

Document downloaded from:

<http://hdl.handle.net/10251/67179>

This paper must be cited as:

Flores ., LA.; Parcero Iglesias, E.; Sánchez, MG.; Vidal Gimeno, VE.; Verdú Martín, GJ. (2015). Comportamiento del Método LSQR en la Reconstrucción Tomográfica para un Número Limitado de Proyecciones con Ruido Gaussiano. 41ª Reunión Anual de la SNE. Grupo Senda. <http://hdl.handle.net/10251/67179>.



The final publication is available at

<http://www.reunionanualsne.es/hemeroteca-ra/heme-ponencias>

Copyright Grupo Senda

Additional Information



## Comportamiento del Método LSQR en la Reconstrucción Tomográfica para un Número Limitado de Proyecciones con ruido Gaussiano

Liubov Flores<sup>1,3</sup>, Estíbaliz Parceros<sup>1</sup>, María G. Sánchez<sup>2</sup>, Vicente Vidal<sup>1\*</sup> y Gumersindo Verdú<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universitat Politècnica de València, <sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán

<sup>1</sup>Valencia, España, <sup>2</sup>Cd. Guzmán, Jalisco, México, <sup>3</sup>Lima, Perú

<sup>1</sup>(+34) 96 387 70 00, <sup>3</sup>(+52) 341 575 20 50

\*vvidal@dsic.upv.es

**Resumen** – Los métodos iterativos de reconstrucción de imágenes en la Tomografía Axial Computarizada (TAC) han llegado a ser un área de investigación muy activa por su capacidad de resolver el problema de reconstrucción con un número limitado de proyecciones. Esto posibilita la reducción de la dosis de radiación en los pacientes durante el examen TAC. Sin embargo, la complejidad de datos en TAC eleva el coste computacional de la reconstrucción, especialmente en 3D. Disminuir el tiempo computacional en la reconstrucción de la imagen y la dosis de radiación constituyen dos grandes problemas en la tomografía computarizada. Además, es interesante analizar el comportamiento del método cuando se añade ruido gaussiano a las proyecciones. Para resolver este problema de forma eficiente se ha adaptado el método Sparse Equations and Least Squares (LSQR) con el filtro Soft Threshold Filtering (STF) para eliminar el ruido gaussiano y el algoritmo denominado Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA) para la reconstrucción de imágenes TAC con un menor número de proyecciones con ruido. La eficiencia del método propuesto se demuestra analizando el fantoma FORBILD.

### 1. INTRODUCCIÓN

En las últimas tres décadas, han sido presentados varios métodos para estudiar la estructura interna de un objeto en la tomografía computarizada. Mientras los métodos analíticos se basan en la transformada de Radon [1], los métodos iterativos optimizan la función objeto como función de máxima probabilidad o error mínimo [2]. Todos los algoritmos iterativos tienen en común operaciones que demandan un alto coste computacional.

Los algoritmos de reconstrucción iterativos no se establecieron bien en TAC, aunque se usan ampliamente en medicina nuclear. La principal razón de esto es el conjunto de datos en la Tomografía Computarizada (CT), ya que es mayor que en la medicina nuclear y, consecuentemente, la reconstrucción iterativa requiere de un intenso poder de cómputo. La reducción del tiempo de reconstrucción y de la dosis de radiación sin perder la calidad en las imágenes reconstruidas, representan dos de los mayores objetivos en CT.

Los métodos iterativos muestran la capacidad de proporcionar mejor calidad en las imágenes en condiciones de ruido o cuando el conjunto de proyecciones es incompleto, lo cual es común encontrar en TAC. Sin embargo, en la práctica, los algoritmos iterativos se utilizan menos.

Una forma de reducir la dosis de radiación es reducir el número de vistas durante la adquisición de datos. Como consecuencia, durante el proceso de reconstrucción aparecen artefactos no deseados. Con el desarrollo de la teoría ‘compressed sensing’ [3] los algoritmos iterativos basados en esta teoría han llamado la atención en el campo de reconstrucción de imágenes. Posteriormente, muchos algoritmos se han extendido en el campo de la reconstrucción de imágenes con un número menor de proyecciones. Yu y Wang [4] adaptaron el algoritmo de filtrado (STF) para la minimización de Variación Total (TV) en la reconstrucción de imágenes. Con el objetivo de eliminar los artefactos de la imagen y preservar la estructura de borde, Yu y Zeng [5] desarrollaron un algoritmo de reconstrucción iterativa basada en la minimización de diferencias totales ponderadas (WTD).

En este trabajo se analiza el método basado en LSQR combinado con la técnica de filtrado (STF) y aceleración (FISTA), para la reconstrucción de imágenes por menor número de proyecciones con ruido gaussiano.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2, se presentan los aspectos matemáticos relacionados con los métodos usados en el presente trabajo. En la sección 3, se muestran los resultados de la implementación. Finalmente, en la sección 4 se resumen las conclusiones a las que se ha llegado en el presente trabajo.



## 2. MÉTODOS

Algebraicamente, el problema de reconstrucción se reduce a la resolución de sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$Ax \approx b, \quad (1)$$

donde la matriz  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $A \in R^{M \times N}$ ,  $M \ll N$  y  $N$  es muy grande, simula el funcionamiento de la tomografía computarizada;  $x$  es la matriz-columna cuyos valores representan la intensidad de la imagen; y el vector columna  $b$  representa el conjunto de proyecciones obtenidas por un escáner. Los pesos  $a_{ij}$  representan la contribución del  $j$ -ésimo píxel al rayo  $i$ -ésimo.  $M$  es el número de rayos transmitidos y  $N$  es el número de píxeles de la imagen.

En este enfoque, la reconstrucción de la estructura interna de un objeto es equivalente a la resolución del sistema (1) en términos de proyecciones medidas.

### 2.1. LSQR

LSQR resuelve el sistema (1) minimizando  $\|b - Ax\|_2$  con la secuencia de espacios de *Krylov*. El algoritmo se basa en el proceso de *Bidiagonalización de Golub y Kahan*. Se genera una secuencia de aproximaciones  $\{x_k\}$  tal que el residuo  $\|r_k\|_2$ , donde  $r_k = b - Ax_k$ , decrece de forma monótona. La matriz  $A$  es usualmente grande y dispersa y se usa para calcular los productos de la forma  $Av$  y  $A^T u$  para varios vectores  $v$  y  $u$  en cada iteración. Una descripción detallada del método LSQR se encuentra en [6].

En la reconstrucción con un número menor de vistas aparecen artefactos en la imagen. La solución del sistema (1) no es satisfactoria y se requieren de pasos adicionales para regularizar la solución. En este trabajo se ha adaptado la técnica de filtrado STF similar a las referencias [7]. Mientras la técnica STF ayuda a preservar la estructura del objeto y eliminar el ruido, el algoritmo de aceleración (FISTA) introduce nuevas direcciones de búsqueda de la solución, que son usados por LSQR para acelerar la convergencia de la solución y mejorar la calidad de la imagen. La técnica de aceleración es similar a la presentada en el trabajo [8].

### 2.2. LSQR-STF-FISTA

El método combina LSQR con STF y FISTA. Una iteración del método LSQR-STF-FISTA se presenta en el siguiente pseudo-código:

(1) Inicialización:

$$k = 1, \quad x^k = 0, \quad \alpha = 1, \quad t_1 = 1, \quad x_{temp} = 0$$

(2) Comienza el proceso de iteración:

- Actualizar la reconstrucción actual utilizando  $t$  iteraciones de LSQR.
- Realizar un paso de filtrado STF utilizando la ecuación (3).
- Aplicar  $u$ -veces la técnica de aceleración (FISTA).
- Regresar al paso (2) hasta satisfacer el criterio de parada.

El criterio de parada se define de forma que el residual relativo sea menor que una tolerancia dada ( $atol = 1.e-6$ ).

### 2.3. Ruido Gaussiano

Durante la reconstrucción de la imagen, ésta puede adquirir ruido que degrada su calidad. Una imagen puede verse afectada por varios factores, entre los cuales se encuentran, las condiciones físicas (calidad de los elementos propios de los sensores) durante la adquisición de las proyecciones.

Entre los ruidos más comunes de funciones de densidad probabilística [9] están el ruido gaussiano, *erlang* ( $\gamma$ ), exponencial, uniforme e impulsivo. El ruido gaussiano surge en el momento de la adquisición de datos por un sensor del escáner en malas condiciones, a la mala iluminación y/o alta temperatura y al ruido del circuito electrónico. Este tipo de ruido tiene como consecuencia el emborronamiento de todos los píxeles de la imagen, provocando un efecto de bruma (*blur*) que los difumina.

La función de probabilidad  $P$  de una variable aleatoria gaussiana  $z$  está dada por:

$$P_G(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde  $z$  representa el nivel de grises,  $\mu$  el valor medio y  $\sigma$  la desviación estándar [10].

### 2. 3. Medidas de Calidad

Para la medición de la calidad de la imagen reconstruida se utilizarán las siguientes funciones:

- *Peak signal-to-noise ratio:*

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{MAX_I^2}{MSE},$$

donde MSE es el error cuadrático medio de dos imágenes monocromáticas  $I_1$  e  $I_2$  y se define como:

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [I_1(i, j) - I_2(i, j)]^2,$$

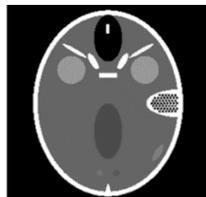
- *Mean Absolute Error:*

$$MAE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |I_1(i, j) - I_2(i, j)|$$

Para estos casos,  $m$  y  $n$  denotan el tamaño de la imagen en píxeles y  $MAX_I$  es el valor máximo posible del píxel.

## 3. RESULTADOS

Las simulaciones se han realizado con el fantoma FORBILD [11], que se considera como estándar adecuado para las pruebas de reconstrucción de imágenes (ver Figura 1).

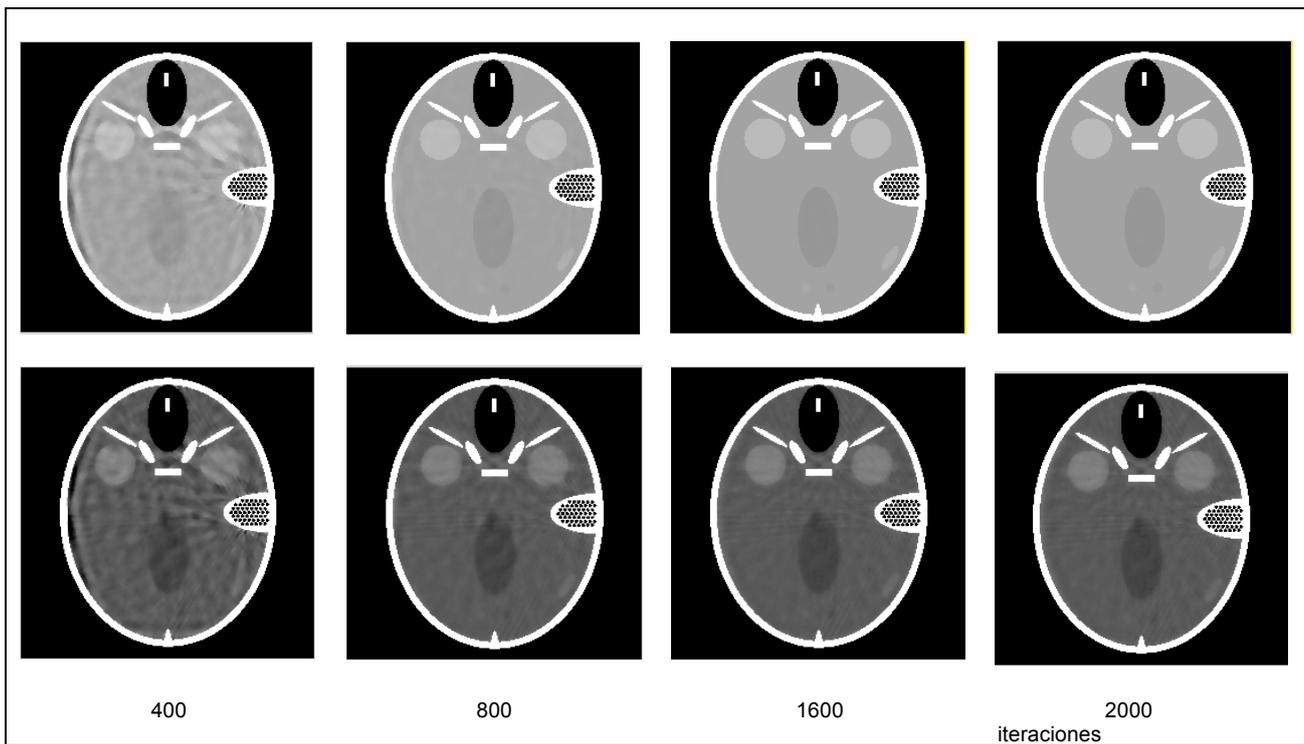


**Figura 1. Un corte típico del fantoma FORBILD.**

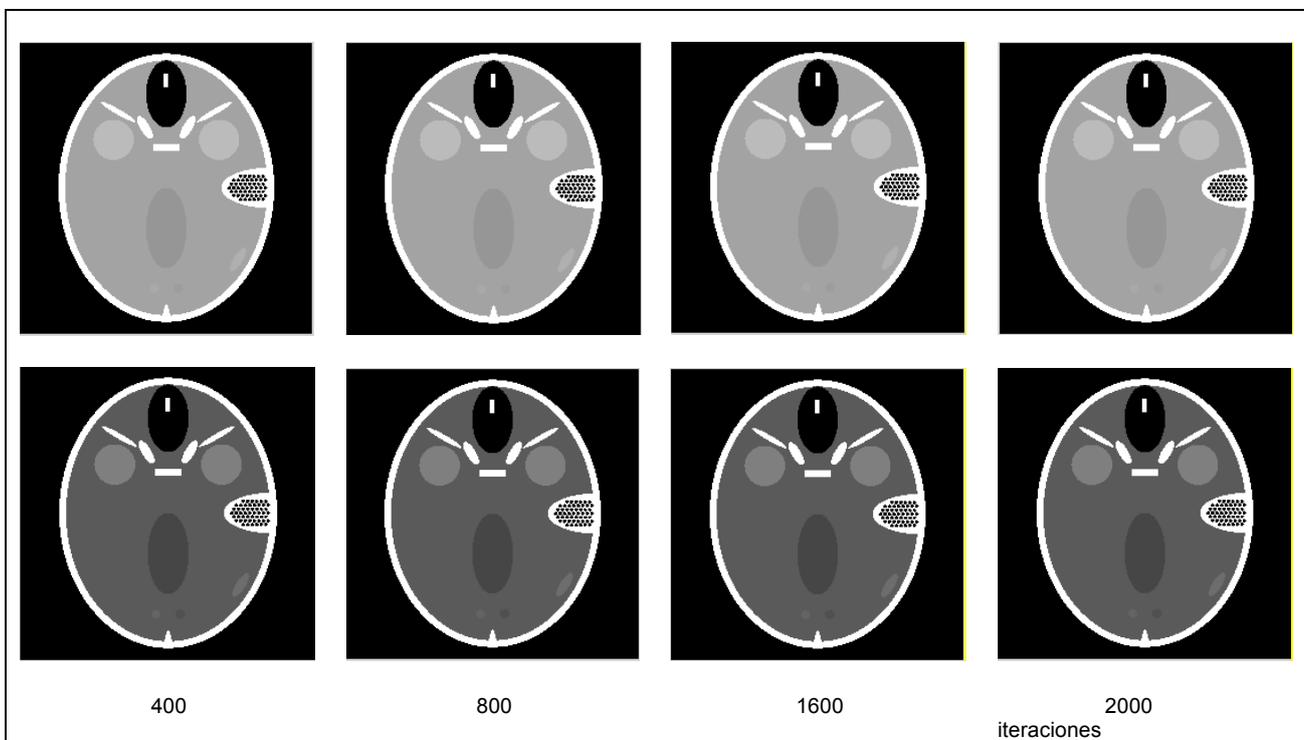
Se han simulado las proyecciones de un corte típico del fantoma de 256x256 píxeles con 1025 detectores virtuales. La distancia entre la fuente y el objeto se fijó a 30 cm. Las dimensiones de un píxel de la imagen reconstruida son de 0.1x0.1 cm<sup>2</sup>. Las proyecciones sin ruido y con ruido gaussiano fueron generadas para diferentes vistas (45, 60, 90 y 180) alrededor del objeto.

Para testear el algoritmo LSQR-STF-FISTA se ha tomado como el máximo número de iteraciones 2000. Se analizó la reconstrucción de la imagen sin y con ruido gaussiano con una varianza de 0.01.

Las figuras 2 y 3 muestran las imágenes de 256x256 píxeles reconstruidas después de 400, 800, 1600 y 2000 iteraciones, de las proyecciones sin y con ruido gaussiano para 45 y 180 vistas. La primera fila corresponde a las proyecciones sin ruido y la segunda fila a las proyecciones que se les añadió ruido gaussiano y tratadas con el algoritmo LSQR-STF-FISTA. Se observa que el método es eficiente obteniéndose una buena calidad de la imagen en pocas iteraciones en ambos casos, sin ruido y con ruido. Como era de esperar la calidad de la imagen mejora utilizando más vistas, sin embargo los resultados obtenidos con 45 vistas son de alta calidad incluso cuando tienen añadido ruido gaussiano.

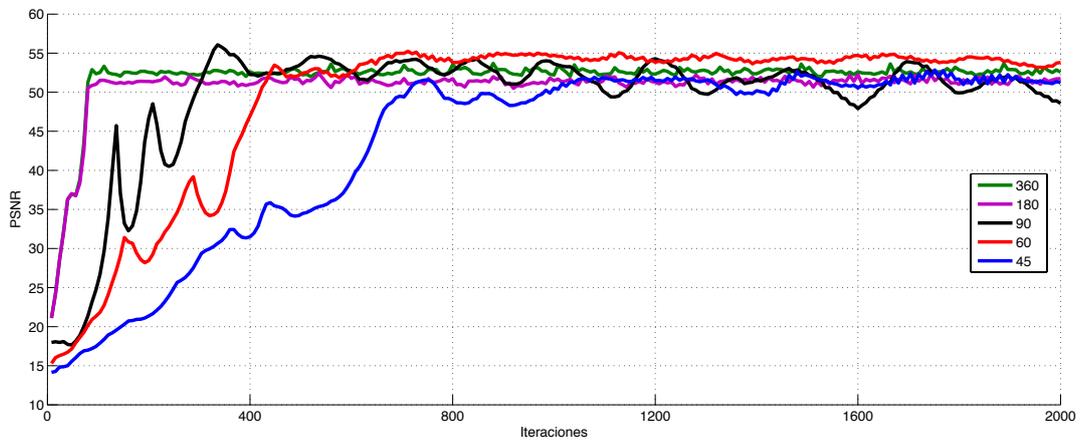


**Figura 2.** Imagen reconstruida con 45 proyecciones después de diferentes números de iteraciones. La primera fila corresponde a las proyecciones sin ruido y la segunda fila a las proyecciones con ruido gaussiano.

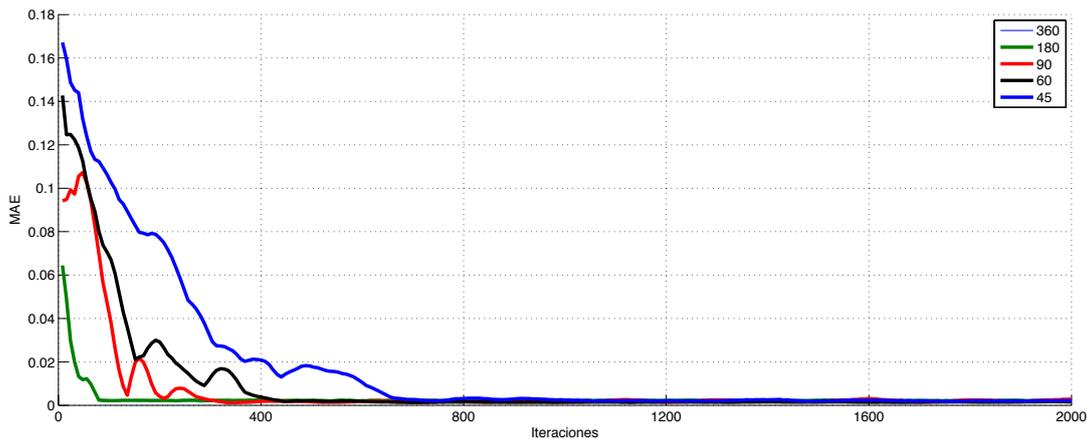


**Figura 3.** Imagen reconstruida con 180 proyecciones después de diferentes números de iteraciones. La primera fila corresponde a las proyecciones sin ruido y la segunda fila a las proyecciones con ruido gaussiano.

En la figura 4 se observa el resultado de PSNR y MAE para la reconstrucción de imágenes con diferentes vistas e iteraciones para las imágenes con ruido gaussiano.



a)



b)

**Figura 4. Resultado para la imagen reconstruida con diferentes vistas para diferentes iteraciones, a) PSNR, b) MAE**

Se puede observar en la figura 4, que a partir de 800 iteraciones se mantiene la calidad de la imagen reconstruida y los resultados son similares a la imagen con mayores iteraciones. El valor de PSNR de 55 o mayor, se presenta a partir de 60 vistas y 800 iteraciones y se estabiliza para mayores vistas e iteraciones. Los mejores resultados de MAE se presentan a partir del valor de 0.003 con 800 iteraciones y se estabiliza este valor para cualquiera de las vistas e iteraciones estudiadas en el presente trabajo.

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados del presente trabajo muestran que el método LSQR-STF-FISTA es capaz de reconstruir las imágenes de un conjunto de sub-muestreo de las proyecciones y sin deterioro de la calidad de imagen. Se analizó con 45, 60, 90, 180 y 360 vistas.

Las técnicas de filtrado STF y de aceleración FISTA, al combinarse con el método LSQR, eliminan muy bien el ruido gaussiano introducido en las reconstrucciones para un número reducido de vistas e iteraciones. Con esto concluimos que no es necesario reconstruir una imagen con 360 vistas, ya que la calidad de la imagen con 60 vistas y 800 iteraciones es similar, y con ello se favorece la disminución de la dosis de radiación en pacientes.

Una disminución en la dosis de radiación corresponde a una disminución de las vistas en el proceso de la reconstrucción. Sin embargo, debemos ser consciente que el empleo de un menor número de vistas en la reconstrucción de la imagen puede ser susceptible de contener artefactos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido soportado por la Universitat Politècnica de València y financiado parcialmente por ANITRAN PROMETEOII/2014/008 de la Generalitat Valenciana de España.

## REFERENCIAS

1. Deans, Stanley R. *The Radon transform and some of its applications*. Courier Corporation, 2007.
2. Herman, Gabor T. *Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projections*. Springer Science & Business Media, 2009.
3. Donoho, David L. "Compressed sensing." *Information Theory, IEEE Transactions on* 52.4 (2006): 1289-1306.
4. Yu, Hengyong, and Ge Wang. "A soft-threshold filtering approach for reconstruction from a limited number of projections." *Physics in medicine and biology* 55.13 (2010): 3905.
5. Yu, Wei, and Li Zeng. "A Novel Weighted Total Difference Based Image Reconstruction Algorithm for Few-View Computed Tomography." (2014): e10934.
6. Paige, Christopher C., and Michael A. Saunders. "LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares." *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 8.1 (1982): 43-71.
7. Daubechies, Ingrid, Michel Defrise, and Christine De Mol. "An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint." *arXiv preprint math/0307152* (2003).
8. Beck, Amir, and Marc Teboulle. "A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems." *SIAM journal on imaging sciences* 2.1 (2009): 183-202.
9. González, Rafael C., and Richard E. Woods. *Tratamiento digital de imágenes*. Vol. 3. New York: Addison-Wesley, 1996.
10. Wang, Zhou, et al. "Image quality assessment: from error visibility to structural similarity." *Image Processing, IEEE Transactions on* 13.4 (2004): 600-612.
11. Yu, Zhicong, et al. "Simulation tools for two-dimensional experiments in x-ray computed tomography using the FORBILD head phantom." *Physics in medicine and biology* 57.13 (2012): N237.