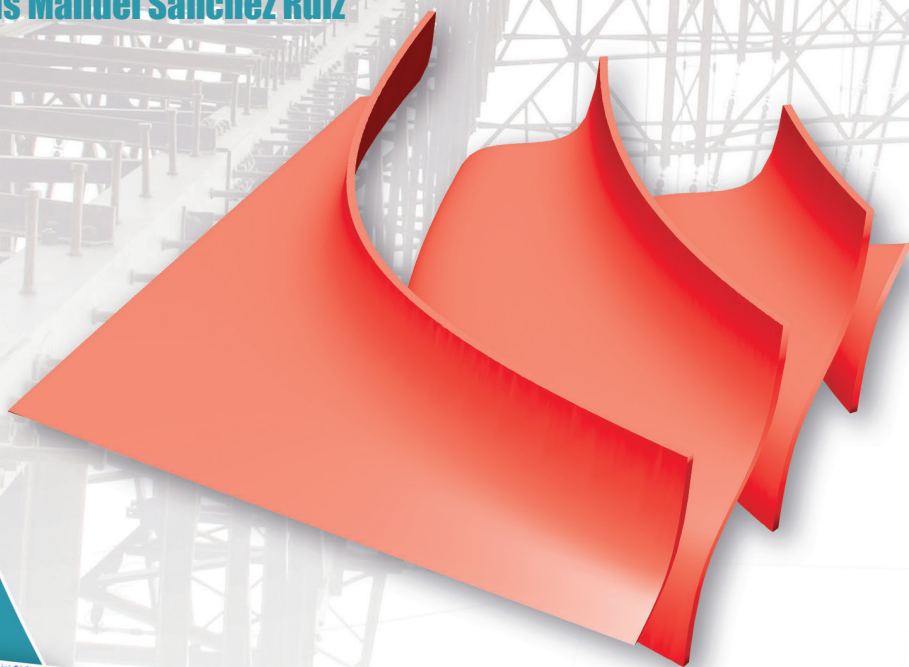


a
acadèmica

Cálculo y Álgebra con Mathematica 10

José Antonio Morano Fernández
Luis Manuel Sánchez Ruiz



Wolfram *Mathematica*® 10

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

José Antonio Morano Fernández
Luis Manuel Sánchez Ruiz

**Cálculo y Álgebra
con
Mathematica 10**

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Matemática Aplicada de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Morano-Fernández, J.A. y Sánchez-Ruiz, L.M. (2015). *Cálculo y Álgebra con Mathematica 10*. Valencia: Universitat Politècnica de València

© José Antonio Morano-Fernández
Luis Manuel Sánchez-Ruiz

©2015, Editorial Universitat Politècnica de València
distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0138_11_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-424-1
Impreso bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

Impreso en España

Índice General

1	Introducción al programa	1
1.1	Inicio y entorno	1
1.2	La barra de menús	5
1.3	Primeros cálculos	7
1.3.1	Operaciones algebraicas	7
1.3.2	Paréntesis, corchetes, llaves y comentarios	7
1.3.3	Números, simplificaciones y aproximaciones	8
1.3.4	Factoriales y números combinatorios	10
1.3.5	Los comandos <code>%</code> y <code>% n</code>	11
1.4	Operaciones lógicas	11
1.5	Guardar, recuperar o imprimir ficheros	12
1.6	Ejercicios propuestos	13
2	Variables y listas	15
2.1	Variables	15
2.1.1	Asignación y liberación de valores	15
2.1.2	Sustitución de variables	17
2.2	Listas con Mathematica	18
2.3	Manipulación interactiva	20
2.4	Ejercicios propuestos	22

3	Funciones de una variable	23
3.1	Definición y evaluación	23
3.2	Funciones elementales	24
3.2.1	Polinomios	24
3.2.2	Expresiones racionales	26
3.2.3	Funciones logarítmicas y exponenciales	27
3.2.4	Funciones trigonométricas y sus inversas	28
3.2.5	Funciones hiperbólicas y sus inversas	29
3.2.6	Valor absoluto y función signo	30
3.2.7	Algunas funciones especiales	30
3.3	Límites	30
3.3.1	Cálculo de límites	30
3.3.2	Límites infinitos	32
3.4	Derivadas	32
3.5	Integración	33
3.5.1	Cálculo de primitivas	33
3.5.2	Cálculo de integrales definidas	34
3.6	Ejercicios propuestos	35
4	Números complejos	37
4.1	Operaciones y comandos básicos	37
4.2	Raíces de un número complejo	39
4.2.1	Cálculo	39
4.2.2	Aplicación a la construcción de polígonos	41
4.3	Punto fijo de una lista	42
4.4	Determinaciones del argumento	44
4.5	Logaritmos complejos	45
4.6	Ejercicios propuestos	46

5	Gráficas 2D	47
5.1	Curvas en forma cartesiana explícita	47
5.1.1	Representación de una función	47
5.1.2	Representación de varias funciones	51
5.1.3	Leyendas	51
5.2	Curvas en forma implícita	52
5.3	Regiones planas	53
5.4	Curvas en coordenadas paramétricas	54
5.5	Curvas en coordenadas polares	55
5.6	Gráficas de objetos geométricos	58
5.7	Representaciones conjuntas	60
5.8	Funciones definidas a trozos	62
5.9	Animación y manipulación gráfica	65
5.10	Ejercicios propuestos	67
6	Métodos numéricos	69
6.1	Resolución de ecuaciones y sistemas	69
6.1.1	Método general	69
6.1.2	Ecuaciones y sistemas no algebraicos	71
6.1.3	Resolución gráfica	75
6.2	Acotación de las raíces	76
6.3	Cálculos iterativos	81
6.4	Método de Newton-Raphson	82
6.5	Interpolación	84
6.5.1	Polinomios interpoladores	84
6.5.2	Error de interpolación	84
6.6	Ejercicios propuestos	86

7	Matrices y sistemas lineales	89
7.1	Matrices y vectores	89
7.2	Generación de matrices	90
7.3	Operaciones con matrices y vectores	91
7.4	Elementos y bloques	95
7.5	Sistemas de ecuaciones lineales	97
7.6	Ejercicios propuestos	100
8	Espacios vectoriales y euclídeos	101
8.1	Dependencia e independencia lineal	101
8.2	Cambios de coordenadas	103
8.3	Intersección y suma de subespacios	105
8.4	Distancias y ángulos	107
8.5	Ortogonalización	108
8.6	Proyecciones ortogonales	108
8.6.1	Proyecciones sobre vectores	108
8.6.2	Proyecciones sobre subespacios	109
8.7	Aplicaciones	110
8.7.1	Resolución mínimo-cuadrática de sistemas	110
8.7.2	Ajustes de curvas	111
8.8	Ejercicios propuestos	114
9	Aplicaciones lineales y diagonalización	117
9.1	Matriz asociada	117
9.2	Núcleo e imagen de una aplicación lineal	119
9.3	Valores y vectores propios	120
9.4	Diagonalización	122
9.5	Ejercicios propuestos	124

10 Funciones y gráficas 3D	125
10.1 Introducción	125
10.2 Gráficas en 3D	126
10.2.1 Forma explícita	126
10.2.2 Forma implícita	127
10.2.3 Opciones del gráfico	128
10.2.4 Representación de varios elementos	130
10.3 Regiones tridimensionales	131
10.4 Gráficas 3D en coordenadas paramétricas	132
10.4.1 Curvas tridimensionales	132
10.4.2 Superficies en coordenadas paramétricas	133
10.5 Objetos en 3D	133
10.6 Giros, zoom, animaciones y manipulación	136
10.7 Ejercicios propuestos	137
11 Funciones de varias variables	139
11.1 Derivadas parciales	139
11.2 Gradiente	140
11.3 Derivada direccional	141
11.4 Jacobianos	141
11.5 Diferencial y derivada de la función compuesta	143
11.6 Funciones implícitas	143
11.6.1 Funciones definidas por una ecuación	143
11.6.2 Funciones definidas por un sistema	146
11.7 Aplicación: Extremos libres	148
11.8 Máximos y mínimos condicionados	150
11.9 Ejercicios propuestos	151

12 Integración con una variable	153
12.1 Cálculo de integrales con una variable	153
12.2 Aplicación: Cálculo de áreas planas	153
12.3 Integral aproximada	155
12.4 Integrales impropias	157
12.4.1 Integral impropia de primera especie	157
12.4.2 Integral impropia de segunda especie	158
12.4.3 Integral impropia de tercera especie	160
12.5 Las funciones Gamma y Beta	160
12.6 Ejercicios propuestos	162
13 Integrales curvilíneas	165
13.1 Integral curvilínea de primera especie	165
13.1.1 Cálculo	165
13.1.2 Aplicaciones: masas, longitudes de cables y áreas de superficies cilíndricas	167
13.2 Integral curvilínea de segunda especie	168
13.2.1 Cálculo	168
13.2.2 Aplicaciones: Trabajos	169
13.2.3 Teoría del potencial	170
13.3 Ejercicios propuestos	172
14 Integrales dobles	175
14.1 Cálculo de integrales dobles	175
14.2 Aplicaciones de la integral doble	177
14.2.1 Masas y áreas de placas planas	177
14.2.2 Volúmenes de sólidos	178
14.3 Integrales de superficie	179

14.3.1	Cálculo	179
14.3.2	Aplicaciones: Masas y áreas de placas alabeadas	181
14.3.3	Cálculo del flujo de un campo	182
14.4	Ejercicios propuestos	184
15	Integrales triples	187
15.1	Cálculo de integrales triples	187
15.2	Aplicaciones: Masas y volúmenes de sólidos	188
15.3	Ejercicios propuestos	190
16	Series	191
16.1	Sumas y productos	191
16.2	Series numéricas	193
16.3	Series de potencias	194
16.3.1	Campo de convergencia	194
16.3.2	Desarrollos en series de potencias	195
16.4	Series de Fourier	197
16.5	Ejercicios propuestos	200
17	Ecuaciones diferenciales	203
17.1	Ecuaciones diferenciales ordinarias	203
17.2	Problemas de valor inicial y contorno	205
17.3	Sistemas de ecuaciones diferenciales	206
17.4	Métodos numéricos	208
17.5	Ejercicios propuestos	209

Prólogo

Mathematica es un software de apoyo a la resolución de problemas matemáticos en general, tanto desde el punto de vista simbólico, como numérico. En este libro presentamos la **versión 10**.

El programa en esta versión dispone de una potente herramienta para la construcción de gráficos matemáticos en dos y en tres dimensiones, que facilita la realización de brillantes presentaciones e ilustraciones. Además tiene un completo lenguaje de programación, que permite al usuario implementar sus propios proyectos en lenguaje informático, y ejecutarlos en el entorno global.

En este texto presentamos algunas de las utilidades de este programa que ayudan a cubrir las necesidades computacionales básicas de cálculo y álgebra y algunas de sus aplicaciones en carreras de ciencias e ingeniería. El enfoque es eminentemente práctico y la exposición se hace sobre ejemplos concretos o explicando los comandos a utilizar, pidiendo que se aplique en ejercicios.

El esfuerzo que se dedique a conocer este programa se verá prontamente recompensado con un ahorro significativo en el tiempo empleado en la resolución de ejercicios, con la potencia de resolución del programa y su gran capacidad de visualización.

Los autores agradecen a la profesora Matilde Legua su generosidad al permitir que ideas y ejercicios aportados por ella en el texto *Matemáticas con Derive*, publicado por los tres conjuntamente en la Editorial de la Universitat Politècnica de València, los adaptásemos a *Mathematica 6*, y versiones posteriores, que ahora actualizamos.

Los autores

Capítulo 1

Introducción al programa

1.1 Inicio y entorno

Este capítulo hace una panorámica general del uso de *Mathematica* dejando para posteriores capítulos la exposición de herramientas más avanzadas que ayudan a entender y trabajar las matemáticas.

Podemos acceder al programa de diferentes maneras.

Si lo tenemos instalado en el disco duro usamos el icono:



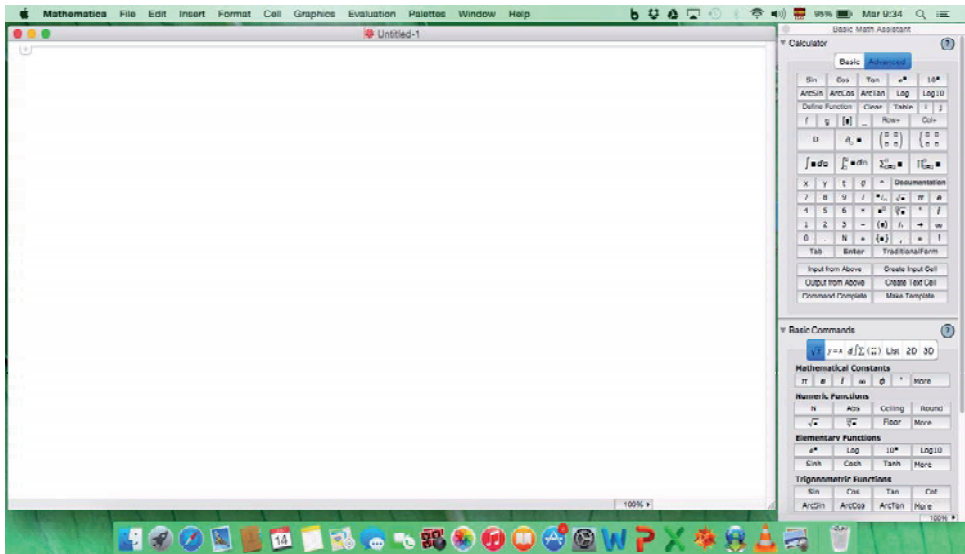
Los usuarios de la Universidad Politécnica de Valencia pueden descargar el programa *Mathematica* 10 y las instrucciones para su instalación en la web

software.upv.es

Cuando se carga el programa, en la parte superior aparece una *barra de menús* desplegables con los comandos u órdenes que nos servirán para trabajar con el programa.

Además, y si no ha sido desactivada, aparece una ventana de bienvenida con información y accesos adicionales que pueden ser útiles.

La forma usual de trabajar con el programa es abrir un *Notebook*, o cuaderno de notas, en blanco que por defecto se llama 'Untitled-1'. En él podemos empezar a escribir aunque no aparezca el cursor.



El uso más simple de *Mathematica* es utilizarlo como una simple calculadora. Si escribimos $1 + 2 + 3$ observaremos que la suma aparece delimitada por un corchete azul, ubicado en el margen derecho de la ventana.

La información contenida en cada uno de estos corchetes es lo que denominamos **celda**.

Para *realizar o simplificar* la suma anterior, se oprimen simultáneamente, con el cursor situado dentro de la celda, las teclas

May + Enter.

Otra forma es pulsar directamente la tecla **Intro** del teclado numérico.

Cuando *Mathematica* responde, lo hace ubicando la respuesta en una nueva celda. Existen varios tipos de celdas según la utilidad de cada una de ellas. Las celdas con instrucciones se denominan:

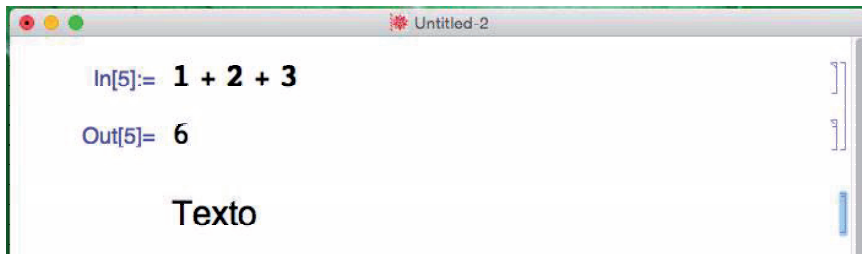
Input si son de entrada.

Output si son las respuestas¹.

¹Cada celda *Input* se corresponde con su *Output*, compartiendo ambas el mismo número de orden durante la sesión de trabajo. Puede evitarse que se escriba el *Output* añadiendo “;” detrás de la instrucción.

Otro tipo de celdas son las de **Texto** que incorporan comentarios y no generan respuesta. Podemos distinguirlas porque tienen dos rayas en la parte superior del corchete azul mientras que las de cálculo tienen un triángulo.

Por defecto las celdas son todas de cálculo, y para convertirlas en celdas de texto debemos seleccionar la celda marcando con el cursor el corchete correspondiente y realizar el cambio mediante la opción **Style>Text** del menú **Format**.



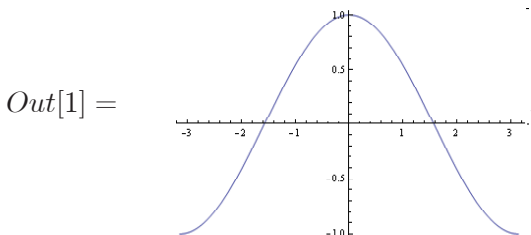
Cuando se comete alguna errata o error de sintaxis *Mathematica* informa o advierte de ello a través de un mensaje.

En cualquier caso siempre se puede modificar el contenido de una celda situando el cursor en el interior de ésta y haciendo las modificaciones pertinentes. Entonces puede ejecutarse el nuevo contenido de la celda según se ha explicado con anterioridad.

Ejemplo 1.1.1 *Escribir en una celda $\text{Plot}[\text{Cos}[x], \{x, -\text{Pi}, \text{Pi}\}]$ y activarla. Luego sustituir Cos por Sin , posteriormente Pi por 10 y volver a ejecutar.*

Sol.: Introducimos el comando

$\text{In}[1] := \text{Plot}[\text{Cos}[x], \{x, -\text{Pi}, \text{Pi}\}]$



Hacer los cambios sobre la primera celda y simplificar. ■

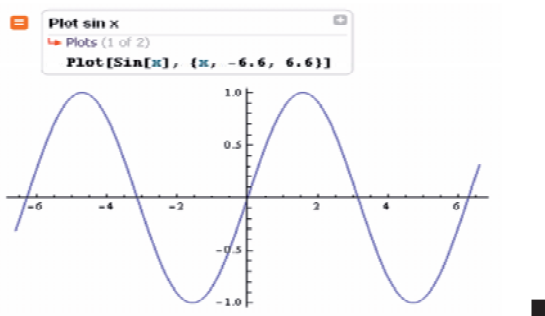
Es recomendable definir cada instrucción a realizar en una celda diferente, activando su respuesta antes de continuar con la siguiente. De esta manera se detectan de forma inmediata los posibles errores cometidos.

En el último ejemplo hemos obtenido una gráfica que requiere el conocimiento del comando *Plot* y su sintaxis. Una de las ventajas disponibles desde la versión 8 de *Mathematica* es la posibilidad de introducir de forma libre lo que queremos hacer precedido del símbolo $=$ al inicio de la celda y el programa nos proporciona una posible sintaxis y el output correspondiente.

Ejemplo 1.1.2 *Escribir y ejecutar en una celda*

$= \text{plot sin } x$

Sol.: Introducimos la expresión dada $= \text{plot sin } x$, y al ejecutarla vemos que el input se completa con la sintaxis empleada por el programa y a la vez nos proporciona el output.



Si introducimos $==$ al inicio de la celda de entrada en vez de $=$ nos da una respuesta más completa que además permite hacer una manipulación interactiva. Con cada una de ellas el icono inicial que aparece es diferente.

En este texto introduciremos la sintaxis correcta de todos los comandos en aras de la eficiencia expositiva pero invitamos a que se explore la comprensión del programa de la "free-form linguistic input" que es como éste denomina en inglés a la introducción de inputs en formato libre.

Las celdas pueden seleccionarse individualmente o agrupadas con objeto de borrarlas, activar su respuesta, modificar su estilo, etc. Para hacer esta

selección múltiple mantenemos pulsada la tecla Ctrl mientras vamos marcando las celdas elegidas, o determinando el rango de celdas seleccionadas mediante May/Shift.

Si el objetivo de esta selección es borrar las celdas bastará con pulsar la tecla Supr.

1.2 La barra de menús

En la parte superior de la ventana podemos ver la barra de menús que está compuesta por varias opciones: File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window y Help, que funcionan siguiendo los pasos usuales propios del sistema operativo Windows / OS X.

Cada menú ofrece muchas posibilidades que el usuario irá descubriendo con la práctica. De momento vamos a comentar las que consideramos más importantes.

File Proporciona diferentes posibilidades de manejo de los ficheros, de impresión y la opción de salir del programa.

New. Comienza un nuevo documento.

Open. Abre un documento creado con antelación.

Close. Cierra el documento actual.

Save. Graba el documento actual.

Save As. Permite grabar el documento con otro nombre o en otra ruta.

Print. Imprime el documento actual.

Exit. Sale de Mathematica.

Edit Proporciona herramientas que pueden ser útiles para la edición.

Undo. Deshace la última acción realizada.

Para seguir leyendo haga click aquí