

Índice general

Resumen	III
Índice general	V
I Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y sistemas de EDO	1
1 Introducción	3
2 EDO de primer orden	5
2.1 EDO de primer orden resueltas respecto a la derivada	5
2.2 EDO con variables separadas	6
2.3 EDO que se reducen a ecuaciones con variables separadas	8
2.4 Las EDO homogéneas	9
3 EDO lineales	11
4 Ecuación de Bernoulli	15
5 Ecuaciones exactas	17
5.1 La función potencial	17
5.2 El factor integrante.	19

6 EDO de orden mayor que uno	25
6.1 Reducción del orden	25
6.2 EDO lineales de n -ésimo orden	28
6.3 EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes y ecuaciones de Euler	31
6.3.1 EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes	31
6.3.2 Ecuaciones de Euler	32
6.4 EDO lineales no homogéneas	33
6.5 EDO lineales no homogéneas con coeficientes constantes y las ecuaciones de Euler	38
6.5.1 EDO lineales no homogéneas con coeficientes constantes	38
6.5.2 Las ecuaciones no homogéneas de Euler	43
7 Anexos. Problemas propuestos	45
7.1 EDO de variables separadas	45
7.2 EDO que se reducen a las ecuaciones de variables separadas	46
7.3 EDO homogéneas	47
7.4 EDO lineales	47
7.5 EDO de Bernoulli	48
7.6 EDO exactas	48
7.7 EDO sin clasificar	50
7.8 EDO con coeficientes constantes	53
7.8.1 Resolver las ecuaciones siguientes:	53
7.8.2 Resolver los problemas de valor inicial:	54
7.8.3 Utilizando el método de variación de parámetros hallar la solución de las ecuaciones siguientes	55
7.8.4 Resolver las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes:	56
8 Sistemas de EDO: generalidades	59
8.1 Integración de un SED por reducción a una ecuación de mayor orden	60
8.2 Las formas integrables de un SED	62
8.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	63
8.4 SDL con coeficientes constantes	66
8.5 Anexo. Álgebra Lineal 1: Matrices y sistemas	72
8.5.1 Definiciones	72

8.5.2 Operaciones con matrices	73
8.5.3 Proceso de escalonamiento de una matriz	78
8.5.4 Sistemas de ecuaciones lineales algebraicas	81
8.5.5 La regla de Cramer.	85
II Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	91
9 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: generalidades	93
10 Problemas simples que se reducen a ecuaciones del tipo parabólico	95
10.1 Problema lineal de la propagación de calor	95
10.1.1 La barra homogénea	96
10.1.2 La ley de Newton	96
10.2 Ecuación de difusión	97
10.3 Propagación del calor o difusión en el espacio	97
11 Problemas simples que se reducen a ecuaciones del tipo hiperbólico	99
11.1 La ecuación de la cuerda vibrante	99
11.2 Vibraciones longitudinales de las vigas	100
11.3 La propagación de ondas en dos y tres dimensiones.	101
12 Planteamiento de los problemas de contorno	103
12.1 Problemas de contorno del tipo parabólico	103
12.1.1 Condición de Dirichlet	104
12.1.2 Condición de Neumann	104
12.1.3 Condición mixta.	104
12.1.4 Problemas de contorno.	105
12.1.5 Problemas de contorno degenerados.	105
12.1.6 La existencia y la unicidad de las soluciones.	106
12.2 Problemas de contorno del tipo hiperbólico	107

13 El método de Fourier	109
13.1 El método de separación de las variables	109
13.2 Justificación matemática	121
13.2.1 Operadores en espacios euclídeos	121
13.2.2 El contenido del método de Fourier	122
13.2.3 La clase \mathcal{A} de funciones y las series de Fourier	124
13.2.4 La solución del problema de Cauchy (13.70, 13.71, 13.72) mediante el método de Fourier	125
13.2.5 Propiedades básicas de las funciones propias y de los autovalores	132
14 La ecuación no homogénea	135
14.1 Solución de los problemas no homogéneos por el método de Fourier	135
14.2 Las condiciones de contorno no homogéneas	139
15 El método de las funciones de Green para las ecuaciones pa- rabólicas	157
15.1 Generalidades	157
15.1.1 La función de Green	157
15.1.2 La ecuación no homogénea	159
15.1.3 El problema completo no homogéneo	161
15.1.4 La función de Green por el método de separación de variables	161
15.2 La función de Green de la ecuación de calor en el eje	162
15.3 La transmisión de calor en el eje y en el semieje	165
15.3.1 La ecuación homogénea	165
15.3.2 Los problemas de Cauchy en el semieje	166
15.3.3 Unos ejemplos importantes	166
15.4 La ecuación de calor en el eje no homogénea	168
16 Transmisión de calor en el espacio de dos y tres dimensiones	171
17 El método de las funciones de Green para las ecuaciones hi- perbólicas no homogéneas	175
17.1 Solución general: el método de Fourier	175
17.2 Función de Green: definición	177

17.3	Función de Green de frecuencias	178
17.3.1	Construcción de la FGF	179
17.3.2	Recomendaciones	182
18	Problemas hiperbólicos especiales: Vibraciones de cuerdas, barras y vigas	183
19	Problemas a resolver	197
19.1	Problemas parabólicos unidimensionales	197
19.2	Problemas hiperbólicos unidimensionales.	201
19.3	Problemas multidimensionales.	207
20	Tres problemas fundamentales de Mecánica Cuántica	213
21	Anexos	221
21.1	Álgebra Lineal 2. Espacios vectoriales y Aplicaciones lineales	221
21.1.1	Espacios vectoriales.	221
21.1.2	Dependencia e independencia lineal. Bases.	224
21.1.3	Aplicaciones lineales	231
21.1.4	Espacios euclídeos.	245
21.2	Funciones generalizadas	255
21.2.1	Sucesiones fundamentales	255
21.2.2	Sucesiones equivalentes y funciones generalizadas	257
21.2.3	Sucesiones delta	258
21.2.4	Propiedades de la función delta de Dirac.	260
21.2.5	Ejercicios	262
21.3	La forma alternativa de hallar la función de Green de la ecuación para- bólica sobre el eje	263

III Elementos de la teoría de funciones de variable compleja, las transformadas integrales de Fourier y de Laplace y su aplicación	265
22 Funciones de variable compleja	267
22.1 Límite. Continuidad	267
22.2 Los ceros	268
22.3 Analiticidad	269
22.4 Series de potencias	271
23 Integrales en el plano complejo. Teoremas de Cauchy	275
24 Series de Laurent, singularidades, residuos	283
25 Aplicaciones de la teoría de los residuos	291
26 Principio del argumento. Teorema de Rouché	307
27 Transformadas de Fourier y de Laplace	309
27.1 Transformada integral de Fourier	309
27.2 Transformada integral de Laplace	311
27.3 Aplicación de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales . .	315
27.3.1 Las EDO	315
27.3.2 Un ejemplo sobre la propagación de calor en el semieje	317
27.3.3 Los SDL con coeficientes constantes	318
Bibliografía	321

Índice de figuras

3.1. La gráfica de la función $1 - \exp(-2t)$	14
6.1. La función $\operatorname{logcosh}(t/t_0)$	27
11.1. Las tensiones en la cuerda flexible vibrante	100
13.1. La forma inicial de la cuerda (13.43)	115
14.1. La función $x + \tan x$	151
14.2. La función $x + 0,01 \tan x$	151
14.3. La función $x + 100 \tan x$	151
18.1. La forma inicial (18.13) y la primera armónica (la línea interrumpida) (18.17)	189
18.2. La forma inicial de la viga empotrada-libre (18.19)	191
18.3. La gráfica de la función $\cos \xi \cosh \xi + 1$	193
18.4. La forma inicial (18.19) y la primera armónica $u_{11}(x, 0) = \lambda_{11} X_{11}(x)$	194
18.5. La forma inicial (18.19) y la primera armónica $u_{12}(x, 0) = \lambda_{12} X_{12}(x)$	194
20.1. La función $\left \sin \frac{5\pi x}{4} \sin \frac{5\pi y}{4} \right ^2$	216
20.2. La función $\left \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{7\pi y}{4} \right ^2$	216

20.3. La función $\left \sin \frac{7\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4} \right ^2$	216
21.1. La gráfica de la función $g_1(x)$	256
21.2. La gráfica de la función $f_1(x)$	256
21.3. La gráfica de la función $h_1(x)$	257
22.1. La gráfica de las funciones $(\cos x)(\cosh x)$ y $(\cos ix)(\cosh ix)$, $x \in \mathbb{R}$	269