de Google (*Landmark recognition*⁶ o *Image Swirl*⁷) o el de Yahoo! (retrievr⁸) que se muestran en la fig 40.

El trabajo de (Lin et ál., 1999) parte de la idea de que los usuarios obtienen una baja satisfacción utilizando un sistema generalista. Por ello presentan **un sistema de recuperación para colecciones de imágenes con estructura de patrones de texturas complejas** basado en un vector de características formado por las características de texturas obtenidas solo del patrón como representante de lo que sucede en toda la imagen, junto con la geometría del patrón.

El sistema se descomponen en dos partes. En primer lugar la creación de la base de datos a partir de la extracción de la textura representativa. La geometría y elección de esta se realiza a partir de los picos de la autocorrelación. Dado el nivel de ruido que esta muestra se utiliza una función gaussiana para suavizarla aplicada de forma automática con la intención de preservar el número de máximos locales. Sobre esta versión suavizada de la autocorrelación se aplica Hough para extraer la textura patrón que se repite en la imagen. Sobre esta versión reducida de la imagen se calculan cinco características a partir de la matriz de coocurrencias de la versión en gris de la imagen, estos valores se guardan en la base de datos.

En segundo lugar está la comparación con la imagen de consulta. Se puede utilizar una imagen como dato de consulta, las cinco características serán calculadas sobre ella y la base de datos recorrida obteniendo las distancias a las imágenes existentes en base a este reducido número de características. Para comparar el patrón obtenido es ortogonalizado a direcciones 0° y 90° y los valores de gris reducidos a 16 valores de forma uniforme; con lo que la matriz de coocurrencias es de 16x16, con valor uno para la distancia y dos ángulos (0° y 90°). Los valores de características son la media de las obtenidas para cada ángulo y normalizadas por el área del patrón. Como cada característica tiene su escala, no se puede utilizar una distancia euclídea, así que se acumula la distancia entre cada característica k de las cinco que se utilizan ($Rank_k$). Este valor es normalizado de acuerdo con la expresión de la ec. 14. Con lo que los valores de coincidencia entre imágenes, V , están en la escala de 0 al 1, mínimo y máximo respectivamente.

$$V(i) = \frac{5}{\sum_{k=1}^5 Rank_k(i)} \quad (14)$$

La fig. 41 muestra un ejemplo de imagen de consulta y las doce imágenes más similares de las que componen la colección de imágenes disponibles. Como se observa una misma imagen aparece rotada en la colección para confirmar la robustez a esta transformación, aunque no se sabe cuántas se han incluido, ni con qué parámetros. Las imágenes recuperadas muestran el patrón buscado sobreimpreso sobre ellas en cuatro posiciones. La evaluación se lleva a cabo con imágenes de la colección, imágenes que son troceadas para formar parte de la misma, puesto que su tamaño original es mayor que el que se ha decidido para incluirlas en la colección. Uno de estos trozos se utiliza como consulta. Se toma como valor de éxito en la recuperación que las nueve primeras imágenes recuperadas sean trozos de la misma imagen original. Obteniéndose valores de 90% de éxito y hasta 96% si se añade el tamaño del patrón como característica.

Los autores concluyen que los resultados no se corresponden con la intuición humana, pero que la

6 Véase <<http://googleblog.blogspot.com/2009/06/new-landmark-in-computer-vision.html>>.

7 La página web del proyecto está disponible en <<http://image-swirl.googlelabs.com/>>.

8 Disponible en <<http://labs.systemone.at/retrievr>>.

aproximación es efectiva, la fig. 42 muestra un ejemplo de imágenes de diferentes grupos de simetría recuperados como similares a una consulta después de recuperar los nueve trozos de la imagen a la que la de consulta pertenece. Al respecto de la adecuación de las características escogidas se dice que es difícil de determinar por la diversidad de las que componen el conjunto de imágenes de prueba.

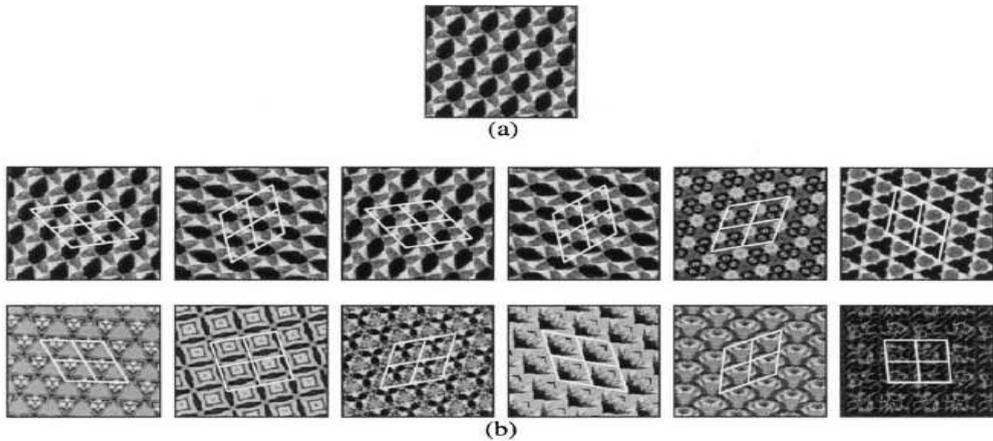


Figura 41: Ejemplo de recuperación por contenido utilizando primitivas de texturas: para la imagen de consulta (a), el conjunto de imágenes (b). Extraído de (Lin et ál., 1999).

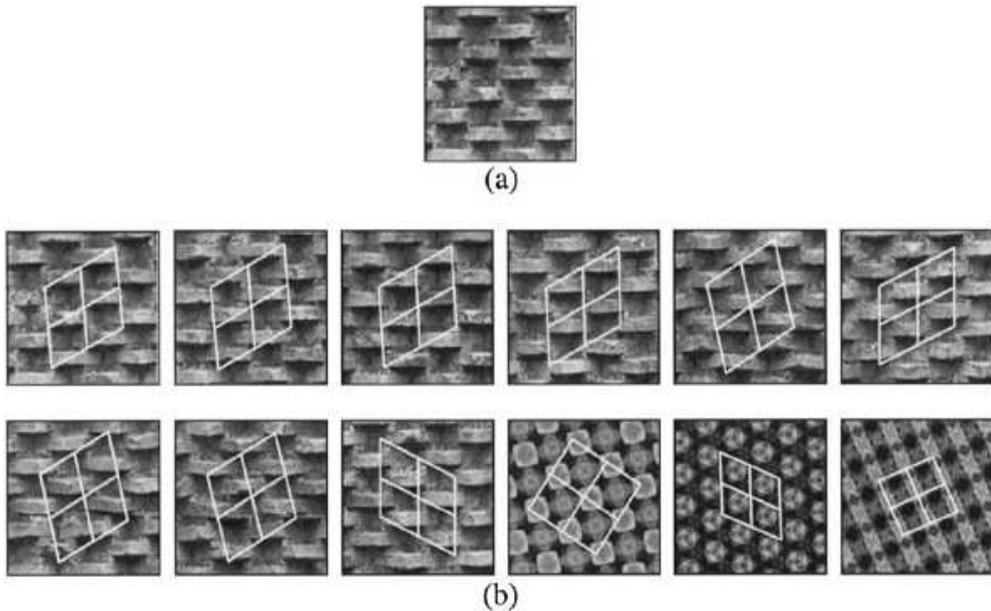


Figura 42: Ejemplo de recuperación de (Lin et ál., 1999), en que se han obtenido imágenes de diferentes grupos de simetría.

El trabajo de (Djibril y Thami, 2008) se centra en la recuperación de imágenes dentro del contexto de patrones geométricos sobre imágenes del patrimonio cultural islámico a partir de la extracción de características de simetría. Para ello obtiene un vector de características formado por el grupo de simetría de la imagen y el histograma de color del paralelogramo fundamental.

Utiliza las ideas de (Liu et ál., 2004a) para clasificar las imágenes en grupos de simetría (tanto unidimensionales, en el plano, como de rotación) insistiendo en que han de robustecer la detección de la rejilla porque es difícil fijar a priori umbrales, sobre todo en el caso de imágenes con ruido La fig. 43 muestra dos ejemplos de resultados de la recuperación, donde la imagen utilizada para la consulta está en la esquina superior izquierda. De derecha a izquierda y de arriba a abajo están las imágenes resultado de la búsqueda ordenadas por su similitud con la imagen de entrada, el valor obtenido se muestra debajo de cada imagen.



Figura 43: Ejemplos de resultados del sistema de CBIR de (Djibril y Thami, 2008).

El proyecto SHIRAZ⁹ (*System of Histological Image Retrieval and Annotation for Zoomorphology, (Canada, 2011)*) que integra elementos de los campos de la VxC, reconocimiento de formas, patología y el estudio del genoma para construir un sistema de CBIR que sea útil en la caracterización y productividad de marcado de fenotipos en imágenes de histología animal.

En concreto, el uso de las simetrías se concreta en dos etapas, como puede verse en la fig. 44a utiliza las ideas de detección de rejilla en modelos casi regulares para identificar dentro de una misma imagen (que genera un microscopio electrónico a partir del examen de una pletina con un numero máximo, pero indeterminado de muestras), el área que pertenece a los diferentes individuos a examinar.

Cada uno de ellos, por separado, es clasificado como sano o mutante en función de la simetría radial de su ojo, fig. 44b. Los antecedentes de este sistema de CBIR están relacionados con los trabajos

9 Se puede acceder a una versión de demostración a través de la página web del proyecto en la URL <<http://shiraz.ist.psu.edu/index.html>> .

de uno de sus autores J. Z. Wang, entre los que podemos destacar SIMPLicity, ALIPR y ACQUINE.

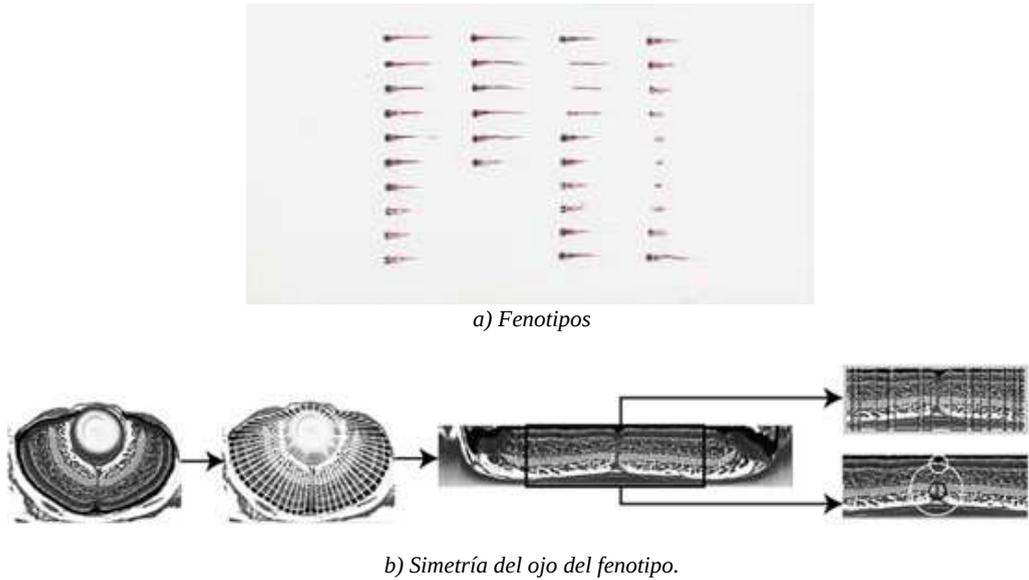


Figura 44: Un ejemplo de la teoría de grupos de friso aplicado a la clasificación de imágenes de histología animal que muestran simetría rotacional.

3.5.1 Problemática de la evaluación de resultados en CBIR

El objetivo de este punto es exponer la forma en que se pueden evaluar los resultados obtenidos por este tipo de sistemas. En la literatura la metodología para la evaluación de técnicas de recuperación de imágenes es bastante “caótica”: los investigadores han diseñado diferentes algoritmos y han probado su eficiencia en sus propios conjuntos de prueba. Métricas como la precisión y la exhaustividad han sido popularmente utilizados en la literatura, pero no son prácticos por el tedioso proceso de medir la relevancia y la subjetividad del observador humano. Ni existe un conjunto de pruebas común, ni una teoría sobre cómo comparar diferentes colecciones de imágenes de prueba.

La falta de una metodología común es claramente una limitación en el desarrollo del campo de investigación de la recuperación en el campo de los multimedia. En (Rao et ál., 2002) se propone un contexto en el que medir la complejidad de una base de imágenes, que caracterice dichas colecciones de imágenes para aplicaciones de recuperación. A partir del concepto de “perplejidad del corpus” en el caso de bases de datos textuales, se formula el concepto de complejidad en bases de datos de imágenes basado en estadísticos obtenibles a partir del contenido de la base de datos y de la teoría de la información. De esta forma se puede obtener una medida cuantitativa que puede ser utilizada para medir el *grado de dificultad* de recuperar imágenes, basado en el contenido de la colección. Esta métrica es independiente de las consultas, por lo tanto objetiva.

El planteamiento más crítico al respecto es el de (Forsyth, 2001) quien concluye que hay poco que hacer de comparar las soluciones actuales con colecciones de referencia, por que estas soluciones

están tan lejos de las necesidades de los usuarios que el ejercicio es y que se obvia en casi todas las ocasiones la consideración de la utilización del usuario en su contexto. Por ello nuestro interés de utilizar características de alto nivel semántico próximas al usuario que utilizará el sistema tiene más valor si cabe.

A la hora de evaluar sistemas el mecanismo está claro: “¿hace lo que la gente necesita?”. Para implementar este mecanismo se utilizan diferentes mecanismos de evaluación:

- Evaluación cualitativa. Construido un sistema, se muestran algunas respuestas para demostrar que funciona.
 - Exhaustividad y precisión. Como estadísticos o en forma gráfica, hacen referencia a resultados de experimentos difícilmente evaluables; puesto que su significado depende tanto del método utilizado para determinar la relevancia, como de la calidad del estudio de la colección realizado para determinar la exhaustividad.
 - Colecciones de referencia. Una manera de evitar lo anterior es construir grandes colecciones de referencia (de imágenes) con anotaciones para indicar su contenido. Este es un tema muy complejo, además sigue siendo difícil determinar la relevancia a partir de las anotaciones para determinadas aplicaciones y la tendencia a afinar los sistemas para que funcionen bien con una de esas colecciones, no asegura que lo hagan bien en otros ámbitos de aplicación.
- Estudios de usuarios. Lo que los usuarios esperan de un sistema tiene efecto en como debe ser evaluado. Es necesario incorporar al usuario en el “bucle de diseño”, porque altos valores numéricos de medidas como precisión y exhaustividad no siempre significan que el sistema funcione bien. Veamos esto con ejemplos:
 - Análisis de imágenes: determinar si en un conjunto de imágenes existe al menos una de un cierto contenido para que se de al usuario la oportunidad de decidir sobre el conjunto. Se quiere alta precisión, y una baja exhaustividad no es un problema (puesto que con que se detecte una en el grupo se mostrará al usuario).
 - Encontrar si existe una determinada imagen. En principio, solo se requiere un ítem, pero puede ser confuso. Además es relativamente económico pedir al usuario que vea todos los ítems obtenidos y compare para tomar la decisión final. Se requiere alta exhaustividad y se puede tolerar una baja precisión.
 - Seleccionar un número de imágenes que corresponden a una consulta de la que hay un número mucho mayor de relevantes en la colección de las que se devolverán. En este caso una alta exhaustividad puede ser un problema, pero una alta precisión es importante.

Esta temática ha vuelto a ser retomada por el proyecto *Benchathlon* (Müller et ál., 2001) donde se describe una plataforma para la evaluación de estos sistemas basada en el trabajo del grupo *Viper* que ha dado lugar al proyecto GIFT (*GNU Image-Finding Tool*) y que han desarrollado el MRML (*Multimedia Retrieval Markup Language*). Los resultados de este proyecto no han llegado todavía a ofrecer una comparación entre diferentes modelos.

La evaluación de sistemas de recuperación es difícil pero esencial para el exitoso desarrollo de sistemas y su utilidad en aplicaciones prácticas (Smeulders et ál., 2000). El ímpetu inicial para la evaluación de bases de datos de imágenes proviene de la disciplina vecina de recuperación de información (*information retrieval*), en la que se han alcanzado un considerable grado de

sofisticación en las técnicas de evaluación realizada por los usuarios. La principal herramienta que la investigación en recuperación de imágenes ha tomado de la recuperación de información son las medidas de precisión y exhaustividad.

Mientras que precisión y exhaustividad son herramientas útiles en recuperación de información, en el contexto de bases de datos de imágenes no son suficientes por dos razones. La primera es que a selección de un conjunto relevante de imágenes en una colección es mucho más problemático que en una base de datos de texto, por que es más complejo definir el significado de una imagen. En el caso de un documento, el juicio humano acerca de cuándo un determinado documento es relevante para una determinada consulta es relativamente estable y hay una fuerte conexión entre este juicio y las características de las estadísticas acerca de la presencia de determinados elementos unitarios (las palabras). En el caso de una imagen, la relevancia es menos estable por el alto número de interpretaciones de una imagen aislada, aparte del propio problema lingüístico de cómo se realiza. Además ningún análisis estable, en términos de significado (semiótica), de elementos constitutivos se puede realizar; por lo que la correlación entre relevancia de una imagen y características de bajo nivel es mucho más imprecisa.

La segunda razón es que las bases de datos de imágenes usualmente no devuelven un conjunto indiferenciado de resultados “relevantes”, sino una lista ordenada de resultados o alguna otra compleja configuración que muestra la relación entre los resultados de la consulta. Aunque el resultado de una consulta consiste, en principio, en una ordenación de la colección *entera*, el tamaño del conjunto de respuesta $A(q)$ es usualmente reducido a las k más relevantes imágenes. Cuando el número de imágenes relevantes es mayor que k , la exhaustividad deja de tener sentido como una medida de la calidad del sistema de recuperación.

A pesar de estas desventajas, estas medidas (o las derivadas de ellas) son útiles en circunstancias donde la colección de imágenes está basada en la existencia de una fuerte significación de las mismas obtenida a partir de descripciones textuales o categorías. En (Smeulders et ál., 2000) se cita el trabajo de Narasimhalu et ál., en el que la medida utilizada es la de distancia entre la ordenación que hace el sistema frente a una consulta dada y la ideal. Obtener esta sigue siendo un problema abierto que resuelven a partir de experimentos con usuarios humanos.

Dos medidas se utilizan en general (Chai, 2001) para evaluar la efectividad de lo recuperado en sistemas de recuperación de información:

- La *precisión* que se define como la proporción de documentos recuperados que son relevantes. Puede entenderse como el ratio del número de documentos que se juzgue son relevantes para una consulta dada sobre el total de los documentos recuperados. Por ejemplo, si para una consulta se recuperan dos documentos y el usuario encuentra que uno de ellos es relevante, entonces la precisión de esta búsqueda es del 50%.
- La *exhaustividad (recall)*, se puede definir como la proporción de documentos relevantes que son recuperados. Esta es más difícil de calcular por que requiere conocer los documentos relevantes que no serán recuperados durante la búsqueda del usuario. Es, pues, el porcentaje de documentos recuperados relevantes sobre el total de los mismos que se contengan en la colección. Siguiendo con el ejemplo anterior, el usuario ha determinado que uno de los dos documentos recuperados es relevante. Supongamos que hay otros tres documentos de la colección también son relevantes. El sistema habrá sido capaz de recuperar solamente uno de los cuatro documentos relevantes de la colección. En ese caso, la búsqueda realizada ha tenido una exhaustividad del 25% para esa búsqueda.

La fig. 45 muestra los conceptos de precisión y exhaustividad de forma gráfica bajo la perspectiva

de la teoría de conjuntos, a partir de los subconjuntos cuya intersección denominaremos A, B es el conjunto de documentos relevantes y C el de documentos recuperados. Con lo que se puede expresar como la ec. 15.

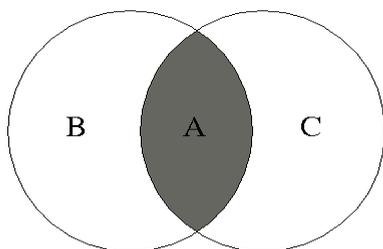


Figura 45: Concepto de precisión y exhaustividad.

Teóricamente, queremos minimizar el conjunto de documentos recuperados (C), pero maximizando el porcentaje de estos que sean relevantes (A), con lo que se conseguirá la máxima precisión y exhaustividad. En la práctica, incrementar uno puede causar que reduzca el otro. Así que hay un punto de equilibrio entre ambas medidas. Estas están en función de cómo el algoritmo de búsqueda encuentra elementos similares (coincidencias entre la consulta y cada documento) y cuántos documentos son recuperados.

$$\begin{aligned} \text{Precisión} &= \frac{A}{C} \\ \text{Exhaustividad} &= \frac{A}{B} \end{aligned} \tag{15}$$

En el caso que nos ocupa, puede que sea de interés una coincidencia exacta (exhaustividad y precisión del 100%) para determinar que una imagen como la utilizada está o ha sido utilizada en algún momento de la producción y por ese motivo está registrada en los fondos del patrimonio gráfico de una empresa. Pero, en general, no buscamos la coincidencia exacta, puesto que la imagen de partida sería justamente esa y ya la tenemos. Estamos interesados en encontrar imágenes que tengan un cierto grado de similitud, esto es, de elementos comunes con aquella. Esto puede deberse a que la imagen de partida es una versión envejecida de la imagen registrada o porque se busca ofrecer ejemplos que contengan alguno de los patrones considerados como de interés en la búsqueda y, estos, puesto que no es posible modelarlos a priori, imposibilitan que se pueda etiquetar la colección para obtener estas medidas de la forma expuesta. (Forsyth, 2001) plantea que una tecnología que sea capaz de administrar una gran colección de imágenes tiene un alto rango de aplicaciones. De ellas, recuperar (buscar, encontrar, extraer), es una de las posibilidades; pero existen otras: explorar (*browsing*), organizar y describir (*image data mining*). Y estas no han sido suficientemente abordadas. En el corazón de todas las aplicaciones subyace la representación de la naturaleza del contenido de las imágenes.

3.6 Discusión

Los trabajos y técnicas de VxC revisados resultan muy restrictivos para nuestro campo de actuación y se puede constatar que la idea de buscar cada simetría por separado es demasiado poco ilustrativa en estas imágenes. También otros autores (Liu et ál., 2010) proponen una discusión de algoritmos

de detección de simetrías. Se puede considerar esta cita como la más reciente aparición de una recopilación sobre operadores relacionados con la simetría, donde se destaca que *“incluso siendo la simetría un tópico de la VxC durante cuatro décadas, pocas herramientas computacionales están disponibles para problemas del mundo real. Un creciente interés tanto en el campo de la VxC como en el de los gráficos por computador, al respecto de la detección de simetrías, ha impulsado muchos trabajos recientes. Es el momento de mirar de cerca a lo que se ha hecho y a dónde podemos llegar a partir de ahí”*. La misma autora dirige el único estudio empírico (Parky et ál., 2008) que se ha podido encontrar hasta la fecha relacionado con este campo, pero totalmente sesgado a los métodos que su grupo de trabajo a utilizado. Utilizan un conjunto de **176 imágenes** con una base de verdad etiquetada a mano a partir de una serie de competiciones de detección de objetos y que han dividido en dos categorías para determinar su comportamiento frente a: (i) imágenes sintéticas vs reales; (ii) imágenes que contienen una sola simetría dominante vs varias simetrías presentes, considerando solo las simetrías de rotación y reflexión.

El resultado de los algoritmos se cuantifica en términos de ratios de resultados correctos sobre el conjunto de imágenes, obteniéndose un 63% del mejor resultado promedio para reflexiones sobre las dos categorías de imágenes. En el caso de imágenes reales baja hasta el 42% para las reflexiones. En el caso de algoritmos que son capaces de detectar simultáneamente varias simetrías, el resultado todavía es peor: 27% para el mejor algoritmo capaz de detectar reflexión y rotación a la vez en el global de las imágenes y hasta solo un 19% en imágenes reales.

Dados estos valores de resultados de detección, **cabe señalar lo difícil del problema**, máxime cuando se utilizan imágenes reales (con imperfecciones y ruidos) y, en cualquier caso, el número de imágenes con las que se realiza la experimentación es bastante limitado. Por la escasa disponibilidad de imágenes correctamente etiquetadas, uno de los objetivos de este trabajo es la creación y publicación de una colección propia de imágenes.

Por lo expuesto se puede concluir que no basta un análisis individualizado acerca de la existencia de cada simetría en la imagen, si no que hay que elaborar esta información hasta alcanzar el concepto de grupo de simetría. En primer lugar se abordará la determinación de la periodicidad, la traslación vista como una simetría global en la imagen y externa al PF, determinado por su geometría y que condensa toda la información de la imagen, puesto que la original se forma con la repetición espacial de este, al menos en el caso de imágenes sin ruido. Después se examinarán las simetrías locales o interiores al motivo extraído de la imagen.

En lo referido a la descripción de imágenes de naturaleza repetitiva como las que se utilizan en el ámbito del diseño gráfico, se utiliza la información del grupo de simetría como concepto abstracto de alto nivel que el diseñador maneja habitualmente. En el plano, existe un número finito de grupos formado con un conjunto de simetrías que aparecen siempre asociadas y que transforman una forma en sí misma.

Para las simetrías interiores nos apoyamos en la teoría de los grupos de simetría en el plano (Horne, 2000), que utiliza el concepto de de grupos de simetría para formular una descripción matemática de las estructuras complejas de patrones en el plano. El conjunto de isometrías que dejan una figura invariante se denominan grupos de simetría. En el caso unidimensional, los grupos de simetría de friso, la imagen muestra una simetría de traslación junto a otras interiores. En el caso bidimensional, la teoría de grupos de simetría del plano, se observan dos simetrías de traslación (que definen el retículo o rejilla) junto a otras interiores.

Para poner en contexto al lector con los con la forma de expresar, se ha recogido tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista de la ingeniería del diseño, una somera revisión terminológica. También se han introducido los aspectos de la teoría, se ha expuesto la

representación gráfica de los diecisiete grupos de simetría en el plano incluyendo su notación estándar y la situación de los ejes de simetría de reflexión (especular y con desplazamiento) y los centros de las simetrías de rotación de orden n que los identifica.

Es necesario mejorar los resultados que se obtienen en identificación y clasificación puesto que los resultados recogidos en la revisión bibliográfica son muy bajos. (Liu et ál., 2010) recoge una discusión y comparación de algoritmos de detección de simetría. El mejor resultado obtenido es del 63% sobre un conjunto de 176 imágenes para la detección una sola simetría de reflexión en la imagen. Cuando considera que pueden aparecer varias, solo considera reflexión y rotación, y valora la tasa de aciertos global de entorno al 26%, bajando al 17% para imágenes reales.

Recientes trabajos exploran el uso de algoritmos basados en características de los puntos de interés como SIFT (Lowe, 2004) o SURF (Bay et ál., 2006) para la detección de la periodicidad. Básicamente se diferencian en que SIFT utiliza características locales obtenidas a partir de gradientes locales de la imagen, mientras que SURF emplea como características los coeficientes de las wavelets que utilizan como descriptores locales (Haar). Ambos coinciden en el uso de técnicas de análisis local de la imagen y trabajar a diferentes escalas para obtener la invariancia a escala. Como, p. ej. (Nasri y Benslimane, 2014) presentan un método automático de extracción de motivos simétricos para patrones periódicos usados en ornamentación basado en el empleo de la autocorrelación y SIFT.

Otros recientes trabajos abogan por el uso de descriptores de texturas como LBP (Brahman et ál, 2014) que tan buenos resultados están dando en el campo del reconocimiento facial. Hasta el momento, utilizando estas opciones, no hemos encontrado trabajos que describan cómo detectar otras simetría que no sea la traslacional; así que no seguiremos (al menos ,de momento) su experimentación.

Las redes neuronales son utilizadas en (Gens, 2014) quien recalca la dificultad todavía existente de resolver la detección de los grupos de simetría mediante la VxC. Aunque lo describe en términos de la simetría de grupos.

En lugar de buscar explícitamente estructuras regulares y retículos que permiten asignar un grupo de simetría a una imagen (Adanova y Tari, 2014) buscan definir el estilo de una imagen como lo que está más allá del uso del color o las formas presentes en una imagen. Para ello consideran la similitud entre parejas de imágenes utilizando las características de SIFT. No tomaremos este camino puesto que no nos proporciona la capacidad de describir la imagen en los términos de conceptos abstractos que nos hemos marcado.

Antes de identificar el grupo de simetría de un a mosaico dado hay que comprobar que se trata de un mosaico periódico, para lo cual es preciso hallar una región unidad y dos traslaciones de mínima longitud y distinta dirección. Trabajos recientes sobre detección del retículo y la extracción del motivo (Cai y Baciú, 2013) parten de, al menos una, propuesta del usuario de lo que es el motivo que se repite para la detección de la simetría traslacional. Siguiendo un algoritmo ascendente (*bottom-up*) registran (utilizando el *HoG*) la imagen original, con lo que se obtiene una posible de malla de conexiones que se va refinando. La determinación de la geometría del retículo puede tardar del orden de minutos. En cambio, entre nuestros objetivos está el que proceso se realice de forma autónoma, si es necesario sacrificando la velocidad del tiempo de respuesta del sistema.

El mosaico deberá poder generarse a partir de su región unidad, mediante la familia de traslaciones obtenidas como composición de las dos traslaciones elegidas. Un posible método es marcar puntos homólogos del diseño, que formarán una retícula. Esta deberá ser alguna de las presentadas:

oblicua, rectangular, rectangular centrada, cuadrada, hexagonal. Este es el objetivo del próximo capítulo antes de presentar las aportaciones a la identificación y clasificación de grupos de simetría en el plano.

La temática de simetría computacional está presente en la literatura reciente. Como tópico consolidado cabe citar la reciente aparición (Liu., 2014) en un compendio de VxC. También es un tema que recibe apoyo oficial, como en el trabajo de (Kaspar et. ál., 2015) sobre síntesis de texturas que es parte un proyecto mayor “*COSYM - Computational Symmetry. Computational Symmetry for Geometry Data Analysis and Design*” que ha recibido apoyo institucional en forma de “*Starting Grant*” por parte del ERC entre 2011 y 2016.

Capítulo 4.

Simetría computacional aplicada a la detección de la periodicidad en la imagen

Este capítulo aborda la determinación de la simetría traslacional, que es una simetría de naturaleza global. Su presencia es característica de las imágenes de carácter repetitivo y sirve para descartar las imágenes que no son objeto de este contexto de aplicación. Estamos describiendo el contenido del bloque “Detección de la rejilla” que hemos mencionado, fig. 46a, en el diseño de la arquitectura del sistema de información que podría utilizar los desarrollos propuestos en esta tesis y que supone un paso de análisis de la estructura global de la imagen. Para ello estudiaremos cómo determinar la periodicidad de una imagen y a partir de la información topológica que se puede obtener, utilizando conceptos de geometría computacional, determinar los valores de geometría de la estructura modular, la rejilla, que subyace a la imagen.

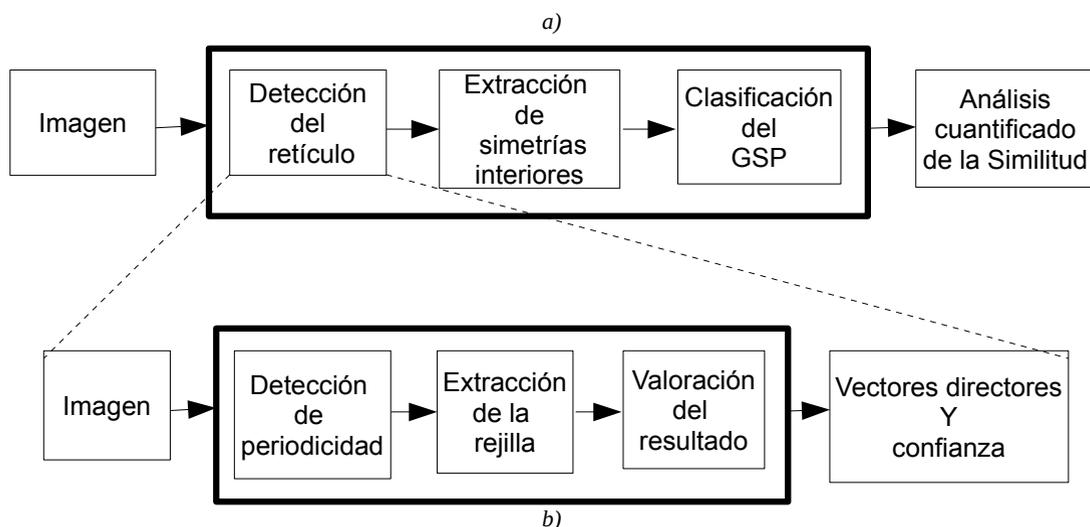


Figura 46: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto (a) y de la secuencia del bloque “Detección de la rejilla” (b).

La dificultad a la hora de detectar la rejilla estriba en que las imágenes del mundo real presentan ruido provocado por una iluminación no uniforme o la posición relativa del objeto y la cámara, debido a la existencia de taras u otras irregularidades en el objeto analizado, o al propio proceso de conversión analógico digital. Ese ruido altera la repetición en entornos locales por omisión o por aparición de otras situaciones periódicas en intervalos diferentes. Por ese motivo es necesario que el proceso de detección sea robusto a estas condiciones.

Nuestra propuesta para abordar el problema consiste en generar las hipótesis de periodicidad que se consideren necesarias y utilizar una validación topológica de estas para escoger la adecuada. Proponemos descomponer el problema de la detección de la rejilla en los pasos que muestra la fig. 46b y que centran el desarrollo de este capítulo. En los siguientes apartados veremos cómo se han diseñado nuestras propuestas.

Primero veremos cómo se conecta el problema de determinar la estructura repetitiva de una imagen y el concepto de rejilla. Después se abordarán las propuestas para la determinación de la periodicidad en una imagen, cuya revisión del estado del arte se ha hecho en el capítulo anterior. Tras esto, e independientemente de la elección de la técnica de cálculo de repetitividad en el

contenido de una imagen, el uso de la información topológica se utilizará para determinar cuáles son los parámetros que describen la estructura repetitiva de la misma. La valoración numérica de la bondad del resultado obtenido cerrará las etapas de este bloque.

Esta cuantificación permitirá evaluar el resultado de cada etapa, así como también un resultado global: tanto desde el punto de vista de si la imagen es regular, como en el de en qué medida lo expresa un determinado enrejado (definido a partir de los dos vectores directores en el plano que lo describen completamente).

4.1 Detección de periodicidad: simetría y geometría computacionales

La idea de este punto es ver que todos los métodos de detección de la periodicidad se reescriben como un problema de segmentación y de búsqueda de conexiones óptimas entre objetos similares. Con ello se generan hipótesis de periodicidad global, que hay que valorar para determinar la periodicidad a nivel de la imagen.

Veamos cómo hemos eliminado la necesidad de segmentar para obtener las hipótesis de repetitividad en la imagen, obteniendo lo que hemos llamado la “rejilla tentativa”. La idea inicial es que encontrando al menos tres puntos con el mismo valor de información de simetría se pueden establecer las dos direcciones del enrejado que exista en una imagen. Pero trabajar solo con puntos y con valores máximos está muy influenciado por el ruido que haya en la imagen, por lo que proponemos una estrategia más robusta.

La entrada de este bloque es la imagen en niveles de gris y la salida es un conjunto de vértices, conectados dos a dos, que representan las situaciones de periodicidad observadas en la imagen. Las posibles relaciones espaciales entre las mismas medidas de periodicidad representadas por estas conexiones son el conjunto de hipótesis que la siguiente etapa examinará para obtener la rejilla.

Los métodos escogidos son: autocorrelación y simetría de fase. La idea es que los métodos que se empleen en esta etapa no necesiten fijar ningún umbral o parámetro previamente y que lo hagan adaptándose a las circunstancias de la imagen en cada caso. Si no se observa esta repetitividad, esta etapa dejará en manos del nivel superior concluir si la imagen se ha de considerar como no regular.

4.1.1 Autocorrelación como detector de periodicidad

Se exige que exista un número mayor de dos repeticiones como elemento aclaratorio de que esa secuencia contiene, con total seguridad, una secuencia que se repite. En ese caso y sin recurrir a información externa, se puede aplicar el proceso de una forma sistemática como se ha definido en el apdo. 4.1.1 “Autocorrelación” del cap. 3 “ Estado del arte”, utilizando un trozo de la imagen (la cuarta parte), como una máscara y realizando la autocorrelación de esta máscara con la imagen entera. Para obtener la geometría de la rejilla se calcularán los picos del mapa de autocorrelación y se obtendrán los vectores que definen sus uniones.

Dado que la autocorrelación se define como una correlación en el dominio de la imagen, la definición de esta operación se puede instanciar para imágenes discretas con valores enteros como en la ec. 16.

$$\begin{aligned}
 & \text{Siendo } A \in \mathbb{Z}^{M \times N} \text{ y } B \in \mathbb{Z}^{M/4 \times N/4} \\
 & \text{se define la autocorrelación } C \in \mathbb{Z}^{M/4 \times N/4} \text{ como} \\
 C(i, j) &= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \sum_{m=0}^{(N/4)-1} A(m, n) B(m+i, n+j)
 \end{aligned} \tag{16}$$

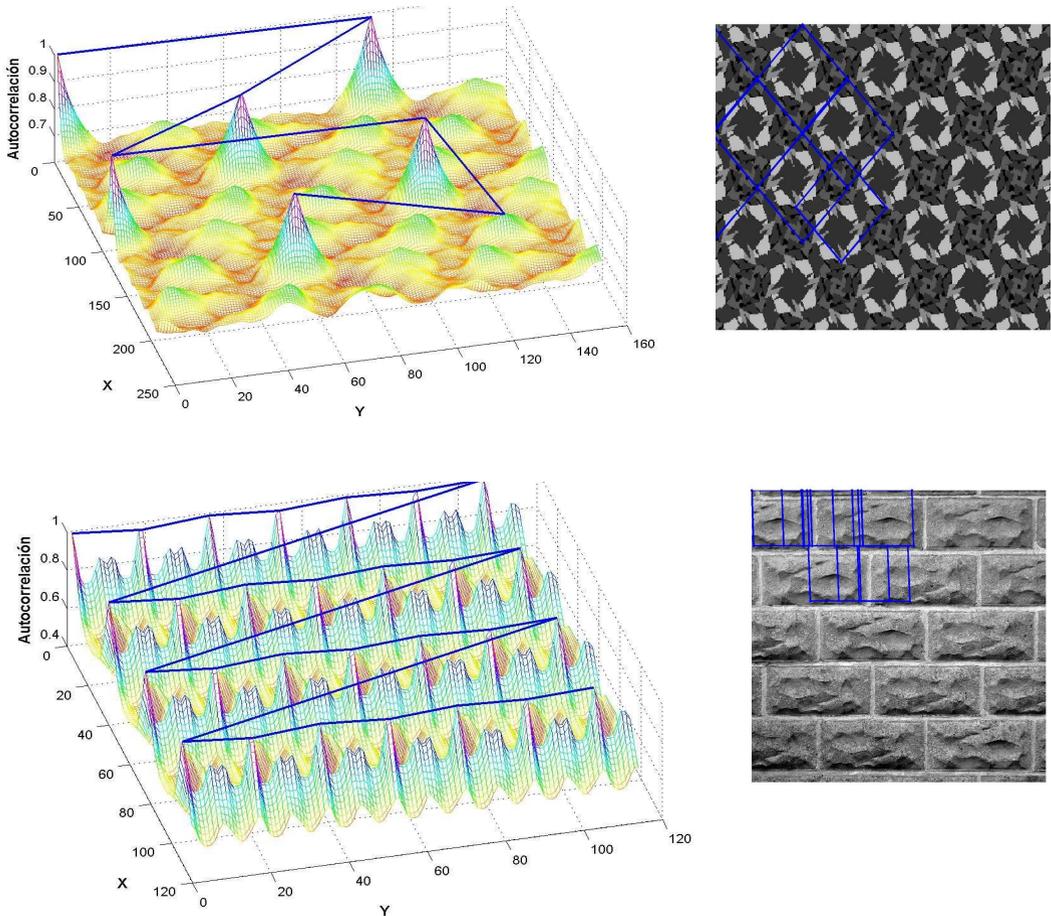


Figura 47: Resultado de la autocorrelación en imágenes de niveles de gris. A la izquierda los picos de la autocorrelación, a la derecha el enrejado resultante de conectar los picos.

La fig. 47 muestra dos ejemplos de mapas de autocorrelación así como el resultado de sobreponer el enrejado calculado sobre la imagen a partir del punto (0,0). En el segundo caso se observa que el resultado es erróneo, al haber utilizado un único valor de umbral para definir los picos cuya conexión estudiar. Es el problema de esta técnica: la selección de los picos de la autocorrelación. Este es un problema que depende del contenido de cada imagen; puesto que el rango dinámico de estas produce un mapa plano es muy complejo discriminar entre los valores significativos de los máximos locales. Veamos cómo han abordado esta problemática los trabajos al respecto en la literatura para pasar a definir nuestra propuesta en este contexto.

La mayor parte de trabajos emplean la autocorrelación para la detección de la estructura de la imagen, en base a determinar los picos o máximos locales y la obtener los vectores directores. En cuanto a la detección de picos, existen diversas técnicas. El trabajo de (Lin et ál., 1999) presenta una aproximación automática, sin parámetros, basada en suavizar la imagen con una gaussiana. Para ello utiliza una función gaussiana de suavizado y se incrementa su varianza para extraer los picos de forma automática sobre una versión suavizada de la imagen original. Sobre esta versión de la

imagen, similar a un análisis en escala, se extraen los máximos locales por comparación directa del valor de la imagen de autocorrelación así tratada. Cuántos de estos picos son necesarios para el siguiente paso no está determinado en estos trabajos por lo que otros autores han propuesto otras aproximaciones. (He, et ál., 2004) propone el uso de un método de optimización para determinar de forma automática el número de picos de la autocorrelación en cada imagen sobre la lista de picos obtenidos con el uso del criterio de **región de dominancia** sin haber suavizado la imagen original sobre la que calcular la autocorrelación. También (Han et ál., 2008) critica este planteamiento empírico de la elección del número de picos de la autocorrelación a utilizar y plantea realizar un modelo estadístico de estos máximos para escoger los cuatro que mejor expliquen la naturaleza repetitiva de la imagen.

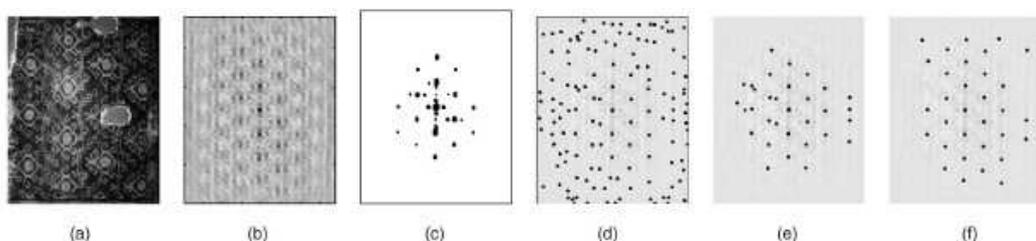


Figura 48: Resultados de la autocorrelación (Liu et ál., 2004a): (a) Imagen original; (b) Autocorrelación; picos obtenidos con (c) un umbral global; (d) el método de Lin et al. (1999); (e) los 32 más grandes de Lin et al. (1999). (f) Los 32 más dominantes de Liu et al., 2004a).

La fig. 48, extraída del trabajo de (Liu et ál., 2004a), es utilizada para enfatizar la dificultad de la detección de picos, en tanto que imponer un umbral fijo (fig. 48c) es difícilmente extrapolable a todas las imágenes y que el método utilizado por Lin (Lin et ál., 1999), no es discriminador al mezclar puntos de la estructura con puntos de ruido, fig. 48d. En cambio, el mismo número de puntos obtenidos con la metodología de regiones de dominancia, en esta imagen, ofrece visualmente un mejor resultado, fig. 48e..

Para obtener los vectores directores tanto (Lin et ál., 1999) como (Liu et ál., 2004a) utilizan la transformada de Hough generalizada (Ballard, 1981) para determinar los dos vectores más pequeños que mejor expliquen la mayor parte de los puntos obtenidos. La variante de Liu consiste en incorporar como restricción propia de la teoría matemática de grupos de simetría que el ángulo entre los dos vectores no puede tomar cualquier valor sino solo dentro del rango entre 60° y 90° .

4.1.2 Propuesta para el uso de la autocorrelación

Nosotros proponemos combinar estas ideas junto a una etapa de “preproceso” para el uso de la autocorrelación que permita un proceso rápido, sin necesidad de fijar parámetros permitiendo una adaptación a las características de cada imagen. El algoritmo se muestra en pseudocódigo en el listado 2 en el que se ha destacado en negrita los tres pasos que se realizan: mejora del contraste, detección de máximos locales y obtención de conexiones con el criterio de región de dominancia.

A partir del mapa de autocorrelación se realizará un proceso iterativo en el que se escoge un valor umbral (el más alto del mapa inicialmente) con el que se obtenga un número de máximos locales igual o superior a cinco. Una vez obtenido se utiliza la función *houghpeaks* (González et ál., 2000), como operador que permite detectar periodicidades al determinar los picos de la autocorrelación que sean comparables, que representen la misma “situación”.

```
funcion deteccionDeLaPeriodicidad_Autocorrelacion ( I ) devuelve conexiones
Imagen = versionMayorContraste( I );
M = recortar( Imagen, 0.5 );
[mapaAutocorrelacion] = autocorrelacion(Imagen, M);

valor = 100;
nPuntos = 0;
conexiones = 0;
mientras (valor > 1) y (nPicos < 4 )
    [mapaBinario, nPicos] = picosAutocorrelación( mapaAutocorrelacion,
                                                valor, 5x5 );

    si (nPuntos < 4)
        entonces
            valor = valor - 1;
        sino
            conexiones = houghPeaks( mapaBinario, nPicos );
    fsi
fmientras
ffuncion
```

Listado 1: Propuesta del uso de autocorrelación para la detección de la rejilla.

En el peor de los casos, que la imagen muestre exactamente dos repeticiones del motivo en las dos direcciones principales del mismo, por el teorema de Nyquist-Shannon, la autocorrelación obtendrá dos picos en cada dirección principal, cuatro en total. Como se desconoce la geometría de la rejilla y dado que se espera una repetición de dos, se escoge como máscara para la autocorrelación la cuarta parte de la imagen.

Por ejemplo su cuarto superior izquierdo. Esta máscara se encontrará con valor máximo de autocorrelación en las coordenadas (0,0). Por lo que en total cabe esperar un número mínimo de cinco picos en el caso general de las imágenes que utilizamos.

Nosotros decidimos utilizar la implementación más cercana de las ideas de Liu para tener esta como referencia para evaluar las mejoras de nuestras propuestas, con lo que se utiliza una función de elección de máximo local sobre un entorno de 5x5 píxeles que se aplica sobre cada punto de la imagen de partida.

Las funciones propuestas de *picosAutocorrelación* y *houghPeaks* se implementan con las propias de MatLab, *colfilt* y *houghPeaks* respectivamente, por lo que no se entra a detallar cómo se implementan.

El listado 2 muestra, en forma de pseudocódigo, el algoritmo de preprocesado *versionMayorContraste*, que escoge la “versión” de la imagen que ofrece mayor resolución para determinar el enrejado. De esta forma se evita un paso de segmentación que necesita fijar umbrales y se trabaja con la versión que proporciona más elementos de juicio para la determinación de la rejilla.

Tanto en un caso como en otro el enrejado presente en la imagen no varía. Esta operación se realiza a una escala menor que la original, con lo cual el coste aproximado es de $O(N/4)$, siendo N la resolución de la imagen de partida.

```
funcion versionMayorContraste ( I ) devuelve Imagen

I_escala = reescalarLaImagen( I, 0.5 );
M = recortar( I', 0.5 );
[mapaDirecto] = autocorrelacion(I_escala', M );
[mapaInverso] = autocorrelacion(~I_escala, M );

[conexionesDirecto]= houghPeaks( mapaDirecto );
[conexionesInverso]= houghPeaks( mapaInverso );

si ( tamaño( conexionesDirecto )>= tamaño( conexionesInverso ) )
entonces
    Imagen = I;
sino
    Imagen = ~I;
fi
ffuncion
```

Listado 2: Preproceso propuesto para mejorar los resultados obtenidos con la autocorrelación.

4.1.3 Simetría de fase como detector de periodicidad

En este apartado abordamos el uso de técnicas locales de detección de simetría junto a la discusión de los parámetros del proceso y cómo se pueden ajustar a cada imagen. Es importante recalcar que se propone utilizar la simetría de fase, expuesta en el cap. 3 de “ Estado del arte”, como un método de análisis de imagen porqué:

- Es una medida de simetría basada en el análisis de información frecuencial (local) contenida en la imagen.
- Es invariante a cambios de luminancia (contraste) y no requiere un paso previo de objetos.

La simetría de fase se puede definir, brevemente, como la cuantificación en una coordenada de la señal original, de la concordancia de valores de fase de las componentes frecuenciales de una señal. Trabajando con valores de fase se obvia la necesidad de segmentar la imagen y se obtiene una mayor robustez en presencia de ruido en la señal. Esta medida deriva de la de congruencia de fase que se puede describir, brevemente, como la caracterización del ámbito espacial de la concordancia de fase alrededor de un punto, permitiendo describir a ese punto como característico de la imagen, en tanto que pertenece a un borde o discontinuidad en la misma.

Para calcular estas características hemos utilizado la metodología de Kovese de SDF, expuesta en el cap. 3 de “ Estado del arte” sobre imágenes repetitivas, obteniéndose los resultados que se muestran en la fig. 49. En la que se observa que hay mucha información condensada en estos cálculos para determinar el papel de los puntos característicos (por propiedades de simetría) de una imagen. Es una muestra de la complejidad del resultado de aplicar directamente el análisis de fase sobre las imágenes que son propias del contexto de aplicación de este trabajo. Sin necesidad de segmentar la imagen original se obtiene una imagen equivalente en la que se ha simplificado el contenido del mapa de bits. Ahora es independiente del valor de color de los puntos de la imagen y mantiene la información de repetitividad intacta.

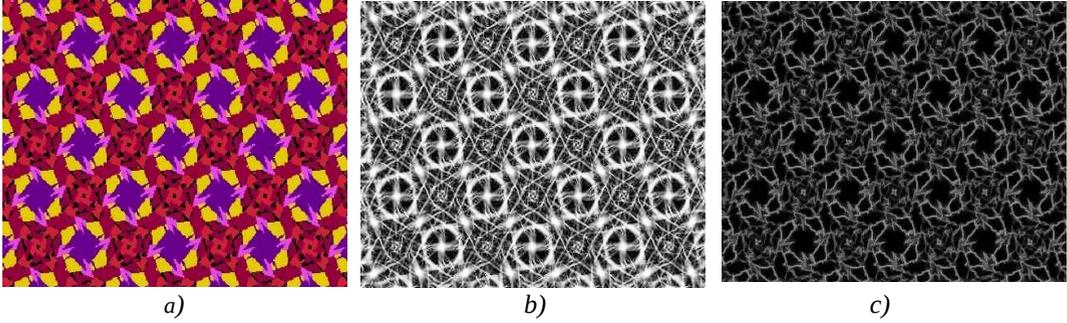


Figura 49: Resultado de aplicar el análisis de fase: a) imagen original, b) simetría de fase y c) congruencia de fase (ecualizada).

	Componente de simetría de fase	Componente de orientación
Versión directa		
Versión inversa		

Tabla 2: Visualización de los resultados obtenidos al seleccionar los parámetros del algoritmo de análisis de simetría de fase de Kovesi.

Proponemos un análisis a partir de la obtención de dos versiones de la misma imagen, como se muestra en la tabla 2, complementarias. La transformación se implementa con una pareja de filtros de wavelet de Gabor en contraposición. En los puntos de simetría, los valores de la pareja de filtros

tienen la máxima discrepancia. De manera que para adaptarse a las condiciones de cada imagen, se obtienen dinámicamente los valores de los parámetros que utiliza en cuanto a polaridad, número de orientaciones y de escalas:

- Polaridad. Como detector de bajo nivel que es, no tiene información acerca de la diferencia entre fondo y objeto, así que detectará tanto simetrías en el fondo como en los objetos. Este parámetro permite filtrar los patrones de fase obtenidos, en zonas claras, oscuras o ambas, véase apdo. 3.3.2 “Análisis de fase“. Por robustez del proceso y puesto que el resultado es equivalente, hemos optado por fijar el parámetro de polaridad y obtener las simetrías por separado variando la imagen, véase la tabla 2. Obteniendo un resultado que llamaremos **versión directa**, al aplicarlo sobre la en la imagen original y otro, con el negativo de la imagen original, que llamaremos **versión indirecta**.
- Número de orientaciones. Se ha escogido inicialmente un número de 180 puesto que cubre el rango completo de direcciones en el plano proyectadas en un semiplano. Según la teoría de grupos de simetría, no se permiten simetrías de rotación de menos de 30°, por lo que un bajar este número a 26 (en pasos de 7°) ofrecería la suficiente precisión. El tratamiento estadístico de los resultados apuntaba a valores menores y puesto que las características bidimensionales de una imagen tienen una dirección preferida (Robbins, 1996), se justifica que hemos simplificado el análisis hasta reducirlo a una sola orientación.
- Número de escalas. Es interesante reducirlo por que así se minimiza el tiempo de cómputo necesario, además las escalas más altas aportan ruido a la discriminación de las zonas de interés, puesto que solo añaden pequeños detalles que las diferencian, pero a nivel global no son de interés. Como contrapartida hay que ajustarlo a la propia imagen, pero no es un valor conocido a priori. Si se sabe que en propia imagen se dan un mínimo número de repeticiones se puede tomar la inversa de este, pero como las imágenes de que disponíamos no cumplían estas restricciones hemos reducido este valor a $\log_2(\max(M,N))$, siendo $M \times N$ el tamaño de la imagen.

Con estas consideraciones, la base de nuestra propuesta de parametrización está en la definición del filtro implementado con *wavelets* de Gabor. Como resultado de la aplicación de este filtro se obtiene una medida de “desfase” en cada punto de la imagen. El proceso utilizado, para una imagen, devuelve una matriz con los valores de fase calculados *mFase*, como muestra el listado 3.

```
funcion calcularFase( imagen, minWaveLength, thetaSigma ) devuelve mFase
  ds, dc ← distAngular(imagen, orientación );
  dtheta ← ||atan2(ds, dc)||
  spread ← componenteAngular( dtheta, thetaSigma );
  para longOnda ∈ minWaveLength .. maxRadio( imagen )
    filtro ← crearFiltroLogGabor( orientación, longOnda, spread );
    (resp1, resp2) ← imagen ⊕ filtro;
    energiaOrientacion(α); ← combinar(energiaOrientacion(α), resp1, resp2);
  fpara
  mFase ← combinar( energiaOrientacion[ orientaciones ] );
ffuncion
```

Listado 3: Algoritmo para el cálculo del desfase de las componentes de frecuencia de una imagen.



Figura 50: Elementos del filtro específico para una orientación desglosado en sus dos componentes: a) intervalo de longitudes de onda y b) direccionalidad (spread).

El filtro es calculado variando sus dos elementos principales. En forma gráfica, la combinación de estas dos componentes se puede ver en la fig. 50 que muestra la longitud de onda (a) y la máscara de pesos (b) que se aplica a la vecindad espacial de cada punto. Estos elementos representan:

- La frecuencia de corte, definida por el radio, que ajusta la banda de frecuencias para la que crea el filtro, especialmente se puede representar como la contribución ponderada de los píxeles a una cierta distancia del punto de la imagen considerado, así lo representa la fig. 50a. Para las *wavelets*, el valor de la frecuencia de corte se hará variar en el intervalo de longitudes de onda comprendidos entre el indicado (*minWaveLength*) y el tamaño de imagen. En principio debería bastar con la mitad del tamaño de la imagen para que sea observable la repetición de un patrón en la misma, pero así este método puede funcionar con imágenes degradadas, esto es, que contienen apenas una repetición y media.
- El *spread*, que determina la orientación espacial en que se aplica el filtro. Esto es el ángulo o la anchura de puntos vecinos a contemplar. Impone la direccionalidad selectiva (fig. 50b) con que será aplicado el filtro.

El papel de *thetaSigma* es importante en cuanto a que define la direccionalidad, ec. 17 pudiendo limitar la detección de simetrías a las debidas solo a ejes cuando toma un valor de direccionalidad alto.

$$spread = e^{\frac{-dtheta^2}{2 * thetaSigma^2}} \tag{17}$$

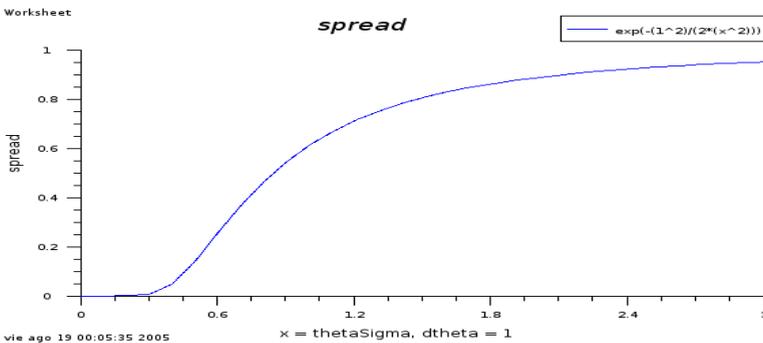


Figura 51: Rango de variación del exponente involucrado para el cálculo de la función *spread* obtenido con LabPlot.

Para decidir el valor del *spread* se ha estudiado el rango de variación sobre esta fórmula, tomando un valor de *dtheta*=1 para simplificar la expresión. La fig. 51 representa gráficamente esta nueva formulación, mostrando la forma exponencial de esta variable. Con *thetaSigma*=1 se encuentra el punto de tangente máxima. Este es un buen punto pues para dirigir el análisis. Además nos garantiza una desviación estándar para la función gaussiana que se utiliza al construir el filtro en el plano frecuencial de valor unitario, con lo que tenemos asegurada una gaussiana normal y las propiedades que se derivan de esta.

4.1.4 Algoritmos para la determinación de la periodicidad a partir del análisis de simetría fase

Como hemos visto en el apartado anterior, la simetría de fase también va a servir para realizar la búsqueda de la existencia de periodicidad en la imagen con robustez y adaptando los valores del proceso a las condiciones de la imagen de forma automática.

El algoritmo empleado, véase el listado 4, es un proceso de optimización de la disposición más observable en la imagen de elementos simétricamente locales. El algoritmo avanza hasta que un número mínimo de objetos son encontrados o hasta que se han explorado todas las posibilidades. Se ha concluido que el número mínimo puede ser de tres, en tanto que entre 3 objetos se pueden determinar dos direcciones no colineales. La segmentación en el dominio de la simetría de fase es todavía compleja por la existencia de ruido en la imagen y de efectos de bordes en sus extremos. Así que se ha de realizar un proceso iterativo de determinación del valor umbral más apropiado , p. ej., descendiendo desde el máximo valor de la componente de fase.

```
funcion deteccionDeLaPeriodicidad_analisisDeFase( I ) devuelve conexiones
// Transformación y extracción de los objetos de Kovesi
[SymD, OriD, SymI, OriI] = transfDominioSimetria( I );
[conexiones]<-extraerObjetos(symD,symI)
ffuncion
```

Listado 4: Algoritmo de determinación de las conexiones del dominio de la imagen al de la simetría utilizando la simetría de fase.

Como se recordaba en el punto anterior existe otra vía: el análisis de fase también obtiene como resultado, una segunda componente: la de orientación. Esta refleja el ángulo, para cada punto de la imagen, donde se obtiene el valor de simetría más alto. Esta componente muestra valores que sí son ya discretos y directamente separables. Se ha estudiado su uso y se ha constatado que valores altos en el dominio de la simetría de fase son el resultado de las contribuciones acumuladas de las respuestas de los filtros sobre un amplio rango de orientaciones.

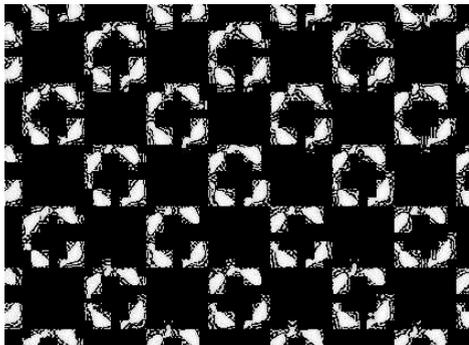
Además, si se mira solo en una dirección, se obtiene una versión directamente binaria de la imagen de orientaciones: con valores de “1” indicando que se ha obtenido una respuesta apreciable del filtro en esa dirección y “0” en caso contrario. La decisión de cuándo es apreciable se basa en la comparación con una estimación del ruido presente en cada imagen. Estos valores se obtienen de los de simetría en la escala más baja del análisis multiresolución de obtención de los valores de simetría de fase.

Cada imagen tiene, inicialmente, una desconocida distribución de los valores de los píxeles de fondo y de los objetos. Proponemos aplicar el análisis de fase y obtener los resultados tanto sobre la versión directa (I), como sobre la inversa (~I). Como resultado se obtienen dos imágenes de simetría: *SymD* (por lo de directa) y *SymI* (por lo de inversa), junto con sus correspondientes imágenes de la componente de orientación utilizando el mismo criterio para la nomenclatura: *OriD*

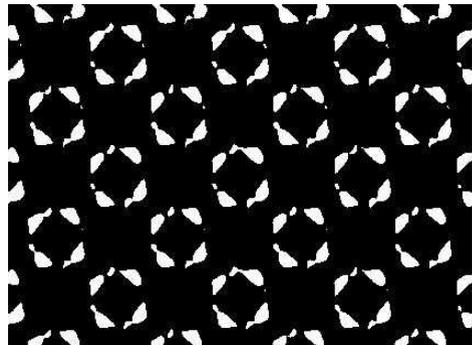
y *OriI*. El listado 3 muestra en forma de pseudocódigo esta operación.

```
funcion [SymD, OriD, SymI, OriI] = transfDominioSimetria( I );  
  param ← dimensiones( I );  
  [SymD, OriD, SymI, OriI] ← phaseSym( I, param );  
ffuncion
```

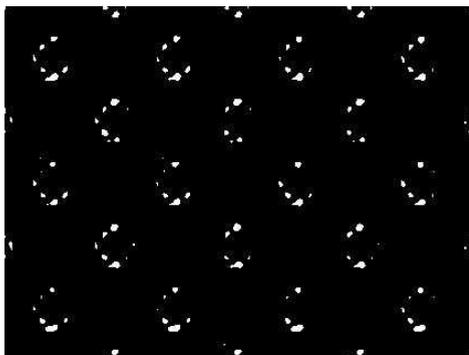
Listado 5: Algoritmo de transformación del dominio de la imagen al de la simetría utilizando la simetría de fase.



a) Fase (ecualizada,) SymD



b) Orientación, OriD



c) Fase (ecualizada), SymI



d) Orientación, OriI

Figura 52: Separación de componentes resultantes del análisis de simetría de fase por polaridad

Donde *phaseSym* es la versión de código original a la que le hemos pasado un conjunto de parámetros que calculamos para cada imagen en función de sus dimensiones, como ya hemos indicado anteriormente. El resultado de la transformación al dominio de Simetría es el conjunto formado por las cuatro imágenes: *SymD*, *OriD*, *SymI* y *OriI*. La fig. 52 las muestra agrupadas : en la primera fila utilizando polaridad con valor 1 y en la segunda con -1. Analizar una de estas imágenes es sencillo, solo será necesario umbralizar y extraer objetos.

Hemos aplicado el algoritmo de SDF para obtener una transformación que reduce la imagen a un conjunto de “pseudoobjetos”. Los llamaremos **objetos de simetría**, por que son las áreas de la imagen que exhiben un alto valor de simetría local y que aparecen de forma repetida en la imagen.

4.1.5 Algoritmos para la extracción de los objetos de simetría

Después de la transformación de SDF se obtiene una serie de elementos, etiquetados como objetos, que representan zonas de simetría local. Si la lista tiene información de, al menos, un mismo objeto en tres posiciones diferentes será considerada viable. De no ser así se analizará la otra versión del análisis de SDF, que buscará simetrías en la imagen complementaria a la utilizada en primer lugar y se fusionarán para aumentar la información disponible. De no ser así se procederá a variar los parámetros del análisis y este paso se repetirá sucesivamente, hasta converger o alcanzar los valores máximos de la imagen, que llevarían a determinar que no se puede hallar simetría alguna en ese caso. Se trata de obtener todas las **hipótesis posibles de periodicidad** en la imagen, esto es, buscar las coordenadas en que se dan valores similares de simetría.

La implementación de esta técnica de detección de periodicidad se puede realizar a partir de cualquiera de las dos componentes del análisis de simetría de fase: la información de fase o la de orientación.

```
función [objs,nObjs]<-extraerObjetos(symD,symI)
  TSym <- 100%;
  while (nObjs < 4) and (TSym > 0)
    objectsD <- threshold( SymD, TSym )
    objectsI <- threshold( SymI, TSym )
    TSimilitude <- 100%;
    mientras (nObjs < 4) and (TSimilitude > 0)
      objs, nObjs<-count & compare (objectsD, objectsI, TSimilitude)
      si (nObjs < 4)
        TSimilitude <- TSimilitude - 1;
        fsi
      endWhile
      si (nObjs < 4)
        TSym <- TSym - 1
      endIf
    endWhile
  endFunction
```

Listado 6: Primera versión del algoritmo de detección de periodicidad utilizando la componente de fase del análisis de simetría de fase.

En primer lugar utilizaremos las imágenes de simetría de fase (directa e inversa), las cuales segmentaremos empleando una técnica de umbralización simple, con un valor de umbral (*TSym*) que es un porcentaje del valor absoluto máximo. Este valor se ajustará de manera iterativa para cada imagen, decreciendo desde el valor de fase máximo que se observe en una imagen.

En cada iteración se obtienen dos imágenes binarias (*objectsD,objectsI*) que muestran “objetos”, en el sentido de áreas alrededor de un máximo local que aparecen de forma repetida y que muestran cierta forma regular. Un simple paso de etiquetado y comparación permiten extraer esos objetos y determinar los que más se repiten en la imagen. Como medida de similitud entre objetos se ha escogido la distancia euclídea entre los rectángulos (*bounding box*) que los contienen. Se han normalizado mediante la eualización de su contenido y la elección del centro de masas del objeto como centro del rectángulo. Como a priori no se sabe cuántos objetos aparecerán y para evitar fijar ningún valor, se utiliza un umbral iterativo (*TSimilitude*) que es un porcentaje de la distancia normalizada. Este valor, se hace decrecer en cada iteración hasta alcanzar un número mínimo de objetos similares: tres para poder establecer las dos direcciones de repetitividad. De forma algorítmica, el proceso queda como en el listado 6.

```
función [objs, nObjs]<-extractObjs( orientacionD, orientacionI )
objectsD <- orientacionD
objectsI <- orientacionI
TSimilitude <- 100%;
  mientras (nObjs < 4) and (TSimilitude > 0)
  objs, nObjs<-count & compare (objectsD, objectsI, TSimilitude)
  si (nObjs < 4)
    TSimilitude <- TSimilitude - 1;
  fsi
fmientras
ffunción
```

Listado 7: Segunda versión del algoritmo de detección de periodicidad utilizando la componente de orientación del análisis de simetría de fase.

En segundo lugar, emplearemos las imágenes de orientación, que segmentaremos como en el paso anterior. Obsérvese que estas imágenes son directamente binarias al utilizar una sola dirección para realizar el análisis de simetría de fase y se obtienen objetos similares que los que se observan alrededor de los valores máximos locales en la componente de fase. Recuérdese la fig. 52 que ha mostrado ya esta idea. Proponemos el uso de la componente de orientaciones binarizada porque es sencilla de obtener (en cuanto a costes computacionales) y porque no es necesario establecer umbrales para segmentar los objetos. Así, una segunda versión del algoritmo se muestra en el listado 7.

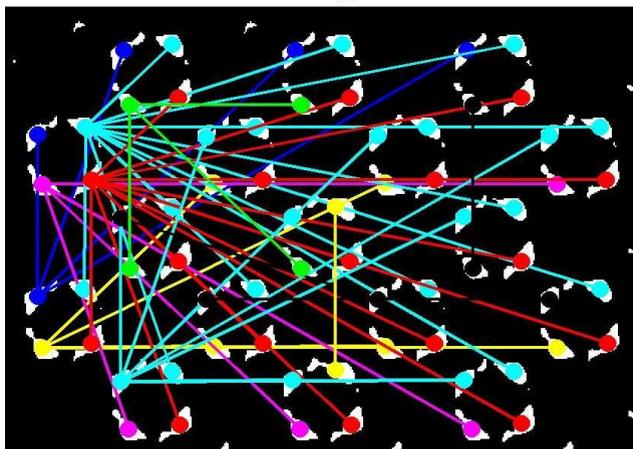


Figura 53: Hipótesis de periodicidad calculadas para una imagen: rejilla tentativa.

En resumen, por la componente de fase es necesario iterar para no depender de umbrales, mientras que utilizando la componente de orientación la obtención del umbral ya no es necesaria, se da de forma implícita. Independientemente del camino (por la componente de fase o por la de orientaciones) el resultado de la detección de periodicidad tras el análisis de fase consiste en examinar las relaciones espaciales entre los “objetos de simetría” que representan una misma situación, obteniéndose un resultado como el que muestra la fig. 54.

Con esto obtenemos una **rejilla tentativa** formada por el conjunto de vectores directores que describen las relaciones espaciales entre todos los “objetos de simetría” que localmente se comportan igual. El examen de estas uniones tentativas debe señalar cuál es la tendencia de

repetitividad de la imagen, que es el objetivo del siguiente punto.

4.2 Extracción del retículo

Este punto toma como partida la información “tentativa” del apartado anterior, independientemente de la técnica utilizada para calcular las hipótesis de periodicidad. Las periodicidades locales encontradas en diferentes escalas y localizaciones de la imagen son consideradas como candidatas entre las que encontrar la periodicidad global: son tomadas pues como hipótesis a explorar.

Nuestro objetivo en este punto es, a partir de la información topológica, utilizando métodos de **geometría computacional**, escoger la pareja de vectores directores que mejor explique la naturaleza repetitiva de la imagen. La idea es consolidar la elección del retículo, mediante un proceso de validación de la hipótesis más descriptiva de las generadas en la etapa anterior.

Veremos que se dan casos de indeterminación y cómo proponemos resolverlos cuando los valores obtenidos son muy próximos numéricamente y cuando definen varios enrejados posibles. El algoritmo que proponemos para calcular los dos vectores directores que definen la geometría de la rejilla es, en pseudocódigo, de la forma que muestra el listado 8.

```
función [ v1,v2 ] ← extraccionDeLaRejilla( conexiones )
  listaDirecciones←reducirConexiones( conexiones );
  v1,v2 ← votación( listaDirecciones);
ffunción
```

Listado 8: Algoritmo para la extracción de la rejilla.

En primer lugar hay que **reducir esta lista de conexiones** utilizando restricciones espaciales impuestas en la geometría de un mosaico regular. De acuerdo a esto, la ruta entre cualesquiera de los puntos de la rejilla se descompone en un número mínimo de conexiones locales de longitud mínima. Esta lista de conexiones representa todas las posibles uniones entre dos objetos iguales. Por lo tanto representa la instanciación de todas las posibles traslaciones de un objeto en el plano. Algunas de ellas nunca se darán en una rejilla por la característica de esta de ser discreta.

En segundo lugar, se trata de escoger de esa lista reducida la pareja de vectores que definen una rejilla, tal que esta sea la que mejor explica el contenido repetitivo de la imagen. Este paso constituye la consolidación de la rejilla, en tanto que significa escoger dos valores y descartar finalmente todos los demás. Determinar las direcciones principales que definen la rejilla se corresponde con obtener los valores predominantes de esa lista de conexiones, representadas por parejas de ángulo y módulo. Un sencillo paso de conteo o **votación** se encargará de esta subtask.

4.2.1 Geometría computacional: grafos de vecindad topológica

En muchos problemas de reconocimiento de formas como agrupación (*clustering*) y aproximaciones computacionales a la percepción, se busca encontrar si existe alguna estructuración dentro de un conjunto de puntos en el plano en forma de arcos que conectan parejas de puntos vecinos. Ejemplos de técnicas que se utilizan habitualmente en estos ámbitos son el *minimal spanning tree* (MST) y la triangulación de Delaunay (DT). Estas dos, se revisan en (Mount, 2001) junto a otras alternativas para resolver problemas de localidad y proximidad. Se ha escogido el algoritmo **Relative Neighbourhood Graph** (RNG) porque busca extraer una estructura perceptualmente significativa de un conjunto de puntos. Esta será la herramienta utilizada para simplificar las conexiones que representan periodicidades que se hayan encontrado en una imagen.

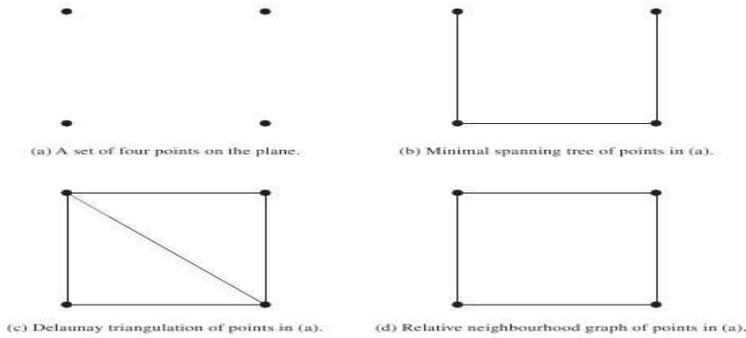


Figura 54: Resultados de la unión de un conjunto de puntos (a) con diferentes grafos: MST (b), DT (c) y RNG (d). Extraído de Toussaint G. T. (1980).

En geometría computacional, RNG es un grafo no dirigido definido para un conjunto de puntos en el espacio Euclídeo de forma que conecta dos puntos, p y q , mediante un arco cuando no existe un tercer punto r que esté más próximo a p y q que ellos mismos entre sí. Fue propuesto por (Toussaint, 1980) como una forma de definir la estructura de un conjunto de puntos que coincida con el criterio de percepción humana de la forma de ese conjunto. También se puede demostrar que es un superconjunto de MST y un subconjunto de la DT (construida sobre el diagrama de Voronoi, por ejemplo) como se muestra en la fig. 54. Una posterior revisión del tema se puede ver en (Jaromczyk y Toussaint, 1992) con más detalles sobre propiedades, límites, algoritmos y variantes de grafos de vecindad, así como aplicaciones en el campo de la VxC.

4.2.2 Eliminación de hipótesis de periodicidad

De todas las “teóricas” uniones hay que descartar las que no signifiquen relaciones espacialmente vecinas: las uniones más próximas y compactas, espacialmente hablando, de cada tipo de objetos. Para ello, a partir de la “rejilla tentativa” (fig. 54), calcularemos el RNG (fig. 55).

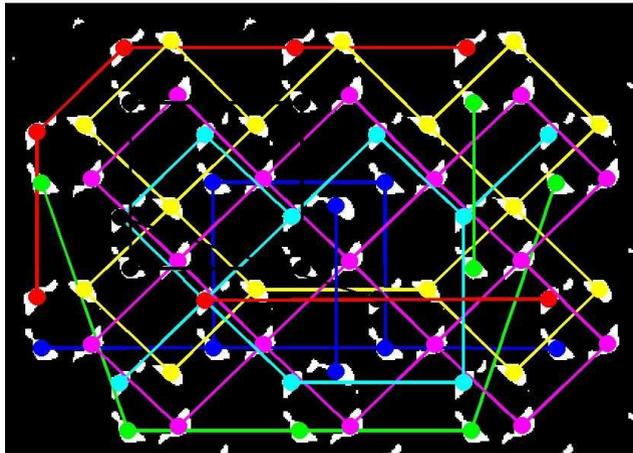


Figura 55: Representación gráfica de las conexiones topológicas encontradas sobre la imagen wall10 de la colección Wallpaper.

El RNG se define a partir de un conjunto S de puntos en R^d , como el grafo no dirigido que contiene los arcos de menor distancia entre cada dos puntos de S , ec 18, donde $dist(p,q)$ es la distancia euclídea entre p y q .

$$\forall r \in S; r \in S / dist(r, p) > dist(p, q) \wedge dist(r, q) > dist(p, q) \quad (18)$$

Siendo $B(x,r)$ la esfera abierta centrada en el punto x de radio r , se define la luna, $L(p,q)$, de dos esferas de radio $dist(p,q)$ centradas respectivamente en p y q , véase ec. 19, como la intersección del subconjunto de puntos que define L con respecto a S . Esto es, si existe un arco entre (p,q) es porque no hay otro punto del conjunto que esté en el camino que representa esta conexión.

$$\begin{aligned} &(p, q) \text{ es un arco si } L(p, q) \cap S = \emptyset \\ &\text{siendo } L(p, q) = B(p, dist(p, q)) \cap B(q, dist(p, q)) \end{aligned} \quad (19)$$

El algoritmo para calcular el RNG de n puntos dados por sus coordenadas cartesianas $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2), \dots, p_n(x_n, y_n)$ es de la forma:

1. Calcular la distancia entre todas las parejas de puntos: $d(p_i, p_j) \mid i, j=1, \dots, n; i \neq j$.
2. Para cada pareja de puntos (p_i, p_j) calcular $\delta_{max}^k = \max \{ d(p_k, p_i), d(p_k, p_j) \}$ para $k=1, \dots, n; k \neq i, k \neq j$.
3. Si para cada par de puntos (p_i, p_j) no existe un δ_{max}^k que sea más pequeño que $d(p_i, p_j)$, entonces se crea un arco entre p_i y p_j .

El primer paso de este algoritmo requiere $O(n^2)$ operaciones para obtener n^2 parejas de puntos. Además, para cada una de esas parejas se necesitan $O(n)$ operaciones; con lo que el coste total es de $O(n^3)$. También se puede calcular a partir del diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay con un coste de $O(n^2)$, véase (Toussaint, 1980).

4.2.3 Algoritmo para la extracción del retículo

EL grafo RNG contiene el subconjunto de direcciones (vectores directores) que más se repiten en la imagen. Podemos utilizar un esquema de votación para obtener las dos direcciones predominantes. Para ello realizaremos un histograma de las direcciones (pares longitud-ángulo), utilizando valores para el ángulo entre 1 y 180 y para el módulo entre 1 y la longitud de la diagonal de la imagen. La fig. 56 muestra el resultado para el RNG de la fig. 55. Se aprecian dos direcciones más votadas (picos del histograma) en los valores (111,0) y (79, 45). La fig. 57 muestra esas dos direcciones predominantes y su representación en la imagen original.

El resultado final de esta etapa será el par de direcciones predominantes de la imagen, las cuales definen la geometría del retículo. Estas dos direcciones delimitan el PF, tal y como se ha definido en el apdo. 3.2.1 "Periodicidad y simetría traslacional", es invariante a traslaciones.

En este punto surgen varios interrogantes:

- ¿Son las dos direcciones más votadas las representativas de las direcciones dominantes?
- ¿Qué ocurre si hay tres, cuatro o más picos dominantes en el histograma?
- ¿Qué ocurre cuando hay empate en las votaciones?

Estos interrogantes sugieren la posibilidad de que hayan varias geometrías de enrejado (varios PF) posibles. Para resolver estas cuestiones es preciso evaluar numéricamente las geometrías obtenidas.

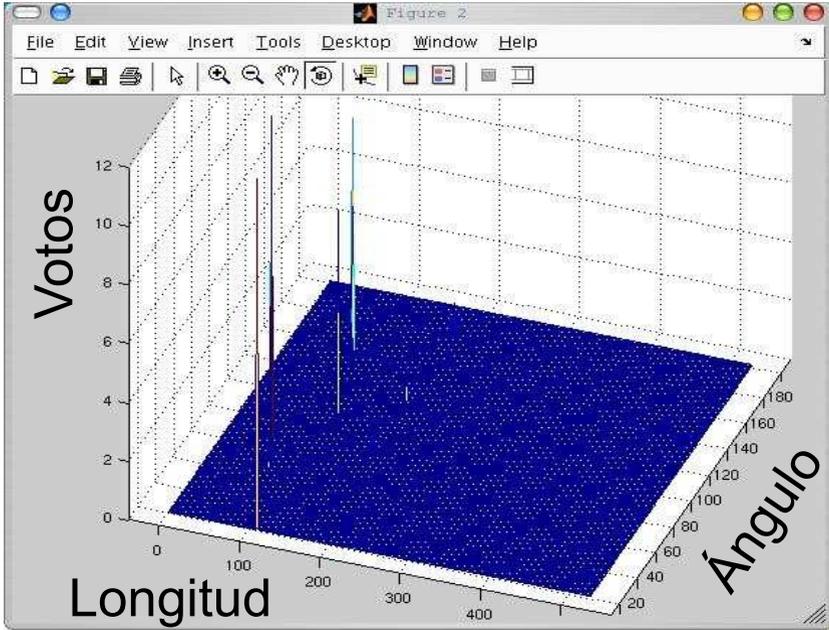


Figura 56: Vista en 3D de la votación de vectores directores para la imagen wall10 de la colección Wallpaper.

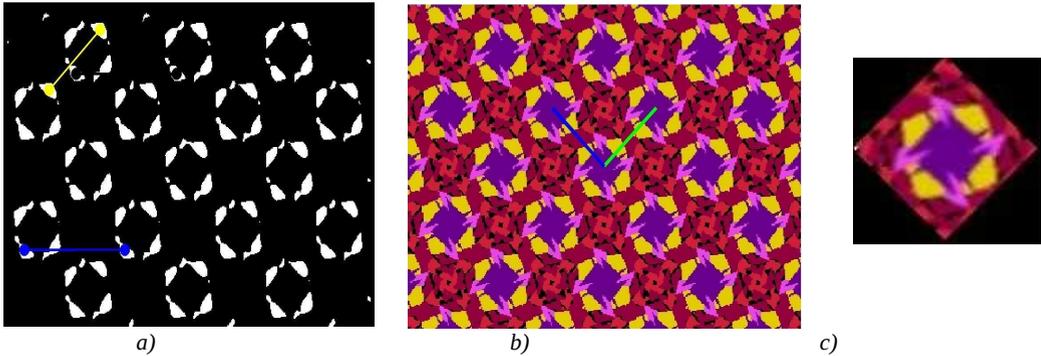


Figura 57: Obtención de las uniones entre objetos simétricos más repetidas en la imagen: ejemplo de esas dos uniones sobre los objetos de simetría (a), ejemplo de resultado de detección de la rejilla sobre la imagen (b) y patrón extraído (c).

4.3 Evaluación de los resultados

La idea de este paso es ofrecer una valoración cuantitativa del resultado entregado, Se calculará la expresividad del enrejado obtenido, en cuanto a lo bien que modeliza el contenido de la imagen. Lo denominamos **error de ajuste de la rejilla** (en adelante **EAR**) y permitirá la evaluación de la bondad de la rejilla

El objetivo es definir un criterio algorítmico basado solo en parámetros de la imagen. Si se ha extraído una rejilla correcta, toda la información de la imagen se resume ahora en un mapa de bits más pequeño que la imagen de partida, que se repite en el espacio según los parámetros del retículo obtenido. La imagen original será muy similar a un área del mismo tamaño de ese espacio bidimensional teórico rellenado al replicar el PF obtenido con los parámetros de la rejilla como muestra la fig. 58.

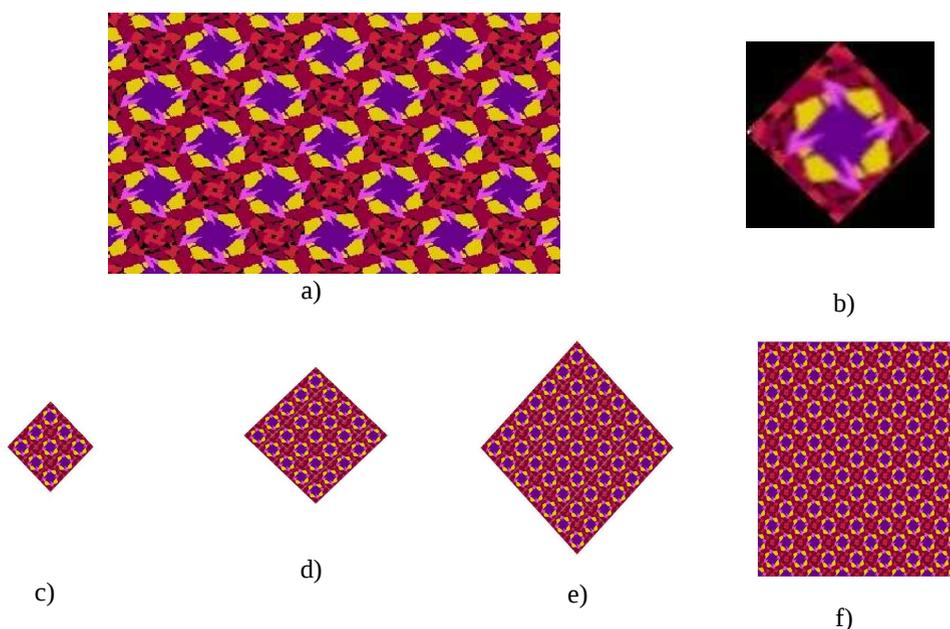


Figura 58: Ejemplo de reconstrucción: aplicado a la imagen (a), a partir del PF (b) y los pasos de la reconstrucción hasta el tamaño de la imagen original (c-f).

El problema de comparar la imagen original y la reconstruida a base de replicar un PF seleccionado de la imagen inicial es que la elección del paralelogramo representante es importante para el resultado final del proceso de reconstrucción, máxime cuando la imagen puede tener algún tipo de ruido local o global. Esto sucede si se escoge una instancia cualquiera de los PF que aparecen en la imagen, pero también si se utiliza el paralelogramo medio (PFmedio) o el mediano (PFmediano) obtenidos respectivamente con la media y la mediana de los píxeles de cada una de las órbitas (véase el apdo. 3.2.2 “Simetrías en las figuras planas: grupos de simetría”) del PF encontradas a lo largo de la imagen.

Para resolver este problema proponemos obtener el EAR en base a un criterio de geometría para minimizar la influencia debida a la posible variabilidad en la distribución de los niveles de color de los puntos de la imagen, caracterizándolos por su varianza S^2 . Dicha varianza se puede descomponer utilizando la **Ley de la varianza total** aplicada a la imagen (véase ec. 20), que ha sido dividida en r conjuntos de tamaño n_i , media \bar{x}_i y varianza S_i , siendo $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ el tamaño de la imagen y \bar{x} la media de la imagen.

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i S_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (20)$$

A la hora de obtener esos conjuntos o particiones de la imagen cualquier combinación de píxeles podría ser, en principio, factible con la única restricción de que los subconjuntos fueran disjuntos. Existe un sinnúmero de algoritmos de agrupación, véase (Jain et ál., 2004) y (Jain et ál., 1999). Nuestra propuesta guarda semejanza con los conocidos como algoritmos de particionado (*partitional algorithms*). Dada una geometría de la rejilla, concretada en un PF, caben dos particiones de la imagen original utilizando dicha geometría:

1. Dividir la imagen en paralelogramos contiguos A_i , definidos por la geometría del PF, véase fig.59. En este caso solo hay una partición, puesto que solo se observa un PF completo en la imagen. Estas particiones se realizan sobre el dominio espacial de la imagen.

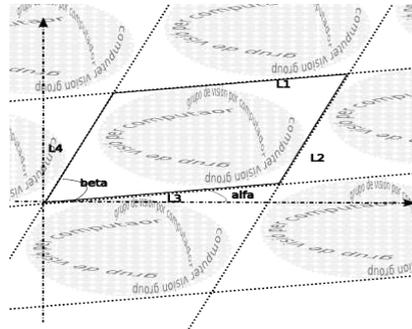


Figura 59: Ejemplo de particionado contiguo.

Esta aproximación es poco robusta cuando el número de repeticiones observables es bajo, menor de tres. Además, puede verse sesgado si existe un ruido local en la imagen.

2. Dividir la imagen en particiones A_i , donde cada partición incorpora puntos tomados a intervalos enteros del retículo. Como muestra la fig. 60, hay r (tantos como píxeles en el PF) posibles particiones de los puntos pertenecientes a una misma órbita (véase el apdo. 3.2.2 “Simetrías en las figuras planas: grupos de simetría”) de la estructura modular de la imagen.

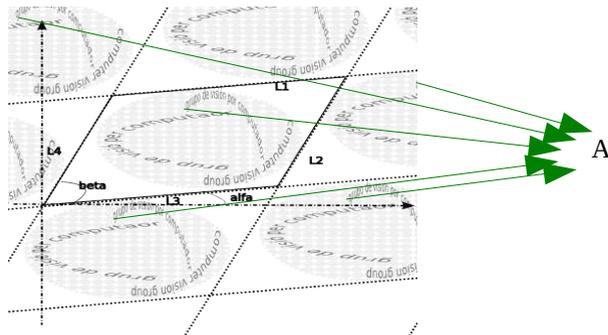


Figura 60: Ejemplo de particionado en el dominio del retículo, con $i \in [1 .. r]$.

Estas particiones se realizan sobre el dominio espacial del retículo. En este caso, la imagen se puede ver como un conjunto de particiones formado por las órbitas de cada punto del PF. Este enfoque da lugar a definir el **paralelogramo de**

varianzas (PF_{varianza}) como el que se obtiene, de manera similar al PF_{medio} y PF_{mediano} , pero usando la varianza de los píxeles en lugar de la media o la mediana.

Las ventajas de particionar la imagen en el sentido de la rejilla en lugar de con la obvia de la continuidad espacial son dos. Por una parte que es posible utilizar todos los puntos de la imagen, incluso los que están en los extremos y que no constituyen una instancia completa del PF. Por otra, que se obtiene una mayor tolerancia al ruido al tener un mayor número de muestras, lo que distribuye el ruido espacialmente.

Así, instanciando los términos de la ec. 20 como $S_i = VPF_i$ y $\bar{x}_i = MNPF_i$, se obtiene la ec. 21, si la geometría de la rejilla es la correcta, el primer término tiende a 0 y el segundo a la varianza de la imagen (S^2). Cuando la geometría no es correcta, ocurre el efecto contrario. Ambos términos de la ecuación se definen en el rango de 0 a S^2 .

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i VPF_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (MNPF_i - \bar{x})^2 \quad (21)$$

Para establecer una valoración cualitativa se normaliza la expresión, obteniendo la expresión de la ec. 22 en la hemos dado nombre a las dos partes de la misma.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i VPF_i^2}{S^2} + \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (MNPF_i - \bar{x})^2}{S^2} \\ &= \text{MeVaN} + \text{VaMeN} \end{aligned} \quad (22)$$

El primer término, la **Media de Varianzas Normalizada (MeVaN)**, es una medida de cómo de bien, la partición realizada, predice la variabilidad de la imagen. El término complementario, es la **Varianza de Medias Normalizada (VaMeN)**, que es una medida que predice cómo discrepan entre sí las particiones efectuadas. *MeVaN* y *VaMeN* son dos componentes normalizadas entre 0 y 1 que pueden utilizar para definir la simetría que se encuentra presente en una determinada partición $P = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ de la imagen I , que hace similar cada subconjunto P_i . Cuando la partición presente simetrías de cualquier tipo, uno de los parámetros tenderá a 0 y el otro a 1. Por lo que se puede escoger cualquiera de ellos para cuantificar la bondad del ajuste de la geometría calculada del enrejado, ec. 23.

$$\begin{aligned} &I \text{ es regular para } P \Leftrightarrow \\ &((\text{MeVaN} \rightarrow 0) \wedge (\text{VaMeN} \rightarrow 1)) \vee ((\text{MeVaN} \rightarrow 1) \wedge (\text{VaMeN} \rightarrow 0)) \end{aligned} \quad (23)$$

Ya que queremos medir la influencia de “defectos” distribuida en la imagen, proponemos la medida normalizada del *EAR* como en la ec. 24, por el significado físico de cuánto error se comete: siendo cero la situación de menor error y mejor ajuste, esto es tenderá a cero cuando el PF “explique” la imagen. Es decir, los valores de *EAR* bajos son buenos y se puede hacer una formulación positiva del valor obtenido con $(1-EAR)*100$ para dar un porcentaje absoluto de la bondad de la geometría analizada. También se puede dar el resultado a partir de la segunda componente: *VaMeN*.

$$EAR = \text{MeVaN} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i VPF_i^2}{S^2}, \quad 0 \leq EAR \leq 1 \quad (24)$$

I	S^2	\overline{VPF}_{ok}	EAR_{ok}	EAR_{nok} [m, σ]
1	6070,0	529,7	0,09	[0,98, 0,08]
3	7564,4	1722,9	0,23	[0,94, 0,16]
4	6574,3	1581,7	0,24	[0,99, 0,04]
7	2538,3	619,3	0,24	[1,01, 0,02]
8	553,3	137,3	0,25	[1,00, 0,03]
9	7052,3	2258,6	0,32	[1,01, 0,07]
10	3218,9	946,7	0,29	[0,98, 0,19]
13	1115,6	380,5	0,34	[0,95, 0,17]
17	5511,6	2300,4	0,42	[0,95, 0,15]

Tabla 3: Evaluación de los valores de geometría de la rejilla para las imágenes de la colección Wallpaper.

La tabla 3 muestra los valores obtenidos en la colección de *Wallpaper* para validar las hipótesis de definición de este estadístico. Para cada una de las imágenes se obtuvo una geometría plausible de su enrejado y se probó con el resto de imágenes, en las que es observable visualmente que no es correcta, para confirmar la teoría. La tabla tiene cuatro columnas. De izquierda a derecha, la primera dice el número de cada una de las diecisiete imágenes de esta colección. La segunda muestra los valores de varianzas obtenidos: a mayor valor de esta característica significa que hay mayor dispersión en los valores de los píxeles, en el caso de imágenes regulares (como es el que nos ocupa) representa la presencia de ruido en la imagen. La tercera columna es la varianza media ponderada de todos los PF (\overline{VPF}_{ok}), esto es de todas las particiones P_i que genera en la imagen la partición P basada en la geometría etiquetada como correcta para esa imagen. La cuarta columna, EAR_{ok} , es el valor de EAR obtenido para esa partición correcta en esa imagen. Por último, la distribución estadística (media y varianza) de los valores de EAR obtenidos cuando se consideran las dieciséis particiones correctas para las restantes imágenes de la colección que, puesto que no son aplicables a la que las origina sabemos que son rejillas incorrectas: por lo que lo hemos llamado EAR_{nok} .

Se observa que valores de EAR cercanos a 0 identifican una rejilla correcta, mientras que cuando el valor se acerca a 1 significa que no permite una buena reconstrucción de la imagen, esto es, no explica el contenido de la imagen.

Se realizaron también experimentos con cien geometrías aleatorias de rejillas sobre el conjunto de imágenes de *Wallpaper* con el propósito de validar de forma estadística los valores de EAR para rejillas incorrectas. Los valores de varianzas obtenidos están entre 553,28 y 9804,8. Los valores de EAR están en el rango 0,945 a 1,019. Los de desviación estándar entre 0,008 y 0,119. Los valores obtenidos por encima de 1 son errores inherentes al proceso de cuantización: las operaciones matemáticas tienen una precisión limitada en un computador y hay que redondear los valores para poder hablar direccionar cada de píxeles en una imagen discreta, esto es coordenadas donde acceder en la imagen.

4.3.1 Otras propuestas de uso del EAR

El cálculo del EAR se puede utilizar en otros puntos del algoritmo, en concreto como realimentación de alguno de los algoritmos utilizados en etapas anteriores y para desempatar las votaciones en caso de tener más de una rejilla posible.

La **realimentación** significa que es posible construir una variante de los algoritmos vistos que

funcione en **modo de lazo cerrado**. El algoritmo de detección de la rejilla se ha expresado, fig. 46b, como una secuencia lineal de operaciones. Debido a la resolución finita de las imágenes y a la precisión de las operaciones matemáticas utilizadas en la detección del periodo, cabe hacer consideraciones sobre valores de rejillas muy próximos al obtenido y que pueden dar un mejor valor de determinación de la rejilla final (un menor valor de EAR).

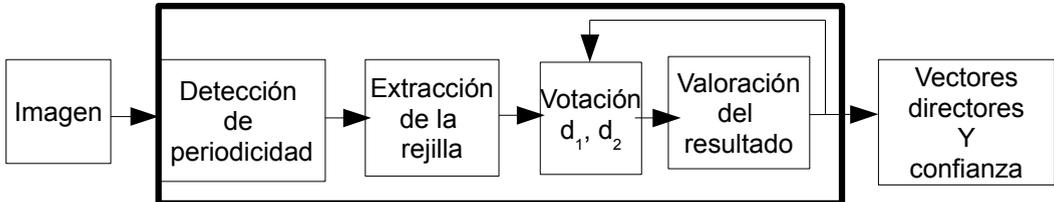


Figura 61: Diagrama modificado de la obtención de la geometría de la rejilla.

Se propone considerar el valor obtenido del EAR para aceptar el resultado obtenido o, en su caso, reconsiderar los parámetros para tratar de obtener un nuevo resultado, como se indica en la fig. 61. En nuestra propuesta, se ha optado por filtrar algunos valores a la hora de determinar si son direcciones candidatas a describir la rejilla o no, en los casos en que se dan circunstancias excluyentes o valores “altos” del mismo:

- Si los dos ángulos son iguales.
- Si el EAR obtenido supera el valor fijado como umbral de 20%. Esto representa bajar del 80% de buen ajuste. Este valor indicaría que la rejilla considerada es poco regular y, por lo tanto, que el resultado que se pueda alcanzar tendría un valor de confianza muy bajo.

Si se obtuvieran errores en alguno de los bloques: porqué no se obtuvieran objetos de simetría, porqué el número de picos fuera insuficientes o porqué se obtiene un valor de error alto, se realimentaría al inicio de este bloque para reconsiderar los parámetros del análisis y detección de la periodicidad y así volverían a ejecutarse todos los pasos

En el algoritmo de determinación del retículo por la elección de las dos direcciones más votadas se ve dificultado cuando se da una situación de empate múltiple. En estas ocasiones es necesario **desempatar las votaciones**, esto es, escoger entre varias posibles geometrías de rejilla que aparecen en igual número de ocasiones en la imagen. Esto es consecuencia de la existencia en algunos casos de varias rejillas posibles, y en otros casos, de la resolución de las operaciones involucradas..

En ese caso, la estrategia a seguir será ordenar los vectores directores por número de votos y se procederá como sigue:

- Si hay dos vectores directores claramente destacados (el número de votos del primer y del segundo candidato es estrictamente mayor que los del tercero) o solo hay dos, estos son “elegidos”.
- Si solo hay uno claramente destacado (número de votos del primer candidato mayor que los del segundo, pero hay varios con el segundo mejor valor de votos), se crean rejillas con la primera dirección y cada una de las segundas. Se escogerá aquella con EAR mínimo.
- Si hay empate con el mejor resultado de votos, se escoge entre estos candidatos cruzándolos

todos con todos, a pares. Se escogerá la combinación con mínimo EAR.

4.3.2 Elección del PF

Como se ha propuesto en el cap. 2. apdo. 2.3 “La simetría como módulo principal para recuperación por contenido“, en una aplicación de CBIR para comparar imágenes regulares, se pueden comparar los PF de las mismas. Esto implica obtener la geometría del retículo y, también, instanciar el contenido del PF en cada imagen. Ya hemos hablado de cómo obtener la geometría, en este apartado proponemos cómo se ha de realizar una **normalización de la ubicación** para extraer el contenido del PF de modo que sea perceptualmente significativo.

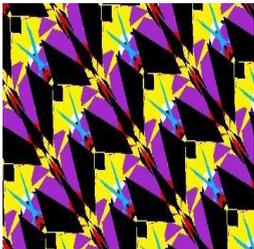
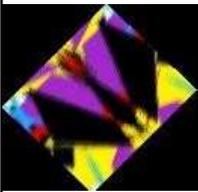
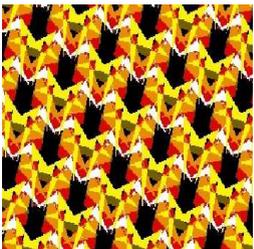
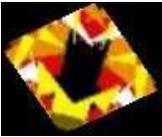
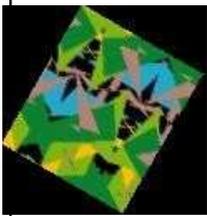
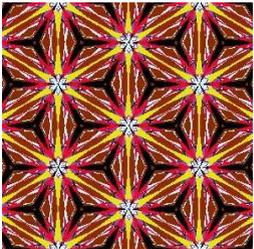
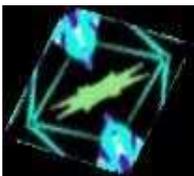
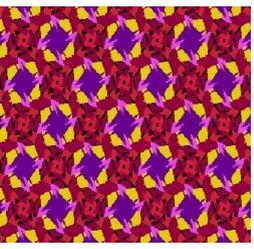
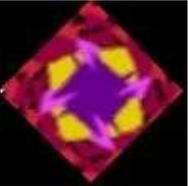
Imagen	PF	Imagen	PF
			
			
			

Tabla 4: Resultados de la normalización de ubicación.

El retículo tiene utilidad como elemento que podría reducir el número de imágenes con las que comparar, sus tamaños y servir de guía para la comparación haciendo uso de otras características de medio y bajo nivel de abstracción. También tiene que ver con lo que el usuario humano vería como motivo de la imagen, para ello es necesario centrarlo, esto es, ubicar el PF en un punto concreto. Con ello: la geometría no cambia, obviamente, solo se refiere a dónde se va a proceder a recortar un trozo del mapa de bits y guardarlo como resumen del contenido de la imagen. Es necesario centrarlo

en un punto de la imagen que tenga un sentido significativo para la percepción del usuario humano.

Nuestras experiencias con varios criterios, (Horne, 2000) y (Mount, 2001), nos han llevado a escoger el punto de máximo valor de simetría de fase más cercano al centro de la imagen. Esto está motivado en que la percepción del usuario centra la atención en esos puntos y sería, con mayor probabilidad, uno de los que, con naturalidad, escogería el usuario. La tabla 4 muestra unos pocos resultados que se obtienen para algunas imágenes de (Joyce, 2007) donde los PF de las mismas están ubicados en centros de máxima SDF.

También es interesante plantear una **normalización del tamaño** para los casos en que las geometrías sean diferentes y se quieren comparar dos imágenes. Esta normalización de la geometría es un cambio en el sistema de coordenadas del PF y un escalado a un valor predefinido.

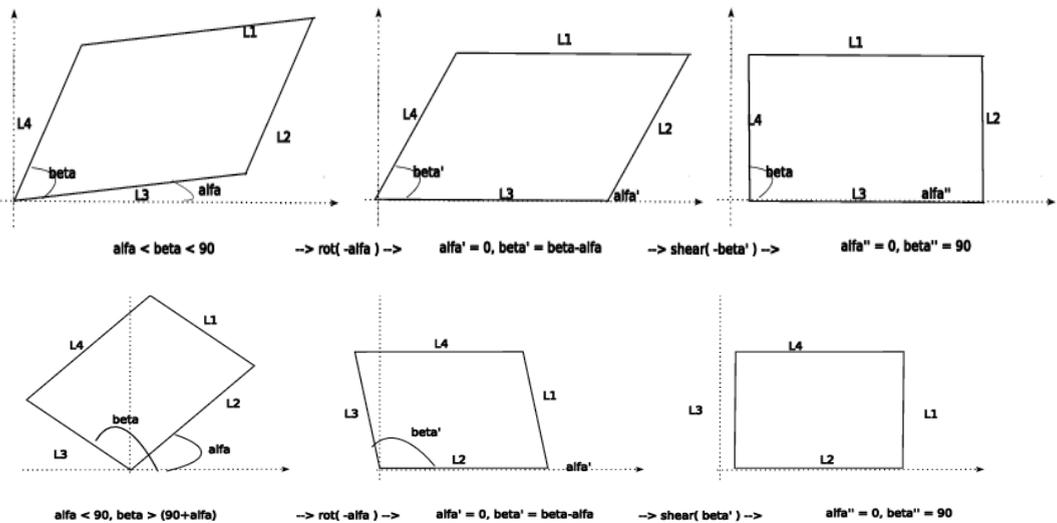


Figura 62: Dos ejemplos de normalización de la geometría del PF en función de los ángulos de los vectores directores.

Los vectores directores que definen la geometría del retículo se ordenan por el valor de su ángulo, los que nos lleva a dos posibles situaciones iniciales, como muestra la fig. 62, donde *alfa* representa el ángulo menor y *beta* el mayor de los del retículo. Se trasladan los ángulos *alfa* y *beta* a valores positivos tal que $\alpha < \beta < 180$. En cualquiera de los dos casos, el algoritmo básico consiste en:

- Rotar el PF hasta alinearlo con el eje horizontal, se fija un ángulo a 0° y el otro quedará en $\beta = \beta - \alpha$.
- “Estirar” (*shear*) el PF para que el segundo ángulo se alinee con el eje vertical ($\beta = 90^\circ$).

Como esta es una cuestión de resolución de la imagen, el tamaño final puede variar en función de la aplicación final. En nuestras experiencias se ha realizado una conversión de tamaño a 100x100 píxeles, que ha resultado apropiado para observar los detalles de las imágenes con las que se han realizado las experiencias.

4.4 Discusión

Llegados a este punto estamos en condiciones de poder evaluar las técnicas propuestas para el cálculo de la periodicidad. Dado que el uso de la simetría de fase se muestra más robusta a las variaciones de la imagen y que tiene unos requerimientos menores de número de repeticiones observables en la imagen esta será la técnica escogida para implementar el primer paso del bloque que nos ha ocupado en este capítulo.

La técnica de simetría de fase permite obtener los resultados correctos sin necesidad de fijar ningún umbral. En cambio, la autocorrelación muestra problemas cuando, fig. 63, se dan condiciones de un número bajo de repeticiones observables en la imagen (más de una, pero puede que no llegue a dos) y cuando los picos de la correlación no están muy destacados sobre el resto de valores de la correlación.

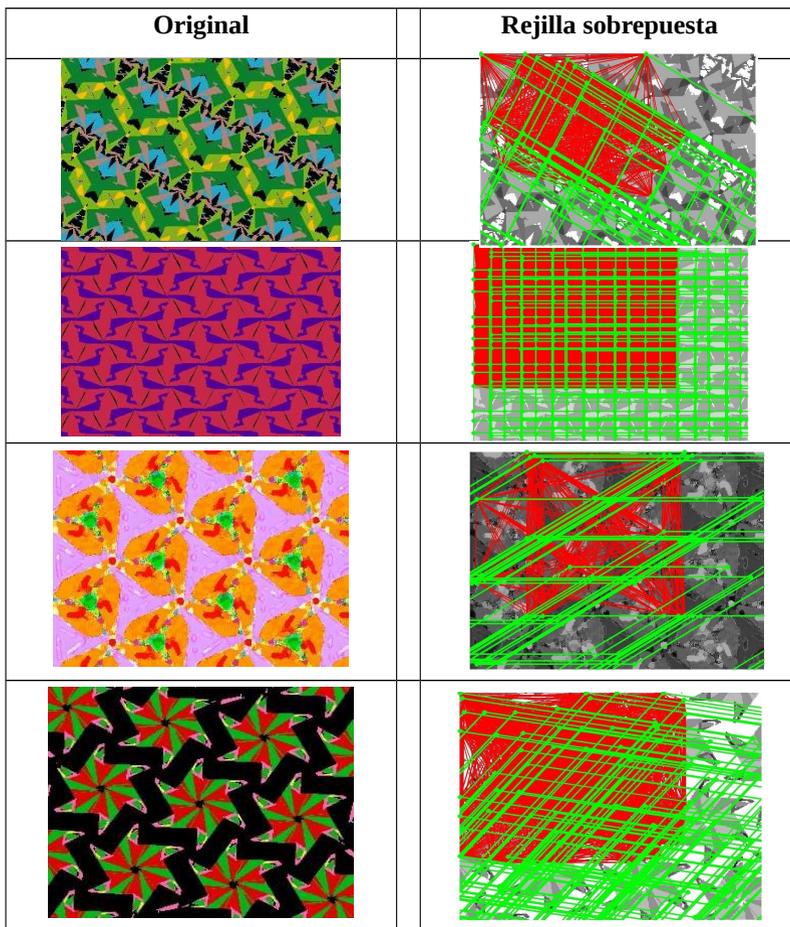


Figura 63: Resultados erróneos de la autocorrelación como base para la detección de la rejilla.

Los resultados obtenidos para las imágenes del banco de pruebas (Joyce, 2007) demuestran que el proceso no es automatizable, tal como se indica en la literatura, pues se obtienen al menos cuatro

resultados equivocados (lo que supone un 23'53% de error) de las diecisiete imágenes que la componen. Véase la fig. 63, donde los trazos rojos representan todas los vectores de periodicidad encontrados y, en verde, una aproximación al retículo constituida por las dos primeras órbitas de las direcciones escogidas empezando en la coordenada (0,0) de la imagen

Los resultados de estas experiencias indican que la autocorrelación es una técnica susceptible al ruido presente en la imagen, en lo relativo a la selección de sus valores máximos. Además, no es posible asignar un sentido físico o medir la influencia de los parámetros que la definen.

La técnica de simetría de fase ha permitido esas optimizaciones y, por definición, se ajusta a la resolución de la imagen. Dependiendo de la imagen se obtiene mejor resultado con la versión directa o con la inversa, depende del contraste entre los colores que utiliza el motivo, así que no se puede fijar a priori, pero si evaluar los dos resultados que se obtienen y seleccionar el más significativo.

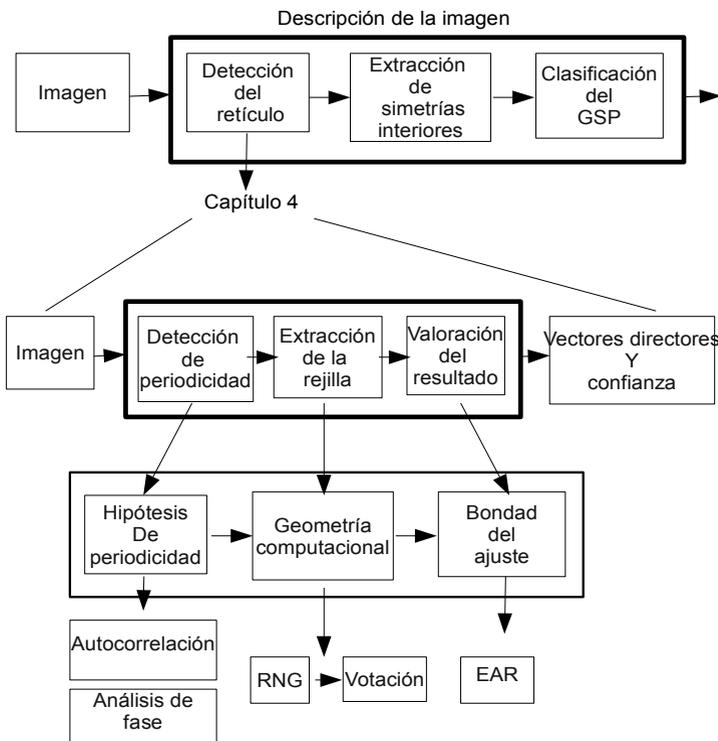


Figura 64: Diagrama de bloques del primer módulo de descripción de la imagen: detección del retículo.

Con estas consideraciones el esquema esbozado al principio de la tesis para este primer bloque queda totalmente definido: sus operaciones básicas han sido estudiadas y comparadas, para realizar la elección donde ha sido necesario y, a modo de resumen, es posible identificarlas como muestra la fig. 64:

- En primer lugar, la detección de periodicidad se ha implementado como una generación de

posibles hipótesis de periodicidad. Utilizando para ello las técnicas de autocorrelación o de análisis de fase.

- Seguidamente, estas hipótesis son filtradas por un proceso exterior a la técnica que genera las hipótesis y que escoge entre las que tienen sentido geométrico (RNG), que es algo que estas técnicas no asumen. Ante la diversidad de opciones válidas se escogerá la que está más veces presente en la imagen de partida.
- Finalmente, se valora el resultado con una valoración numérica (EAR), externa a todas las operaciones anteriores y que mide la bondad del ajuste del retículo que se ha determinado.

En el resto de capítulos abordaremos cómo se utiliza esta información para determinar las características locales del patrón que define el contenido repetitivo de la imagen y, con todo ello, el grupo de simetría de la imagen.

Capítulo 5.

Simetría computacional aplicada a las simetrías interiores del patrón repetitivo

Este capítulo centra su atención en las técnicas de análisis de imagen para extracción de características que permitan determinar la existencia de simetrías. Es de destacar que se mantiene la premisa del capítulo anterior de obtener medidas continuas que muestren la existencia de otras simetrías, aparte de la traslacional que es global a la imagen. Las denominamos **interiores** por circunscribirse en el ámbito espacial del PF y repetirse en cada instancia de este en la imagen. Utilizaremos el hecho de que se ha encontrado el retículo que mejor expresa la regularidad del contenido de la imagen para determinar la geometría del PF, y que limitará la extensión espacial de los cálculos necesarios.

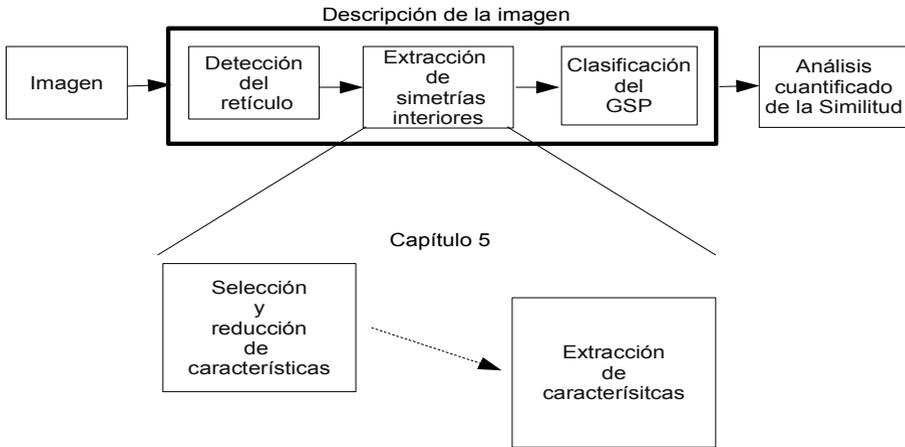


Figura 65: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto.

Siguiendo el esquema global, fig. 65, cabe recordar que partiremos del PF calculado en la etapa previa (“Detección del retículo”). Estando ahora centrados en la discusión relativa al diseño e implementación del bloque “Extracción de simetrías interiores”. Este bloque forma parte de la cadena para clasificación de imágenes de contenido repetitivo, formadas a partir de patrones bidimensionales, en grupos de simetría.

Como muestra de la dificultad de la detección de simetrías, en la bibliografía (Liu et ál., 2010) se ofrece una discusión de resultados a partir de los algoritmos de los propios autores y de otros. La justificación para haber elegido unos en concreto se basa, según los autores, en “(1) su reciente publicación; (2) dicen ser capaces de detectar varias simetrías en una imagen; (3) son aplicables directamente, sin segmentar, a imágenes del mundo real y (4) el código está públicamente disponible”. Sobre una colección de 176 imágenes, se obtiene como mejor porcentaje global de acierto del 63% en la detección de simetrías presentes en las imágenes. Este valor es el obtenido en la identificación de la simetría de reflexión como resultado promedio (*best mean sensitivity*) para todos los tipos de imágenes que utilizan (sintéticas, reales, con una y con varias simetrías presentes). Siendo de un 58% para la de rotación sobre la colección. Para la detección de varias simetrías presentes simultáneamente en una imagen, el resultado baja al 42% para reflexiones y al 32% para rotaciones. Esto demuestra que es una cuestión todavía sin resolver.

5.1 Selección y reducción del número de características

Esta sección define la tarea de modelado del contenido de imágenes regulares, es decir, la manera en que se definen los grupos de simetría en función de las simetrías interiores al PF. Dentro del paralelogramo, en la mayoría de grupos, se pueden encontrar simetrías que permiten descomponer este en la región fundamental. Estas identifican inequívocamente cada uno de los diecisiete GSP, con lo que nuestra labor consiste en identificar qué agrupación de ellas se da en una imagen para poder definir a qué grupo pertenece y asociar un valor de confianza a esta decisión.

Como se ha enunciado ya en el cap. 2 de “Introducción”, existe un número limitado de combinaciones posibles de isometrías en el plano Euclídeo, gráficamente resumidas en la fig. 66¹⁰.

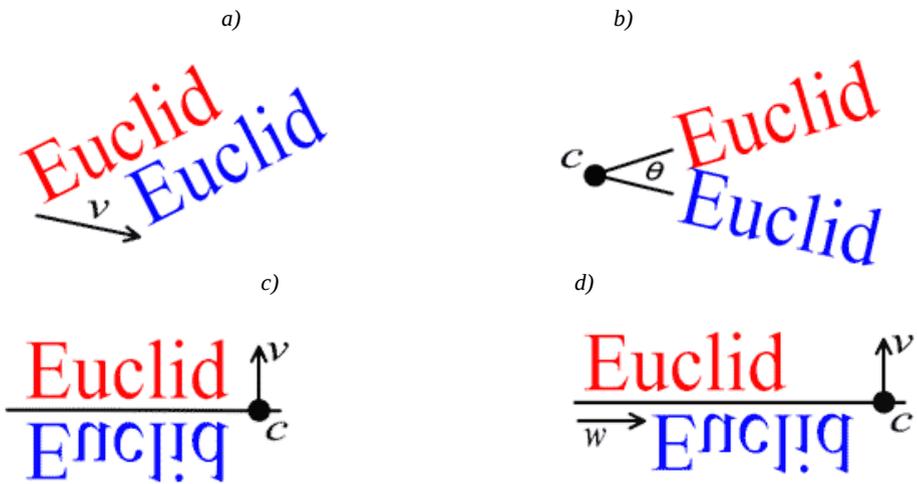


Figura 66: Simetrías observables en imágenes regulares: global (a) Traslación e interiores (b) Rotación, (c) Reflexión y (d) Reflexión con desplazamiento.

Un listado exhaustivo de las características que conducen a la definición de los diecisiete grupos de simetría, por ejemplo a partir de la definición de Schattschneider (fig. 22), nos llevaría a calcular un vector (\mathbf{vs}) de setenta y dos elementos. Cada uno de ellos es una característica: $vs(i)$, una posible isometría que habría que comprobar si está o no presente en cada caso. La fig. 67 muestra todos los puntos donde debiera comprobarse si existe alguna isometría agrupados por su tipo:

- En la primera columna de la izquierda están los 26 puntos, posibles centros de rotación.
- En la columna central están las posibles reflexiones, otros 24 puntos, posibles reflexiones especulares
- Otro grupo de 22 puntos, en la columna de la derecha, las reflexiones con desplazamiento.

10 Imágenes obtenidas de “Euclidean plane isometry” <<http://www.answers.com/topic/euclidean-plane-isometry>>.

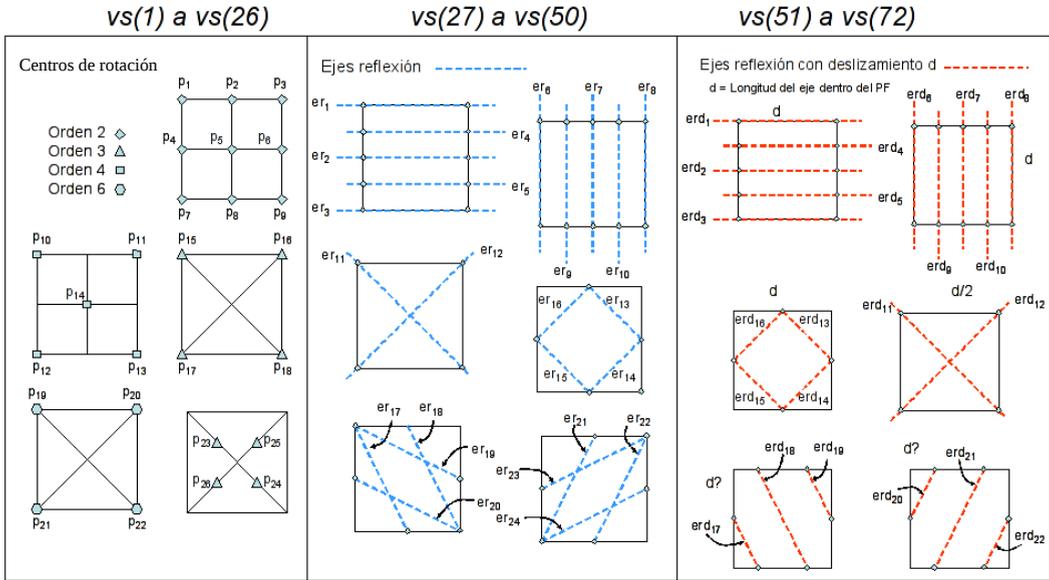


Figura 67: Enumeración de todas las simetrías interiores posibles para construir un posible vector de características de simetrías. Se indican los ejes de reflexión (er) y los de reflexión con desplazamiento (erd)

En cuanto a la tarea de reducción de características, los trabajos clásicos de catalogación de diseños de mosaicos regulares, revisados ya en el cap. 3 de “Estado del arte” como el de (Grünbaum & Shepard, 1987) y (Schattschneider, 1978), son propios del ámbito matemático y, por tanto, es razonable partir de la caracterización que aportan de los grupos de simetría. Además no es posible lanzar un estudio significativo de selección y extracción de características al no existir un conjunto de imágenes suficientemente significativo y etiquetado, que es uno de los objetivos de esta tesis.

Una mirada detenida a la descripción de los GSP de la fig. 22 confirma que es posible reducir el número de características a emplear. Esta selección y reducción de características revela que el mínimo número de características necesaria para discriminar las diecisiete clases es de doce:

- Cuatro características (que denotaremos por SR_2 , SR_3 , SR_4 y SR_6) que representan las posibles rotaciones.
- Cuatro características (SRe_{L1} , SRe_{L2} , SRe_{D1} y SRe_{D2}) para describir las simetrías de reflexión (sin y con desplazamiento) a lo largo de los ejes paralelos a los lados del PF.
- Cuatro más ($SReD_{L1}$, $SReD_{L2}$, $SReD_{D1}$ y $SReD_{D2}$) para las simetrías de reflexión (sin y con desplazamiento) respecto a las dos diagonales del PF.

Como en los posteriores trabajos aparecidos al respecto, véase (Liu et ál., 2004b), (He et ál., 2004 y (Agustí et ál., 2011), juntaremos todas estas informaciones en un **Vector de Características de Simetría (VCS)** de doce valores de simetría, de doce elementos, como indica la ec. 25, que identifican la presencia o ausencia de estas simetrías.

$$VCS=(f_1, f_2, \dots, f_{12}); f_i \in \mathfrak{R}, \quad 0 \leq f_i \leq 1 \quad (25)$$

Con la intención de facilitar la lectura de a qué simetría corresponde cada elemento del vector VCS la ec. 26, reescribe el vector con los nombres de las simetrías y su posición en el PF. En concreto, la medida de cada simetría se define de la forma siguiente:

- La rotación depende del centro de rotación, por lo que realizamos una exploración moviendo el punto original del enrejado (x_0, y_0) dentro del ámbito del PF. El máximo obtenido de entre todas estas posiciones, indica la valoración de la **Simetría Rotacional (SR)**, así como la mejor posición para el centro de rotación.
- La reflexión sobre un eje depende del ángulo β y de la posición del eje. Los posibles ángulos son conocidos por que vienen dados por la geometría de la rejilla que se ha obtenido previamente. La posición no es conocida por lo que, de nuevo, realizaremos una búsqueda desplazando el eje L paralelo al ángulo β , lo que implica mover el origen de coordenadas (x_0, y_0) del enrejado en la dirección perpendicular al eje y que denotaremos por L_β . El máximo obtenido indica la valoración de la **Simetría de Reflexión (SRe)**, así como la mejor posición para ubicar el eje de reflexión.
- De manera similar se procede para encontrar la **Simetría de Reflexión con Desplazamiento (SReD)** con un valor de la mitad de la longitud del eje considerado como valor de desplazamiento a emplear.

$$VCS=(SR_2, SR_3, SR_4, SR_6, SRe_{L_1}, SRe_{L_2}, SRe_{D_1}, SRe_{D_2}, SReD_{L_1}, SReD_{L_2}, SReD_{D_1}, SReD_{D_2}) \quad (26)$$

5.2 Extracción de características

A continuación veremos que para calcular estos valores se pueden tomar diferentes estrategias. Veremos primero el método más utilizado en la literatura **basado en la similitud entre los PF**, esto es entre los mapas de bits de los paralelogramos PF. Después pasaremos a enunciar nuestra propuesta **basada en la varianza de las particiones**, estudiaremos cómo son de regulares los conjuntos de puntos que ocupan determinadas posiciones en la imagen, dependiendo de la geometría del PF. Analizaremos el uso de un esquema de **particiones continuas** frente a uno de **particiones dispersas** y veremos que se obtienen mejores resultados. Esto nos llevará a replantearnos el uso del operador (EAR) que hemos definido para valorar la idoneidad de una rejilla, generalizándolo hasta permitir abarcar todo el proceso de detección de todas las simetrías y definiremos un esquema de **particiones extendidas**.

En ambos casos, la ausencia de simetría nunca es evaluada estrictamente a cero, así como tampoco la presencia lo es al valor máximo. Incluso en condiciones ideales, como sería el de las imágenes sintéticas, sin ruido, cabe esperar que no siempre se alcancen los valores extremos. El rango dinámico de los valores de simetría es extremadamente variable y depende de las condiciones específicas de cada imagen.

5.2.1 Método basado en la similitud entre paralelogramos fundamentales

Para calcular las simetrías mediante la aproximación clásica, el método con mejores resultados encontrado en la revisión del estado del arte, se calcula la diferencia entre la imagen original y la imagen transformada. En el caso ideal se podría reducir al análisis de los PF de ambas imágenes, pero los errores en las operaciones matemáticas utilizadas y la existencia de ruido en las imágenes hace que esta restricción en el área de cálculo no asegure la robustez del mismo.

Sin pérdida de generalidad, la fig. 68 ilustra esta idea y plantea un escenario para visualizar la problemática de que, cuando la simetría a evaluar transforma las dimensiones de la imagen resultante, es incierto el criterio a aplicar para hacer corresponder las referencias de las que extraer el PF.

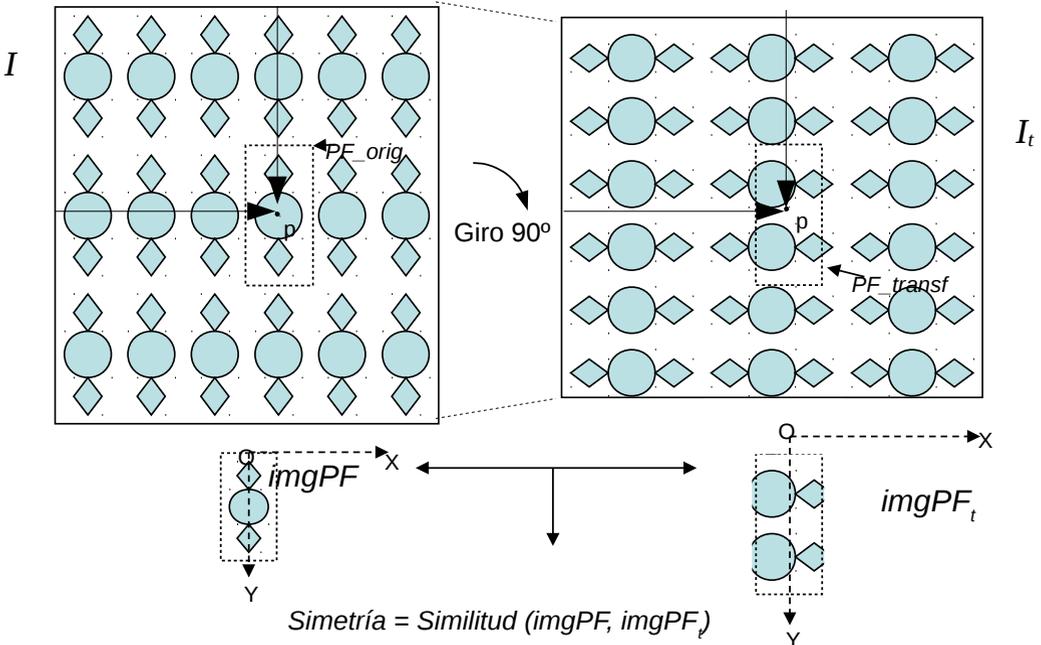


Figura 68: Cálculo de la simetría de orden 4 (90°) respecto al punto central de la imagen (I) obteniendo una imagen transformada (I_t), mediante correlación del PF transformado ($imgPF_t$) con I.

El método obtiene una de estas características (f_i), por ejemplo para el caso de la simetría rotacional de orden 4 (SR_4) respecto al punto central, como el cálculo de la similitud entre dos PF: el resultante de transformar el PF original y el PF que se extraería de la imagen transformada. Así pues, la simetría, respecto al punto central $S(x,y)$ o S para abreviar, es una medida de similitud entre la imagen del PF original ($imgPF$) y la imagen del PF en la imagen transformada en la misma posición ($imgPF_t$), que se calcula como se muestra en la ec. 27.

$$S = Similitud (imgPF, imgPF_{dst}) \quad (27)$$

El PF ($imgPF$) se extrae de un punto cualquiera de la imagen original. Si existe la mencionada simetría es porque se puede encontrar en la imagen original el paralelogramo transformado ($imgPF_t$), que de estar lo estaría en ese mismo punto. Para obtener la cuantificación de esa simetría en la imagen se puede utilizar la similitud entre las dos subimágenes, en términos de la diferencia entre ambas. En nuestro caso no hemos escogido el error cuadrático medio, sino la suma de diferencias al cuadrado, porque es una aproximación más rápida. La división por el número de puntos de las dos imágenes (m) permite su normalización.

Una medida de similitud se puede obtener comparando lo que se espera obtener, $imgPF$, con lo

obtenido, $imgPF_f$. Para todos los puntos de la caja (el *bounding box*) que contiene estos PF se obtiene un valor de similitud. Para ello se pueden aplicar diferentes criterios que valoran la similitud punto a punto de cada una de estas imágenes de los PF. Siendo m el número de puntos de las imágenes de los PF. Estos criterios son funciones como la suma de diferencias al cuadrado, la suma de diferencias en valor absoluto (SAD, ec. 28), etc.

$$S = SAD(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{x_0, y_0} |imgPF_f(x, y) - imgPF(x, y)| \quad (28)$$

Habría que reformular esta medida de similitud puntual para considerar que:

- Las dimensiones de las imágenes que contienen los PF no tienen por qué coincidir. Lo que lleva a poderla calcular en los puntos en que existe un valor del mapa de bit en las mismas coordenadas de los dos y asignando un alto valor de no similitud donde no sea posible compararlos.
- El uso de operaciones matemáticas que comportan datos numéricos con valores decimales que hay que redondear para convertir en coordenadas de la imagen introduce errores.

En lugar de calcular un **mapa de simetría**, como el resultado de correlar $imgPF_f$ con la imagen original I . proponemos (Agustí et ál., 2011) reducir este área considerando la caja contenedora del PF y PF_f , del mayor de ellos como área de exploración. Ahora, con el uso de la caja contenedora más grande ya no es necesario tener en cuenta el detalle de si corresponde con un punto interior a cada PF o no. Todos se pueden tener en cuenta para obtener una medida y simplificar el cálculo. Con lo que la ec. 28 se reescribe como la ec. 29, donde se considera que BB extrae el área rectangular en la que se inscribe el mayor de los PF (PF y $imgPF_f$) para poder realizar una resta de dos imágenes de la misma dimensión ($m \times n$).

$$S(x, y) = \frac{1}{m \times n} \sum_{x, y} |BB(imgPF_f) - BB(imgPF)| \quad (29)$$

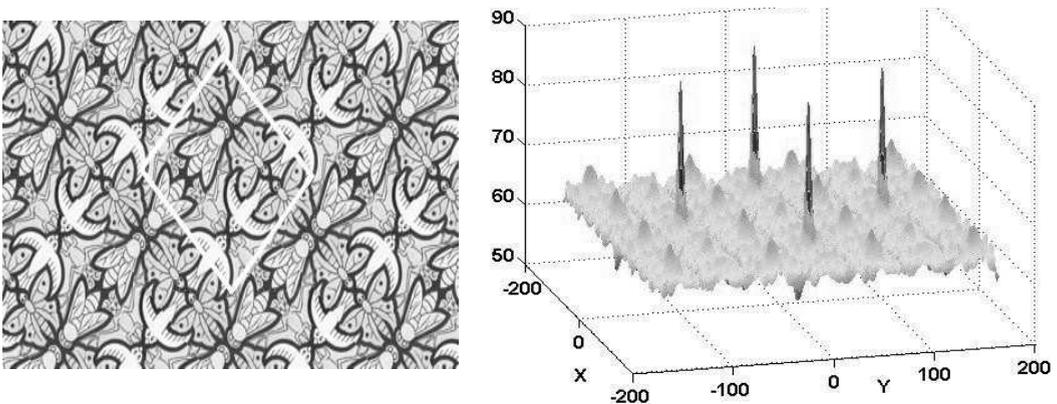


Figura 69: Imagen original (izquierda) con el PF sobreimpreso y el mapa de simetrías (derecha) para la rotación de orden 2.

Si se da la simetría es por que se encuentra un encaje perfecto de esta subimagen. Obteniéndose una media continua de la simetría con la degradación de esta “similitud” de este mapa de bits con el área del tamaño de este $imgPF_r$, centrada en cada punto de la imagen original donde quepa por completo. Así se obtiene un mapa de similitud como se indica en la fig. 69, haciendo

$$Map(x, y) = 1 - SAD(x, y) .$$

La medida se calcula a partir de la elaboración de un mapa de valores de una determinada simetría para una determinada imagen. Si la simetría está presente en la imagen, existirán picos (máximos) en este mapa en diferentes posiciones indicando la presencia de esa simetría.

Para calcular las simetrías interiores presentes en una imagen, se debe comparar ésta con la imagen resultante de aplicar cada una de las transformaciones de simetría estudiadas anteriormente. La simetría bajo estudio será proporcional al parecido entre la imagen original y la transformada. A continuación se presenta un posible algoritmo:

1. De la imagen original I se obtiene la imagen resultado de aplicar la transformación de la simetría que se quiere medir, obteniéndose la imagen I^T .
2. Sobre la imagen transformada I^T , se extrae la imagen de la caja contenedora del PF, denominado en este caso $imgPF_r$.
3. Esta imagen, $imgPF_r$, se correla con la imagen I , obteniéndose un mapa de simetrías.
4. El valor máximo y mínimo de este mapa se anotan para determinar la presencia/ausencia de la simetría y calcular la medida asociada en cada caso: el valor de simetría correspondiente.

Nótese que en el paso 2 se tomará un representante del patrón que se repite en la imagen. Para ello en la literatura se han utilizado diferentes métodos estadísticos: la media, la mediana, distribuciones *chi cuadrado*, etc. Los resultados experimentales apoyan la elección de la mediana como estadístico que combina la robustez con la velocidad de cálculo. En cuanto al área de este representante, es tanto más óptimo cuanto más pequeño sea, siendo el tamaño mínimo el valor del PF. Para agilizar los cálculos hemos elegido la caja contenedora del mismo para verificar la simetría. Por otra parte, el área mínima a explorar en el paso 3 será también de un PF, siendo el resultado más robusto cuanto mayor área de la imagen original se recorra.

El anterior algoritmo, aunque aplicable a todos los tipos de simetría, presenta particularidades para cada una de ellas que detallaremos a continuación.

Para calcular la **simetría de rotación** no se necesita la geometría exacta del PF (solo a efectos de optimización y robustez como se ha indicado anteriormente) pues basta con conocer el ángulo de rotación que quiere comprobarse. Dado que no se conoce el punto de rotación se toma uno arbitrario, como por ejemplo el centro de la imagen. La posición relativa de los picos en el mapa nos dará la situación del centro de rotación en el PF que, obviamente, puede no coincidir con el utilizado para transformar la imagen. La fig. 70 muestra las imágenes transformadas como resultado de rotar una imagen respecto a al centro de la misma con con diferentes valores de ángulo medidos respecto a la horizontal, alfa de 180, 120, 90° y 60° que corresponden, respectivamente, con los órdenes de rotación 2, 3, 4 y 6.

Para calcular la **simetría de reflexión** se aplican los mismos comentarios que para el caso de la rotación tomando en este caso un eje de reflexión arbitrario en la dirección del eje cuya simetría pretende medirse. Su posición final en el PF vendrá determinada por el resultado del análisis de los picos obtenidos. La fig. 71 muestra dos ejemplos de reflexión especular aplicados a los ejes centrales de una imagen.

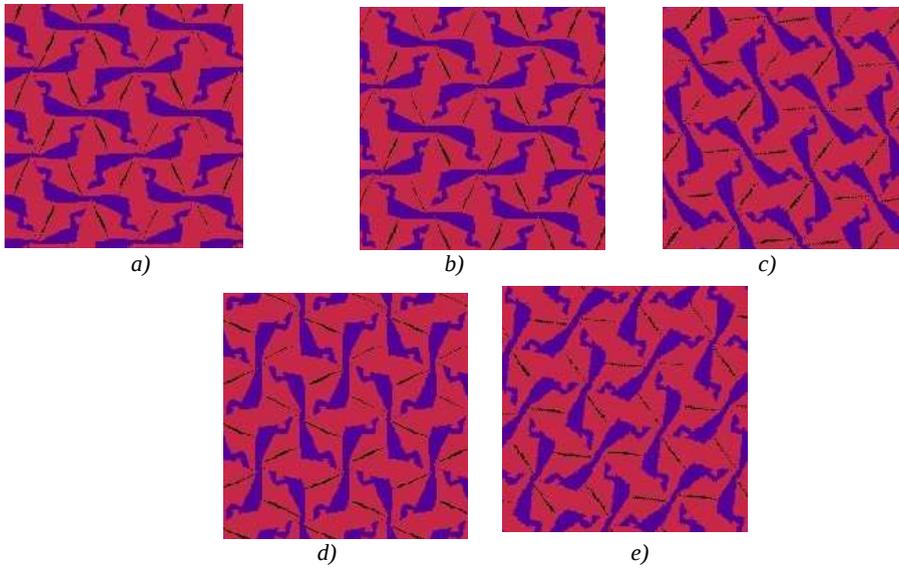


Figura 70: Aplicado al cálculo de la simetría de rotación a la imagen original (a), con α de 180 (b) 120 (c), 90° (d) y 60° (e)

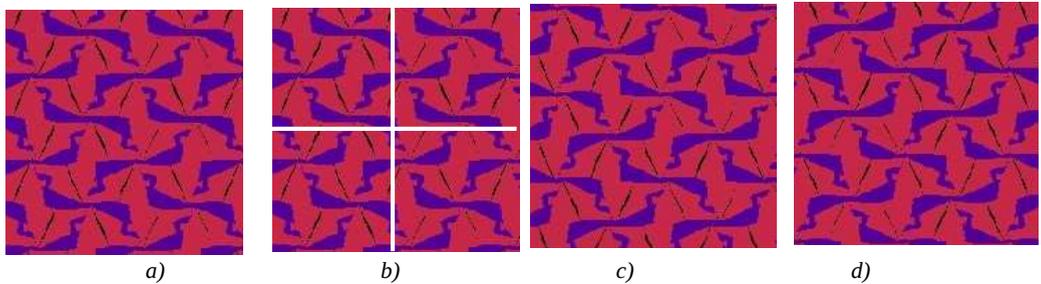


Figura 71: Aplicado al cálculo de la simetría de reflexión a lo largo de los ejes centrales: a) Original. b) Ejes sobre los que se refleja. c) Reflexión eje horizontal. d) Reflexión eje vertical

La **simetría de reflexión con deslizamiento**, a diferencia con los anteriores casos, para calcular este tipo de simetría necesitaremos la geometría del PF, ya que se deberá comprobar su existencia aplicando un deslizamiento de medio PF en la dirección del eje de reflexión y en ambos sentidos.

Este proceso resultaría sencillo si conociéramos la situación en la imagen de dicho eje ya que aplicaríamos la transformación y el desplazamiento respecto de ésta. Sin embargo como desconocemos la posición de dicho eje, debemos tomar uno arbitrario en la dirección del que se está analizando, obteniendo así un mapa que analizaremos para distinguir entre los dos tipos de reflexiones: especular o con deslizamiento. Al correlar con la imagen original aparecerán los picos

del mapa de simetrías. Pero, como comentamos, estarán desplazados al no haber acertado (en general) el eje de simetría.

Respecto a las imágenes transformadas vemos que no hay distinción al aplicar como transformación la reflexión respecto a un eje de simetría con y sin desplazamiento, pues las imágenes transformadas son iguales solo que desplazadas.

El cálculo de la simetría de reflexión con deslizamiento y el de la simetría de reflexión se encuentran relacionados y, por lo tanto, se realizan sobre el mismo mapa de simetrías. El algoritmo combinado para las dos reflexiones que hemos desarrollado es como sigue:

1. Se aplica la transformación de reflexión en el eje a analizar
2. Se obtiene el mapa de simetrías
3. Se proyecta dicho mapa sobre el eje de simetría con un ángulo de 90 grados (por definición de reflexión con desplazamiento) respecto del mismo y se toma el máximo de dicho mapa de simetrías en todo el eje de proyección.
4. Excepto que se escoja un área de tamaño exactamente del PF, el perfil obtenido de dicha proyección se compacta al tamaño de un PF teniendo en cuenta la dimensión del mismo.
5. Se analiza el perfil, teniendo en cuenta el punto de referencia marcado por la posición de $imgPF_T$ y se comprueba la posición de los máximos respecto a dicho punto de referencia.
6. Los cuartos inicial o final corresponderán a la simetría de reflexión y los dos cuartos centrales a la de reflexión con deslizamiento.

En los pasos 3 y 4 se puede obtener un perfil, o histograma, con los mínimos del mapa de simetrías para poder ser usados para escalar el vector de características de simetría.

El **perfil** es el resultado de, fig. 72, recorrer todos los puntos de un eje arbitrario (fig. 72a) para para el que se quiere determinar si existe simetría de reflexión con o sin desplazamiento. En cada punto se obtiene un mapa de simetría (fig. 72b) que es proyectado en la dirección perpendicular al eje respecto al cual se calcula la transformación, obteniéndose el perfil longitudinal (fig. 72c). Se puede observar la periodicidad que evidencia este perfil y como las imperfecciones de la imagen generan pequeñas irregularidades en el mismo.

En el perfil calculado en los pasos 3 y 4 se obtiene tanto de la presencia de la reflexión como de la reflexión con desplazamiento. Como las reflexiones especulares siempre están desplazadas la longitud del vector director en la dirección que estamos examinando, aparecerá evidenciada como un pico hacia uno de los extremos del vector, en tanto en cuanto las operaciones matemáticas asociadas arrastran un cierto error de redondeo y a la proyección de las coordenadas en los píxeles del eje de simetría que se quiere medir.

Esos valores del histograma tenderán a agruparse alrededor de dos posiciones en el eje:

- La que se da en el centro (aproximadamente) es la simetría con desplazamiento.
- La simetría especular, que coincide con una reflexión con desplazamiento trivial (cero). O, equivalentemente, deslizamiento del módulo del vector director. Por ese motivo este pico puede aparecer más o menos repartido entre los extremos del histograma con una forma simétrica en el caso ideal.

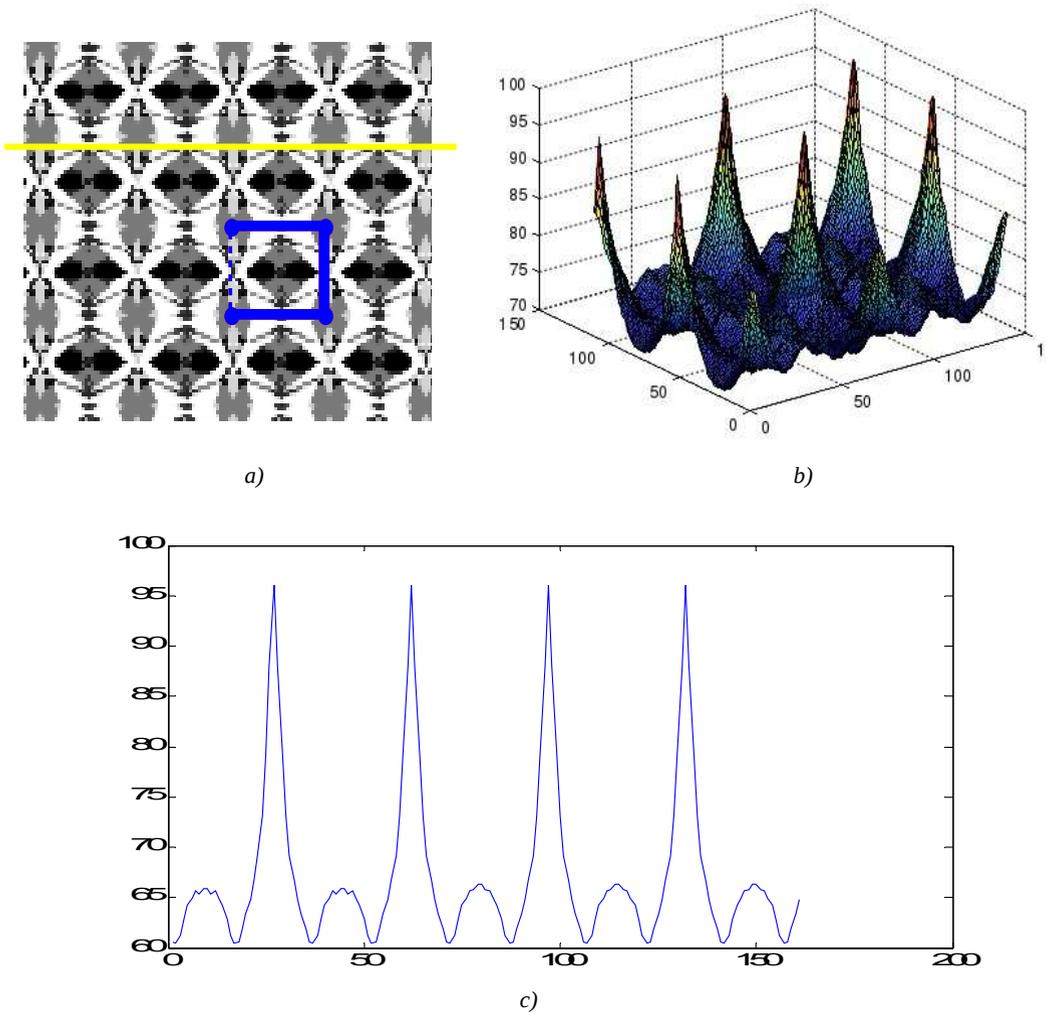


Figura 72: Ejemplo de obtención del perfil de reflexión , sobre un eje arbitrario (a) , mapa de simetría (b) y perfil (c).

El **perfil o histograma compactado** es el resultante de acumular las diferentes “respuestas” que se obtienen tanto de la presencia de la reflexión especular como de la reflexión con desplazamiento, véase fig. 73. Basta con estudiar lo que sucede en un segmento de longitud del lado del PF para el que se estudia la presencia de reflexión. La localización del máximo dentro de este segmento permite discernir de qué tipo es, interpretando si en determinadas zonas se observa un valor alto de presencia de simetría. Si el máximo se observa en el primer o último cuarto de esta versión condensada, la simetría presente es especular (**noG**). Si se observa en los dos cuartos centrales del mismo es reflexión con desplazamiento (**G**). Si hay tanto una como la otra reflexión se observarán máximos en más de una de estas zonas.

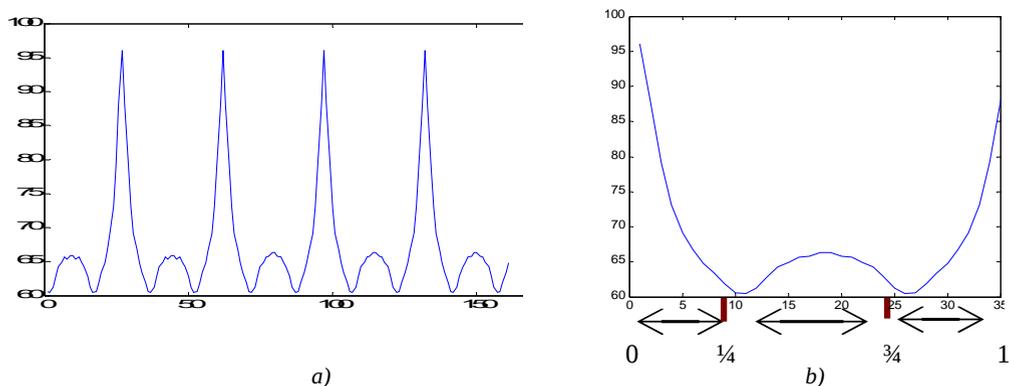


Figura 73: Ejemplo de compactación del perfil (a) y su interpretación (b).

La tabla 5 muestra los perfiles que se obtienen para tres imágenes de la colección *Wallpaper* que sirven para ejemplificar las tres situaciones de presencia de simetría. De la primera fila a la última tenemos ejemplos de solo de reflexión (PMM), solo reflexión con desplazamiento (PGG) y con ambas (PMG).

Una observación final: los grupos con rejilla cuadrada o rectangular tienen una o la otra (esto es, o tiene reflexión con desplazamiento que denotamos por G , o tiene reflexión bilateral, que señalamos con noG) o ninguna de las dos. Mientras que los otros tipos de enrejado, si tienen G , entonces tienen noG (y viceversa), o ninguna de las dos. Se observa que si el sistema de referencia del enrejado no está alineado con el sistema de referencia de la imagen, al moverse entre puntos consecutivos en el retículo se está recorriendo un número diferente de puntos en la imagen, por lo que al proyectar las perpendiculares al eje de reflexión se acumulan puntos en órbitas diferentes del PF.

Esta observación viene apoyada por el trabajo de (Johnson y Rodríguez, 2003) que al definir la reflexión con desplazamiento demuestra que:

1. Al combinar dos reflexiones con desplazamiento iguales se obtiene una traslación. Esto es debido a que para cualquier grupo de simetría en el que se define alguna reflexión con desplazamiento, el desplazamiento es de longitud la mitad que la traslación asociada a ese eje. Si en la misma posición del PF hay simetría de reflexión y de reflexión con desplazamiento, esta segunda se reduce a la combinación de las simetrías de reflexión y de traslación.
2. Cuando se da una reflexión con desplazamiento con respecto a ejes paralelos en los que se da simetría de reflexión bilateral, implica que también existirá simetría traslacional en la dirección perpendicular a esos ejes, con un módulo doble que la distancia que había entre los ejes de reflexión con desplazamiento. Esto corresponde exactamente al grupo de simetría PG y, con en más de una dirección en PMG, PGG y P4G.
3. Si en la misma dirección hay reflexión especular y con desplazamiento, se mostrarán alternadamente una y la otra. Si la reflexión con desplazamiento se da en un eje paralelo al de la especular también se observará esta alternancia. Es el caso de los grupos CM, P3M1, P31M, P4M y P6M.

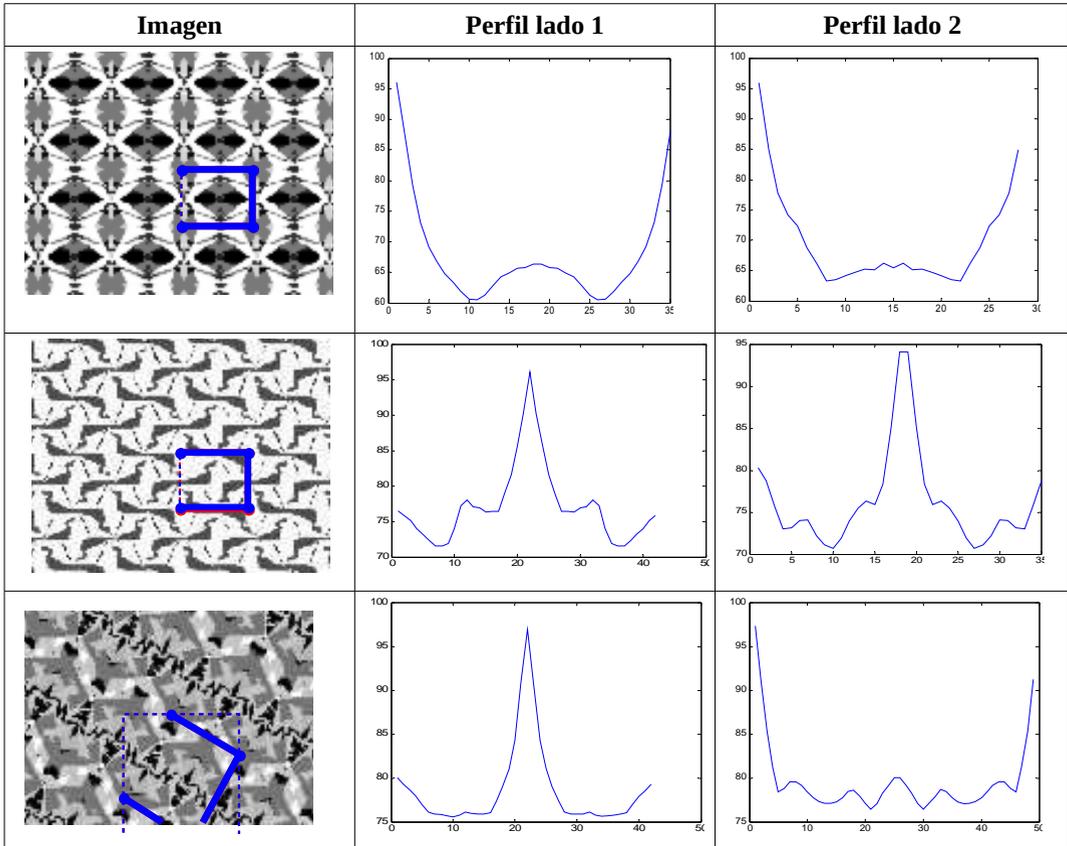


Tabla 5: Perfiles característicos de reflexión.

5.2.2 Método basado en la varianza de las particiones de la imagen

Para evaluar si una transformación aplicada es una simetría, utilizaremos el estadístico EAR que representa si es regular la imagen, sin transformar, aplicándolo al retículo transformado. Es importante destacar que no se trata del método tradicional de transformar la imagen, obtener un representante del PF (PF medio o mediano) y calcular la distancia (mínimo-cuadrática o similar) a lo largo de la imagen. En lugar de eso se trabaja únicamente con la geometría del PF sin necesidad de extraer ningún representante del mismo.

Ya se abordó en el tema anterior el particionado de la imagen para el cálculo del EAR, presentando allí los métodos continuo y disperso; y se identificaron los problemas inherentes a la versión continua. El uso de las particiones y la varianza se puede aplicar para determinar y cuantificar la existencia de las isometrías que definen los GSP. Vamos a exponer en este punto cómo se puede aplicar esta idea a todas las simetrías a estudiar en el espacio de la imagen y obtendremos las correspondientes equivalencias en el espacio del enrejado.

Si aplicamos un **particionado continuo**, de acuerdo con la geometría del PF se obtiene un conjunto

de subimágenes (particiones $P_{i,j}$), como se muestra en la fig.74, rectangulares (en este caso). Si la imagen posee simetría traslacional, la varianza de estas particiones será igual a la varianza global de la imagen (el estadístico EAR será cero). Sin embargo, se tiene el problema de que las particiones en los extremos de la imagen están cortadas y su varianza no se parece a la varianza global, lo cual sesga el estadístico EAR. Tratar este problema de bordes, que se agudiza al aplicar otras simetrías, nos lleva a un problema computacionalmente complejo.

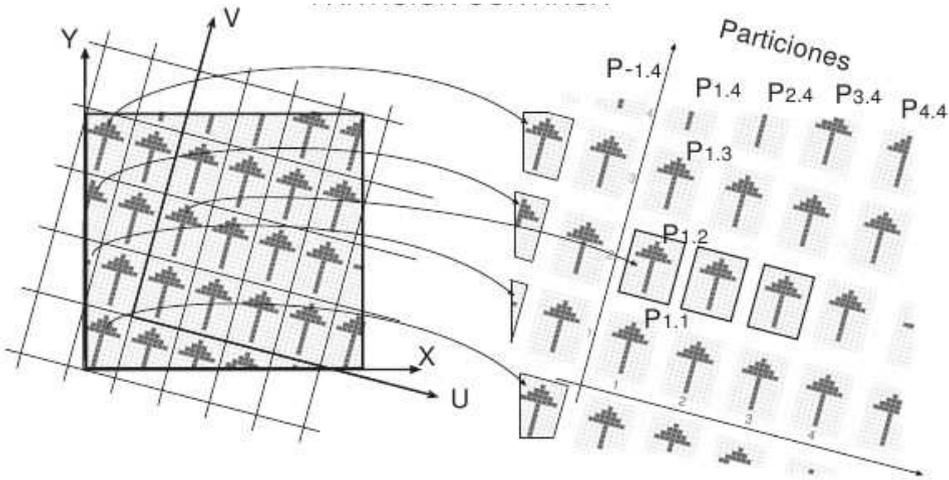


Figura 74: Ejemplo de uso de la partición continua para el cálculo de las simetrías.

Un **particionado disperso** realiza una división bidimensional de la imagen en subconjuntos, tal que los puntos en la misma posición relativa (k, l) dentro de cada PF, pertenecen al mismo subconjunto P_{kl} , con $k=1, \dots, |\vec{L}_1|$ y $l=1, \dots, |\vec{L}_2|$. Así se define la partición obtenida como el conjunto de las generadas por cada punto del PF y sus órbitas en la imagen. Siendo la partición de dimensión $L_1 \times L_2$.

De manera formal podemos hacer esta definición:

Definición 1: Dada una imagen $I(x,y)$, de dimensión (m,n) y un enrejado G definido por dos vectores directores $\vec{L}_1=(L_1 \cdot \cos \alpha_1, L_1 \cdot \sin \alpha_1)$ y $\vec{L}_2=(L_2 \cdot \cos \alpha_2, L_2 \cdot \sin \alpha_2)$, se define una **Partición Dispersa** $PD(I,G)$ como el conjunto de subconjuntos P_{kl} de puntos de la imagen:

$$PD(I, G) = \{ P_{kl} / P_{kl} = \{ I(x_i, y_j) / \{ (x_i, y_j) \xrightarrow{T_G} (k, l) \quad \forall i=1..m \quad \forall j=1..n \} \}$$

tal que cada subconjunto P_{kl} contiene todos los píxeles $I(x,y)$ de la imagen cuyas coordenadas relativas dentro del retículo sean iguales a (k,l) , con $k=1, \dots, |\vec{L}_1|$ y $l=1, \dots, |\vec{L}_2|$. La función T_G define la transformación de coordenadas entre el espacio imagen y el espacio del enrejado.

La fig. 75 muestra el **particionado disperso** de la imagen anterior. Si existe la simetría (traslacional, en este caso) todas las particiones acumulan puntos con igual nivel de gris, por lo que sus varianzas tienden a cero (y el EAR también tiende a 0). Eventualmente, algunas particiones

acumulan más puntos que otras pero se mantiene la regla de sus varianzas tienden a cero. Con este método el tratamiento de todos los puntos de la imagen es uniforme, no se plantean problemas de borde y el particionado se puede realizar en una solo barrido de la imagen.

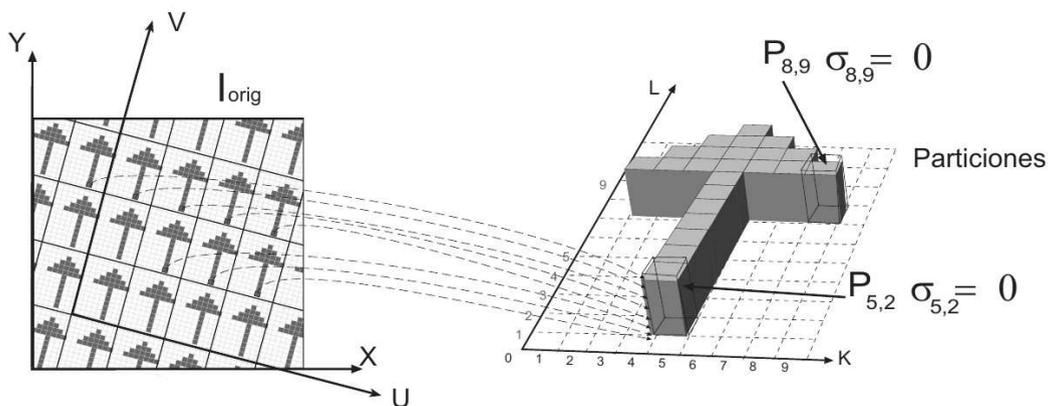


Figura 75: Ejemplo del uso de particiones dispersas para el cálculo de las simetrías.

Teniendo en cuenta lo anterior, hemos optado por utilizar un particionado disperso para el cálculo de todas las simetrías interiores.

5.2.3 Método de cálculo de simetrías basado en particiones dispersas

Para calcular la varianza a partir de un particionado disperso hay que obtener los $|L_1| \times |L_2|$ subconjuntos P_{kl} formados por cada punto del PF y sus órbitas en la imagen. Para no transformar la imagen es necesario estudiar cómo el sistema de coordenadas ortogonal de la imagen $I(x,y)$ se puede transformar al sistema de coordenadas del enrejado \mathbf{G} , no ortogonal y definido por los vectores directores $\vec{L}_1 = (L_1 \cdot \cos \alpha_1, L_1 \cdot \sin \alpha_1)$ y $\vec{L}_2 = (L_2 \cdot \cos \alpha_2, L_2 \cdot \sin \alpha_2)$ y cómo proyectar, a su vez, estos puntos en el interior de un PF. De esta forma podemos definir analíticamente la función de transformación de coordenadas T_G indicada en la definición 1.

Los sistemas de coordenadas a considerar se muestran en la fig. 76 y son los siguientes:

- El dominio de la imagen es un sistema de coordenadas cartesianas \mathbf{OXY} sobre el que se definen las posiciones de los píxeles en la imagen, típicamente centrado en $(0,0)$ en la esquina superior de izquierda de la imagen y que se extiende hasta la resolución en horizontal y vertical (m,n) de ésta.
- El sistema de coordenadas del enrejado es un sistema de coordenadas oblicuas $\mathbf{O_GUV}$ sobre el que se definen las posiciones del retículo definido por los ángulos de las dos direcciones del PF (\vec{L}_1 con longitud $|L_1|$ y ángulo α_1 y \vec{L}_2 con módulo $|L_2|$ y ángulo α_2) y que se extiende hasta el número de veces que es visible el patrón regular en la imagen. El origen del sistema de referencia del enrejado se sitúa en $\mathbf{O_G} = (x_G, y_G)^T$ en coordenadas cartesianas.
- El sistema de coordenadas del PF es un sistema de coordenadas oblicuo, centrado en $(0,0)$ sobre uno de los vértices del PF y que se extiende en las dos direcciones de su geometría hasta los valores de longitud obtenidos para cada una de ellas (L_1, L_2) .

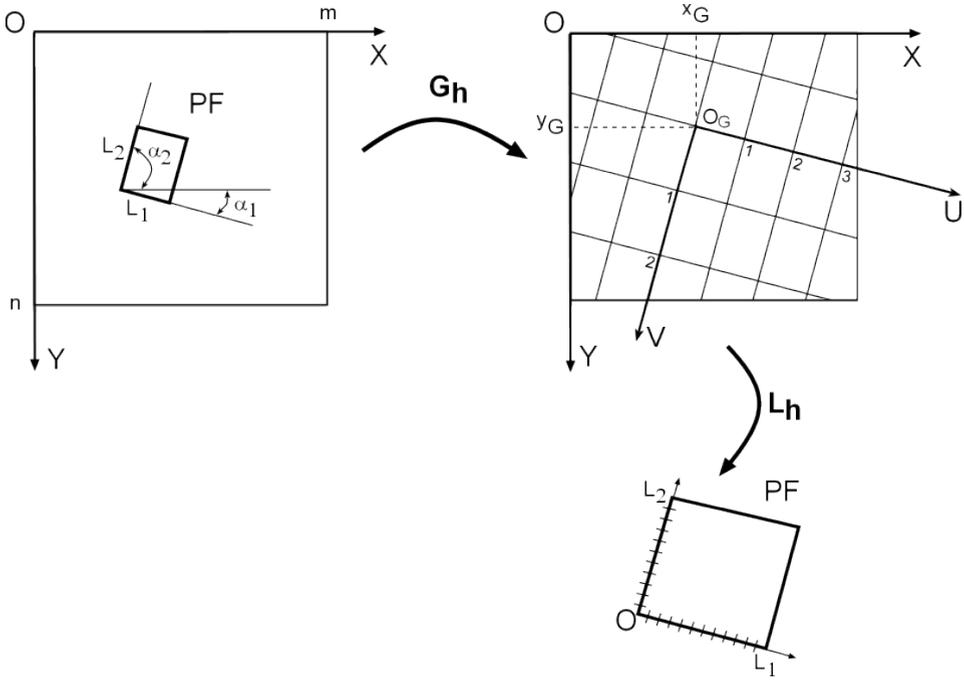


Figura 76: Sistemas de referencia de la imagen (cartesiano), del enrejado (oblicuo) y del PF.

La **correspondencia entre las coordenadas de la imagen $p=(x, y)^T$ y las del enrejado $q=(u, v)^T$** se obtiene mediante la función de transformación G como ec. 30.

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{G} q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$$

La transformación inversa es fácil de obtener, ec. 31;

$$p = G^{-1} \cdot q + O_G$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Siendo la transformación directa:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \end{pmatrix} \quad (32)$$

Siendo la matriz G la que define los parámetros del enrejado:

$$G = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (33)$$

Por conveniencia, en lo sucesivo vamos a considerar coordenadas homogéneas¹¹, pues las sumas de vectores se reconvierten a productos y el tratamiento es más conciso.

Sea $\mathbf{p} = (x, y, 1)^T$ un punto cualquiera de la imagen en coordenadas homogéneas, y sea $\mathbf{q} = (u, v, 1)^T$ el correspondiente en el sistema de coordenadas del enrejado, la función de transformación G_h , en coordenadas homogéneas, se define como ec 34:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G_h} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = G_h \cdot \mathbf{p} \quad (34)$$

La transformación inversa será, ec. 35:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G_h^{-1}} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = G_h^{-1} \cdot \mathbf{q} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1} & O_G \\ O^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con $O^T = (0,0)$, $O_G = (x_G, y_G)^T$ y la matriz G de 2x2 define los parámetros del enrejado. La matriz de transformación, ec. 36

$$G_h^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & O_G \\ O^T & 1 \end{pmatrix} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

¹¹ Los vectores en coordenadas homogéneas se representan en minúsculas, negrita y cursiva. Las matrices de transformación se representan en mayúsculas, negrita y cursiva.

La **transformación directa** será, ec 37:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_h} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \mathbf{G}_h \cdot \mathbf{p} \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quedando la matriz de transformación \mathbf{G}_h como:

$$\mathbf{G}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (38)$$

Las ecuaciones 33 y 36 representan las funciones de transformación inversa y directa, respectivamente, desde el espacio de la imagen al espacio del enrejado.

Consideraremos ahora la segunda transformación, tal y como se indica en la fig. 76. Para poder definirla vamos a demostrar que al trasladarnos en la imagen a intervalos regulares de los lados de PF, las correspondientes coordenadas en el enrejado se incrementan en números enteros.

Proposición 1: Sea $\mathbf{p}=(x, y, 1)^T$ un punto cualquiera de la imagen, cuyas coordenadas en el sistema de referencia del enrejado \mathbf{G} son $\mathbf{q}=(u,v,1)^T$. Si trasladamos dicho punto una distancia

$\mathbf{L}_1=(L_1 \cdot \cos \alpha_1, L_1 \cdot \sin \alpha_1, 0)^T$, tal que $\mathbf{p}'=\mathbf{p}+\mathbf{L}_1$, sus coordenadas en el enrejado serán $\mathbf{q}'=(u+1, v, 1)^T$.

La traslación del punto $\mathbf{p}=(x, y, 1)^T$ una distancia L_1 en la imagen, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+L_1 \cos \alpha_1 \\ y+L_1 \sin \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1 \cos \alpha_1 \\ 0 & 1 & L_1 \sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Para obtener las coordenadas en el sistema del enrejado $\mathbf{q}'=(u', v', 1)^T$ aplicamos la ecuación 35 de la transformación \mathbf{G}_h en coordenadas homogéneas, tal que $\mathbf{p}=\mathbf{G}_h^{-1} \cdot \mathbf{q}$ tendremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1 \cos \alpha_1 \\ 0 & 1 & L_1 \sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G+L_1 \cos \alpha_1 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G+L_1 \sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u+1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$= \mathbf{G}_h^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo que nos indica que al trasladar cualquier punto por una distancia L_1 , la correspondiente coordenada 'u' del enrejado se incrementa en una unidad, $u' = u+1$, c.q.d.

Proposición 2: Sea $\mathbf{p}=(x, y, 1)^T$ un punto cualquiera de la imagen, cuyas coordenadas en el sistema de referencia del enrejado \mathbf{G} son $\mathbf{q}=(u,v,1)^T$. Si trasladamos dicho punto una distancia $L_2=(L_2 \cdot \cos \alpha_2, L_2 \cdot \sin \alpha_2, 0)^T$, tal que $\mathbf{p}'=\mathbf{p}+L_2$, sus coordenadas en la rejilla serán $\mathbf{q}'=(u, v+1, 1)^T$.

La traslación del punto $\mathbf{p}=(x, y, 1)^T$ una distancia L_2 en la imagen, se puede expresar como en la ec. 41:

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+L_2 \cos \alpha_2 \\ y+L_2 \sin \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_2 \cos \alpha_2 \\ 0 & 1 & L_2 \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_2 \cos \alpha_2 \\ 0 & 1 & L_2 \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G+L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G+L_2 \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & x_G \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= G_h^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

Como en el caso anterior, para obtener las coordenadas del punto trasladado en el sistema del enrejado $\mathbf{q}'=(u',v',1)^T$ aplicamos la ecuación de transformación G_h y obtenemos la ec. 42. Lo que nos indica que al trasladar cualquier punto por una distancia L_2 , la correspondiente coordenada v' del enrejado se incrementa en una unidad, $v' = v + 1$. c.q.d.

Por último podemos generalizar los desplazamientos de la siguiente forma.

Proposición 3: Sea $\mathbf{p}=(x, y, 1)^T$ un punto cualquiera de la imagen, cuyas coordenadas en el sistema de referencia del enrejado \mathbf{G} son $\mathbf{q}=(u,v,1)^T$. Si trasladamos dicho punto una distancia $(m \cdot L_1+n \cdot L_2)$, tal que $\mathbf{p}'=\mathbf{p}+m \cdot L_1+n \cdot L_2$, sus coordenadas en la rejilla serán $\mathbf{q}'=(u+m, v+n, 1)^T$.

La demostración de esta proposición es inmediata, sin más que aplicar secuencialmente las dos proposiciones anteriores.

Estas propiedades nos indican que:

1. Al movernos en el espacio de la imagen a intervalos del PF resulta en movimientos enteros en las coordenadas del enrejado. Por lo tanto, las coordenadas (u,v) del enrejado serán valores reales donde la parte entera indica en qué paralelogramo del retículo se encuentra el

punto, mientras que la parte fraccionaria indica la posición relativa dentro de ese PF.

2. Además, obsérvese que esta propiedad es independiente del origen del sistema de referencia del enrejado, que solo afecta a los valores numéricos absolutos de las coordenadas y no a los desplazamientos relativos.

En este punto estamos en disposición de definir la **correspondencia entre puntos $q(u,v)$ del espacio del enrejado a $r(k,l)$ del espacio del PF** en la forma de la ec. 43:

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \text{Int} \left[\text{Frac} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \right] \quad (43)$$

El escalado con las constantes L_1 y L_2 permite que las coordenadas (k,l) varíen en los rangos $[0..L_1-1]$ y $[0..L_2-1]$ respectivamente. Así por ejemplo, un punto de coordenadas (2.3, 4.55) en un enrejado de tamaño 20x15 se transformará al punto (6,8) del PF, ya que:

$$\text{Int}(0.3 \times 20) = 6 \quad \text{e} \quad \text{Int}(0.55 \times 15) = 8$$

En este paso se producen errores de redondeo en la función **Int**, lo cual es lógico pues estamos transformando coordenadas desde un espacio imagen discreto a otro espacio también discreto (PF).

Con estas dos funciones de correspondencia de coordenadas $(\mathbf{G}_h, \mathbf{L}_h)$ se tiene que todos los puntos de la imagen dispuestos a intervalos de un PF se proyectan sobre una misma coordenada (k,l) del espacio del PF, que es la definición de los subconjuntos P_{kl} de una partición dispersa.

5.2.3.1 Transformaciones de la imagen

La existencia de simetrías interiores en una imagen implica que si dicha imagen se transforma, siguiendo esas simetrías, el resultado es el mismo que la imagen original, es decir que mantiene la misma repetitividad.

Como ya se ha indicado en un apartado anterior, el estadístico EAR es una buena medida ‘cuantitativa’ de la repetitividad de una imagen respecto a un enrejado. Ese estadístico se calcula mediante una partición dispersa $\mathbf{PD}(\mathbf{I}, \mathbf{G})$ de la imagen. Precisamente, podemos usar el mismo estadístico, calculado sobre la imagen transformada siguiendo algún tipo de simetría, como medida ‘cuantitativa’ de dicha simetría. Si ese estadístico es cero (o muy bajo) en la imagen transformada será que esa simetría no existe. Si la simetría sí existe, el estadístico será 1 (o próximo a uno).

Por lo tanto, necesitamos saber cómo se realiza un particionado disperso sobre una imagen transformada y qué relación tiene con la partición dispersa de la imagen original.

Supongamos pues, que la imagen original $\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, que es repetitiva respecto a un enrejado \mathbf{G} , se transforma mediante una función de transformación afín \mathbf{A}_h (en coordenadas homogéneas), que representa la transformación de simetría (rotaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento). El resultado, ec. 44, es una imagen transformada $\mathbf{I}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sobre la que realizamos el particionado disperso $\mathbf{PD}(\mathbf{I}_T, \mathbf{G})$ al espacio del enrejado original y, posteriormente, al espacio de PF original.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}_h} \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_h} \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{L}_h} \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} k' \\ l' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

De tal manera que:

$$p' = A_h \cdot p \quad q' = G_h \cdot p' \quad r' = L_h \cdot q' \quad (45)$$

O sea

$$r' = L_h \cdot G_h \cdot A_h \cdot p \quad (46)$$

Cada transformación de simetría tiene parámetros diferentes, por lo que debemos describir cada caso por separado. Las funciones de transformación para las tres simetrías a considerar son las siguientes:

Simetría de Rotación (*n-fold Rotation Symmetry*)

La rotación de un ángulo α respecto al origen se define mediante la matriz de transformación (para coordenadas homogéneas) que muestra la ec. 47. El sentido positivo del ángulo de giro se toma en el sentido de giro de las agujas de reloj (clockwise).

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ con } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (47)$$

Simetría de Reflexión (*Reflection Symmetry*)

La reflexión respecto a un eje que pasa por el origen y tiene un ángulo β respecto al eje horizontal \mathbf{OX} se define mediante la matriz A_0 , ec. 48.

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}_\beta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (48)$$

Con \mathbf{Re}_β definida como en la ec. 49.

$$\mathbf{Re}_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (49)$$

Simetría de Reflexión con desplazamiento (*Glide Reflection Symmetry*)

Por último, la reflexión con deslizamiento es la combinación de una reflexión respecto a un eje que pasa por el origen y tiene un ángulo β respecto al eje horizontal \mathbf{OX} , seguida de un desplazamiento d en el sentido del eje. La matriz de transformación será la de la ec. 50

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}_\beta & d \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (50)$$

con \mathbf{Re}_β definida en la ecuación 51 y con

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d \cdot \cos \beta \\ -d \cdot \sin \beta \end{pmatrix} \quad (51)$$

En los tres casos, la función de transformación se puede definir genéricamente mediante una matriz de transformación afín como muestra la ec. 52. Donde la submatriz \mathbf{A} de dimensión 2x2 define las rotaciones o reflexiones y el vector \mathbf{d} representa los deslizamientos.

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Sin embargo, las simetrías interiores de una imagen no tienen, necesariamente, que estar definidas respecto al origen. En general, estas simetrías estarán definidas respecto a ciertos puntos de la imagen (centros de rotación, puntos cualesquiera del eje de reflexión,..). Por ello necesitamos saber las correspondientes matrices de transformación respecto a un punto cualquiera de dicha imagen.

Para ello escogeremos un punto cualquiera de la imagen $\mathbf{O}_G=(x_G, y_G, 1)^T$ en el que, sin pérdida de generalidad, situaremos el origen del sistema de referencia del enrejado. Podemos entonces obtener la matriz de transformación en este caso de la siguiente forma:

Proposición 4: Sea $\mathbf{p}=(x, y, 1)^T$ un punto cualquiera de la imagen. Si aplicamos una transformación afín $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a un punto $\mathbf{O}_G=(x_G, y_G, 1)^T$, tal que $\mathbf{p}' = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}$, la matriz de transformación \mathbf{A}_h resultante se definirá como en la ec. 53.

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \cdot \mathbf{O}_G + \mathbf{O}_G + \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Para demostrar esta proposición primero transformamos las coordenadas del punto \mathbf{p} a un sistema de referencia centrado en $\mathbf{O}_G = (x_G, y_G, 1)^T$ y a continuación aplicamos la transformación afín \mathbf{A}_0 respecto a ese origen, devolviendo finalmente el origen a su posición inicial, ec. 54

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A}_0 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{O}_G) + \mathbf{O}_G \quad (54)$$

El resultado, para los tres casos de simetría anteriores, será el que muestran las ec. 55, 56 y 57. Obsérvese que las matrices de transformación \mathbf{A}_h resultantes se ajustan a la ec. 53:

Simetría de rotación:

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\alpha & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\alpha & -\mathbf{R}_\alpha \mathbf{O}_G + \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} \quad (55)$$

Simetría de reflexión:

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}_\beta & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}_\beta & -\mathbf{Re}_\beta \mathbf{O}_G + \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} \quad (56)$$

Simetría de reflexión con deslizamiento:

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}_\beta & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}_\beta & -\mathbf{Re}_\beta \cdot \mathbf{O}_G + \mathbf{d} + \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} \quad (57)$$

Simetría	Parámetro constante
Rotación de orden 2	$\alpha = 180^\circ$
Rotación de orden 3	$\alpha = 120^\circ$
Rotación de orden 4	$\alpha = 90^\circ$
Reflexión respecto al lado L ₁	$\beta = \alpha_1$
Reflexión respecto al lado L ₂	$\beta = \alpha_2$
Reflexión respecto a la diagonal D ₁	$\beta = \alpha_{D1}$
Reflexión respecto a la diagonal D ₂	$\beta = \alpha_{D2}$
Reflexión con deslizamiento respecto al lado L ₁	$\beta = \alpha_1, d = \frac{L_1}{2}$
Reflexión con deslizamiento respecto al lado L ₂	$\beta = \alpha_2, d = \frac{L_2}{2}$
Reflexión con deslizamiento respecto a la diagonal D ₁	$\beta = \alpha_{D1}, d = \frac{D_1}{2}$
Reflexión con deslizamiento respecto a la diagonal D ₂	$\beta = \alpha_{D2}, d = \frac{D_2}{2}$ con $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d \cdot \cos \beta \\ -d \cdot \sin \beta \end{pmatrix}$

Tabla 6: Valores de los parámetros constantes para cada tipo de simetría.

También indicar que la transformación \mathbf{A}_h depende de un punto \mathbf{O}_G en el que hemos situado en el origen del sistema de referencia del enrejado, siendo el único parámetro libre que no está definido de antemano. Los otros posibles parámetros (β y \mathbf{d}) no son, en realidad, valores libres sino que son constantes. En el cálculo de características de simetría de rotación solo se consideran ángulos de rotación de 90°, 120° y 180°. En las reflexiones con o sin deslizamiento solo se consideran reflexiones respecto a los dos lados y las dos diagonales del PF y deslizamientos de medio lado o media diagonal. La tabla 6 muestra los valores de β y \mathbf{d} para cada caso. Los valores α_{D1} , α_{D2} , D_1 y D_2 son los ángulos y longitudes de las diagonales del PF.

Una vez hemos transformado la imagen, de acuerdo con una simetría, podemos obtener la transformación de sus puntos al espacio del enrejado mediante la siguiente proposición:

Proposición 5: Sea $\mathbf{p} = (x, y, 1)^T$ un punto cualquiera de la imagen, cuyas coordenadas en el sistema de referencia del enrejado \mathbf{G} son $\mathbf{q} = (u, v, 1)^T$. Si aplicamos una transformación afín con respecto a origen $\mathbf{O}_G = (x_G, y_G, 1)^T$, tal que $\mathbf{p}' = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}$, las coordenadas del punto transformado en el enrejado $\mathbf{q}' = (u', v', 1)^T$ serán, ec. 58:

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_h \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}_G + \mathbf{G} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Donde

$$\mathbf{G}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 \\ L_1 \sin \alpha_1 & L_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (59)$$

y

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \cdot \mathbf{O}_G + \mathbf{O}_G + \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

La demostración es sencilla, pues basta con obtener las coordenadas del punto transformado:

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \cdot \mathbf{O}_G + \mathbf{O}_G + \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} \quad (61)$$

Y a continuación aplicar la transformación \mathbf{G}_h al sistema de referencia del enrejado, ec. 37:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en ésta última y operando obtenemos la ec. 62, c.q.d.

El resultado, para los tres casos de simetría anteriores, serán los que muestran las ecuaciones 63, 64 y 65. Obsérvese que las transformaciones resultantes se ajustan a la ec. 58 en los tres casos:

Simetría de rotación:

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \cdot \mathbf{R}_\alpha & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_h \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} \quad (63)$$

Simetría de reflexión:

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \cdot \mathbf{Re}_\beta & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{Re}_\beta \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_h \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p} \quad (64)$$

Simetría de reflexión con deslizamiento:

$$q' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \cdot Re_{\beta} & -G \cdot Re_{\beta} \cdot O_G + G \cdot d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = G_h \cdot A_h \cdot p \quad (65)$$

Las ecuaciones anteriores definen la transformación al enrejado de una imagen transformada $I_T(x,y)$ por alguna simetría - rotación 63, reflexión 64 y reflexión con deslizamiento 65 - mientras que la ec. 37 define la transformación al enrejado de la imagen original $I(x,y)$. Un aspecto interesante es la relación de equivalencia que se puede establecer. Por ejemplo, supongamos el caso de la rotación. Si observamos la ec. 63 y la comparamos con la ec. 37, podemos concluir que:

“Una rotación de un punto de la imagen, respecto al origen O_G , por un ángulo α , es equivalente a una rotación de ángulo $-\alpha$ del sistema de referencia del enrejado respecto al mismo origen”

La equivalencia se establece en el momento que las coordenadas del punto transformado sobre el enrejado original son las mismas que las coordenadas del punto original sobre el enrejado transformado. Efectivamente, si aplicamos una rotación del sistema de referencia del enrejado por un ángulo $-\alpha$, tendremos:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{-\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Nótese que el criterio de ángulos para las transformaciones de sistemas de coordenadas es el opuesto al criterio para el giro de puntos: un giro positivo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj (*counter-clockwise*).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R'_{-\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{-\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G & -G \cdot O_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G \cdot R'_{-\alpha} & -G \cdot R'_{-\alpha} \cdot O_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

Si proyectamos un punto cualquiera de la imagen original $p=(x,y,1)^T$ sobre enrejado G , mediante la ec. 37, y después aplicamos la rotación a este sistema de referencia obtendremos la ec. 67 que es igual a la ec. 63 sin más que observar que $R'_{-\alpha} = R_{\alpha}$.

Así pues, la ec. 63 nos da la transformación al sistema de referencia del enrejado tras aplicar una rotación a la imagen original o, como se acaba de indicar, tras aplicar la transformación opuesta al sistema de referencia del enrejado dejando la imagen original inalterada. Esto se muestra gráficamente en la fig. 77.

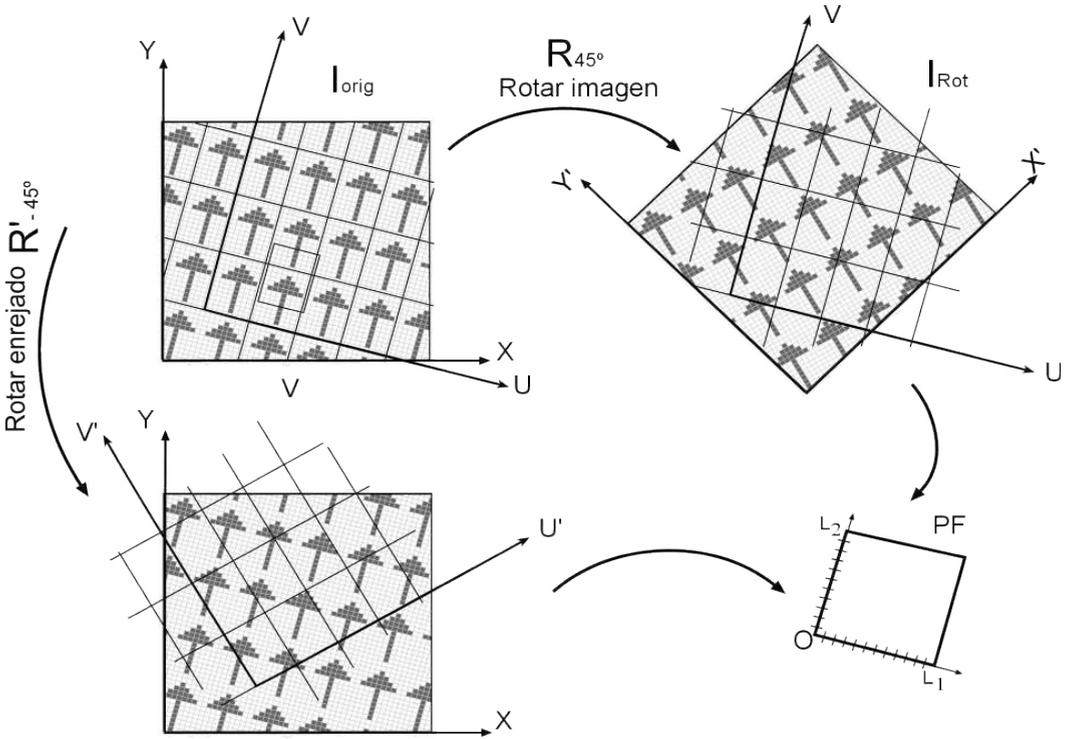


Figura 77: Transformación de rotación. Equivalencia entre rotar la imagen o rotar el enrejado.

Para el resto de simetrías podemos hacer la misma consideración. Consideremos la simetría de reflexión respecto a un eje que pasa por el origen y tiene un ángulo β respecto al eje horizontal \mathbf{OX} . Si aplicamos la transformación opuesta al sistema de referencia \mathbf{OUV} del enrejado, consistente en un giro de ángulo $-\beta' = \beta - \alpha_1$, para alinear el eje \mathbf{OU} con el eje de reflexión, seguido de una reflexión sobre ese eje y, posteriormente devolvemos los ejes a su posición original mediante un giro de ángulo β' .

La reflexión sobre el eje \mathbf{OU} no es, simplemente, un cambio de signo pues los ejes \mathbf{OU} y \mathbf{OV} no son ortogonales sino que sustentan un ángulo de $\alpha_2 - \alpha_1$. La transformación de las coordenadas del enrejado será la que muestra la ec .68.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\beta') & -\sin(-\beta') & 0 \\ \sin(-\beta') & \cos(-\beta') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta' & -\sin \beta' & 0 \\ \sin \beta' & \cos \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}'^{-\beta'} & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{68}$$

Como en el caso anterior, si proyectamos un punto cualquiera de la imagen original $\mathbf{p}=(x,y,1)^T$ sobre enrejado \mathbf{G} , mediante la ecuación 37, y después aplicamos la reflexión a este sistema de referencia obtendremos la ec. 69 que es igual a la ec. 64 sin más que observar que $\mathbf{R}'_{-\beta'} = \mathbf{R}e_{\beta}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{-\beta'} & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{-\beta'} & \mathbf{O} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{O}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{G} \cdot \mathbf{R}'_{-\beta'} & -\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}'_{-\beta'} \cdot \mathbf{O}_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

La relación de equivalencia anterior puede servir para simplificar el cálculo computacional de las distintas simetrías. Supongamos pues, que la imagen original $\mathbf{I}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, que es repetitiva respecto a un enrejado \mathbf{G} , se transforma mediante una transformación de simetría (rotaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento).

Esta operación es bastante costosa y requiere la interpolación de los niveles de gris y el resultado es una imagen transformada $\mathbf{I}_T(\mathbf{x},\mathbf{y})$ que, generalmente, no será rectangular. Sobre \mathbf{I}_T realizamos el particionado disperso $\mathbf{PD}(\mathbf{I}_T, \mathbf{G})$, es decir acumulamos en el mismo subconjunto aquellos niveles de gris que se proyectan en las mismas coordenadas del PF original.

La alternativa consiste en aplicar la transformación de simetría al enrejado, obteniendo un enrejado transformado \mathbf{G}_T . Esta operación solo se realiza una vez. Posteriormente obtenemos el particionado disperso de la imagen original sobre este nuevo enrejado $\mathbf{PD}(\mathbf{I}, \mathbf{G}_T)$. Como las coordenadas del enrejado son las mismas que antes (relación de equivalencia) entonces:

$$\mathbf{PD}(\mathbf{I}_T, \mathbf{G}) = \mathbf{PD}(\mathbf{I}, \mathbf{G}_T)$$

Sin embargo este segundo método es computacionalmente mucho menos costoso y se puede obtener la partición con un solo barrido de la imagen.

Resumen de ecuaciones

En este punto podemos resumir el conjunto de transformaciones de simetría y sus ecuaciones de transformación como muestra la ec. 44:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}_h} \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{G}_h} \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{L}_h} \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} k' \\ l' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

La matriz \mathbf{A}_h representa la transformación de simetría a aplicar a la imagen – o la transformación inversa a aplicar al enrejado original. La matriz \mathbf{G}_h representa la transformación al sistema de referencia del enrejado. Por último, la matriz \mathbf{L}_h representa la transformación al sistema de referencia del PF. La tabla 7 resume las ecuaciones implicadas.

Transformación	Matriz	Ecuación	Parámetros	Constantes
Traslación	$A_h = I$		--	--
Rotación	$A_h = \begin{pmatrix} R_\alpha & -R_\alpha \cdot O_G + O_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$	55	O_G	$\alpha = 90^\circ$ $\alpha = 120^\circ$ $\alpha = 180^\circ$
Reflexión	$A_h = \begin{pmatrix} Re_\beta & -Re_\beta \cdot O_G + O_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$	56	O_G	$\beta = \alpha_1$ $\beta = \alpha_2$ $\beta = \alpha_{D1}$ $\beta = \alpha_{D2}$
Reflexión con deslizamiento	$A_h = \begin{pmatrix} Re_\beta & -Re_\beta \cdot O_G + d + O_G \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$	57	O_G	$\beta = \alpha_1$ $d = \frac{L_1}{2}$ $\beta = \alpha_2$ $d = \frac{L_2}{2}$ $\beta = \alpha_{D1}$ $d = \frac{D_1}{2}$ $\beta = \alpha_{D2}$ $d = \frac{D_2}{2}$
siendo				
Coordenadas cartesianas			Coordenadas homogéneas	
$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$			$R_\alpha^h = \begin{pmatrix} R_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$	
$Re_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$			$Re_\beta^h = \begin{pmatrix} Re_\beta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$	
$d = \begin{pmatrix} d \cdot \cos \beta \\ -d \cdot \sin \beta \end{pmatrix}$			$GRE_{\beta,d}^h = \begin{pmatrix} Re_\beta & d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$	

Tabla 7: Resumen de las ecuaciones.

5.2.4 Evaluación de la presencia de simetrías

Para medir si existe **simetría de translación**, la transformación T indicada se sustituye por la matriz identidad y la forma de obtener su cuantificación numérica es mediante los estadísticos basados en la varianza (VaMeN y MeVaN) vistos en el capítulo anterior.

5.2.4.1 Método de cálculo de la simetría de translación

Para poder calcular la simetría traslacional de la imagen, $ST(I)$, hemos propuesto encontrar la partición P^j , de entre todas las posibles, que maximice MeVaN, véase ec. 70.

Obtener $P^j | MeVaN(P^j) > MeVaN(P^k) \quad \forall j, k$

$$ST(I) = MeVaN(P^j) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (\bar{g}_i - \bar{g})^2}{S^2} \quad 0 \leq MeVaN \leq 1 \quad (70)$$

siendo $\bar{g}_i = media(P^i)$; $\bar{g} = media(I)$; $S^2 = varianza(I)$; $n = dim(I)$; $n_i = dim(P^i)$;
 $\bar{x}_i = media(P^i)$

Para poder solucionar la ec. 70 utilizaremos una representación alternativa del PF mediante vectores directores t_1 y t_2 , ec. 71, por ser homogénea y, por lo tanto, indicada para procesos de maximización o minimización. Esta ecuación reformula la obtención del PF de una imagen como un **problema de cálculo de extremos**.

$$PF(t_1, t_2) : t_1 = (t_{1x}, t_{1y}), \quad t_2 = (t_{2x}, t_{2y}) \quad (71)$$

5.2.4.2 Método de cálculo de las simetrías interiores

La tabla 8 muestra las funciones de transformación T para cada una de las simetrías interiores en coordenadas homogéneas. Una vez que los subconjuntos P_{kl}^T han sido computados, los valores de ordinales (n_{kl}) y medias (\bar{g}_{kl}^T) pueden ser obtenidos.

Entonces se puede calcular el estadístico **VaMeN**, como en la ec. 72. Bajo condiciones ideales (p. ej. imágenes repetitivas sintéticas) la medida tomará valor 1, denotando la simetría perfecta. En un caso real, VaMeN será alto si la simetría está presente y baja en caso contrario, por lo que puede ser usada como una valoración al ser una media continua y normalizada.

$$VaMeN(P^T) = \frac{1}{L_1 \cdot L_2} \sum_{k=1}^{L_1} \sum_{l=1}^{L_2} n_{kl} \cdot (\bar{g}_{kl}^T - \bar{g})^2 \quad (72)$$

Rotación de ángulo α	Reflexión alrededor de un eje L con ángulo β
$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Re_{L_\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Reflexión con desplazamiento alrededor de un eje L con ángulo β y desplazamiento d	
$GRE_{L_{\beta,d}} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Tabla 8: Matrices de transformación, en coordenadas homogéneas, para cada una de las simetrías involucradas.

5.2.5 Particiones extendidas

Según la disposición del motivo interior al PF la transformación en el dominio del PF resultará en un conjunto de particiones con varianza que tiende a cero, si existe la simetría, como muestra la fig. 78, para el caso de una reflexión.

Esto sucede porque, por definición, si existe simetría la composición del PF no varía, se van “acumulando” en una misma partición todos los puntos que están en la misma órbita de cada PF. En caso contrario, las particiones acumulan puntos que pertenecen a órbitas diferentes y las variaciones de estas particiones tendrán valores distintos de cero, como muestra la fig. 79, para una rotación de 120° .

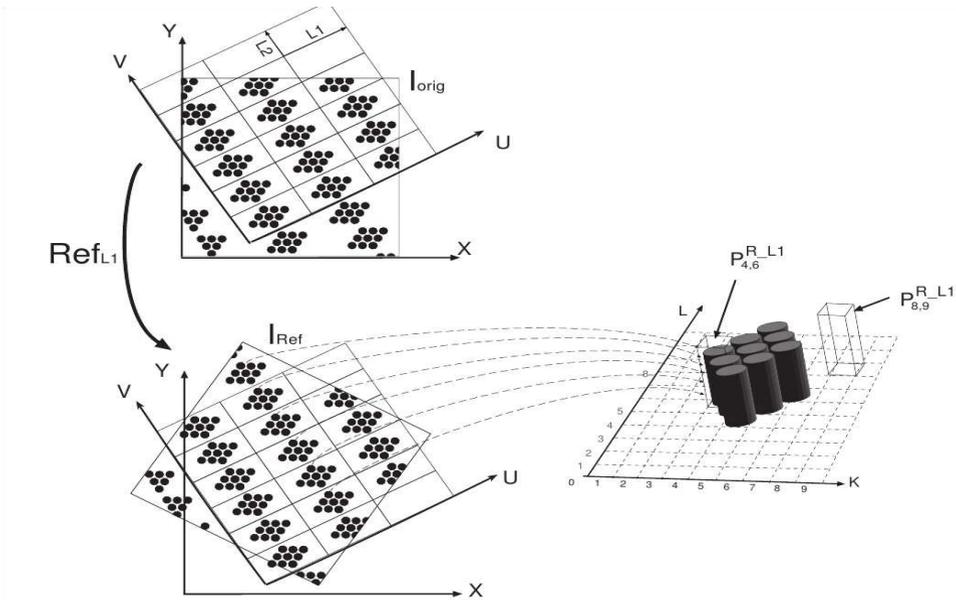


Figura 78: Ejemplo de particionado disperso para el caso medir la reflexión respecto al Lado L_1 .

Esta metodología falla en el caso en que la geometría del retículo es tal que no cambia con la simetría que se quiere medir. Por ejemplo la rotación de 180° y un retículo rectangular, fig. 79, no es capaz de medir la existencia de simetría. El motivo de la imagen (I_{orig}) de la fig. 79 no tiene simetría de orden 2, pero casualmente el retículo sí y en la imagen transformada (I_{Rot}) el conteo de las particiones da lugar a varianzas pequeñas lo que conlleva un claro indicador de que la simetría existe; aun cuando a vistas de la imagen se puede observar que no es así.

La fig. 80 ilustra el problema de la pérdida de la información del diseño que contenido bajo la geometría del retículo, que es lo que mide nuestro estadístico. Se perderá información en los casos que la geometría del PF sea tal que no se altere ante una determinada transformación como por ejemplo, una retícula cuadrada y una simetría de rotación de 90° o una rectangular y una rotación de 180° . Para dar solución a este problema proponemos el uso de **particiones extendidas**.

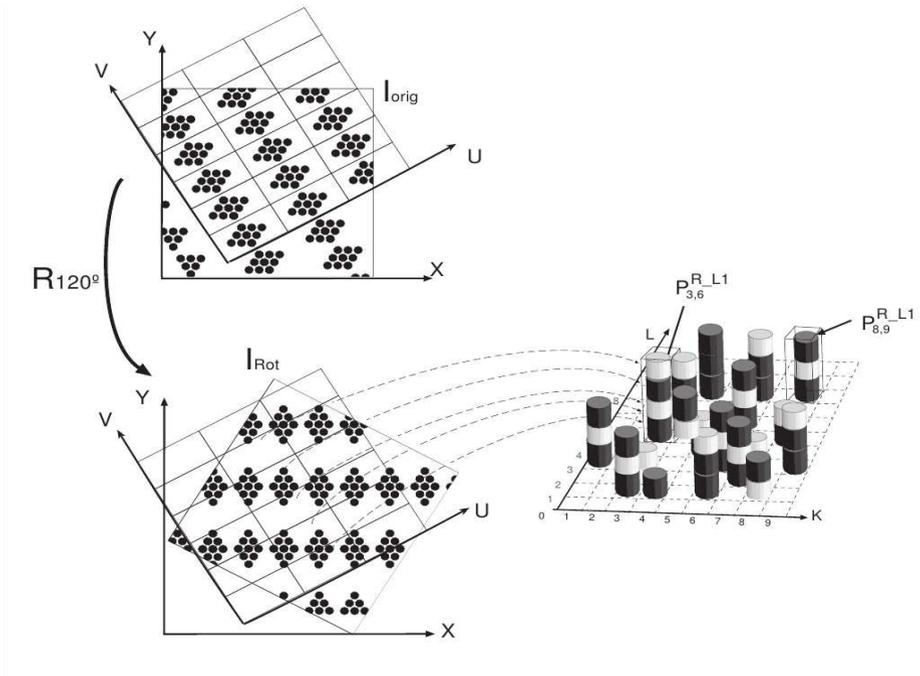


Figura 79: Ejemplo de particionado disperso para el caso medir la rotación de orden 3 (120°).

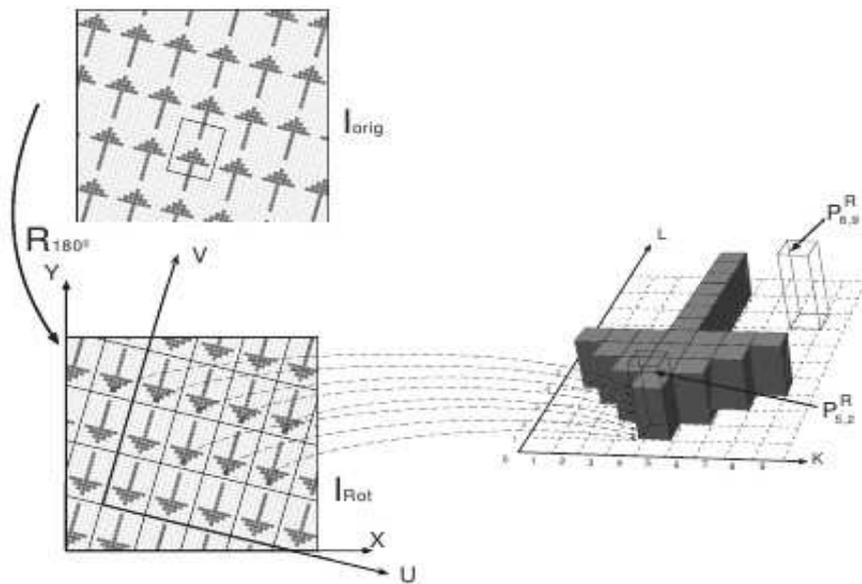


Figura 80: Contraejemplo de uso de la partición continua para el cálculo de la simetría de rotación de orden 2.

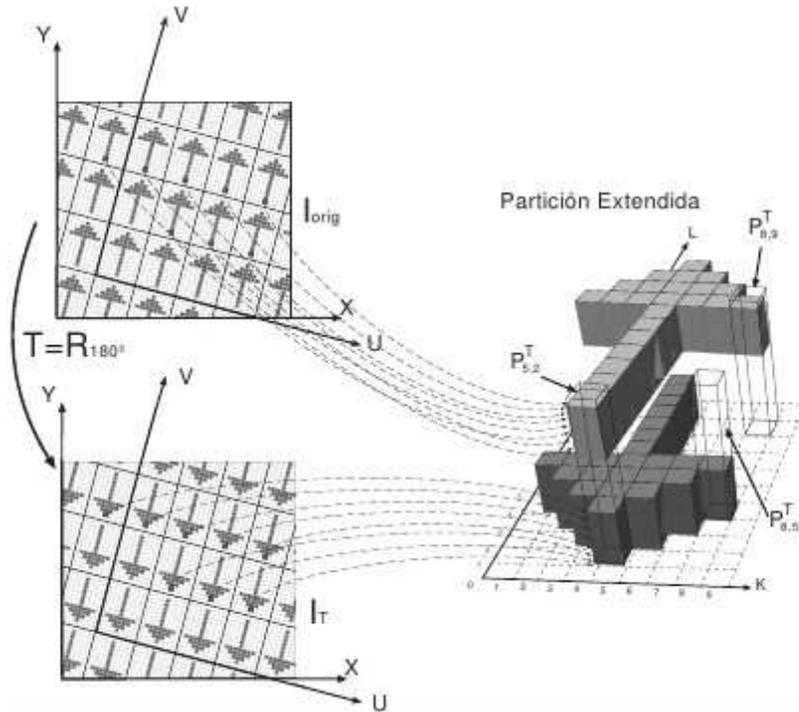


Figura 81: Problema del orden del estadístico para medir la simetría de un diseño.

El estadístico de varianza no retiene **información del diseño**. Cuando se aplica una simetría, el estadístico calculado sobre el retículo original es comparable en magnitud al del retículo transformado: los dos expresan, con una mínima diferencia debida a redondeos, el contenido regular de la imagen. Diremos en ese caso que son **compatibles**.

El ejemplo gráfico de la fig. 81 muestra que no todas las transformaciones que hacen que el retículo transformado sea compatible con el original también implica que el contenido de la imagen sea el mismo: el contenido del PF original no coincidirá con el transformado. El punto (i, j) del PF original puede no coincidir con el punto en el PF transformado: en este caso las coordenadas del mismo punto son $(-i, -j)$. Por eso creamos las particiones extendidas como manera de calcular si se da una simetría, en tanto que al considerar los conjuntos en la combinación de la partición extendida (partición original más partición transformada) se está comprobando si ambas son “compatibles”.

Como se indicaba en la fig. 22, las simetrías internas a calcular son: simetría de rotación (de orden 2, 3, 4 y 6), simetría de reflexión y de reflexión con desplazamiento (ambas a lo largo de los lados o de las diagonales del PF). Como la geometría de la rejilla puede ser obtenida previamente, ahora proponemos utilizar una Partición Extendida (PE), formada por la unión de la partición original de translación P^I y las diferentes particiones de la imagen P^T obtenidas después de aplicar las apropiadas transformaciones T a la geometría de la rejilla. La tabla 9 muestra las particiones

propuestas y los parámetros de búsqueda para cada caso.

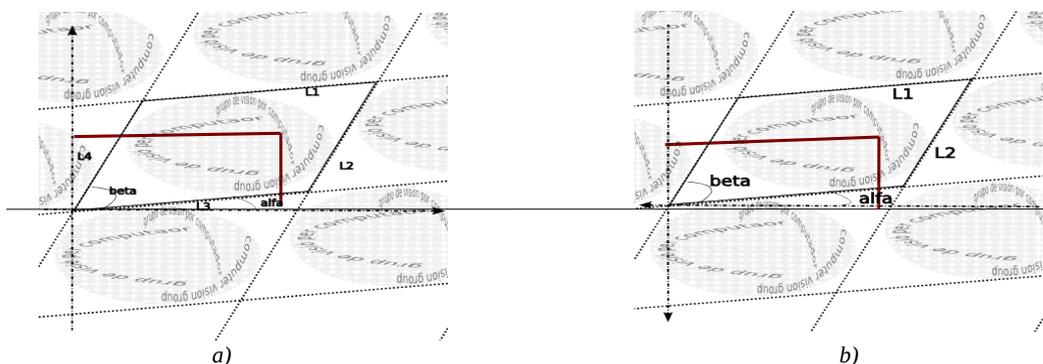


Figura 82: El estadístico de la varianza es adireccional. No tiene en cuenta el mapa de bits bajo de los puntos que define la partición original (a) y la transformada (b)

Simetría	Nombre	Partició n P^T	Partición P^E	T	Espacio de parámetros	Espacio de búsqueda
Traslación	ST	P^I	P^I	I	$(x_0, y_0) = (0, 0)$	$(L_1, \alpha_1, L_2, \alpha_2)$
Orden 2	SR_2	$P^{R_{180}}$	$P^I \cup P^{R_{180}}$	R_{180}	$\alpha = 180^\circ$	$(x_0, y_0) \in UL$
Orden 3	SR_3	$P^{[R_{120}]}$	$P^I \cup P^{R_{120}}$	R_{120}	$\alpha = 120^\circ$	$(x_0, y_0) \in UL$
Orden 4	SR_4	$P^{R_{90}}$	$P^I \cup P^{R_{90}}$	R_{90}	$\alpha = 90^\circ$	$(x_0, y_0) \in UL$
Orden 6	SR_6	$P^{R_{60}}$	$P^I \cup P^{R_{60}}$	R_{60}	$\alpha = 60^\circ$	$(x_0, y_0) \in UL$
Reflx. en lado 1	SRe_{L_1}	$P^{Re_{L_1}}$	$P^I \cup P^{Re_{L_1}}$	Re_{L_1}	$\beta = \alpha_1$	$(x_0, y_0) \perp L_1$
Reflx. en lado 2	SRe_{L_2}	$P^{Re_{L_2}}$	$P^I \cup P^{Re_{L_2}}$	Re_{L_2}	$\beta = \alpha_2$	$(x_0, y_0) \perp L_2$
Reflx. en diagonal 1	SRe_{D_1}	$P^{Re_{D_1}}$	$P^I \cup P^{Re_{D_1}}$	Re_{D_1}	$\beta = \alpha_{D_1}$	$(x_0, y_0) \perp D_1$
Reflx. en diagonal 2	SRe_{D_2}	$P^{Re_{D_2}}$	$P^I \cup P^{Re_{D_2}}$	Re_{D_2}	$\beta = \alpha_{D_2}$	$(x_0, y_0) \perp D_2$
Rflx. desp. lado 1	$SReD_{L_1}$	$P^{ReD_{L_1}}$	$P^I \cup P^{ReD_{L_1}}$	ReD_{L_1}	$\beta = \alpha_1, d = L_1/2$	$(x_0, y_0) \perp L_1$
Rflx. desp. lado 2	$SReD_{L_2}$	$P^{ReD_{L_2}}$	$P^I \cup P^{ReD_{L_2}}$	ReD_{L_2}	$\beta = \alpha_2, d = L_2/2$	$(x_0, y_0) \perp L_2$
Rflx. desp. diagonal 1	$SReD_{D_1}$	$P^{ReD_{D_1}}$	$P^I \cup P^{ReD_{D_1}}$	ReD_{D_1}	$\beta = \alpha_{D_1}, d = D_1/2$	$(x_0, y_0) \perp D_1$
Rflx. desp. diagonal 2	$SReD_{D_2}$	$P^{ReD_{D_2}}$	$P^I \cup P^{ReD_{D_2}}$	ReD_{D_2}	$\beta = \alpha_{D_2}, d = D_2/2$	$(x_0, y_0) \perp D_2$

Tabla 9: Resumen de la propuesta de características de simetría representando la asociación de particiones (original P^I y extendida (P^E), funciones de transformación (T) y espacios de parámetros y de búsqueda.

5.3 Evaluación de los resultados

Esta hace referencia a un conjunto de imágenes limitado y escogido para evidenciar cómo influye la regularidad de la imagen a nivel computacional. Los vectores mostrados son los obtenidos para las cuatro imágenes de la fig. 83, que ahora se vuelven a mostrar acompañados de la representación gráfica de las simetrías que cabe esperar en cada una de ellas. Los valores en **negrita** indican que esas medidas deben ser consideradas como indicadores de presencia de simetría, teniendo en cuenta que se conoce el GSP a que pertenece cada imagen y, por tanto, las simetrías que cabe esperar. Estos resultados confirman, como se esperaba, la obtención de valores altos en presencia de simetría y valores bajos en otro caso. Veamos que diferencias se aprecian entre los obtenidos por la aproximación clásica (similitud de PF) y la nueva propuesta (de uso de particiones dispersas) para el cálculo de las características.

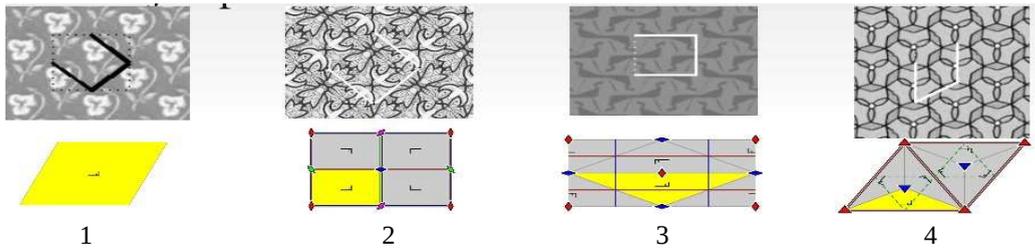


Figura 83: Ejemplos de imágenes regulares, acompañadas de la descripción gráfica del GSP al que pertenecen las imágenes.

Las tablas 10 y 11 muestran la cuantificación de cada una de las doce características utilizadas, con valores en el rango entre 0 y 100, para ver con más resolución la medida. La primera, que pertenece al grupo P1, no tiene simetrías interiores, no debería observarse la presencia de ninguna de ellas en el vector de características, aunque numéricamente tiene valores altos: mayores del 90% en las clásicas, con valores mínimos muy altos (en el rango [79..82]) que llevan a pensar que se han inducido mucho ruido en esta metodología de cálculo; mientras que para la metodología propuesta los valores máximos se han rebajado la mayoría al intervalo [46..56].

La segunda imagen es del grupo PMM, por lo que debe mostrar simetrías de SR_2 , SRe_1 y SRe_2 , lo que se identifica en el caso de la metodología clásica en el vector de máximos con valores mayores de 80% para estas características. Cabe observar que el resto de máximos toma valores en el intervalo [71...74] aún cuando no están presentes y que el vector de valores mínimos toma valores superiores al 66%. En cambio las nuevas características aunque ha bajado el valor cuantitativo de los valores máximos, ofrece una distancia entre los valores que deben observarse y los que no cabe observar en ese grupo de simetría.

Lo mismo sucede en el tercer ejemplo, el vector clásico de máximos combina valores muy altos (>97%) para las simetrías SR_2 , $SRe_{D_{11}}$, y $SRe_{D_{12}}$, que son las esperables en un PGG con valores también altos ([92..95]) en las que deben estar ausentes, con valores de mínimos del 90%. En cambio la metodología propuesta separa tanto los valores de simetría presente de los de ausente y, en general, de los mínimos observables.

El ejemplo cuarto (P31M) tiene características clásicas con valores máximos altos, en los que se dan valores de simetrías que deben ser observables menores que los de las ausentes y, en todos los

casos, valores del vector de mínimos muy altos (mayores del 74%). En cambio, el vector propuesto con las particiones dispersas, aunque no es tan evidente como en los otros tres casos permite observar la diferencia entre características presentes y ausentes.

Imagen	VCS = ($SR_2, SR_3, SR_4, SR_6, SRe_{L_1}, SRe_{L_2}, SRe_{D_1}, SRe_{D_2}, SReD_{L_1}, SReD_{L_2}, SReD_{D_1}, SReD_{D_2}$)	GSP
	VCS máximos para similitud de PF	
1	91.57, 92.70, 91.42, 90.31, 92.50, 91.54, 94.29, 91.26, 90.34, 90.37, 90.14, 91.05	P1
2	89.58 , 71.65, 72.99, 71.66, 92.25 , 81.63 , 73.15, 73.04, 74.45, 73.30, 73.16, 73.04	PMM
3	97.86 , 93.62, 92.82, 94.00, 93.53, 94.19, 92.87, 94.18, 98.82 , 97.90 , 92.88, 94.18	PGG
4	90.01, 91.60 , 84.85, 88.95, 94.85 , 92.04 , 88.47, 93.70 , 85.54 , 83.31 , 84.93, 82.51	P31M
	VCS mínimos para similitud de PF	
1	80.23, 80.93, 80.94, 79.94, 81.17, 80.03, 79.82, 80.21, 81.17, 80.03, 79.82, 80.22	P1
2	66.89, 69.44, 67.85, 69.47, 67.09, 67.86, 67.99, 67.95, 67.09, 67.86, 67.99, 67.95	PMM
3	90.18, 90.36, 90.16, 90.39, 90.23, 90.31, 90.43, 90.28, 90.23, 90.31, 90.43, 90.28	PGG
4	75.22, 74.42, 74.32, 74.48, 75.82, 74.68, 74.63, 74.66, 75.82, 74.68, 74.63, 74.66	P31M

Tabla 10: Resultados máximo y mínimo obtenidos de los mapas de simetría para cada características según la implementación clásica.

Imagen	VCS = ($SR_2, SR_3, SR_4, SR_6, SRe_{L_1}, SRe_{L_2}, SRe_{D_1}, SRe_{D_2}, SReD_{L_1}, SReD_{L_2}, SReD_{D_1}, SReD_{D_2}$)	GSP
	VCS máximos para particiones dispersas	
1	48.77, 53.78, 49.92, 25.88, 49.36, 51.67, 55.49, 46.31, 39.24, 39.30, 55.49, 46.31	P1
2	70.64 , 30.70, 47.12, 30.12, 70.66 , 70.22 , 47.23, 47.32, 48.97, 47.63, 48.97, 47.63	PMM
3	90.51 , 40.46, 28.93, 38.29, 57.27, 64.2, 30.54, 29.41, 90.47 , 88.50 , 30.54, 29.41	PGG
4	49.69, 57.11 , 27.41, 49.41, 60.69 , 55.87 , 50.19, 60.26 , 60.69 , 55.87 , 50.20, 60.26	P31M
	VCS mínimos para particiones dispersas	
1	18.86, 28.76, 18.32, 18.01, 19.57, 19.72, 22.95, 20.33, 19.57, 19.72, 22.95, 20.33	P1
2	34.69, 26.66, 34.34, 26.95, 35.09, 33.83, 36.65, 36.60, 35.09, 33.83, 35.09, 33.83	PMM
3	37.92, 26.98, 24.99, 24.97, 38.78, 38.95, 23.68, 23.78, 38.78, 38.95, 23.68, 23.78	PGG
4	28.28, 27.38, 21.30, 29.67, 26.57, 26.66, 30.83, 29.89, 26.57, 26.66, 30.83, 29.89	P31M

Tabla 11: Resultados máximo y mínimo obtenidos de los mapas de simetría para cada característica según nuestra propuesta de cálculo con particiones dispersas.

Como resultado general, en el global de las imágenes disponibles en la experimentación, la aproximación clásica evidencia que alguno de los valores calculados es confuso: se dan valores que en una imagen debe ser considerados como ausencia de simetría, mientras que en otros valores más bajos señalan presencia de simetría. En la nueva propuesta esta frontera de decisión está alrededor del valor del 56%, lo que asemeja bastante a un valor esperable de incertidumbre entre presencia y ausencia de simetría alrededor del valor del 50%.

La fig. 84 muestra de forma gráfica los VCS de la imagen 3, obtenidos tanto con la implementación clásica como los que se obtienen con la implementación propuesta. Esto es, los vectores de valores máximos y mínimos de los mapas de simetría para el cálculo realizado a partir de la implementación clásica (*maxC* y *minC*) de similitud entre paralelogramos que utiliza MDA (medias de diferencias en valor absoluto). También se muestran los vectores obtenido con la técnica propuesta de particiones dispersas (denotados por *maxP* y *minP* en las gráficas). Ambos pares de vectores se acompañan de la representación gráfica de la simetría traslacional para poder ilustrar el efecto de la complejidad del análisis inherente de cada imagen.

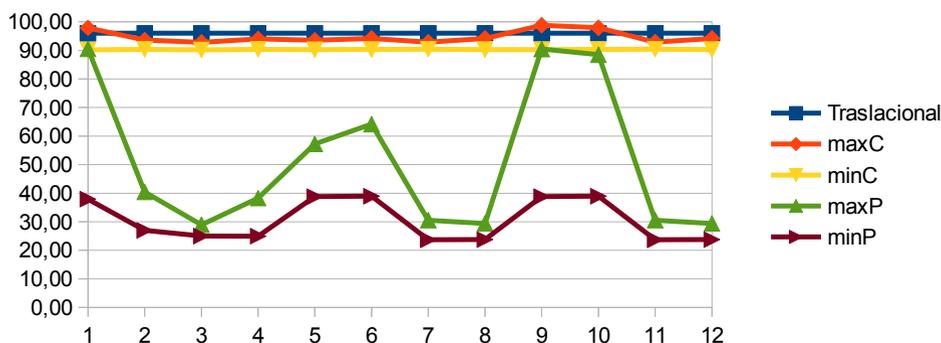


Figura 84: Ejemplo de VCS para una imagen del grupo PGG donde deben aparecer presentes las características 1, 9 y 10.

En las dos aproximaciones se observará que los valores de mínimos están bastante por encima del 0, lo que es una indicación de la dificultad de observar la no regularidad del contenido de las imágenes y con ello de cuantificar las simetrías. Debido a que las características se calculan como diferencias de niveles de gris entre trozos de imágenes, los valores obtenidos dependen fuertemente de las disposiciones particulares de los píxeles en cada imagen, esto es lo que denominamos complejidad de una imagen. Esta se traduce en que es posible observar que las características se comportan bien en la mayoría de los casos y que los rangos entre “presencia” y “ausencia” de simetría son, en general, destacables; por lo que los vectores son bastante informativos.

Estos resultados muestran que las características propuestas se comportan bastante bien especialmente en colecciones compuestas por imágenes de contenido muy geométrico, con poco ruido y de complejidad media. Esto es, con una variación de colores relativamente reducida, entre dieciséis y ciento veintiocho colores. Puesto que los valores de las características dependen en gran medida de dispersión de los píxeles, en imágenes con fuertes distorsiones y altos niveles de ruido, los vectores VCS perderán capacidad de discriminar las situaciones existentes. De forma general, se puede concluir que los errores provienen de tres fuentes:

1. **Ruido y distorsión.** Ruido global generado durante la adquisición o como resultado de unas malas condiciones de iluminación; así como local debido a agujeros o roturas debidas a la edad de las telas y a los artefactos propios de la fabricación manual. Algunas de las imágenes son fotografías de diseños hechos a mano, en cuyo caso puede haber una bastante baja similitud entre los motivos que se repiten.
2. **Deformaciones.** Algunas imágenes han visto alteradas su relación de aspecto, probablemente ocurridas durante el proceso de adquisición. En estos casos la simetría traslacional se mantiene alta, pero otras simetrías decrecen o desaparecen, por lo que el GSP

original cambia.

3. **Elección del PF representante a comparar.** En muchos casos, la presencia (ausencia) de ciertas simetrías se debe a (o se ve afectada por) pequeños detalles de la imagen. Tan poco que la diferencia entre la imagen original y la transformada debida, por ejemplo, a una reflexión especular es solo de unos pocos píxeles. En estos casos, los valores obtenidos están muy cerca de los valores de ruido observados en la imagen, por lo que son difícilmente diferenciados de los valores que representan simetrías existentes. Elegir uno de los PF que aparecen en la imagen o una combinación de ellos (el medio, el mediano, etc.) puede derivar en la confusión del resultado o una baja capacidad de discriminación

De los resultados obtenidos aplicando este estudio a todas las imágenes disponibles en la colección creada, se han elaborado las conclusiones siguientes:

- Estas cuatro imágenes son ejemplos de imágenes que dan problemas de identificación del grupo de simetría al que pertenecen en realidad utilizando el vector clásico por que los valores numéricos son elevados por la influencia del ruido antes enunciado presente en ellas.
- Es complicado fijar un umbral absoluto para todas las imágenes que permita responder a la pregunta de si está presente o ausente una característica mirando solo a los valores máximos del mapa de simetría.
- El valor de simetría traslacional que, a priori, es la simetría más presente en la imagen es superada en ocasiones por la implementación clásica.
- Los vectores obtenidos con la implementación propuesta para obtener el vector de características es más indicativo si lo comparamos con las características que cabe observar presentes en el grupo al que pertenecen las imágenes.
- El margen entre los valores máximos y mínimos se hace más evidente en las implementación propuesta.

Como consecuencia final, los VCS requieren ser adaptados a las condiciones de cada imagen, esto es, tener en cuenta los contenidos de cada imagen de forma separada. El rango dinámico de de los VCS varía de imagen a imagen, por lo que los vectores se pueden utilizar para caracterizar la estructura de simetrías presentes en una imagen, pero no para comparar entre dos imágenes; puesto que los valores de sus VCS tienen diferentes rangos.

La normalización de los valores es necesaria (Agustí et ál., 2011a) para poder tomar la decisión de si está presente o no cada simetría, de forma generalizable para cada imagen. Puesto que buscamos una formulación aplicable a cualquier imagen independientemente de su contenido y que sea robusta a la presencia de ruido en la imagen propondremos utilizar el valor de simetría traslacional para normalizar. Este tema se abordará en el próximo capítulo de clasificación de grupos de simetría.

5.4 Discusión

Este capítulo ha presentado una propuesta para un nuevo marco de detección y cuantificación de simetrías en imágenes de patrones bidimensionales de naturaleza repetitiva para su utilización en clasificación de imágenes en grupos de simetría. El vector de características está compuesto por doce valores y se obtiene a partir de imágenes de grises o, en el caso de imágenes de color, una versión de la componente de luminosidad de las mismas. La aproximación clásica es mejorada al ser reescrita con el uso de sumas de diferencias en valor absoluto. Los valores en ambos casos son

normalizados utilizando la información de la simetría traslacional, que es la única que se puede esperar observar con seguridad en este tipo de imágenes de contenido regular. Ambos procedimientos son comparados y se ha destacado cómo las limitaciones del método clásico son superadas.

Aún en condiciones ideales, imágenes sintéticas, rara vez la simetría se observa en sus valores extremos. La ausencia de simetría rara vez se observa, por lo que difícilmente se obtendrá un valor de cero absoluto. Así como tampoco la presencia de simetría es calculada con un valor de uno. El rango dinámico de los valores de simetría (f_i) es extremadamente variable, dependiendo de las condiciones específicas de cada imagen.

Esta idea nos lleva a proponer el uso de un estadístico, VaMeN, que representa la parte residual de la varianza. Este valor representa como se ajusta el contenido de la imagen al de la geometría del enrejado. Además, es el único método que hemos podido constatar en la bibliografía que utiliza el mismo método para todas las simetrías que se observan en este tipo de imágenes; utilizando para ello diferentes particiones de la imagen que se ha constatado que representan las diferentes situaciones de simetría.

En este capítulo se ha propuesto la redefinición del proceso de cálculo de simetrías: este enfoque que proponemos es una metodología unificada para calcular simetrías en imágenes de mosaicos regulares basada en encontrar la partición de mínima varianza que mejor describe su naturaleza repetitiva. Calcularemos una medida estadística para esas particiones como una valoración de su capacidad descriptiva. La idea principal es que la misma medida pueda ser usada para medir simetrías de forma **unificada**, esto es aplicable a rotación, reflexión y reflexión con desplazamiento. Las definiciones existentes de particiones solo tienen en cuenta la naturaleza traslacional de la imagen. Para considerar otras posibles simetrías interiores al PF, proponemos una metodología de particionado que incorpora una función de transformación, T , que se define para cada simetría.

En el cap. 7 de “*Experimentos*” mostrará los resultados obtenidos al aplicar esta metodología, se constatará como se ajusta la definición de las diferentes simetrías observables a una imagen de contenido periódico. También se ilustrarán los defectos que pueden influir en el valor final calculado.

Con estas consideraciones el esquema esbozado al principio de la tesis para este segundo bloque, véase la fig. 85, queda totalmente definido. En resumen, consta de:

- En primer lugar, se han expuesto las características utilizadas en la literatura y se ha realizado un proceso analítico para reducir su número aún más. Este proceso no puede llevarse a cabo de una manera estadística a falta de un corpus de datos lo suficientemente grande como para respaldar los resultados que se obtienen en un clásico proceso de análisis y selección de características.
- Seguidamente, el método de cálculo utilizado en la literatura es revisado y sus condicionantes identificados: la presencia de ruido y deformaciones sufridas en el proceso de captura de la imagen, más la propia variabilidad de un proceso de fabricación muchas veces realizado a mano. Se introducen nuevas propuestas relativas a la influencia de las operaciones geométricas en un espacio discreto como es una imagen digital y que se han de normalizar los rangos de valores para evitar la necesidad de fijar umbrales experimentalmente. De esta forma tendremos un vector de características continuo con el que describir los grupos de simetría.
- Finalmente, se valora el resultado a partir de la constatación de la expresividad semántica de

las características obtenidas en base a cada uno de los dos métodos de cálculo propuestos. En el resto de capítulos abordaremos cómo se utiliza esta información para clasificar el grupo de simetría al que pertenece una imagen de contenido repetitivo. Si bien el objetivo final de este capítulo es obtener el vector de características de simetría compuesto por valores normalizados de simetría, la evaluación de estas está muy ligada con el empleo de estos vectores para la clasificación de las imágenes en grupos de simetría que se verá en el próximo capítulo. Por este motivo, los resultados experimentales se evalúan mediante la clasificación de imágenes.

Aquí se ha constatado la semántica de los métodos de cálculo de características para mostrar que se ha mejorado la expresividad del as mismas con las propuestas introducidas.

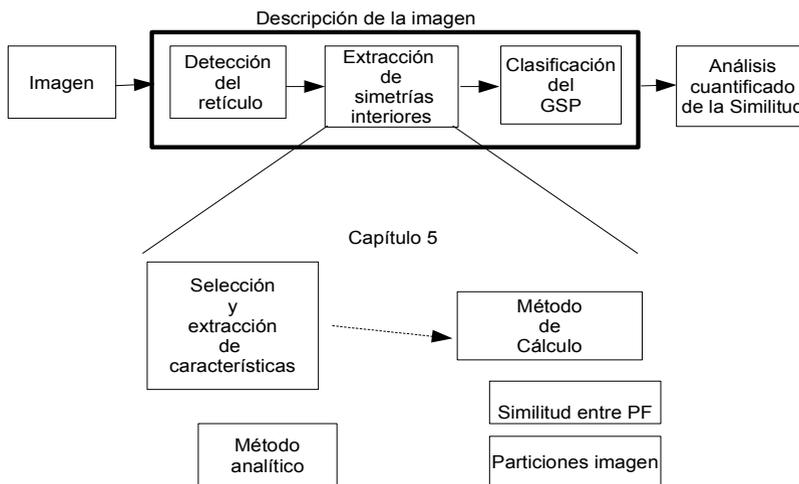


Figura 85: Diagrama de bloques del primer módulo de descripción de la imagen: detección del retículo.

Veremos en el próximo capítulo que escoger el grupo de simetría a que pertenece una imagen es asumir que existe una métrica apropiada de distancias para decidir cuándo un cambio en posición de un punto en ese espacio de características debe ser considerado o no. En las soluciones aparecidas en la literatura las distancias se han hecho totalmente discretas al asumir que existe un valor de umbral único para todas ellas.

Sin embargo, como se puede ver en (Zabrodsky et ál., 1995), la existencia de una ordenación o jerarquía de las simetrías hace que sea difícil establecer una clara separación entre las clases: se asume en la teoría de reconocimiento de formas que las clases son disjuntas de no ser así se puede dar que una clase A incluida en B , no sea seleccionada por que la distancia a A nunca es menor que la distancia a B . Esto también se constata desde el punto de vista de la teoría de la información: (Kononenko y Bratko, 1991) dice que deben ser tenidas en cuenta las probabilidades a priori de las variables estadísticas. En este sentido se ha de utilizar un criterio de decisión que tenga en cuenta las probabilidades de las clases, para no tender a clasificar en la clase más probable que en la otra. Los algoritmos de clasificación que pueden trabajar con estos vectores adaptándose a las características de cada imagen son el objetivo del próximo capítulo.

Capítulo 6.

Clasificación de imágenes por grupos de simetría

En este capítulo se aborda la elección del clasificador que utilizará el conjunto de características determinado en el capítulo anterior con el objetivo de determinar el grupo de simetría al que pertenece una imagen. Dentro del esquema global, fig. 86, estamos en el bloque de “Clasificación del GSP”.

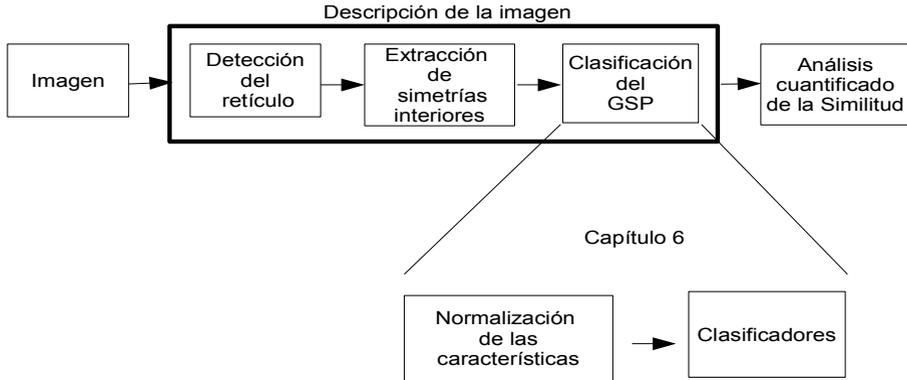


Figura 86: Diagrama de bloques de la arquitectura del sistema de análisis propuesto.

Nuestro objetivo, en este capítulo, es el de determinar en cuál de los diecisiete grupos (fig. 22) de simetría se encuadra una imagen, a partir de las características obtenidas anteriormente: las simetrías interiores (véase cap. 5 *Simetría computacional aplicada a las simetrías interiores del patrón repetitivo*). Se trata de estudiar un conjunto de características, extraídas de forma automática, que nos permita salvar las deficiencias de los métodos existentes: hasta el momento todos basados fuertemente en heurísticos. Para ello, proponemos:

1. Interrelacionar la expresividad de las características con la complejidad del clasificador. Lo que dará pie a exponer estrategias de clasificación.
2. Reescribir el proceso de clasificación, de una manera formal, como el de distancias a prototipos que modelizan el comportamiento de un número, conocido y finito, de clases.
3. Cuantificar, mediante resultados experimentales las mejoras de las aportaciones propuestas respecto a los métodos existentes. Evaluaremos las estrategias para dar la holgura correspondiente en cada característica en función de las propiedades de cada imagen y la importancia de la naturaleza descriptiva de los valores de ausencia/presencia de cada característica.

6.1 Expresividad de las características y complejidad del clasificador

Dado que en el cap. 5 de “*Simetría computacional aplicada a las simetrías interiores del patrón repetitivo*” hemos establecido dos metodologías para el cómputo de las características, es momento de estudiar cómo se comportan para describir las simetrías interiores al PF presentes en una imagen

dada. Proponemos establecer:

1. El conjunto de características más idóneo para la clasificación: su expresividad.
2. La normalización en el contexto particular que representa cada imagen.
3. La necesidad de un clasificador complejo, en tanto en que su decisión ha de ser más o menos elaborada con los datos de partida que recibe.

El uso de características expresivas y fiables permiten el uso de clasificadores simples, pero las ambigüedades que se observan en los métodos de cálculo de la simetría computacional clásica llevan a proponer un clasificador adaptativo que ofrezca más robustez. La justificación de las elecciones realizadas en cada caso se exponen de forma detallada en el apdo. 6.3 “Evaluación de los resultados”.

La **capacidad discriminatoria** de los dos conjuntos de vectores de características ha de ser estudiada. Para ello hay que evaluar:

1. La influencia del ruido en su cálculo, desde el punto de vista matemático. Cómo el valor de presencia/ausencia de una característica se acerca a su valor ideal de “totalmente presente”/“totalmente ausente”.
2. El rango dinámico entre los valores de presencia/ausencia, puesto que permiten establecer numéricamente la confianza de la decisión.

Veremos en el apdo. 6.3.1 “Capacidad descriptiva de las características”, que la metodología propuesta permite establecer un mayor rango de cuantificación de las características y, por tanto, es más informativo.

Es necesario determinar la sensibilidad de las características a las condiciones de las imágenes reales, cómo influyen las condiciones particulares de cada imagen y, por tanto, como **adaptar o normalizar** los valores obtenidos de estas. Para ello, proponemos estudiar las diferentes normalizaciones de los valores numéricos atendiendo a :

1. Si se puede determinar un valor de simetría máximo esperable teóricamente.
2. Determinar las fuentes de ruido en el cálculo de la presencia/ausencia de simetrías para expandir el rango que se obtenga en cada imagen.
3. Determinar la instanciación del máximo valor de simetría que se observa en cada imagen particular para interpretar los cálculos de manera específica a las condiciones de regularidad de cada imagen.

Propondremos en el apdo. 6.3.2 “Propuesta de normalización para mejorar la capacidad discriminativa de las características”, una definición de esa regularidad de las imágenes a partir del mapa de simetrías que se obtiene previamente. Definiremos con este concepto una función de normalización que ponga en contexto las características y estudiaremos el comportamiento de cada uno de los dos conjuntos de características para observar experimentalmente cómo se comporta mejor nuestra propuesta.

6.1.1 Complejidad del clasificador: estudio de la partición del espacio de los GSP

Los métodos de clasificación de la bibliografía se apoyan en diferentes secuencias de comprobaciones de la existencia de las tres transformaciones de simetrías que definen cada grupo de simetría: rotación, reflexión y reflexión con desplazamiento. Las desventajas de los **métodos**

clásicos revisados en el cap. “3. Estado del arte” (Rose y Stafford, Wikipedia, Brian Sanderson o Liu) es que no pueden obtener una medida de la bondad de su resultado y que son heurísticos, lo que hace bajar sus tasas de clasificación cuando las imágenes tienen imperfecciones propias de un proceso de fabricación industrial o de ser el resultado de un proceso manual de fabricación.

Implementaremos y evaluaremos el comportamiento del último representante de estos métodos clásicos, (Liu et ál., 2004a) en apdo. 6.2 “Clasificadores desarrollados“, que ha estudiado su implementación algorítmica y ha dado pie al término de simetría computacional. Puesto que nuestros propios experimentos demuestran que ha superado con creces los resultados de los anteriores lo tomaremos como referencia para **estudiar las tasas de reconocimiento del conjunto de características** clásico frente al que hemos propuesto.

Analizaremos un abanico de **métodos sistemáticos** (habitualmente usados en estas temáticas dentro de la VxC) para confirmar la necesidad de desarrollar el clasificador adaptativo que proponemos. Evaluaremos el uso de árboles de decisión, Bayes, vecindad entre clases y redes neuronales en el apdo. 6.3 “Evaluación de los resultados“.

Puesto que los grupos de simetría están, por definición, bastante juntos, la incorrecta determinación de una característica (ausente o presente) permite “transitar” de un grupo a otro, pudiendo así alterar el resultado de la clasificación. El uso de la teoría de grupos de simetría permite abordar este problema de una manera sistemática. Los métodos clásicos han constatado la existencia de una relación de precedencia entre los grupos de simetría en tanto que se da una ordenación o jerarquía basada en la posibilidad de transitar entre los mismos al aplicar un cierto número de isometrías.

Se puede asemejar a una reescritura basada en el orden lexicográfico. En este caso las operaciones básicas de inserción, edición y borrado son sustituidas por la simetría de rotación, de reflexión y de reflexión con desplazamiento. Este planteamiento tiene inconvenientes, en tanto que:

- i. Algunas clases se subdividen en un número mayor o menor de grupos.
- ii. Algunas precisan confirmar que se dan varias simetrías interiores, lo cual siempre es más “difícil” porque la existencia de una simetría al 100% de confiabilidad es poco habitual en imágenes del mundo real.
- iii. Las respuestas son binarias y no se guardan si no son visitadas. Esto quiere decir que si, p. ej., aparece una simetría de rotación de orden 4, no se comprobará si existe de orden 2; lo cual no es cierto.

Analizando la definición matemática de los grupos de simetría, desde el punto de vista de la clasificación, es posible reducir analíticamente el número de características a examinar a tres y **reescribir esta jerarquía** como una relación de precedencia. Véase la fig. 87 que muestra el particionado obtenido al ir explorando las características. Entre paréntesis se han dejado las características menos discriminativas que era necesario estudiar según los métodos clásicos.

Con ello se puede concluir que:

1. Se ha determinado, de forma sistemática, las características mínimas necesarias, su importancia en el proceso de clasificación y los rangos de valores de estas a considerar como presente, ausente y ambigua, véase cap. 5 “Simetría computacional aplicada a las simetrías interiores del patrón repetitivo”.
2. Las limitaciones del conjunto de imágenes imposibilita un estudio de selección de características automático fiable. En este sentido y, dada la naturaleza del problema, se propone una clasificación basada en prototipos.

3. Se puede determinar la existencia de una ordenación o jerarquía entre los grupos de simetría basada en la posibilidad de transitar entre los mismos al aplicar un cierto número de isometrías.
4. Se puede dar una valoración cuantitativa que apoye la hipótesis de que está presente o ausente una característica. Al final del proceso de clasificación, la imagen quizá esté a caballo de más de un grupo, pero siempre tendremos un valor de confianza del resultado de la clasificación.

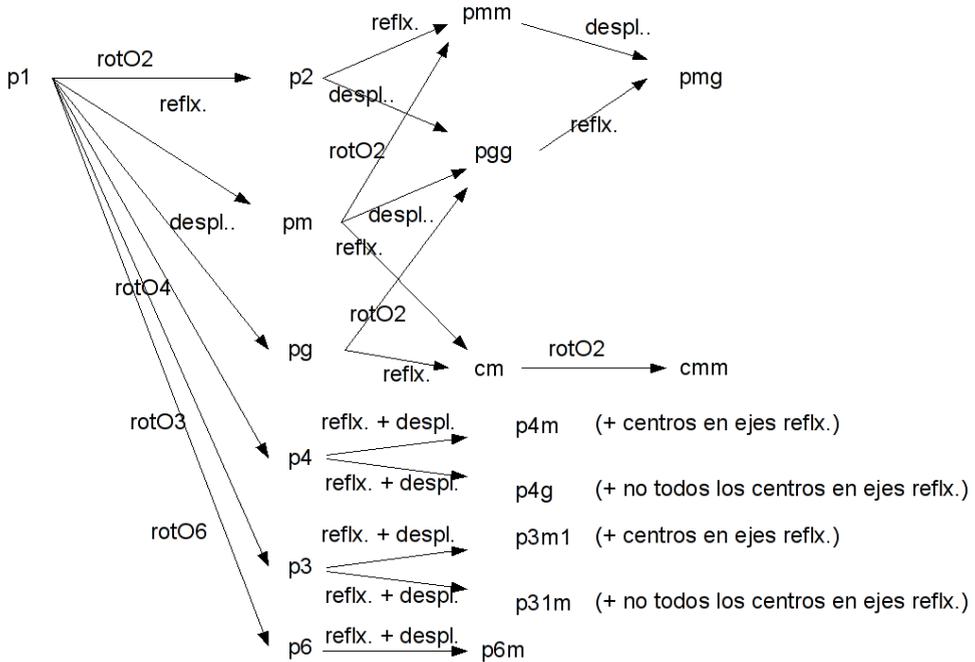


Figura 87: Jerarquía de los grupos de simetría en el plano.

6.2 Clasificadores desarrollados

Para clasificar es necesario identificar unas características que describan las posibles situaciones, que hemos estudiado en el capítulo anterior, más un método de cálculo robusto (y eficiente a ser posible) de las mismas. Sobre esta parte nos centramos en este apartado para concretar nuestras propuestas.

El objetivo es reconocer diecisiete clases ($C_1..C_{17}$) a partir de su descripción mediante un vector de doce características ($f_1..f_{12}$) continuas e inicialmente expresadas en el rango $0 \leq f_i \leq 1$ donde $f_i=0$ es total ausencia y $f_i=1$ es total presencia de la característica de simetría f_i . El problema presenta algunas singularidades:

- Elevado grado de confusión entre clases, como se ha visto en el apartado anterior.

- Existencia de una clase (P1) que solapa con todas las demás al presentar la ausencia de todas las características.
- Gran variabilidad en las muestras: imágenes ruidosas, manufacturadas, ambiguas, etc. Por el contrario, no se dispone de amplios conjuntos de datos lo que hace difícil el aprendizaje automático de modelos de las clases.
- El etiquetado pasa a segundo plano al no poder realizar un proceso de aprendizaje, pero es necesario conocer el grupo de simetría real al que pertenece cada muestra para poder dar resultados del proceso. El etiquetado es complicado y difícil por lo ambiguo de algunos casos incluso para los expertos humanos que han hecho reconsiderar algunos resultados al detectarse estas variabilidades.

Veremos en los siguientes apartados cómo clasificar, esto es, **cómo diferentes algoritmos escogen una clase a partir de esta situación**. A continuación veremos tres propuestas: la primera es un árbol de decisión que utilice características binarias de simetría sin necesidad de fijar valores umbrales de forma heurística. La segunda es un típico clasificador por vecino más próximo (*Nearest Neighbourh*, NN), que remodelaremos en la tercera propuesta para obtener un método adaptativo.

6.2.1 Clasificador basado en reglas

El trabajo de (Liu et ál., 2004a) es el primer modelo computacional, que se muestra esquematizado en la fig. 88, para clasificación automatizada de grupos de simetría de friso y del plano. Denominaremos a este árbol de decisión como clasificador basado en reglas, en adelante **CBR** (siglas de Clasificador Basado en Reglas¹²). El método empleado utiliza umbrales con valores tentativos, obtenidos experimentalmente y cuya validez no puede ser generalizada. De hecho, el autor sugiere usar una etapa diferente cuando la imagen de entrada es muy ruidosa donde la autocorrelación puede falsear los resultados.

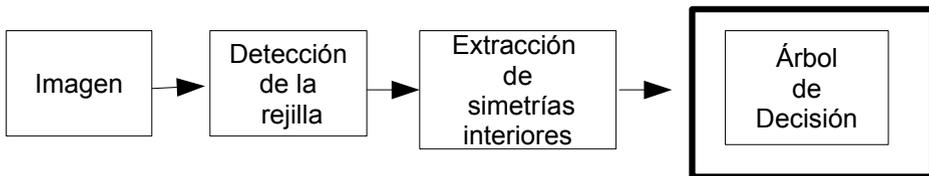


Figura 88: Módulos del esquema clásico de análisis de imágenes de contenido regular.

Dadas las críticas a este modelo computacional, que ya se han expuesto en el capítulo de estado del arte, haremos nuestra propia propuesta que hemos llamado clasificador basado en reglas. Nuestra implementación se apoyará en dos elementos:

- Determinar una valoración de la existencia de cada simetría con la que elaborar un mapa, para escoger de él su valor máximo.
- Transformar la imagen aplicándole la simetría que se quiere medir. De esta forma se pueden obtener los valores de ese mapa a partir del cómputo del error medio entre el PF que define la rejilla y el que se obtiene al extraer un nuevo PF sobre la imagen transformada.

Utilizar un árbol de decisión tiene algunos problemas. Cuando se utilizan imágenes reales, la necesidad de escoger un valor fijo de umbral es la gran desventaja de este método. En menor

12 En inglés, *Rule Based Classifier (RBC)*.

medida, también lo es que el árbol proporciona un único resultado de la clasificación, sin una valoración de la confianza del reconocimiento debido a la baja expresividad del algoritmo. En la mayoría de aplicaciones en que se desea incorporar un análisis de las simetrías en la imagen es esencial añadir este grado de certeza al resultado obtenido. Esto es especialmente útil cuando la ambigüedad existe y para distinguir una clasificación equivocada del grupo *P1*. Cada una de las etapas del modelo computacional de la imagen están afectadas por el ruido en mayor o menor medida, pero también lo está el uso de un determinado espacio de representación de color y las irregularidades propias del contenido visual que modela la imagen.

Se hace necesario, como también afirma (Reddy, 2005), mejorar las soluciones existentes para imágenes reales. Nuestra propuesta introduce la normalización de los valores de las características en el esquema clásico, como se muestra en la fig. 89, para mejorar la robustez del algoritmo, añadiendo al mismo algoritmo capacidad para corregir los efectos del ruido.

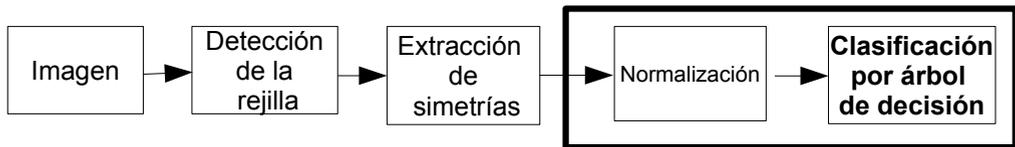


Figura 89: Ampliaciones al esquema clásico de análisis de imágenes de contenido regular.

Desarrollaremos tres alternativas de normalización en el apartado “6.3.2 Propuesta de normalización para mejorar la capacidad discriminativa de las características“, dos clásicas y una nueva propuesta. Valoraremos su efecto en el resultado y lo utilizaremos para todos los clasificadores por la robustez que ofrece en la toma de decisión sobre la presencia o no de una simetría tomando en cuenta las características de cada imagen.

6.2.2 Clasificador de vecino más próximo

Las consideraciones previas hacen necesario el uso de un método que no precise de umbrales fijos, esto es, que pueda ser aplicado en el dominio continuo de las características. Es también interesante, obtener resultados de las decisiones tomadas para mostrar, de forma ordenada, una medida de confianza de la clasificación en los restantes grupos de simetría. Muchas técnicas pueden ser empleadas para este propósito, entre ellas la de distancia al vecino más próximo es una de las más usadas y es la que hemos escogido para implementar aquí.

El esquema del clasificador por vecino más próximo **KNN** (también denominado **NNC**, de *Nearest Neighbour Classifier*), está basado en dos elementos. El primero consiste en aplicar el proceso de corrección de errores propuesto en el apartado “6.3.1 Capacidad descriptiva de las características“. En segundo lugar, cambiar el método de clasificación por uno que obtenga una respuesta más amplia con respecto a cuantificar lo que un grupo de simetría describe los contenidos de una imagen. Esto nos lleva a proponer la secuencia que se muestra en la fig. 90 y que detallamos en este apartado.

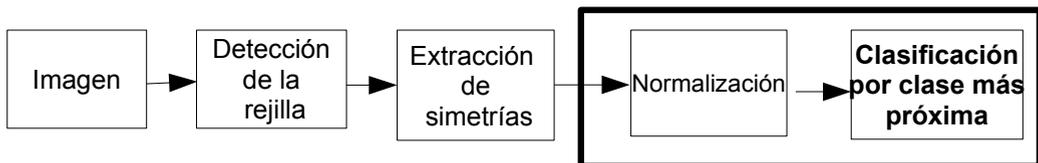


Figura 90: Módulos del esquema de análisis de imágenes de contenido regular.

Una desventaja típica de este tipo de métodos es que necesita de una etapa previa supervisada de aprendizaje de los modelos de las clases. Para ello es necesario disponer de un número suficientemente alto de muestras y de memoria disponible. Se puede evitar si somos capaces de derivar las clases a partir de una revisión del problema que permita obtener una formulación cerrada y formal del número de prototipos. Para ello reconsideramos qué significa que una imagen I pertenece al grupo de simetría j . Cada grupo puede ser considerado como una clase C_j definida por un VCS. El número de VCS necesarios para describir una clase puede ser mayor de uno, puesto que diferentes geometrías de rejilla pueden coexistir en una misma clase. Considerando que n_j VCS definen la clase j , tenemos la ec. 73.

$$\begin{aligned}
 & 1 \leq j \leq 17, \quad n_j = \text{card}(P^j), \quad 1 \leq k, l, m \leq n_j, \\
 & P^j = \cup \{B_k^j\} \quad \wedge \quad B_l^j \cap B_m^j \neq \emptyset; \quad \forall l, m, \quad l \neq m, \quad B_l^j, B_m^j \in C_j \\
 & \text{with } B_k^j = (b_{k_1}^j, b_{k_2}^j, \dots, b_{k_{12}}^j) \quad b_{k_i}^j \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq 12 \quad 1 \leq k \leq n_j
 \end{aligned} \tag{73}$$

Idealmente, para una imagen I se obtiene un vector binario de simetrías y pertenece al grupo de simetría j , si su VCS coincide con el conjunto de prototipos que definen la clase j : $VCS \subset P^j$. Con lo que el proceso de clasificación de una imagen regular I puede ser definido como $I \in C_j \Leftrightarrow VCS \subset P^j$. El proceso de clasificación, en condiciones reales, consistirá en encontrar el prototipo que esté más cerca del vector obtenido para la imagen definido con valores continuos, véase ec. 74.

$$I \in C_j \Leftrightarrow \exists p \in P^j: d(SFV, p) < d(SFV, p') \quad \forall p' \in P^i, \quad 1 \leq i \leq 17, \quad i \neq j \tag{74}$$

Esto nos ha lleva a utilizar un clasificador por distancia mínima de medias a los prototipos de las clases. Aunque en la literatura no existe una colección de imágenes consensuada que defina todas las situaciones, la teoría define la existencia de prototipos que explican las clases, más las variaciones de estas. Estos prototipos son representantes abstractos de los modelos y, con ellos, se puede obtener una medida de proximidad para cada clase. Esta medición no necesita umbrales y, además, proporciona un valor de confianza en la determinación resultante de la clase.

Con esta elección y puesto cada representante como una determinada combinación de todas las características enunciadas, la labor de clasificación se puede expresar en forma de calculo de la distancia entre cada imagen y el conjunto de representantes. La menor distancia será la cuantificación de la pertenencia de una imagen a un grupo de simetría. Esto refuerza el uso de prototipos para representar las estructuras de simetrías de cada clase, de manera que cada muestra se compare con un prototipo abstracto y no con otras imágenes.

Para clasificar una imagen regular, caracterizada por su VCS, necesitaríamos un conjunto de muestras de cada clase para definir el alcance de esta. Afortunadamente, el número de muestras y sus estructuras son conocidos de antemano. Podemos definir un uso de prototipos binario que representan cada uno de los diecisiete grupos de simetría en el plano. La tabla 12 muestra los veintitrés prototipos resultantes. Algunas clases tienen dos prototipos, por ejemplo en las que hay dos posibles ubicaciones para la aparición de la simetría de reflexión.

Después de aplicar el clasificador KNN a diferentes colecciones, no se observa una mejora significativa en comparación con el CBR (véase el cap. 7 de “Experimentos”). Esto se debe a las

desviaciones de los valores mínimos de las características que no son cercanos a '0', así como tampoco los máximos son cercanos al valor de simetría traslacional (S_T) determinado al obtener la rejilla.

Esta situación demuestra que el uso de prototipos binarios, con fronteras entre clases equidistantes a cada clase, no representa adecuadamente el problema. Sin embargo se han obtenido algunas ventajas. Primeramente, la distancia euclídea a los prototipos de las clases puede ser usada como medida de confianza. Segundo, el KNN produce una lista ordenada de resultados, describiendo la afinidad de cada muestra con todas las clases. Esta última consideración puede permitir un ajuste automático de los prototipos en orden a adaptarlos a la variabilidad de cada imagen.

Clase	Vectores de características prototipo	Clase	Vectores de características prototipo
P1	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)	CMM	(1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1)
P2	(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)	P4	(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
PM_1	(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)	P4M	(1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,1,0)
PM_2	(0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)	P4G	(1,0,1,0,0,0,1,1,1,1,1,0)
PG_1	(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0)	P3	(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
PG_2	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)	P31M_1	(0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,0)
CM_1	(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0)	P31M_2	(0,1,0,0,1,1,0,1,1,1,0,1)
CM_2	(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1)	P3M1_1	(0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0)
PMM	(1,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0)	P3M1_2	(0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0)
PMG_1	(1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0)	P6	(1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)
PMG_2	(1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0)	P6M	(1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0)
PGG	(1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0)		

Tabla 12: Prototipos binarios para las diecisiete clases de los GSP.

6.2.3 Metaclases para un KNN adaptativo

Trabajos recientes de clasificadores NN han mostrado que los esquemas adaptativos (Wang, 2007) mejoran los resultados, comparados con el KNN. La etapa de normalización ha mejorado los resultados, pero no parece capaz de discriminar las situaciones de ambigüedad que se dan entre clases muy parecidas: existen algunas cuyas regiones del espacio de características se solapan parcial o totalmente, como por ejemplo P4, P4M y P4G. Por ello hemos optado por proponer una variante que agrupe en conjuntos de clases (metaclases) las más diferenciadas y, en una segunda etapa, que disponga del mayor rango dinámico posible para distinguir entre las que solapan.

Para resolver esta situación proponemos una aproximación adaptativa al KNN que, en adelante llamaremos **ANN**C (en inglés *Adaptive Nearest Neighbour Classifier*) o simplemente **ANN**, basada en establecer una función de mérito que adapte los valores máximo (H) y mínimo (L) que representan la presencia y ausencia, respectivamente, con respecto a un valor medio U que representa la incerteza (*Uncertainty Value of Symmetry*) en el rango dinámico de definición de las características de simetría.

En lugar de adaptar el VCS al rango $[L .. H]$, el problema es reformulado como la comparación

entre el vector original VCS y los veintitrés prototipos binarios. En los vectores que definen estos prototipos, que se muestran en la tabla 13, se ha procedido a reemplazar los valores 0/1 por L/H.

La justificación de esta transformación la ilustra la fig. 91, donde se muestra un ejemplo simplificado de un espacio de características bidimensional que incluye cuatro prototipos binarios. Típicamente, las fronteras entre las clases son simétricas con respecto a cada prototipo, esto es, las clases se reparten el espacio de características equitativamente.

En un contexto real, el vector de características $f(f_1, f_2)$ nunca alcanza ciertas áreas muy cercanas a los prototipos. La fig. 91b muestra estas **áreas prohibidas**. La influencia de estas sobre las áreas que definen el alcance de una clase, es que deforman las distancias que se obtienen de los VCS de las muestras a clasificar y por lo tanto es necesario una redefinición de las fronteras: una adaptación de las fronteras entre clases..

Clases KNN	Prototipos para los vectores de características	Metaclases ANN
P1	(L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L)	mP1
P2	(H, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L)	mP2
PM ₁	(L, L, L, L, H, L, L, L, L, L, L)	mPM ₁
PM ₂	(L, L, L, L, L, H, L, L, L, L, L)	mPM ₂
PG ₁	(L, L, L, L, L, L, L, L, H, L, L)	mPM ₂
PG ₂	(L, L, L, L, L, L, L, L, L, H, L)	mPM ₄
CM ₁	(L, L, L, L, L, L, H, L, L, L, H)	mCM _H
CM ₂	(L, L, L, L, L, L, L, H, L, L, L)	mCM ₂
PMM	(H, L, L, L, H, H, L, L, L, L, L)	mPMM ₁
PMG ₁	(H, L, L, L, H, L, L, L, H, L, L)	mPMM ₂
PMG ₂	(H, L, L, L, L, H, L, L, H, L, L)	mPMM ₃
PGG	(H, L, L, L, L, L, L, L, H, H, L)	mPMM ₄
CMM	(H, L, L, L, L, L, H, H, L, L, H)	mCMM
P4	(H, L, H, L, L, L, L, L, L, L, L)	mP4
P4M	(H, L, H, L, H, H, H, H, L, L, H)	mP4M ₁
P4G	(H, L, H, L, L, L, H, H, H, H, H)	mP4M ₂
P3	(L, H, L, L, L, L, L, L, L, L, L)	mP3
P31M ₁	(L, H, L, L, H, H, H, L, H, H, H)	mP31M ₁
P31M ₂	(L, H, L, L, H, H, L, H, H, H, L)	mP31M ₂
P3M1 ₁	(L, H, L, L, L, L, H, L, L, L, H)	mP3M1 ₁
P3M1 ₂	(L, H, L, L, L, L, L, H, L, L, L)	mP3M1 ₂
P6	(H, H, L, H, L, L, L, L, L, L, L)	mP6
P6M	(H, H, L, H, H, H, H, H, H, H, L)	mP6M

Tabla 13: Prototipos para las diecisiete clases de GSP (KNN) y las trece metaclases (ANN).

Para conseguir esa adaptación de las fronteras entre clases, se puede realizar una transformación del espacio de características mediante la normalización de las mismas. En este nuevo espacio, la clase nula (P1) desaparece y, por tanto, deberá ser considerada a posteriori. Las nuevas fronteras entre clases pueden recalcularse de forma que se maximice una función de mérito. Utilizaremos fronteras ortogonales definidas por un solo parámetro: el valor de indeterminación de simetría que denotamos por U (del inglés *Uncertainty boundary of symmetry*). Este representa el valor que está a mitad

camino entre el que refleja la presencia y el que define la ausencia de una simetría, denotando por tanto un punto de transición respecto a la decisión a tomar.

Después de trabajar sobre diferentes funciones de mérito, proponemos utilizar el ratio de la distancia entre la primera y la segunda clases que un clasificador NN devuelva como resultado, utilizando los prototipos definidos con sus valores binarios de 0 y 1. El resultado obtenido será la frontera que más separa las dos clases que más definen la categorización de la muestra. La llamamos U_{opt} o **valor de umbral óptimo**. Esto supone que, en lugar de mover las fronteras entre clases, el problema es reformulado como la modificación de los prototipos en un nuevo rango de valores $(H, L) \in [0, 1]$ que son simétricos respecto al punto medio U (fig. 91c). Finalmente, la clase más cercana con los nuevos prototipos definidos en el rango $[L .. H]$ y la clase nula ($P1$) han de ser desambiguados (fig. 91d).

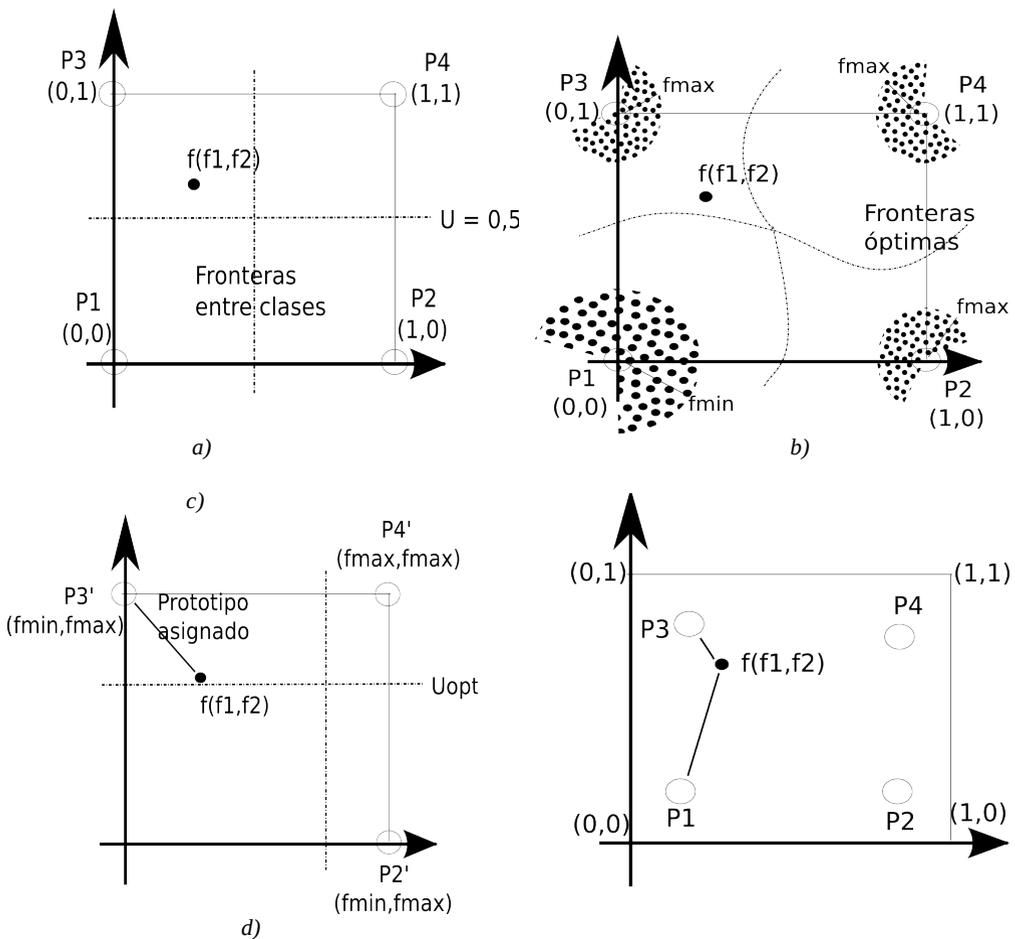


Figura 91: Algoritmo ANN: a) Espacio de características y prototipos; b) áreas prohibidas; c) adaptación de las fronteras entre clases y d) desambiguación final.

Aplicado a nuestro contexto, el algoritmo en forma de pseudocódigo está compuesto de seis pasos:

1. Se define un vector reducido de ocho características (VCS'), como muestra la ec. 75, en el que se han descartado las componentes de la reflexión con desplazamiento del VCS original. Como de las diecisiete clases originales, algunas solo se distinguen por sus componentes de reflexión con desplazamiento, estas clases son agrupadas en trece metaclases, véase tabla 13.

$$VCS^0=(f_1^0, f_2^0, \dots, f_{12}^0); \rightarrow VCS=(f'_1, f'_2, \dots, f'_{12});$$

$$\text{donde } f'_i = \frac{f_i^0 - \min(\text{Map})}{\max(VCS) - \min(VCS)}; \quad 1 \leq i \leq 12 \quad (75)$$

$$VCS'=(f'_1, f'_2, \dots, f'_8); f'_i \in \mathfrak{R} \quad / \quad 0 \leq f'_i \leq 1$$

donde

$$f'_i = f_i \quad / \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}, f'_5 = \max(f_5, f_9) \quad \wedge \quad f'_6 = \max(f_6, f_{10})$$

2. Los valores de simetría se normalizan entre el valor máximo y el mínimo del VCS', como indica la ec. 76. Implícitamente, esto significa asumir que cada imagen tiene claramente definidas una simetría presente y una ausente. Lo que descarta a la clase P1 y reduce el problema de clasificación a doce clases, las metaclases.

$$VCS''=(f''_1, f''_2, \dots, f''_8);$$

$$f''_i = \frac{f'_i - \min(VCS')}{\max(VCS') - \min(VCS')}; \quad 1 \leq i \leq 8 \quad (76)$$

3. Los prototipos originales se transforman en los que definen las doce metaclases, en el rango [L...H]. Estos valores se han de definir con respecto al parámetro U como en la ec. 77. Los nuevos valores de las componentes se saturan con respecto a L y H: ($f''_i < H \rightarrow f''_i = H$, $f''_i < L \rightarrow f''_i = L$).

$$U \in \mathfrak{R}, \quad 0 \leq U \leq 1$$

$$U \geq 0,5 \rightarrow H=1, \quad L=2U-1$$

$$U < 0,5 \rightarrow L=0, \quad H=2U \quad (77)$$

4. Para cada posible valor de U en el rango 0,2 a 0,8, se calculan los nuevos límites L y H. utilizando la ec. 77 y la clasificación usando NN a partir de VCS" y los prototipos resultantes.

La función de mérito es el ratio de la distancia entre la primera y la segunda clases en que se ha clasificado. Después de repetir los pasos 3-4 para todos los valores de U, se escogerá el U_{opt} que maximice la función de mérito y, así, la metaclase es tentativamente seleccionada.

5. Una clase GSP candidata es obtenida por desambiguación entre las tentativas utilizando las componentes de reflexión con desplazamiento. Así, se considerará que, si está presente una simetría su valor está por encima de U_{opt} .

- Finalmente tratamos de desambiguar la clase candidata de la previamente excluida P1. Para conseguir esto, reclasificamos otra vez el VCS' *pero solo con P1* y la clase candidata. La más cercada es devuelta como resultado de la clasificación.

6.3 Evaluación de los resultados

Trabajar con la totalidad de las características es, en principio, una posibilidad: bastaría obtener estas características porque con ellas se pueden definir las propiedades de los grupos de simetría y así tomar la decisión de a cuál pertenece una imagen. Pero, realizar un clasificador con ellas es un problema por la indecisión del modo de calcular la distancia a un representante central de cada clase. Una manera de resolver este problema es plantear una **reducción de la dimensionalidad** del problema de clasificación además, según las propuestas de los algoritmos clásicos, el número de características debería poder reducirse en torno a tres.

En espacios de alta dimensionalidad es difícil ver la existencia de agrupaciones o patrones basados en la distancia entre las muestras situadas en el espacio de coordenadas dado por el vector que las define. De entre el abanico de técnicas disponibles para la exploración de estos grandes conjuntos de datos (Keim, 2002) hemos seleccionado el método de escalado multidimensional de Sammon (Fayyad, et ál., 200H.) que ofrece una proyección no lineal.

Para hacerse una idea, la fig. 92 muestra la proyección de las setenta y dos características en tres y dos dimensiones, como implementan los algoritmos vistos en la revisión bibliográfica, para observar la dificultad del proceso de clasificación. En este caso se ha utilizado un método estadístico de proyección basado en la opción *Sammon plot* de *Tooldiag* (Rauber et ál., 1993).

La dificultad del proceso de clasificación es pues patente, por ello es **necesario un estudio de la capacidad descriptiva de las características obtenidas**. Ya hemos adelantado en el punto 6.1 “Expresividad de las características y complejidad del clasificador“ que, en general el uso de características expresivas y fiables permiten el uso de clasificadores simples, pero las ambigüedades que se observan en los métodos de cálculo de la simetría computacional clásica llevan a proponer clasificadores complejos.

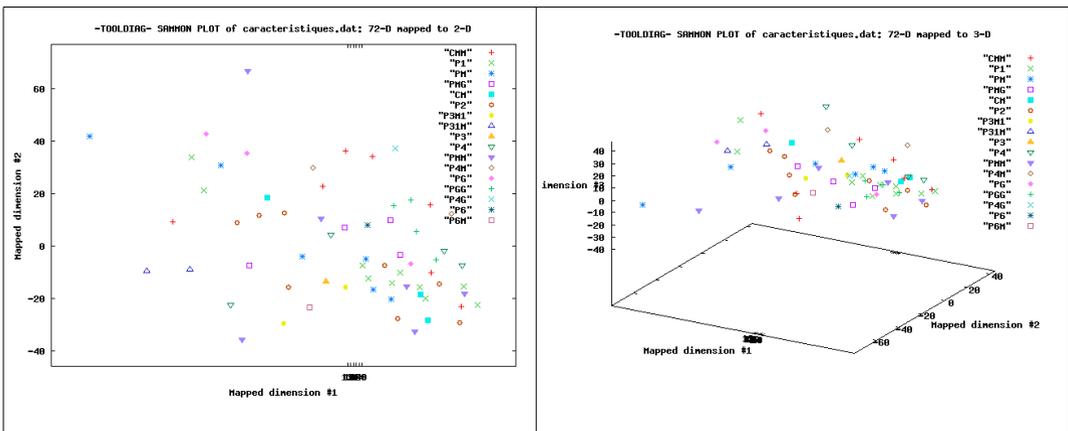


Figura 92: Proyecciones en 2D y 3D de la colección de imágenes disponibles.

6.3.1 Capacidad descriptiva de las características

El banco de imágenes de prueba es pequeño para obtener resultados fiables de selección de características a través de técnicas de selección o aprendizaje automático. Los resultados obtenidos son muy dispares, así como también lo son los índices de fiabilidad de los mismos.

Por estos motivos utilizaremos los resultados analíticos de los métodos clásicos y compararemos con ellos los resultados para validar nuestras propuestas. Estos métodos han generado algoritmos y han realizado la selección y combinación del total de las setenta y dos características que definen completamente los diecisiete grupos de simetría. Recordemos que estos algoritmos introducen una ordenación de la consulta de las características y establecen, en **doce**, las características necesarias. Cabe notar que en todos ellos se han observado algunas ambigüedades o imprecisiones en su formulación de los grupos de simetría, como se da en todos los grupos que pueden tener un PF debido a más de un tipo de rejilla. Por ejemplo, en lo referido al grupo CM que puede tener una reflexión en una diagonal o en un eje central en función de que el FP sea un cuadrado o una forma romboidal como lo recogía la fig. 22 en el apartado 3.2.2 “Simetrías en las figuras planas: grupos de simetría”.

Para la implementación computacional, se ha escogido de entre todos los autores enunciados (véase el cap. 2 “Estado del arte”), el test de *Schattschneider* por ser utilizado en otros trabajos y poder ser así comparables los resultados que se obtengan. El estudio se ha hecho obteniendo las tasas de reconocimiento para un clasificador, en este caso un árbol binario, por lo que es necesario determinar un valor umbral. Ese valor sirve para definir cuándo la cantidad numérica que se ha obtenido para una característica dada, ha de ser interpretada como ausencia o presencia de la misma. Para obtener ese valor es necesario estudiar las características calculadas para ver si es posible asociar un significado físico a un valor numérico de las características de forma natural. En caso contrario, el estudio de los valores obtenidos nos debería permitir hacer la conjetura de este valor.

Del estudio de la formulación de los algoritmos que calculan tanto el conjunto de características **clásico** (el que se ha venido utilizando en la literatura) como el **propuesto** (el basado en particiones dispersas extendidas) se pueden identificar los elementos que influyen en la exactitud del valor numérico obtenido.

Para estudiar esta situación hemos evaluado el comportamiento de los vectores de características clásico y propuesto en tanto a qué tendencias toman los valores de las características que deberían estar presentes frente a los que toman las que deberían estar ausentes. Puesto que se dispone del etiquetado de las imágenes es posible ver, en cada imagen, qué componentes del vector de características se espera que tomen valores altos (representando con su valor la presencia de unas determinadas simetrías) y cuáles deberían ser bajos (representando en ese caso las simetrías ausentes).

La fig. 93 muestra esa tendencia al presentar los valores obtenidos para todas las imágenes de la colección, con ella estudiamos cómo podría modelizarse el valor de presencia/ausencia de una simetría en cada conjunto de características. Podemos observar, en esta figura, los valores de las características clásicas (fig. 93a con trazo rojo para las presentes y verde para las ausentes) frente a las propuestas (fig. 93b con trazo azul oscuro para las presentes y claro para las ausentes). Cada punto de la gráfica representa, para una imagen caracterizada por su VCS, el valor medio de las características que deben estar presentes y ausentes.

En la literatura se asume como umbral para determinar la presencia o ausencia de las características un valor obtenido experimentalmente con las imágenes disponibles. Para ver su viabilidad, aquí

hemos calculado un modelo diferente para las presentes y las ausentes, calculado como la media de todos los valores de cada tipo y se ha representado con una línea horizontal del mismo color que la serie de datos a la que pertenece. Los cuatro grupos de imágenes disponibles se han señalado con líneas verticales de color negro y corresponden de izquierda a derecha con las que denominamos *Wallpaper*, *Wikipedia*, *Quadibloc* y *SPSU*.

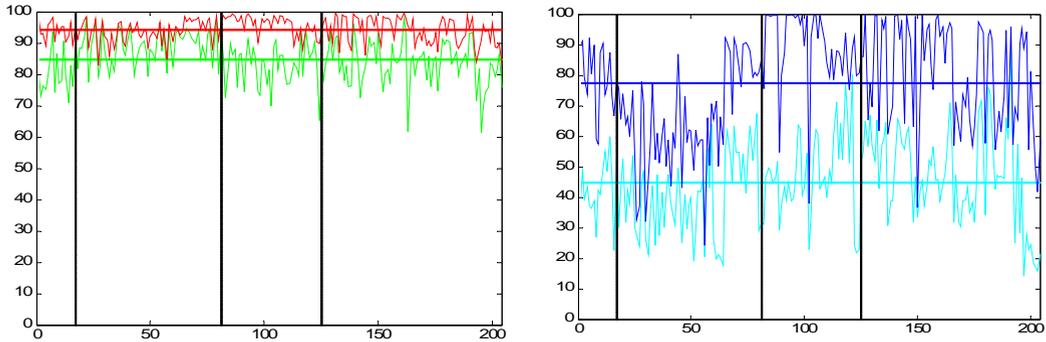


Figura 93: Tendencias de los valores de características presentes y ausentes para las características clásicas (a) y las propuestas(b).

El estudio de esta fig. 93 permite concluir que:

- El conjunto clásico tiene una menor variación entre los dos estados y, por tanto, es a priori más difícil extraer el estado de una característica con un alto índice de confianza.
- Los valores numéricos son mucho más altos en las dos situaciones en el conjunto de características clásico. Esto supone que, implícitamente, arrastran más condiciones de errores en su cálculo.
- Puesto que es conocido el orden de las subcolecciones dentro de las imágenes examinadas y su grupo de simetría real, se puede avanzar que será más preciso el resultado de la clasificación en un subconjunto que en otro. La desviación típica respecto al modelo representado por el valor medio es indicativo de la complejidad de la subcolección. La segunda y la cuarta muestran su dificultad de una manera evidente al reducir el intervalo de valores que representan los dos estados a distinguir.

Como es lógico, en el experimento se han eliminado las imágenes del grupo P1 que, por caracterizarse por la ausencia de todas las características del vector, no permite calcular el modelo de característica presente en esa imagen. En cualquier caso podemos ver (fig. 94), la evolución de los valores de las características (en este caso todas hacen referencia a ausencia de simetría) en las imágenes de este grupo. Se ha obtenido el valor promedio de las características y se ha representado para todas las imágenes de este grupo. Solo se muestran valores que deben representar simetrías ausentes, no cabe esperar otra cosa en este grupo, así que los de presentes están sobre el eje horizontal.

Se muestran los resultados en gráficas separadas para las características clásicas, fig. 94a y propuestas, fig. 94b. Se observa que para las primeras, sus valores tienden a estar alrededor del 88% de medida de simetría, frente al 42% para las propuestas. Este valor muestra una clara

indeterminación en las características clásicas al obtenerse valores muy altos que cabe esperar, por definición, cuando las características sí están presentes.

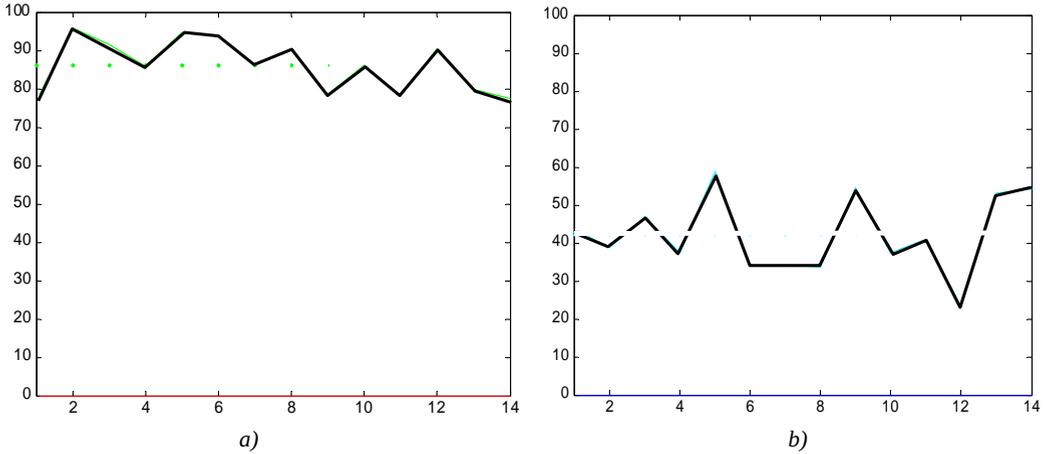


Figura 94: Valores promedios de los VCS de las imágenes del grupo P1 utilizando las características clásicas (a) y las propuestas (b).

Por otro lado, la expresividad de las características es función de lo capaces que estas sean para poder diferenciar los estados o las clases que se pretende observar. Se obtiene una medida aproximada de esta cualidad de las medias obtenidas si se observa la distancia entre los valores de las características que cabe esperar como presentes frente a las ausentes en una imagen. Cuanto mayor sea esta distancia, más claramente se separan los dos estados que pretendemos diferenciar en nuestro caso y, por lo tanto, será más significativo el conjunto que obtenga la tendencia mayor en la colección de imágenes.

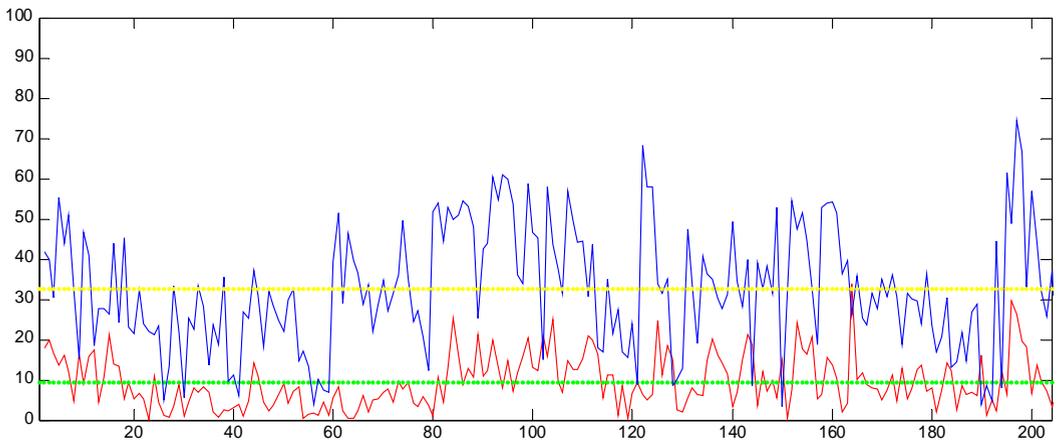


Figura 95: Evolución del rango de valores de las características clásicas (en rojo) y las propuestas (en azul).

Esta información se puede ver en la fig. 95, que muestra la diferencia entre las medias de las características presentes y no presentes. Se han tomado los valores medidos de los vectores de máximos y el de mínimos de cada imagen y se ha calculado la diferencia de valores agrupando las características en estos dos grupos. Se muestra en rojo las características clásicas (con una línea verde que marca el valor medio de todos los vectores) y, en azul, las características propuestas (con el valor medio de todos los vectores en trazo amarillo).

Se puede concluir de este estudio que:

1. La metodología propuesta de cálculo de características mejora en 23 puntos al subir el valor medio de 10% a 33%. Esto supone casi una cuarta parte del rango que puede tomar esta medida y, por tanto, es notable el incremento obtenido.
2. La medición de las simetrías es compleja porque no se obtienen unos valores fácilmente separables o diferenciables, en tanto que el 90% de las imágenes muestra menos de un 50% de distancia entre los valores representantes de ausencia y presencia de simetrías para el mejor caso de la metodología propuesta, en la clásica está entorno al 20% de distancia.

Vistos los detalles que acabamos de exponer, veamos cómo proponemos introducir estas variaciones como modelos de error que se pueden dar en el cálculo de las características para llegar a la formulación más eficiente y robusta posible. Es necesario determinar el rango dinámico de los valores de simetría obtenidos para cada imagen para poder normalizarlos.

En condiciones reales, los valores de simetría no tomarán de manera binaria uno de los dos valores extremos: *no está presente* (0) o *totalmente presente* (1). Cuantificaremos el error de cálculo en términos de las diferencias a estos valores. Estas diferencias con los valores ideales pueden ser vistas como imperfecciones debidas a la existencia de ruido en la imagen.

Los errores son debidos a tres situaciones:

1. La **naturaleza no discreta del dominio** de la imagen. Aún en la asunción de simetrías perfectas (como sería el caso de imágenes sintéticas), la ausencia de simetría no podrá ser obtenida como “0.0”, ni la simetría perfecta como “1.0” puesto que la implementación computacional del cálculo de simetrías comporta una serie de errores implícitos por el uso de las operaciones matemáticas sobre este dominio.
2. Los rangos dinámicos de los valores de simetría son extremadamente variables, dependiendo de las condiciones específicas de cada imagen.
3. La presencia de áreas homogéneas en la imagen hará aparecer valores altos de simetría.
4. Los motivos realizados a mano o las imágenes ruidosas comportan que se obtengan bajos valores de simetría.

Las tres últimas fuentes de error son debidas al contenido de una imagen. Lo hemos denominado la complejidad de una imagen (véase pág. 150), haciendo referencia a la disposición regular de sus píxeles. Esta propiedad de una imagen tiene como posibles orígenes:

1. Que no se hayan producido deformaciones elásticas o artefactos propios de la elaboración manual, que alteraría la posición de los puntos aunque no variaría la gama de colores que se pueden observar, o bien, que se altera la tonalidad de colores.
2. En imágenes de baja complejidad (como, por ejemplo, los dibujos con líneas), la presencia de áreas grandes y homogéneas en la imagen lleva a obtener grandes valores de simetría,

incluso en la ausencia de esta. En algunas imágenes, la presencia o ausencia de ciertas simetrías se debe a pequeños detalles, llevando a que algunas componentes están comprendidas en un rango muy estrecho.

También las simetrías presentes estarán afectadas por estas posibles alteraciones en las disposiciones de los píxeles en la imagen. Además, la clase P1 (la que se define por la total ausencia de simetrías interiores) es la principal fuente de falsos positivos. Análogamente, por su propia definición geométrica fuertemente relacionada con la existencia de reflexiones especulares, la detección de la simetría de reflexión con desplazamiento es la más propicia a errores.

3. La existencia de la clase P1 no permite una normalización del vector de simetrías a partir de sus valores máximos y mínimos. No podemos garantizar que el máximo valor del vector represente la existencia de simetría. En su lugar, debe ser utilizado un valor fiable (H) que mida la presencia de simetría en la imagen.

Usualmente, se han venido utilizando la simetría traslacional o alguna derivada de esta (*Liu et ál., 2004a*). En el cap. 5.de “*Simetría computacional aplicada a las simetrías*” interiores del patrón repetitivo” se ha visto la variabilidad que supone el trabajo sobre los valores máximos y mínimos del mapa de simetrías con el que se cuantifica cada simetría.

Para poder ofrecer valores de determinación de la presencia o ausencia de cada simetría entre imágenes es necesaria una normalización de estos VCS obtenidos a partir del mapa de simetrías.

6.3.2 Propuesta de normalización para mejorar la capacidad discriminativa de las características

Revisaremos ahora el efecto de diferentes estrategias de normalización tomando como muestra las cuatro imágenes regulares ya vistas en el capítulo anterior y que se vuelven a mostrar en la fig. 96 acompañadas de la descripción gráfica del GSP al que pertenecen las imágenes. Los valores sin normalizar de las características clásicas y propuestas se mostraban en las tablas 10 y 11.

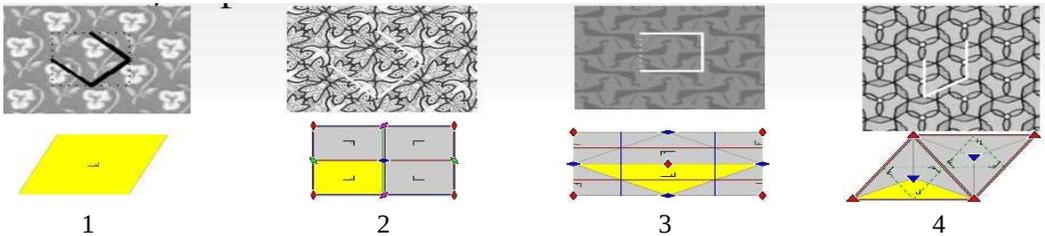


Figura 96: Imágenes de prueba para observar el efecto la normalización de características, pertenecientes a los grupos P1 (1), PMM (2), PGG (3) y P31M (4).

La normalización usual es la de **escalar por el valor máximo** que independientemente de la valoración numérica, nos permite una cualitativa: valores entre 0 y 1, o entre 0 y 100. En este caso solo es necesario determinar el valor máximo que puede tomar una característica y, que en nuestro caso, hemos identificado con el valor de la simetría traslacional (ST), ec. 49, con lo que se obtiene un valor que se adapta a las condiciones de cada imagen y permite extender la comparación a imágenes diferentes y así determinar la complejidad de una imagen o una colección en base a lo visible que es su regularidad. La tabla 14 muestra los valores escalados según esta aproximación para las imágenes de la fig. 96.

$$f(i) = 100 * \left(\frac{VCS_{max}(i)}{ST} \right); \quad 1 \leq i \leq 12 \quad (78)$$

Imagen	VCS = (SR ₂ , SR ₃ , SR ₄ , SR ₆ , SRe _{L₁} , SRe _{L₂} , SRe _{D₁} , SRe _{D₂} , SReD _{L₁} , SReD _{L₂} , SReD _{D₁} , SReD _{D₂})	GSP
	Características clásicas	
1	93.44, 94.59, 93.29, 92.15, 94.39, 93.41, 96.21, 3.H2, 92.18, 92.21, 91.98, 92.91	P1
2	116.07 , 92.83, 94.57, 92.85, 119.53 , 105.77 , 94.78, 94.64., 96.46, 94.97, 94.79, 94.64	PMM
3	101.94 , 97.52, 96.69, 97.92, 97.43, 98.11, 96.74, 98.10, 102.94 , 101.98 , 96.75, 98.10	PGG
4	100.01, 101.78 , 94.28, 98.83, 105.39 , 102.27 , 98.30, 104.11 , 95.04 , 92.57 , 94.37, 91.68	P31M
	Características propuestas	
1	49.77, 54.88, 50.94, 26.41, 50.37, 52.72, 56.62, 47.26, 40.04, 40.10, 56.62, 47.26	P1
2	91.53 , 39.77, 61.06, 39.02, 91.55 , 90.98 , 61.20, 61.32, 63.44, 61.72, 63.44, 61.72	PMM
3	94.28 , 42.15, 30.14, 39.89, 59.66, 66.88, 31.81, 30.64, 94.24 , 92.19 , 31.81, 30.64	PGG
	55.2H, 63.46 , 30.46, 54.90, 67.43 , 62.08 , 55.77, 66.96 , 67.43 , 62.08 , 55.78, 66.96	P31M

Tabla 14: Vector de valores normalizados por escalado con el valor de simetría traslacional.

Como en algunos casos las simetrías interiores han obtenido una medida más alta que la simetría traslacional el valor máximo resultante excede del 100% en algunos casos. Tampoco resuelve los valores de ausencia de simetría puesto que las características toman valores muy distintos de cero cuando están ausentes las simetrías, esta normalización no es suficientemente aclaratoria para tomar la decisión de ausencia o presencia de una simetría al mantener muy cercanos numéricamente los valores que expresan una u otra situación.

Con esta idea en mente, hemos estudiado diferentes aproximaciones para establecer los valores mínimos y máximos y así convertir el rango dinámico de cada imagen a una escala 0..100 o equivalente, para facilitar la relación semántica de “valor alto” con “presencia de simetría”.

Por ello, la segunda de las normalizaciones que se muestra es **la normalización por rango dinámico**. Atendiendo a incorporar las variaciones del rango dinámico de las características, la extensión habitual es incluir el rango dinámico de las características para abrir el rango de valores y así poder asociar computacionalmente los valores cuantitativos a estados cualitativos de las mismas. La ec. 79 muestra el algoritmo utilizado y la tabla 15 los resultados obtenidos.

$$f(i) = 100 * \frac{|VCS_{max}(i) - VCS_{min}(i)|}{(\max(VCS_{max}) - VCS_{min}(i))}; \quad 1 \leq i \leq 12 \quad (79)$$

Imagen	VCS = ($SR_2, SR_3, SR_4, SR_6, SRe_{L_1}, SRe_{L_2}, SRe_{D_1}, SRe_{D_2}, SReD_{L_1}, SReD_{L_2}, SReD_{D_1}, SReD_{D_2}$)												GSP
	Características clásicas												
1	81,20	89,01	80,16	72,49	87,63	80,99	100,00	79,06	72,70	72,90	71,31	77,60	P1
2	89,47	18,77	24,05	18,81	100,00	58,12	24,68	24,25	29,81	25,28	24,72	24,25	PMM
3	88,91	39,95	30,72	44,34	38,91	46,54	31,29	46,42	100,00	89,38	31,41	46,42	PGG
4	76,42	84,17	51,28	71,26	100,00	86,31	68,92	94,40	54,64	43,78	51,67	39,88	P31M
	Características propuestas												
1	82,07	95,44	85,14	21,00	83,64	89,81	100,00	75,51	56,64	56,80	100,00	75,51	P1
2	99,97	09,18	46,51	7,86	100,00	99,00	46,76	46,97	50,70	47,67	50,70	47,67	PMM
3	100,00	25,11	07,86	21,86	50,26	60,63	10,26	08,57	99,94	96,99	10,26	08,57	PGG
4	72,07	90,91	15,51	71,36	100,00	87,76	73,34	98,91	100,00	87,76	73,37	98,91	P31M

Tabla 15: Vector de valores normalizados por rango dinámico.

La tercera y última normalización mostrada es la que proponemos basada en **la regularidad de contenido**. Esta, de forma no lineal, ajusta la conversión del rango de la medida a uno basado en el uso de la simetría traslacional por la relación ya identificada de esta con la regularidad del contenido de una imagen que hemos denominado su complejidad de motivo (véase pág. 150) y, por tanto, de clasificación. La ec. 80 muestra el algoritmo utilizado y la tabla 16 los resultados obtenidos.

$$f(i) = 100 * \frac{|VCS_{max}(i) - VCS_{min}(i)|}{(max_0 - VCS_{min}(i))}; \quad 1 \leq i \leq 12$$

donde max_0 :

$$si \ (max(VCS_{max}) \leq ST) \tag{80}$$

entonces $max_0 = media(ST, max(VCS_{max}))$;

sino $max_0 = max(VCS_{max})$;

Imagen	VCS = ($SR_2, SR_3, SR_4, SR_6, SRe_{L_1}, SRe_{L_2}, SRe_{D_1}, SRe_{D_2}, SReD_{L_1}, SReD_{L_2}, SReD_{D_1}, SReD_{D_2}$)												GSP
	Características clásicas												
1	72,13	79,07	71,21	64,39	77,84	71,94	88,83	70,23	64,58	64,76	63,35	68,94	P1
2	89,47	18,77	24,05	18,81	100,00	58,12	24,68	24,25	29,81	25,28	24,72	24,25	PMM
3	88,91	39,95	30,7	44,34	38,91	46,54	31,29	46,42	100,00	89,38	31,41	46,42	PGG
4	76,42	84,17	51,28	71,26	100,00	86,31	68,92	94,40	54,64	43,78	51,67	39,88	P31M
	Características propuestas												
1	58,20	67,68	60,38	14,89	16,37	63,69	70,92	53,55	40,17	40,28	70,92	53,55	P1
2	93,35	08,57	43,44	07,34	93,38	92,45	43,67	43,86	47,35	44,52	47,35	44,52	PMM
3	96,17	24,15	07,55	21,02	48,33	58,31	09,87	08,25	96,11	93,27	09,87	08,25	PGG
4	55,46	69,95	11,93	54,91	76,94	67,53	56,43	76,10	76,94	67,53	56,45	76,10	P31M

Tabla 16: Vector de valores normalizados por regularidad de contenido.

Para decidir sobre la idoneidad de las normalizaciones que se ensayaron y llegar a la elección de la propuesta realizada se llevaron a cabo dos tipos de análisis para los resultados del conjunto de imágenes disponibles. Sin pérdida de generalidad, los resultados que aquí se recogen son solo para las imágenes y normalizaciones indicadas por brevedad de la exposición.

Se realizó un **análisis global de los vectores** entendidos como una entidad: sus valores máximos y mínimos deben ser significativamente diferenciables para responder a la pregunta de si está presente o ausente una característica. La situación de partida la hemos visto ya en la fig. 93: las nuevas características propuestas permiten trabajar sobre un rango dinámico mayor, pero todavía existen imágenes en las que no cumple que la ausencia o presencia de una simetría esté alrededor de un valor estable para todas las imágenes.

La fig. 97 muestra este análisis global. En la columna de la izquierda se muestran los valores de los vectores obtenidos por la metodología de cálculo de características clásico y, en la columna derecha, los correspondientes a utilizar la metodología de cálculo que hemos propuesto. Además, los mismos vectores se muestran normalizados por filas: por rango dinámico en la primera fila y por regularidad de contenido en la segunda. En trazo rojo los valores de presencia y en verde los de ausencia de simetría, para las características clásicas. De manera análoga la columna de la derecha hace lo propio para la metodología propuesta de cálculo de simetrías, utilizando el azul oscuro para los valores de presencia y el claro para los de ausentes.

Se observa que la propuesta que realizamos obtiene los mejores resultados en ambas normalizaciones al situar el promedio de los valores de simetrías presentes alrededor del 95% y 98% respectivamente y las ausentes en el 38% y 39%. Mientras que la metodología clásica las deja 6 puntos (en el 89% y 92%) más abajo las presentes y 10 (48% y 49%) más arriba en las ausente.

Se realizó también un **análisis en detalle** para apreciar las diferencias que se obtienen entre las dos normalizaciones, por ello se analizaron casos en los que los grupos de simetría son incorrectamente identificados en la aproximación clásica. Veremos que la propuesta es igual o mejor que las normalizaciones habituales de la literatura.

La figura 98 establece de forma compacta los vectores de características que se utilizan resumidos en los valores extremos de los mismos: los valores máximo y mínimo de cada VCS que se ha presentado. Al recoger los valores extremos de cada VCS se obtiene una visualización compacta del intervalo de variación de esos vectores para poder generalizar qué sucederá con las estrategias de normalización propuestas. No siendo necesario describir en el mismo gráfico otros valores como medias o desviaciones de los valores de cada vector que no influyen en el cálculo y hacen menos evidente sacar conclusiones de las gráficas.

Los cinco primeros puntos de las gráficas hacen referencia a los valores obtenidos mediante el algoritmo de cálculo de simetrías por similitud de PF, en la aproximación clásica. Los otros cinco corresponden a la propuesta que hemos realizado de calcularlas mediante el uso de particiones dispersas. En ambos casos se muestra el vector de características de simetría máximo y mínimo, obtenidos directamente del mapa de simetría de cada característica. Después se ha situado el vector normalizado por escalado, el normalizado por rango dinámico y, finalmente, la normalización creada para esta situación. Las gráficas también muestran el valor de la simetría traslacional de cada imagen para ayudar a situar, en el contexto de cada imagen y normalización, los valores obtenidos.

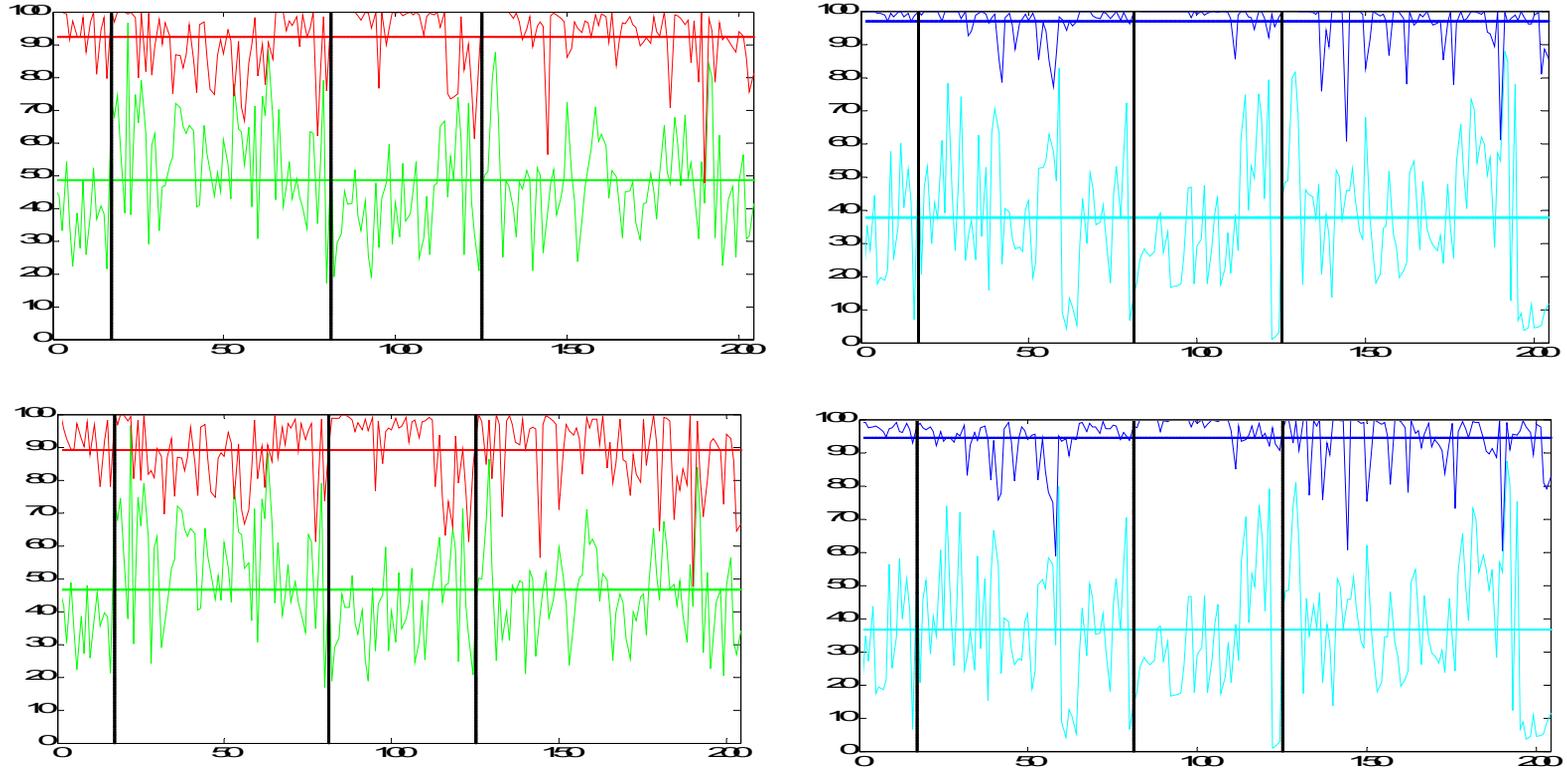


Figura 97: Valores promedio de características presentes y ausentes, por metodología de cálculo de características (clásico en la columna izquierda y propuesto en la derecha) y por metodología de normalización (primera fila para la normalización por rango dinámico y en la segunda fila por regularidad de contenido).

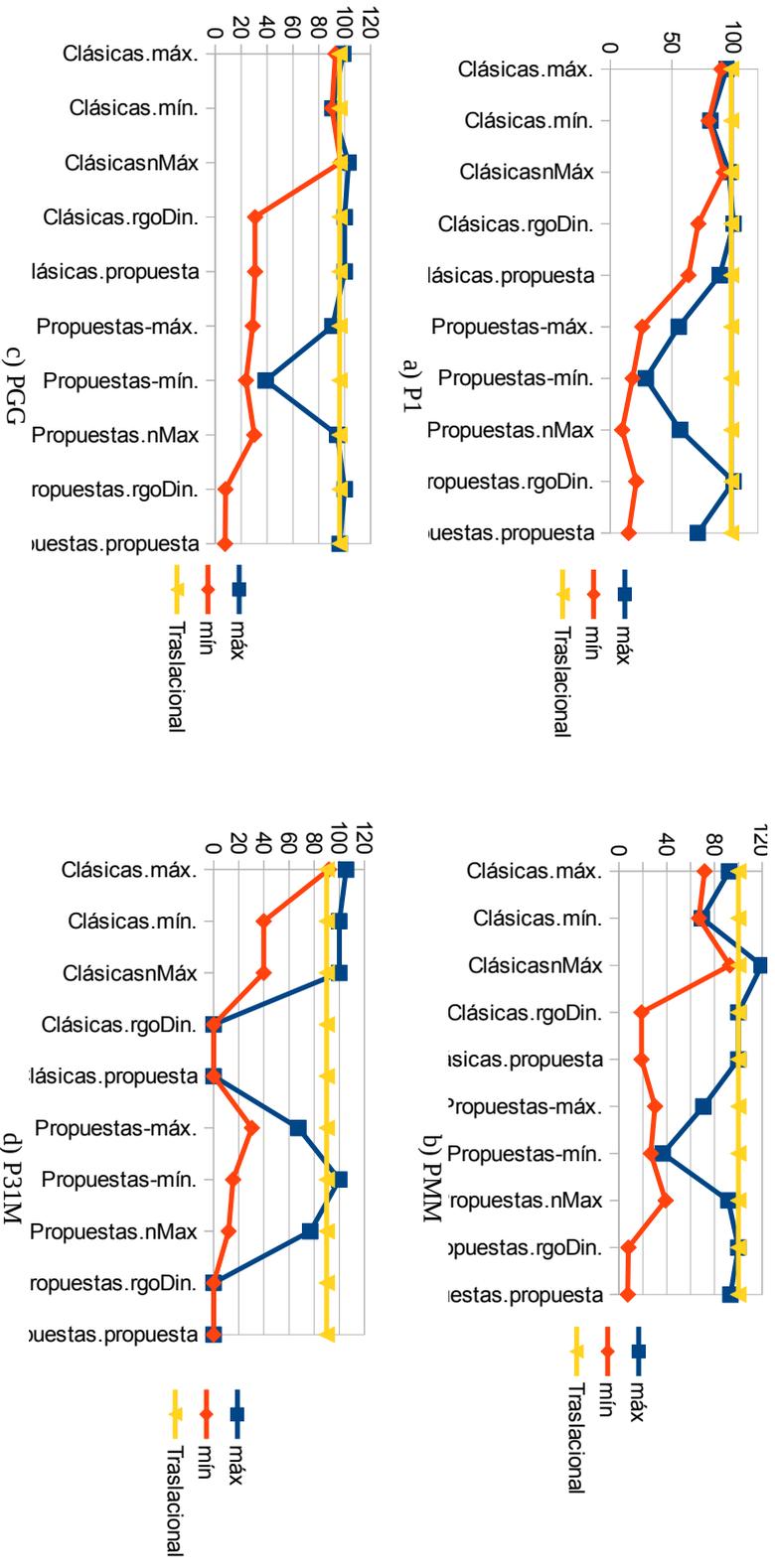


Figura 98: Evolución del intervalo de valores de las características observado en cada tipo de VCS computado para diferentes imágenes.

Las conclusiones que se desprenden de este análisis visual de la evolución de los intervalos de los VCS apuntan a que:

- Los VCS obtenidos directamente del mapa de simetrías en la aproximación clásica evidencian un margen muy estrecho que la propuesta de uso de particiones dispersas consigue expandir ya de partida, como se evidenció ya en el capítulo anterior.
- No es suficiente, en ninguna de las dos metodologías de cálculo de simetrías, con escalar respecto al máximo. Puesto que los valores mínimos no son muy cercanos a cero en ninguno de los dos casos, evidenciando así el concepto de complejidad de las imágenes regulares expuesto en el capítulo anterior.
- Los valores del vector de mínimos son muy estables en las dos aproximaciones, pero numéricamente es mucho más alto en la aproximación clásica, acercándose estrechamente a los valores del VCS de máximos de la misma.
- La normalización propuesta es la que expande más el rango de valores y, por tanto, facilitará la decisión si está presente o ausente una característica. Sobre el conjunto de características calculadas con particiones dispersas se obtienen los resultados más significativos.

Se realizó también un **análisis específico** de las características para determinar si cada una de ellas es significativamente observada como presente o ausente, puesto que se conoce de antemano el etiquetado de las imágenes. Se puede separar el comportamiento de las características que deben apreciarse como presentes y las que deben estar ausentes en cada imagen y estudiarlas como propiedades de variables de un espacio muestral.

Para apreciar el efecto de cada metodología de normalización, las figuras 99 a la 102 muestran qué sucede en cada imagen de las escogidas para el conjunto de características clásico y el obtenido con el uso de las particiones dispersas, que es el que hemos propuesto.

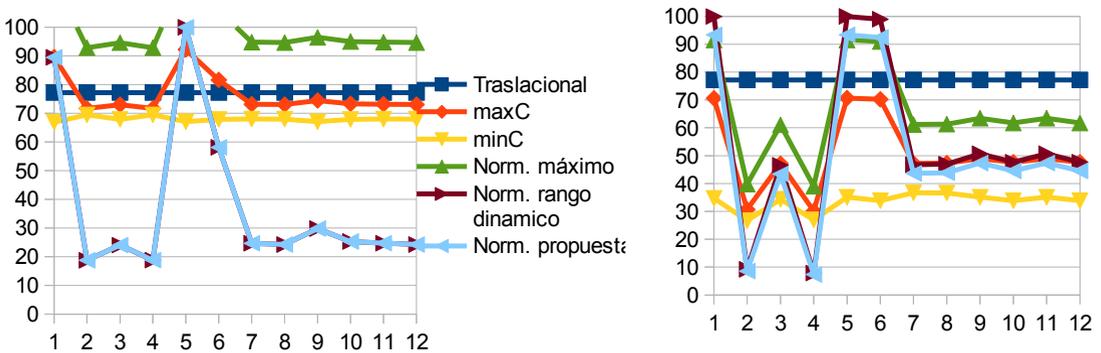


Figura 99: Comportamiento individual de las características clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo PMM.

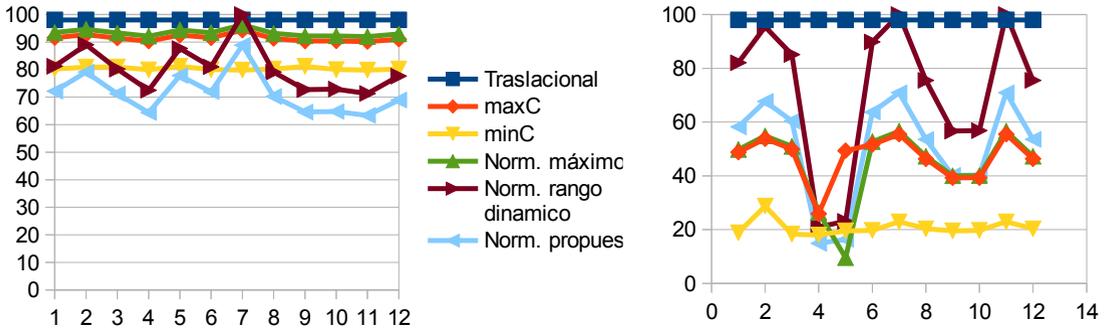


Figura 100: Comportamiento individual de las características clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo P1.

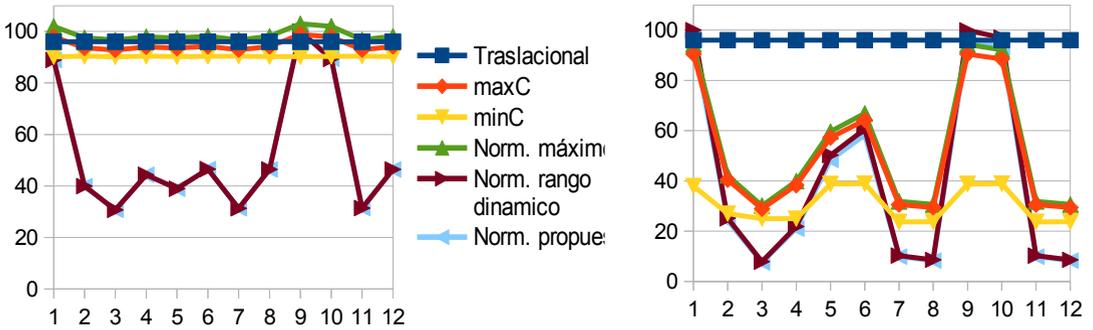


Figura 101: Comportamiento individual de las características clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo PGG.

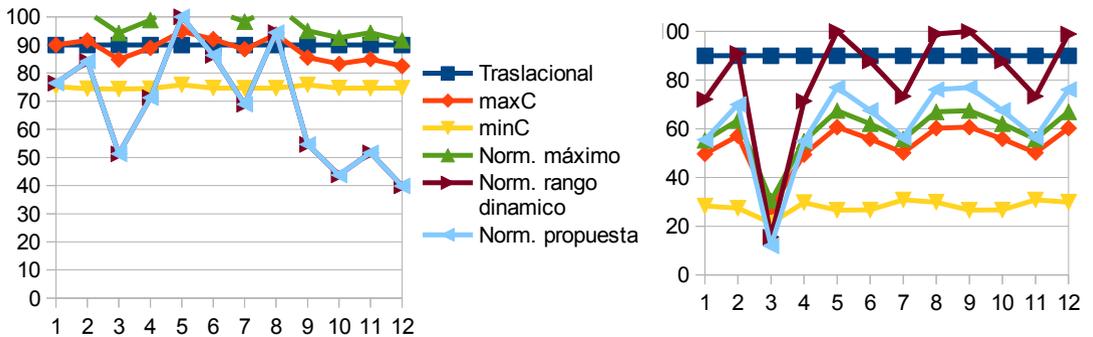


Figura 102: Comportamiento individual de las características clásicas clásicas(izqda.) y propuestas (dcha.) en cada normalización para una imagen del grupo P31M.

Como conclusiones de estas gráficas de comportamiento de las normalizaciones para algunas imágenes por características individuales, podemos destacar lo siguiente:

- Las normalizaciones aplicadas sobre el conjunto de características propuestas son más significativas que sobre las clásicas.
- La normalización por el máximo induce a valores equívocos en tanto que superan el valor de la máxima simetría observada en la imagen, la traslacional.
- *La normalización de rango dinámico es la que más se acerca a la normalización propuesta.*

La normalización propuesta resuelve los casos en que se dan situaciones particulares de que las características son medidas con valores numéricamente mayores que la simetría traslacional.

6.4 Discusión

Este capítulo ha abordado la elección del clasificador para decidir a qué grupo de simetría pertenece una imagen regular, a partir de la geometría del retículo y las simetrías interiores al mismo. Hemos expuesto la dificultad del problema por el alto grado de cercanía de las clases e incluso su solapamiento, así como por el ruido que afecta a la medición de las características de simetría.

Los métodos existentes en la literatura se han obtenido de manera heurística. El vector de máximos es la elección realizada en los algoritmos vistos en la literatura porque es “la mejor” categorización de la presencia de una simetría. Estos algoritmos utilizan un valor aceptable que identifica la presencia de la características. En función de dónde se considere que está ese valor aceptable de presencia de la características, una imagen se clasificará o no acertadamente. La manera de escoger este umbral es totalmente empírica.

La robustez de los clasificadores de vecindad frente al de árbol es experimentalmente demostrada al someter a ambos clasificadores con un banco de pruebas sintético de 4096 vectores que son los resultantes de introducir diferentes grados de ruido aleatorio en un vector de doce elementos como es el nuestro. En cada iteración, una mayor cantidad de ruido es introducida en un mayor número de características.

Hemos establecido una normalización y una función de mérito que adapte las fronteras entre clases que tengan en cuenta las condiciones de cada imagen. Es necesario estudiar el uso de normalizaciones, veremos los resultados de las experiencias en este sentido en el siguiente cap. 7 de “*Experimentos*”.

Aunque hemos hecho uso de herramientas computacionales como *Tooldiag* (Rauber et ál., 1993) o *Weka* (Hall et ál., 2009), la cantidad de muestras disponibles no es suficiente para respaldar los resultados. Examinando el problema, proponemos que no es necesario un sistema que implemente una etapa de aprendizaje, ya que los representantes son conocidos. Por lo que se han creado los vectores de características pertenecientes a los modelos y a las versiones de estos necesarias para asumir las ambigüedades observadas.

La interrelación entre características y clasificador es evidente: tanto más descriptivas sean las primeras más simple será el trabajo del clasificador. En este sentido, proponemos dejar en manos del clasificador la determinación del proceso a seguir a partir de los valores de las características tal como se calculan, sin normalizar ni otras etapas previas a la clasificación que puedan ocultar detalles importantes para el clasificador. En los experimentos realizados se evidencia que es necesario un clasificador elaborado como los aquí propuestos para un conjunto de características, mientras que se puede utilizar uno general y más simple, computacionalmente, para el segundo

conjunto de características que hemos propuesto en el que ha procedido a reducir el número de características a emplear.

Capítulo 7.

Experimentos

La evaluación de los resultados es todavía un problema abierto en el campo de la clasificación (Kononenko y Bratko, 1991) en general. Además, en el contexto particular de este trabajo, no existe un conjunto de medidas consensuadas (Müller et ál., 2001], ni una colección pública de imágenes etiquetadas.. Como bien indica (Liu et ál., 2010b), sin una evaluación sistemática contra un conocido y uniforme conjunto de imágenes, nuestra capacidad de reconocer la potencialidad y las limitaciones, tanto de las técnicas de detección de las diferentes simetrías, como de los algoritmos de clasificación, es parcial e inexacta. Las imágenes utilizadas por ellos no están indicadas y otros conjuntos de imágenes citados en la bibliografía tampoco son públicos. Así que hemos recogido imágenes regulares de las fuentes expuestas anteriormente, sobrepasando los cardinales de los conjuntos observados en la literatura, para comparar nuestras propuestas tomando como valor de referencia nuestra propia implementación del trabajo de Liu y revisando manualmente las etiquetas con que se han encontrado.

Se recogen aquí los experimentos relativos a las técnicas explicadas en capítulos anteriores. Primero se expone el conjunto de imágenes utilizada en las experiencias, se muestran algunos ejemplos de su contenido organizado por colecciones en función de su origen y de su complejidad. También se expone cómo se ha establecido el etiquetado de las imágenes para realizar los cálculos de la bondad de cada método. A partir de aquí ya se procede a mostrar los experimentos en la secuencia en que las técnicas han sido expuestas en esta memoria: extracción de la rejilla y clasificación en grupos de simetría.

Veremos en un punto posterior la comparación con la nueva formulación de cálculo de características de simetría basada en la varianza de las particiones que cada una define sobre la imagen. Terminaremos con la discusión de todas las técnicas de clasificación y su comparativa.

7.1 Colección de imágenes creada y base de verdad

En la literatura no existe una base de datos estándar de imágenes de grupos de simetría, por lo que es necesario encontrar una forma de crear una colección de imágenes correctamente etiquetada, de suficiente cardinal y con variabilidad de situaciones.

Nombre de la colección	Número de imágenes	Número de imágenes del conjunto original
Wallpaper	17	17
Wikipedia	53	85
Quadibloc	46	46
SPSU	102	205
Global	218	353

Tabla 17: Colecciones de imágenes utilizadas para la experimentación.

Puesto que no existen colecciones estables y etiquetadas de imágenes que se hayan hecho públicas en la literatura analizada, hemos recogido imágenes de diferentes sitios en internet. Este conjunto de datos es necesario para poder comparar los algoritmos propuestos y el método de referencia. Hemos verificado muestras de cuatro colecciones. La tabla 17 recoge las propiedades de las colecciones que hemos nombrado como *Wallpaper* (Joyce, 2007), *Wikipedia* (Wikipedia., 2008), *Quadibloc* (Savard, 2010) y *SPSU* (Edwards, 2009). A partir de estas fuentes, hemos elaborado un conjunto de

experimentación de 218 imágenes, todas ellas manualmente etiquetadas y revisadas.

Hay que hacer constar que los datos de partida eran mayores pero se han tenido que descartar imágenes por que no mostraban el concepto de repetitividad. Aún así, ya se ha de hacer constar que no es equitativa la distribución por grupos, tabla 18 y 19. El grupo que más frecuentemente se ha utilizado en el arte ornamental es el grupo P4M. En (Gilsanz, 2011) se justifica tanto desde el punto de vista artístico como de construcción: “su alto grado de simetría permite obtener otros grupos rompiendo alguna de esas simetrías”. En efecto, los grupos de simetría P1, PM, PG, PMM, PMG, PGG, CM, CMM, P4, P4G son subgrupos del grupo P4M, por lo que este puede considerarse como un grupo constituido por muchas simetrías tal que, al eliminar alguna de ellas, origina alguno de los subgrupos mencionados.”

Núm. GSP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Número de imágenes	21	10	33	17	18	43	21	12	25	17	62	10	4	10	15	12	23
GSP	P1	P2	PM	PG	CM	PMM	PMG	PGG	CMM	P4	P4M	P4G	P3	P31M	P3M1	P6	P6M

Tabla 18: Distribución original por grupos de simetría.

GSP	P1	P2	PM	PG	CM	PMM	PMG	PGG	CMM	P4	P4M	P4G	P3	P31M	P3M1	P6	P6M
Número de imágenes	13	9	15	7	10	15	10	7	12	11	46	5	4	10	13	12	20

Tabla 19: Distribución final por grupos de simetría.

La primera colección de imágenes usada es la de Wallpaper), véase la fig. 103, que puede considerarse como la colección estándar puesto que ha sido citada y utilizada en trabajos previos. Está expuesta en la web, acompañada de una extensa disertación que expone el grupo de simetría al que pertenecen.

La idea básica de utilizar este conjunto de imágenes es para validar que nuestra implementación del método de referencia (puesto que no está disponible la original) es acertada y obtiene los mismos resultados finales que se pueden ver en la literatura revisada.

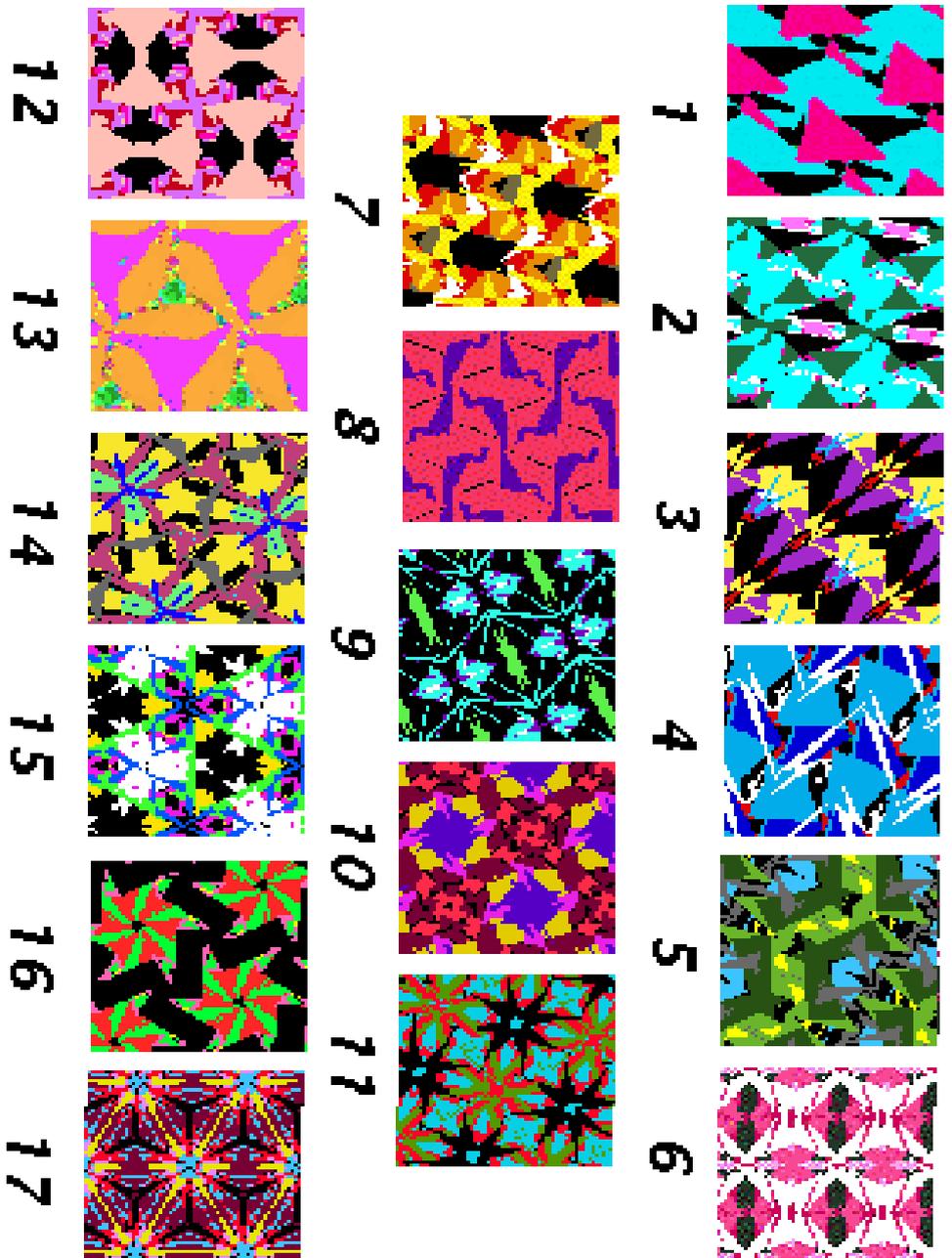


Figura 103: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de la colección Wallpaper.

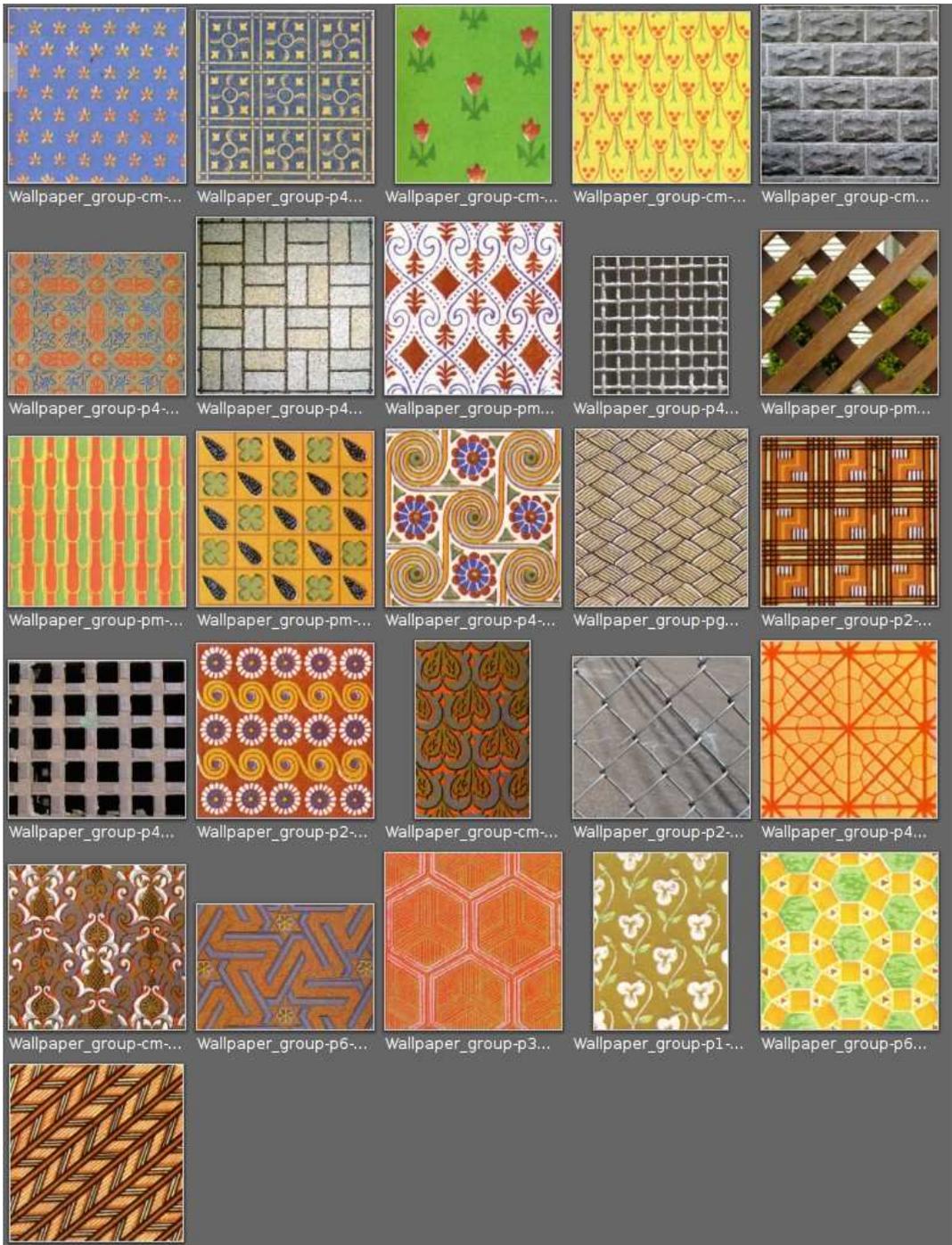


Figura 104: Ejemplos de imágenes reales de patrones regulares de la colección Wikipedia.

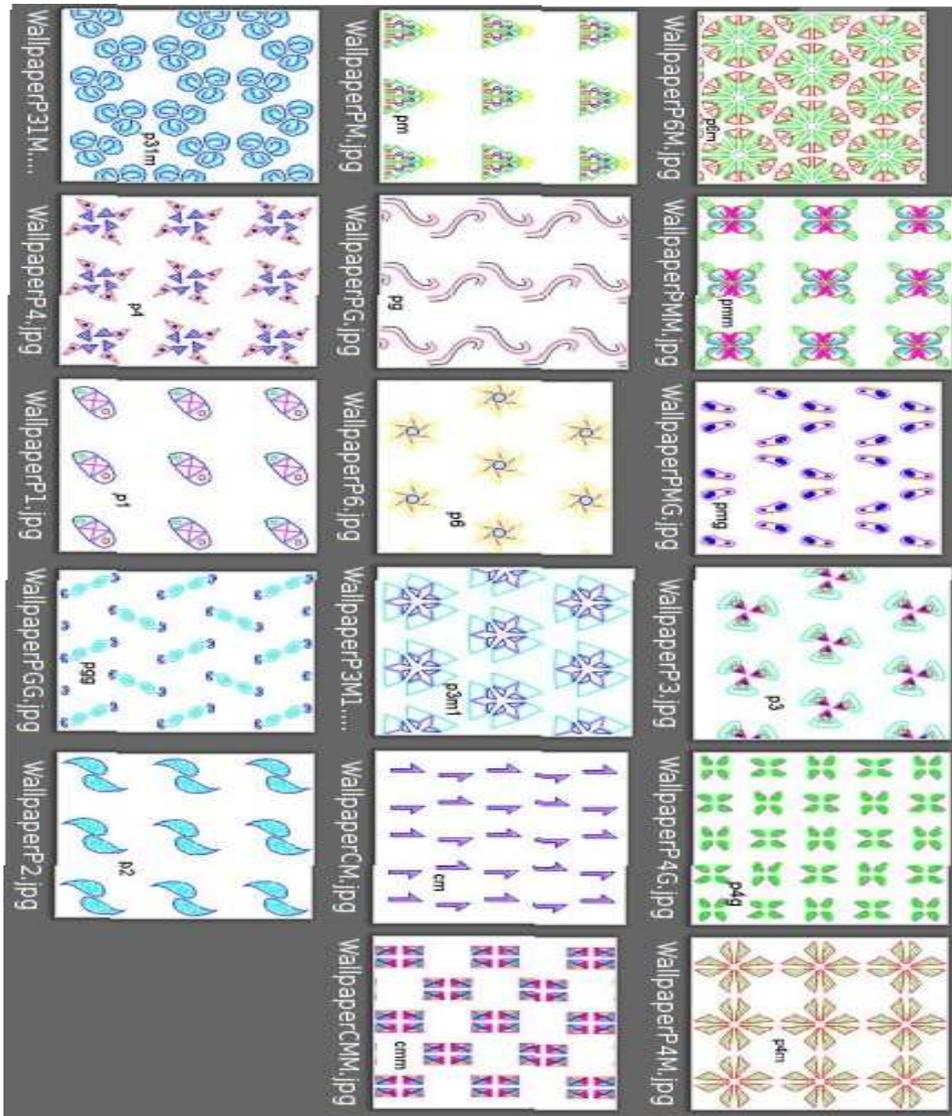


Figura 105: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de la colección wikiGeom..

El grupo de imágenes que denominamos *Wikipedia* está integrado tanto por imágenes reales como sintéticas, véanse las figuras 104 y 105, respectivamente. **Algunas no son directamente procesables por alguno de los métodos de referencia** que se han implementado porque, p. ej., esperan que exista un número mínimo de repeticiones, en estos casos se ha utilizado el resultado obtenido por nuestras propuestas; también se observan casos extremos en el sentido de que no son estrictamente imágenes regulares sino más bien casi-regulares, pero han sido incorporados para determinar la robustez de los algoritmos.

La colección de imágenes que denominamos *Quadibloc* es de naturaleza sintética, con dos grandes grupos observables de imágenes. Uno formado por dibujos de trazos sobre fondo de color uniforme, como los mostrados en las, fig 106 y fig. 107. Y por otro (el que muestra la fig. 108), compuesto por motivos complejos con colores muy contrastados.

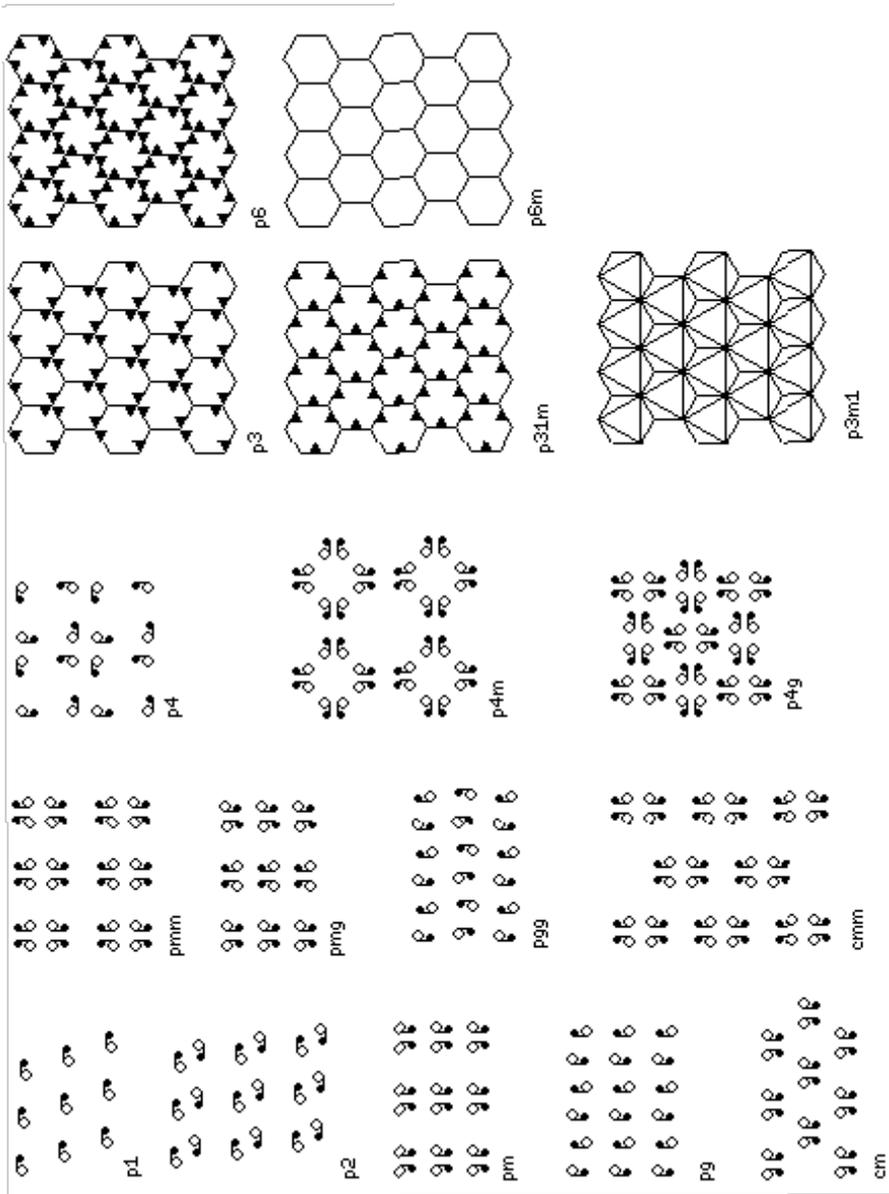


Figura 106: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de trazos gruesos de la colección *Quadibloc*.

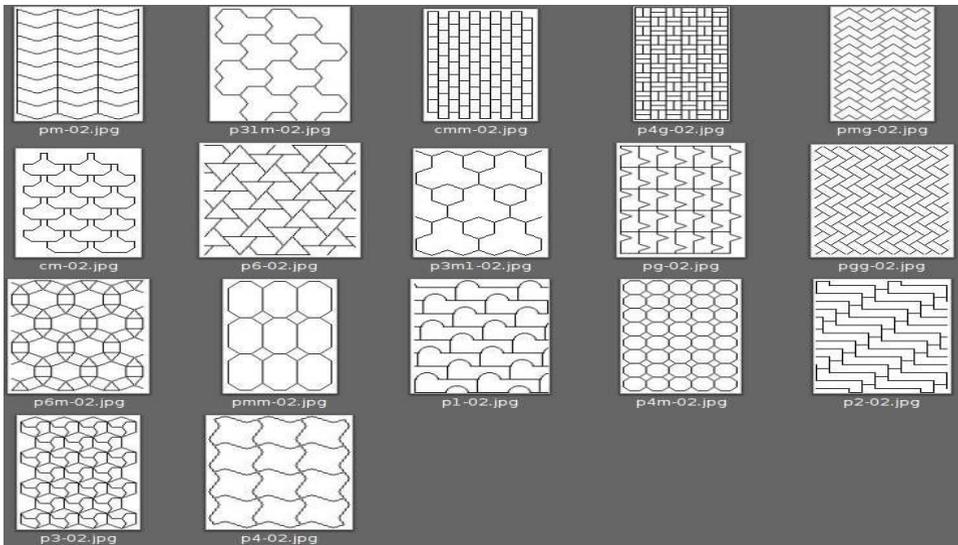


Figura 107: Ejemplos de imágenes de patrones regulares de trazos finos de la colección Quadibloc.

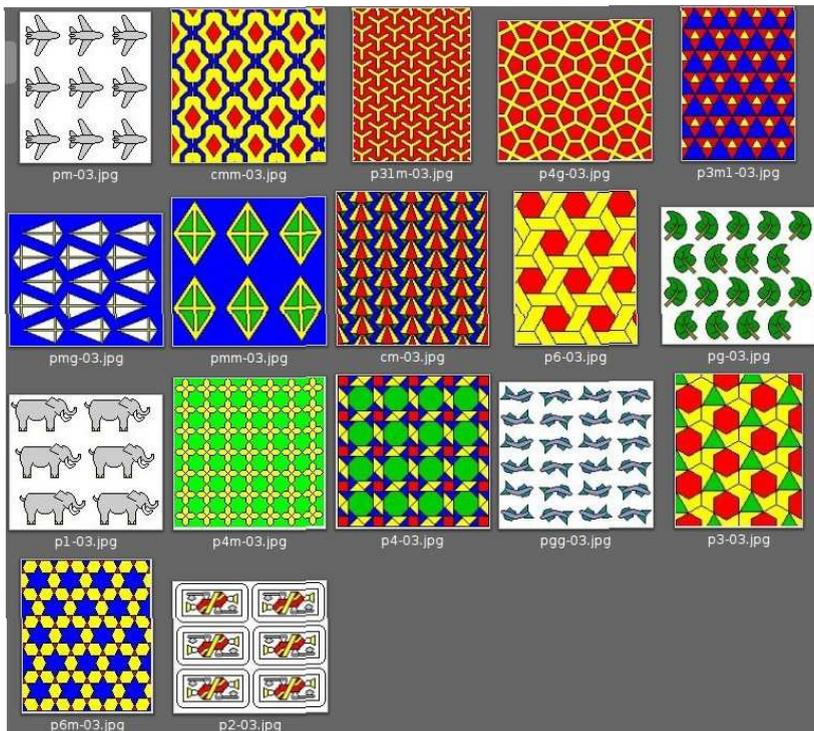


Figura 108: Ejemplos de imágenes sintéticas de patrones regulares en color de la colección Quadibloc.

La colección SPSU, como la colección de *Wikipedia*, tiene una alta variedad de motivos: tanto de imágenes sintéticas (fig. 109) como de imágenes reales (fig. 110 y 111). Consideramos que las imágenes más complejas de todas las que hemos recogido son las que forman esta colección.

Lo son en el sentido de la existencia, en la imagen, de ruido y detalles de imprecisiones (debidos a su realización manual). También muestran artefactos en cuanto a la iluminación y el número de veces que se repite el motivo; lo que sugiere que puede ser necesario algún paso de preproceso inicial para compensarlos. Véanse las figuras 110 y 111 donde se muestran ejemplos de imágenes de los grupos P1 y P6, respectivamente, para observar como coexisten imágenes problemáticas que ha habido que dejar fuera del conjunto de experiencias, junto con las que presentan contenidos no ideales pero si procesables.

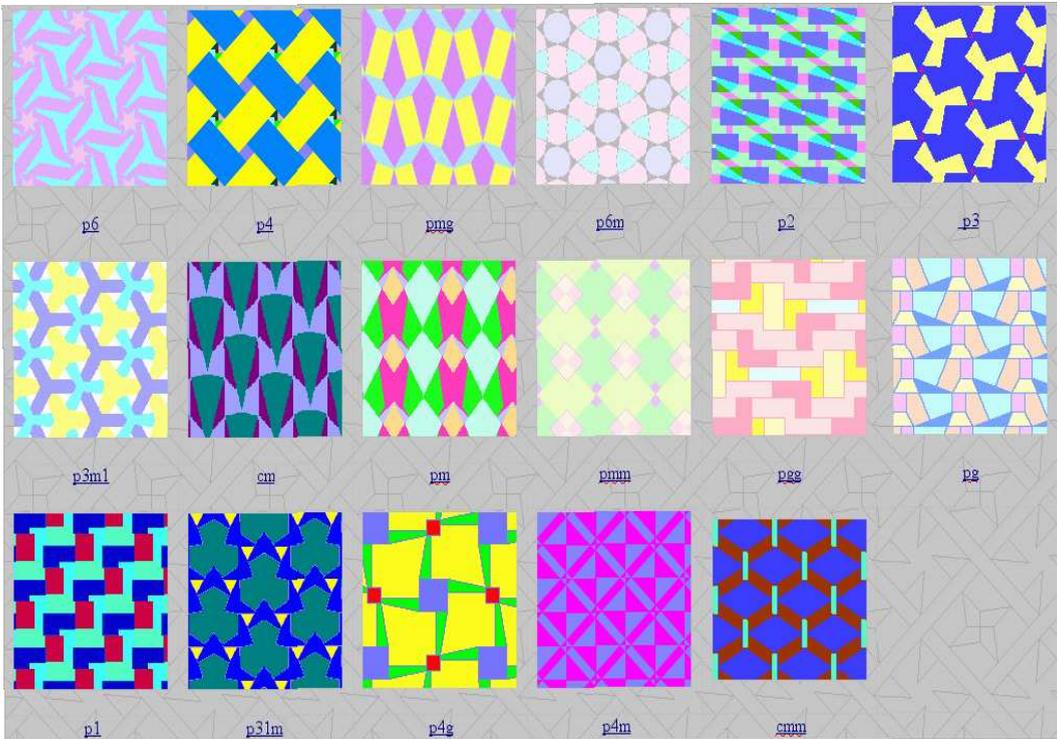


Figura 109: Ejemplos de imágenes sintéticas de patrones regulares de la colección SPSU.

Tanto en la fig. 110 como en 111 se muestran **imágenes que se han apartado de las muestras** de trabajo porque no cumplen el requisito de imágenes con contenido regular:

- i) No contienen suficiente información del patrón para detectar que se repite. Lo cual el ser humano realiza asumiendo que se dará fuera de los límites de la imagen, pero que podría no darse. Realmente es información incompleta.
- ii) Tienen defectos propios de un método de fabricación manual.
- iii) Presentan problemas típicos de la adquisición de imágenes (ruido o diferencias importantes de iluminación en la imagen).



Figura 110: Ejemplos complejos del grupo P1 en SPSU.

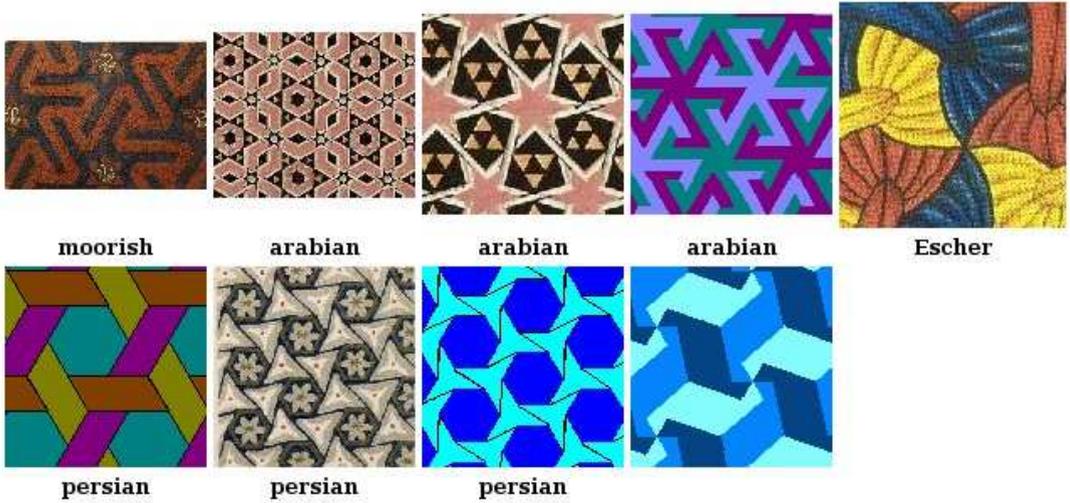
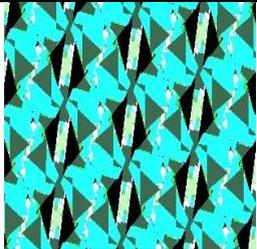
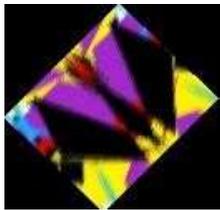
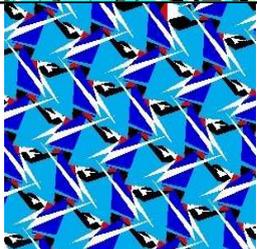
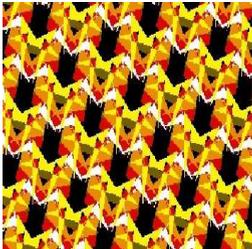
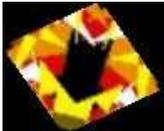
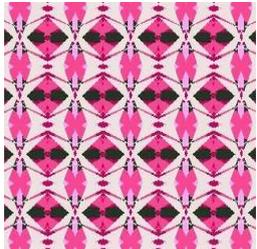
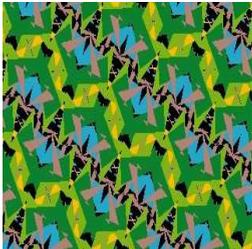
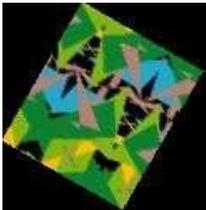
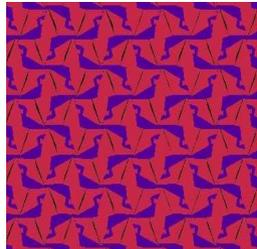
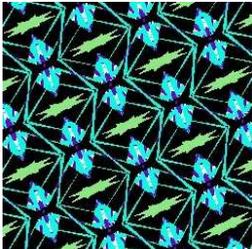
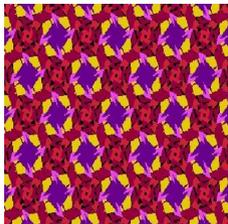
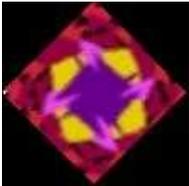


Figura 111: Ejemplos complejos del grupo P6 en SPSU.

Original	PF	Original	PF
			
			
			
			
			

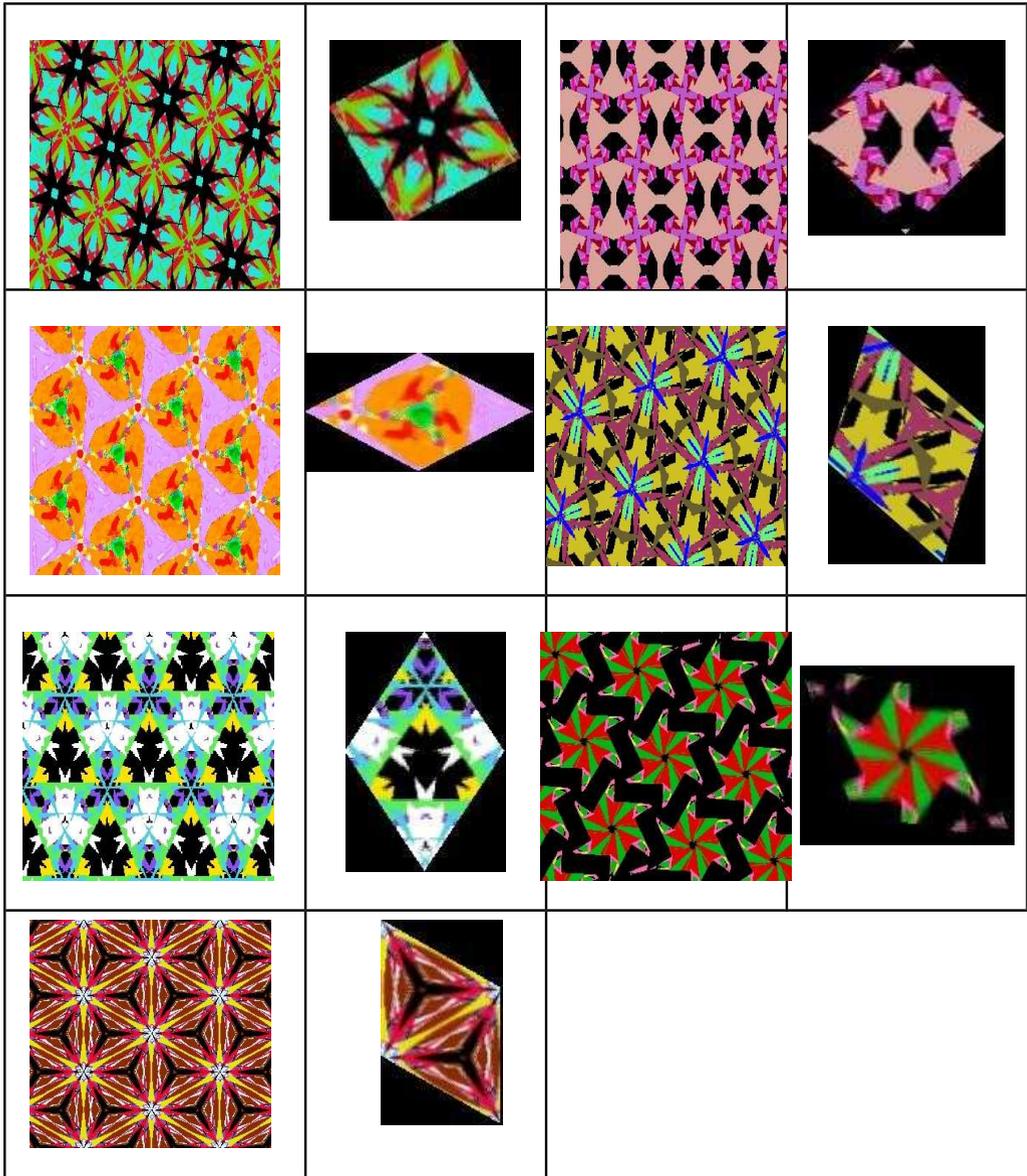


Tabla 20: Representación gráfica de la información guardada en la base de datos de verdad de una colección de ejemplo

La **base de verdad** ha de permitir la comparación entre implementaciones y técnicas desarrolladas: así que es la expresión de lo que cabe esperar obtener, a partir de la opinión de expertos. Este punto describirá el sistema de información que hemos desarrollado para realizar nuestras experiencias.

La tabla 20 muestra gráficamente los parámetros esenciales de una colección de imágenes (en concreto se muestra la que denotamos como *Wallpaper*) para constituir la verdad (*groundtruth*) de las muestras de la colección: el PF asociado para cada una de las imágenes de la colección, que

supone haber obtenido la rejilla correspondiente y haber determinado la geometría del PF.

Para facilitar su portabilidad se ha diseñado una arquitectura del sistema de información formada por un conjunto de imágenes más un conjunto de ficheros que contienen los vectores de características precalculados para cada subconjunto de imágenes, propiciando así que se pueda trabajar sobre un conjunto específico o sobre la totalidad. Esto se traduce en una serie de ficheros que se recogen en la tabla 21. El conjunto de imágenes es una serie de ficheros de imagen (básicamente JPG y PNG) en color RGB. De este modo están agrupadas por su origen.

Nombre colección	Identificador	Conjunto imágenes	Fichero características
<i>Wallpaper</i>	1	aprentajeRGB	caracteristicas_Wallpaper.txt
<i>Wikipedia</i>	2	wikipediaRGB_4	caracteristiques_Wikipedia.txt
<i>quadibloc</i>	3	quadibloc	caracteristiques_quadibloc03.txt
<i>SPSU</i>	5	test_SPSU	caracteristiques_SPSU.txt
<i>todas</i>	6	todas	caracteristiques_totes.txt

Tabla 21: Relación de las colecciones de imágenes realizada sobre las imágenes disponibles.

Los ficheros de descripción de las imágenes, permiten ordenarlas por otros factores diferentes de su proveniencia: complejidad de motivos, sintéticas/reales, EAR por encima de un valor, tiempo de cómputo, poner una primero para que se ejecute la primera, etc.

El formato de estos ficheros de características es el siguiente:

- Cada línea describe una imagen.
- Se pueden poner líneas en blancos que no son procesadas ni tenidas en cuenta.
- Sobre un total de 52 elementos, destacamos que podemos acceder, por orden de izquierda a derecha, a información del estilo:
 1. Nombre del fichero imagen.
 2. Escala a la que se ha calculado la geometría y las características
 3. Número y cadena de texto que identifica al GSP real al que pertenece la imagen.
 4. Número y cadena de texto que identifica al GSP en que se ha clasificado la imagen.
 5. Cadena que identifica el GSP en que se ha clasificado la imagen.
 6. Automático. Este es un parámetro que identifica a qué escala se han obtenido las características que se indican, para que otras técnicas que se emplean posteriormente puedan utilizar el mismo valor.
 7. Valor de umbral para discretizar si está presente una característica o no. Se utiliza en los métodos que son capaces de tomar esta decisión o que la ponderan según el valor de la característica.
 8. Geometría del PF: 4 valores (lado 1. ángulo 1, lado 2 y ángulo 2).
 9. Valores de simetría máximos: 12. Valor para poder ensayar con un conjunto de características menor en algunos métodos de reducción de características. Doce es el valor máximo.

10. Simetría traslacional media. Valor de la simetría de translación en la imagen.
11. Desviación típica de la simetría traslacional. Siempre a 1 en el método KNN y sus derivados.
12. Parámetros de cálculo de características propios del método de clasificación basado en reglas. Son el valor mínimo, los coeficientes de pesos y el valor de umbral de simetría presente o ausente para este método.

7.2 Evaluación de las características

Este apartado aborda los experimentos sobre la **metodología de cálculo de características**, para valorarlos haremos uso del valor de **reconocimiento** obtenido por un mismo clasificador al utilizar un conjunto u otro de características. La fig. 112 contiene ejemplos de imágenes regulares y para las que la tabla 22 muestra los vectores de simetría obtenidos para ellas.

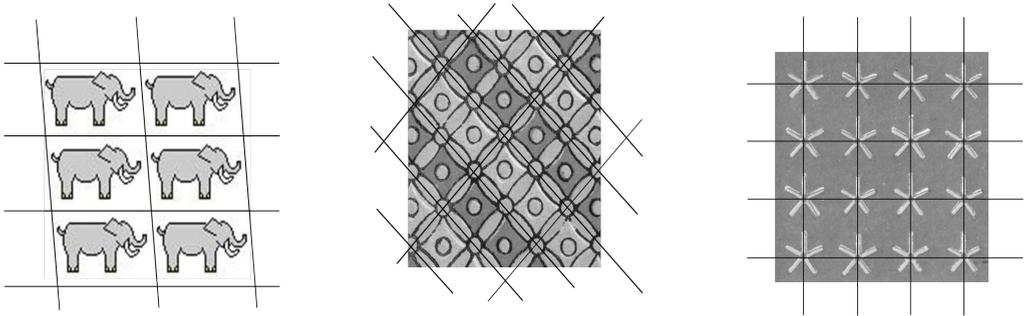


Figura 112: Imágenes regulares de colecciones de textil. La rejilla, en cada caso, se define con la geometría del patrón repetido está marcada.

Características calculadas según el mejor método de la literatura revisada (VCS_{MAD})												GSP
70,93	43,32	51,45	48,58	69,48	58,32	49,07	45,68	53,72	36,88	48,47	45,58	P1
89,18	17,26	74,91	17,76	89,00	83,31	13,89	17,00	44,76	45,93	13,70	17,50	PMM
94,69	99,32	96,47	100,0	95,57	99,23	97,75	99,03	93,11	96,31	94,25	95,34	PM
Características calculadas según nuestra propuesta (VCS_{VAR})												
69.18	3.78	11.40	4.16	37.13	25.00	6.54	16.92	36.79	26.85	6.54	16.92	P1
98.15	4.05	70.34	4.69	97.93	98.27	6.01	6.86	62.84	51.89	6.01	6.86	PMM
62.24	9.59	45.35	7.10	60.63	96.30	45.07	48.23	42.07	33.92	45.07	48.23	PM

Tabla 22: Vectores de simetría de imágenes de la fig. 112 y su correspondiente GSP.

La tabla 22 muestra los valores de las características obtenidos utilizando la técnica clásica, (Agustí et ál., 2011), basada en MAD (*Mean of Absolute Differences*) VCS_{MAD} . También las obtenidas a partir de la técnica basada en el uso de de varianzas sobre el esquema de particiones propuesto y que designamos por VCS_{VAR} . Ambos conjuntos de características se han normalizado teniendo en cuenta la ec. 28, del Capítulo 5. “ Simetría computacional aplicada a las simetrías interiores del patrón repetitivo“.

Los valores en negrita indican las simetrías que deberían ser altas, presentes de acuerdo con el

grupo de simetría al que se sabe que pertenecen. Se puede observar que las nuevas características propuestas reflejan mejor la situación que las clásicas debido al mayor rango de valores existente entre el valor que indica ausencia y el que significa presencia, para cada imagen. Además, las características clásicas fallan en el tercer ejemplo, mientras que las nuevas describen perfectamente las simetrías presentes en la imagen.

El clasificador utilizado será el de **árbol** con características binarias, para permitir la comparación con los trabajos encontrados en la revisión bibliográfica y observar si hay un incremento en los resultados de clasificación que sea debido al uso de las características obtenidas por particiones dispersas frente a las clásicas. Para ello se ha diseñado una experimentación basada en la obtención del valor umbral que determina cuándo se considera presente/ausente una simetría en función del valor de las características. Se estudia de forma exhaustiva el rango de variación del valor umbral, observando el reconocimiento obtenido en cada colección de imágenes disponible. Se definen dos clases de umbrales:

- Los **umbrales individuales** son los valores que en cada colección han obtenido el mejor resultado de clasificación.
- El **mejor umbral** es aquel que obtiene el mejor resultado de clasificación para la colección global. Con este umbral se vuelve a clasificar cada colección para determinar la posible generalización de estos resultados.

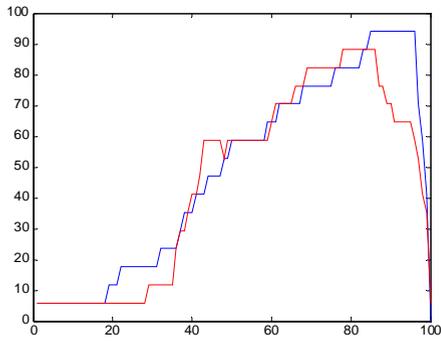
Ya se han evidenciado las limitaciones de la normalización por escalado, así que no se mostrarán resultados que ya se han enunciado antes como de baja precisión para la clasificación.

Conjunto de características	Wallpaper	Wikipedia	Quadibloc	SPSU	Todas
Clásico	88.24	58.82	72,34	67.44	67.43
Propuesto	94.12	70.59	91.49	66.28	74.77

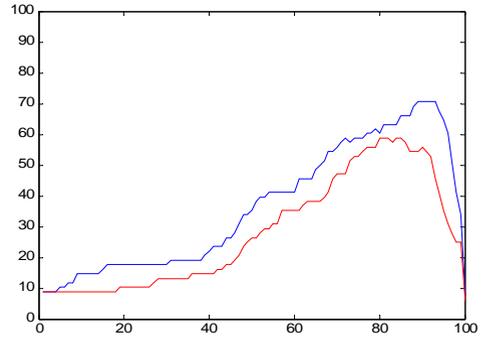
Tabla 23: Resultados de clasificación utilizando normalización por rango dinámico individual.

La tabla 23 muestra el resumen de los valores máximos obtenidos utilizando la **normalización por rango dinámico** para cada conjunto de características. Se puede ver cómo evoluciona la precisión en la clasificación gráficamente en la fig. 113, separando para las distintas colecciones, así como para todas en conjunto. Se muestra en color rojo las características clásicas y en azul las propuestas, para cada una de las colecciones y para el global de ellas. En cada gráfica se representan los resultados de reconocimiento, esto es, la tasa de reconocimiento (en el eje vertical) frente al valor del umbral escogido para binarizar las características (en el horizontal). Las diferentes colecciones se muestran de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda: *Wallpaper* (fig. 113a), *Wikipedia* (113b), *Quadibloc* (113c), *SPSU* (113d) y considerándolas todas juntas (113e). Puede verse que las características propuestas (líneas en azul) están por encima de las rojas y que en función de la irregularidad de la imagen (lo que hemos denominado complejidad de la misma) los resultados de la clasificación son más precisos.

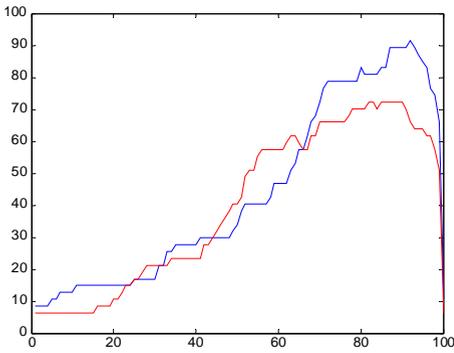
Hemos identificado las **fuentes de error** que hacen bajar la tasa de éxito, hemos constatado que se da porque las perturbaciones han llegado a afectar la definición de **contenido regular** de las imágenes: a menudo se observa que la razón de aspecto de una imagen está fuertemente deteriorada. En estos casos la simetría traslacional se mantiene alta, pero las restantes simetrías decrecen en su visibilidad e incluso desaparecen, como lo que el grupo de simetría original de la imagen cambia.



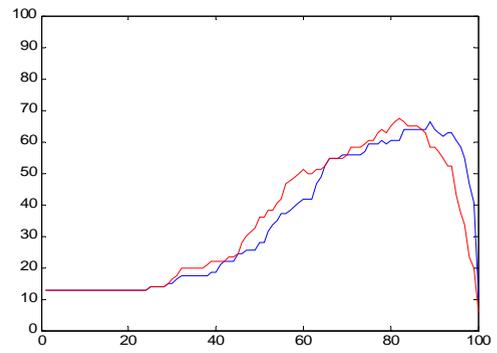
a) Wallpaper



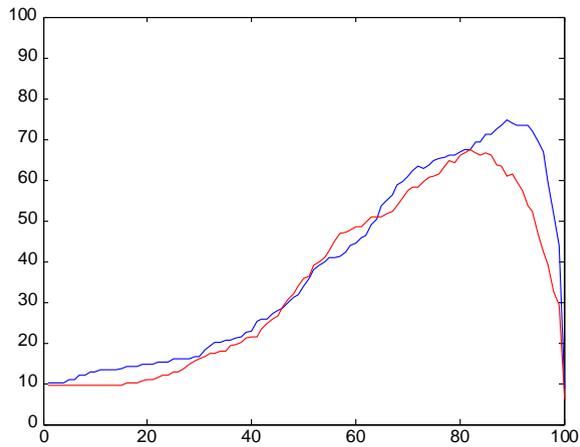
b) Wikipedia



c) Quadibloc

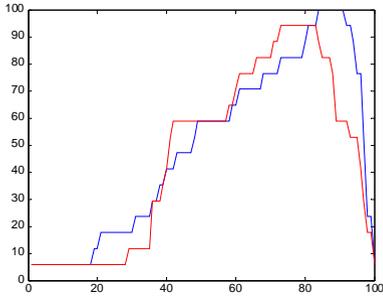


d) SPSU

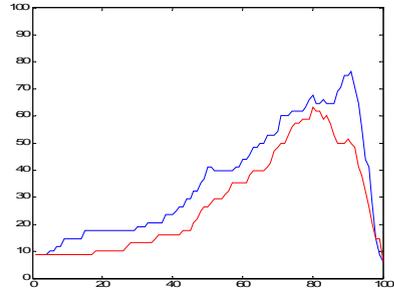


e) Todas

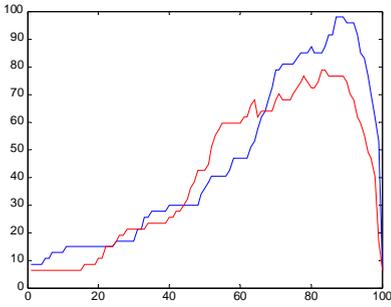
Figura 113: Evolución de la precisión para las distintas colecciones de imágenes en función del umbral y de las características (en rojo las clásicas y en azul las propuestas) normalizadas por rango dinámico.



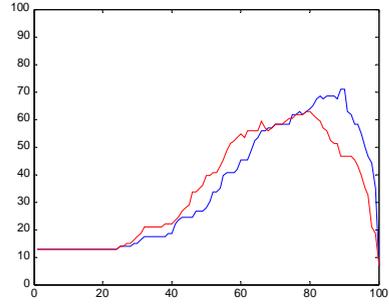
a) Wallpaper



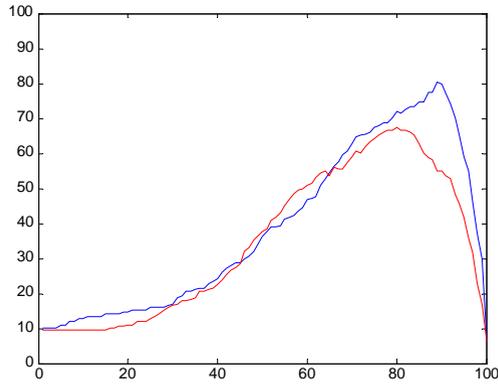
b) Wikipedia



c) Quadibloc



d) SPSU



e) Todas

Figura 114: Evolución de la precisión en función de las características (en rojo las clásicas y en azul las propuestas) y el umbral, utilizando la normalización por regularidad, para las distintas colecciones de imágenes.

En otros casos, la presencia o ausencia de una simetría es debida a pequeños detalles de la imagen, de manera que la diferencia entre el original y el transformado es de unos pocos píxeles. En ese caso, los valores calculados están cerca del nivel de ruido, por lo que no son distinguibles del valor correcto.

Al emplear la **normalización por regularidad**, se obtienen los resultados de la tabla 24 para cada conjunto de características. Como se ha adelantado al introducir esta normalización, tiene un comportamiento no lineal que tiene en cuenta la complejidad de la imagen y el ruido presente en ella. Se puede observar la tendencia de comportamiento de clasificación al aplicar esta normalización por regularidad en la fig. 114.

Conjunto de características	Wallpaper	Wikipedia	Quadibloc	SPSU	Todas
Clásico	94.11	63.23	78.72	62.79	67.43
Propuesto	100.00	76.47	97.87	70.93	80.28

Tabla 24: Resultados de clasificación utilizando la normalización por regularidad.

Lo que nos lleva a concluir que:

- El conjunto de características obtenido con el uso de particiones dispersas (líneas en azul) obtiene una mejora global de más de 15% en la clasificación.
- Puede verse que las características propuestas (líneas en azul) están por encima de las rojas y que en función de la irregularidad de la imagen (lo que hemos denominado complejidad de la misma) los resultados de la clasificación son más precisos.

Con la limitación de un conjunto de imágenes se puede conducir un experimento exhaustivo que determine el mejor umbral a utilizar y que sea generalizable para otros conjuntos de imágenes.

7.3 Evaluación del sistema

Es este apartado abordaremos los **experimentos de clasificación en grupos de simetría**, para ello examinaremos los valores de **reconocimiento** obtenidos. En el contexto de las imágenes regulares existe un conjunto de algoritmos clásicos que hemos revisado. Los resultados que hemos obtenido en la experimentación con esos algoritmos cuantifican la **dificultad que existe** todavía hoy para determinar la solución a este problema y, por tanto, el interés de aportar nuevos elementos a la solución del mismo. Vamos a comparar los resultados globales de nuestras aportaciones con los resultados obtenidos con los métodos actualmente existentes.

En la revisión bibliográfica también se constató (Liu et ál., 2010) los resultados de los trabajos existentes hasta ese momento de identificación de simetrías, lo que da una idea de la **dificultad del problema**. De forma resumida, estos son:

- Un porcentaje global de 63% (sobre un total de 176 imágenes) de éxito en la determinación de una simetría de reflexión, de rotación hasta un 58%.
- Este porcentaje es de un 42% y un 32% (para reflexión y rotación respectivamente), cuando se considera que pueden existir varias en una misma imagen.
- Los autores cifran entre un 26% sus mejores resultados globales (incluyendo falsos positivos) en el global de la colección y de 17,5% cuando se limita a las imágenes reales de la misma.

- No hay resultados acerca de la simetría de reflexión con desplazamiento, ni de la determinación del grupo de simetría.

Veamos los resultados que se obtienen desde dos puntos de vista. En primer lugar los resultados vistos por el sistema como se hace desde el punto de vista de técnicas de VxC del campo del reconocimiento de patrones: los resultados obtenidos del proceso de clasificación como aciertos (*True Positive*) para permitir la comparación con otros métodos previos y lo que se puedan desarrollar en el futuro. En segundo lugar, los métodos desarrollados permiten ir un paso más allá de la clasificación y ser utilizados en aplicaciones, como CBIR, con la capacidad de describir el concepto abstracto de simetría que caracteriza estas imágenes en este contexto.

7.3.1 Resultados vistos desde el punto de vista de un clasificador

Con respecto a los **algoritmos clásicos de clasificación de imágenes regulares**, los resultados de catalogación utilizando las características clásicas son bajos. Las ambigüedades de la enunciación de estos métodos hacen que su implementación algorítmica tenga porcentajes altos de falsos positivos y faltos negativos. Para la colección de *Wallpaper*, el método de Brian Sanderson obtiene un 64,71%, el de Rose y Sttaford un 52,94% y el de Schattschneider alcanza el mejor resultado de todos con un 70,59% de precisión. Para las otras colecciones de imágenes los resultados son más bajos. En la revisión bibliográfica el uso de del algoritmo de Schattschneider en la implementación de (Liu et ál., 2010) obtiene una tasa del 100% de clasificación

Se han utilizado **algoritmos genéricos**, que son clásicos de clasificación automática en el contexto de la VxC, a través del uso de herramientas estadísticas de reconocimiento de patrones como *Weka* (Hall et ál., 2009). Los resultados de precisión de la clasificación obtenidos para cada conjunto de características y cada clasificador se muestra en en la tabla 25, utilizando *Weka* y con validación cruzada de 10 iteraciones. El mejor valor obtenido ha sido para el clasificador de *BayesNet* que, como es sabido en la literatura, se incluye dentro de los métodos bayesianos que suelen ser los más eficientes para clasificar datos.

Clasificadores genéricos	Características clásicas	Características propuestas	Incremento
<i>J48</i>	49,5413	71,1009	21,5596
<i>NAIVE BAYES</i>	55,5046	64,2202	8,7156
<i>BAYES NET</i>	61,9266	72,4771	10,5505
<i>NN</i>	61,9266	63,3028	1,3762
<i>KNN (K=3)</i>	57,3394	61,9266	4,5872
<i>KNN (K=5)</i>	58,2569	63,3028	5,0459
<i>KNN (K=7)</i>	54,5872	62,844	8,2568
<i>PERCEPTRON</i>	60,0917	65,1376	5,0459
Clasificador específico			
Prototipos [H - L)	69,2661 (100 - 54)	79,3578 (100 - 78)	10,0917

Tabla 25: Resultados de clasificación con algoritmos implementados en *Weka*.

Se ha implementado uno de los **clasificadores específicos** visto en el punto 6.2.2 “Clasificador de vecino más próximo“, que ha obtenido el mejor resultado en esta experimentación con *Weka*, véase la última fila de la tabla 25. Se ha escogido este porque puede ser implementado directamente en

Weka y permitirá corroborar los resultados obtenidos con la versión implementada por nosotros mismos. Su especificidad para esta tarea reside en que: es un clasificador por vecino más próximo (NN), pero en el que cada clase está representada por un modelo adaptativo. Para lo que utiliza unos valores *H* y *L*, obtenidos empíricamente, para denotar la presencia y ausencia, respectivamente, de una característica. En lugar de tenerlos fijos a 100 y 0, se ha escogido el valor 100 para marcar cuando el prototipo tiene una determinada característica presente y el 54 para denotar la ausencia en las características clásicas, o el 78 en nuestra propuesta de cálculo de las características basado en el uso de particiones dispersas.

De este estudio, cabe observar que se valida la idea intuitiva de que la complejidad del clasificador y su especificidad para la tarea presente influyen en el resultado final. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que entre los atributos del conjunto de entrenamiento no pueden existir correlaciones, puesto que invalidaría el resultado. Dado que no podemos asegurar esta circunstancia, volveremos sobre el clásico del CBR (*J48 en Weka*) y las variantes del NN que obtienen un incremento mayor que los que usan redes neuronales (*Perceptron*).

Se han implementado todos los **algoritmos propuestos**: el sistema más citado de la bibliografía, el CBR, proponiendo nuestras mejoras y, evidenciando las limitaciones del mismo, construimos nuestra nuevas propuestas en torno a clasificadores NN. Para evaluar la diferencia en función del algoritmo que utiliza el clasificador, para las características clásicas y las propuestas, se estudiará solo bajo las mejores condiciones observadas (la normalización propuesta) y se repetirá de forma exhaustiva en el rango de variación del parámetro de cada algoritmo para determinar la mejor clasificación esperable. Así se puede tomar la decisión de cuál es mejor y cuantificar la mejora. Ya hemos visto el de Prototipos, ahora falta por ver cómo se comportan el CBR y el ANNC. Con los algoritmos propuestos, se han obtenido los resultados que muestran las tablas 26 y 27, por colecciones. Para ambas tablas se ha escogido el mejor valor umbral en el CBR y para el ANNC el mejor modelo para la ausencia de simetría (valor L de los prototipos); esto se ha repetido para cada subcolección por separado y para toda la colección. Cabe recordar que el valor de L proporcionado a ANNC es un valor que el algoritmo ha de ajustar para cada caso, no es inamovible.

	Wallpaper	Wikipedia	Quadibloc	SPSU	Todas
ANNC (valor para L)	100,00 (46)	61,76 (56)	78,72 (54)	73,26 (54)	72,94 (56)
CBR (con umbral)	94,12 (73)	63,24 (80)	78,72 (83)	62,79 (79)	67,43 (80)

Tabla 26: Resultados de clasificación con los algoritmos propuestos y las características calculadas de la forma clásica.

	Wallpaper	Wikipedia	Quadibloc	SPSU	Todas
ANNC (valor para L)	100,00 (66)	77,94 (82)	95,74 (75)	73,26 (51)	80,74 (78)
CBR (con umbral)	100,00 (84)	76,47 (91)	97,87 (87)	70,93 (89)	80,28 (89)

Tabla 27: Resultados de clasificación con los algoritmos propuestos y el método de cálculo de características propuesto.

La primera de las colecciones, *Wallpaper*, es la colección más utilizada en los trabajos anteriores de la literatura revisada. En este subconjunto tanto CBR como ANNC han obtenido un 100% de éxito.

Que nuestra implementación del algoritmo CBR haya alcanzado los mismos resultados que los publicados por (Liu et ál., 2004a), significa que puede obtener resultados similares a la implementación original. En el caso de *Wikipedia*, que incluye imágenes tomadas del mundo real en las que hay ruido e incluso rozan el límite de la definición de imagen regular, hay un descenso en la precisión de la clasificación. Resultados muy bueno se obtienen en la colección *Quadibloc* que es de complejidad intermedia. Los peores resultado se obtienen con las imágenes más complejas visualmente, la colección SPSU. Estos bajos valores son debidos a la existencia de ruido y la imprecisión en los detalles de la manufactura de las piezas que se muestra en las imágenes. También se observan artefactos debidos al bajo número de repeticiones de un buen número de las imágenes, así como a cambios de iluminación. Estos resultados sugieren la necesidad de un preproceso para estos casos detectados que hemos obviado por simplicidad en las comparaciones.

Como conclusiones de este experimento se puede decir que:

1. El mejor de los clasificadores es el de vecindad (ANNC).
2. Con el conjunto de características propuestos, dada su mayor expresividad, los resultados entre clasificadores se asemejan más.
3. El método propuesto de cálculo de las características obtiene mejores resultados independientemente del clasificador. Mejora tanto el valor de clasificación correcta, como aumenta el valor utilizado para determinar la ausencia de una característica, con lo que será más robusto en imágenes con ruido.

7.3.2 Resultados desde el punto de vista de CBIR

Teniendo en cuenta que el algoritmo CBR solo obtiene como respuesta el grupo al que pertenece la imagen, trabajar con clasificadores basados en distancias o vecindad (NN) ofrece ventajas en tanto que se pueden utilizar argumentos, sin alterar el algoritmo original, para ajustar la respuesta del clasificador. Estos son : el grado de proximidad y el de tolerancia.

Se define el **grado de proximidad** al prototipo P_i escogido como la distancia $d_i = \text{dist}(VCS, P_i)$. Esta descripción (P_i, d_i) , que puede ser calculada también para el conjunto completo de prototipos, es particularmente interesante en los casos de imágenes complejas, en las que varios factores (defectos por su realización manual, ruido, imprecisión en pequeños detalles, etc.) presentan ambigüedad en la determinación del grupo de simetría al que pertenece una imagen. Ya que estamos utilizando clasificadores por distancia, podemos mejorar los resultados obtenidos en el proceso de clasificación porque ahora tenemos información de la distancia al resto de los grupos. Ahora es posible ofrecer un descriptor semántico de imágenes que pueda incluir la ambigüedad al explorar las imágenes en el rango escogido de resultados. Al considerar la lista entera, ordenada, de distancias a cada GSP, se puede indicar este valor como el de confianza en la clasificación; a lo que el sistema responderá listando las imágenes cuya distancia sea menor que el valor indicado sin limitar el número de estos grupos a uno.

Se define el **grado de tolerancia** entre los resultados de la clasificación, como el ordinal del conjunto de resultados que se devolverá, independientemente del grado de proximidad entre ellos. Algunas imágenes son difíciles de etiquetar en un solo grupo hasta para los expertos en la materia. Esto es, se obtienen valores de distancia considerablemente altos; están cerca de las fronteras (están en el mismo rango o a la distancia) para K diferentes grupos. Representa la ambigüedad en la determinación de las simetrías. Esta idea se muestra en la tabla 28, donde se recoge el resultado de considerar el primer y segundo de los resultados (ANNC2), e incluso hasta el tercero de los

resultados (ANNC3), frente al del algoritmo CBR. En este sentido, consideramos que el sistema obtiene un resultado correcto si el grupo “real” de la imagen X , pertenece a la lista ordenada de K valores, siendo K el número de resultados que se consideran. Una comparación cualitativa de la evolución de los resultados, cuando se consideran rangos, revela el incremento de porcentaje conseguido al incorporar la noción de ambigüedad en los resultados.

Nombre de la colección	Precisión en CBR	Precisión en ANNC2	Precisión en ANNC3
Wallpaper	100	100	100
Wikipedia	76,47	83,13	85,02
Quadibloc	97,87	100	100
SPSU	70,93	76,47	82,35
Global	80,28	86,69	89,90

Tabla 28: Resultados de clasificación experimental de ANNC, con valores de rango 2 y 3.

Hay que considerar que solo uno de los valores figura como correcto en el sistema que hemos creado. Por lo que, consideramos como resultado correcto uno que incluya entre los K valores entregados, al que etiqueta la imagen en la colección. Teniendo en cuenta los dos primeros o los tres, resultados de clasificación, cuando las distancias entre ellos son muy pequeñas, los porcentajes de éxito son considerablemente mejores. Lo que demuestra que muchos errores de clasificación son debidos a los factores mencionados.

No se observa un incremento notable en los resultados al considerar un número mayor de grupos en los que una imagen pueda corresponder. Esto es debido a que, por definición de los grupos de simetría, existen solapes entre muchas clases dos a dos y unos pocos entre tres clases. No hemos considerado un valor de rango de cuatro, el cuarto resultado podría ser un error y obligaría a forzar a elegir un umbral para determinar su corrección y queremos que no exista ninguno en nuestra solución.

7.4 Discusión

A lo largo de presente capítulo se ha podido ver la experimentación realizada en diferentes frentes. Se ha creado una colección de imágenes de ordinal mayor que las vistas en la literatura de este contexto y de fuentes que permiten su redistribución. Se ha etiquetado para permitir disponer de una base de verdad con la que hacer comparaciones.

Se ha evaluado el modelo computacional propuesto para la clasificación de imágenes 2D de contenido regular en grupos de simetría como un bloque cerrado que obtiene como resultado el grupo de simetría al que pertenece una imagen dada. Para conseguirlo, se han comparado los resultados obtenidos con nuestras propuestas frente a las aproximaciones encontradas en la literatura, tanto en la metodología de cómputo de las características, como en la normalización de las mismas y la selección de umbrales, así como en el uso de diferentes clasificadores. Los resultados experimentales han mostrado los límites de los métodos existentes hasta el momento (p. ej. CBR) cuando las condiciones no están bien establecidas: existen ambigüedades, falta de información o ruido. Los resultados experimentales muestran que el ANNC mejora los resultados obtenidos por otros métodos, incluso en al caso de imágenes complejas. El uso de la metodología de cálculo de las simetrías propuesto basado en el uso de particiones y la normalización por regularidad mejoran la

capacidad los resultados de cualquier clasificador.

Además, se ha constatado que en tareas de recuperación, CBIR, se pueden extender los resultados que devuelve un clasificador de la familia NN, puesto que puede generar una lista de cercanía para cada clase, que puede verse como una medida de la confianza en que la imagen sea clasificada en cada una de las posibles clase. Esta puede ser almacenada ordenada para, por ejemplo, detectar situaciones en las que una imagen está igual de cerca a dos o más grupos. Esto se aprovecha para construir un rango en la lista de resultados que consigue aumentar la tasa de aciertos. Esta mejora significa que existe un largo número de clasificaciones ambiguas.

Los experimentos también han permitido observar las fuentes de error existentes: imágenes cuyo contenido no se ajusta a la definición de regular y cómo influyen el tipo de defectos que se pueden observar en las imágenes reales, como distorsiones, artefactos debidos a cambios de iluminación, ruido o detalles imprecisos.

La evaluación del conjunto de características propuesto se ha llevado a cabo a través de diferentes experimentos de clasificación en grupos de simetría. Los resultados obtenidos muestran la mayor capacidad discriminativa de las características propuestas con un incremento de mejora de entre el 8 % al 13%. La bondad del método está relacionada con su tratamiento uniforme de las diferentes simetrías. La desventaja es el coste computacional, debido a la necesidad de determinar sus rangos de forma paramétrica, que se realiza en cada imagen de forma automática con un algoritmo de minimización.

Capítulo 8.

Conclusiones, líneas abiertas y trabajos futuros

En la presente tesis se proponen métodos algorítmicos para su uso en aplicaciones de codiseño, control del calidad, almacenamiento, reconstrucción o recuperación de imágenes por contenido aplicado a campos donde las imágenes tienen naturaleza repetitiva. Para ello se ha propuesto un modelo formal de las imágenes de contenido repetitivo definido sobre el dominio de la imagen en niveles de gris, basado en la teoría de Grupos de Simetría. Sobre este modelo, ha sido propuesto, justificado y evaluado un clasificador no paramétrico y no supervisado. El sistema es completo puesto que permite identificar todas las situaciones que definen los posibles grupos de simetría.

La demostración se ha realizado de forma experimental, frente a los clasificadores clásicos y a las propuestas existentes en la literatura. También se ha considerado la robustez frente al ruido introducido en las mediciones. Se ha construido una colección de imágenes para la evaluación de los resultados y la creación de un marco de comparación de funcionamiento entre diferentes algoritmos. Estas experiencias también han servido para identificar las fuentes de error que aparecen típicamente en las imágenes de este contexto.

Para conseguir esta tarea podemos establecer las siguientes conclusiones:

- Se ha analizado el estado del arte sobre las técnicas de análisis de imágenes para la determinación de la periodicidad o repetitividad en una imagen e identificación del patrón que se repite.
- Se ha estudiado la formulación matemática que permite caracterizar los tipos de simetría presentes en imágenes repetitivas, identificando las simetrías que pueden existir en imágenes sometidas a deformaciones rígidas y se han caracterizado las agrupaciones en que estas aparecen en las imágenes que matemáticamente se conocen como mosaicos regulares.
- Se ha procedido a revisar el estado del arte al respecto de la determinación computacional de las simetrías presentes. Evidenciadas las limitaciones de la metodología existente se ha propuesto una nueva reformulación con mayor capacidad de descripción que le confiere mayor robustez. Las experiencias corroboran que mejora los resultados al aplicarse tanto a imágenes sintéticas como a reales.
- Se ha estudiado la detección de grupos de simetría implementados con clasificadores clásicos y sus ambigüedades. Se ha estudiado también las actuales propuestas para la detección de grupos de simetría y su clasificación. Se ha creado un marco donde realizar comparativas entre clasificadores basadas en su capacidad de describir un concepto de alto nivel semántico: los grupos de simetría en el plano. Se ha comprobado que los clasificadores propuestos mejoran los resultados existentes.
- El uso del error de ajuste del retículo permite proponer un método de evaluación aplicable a las técnicas desarrolladas que permita establecer la bondad de los algoritmos.
- Se ha desarrollado una metodología para obtener las características de simetría en la imagen de una forma unificada, basada en la estadística, lo que le confiere una mayor robustez que la que presentan las estrategias existentes. Esto está avalado por las experiencias realizadas.

8.1 Resumen de las aportaciones y contribuciones de la tesis

Los objetivos propuestos se han ido cubriendo, materializándose en las aportaciones que se proponen y evalúan en esta tesis:

- **Evaluación de propuestas existentes con el mismo objetivo.** A partir de la revisión bibliográfica, (Agustí et ál., 2011), se ha creado una colección de imágenes etiquetada para

comparar las diferentes implementaciones. Esta colección se ha creado con imágenes que puedan ser redistribuidas y, así, que el método de evaluación y el conjunto de datos pueda ser utilizado en otros trabajos para comparar sobre una misma base

•**Obtención de un método de análisis de periodicidad novedoso.** En (Agustí et ál., 2008) se ha descrito la importancia de las técnicas de análisis de simetría de fase de Kovesi. Es novedoso, en tanto que aquí se utilizarán en un contexto diferente de su definición original y que en nuestro dominio de aplicación las metodologías existentes tampoco han optado por implementar. Es un estudio sobre el uso de los operadores de Kovesi comparado con la correlación, para determinar la simetría traslacional (simetría global existente en las imágenes objeto de estudio) y que tiene unas restricciones de partida menos críticas que la correlación.

•**Geometría computacional usada en análisis.** Para completar la determinación de lo que ocurre en la imagen en (Agustí et ál., 2008) se han empleado técnicas de análisis local, sobre estas se realizan hipótesis de sus interrelaciones a base de razonamientos sobre la topología (término más global) yendo de más próximos a más alejados y aplicando las restricciones propias de una imagen *wallpaper* para obtener el retículo,

•**Detección y catalogación de simetrías.** Revisar el estado del arte llevará a determinar el método existente más eficaz, sobre el cual se puede elaborar una estadística en nuestro campo de actuación, estudiar los factores que limitan sus resultados, proponer mejoras y ofrecer nuevas propuestas.

•Sobre la detección de grupos de simetría, (Agustí et ál., 2011), implementados **con clasificadores heurísticos vs KNN y metaclases.**

•Acerca de detección de grupos de simetría, (Agustí et ál., 2011b), implementados **con clasificadores clásicos vs aprendizaje.**

•Sobre la **nueva metodología estadística**, (Agustí et ál., 2011c), que ha conducido a enunciar una nueva formulación para obtener las características de simetría en la imagen.

•**Nuevas características para describir la simetría.** Mejorar el método existente parte de definir una nueva propuesta (Agustí et ál., 2013), para unificar el cálculo de las simetrías y mejorar su expresividad. Tanto mayor sea la capacidad de descripción de la simetría existente por parte de las características más sencillo será el trabajo de los clasificadores.

8.2 Líneas abiertas

Algunas cuestiones ha sido posible abordarlas, aunque no se ha podido alcanzar una situación evaluable de su alcance o son cuestiones de largo recorrido.

Como meta a largo plazo, hay que seguir trabajando sobre la colección de imágenes para las experiencias. Sería interesante dar publicidad a la colección recopilada, que tuviera un tamaño mayor, así como el mismo número de representantes de todos los grupos. Esto permitiría proponer la comparativa con métodos de aprendizaje y justificar alguna de las hipótesis actuales. El problema principal es que deben estar correctamente etiquetadas y esa es una tarea muy costosa. En un futuro hay que proponer técnicas de síntesis de imagen que utilicen una celda elemental definida por el usuario y analizada para asegurar que se genera el grupo de simetría esperado. Esta sería una aplicación interesante también para el campo de los diseñadores, así que el interfaz de la misma también debe ser estudiado.

A más corto plazo, a la luz de los resultados y vistas las oportunidades que ofrecen los desarrollos y las propuestas hechas a lo largo de esta tesis, parece interesante profundizar en algunos apartados que han mostrado tener un recorrido que no se completado en su totalidad y que abren nuevas líneas de trabajo.

8.2.1 Composición de simetrías

Estudiamos volver sobre la definición teórica de que todas las isometrías se pueden descomponer en simetrías de reflexión (Jablan, 1995) y el uso de SDF para detectar estas. Si bien, el resultado de la aplicación de este análisis solo obtiene la existencia de una única clase de simetrías locales (las reflexiones bilaterales, las que se dan entorno a un eje), todas las demás son explicables como combinación de esta (esto es posible verlo de forma gráfica en la fig. 115. Es posible establecer la existencia de las traslaciones indicadas a partir de la comprobación de todas las posibles combinaciones de simetrías de reflexión halladas.

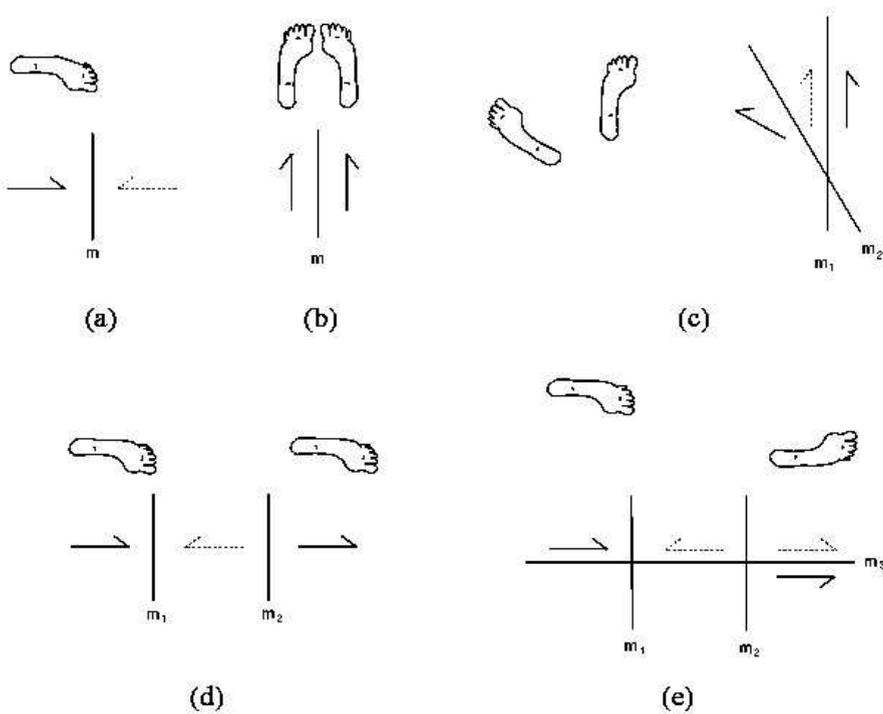


Figura 115 Las combinaciones de simetrías de reflexión dan lugar a todas las simetrías: a) identidad, b) reflexión especular, c) rotación, d) traslación y e) reflexión con desplazamiento.

Las isometrías pueden aplicarse consecutivamente y dicha operación se denomina **composición de isometrías**:

- La composición de dos traslaciones de vectores \vec{v} y \vec{w} es una traslación cuyo vector es la suma de los dos vectores $\vec{v} + \vec{w}$.

- La composición de dos giros con un mismo centro O es otro giro del mismo centro O y cuyo ángulo es la suma de los ángulos. Al componer un giro de 180° por sí mismo, se obtiene un giro de una vuelta completa y por ello se dice que es un giro de orden 2. Análogamente, el giro de ángulo 60° 120° es un giro de orden 3, el de 90° un giro de orden 4 y el de un giro de orden 6.
- La composición de dos giros con centros distintos es una traslación si la suma de los ángulos es múltiplo de 360° y, en otro caso, un giro cuyo ángulo es la suma de los ángulos.
- La composición de dos reflexiones de ejes paralelos es una traslación cuyo vector es perpendicular a los ejes y tiene doble longitud que la distancia entre ellos. En el caso particular de que ambas reflexiones coincidan, resulta una traslación de longitud cero, es decir, la composición de una reflexión por sí misma es la isometría identidad.
- La composición de reflexiones cuyos ejes se cortan en un punto es un giro de centro dicho punto y ángulo doble que el formado por los ejes.
- Un deslizamiento (en inglés *glide*) es la composición de una reflexión y una traslación paralelas.

Cualquier isometría o bien es una reflexión o bien puede expresarse como composición de 2 o 3 reflexiones, es la **paridad de las isometrías**. En efecto:

- Una traslación es composición de dos reflexiones de ejes perpendiculares al vector de la traslación, con los ejes situados a una distancia igual a la mitad de la longitud de la traslación.
- Un giro puede expresarse como composición de dos reflexiones cuyos ejes pasen por el centro de giro, formando un ángulo igual a la mitad del ángulo de giro.
- Un deslizamiento es composición de una reflexión y una traslación; al expresar la traslación como composición de dos reflexiones, se obtiene el deslizamiento como composición de tres reflexiones.

8.2.2 Extensión del uso de las particiones al cálculo del enrejado

El planteamiento del EAR, nuestra medida continua de la simetría, se le podría extender para detectar el enrejado utilizando particiones dispersas. Si no se conoce la geometría de la rejilla, esta se puede obtener mediante un proceso de búsqueda: p. ej. encontrar una partición de la imagen (una geometría del enrejado) que maximice el valor VaMeN.

Como se ha expuesto, la geometría del enrejado es invariante a traslaciones, por lo que podemos escoger $(x_0, y_0) = (0,0)$ como origen de coordenadas del enrejado. Entonces se realiza una búsqueda del máximo valor obtenible barriendo el rango de variación de los valores de los ángulos del enrejado (α_1, α_2) y la longitud de los lados $(\|L_1\|, \|L_2\|)$ definiendo un mapa de valores de VaMeN. El máximo de este mapa representa la simetría traslacional (ST) de la imagen. Obsérvese que este valor siempre será alto puesto que la repetitividad es una propiedad definitoria de este tipo de imágenes. Un valor bajo de ST indicará que el contenido de la imagen no es regular o que está excesivamente distorsionada. Los cuatro parámetros $(\|L_1\|, \|L_2\|, \alpha_1, \alpha_2)$ de la posición en la que se da el valor máximo describen la geometría de la rejilla para la imagen. Este proceso es costoso por su naturaleza de fuerza bruta, pero puede ser acelerado utilizando técnicas de optimización.

Otros aspectos a desarrollar:

- El trabajo con incrementos discretos en lugar de ángulos y longitudes que son magnitudes discretas pero están relacionados, véase fig. 116.

- Coste temporal de la aproximación de fuerza bruta.
- Reducción del coste mediante una función de búsqueda: *simplex*.

8.3 Trabajos futuros

Se plantea como necesario profundizar en acciones encaminadas a robustecer el proceso, por la complejidad inherente a las imágenes y, especialmente, a las que se obtienen de entornos no controlados, como las de mundo real. Así, se propone:

- Seguir desarrollando la parte estadística y evaluar sus resultados frente a los trabajos de (Han et ál., 2008) y de (Park et ál., 2009) para imágenes casi regulares. Esto es, que contienen patrones deformados por deformaciones elásticas o que no existe un patrón que se repite en la totalidad de la imagen.
- Volver sobre las técnicas de ubicación del PF, para extraer uno significativo para el usuario y para otras aplicaciones.. En la línea del párrafo anterior, ya no vale escoger cualquier paralelogramo de la imagen, hay que situar la rejilla en un lugar significativo, en el sentido de que permita el estudio de las simetrías interiores para determinar el grupo de simetría. Estas deben poder obtenerse siguiendo con el análisis del proceso de la transformada de simetría de fase comentada.
- Abordar la redundancia de información que suponen los diferentes canales de una imagen en color para ser más robustos y también abordar simetrías que dan lugar a ambigüedades en la conversión a niveles de gris. Por ejemplo utilizar las componentes básicas RGB pero también otros espacios son posibles.
- Aplicar las técnicas de análisis de imagen a las aplicaciones de detección de áreas y puntos de interés para lo que se aplican actualmente operadores locales como SIFT o SURF. En este sentido tenemos diferentes opciones en función del nivel de los mismos: utilizando los máximos del análisis de fase o de la componente de rotación, hasta llegar a la identificación de simetrías concretas (con una cierta presencia) en la imagen

También es posible aplicar el análisis de fase como operador para segmentación robusta ante situaciones de fondos no uniformes (fig. 116) o cambios de iluminación (fig. 117).



Figura 116: Segmentación robusta frente a fondos texturizados.



Figura 117: Segmentación robusta frente a cambios de iluminación.

Capítulo 8. Conclusiones, líneas abiertas y trabajos futuros

Bibliografía y referencias

- Aarts, J.M. (2008). Plane and Solid Geometry. Springer Science+Business Media.LL.
- Agustí, M. (1999). Herramientas para Búsqueda de Imágenes basada en el Contenido. Trabajo de doctorado.
- Agustí, M. y Valiente, J. M. (2001). Bases de datos para Multimedia: Recuperación por Contenido. Actas del *International workshop on multimedia applications* (INTERMEDIA'2001): Universidad Politécnica de Valencia, Vol. CD, TEC-01-28. ISBN: 849705049.
- Agustí, M. y Valiente, J. M. (2003). Feasibility of using wavelet based pyramidal : Analysis for visual content image description; 3rd IASTED International Conference on Visualization, Imaging, and Image Processing (VIIP 2003), vol. II, p. 569-574; 2003; 0889863822.
- Agustí, M., Valiente, J. M. y Carretero, M. C. (2003b). Recuperación por contenido en bases de datos de imágenes basada en wavelets: Aplicación al diseño del textil; Abstracts and cd-rom proceedings of international conference on tools and methods evolution in engineering design (XIII ADM - XV INGEGRAF), pp. 1-10.
- Agustí, M. y Valiente, J. M. y Rodas, Á. (2008). Lattice extraction based on symmetry analysis. 3rd. International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP'08), vol. I, pp. 396-402; 2008; 978-989-8111-21-0.
- Agustí, M., Rodas, Á. y Valiente, J. M. (2011). Computational Symmetry via Prototypes Distances for Symmetry Groups Classification. 6th International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP 2011). Proceedings of the International Conference on Computer Vision Theory and Applications. de. INSTICC Press / SciTePress, pp. 85.93. ISBN: 978-989-8425-47-8.
- Agustí, M., Rodas, Á. y Valiente, J. M. (2011b). Classification of Repetitive Patterns using Symmetry Group Prototypes. 5th Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis (IbPRIA 2011). Pattern Recognition and Image Analysis, Lecture Notes in Computer Science, vol. 6669, pp. 84-91. ISBN 978-3-642-21256-7. Springer Berlin Heidelberg. [DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-21257-4_11].
- Agustí, M., Rodas, Á. y Valiente, J. M. (2011c). Symmetry Computation in Repetitive Images Using Minimum-Variance Partitions. 14th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP 2011). Computer Analysis of Images and Patterns, Lecture Notes in Computer Scienc, vol. 6855, pp. 204-211. ISBN 978-3-642-23677-8. Springer Berlin Heidelberg. [DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-23678-5_23].
- Agustí, M., Rodas, Á. y Valiente, J. M. (2013). Computational Framework for Symmetry Classification of Repetitive Patterns. Capítulo del libro "Computer Vision, Imaging and Computer Graphics. Theory and Applications" vol. 274, pp. 257-270. ISBN 978-3-642-32349-2. Communications in Computer and Information Science ISSN 1865-0929. Springer Berlin Heidelberg. [DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-32350-8_16].
- Albert Gil, F. E. (2008). Análisis de motivos decorativos de tejidos y revestimientos cerámicos en el entorno de la visión artificial. Aplicación a la reconstrucción de motivos históricos y al diseño . Tesis doctoral. Departamento de Expresión Gráfica en la Ingeniería. Universitat Politècnica de València.
- Albert Gil, F. E.; Gomis Martí, J. M.; Blasco Ivars, J.; Valiente González, J. M. y Aleixos Borrás, M. N. (2015). A new method to analyze mosaics based on Symmetry Group theory applied to Islamic Geometric Patterns. Computer Vision and Image Understanding, vol. 130, pp. 54-70, ISSN 1077-

3142, [DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cviu.2014.09.002>].

Aw, Y. K., Owens, R. y Ross, J. (1998)., An Analysis of local energy and phase congruency models in visual feature detection, *J. Austral. Math. Soc.*

Ardizzone, E (1996). JACOB: Just a Content-Based Query System for Video Databases . Proc. ICASSP-96

Ballard, D. H. (1981). Generalizing the Hough Transform to detect arbitrary shapes. *Pattern Recognitio*. Vol. 13, 2, pp 111-122.

Alsina, C.; Trillas, E. (1992), *Lecciones De Álgebra Y Geometría*, Gustavo Gili, Barcelona, ISBN 84-252-1187-5.

Baez, J. "Honors Abstract Algebra.", Course Notes,. Math 55a, Harvard University. [en línea]. [fecha de consulta: 3 de enero de 2012]. Disponible en <<http://www.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/55a/09/html/home/course/course.pdf>>.

Barnard, K. y Shirahatti, N. V. (2003). A method for comparing content based image retrieval methods, *Actas de SPIE - the International Society for Optical Engineering*. pp. 1-8. ISBN 9780819448187.

Bolles, R. C. (1979). Symmetry analysis of two-dimensional patterns for computer vision. 6th International Joint Conference on Artificial Intelligence.

Brahnam, S., Jain, L. C., Loris Nanni, L. y Lumini, A. (2014). Local Binary Patterns: New Variants and Applications. Springer. Studies in Computational Intelligence. .ISBN 978-3-642-39289-4.

Canada, B. A, Thomas, G. K., Cheng, K C. y Wang, J. Z.. 2011. SHIRAZ: an automated histology image annotation system for zebrafish phenomics. *Multimedia Tools Applications, Special Issue on Hot Research Topics in Multimedia*, vol. 51, no. 2, pp. 401-440, [DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11042-010-0638-4>].

Chai, W. (2001). Melody Retrieval On The Web. Master thesis. MIT. [en línea, fecha de consulta: 3 de enero de 2012]. Disponible en <<http://web.media.mit.edu/~chaiwei/papers/msthesis.pdf>>.

Conway, J. H., Burgiel, H. y Goodman-Strauss, C. (2008). The symmetries of things. Ed. Wellesley : A K Peters. ISBN 9781568812205 ;ISBN 1568812205.

Datkin, S. C. y Watt, R. J. (1994). Detection of bilateral symmetry using spatial filters, *Spat Vis* ; 8(4):393-413.

Derrode, S.y Faouzi Ghorbel, F.. (2003). Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier-Mellin representation. *Signal Processing*, Elsevier.

Di Gesù, V. y Valenti, C. (1995). The Discrete Symmetry Transform in Computer Vision. Informe interno, DMA 011 95.

Di Gesù, V. y Valenti, C. (1996). Symmetry operators in computer vision Original Research Article. *Vistas in Astronocommy*, Volume 40, Issue 4, 1996, Pages 461-468. <[symmetryOperatorsInComputerVision.pdf](#)>

Di Gesù V. y Valenti C. (2002). "Symmetry operators in computer vision", *Recent Research Developments in Pattern Recognition 3*, Transworld Research Network, 305-320.

Di Gesu, V. y Valenti, C. (2003). Regions of interest detectors based on symmetry. *Advances in Pattern Recognition ICAPR2003*, pp. 37.

Djibril, M. O. y Thami, R. O. H.. 2008. *Islamic geometrical patterns indexing and classification using discrete symmetry groups*. *J. Comput. Cult. Herit.* 1, 2, Article 10, 14 pp., [DOI: <http://dx.doi.org/10.1145/1434763.1434767>, <http://doi.acm.org/10.1145/1434763.1434767>]

Eakins, J. P. y Graham, M. E (1999). *Content-based Image Retrieval*. A report to the JISC Technology Applications Programme, informe interno del Institute for Image Data Research, University of Northumbria. [<http://www.unn.ac.uk/iidr/research/cbir/report.html>].

Edwards, S. (2009). *Tiling plane & fancy* [fecha de consulta: 3 de diciembre de 2011]. Disponible en <http://www2.spsu.edu/math/tile/index.htm>.

Encinas, S. 2003. Grupos cristalográficos planos. Grupos ornamentales. [fecha de consulta: 25 de mayo de 2005]. Disponible en

<http://www.maf.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/GrupCristal/GrupCristal.html>.

Fayyad, U., Grinstein, G. y Wierse, A. (2001). *Information Visualization in Data Mining and Knowledge Discovery* (The Morgan Kaufmann Series in Data Management Systems. Morgan Kaufmann; 1st edition. ISBN-10: 1558606890. ISBN-13: 978-1558606890

Gens, R. (2014). *Deep Symmetry Networks*,. *Advances in Neural Information Processing Systems* 27, Curran Associates.

Gilsanz Mayor, M^a Angeles (2011) *Simetrías en la ornamentación arquitectónica. El esgrafiado segoviano*. Tesis(Doctoral), E.U. de Arquitectura Técnica (UPM).

Graps, A. (1995). *An Introduction to Wavelets*, IEEE Computational Science and Engineering, vol. 2, n. 2, IEEE Computer Society.

Grunbäum, B. and Shepard, G. (1987). *Tilings And Patterns*. W.H. Freeman and Company, New York.

Hagit Hel-Or, *Computer Vision Seminar – Symmetry*, [en línea]. [fecha de consulta: 3 de diciembre de 2011]. Disponible en

<http://cs.haifa.ac.il/hagit/courses/seminars/symmetry/symmetry.html>.

Hall, M., Frank, E., Holmes, G., Pfahringer, B., Reutemann, P. y Witten, I. H. (2009); *The WEKA Data Mining Software: An Update*; SIGKDD Explorations, Volume 11, Issue 1.

Han, J., Mckenna, S. J. y Wang, R. (2008). *Regular Texture Analysis as Statistical Model Selection*. *Proceeding ECCV '08 Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision: Part IV*, , pp 242 – 255. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg . ISBN: 978-3-540-88692-1, [DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-88693-8_18].

Harper, D.J. (1999). *Report on CIR99, the 2nd UK Conference on "The Challenge of Image Retrieval"*. ;SIGIR Forum, pp.20-22

He, J., Li, M., Zhang, H.J., Tong, H. y Zhang, C. (2004). *Automatic peak number detection in image symmetry analysis*. 5th Pacific Rim conference on *Advances in Multimedia Information Processing – vol. part III*, pp.111—118., ISBN: 3-540-23985-5, 978-3-540-23985-7. DOI = 10.1007/978-3-540-30543-9_15. Springer-Verlag.

Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. (1999). *Geometry and the Imagination*. AMS Chelsea Publishing, vol. 87. AMS Chelsea Pub. ISBN: 0821819984, 9780821819982.

Ho L., W. Zhang, A. M. y Kleeman L. (2005). *Fast global reflectional symmetry detection for robotic grasping and visual tracking*. *Australasian Conference on Robotics and Automation*.

- Disponible en línea <<http://www.bibbase.org/cgi-gin/pyBibBase/pyBibBase.cgibib=www.bibbase.org/mendeley/1bb0454c51&groupby=year&simplegroups=1&charset=utf-8>>.
- Horne, Clare E. (2000). *Geometric symmetry in patterns and tilings*. Textile Institute (Manchester, England). ISBN 1 85573 492 3.
- Jablan S. V. (1995). *Theory of Symmetry and Ornament*, Mathematical Institute, Belgrade, Yugoslavia, 86-80593-17-6.
- Jacobs, C. E, Finkelstein, A., Salesin, D. H. (1995). *Fast Multiresolution Image Querying*. *Proceedings of SIGGRAPH95, ACM SIGGRAPH*.
- Jain, A. K., Murty, M. N. y Flynn, P. J. (1999). *Data Clustering: A Review*. *ACM Computing Surveys*, Vol. 31, No. 3.
- Jain, A. K., Topchy, A., Law M. H. C. y Buhman J. M. (2004). *Landscape of Clustering Algorithms*, *IAPR International Conference on Pattern Recognition*.
- Jaromczyk, J.W.; Toussaint, G.T. (1992). Relative neighborhood graphs and their relatives. *Proceedings of the IEEE* 80 (9): 1502–151. DOI:10.1109/5.163414.
- Johnson, M. y Rodriguez, N. (2003). *Wallpaper: The Mathematics of Art*. SUMSRI Journal. 2003. The Journal of the Summer Undergraduate Mathematical Science Research Institute. <<http://www.units.muohio.edu/sumsri/sumj/2003/wallpaper.pdf>>
- Joyce, D. (2007). *Wallpaper groups (plane symmetry groups)*. [en línea]. [fecha de consulta: 3 de diciembre de 2011]. Disponible en <<http://www.clarku.edu/~djoyce/>>.
- Kadyrov, A, y Petrou, M., 2001. *The Trace transform and its applications*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI*, Vol 23, pp 811-828
- Kaspar, A., Neubert, B, Lischinski, D., Pauly, M. y Kopf, J. (2015). Self Tuning Texture Optimization. *EUROGRAPHICS 2015 / O. Sorkine-Hornung and M. Wimmer*, vol. 34-2, pp- 2-11.
- Katajainen, J y Nevalainen, O. (1986). Computing relative neighbourhood graphs in the plane. *Pattern Recognition*, vol. 19-3, pp. 221—228. Disponible en <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031320386900129>>, junio 2012, [DOI: [http://dx.doi.org/DOI 10.1016/0031-3203\(86\)90012-9](http://dx.doi.org/DOI%2010.1016/0031-3203(86)90012-9)].
- Keim, D. A. (2002). *Information Visualization and Visual Data Mining*. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*, vol. 7, nº. 1.
- Kononenko, I y Bratko, I. (1991) *Information-Based Evaluation Criterion for Classifier's Performance..* *Machine Learning*, vol. 6, nº. 1, pp. 67-80.
- Kootstra, G., Nederveen, A., de Boer, B. (2008). *Paying attention to symmetry*. In Everingham, M., Needham, C., Fraile, R., eds.: *British Machine Vision Conference (BMVC2008)*, pp. 1115–1125
- Kootstra, G., Lambert R. B. Schomaker (2009a). *Using Symmetrical Regions of Interest to Improve Visual SLAM*. *Proceeding IROS'09 Proceedings of the 2009 IEEE/RSJ international conference on Intelligent robots and systems*.
- Kootstra, G., de Jong, S. y Schomaker, L. (2009b). *Using Local Symmetry for Landmark Selection*. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision Systems (ICVS)*, pp. 13-15.
- Kovesi, P. (1996). *Invariant measures of image features from phase*. PhD. Tesis, Univ. of Western, Australia.

- Kovesi, P. (1997). Symmetry and asymmetry from local phase. AI'97, Tenth Australian Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 185-190.
- Kovesi, P. (1999). Image Features From Phase Congruency. *Videre: A Journal of Computer Vision Research*. MIT Press, vol 1 (3).
- Kovesi, P. (2002). Edges are no just steps, Proceedings of ACCV2002, The 5th Asian Conference on Computer Vision.
- Kovesi, P. (2003). Phase Congruency Detects Corners and Edges". The Australian Pattern Recognition Society Conference: DICTA 2003, pp 309-318.
- Landré, J., Truchetet, F, Montuire, S. y Bruno David, B.. (2001). Automatic building of a visual interface for content-based multiresolution retrieval of paleontology images. *Journal of Electronic Imaging*, 10 (4), pp. 957-965, SPIE – IS&T.
- Landré, J., Truchetet, F. y Laligant, O. L.. (2006). Visual browsing in image collections using wavelets. International Society for Engineering (SPIE) Photonics East.
- Lifshitz, R. (1996). The symmetry of quasiperiodic crystals. *PhysicaA*, 232, pp. 633-647.
- Lin, H., Chiu, C. y Yang, S. (2001). Texture Analysis and Description in Linguistic Terms, IEEE Intl. Conference on Image Processing.
- Liu, F. y Picard, R.W. (1994). Periodicity, directionality, and randomness: Wold features for image modeling and retrieval, Proc. Int. Conf. Pat. Rec., vol 2, pp. 184-185.
- Liu, S. X. (2009). Symmetry and asymmetry analysis and its implications to computer-aided diagnosis: A review of the literature. *Journal of biomedical informatics* vol. 42(6): pp. 1056-106, [DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbi.2009.07.003>].
- Liu, Y. y Collins, R. (2000). A computational model for repeated pattern perception using frieze and wallpaper groups. Technical Report CMU-RI-TR-00-08, Robotics Institute, Carnegie Mellon University.
- Liu, Y., Collins, R. y Tsin, Y. (2004a). A computational model for periodic pattern perception based on frieze and wallpaper groups. *Trans. on PAMI*, vol. 26 (3).
- Liu, Y., Lin, W. Y Hays, J. (2004b). Near-Regular Texture Analysis and Manipulation.. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2004)* , vol. 23 (3); pp. 368 – 376.
- Liu, Y. (2007). Computational Symmetry. Tutorial. 8th. Asian Conference on Computer Vision, Tokyo, Japan, Nov. 18-22.
- Y. Liu. Computational Symmetry.. *Proceedings of Symmetry (2010)*. Portland Press, London, Vol. 80 (1), pp. 231 – 245.
- Liu Y., Hel-Or, H., Kaplan, C. S. y Van Gool, L. (2010). Computational Symmetry in Computer Vision and Computer Graphics. *En Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, vol. 5, pp. 1-195, 2010, [DOI:<http://dx.doi.org/10.1561/06000000008>].
- Liu, Y. (2014). Computational Symmetry. *Computer Vision. A Reference Guide*. Ikeuchi, K. Springer US. pp 136-145
- Loy, G. y Zelinsky, A. (2002). A Fast Radial Symmetry Transform for Detecting Points of Interest. *ECCV* pp. 358-368, [DOI: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-47969-4_24].
- Marola, G. (1989). Using symmetry for detecting and locating objects in a picture. *Computer*

Vision, Graphics, and Image Processing, vol. 46, pp. 179-19.

Mount, D. (2001). Computational geometry: Proximity and Location. Cap. 63. CRC Press, 0-8493-8597-0

Müller H., Müller, W., Squire, D., Marchand—Maillet, S., Pun, T. (2001).. Performance Evaluation in Content--Based Image Retrieval: Overview and Proposals, Pattern Recognition Letters, Vol. 22, No. 5, pp. 593—601.

O'Mara, D. (2002). Automated facial metrology, Chapter 4: Symmetry detection and measurement. PhD thesis, University of Western Australia.

Park, M., Collins, R. T. y Liu, Y. (2009). Deformed Lattice Detection in Real-World Images Using Mean-Shift Belief Propagation. IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 31, n°. 10.

Park, M., Brocklehurst, K., Collins, R. T. y Liu, Y. (2011). Translation-symmetry-based perceptual grouping with applications to urban scenes. 10th Asian conference on Computer vision. Vol. part III, pp. 329—342. Springer-Verlag. ISBN 978-3-642-19317-0.

Park, M., Leey S., Cheny, P.; Kashyap, S.; Butty, A.; Liu, Y.; (2008). Performance evaluation of state-of-the-art discrete symmetry detection algorithms *Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on*, vol., no., pp.1-8, 23-28, [DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/CVPR.2008.4587824>].

Pérez Gómez, R. (1987) The four regular mosaics missing in the Alhambra. Computers and Mathematics with Applications, vol. 14, núm. 2 1987, pp. 133-137.

Ramírez A. y Usón, C. (2002). La repetición como argumento: la infinitud como objetivo. Los 17 grupos de simetría en el mudéjar aragonés. Actas del VIII Simposio Internacional de Mudejarismo. Instituto de Estudios Turolenses.

Rao, A., Srihari, R. K., Zhu, L. y Zhang, A.. (2002). A method for measuring the complexity of image databases. IEEE Transactions on Multimedia, pp. 160-173, vol. 4, num. 2.

Rauber, T.W., Barata, M. y Steiger-Garçon, A. S. (1993) *A Toolbox for Analysis and Visualization of Sensor Data in Supervision*. TOOLDIAG'93 International Conference on Fault Diagnosis.

Reddy, S. y Liu, Y. (2005). On improving the performance of the wallpaper symmetry group classification. Technical Report CMU-RI-TR-05-49, Robotics Institute, Carnegie Mellon University.

Reisfeld, D., Wolfson, H., Yeshurun, Y. (1990). "Detection of interest points using symmetry". 3rd ICCV, Osaka, 62-65.

Reisfeld, D., Wolfson, H., Yeshurun, Y. (1995). Context Free Attentional Operators: the Generalized Symmetry Transform. International Journal of Computer Vision, vol. 14, pp 119-130.

Robbins, B. J. (1996). The Detection of 2D Image Features using Local Energy-. Tesis.

Savard, J. G. Basic tilings: The 17wallpaper groups. [en línea, fecha de consulta: 3 de diciembre de 2011]. Disponible en <<http://www.quadibloc.com/math/tilint.htm>>.

Schattschneider, D. (1978). The plane symmetry groups: Their recognition and notation. The American Mathematical Monthly, 85:439-450.

Slavik V. (1995). Theory of Symmetry and Ornament. ISBN 86-850593-17-6, [en línea, consultado el 05/2005] del sitio web Symmetry and Ornament, The Electronic Library of Mathematics:

Mathematical Monographs.

Smeulders, A. W. M, Worring, M., Santini, S., Gupta, A., Jain, R. . (2000). Content-Based Image Retrieval at the End of the Early Years. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 12, pp. 1349-1380.

Smith, J. R. (2001). Quantitative assessment of image retrieval effectiveness. *Issue Journal of the American Society for Information Science and Technology*, vol. 52, nº 11, pp. 969-979.

Sólyom, J. (2007). *Symmetries of Crystals. Fundamentals of the Physics of Solids*. Springer Berlin Heidelberg. pp. 109-169. 978-3-540-72599-2.

Srinivasan, G. N. y Shobha, G. (2008). *Statistical Texture Analysis*. World Academy of Science, Engineering and Technology, pp. 1264-1269.

Stentiford, F. (2005) Attention Based Facial Symmetry Detection. ICAPR 2005, LNCS 3687, pp. 112 – 119.

Sookocheff, K B. (2004). Computing Texture Regularity. *Image Processing and Computer. Vision*.

Toussaint G. T. (1980). The relative neighbourhood graph of a finite planar set. *Pattern . Recognition*, vol. 12, 4, pp. 261-268, [DOI:10.1016/0031-3203(80)90066-7].

Tuceryan, M. y Jain, A. K.. (1998). *Texture Analysis. The Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision (2nd Edition)*, by C. H. Chen, L. F. PP. S. P. Wang (eds.), cap 2.1, pp. 207-248, World Scientific Publishing Co., 1998.

Valiente, J. M., Agustí, M., Gomis, J. M. y Carretero, M. (2001). Estudio de técnicas de segmentación de imágenes en color aplicadas al diseño textil; *Actas XII congreso internacional de ingeniería gráfica (INGEGRAF2001)*, pp. 34-34; 84-699-5057-6.

Valiente. J. M., Albert, F., Carretero, C., Gomis. J. M. (2004). Structural Description of Textile and Tile Pattern Designs Using Image Processing. *Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'04)*

Valor, M. (2002). *Diseño de herramientas gráficas para la catalogación de revestimientos cerámicos. Aplicaciones en el entorno del diseño gráfíc*. Tesis doctoral. Departamento de Expresión Gráfica en la Ingeniería. Universitat Politècnica de València.

Wanjale, K., Borawake, T. y Chaudhari, S. (2010). Content Based Image Retrieval for Medical Images. *Techniques and Storage Methods-Review Paper. International Journal of Computer Applications (0975 – 8887)*. Volume 1– No.19,

Wikipedia, Colaboradores de. (2012), Content-based image retrieval. *Wikipedia, La enciclopedia libre*, 2012 [en línea, fecha de consulta: 8 de febrero de 2012]. Disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki/Content-based_image_retrieval>.

Xiao, Z., Wu, J. (2007). Analysis on Image Symmetry Detection Algorithms. *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2007. FSKD 2007. Fourth International Conference on* , vol.4, no., pp.745-750, 24-2, [DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/FSKD.2007.173>].

Zabrodsky, H.. (1990). *Symmetry - A Review*. Technical Report 90-16, May 1990. Departement of Computer Science, The Hebrew University of Jerusalem. 91904 Jerusalem, Israel. <[symmetry_review__Zabrodsky.pdf](#) >

Zabrodsky, H. (1993). *Computational Aspects of Pattern Characterization - Continous Symmetry*. Informe Interno.

Zabrodsky, H., Peleg, S. y Avnir, D. (1995). Symmetry as a Continuous Feature. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no. 12, pp. 1154-1166, [DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/34.476508>].

Zavidovique, B. y Di Gesú, V. (2007). Pyramid symmetry transforms: From local to global symmetry, *Image and Vision Computing*, Vol. 25 (2), pp. 220–229.

Bibliografía y referencias

Índice alfabético y glosario

CBIR.....	21
Clasificadores.....	
Algoritmos clásicos.....	62
ANNC o ANN.....	169
CBR.....	166
KNN.....	167
NNC.....	167
Complejidad de una imagen.....	156
Error de ajuste de la rejilla (EAR).....	102
Geometría computacional.....	
Relative Neighbourhood Graph (RNG).....	99
Teoría de Grupos de Simetría.....	33
Isometría.....	26
Kovesi.....	42, 53, 56
Congruencia de fase.....	57
Objetos de simetría.....	96
Polaridad.....	60
Versión directa.....	93
Versión indirecta.....	93
Media de varianzas normalizada.....	105
Medidas de simetría.....	
Paralelogramo de varianzas.....	104
Mosaico regular.....	
Celda unidad (CU).....	43
Grupos de simetría.....	
Wallpaper.....	26, 43, 47, 49, 106, 190
GSP.....	43, 47, 50, 117
Imágenes de wallpaper.....	26
Paralelogramo fundamental.....	26, 43, 101
PF.....	43, 48, 50, 117
Restricción cristalográfica.....	45
Wallpaper group.....	44
Órbita.....	49, 103 s.
Rejilla tentativa.....	98
Simetría computacional.....	42
Simetría de fase (SDF).....	56
Varianza de medias normalizada	105
VxC.....	18