

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño
Departamento de Máquinas y Motores Térmicos



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL



TRABAJO FIN DE GRADO
**Modelo de
Motor Virtual:
Optimización del proceso de cálculo**

Presentado por:
Roberto Alegre Usach

Dirigido por:
D. Francisco Payri González

Valencia, Junio de 2016

Resumen

La continua expansión del mercado automovilístico requiere una optimización de los distintos elementos que componen los motores con el fin de conseguir unas elevadas prestaciones así como unos bajos niveles de contaminación que cumplan las normativas europeas e internacionales cada vez más restrictivas. Para llevar a cabo esta optimización se recurre frecuentemente al modelado de los componentes del motor. De este modo se consigue observar tendencias fácilmente sin necesidad de llevar a cabo numerosos ensayos experimentales.

La simulación del flujo en el interior de conductos es un aspecto clave en este modelado, pues permite conocer cómo viajan las ondas de presión y temperatura y cuándo llegan a los distintos componentes del motor. La importancia de este proceso de cálculo radica en que requiere un coste computacional relativamente elevado si lo comparamos con otros elementos. Para llevar a cabo este cálculo se utilizan métodos numéricos, pues las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del flujo en el interior de conductos no poseen solución analítica salvo en casos sencillos. Por ello, una buena elección del método numérico a emplear permite, o bien reducir el tiempo de cálculo manteniendo la precisión, o bien mejorar la calidad de los resultados haciendo uso del mismo tiempo de cálculo.

Dos métodos ampliamente utilizados en este aspecto son los métodos de diferencias finitas y los de volúmenes finitos. Aunque tradicionalmente se han impuesto los primeros por requerir menor tiempo de cálculo, los métodos de volúmenes finitos presentan una ventaja fundamental: son conservativos. El avance de la informática, fundamentalmente del cálculo en paralelo, requiere estudiar si en la actualidad los métodos de volúmenes finitos no suponen un coste computacional tan elevado y, por tanto, representan una ventaja frente a los métodos de diferencias finitas.

Por ese motivo, en el presente trabajo se comparan distintos métodos numéricos en cuanto a precisión, pérdida de masa y tiempo de cálculo, extrayéndose conclusiones útiles para la simulación del flujo en el interior de conductos y su aplicación en un modelo de motor virtual.

Palabras clave: Motor virtual, Métodos numéricos, Volúmenes finitos, Diferencias finitas, Modelado 1-D.

Agradecimientos

Transcurridos 8 meses desde que me involucrara en el presente trabajo y 46 desde que comenzó mi andadura en el Grado en Ingeniería Aeroespacial, resulta imprescindible pensar en todas aquellas personas que han hecho posible que saliera adelante tanto el presente trabajo como la carrera.

En primer lugar, me gustaría agradecer el apoyo prestado en estos últimos meses por el personal del Instituto CMT-Motores Térmicos que ha colaborado de alguna manera u otra en este trabajo. En especial, me gustaría agradecer al director del trabajo, D. Francisco Payri, la confianza depositada en mí para la realización del mismo, así como por encontrar tiempo en su apretada agenda para supervisar el trabajo, dar consejos y proponer soluciones y mejoras. De igual modo, debo agradecer a Luis Miguel García-Cuevas su dedicación en el trabajo. Ha sido de gran ayuda estar diariamente al lado de una persona trabajadora, paciente, agradecida y, por lo que he podido ver en este año, incansable. No me puedo olvidar tampoco de Pedro Piqueras, a quien tengo gran admiración y que me acogió con los brazos abiertos en el departamento hace ya casi un año.

Y tan importantes como los nombrados anteriormente son todos aquellos profesionales de la enseñanza que a lo largo de mi vida me han inculcado la disciplina, el orden, el rigor y los conocimientos necesarios para poder estar ahora redactando un trabajo de esta entidad. Entre estas personas se incluyen tanto mis maestros de la enseñanza infantil y primaria, como los profesores de mi etapa en el instituto y, finalmente, aquellos que en estos últimos años me han transmitido conocimientos de Matemáticas, Física, Informática, Termodinámica, Empresa... necesarios para este trabajo.

A mis amigos de siempre también quiero dedicarles unas líneas, por *distraerme* y demostrarme que los estudios no lo son todo en esta vida. Y del mismo modo, a todos los compañeros que he tenido a lo largo de estos 4 años de carrera, por ayudarnos mutuamente y hacer sencillos unos estudios nada fáciles.

Y, por supuesto, no puedo dejar de dar las gracias a mi familia por su continuo apoyo, por estar siempre ahí, escuchando mis preocupaciones y dándome consejos en el día a día, en los buenos y los malos momentos. En especial, gracias a mis padres, a mi hermano y a mis abuelos; con vosotros *empezó todo*.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XIII
Lista de símbolos	XV
Documento I: Memoria	1
1. Introducción	3
1.1. Motivación del estudio	3
1.2. Objetivos del trabajo	5
1.3. Antecedentes	6
1.4. Viabilidad del trabajo	7
1.5. Estructura del trabajo	8
2. Métodos numéricos	9
2.1. Introducción	9
2.2. Ecuaciones de conservación	10
2.2.1. Ecuaciones para diferencias finitas	12
2.2.2. Ecuaciones para volúmenes finitos	19
2.3. Métodos de diferencias finitas	20
2.3.1. Método de Lax-Friedrichs	21
2.3.2. Método de Leapfrog	23
2.3.3. Método de Lax-Wendroff de dos pasos	23
2.4. Métodos de volúmenes finitos	28
2.4.1. Método de Godunov	31

ÍNDICE GENERAL

2.4.2. Esquemas MUSCL	35
3. Estudio de sensibilidad	43
3.1. Introducción	43
3.2. Tubo de choque	44
3.2.1. Planteamiento	44
3.2.2. Solución analítica	45
3.2.3. Resultados	49
3.3. Pulso de presión	66
3.3.1. Planteamiento	66
3.3.2. Solución analítica	68
3.3.3. Resultados	68
4. Aplicación a geometría compleja	77
4.1. Introducción	77
4.2. Modelo de turbina	79
4.3. Resultados	83
5. Conclusiones	93
5.1. Principales aportaciones y conclusiones	93
5.2. Trabajos futuros	96
Bibliografía	97
Documento II: Planos	99
6. Planos	101
Documento III: Pliego de condiciones	105
7. Pliego de condiciones	107
Documento IV: Presupuesto	115
8. Presupuesto	117

Índice de figuras

2.1. Comparación de los distintos niveles de simulación	10
2.2. Esquema de un volumen de control arbitrario	13
2.3. Discretización de un conducto mediante diferencias finitas	21
2.4. Discretización utilizada en métodos de diferencias finitas	22
2.5. Patrón utilizado en el método de Lax-Wendroff de dos pasos	24
2.6. Discretización de un conducto mediante volúmenes finitos	28
2.7. Discretización utilizada en el método de Godunov	31
2.8. Evolución de las ondas en el problema de Riemann aplicado en métodos de volúmenes finitos	33
2.9. Posibles casos en el problema de Riemann	34
2.10. Planteamiento de los esquemas MUSCL	36
2.11. Ejemplo de extrapolación que daría lugar a oscilaciones espurias	37
2.12. Ejemplo de extrapolación realizada utilizando un limitador	38
2.13. Limitadores de flujo habituales en problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	39
2.14. Incógnitas a resolver mediante las condiciones de contorno	41
3.1. Esquema de la evolución del fluido en el tubo de choque	44
3.2. Distribución característica de las magnitudes termodinámicas en el tubo de choque	46
3.3. Rectas características en el tubo de choque	48
3.4. Presiones en el tubo de choque en $t = 0,5$ ms	51
3.5. Temperaturas en el tubo de choque en $t = 0,5$ ms	52
3.6. Velocidades en el tubo de choque en $t = 0,5$ ms	53
3.7. Comparación de los tres limitadores programados utilizados en el esquema MUSCL	54
3.8. Efecto del número de nodos en la masa encerrada en el tubo de choque	55
3.9. Pérdida de masa a los 0,05 ms en el tubo de choque	56
3.10. Variación de energía cinética en el tubo de choque	57

ÍNDICE DE FIGURAS

3.11. Efecto del número de nodos en la energía cinética en el tubo de choque . . .	58
3.12. Tiempo invertido en el cálculo del tubo de choque en función del número de nodos y el método numérico	59
3.13. Tiempo relativo invertido en el cálculo del tubo de choque en función del número de nodos y el método numérico	60
3.14. Geometría empleada para estudiar el tubo de choque de área variable . . .	61
3.15. Variables termodinámicas en un tubo de choque con área variable	62
3.16. Efecto del número de nodos en la masa encerrada en el tubo de choque con área variable	64
3.17. Efecto del número de nodos en la energía cinética en el tubo de choque con área variable	65
3.18. Evolución de las características en el pulso de presión	67
3.19. Evolución del pulso de presión	69
3.20. Pulso de presión transcurridos 3,5 ms	71
3.21. Efecto del número de nodos en la masa encerrada en el pulso de presión . .	72
3.22. Pérdida relativa de masa a los 0,05 ms en el pulso de presión	73
3.23. Efecto del número de nodos en la energía cinética en el pulso de presión . .	74
4.1. Turbina y conductos simulados con métodos numéricos	79
4.2. Proceso termodinámico característico de una turbina	80
4.3. Geometría del modelo unidimensional de turbina utilizado	81
4.4. Componentes impuestas de la presión del pulso 1	84
4.5. Componentes impuestas de la presión del pulso 2	84
4.6. Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 1 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina 1D	86
4.7. Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 2 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina 1D	87
4.8. Variación de caudal entre la entrada y la salida del dominio fluido	88
4.9. Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 1 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina Q2D	89
4.10. Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 2 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina Q2D	89
4.11. Tiempo invertido en la simulación de la turbina en función del tamaño de la malla y el método numérico	90
4.12. Detalle del tiempo invertido en la simulación de la turbina en función del tamaño de la malla y el método numérico	91
4.13. Tiempo adimensional invertido en la simulación de la turbina en función del tamaño de la malla y el método numérico	92

ÍNDICE DE FIGURAS

6.1. Esquema de la instalación experimental utilizada para ensayar la turbina .	101
6.2. Esquema de la sala donde se ensayó la turbina	102
6.3. Localización del puesto de trabajo en el edificio 6D	103
6.4. Localización del puesto de trabajo y la sala de ensayos en la universidad .	104

Índice de tablas

2.1. Patrones de distintos métodos de diferencias finitas	25
3.1. Condiciones iniciales en el tubo de choque	50
3.2. Pérdida de masa por el método de Lax-Wendroff en el tubo de choque . . .	56
5.1. Comparación de tiempos de cálculo en el tubo de choque	94
5.2. Comparación de tiempos de cálculo con la turbina simulada	95
8.1. Presupuesto de la Actividad 1	118
8.2. Presupuesto de la Actividad 2	118
8.3. Presupuesto de la Actividad 3	119
8.4. Presupuesto de la Actividad 4	119
8.5. Presupuesto de la Actividad 5	120
8.6. Presupuesto de la Actividad 6	120
8.7. Amortización de los equipos informáticos utilizados	121
8.8. Presupuesto de los recursos comunes	121
8.9. Presupuesto global del trabajo sin impuestos	121
8.10. Presupuesto global del trabajo con IVA	122

Lista de símbolos

Latinos

A	—	Área lateral
a	—	Velocidad del sonido
C	—	Vector de términos fuente
D	—	Diámetro hidráulico
E	—	Energía interna
e	—	Energía interna específica
F	—	Vector de flujo
f	—	Coefficiente de fricción
G	—	Término de fricción en las ecuaciones de conservación
H	—	Entalpía absoluta
h	—	Entalpía específica
\bar{I}	—	Matriz identidad
\dot{m}	—	Gasto másico
N	—	Régimen de giro
P	—	Perímetro
p	—	Presión
Q	—	Calor
q	—	Tasa de transferencia de calor por unidad de masa
r	—	En los métodos MUSCL, relación entre el vector de estado de una celda y sus celdas adyacentes
S	—	Superficie transversal
T	—	Temperatura
t	—	Tiempo, coordenada temporal
u	—	Velocidad
V	—	Vector cuyo único término es la presión en la ecuación del momento lineal
V	—	Volumen
W	—	Vector de estado
W	—	Trabajo
w	—	Componente del vector de estado
x	—	Distancia, coordenada espacial
Y	—	Fracción másica

Griegos

α	—	En una turbina, ángulo absoluto del flujo
β	—	En el Método de las Características, valor de la línea característica reflejada
γ	—	Relación de calores específicos
η	—	Rendimiento

LISTA DE SÍMBOLOS

λ	—	En el Método de las Características, valor de la línea característica incidente
ν	—	Número de Courant
ρ	—	Densidad
τ	—	Esfuerzo cortante
ϕ	—	Función limitadora de flujo

Subíndices

0	—	Condiciones de parada. Entrada del estátor
1	—	Salida del estátor
2	—	Salida del rotor
i	—	Nodo o volumen de cálculo
j	—	Especie genérica
rt	—	Rotor
st	—	Estátor
Ts	—	Total a estático

Superíndices

L	—	Celda o frontera izquierda de la celda considerada
n	—	Instante de cálculo
R	—	Celda o frontera derecha de la celda considerada
*	—	Corregido con $\sqrt{T/p}$

Siglas

0D	—	Cero dimensional
1D	—	Unidimensional
2D	—	Bidimensional
3D	—	Tridimensional
CIR	—	Courant-Isaacson-Rees
DNS	—	Direct Numerical Simulation
FCT	—	Flux Corrected Transport
GR	—	Grado de Reacción
HLL	—	Harten-Lax-van Leer
LES	—	Large Eddy Simulation
MCIA	—	Motor de Combustión Interna Alternativo
MUSCL	—	Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws
RANS	—	Reynolds-Averaged Navier–Stokes
TGV	—	Turbina de Geometría Variable
TVD	—	Total Variation Diminishing
WAM	—	Wave Action Model

Documento I: Memoria

Capítulo 1

Introducción

Índice

1.1. Motivación del estudio	3
1.2. Objetivos del trabajo	5
1.3. Antecedentes	6
1.4. Viabilidad del trabajo	7
1.5. Estructura del trabajo	8

1.1. Motivación del estudio

Los motores de combustión interna alternativos suponen una de las muestras más representativas del avance en nuestra sociedad. Incorporan infinidad de elementos mecánicos, eléctricos y electrónicos que hacen de cada motor una pequeña obra de arte.

Como bien sabemos, la industria automovilística no se detiene, sino que continuamente busca soluciones para optimizar los motores. En este aspecto, no solo se busca una mejora de los parámetros efectivos, como pueden ser la potencia o el par, sino que cada vez crece en mayor medida la preocupación por el medio ambiente, motivo por el cual se dictan estrictas normativas internacionales cuya finalidad es la reducción del consumo y las emisiones.

En este contexto, el Instituto Universitario CMT-Motores Térmicos realiza una labor internacionalmente reconocida, tanto desde el punto de vista académico como investigador. Entre los distintos proyectos que en la actualidad se desarrollan en él destaca la creación de un modelo de motor virtual que permita simular ciclos para obtener tendencias en emisiones y en la evolución térmica del motor. Consiste, pues, en la integración de la experiencia y el *know how* de las distintas partes del instituto en un solo proyecto,

1. Introducción

de ahí que involucre un elevado número de personal, coordinado por D. Francisco Payri, director de CMT-Motores Térmicos.

Uno de los objetivos de este proyecto consiste en dotar al motor virtual de cierta flexibilidad, que permita realizar simulaciones de ciclos de homologación prácticamente a tiempo real, así como estudiar en otras ocasiones fenómenos que requieren de mayor precisión, como puede ser la acústica del motor. No obstante, en ambos casos, se busca una buena estimación de la temperatura de salida de turbina, pues influirá notablemente en el cálculo de las emisiones, lo cual es otro de los objetivos del proyecto.

Para llevar a cabo este motor virtual, se ha dividido el proyecto en varios grupos de trabajo de modelado, cuyo código deberá ser integrado conjuntamente, así como de ensayos experimentales con los cuales validar la implementación. El presente Trabajo Fin de Grado se engloba dentro del grupo de trabajo relacionado con el modelado termo y fluidodinámico del motor. Este modelado parte de OpenWAM, un código creado por CMT-Motores Térmicos que simula los fenómenos de ondas en conductos.

Concretamente, en este Trabajo Fin de Grado se busca optimizar el proceso de cálculo de los fenómenos de transmisión de masa, cantidad de movimiento y energía en el interior de los conductos, que supone un coste computacional relativamente elevado. Estos fenómenos no se pueden simular mediante modelos de caja negra en los cuales a partir de una entrada se calcula directamente una salida, sino que es necesario resolver continuamente el proceso. Otros elementos del motor, como el catalizador de oxidación sí se pueden aproximar mediante modelos 0D¹ de caja negra.

Si comparamos el caso estudiado en este trabajo con otro donde se requiere utilizar métodos numéricos para resolver las ecuaciones, como es la transmisión de calor entre los distintos componentes del motor, por ejemplo, observamos la importancia de reducir el coste computacional del primero.

La transmisión de calor se aborda por medio de un modelo nodal, que concentra las propiedades de la materia en determinados puntos conocidos como nodos. La evolución de las propiedades de estos nodos es relativamente lenta, de modo que permite realizar los cálculos del orden de 1 vez por ciclo del motor sin riesgo de divergir.

Por su parte, los fenómenos de ondas, también discretizados mediante nodos, son mucho más rápidos, pues las ondas se mueven a velocidad $u \pm a$, siendo u la velocidad del fluido y a la del sonido. Por ese motivo, se hace necesario realizar estos cálculos numerosas veces por ciclo para poder reproducir el comportamiento del fluido en el interior de los conductos, de ahí que una pequeña optimización acabe resultando en un gran ahorro de tiempo en la simulación del modelo completo de motor virtual.

¹Un elemento se considera 0-dimensional (0D) si se asume que sus propiedades son constantes en todo su dominio. Si estas propiedades varían fundamentalmente con una única dirección, se considera 1-dimensional (1D).

Tradicionalmente se han utilizado en OpenWAM métodos de diferencias finitas, los cuales tienen la característica de no ser conservativos, es decir, al introducir un gasto de 1 kg/s en la entrada, podemos obtener un gasto de salida de 0,99 kg/s, por ejemplo. Los métodos de volúmenes finitos, por el contrario, son plenamente conservativos debido a su formulación. No obstante, se acababa utilizando métodos de diferencias finitas por tener menor coste computacional.

Con el avance de la informática, especialmente del cálculo en paralelo, surge, ante un proyecto de estas características, la necesidad de estudiar si los métodos de diferencias finitas siguen siendo los más convenientes o si, por el contrario, los cálculos que requieren efectuar los métodos de volúmenes finitos ahora son más eficientes y resultan más interesantes, pues aseguran conservar ciertas variables termodinámicas. La escasez de bibliografía actual sobre este tema, unida al hecho de que programas similares a OpenWAM se decanten por el uso de volúmenes finitos, es un aliciente añadido al estudio.

1.2. Objetivos del trabajo

La principal tarea a realizar en el presente Trabajo Fin de Grado consiste en comparar métodos de diferencias y volúmenes finitos, estudiando cómo varían la precisión y el tiempo de cálculo según el tamaño de la malla utilizada.

Para conseguir este objetivo general se plantean varios puntos concretos a seguir:

1. Recopilar información e implementar varios métodos de volúmenes finitos en *C++*, lenguaje en el que se realiza el modelo de motor virtual por su elevada eficiencia computacional.
2. Programar condiciones de contorno para estos métodos, entre las que se encuentran variación de la sección, extremo cerrado, extremo abierto a la atmósfera, unión de tubos o ramificaciones, así como incluir en los métodos la pérdida de carga en los conductos y la transmisión de calor.
3. Validar la implementación mediante problemas cuya solución es conocida, como el tubo de choque o la evolución de un pulso de presión.
4. Realizar un estudio de sensibilidad con el que estudiar el efecto del tamaño de la malla y del método numérico utilizado. Para ello, a los métodos de volúmenes finitos programados se añadirá un método de diferencias finitas que ya se encontraba implementado, si bien se ha depurado su código para aumentar la velocidad de cálculo. En este sentido, se comenzará estudiando la sensibilidad al tamaño de malla en los problemas utilizados anteriormente para validar y se llevará a cabo una aplicación más realista que consiste en la simulación de una turbina.

Cumpliendo los anteriores objetivos se dispondrá de unas conclusiones útiles para aplicar en el modelo de motor virtual, que indiquen cuál será el método numérico a utilizar en cada situación, esto es, según se busque precisión en las variables instantáneas, precisión únicamente en los resultados globales o reducción del tiempo de cálculo.

Asimismo, este trabajo le servirá al autor para finalizar los estudios del Grado en Ingeniería Aeroespacial y afianzar su conocimiento en programación, métodos numéricos y tratamiento de datos, así como a iniciarse en su labor investigadora.

1.3. Antecedentes

Como ya se ha comentado anteriormente, OpenWAM es la base del modelo de motor virtual para simular el comportamiento del fluido en el interior de los conductos. Se trata de un código abierto, creado por CMT-Motores Térmicos y desarrollado especialmente para resolver la termo y fluidodinámica del flujo compresible en aquellos elementos que pueden considerarse 0 y 1-dimensionales, como los conductos de un motor de combustión interna alternativo (MCIA).

Este código fue inicialmente desarrollado por CMT-Motores térmicos en 1984 [1] utilizando el Método de las Características. En los siguientes años el algoritmo se fue optimizando, mejorando la conservación de las propiedades a lo largo de los conductos y, en especial, la interacción del flujo con las condiciones de contorno.

El Método de las Características presenta varios problemas de los que se hablará en el capítulo 2. Por ello, en 1993, tras realizar varios estudios, se concluyó que los métodos de diferencias finitas eran más adecuados para resolver flujo compresible en conductos que el Método de las Características, motivo por el cual se modificó el algoritmo de OpenWAM introduciendo dos métodos de diferencias finitas de segundo orden: el método de 2 pasos de Lax-Wendroff y el predictor-corrector de MacCormack. No obstante, el Método de las Características se sigue utilizando hoy en día para el cálculo de las condiciones de contorno en estos métodos de diferencias finitas.

Estos métodos, por ser de segundo orden, introducen oscilaciones espurias que alejan la solución de la real, especialmente en la cercanía de discontinuidades como las que se producen al abrir y cerrar las válvulas de admisión y escape. Por ese motivo, más adelante se implementaron esquemas TVD² y técnicas FCT³, de modo que hoy en día es posible elegir entre varios métodos según se busque resultados rápidos o precisos.

²Los métodos TVD, del inglés *Total Variation Diminishing* son aquellos que capturan discontinuidades sin añadir oscilaciones.

³Las técnicas FCT, del inglés *Flux-Corrected Transport* son métodos conservativos especialmente útiles en la resolución de ondas de choque o discontinuidades de contacto, que consisten en la combinación de métodos de primer y segundo orden.

En paralelo a esta mejora de los métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones de conservación en conductos, se han ido incorporando a OpenWAM submodelos de cálculo de diferentes elementos del motor, como un modelo 0D de llenado y vaciado de los cilindros, modelos 1D y cuasi 2D para el compresor y la turbina o un modelo 1D para simular el comportamiento del flujo en el interior del filtro de partículas diésel. Todo esto constituye un completo software que se puede descargar libremente desde la página web de OpenWAM.

OpenWAM, por tanto, se trata de un código cuya base para simular los flujos son los métodos de diferencias finitas. Como se muestra en este trabajo, estos métodos también presentan ciertas desventajas que podrían solucionarse con métodos de volúmenes finitos. No obstante, estudios como el realizado por Winterbone y Pearson en el año 2000 en [2] indicaban que el coste computacional de los métodos de volúmenes finitos era considerablemente superior al de diferencias finitas, lo cual desaconsejaba modificar la formulación del código a volúmenes finitos.

En cambio, existen códigos comerciales dedicados a la simulación de flujo en conductos y de diversos elementos del motor que, a diferencia de OpenWAM, utilizan métodos de volúmenes finitos. GT-Power y Ricardo Wave son ejemplos de estos códigos. El hecho de que estas empresas se hayan decantado por el método de volúmenes finitos puede deberse a que los avances de la informática en los últimos años hayan beneficiado en gran medida a los cálculos que se deben realizar con volúmenes finitos. De ahí que, a la hora de afrontar un proyecto como el del motor virtual, surja la necesidad de estudiar detalladamente estos métodos con las herramientas informáticas disponibles hoy en día.

1.4. Viabilidad del trabajo

El presente trabajo se desarrolla en el Instituto Universitario CMT-Motores Térmicos de la Universitat Politècnica de València. Se trata de un centro en el que trabajan profesionales capaces de brindar el apoyo que requiere un trabajo de estas características, como doctores, doctorandos y técnicos altamente cualificados. Por otra parte, cuenta con los recursos informáticos necesarios para realizar cálculos y simulaciones avanzadas, así como numerosas licencias de software de ingeniería.

En concreto, para la realización de este trabajo se hace uso del programa MATLAB, cuya licencia es proporcionada por la universidad, y de software académico libre como SmartGit, Eclipse o Microsoft Visual Studio. Asimismo, se emplean modelos y cálculos teóricos y experimentales realizados en el departamento con anterioridad y que han sido aprovechados para validar los métodos numéricos implementados.

Por todos estos motivos, un trabajo de semejantes características resulta totalmente viable.

1.5. Estructura del trabajo

El presente trabajo se encuentra dividido en cuatro documentos: *Memoria*, *Planos*, *Pliego de Condiciones* y *Presupuesto*.

La *Memoria* consta, a su vez, de cinco capítulos donde se describen los fundamentos de la optimización del proceso de cálculo del modelo de motor virtual. En el primer capítulo se expone este proyecto y se justifica la necesidad de llevar a cabo un estudio sobre el proceso de cálculo. Asimismo, se plantean los objetivos concretos a conseguir con el trabajo y se recogen los antecedentes más importantes a tener en cuenta para la realización del mismo.

El segundo capítulo explica detalladamente los métodos numéricos estudiados en el trabajo, esto es, los métodos de diferencias finitas y volúmenes finitos. Para ello, se exponen las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del flujo en conductos y se plantea la formulación de cada uno de los métodos, remarcando sus ventajas e inconvenientes.

En el tercer capítulo se realiza un estudio de sensibilidad de los métodos descritos en el capítulo 2. Para ello, se estudian dos problemas típicos modificando el tamaño de la malla y el método numérico empleado. No obstante, puesto que estos problemas son poco representativos de lo que sucede en un motor de combustión interna alternativo, en el capítulo 4 se simula una turbina que recibe pulsos de presión. Con los resultados obtenidos en estos apartados en cuanto a precisión y tiempo de cálculo se extraen conclusiones que se exponen en el quinto y último capítulo de la *Memoria*.

En el documento *Planos* se muestra la disposición de los equipos utilizados para ensayar la turbina utilizada en el capítulo 4 para validar los resultados obtenidos. También se recoge un esquema de las instalaciones donde se llevó a cabo este ensayo y del puesto de trabajo donde se desarrolló el mismo, así como su localización en la universidad.

En el *Pliego de Condiciones* se describen las ordenanzas de seguridad e higiene en el puesto en el cual se ha realizado el presente Trabajo Fin de Grado. Se explica, además, cómo se ha aplicado cada una de estas condiciones durante la realización del mismo.

Finalmente, el documento *Presupuesto* cierra el trabajo con el desglose de los costes económicos que ha supuesto la realización del mismo.

Capítulo 2

Métodos numéricos

Índice

2.1. Introducción	9
2.2. Ecuaciones de conservación	10
2.2.1. Ecuaciones para diferencias finitas	12
2.2.2. Ecuaciones para volúmenes finitos	19
2.3. Métodos de diferencias finitas	20
2.3.1. Método de Lax-Friedrichs	21
2.3.2. Método de Leapfrog	23
2.3.3. Método de Lax-Wendroff de dos pasos	23
2.4. Métodos de volúmenes finitos	28
2.4.1. Método de Godunov	31
2.4.2. Esquemas MUSCL	35

2.1. Introducción

El principal objetivo de este capítulo consiste en presentar los métodos numéricos analizados en este trabajo. Para ello es necesario conocer las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido en el interior de un conducto. En función de la discretización utilizada para resolver estas ecuaciones nos encontraremos con métodos pertenecientes a las familias de diferencias finitas o volúmenes finitos¹. Dentro de cada una de estas familias existen numerosos métodos según la forma de aproximar numéricamente las ecuaciones.

¹Aunque existen otras familias, éstas son las más extendidas en la simulación del flujo en el interior de conductos.

Por ello, en este capítulo se explican los métodos más utilizados y se remarca la importancia de los elegidos para realizar el estudio del capítulo 3. Asimismo, se mostrará en cada caso el procedimiento a llevar a cabo para incorporar las condiciones de contorno, pues según la formulación empleada deberemos calcular cómo el flujo interacciona con las singularidades de un modo u otro.

2.2. Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos son expresiones matemáticas que definen la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía en un volumen de control. Como ya se ha comentado, estas ecuaciones no tienen solución analítica salvo en casos extremadamente sencillos. Por este motivo, se realizan aproximaciones numéricas cuyo coste computacional es proporcional a la precisión de los resultados obtenidos. Para ilustrar las características de los métodos numéricos que se analizan en el presente trabajo, se muestra en la Figura 2.1 un esquema con los métodos habitualmente utilizados hoy en día en la resolución de las ecuaciones de la mecánica de fluidos, remarcando en **negrita** aquellas propiedades del flujo y sus ecuaciones que se resolverán en los siguientes apartados.

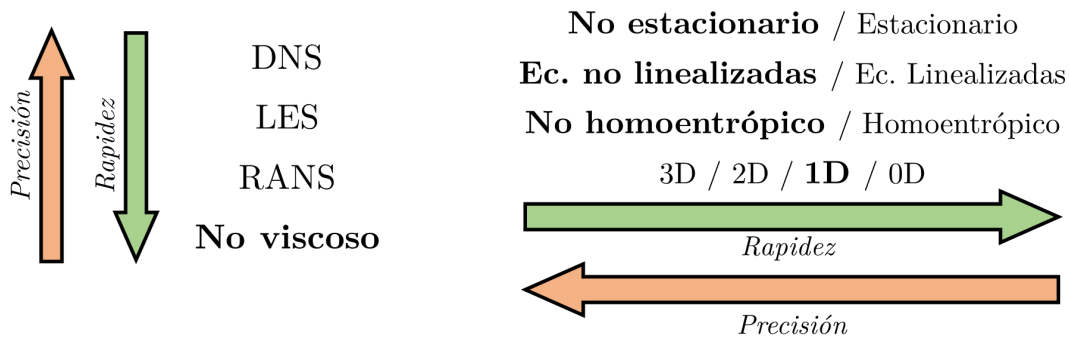


Figura 2.1: Comparación de los distintos niveles de simulación

Para resolver completamente las ecuaciones de la mecánica de fluidos es necesario incluir las escalas más pequeñas de la turbulencia, lo cual requiere utilizar mallas inferiores a $10 \mu m$. Esta es la base de las simulaciones DNS², que son las más precisas y requieren un elevado coste computacional. Por ejemplo, para simular un flujo 2D en un cuadrado de lado $10 cm$ se necesitarían más de 100 millones de nodos. Esto hace que únicamente sean viables hoy en día a nivel investigador para conocer mejor la turbulencia.

²Del inglés *Direct Numerical Simulation*.

En la mayoría de aplicaciones de ingeniería no se requiere conocer el efecto local de la turbulencia, sino únicamente los valores medios de las magnitudes, por lo que no es necesario resolver todas las escalas de la turbulencia. Si sustituimos las componentes instantáneas de las ecuaciones de la mecánica de fluidos por sus componentes media y fluctuante se obtienen las ecuaciones de Reynolds o RANS³. De este modo, las componentes medias pueden calcularse fácilmente utilizando celdas mucho más grandes que en DNS, pero aparecen ahora 6 incógnitas nuevas, que componen el tensor de esfuerzos de Reynolds, debidas a las componentes fluctuantes. Estas 6 incógnitas se aproximan utilizando modelos de turbulencia, que tratan de imitar la física de los torbellinos que se pierde al realizar la descomposición anterior.

Entre modelar la turbulencia en RANS o resolver las ecuaciones directamente (DNS) existe un paso intermedio que consiste en resolver únicamente las escalas más grandes de la turbulencia y modelar aquellas más pequeñas. Las simulaciones LES⁴ resuelven completamente las mismas ecuaciones que DNS para los torbellinos más grandes y utilizan ecuaciones de Reynolds con modelos de turbulencia para calcular los efectos de los torbellinos de pequeña escala. Como puede deducirse, esto permite utilizar mallas más grandes que en DNS, pero de menor tamaño que al modelar la turbulencia en RANS.

No obstante, por lo general, en los conductos de un motor no es necesario modelar la turbulencia. Al ser un flujo prácticamente unidimensional, tiene poco interés calcular o modelar las componentes fluctuantes o la evolución de la capa límite, pues tienen poco efecto en el comportamiento global. En estos casos podemos suponer que el fluido es no viscoso y simplificar notablemente las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Esto no es aplicable a otras zonas del motor donde claramente el flujo tiene más de una componente, como el interior de los cilindros. Estos modelos 1D de acción de ondas hoy en día siguen siendo útiles en las etapas de pre-diseño y optimización de los MCIA, contribuyendo a la reducción del tiempo y los costes de desarrollo.

Cabe remarcar que los métodos numéricos empleados en el trabajo no suponen exactamente que el fluido sea no viscoso. Como veremos más adelante en este mismo capítulo, el factor de fricción f es una forma de modelar los esfuerzos que aparecen entre la pared (en reposo) y el fluido (en movimiento). Mientras que en un fluido no viscoso no habría ningún esfuerzo adicional, en un fluido real aparecen esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad. Por ese motivo, estos esfuerzos se representan mediante el factor de fricción, sin necesidad de modelar en ningún caso la turbulencia ni la capa límite, que implicarían mayor coste computacional sin mejorar excesivamente los resultados.

Por otra parte, los métodos considerados en el modelo de motor virtual sí tienen en cuenta variaciones temporales de las variables del problema, fenómenos no lineales y variaciones de entropía, como se podía observar en la Figura 2.1. Esto se debe a que claramente el flujo en los conductos es no estacionario, pues continuamente se abren y

³Del inglés *Reynolds Averaged Navier-Stokes*.

⁴Del inglés *Large Eddy Simulation*.

cierran válvulas que generan ondas en ambos sentidos del tubo. Además, estas ondas poseen una amplitud no despreciable e introducen cambios de entropía, por lo que no podemos realizar la aproximación lineal ni considerar flujo homoentrópico.

Para explicar la formulación de los métodos de diferencias y volúmenes finitos resulta conveniente partir de dos formulaciones distintas de las mismas ecuaciones de la mecánica de fluidos particularizadas para flujo no viscoso, es decir, las ecuaciones de Euler. En primer lugar, se expone la formulación a utilizar mediante métodos de diferencias finitas, que se basan en obtener la solución fuerte de las ecuaciones de conservación, es decir, en obtener la solución en todo punto del dominio fluido. Por ello se obtienen las soluciones suponiendo un volumen de control infinitesimal.

Por el contrario, en los métodos de volúmenes finitos se busca obtener la solución débil de las ecuaciones de conservación, esto es, se obtiene la solución integrando previamente. Por este motivo, se parte de las ecuaciones de Euler sin ninguna simplificación y se integrarán más adelante en todos los distintos volúmenes para obtener esta solución débil.

2.2.1. Ecuaciones para diferencias finitas

Antes de derivar estas ecuaciones, conviene recordar que las ecuaciones de conservación expresan la tasa de variación de una determinada propiedad en un volumen de control en función del efecto neto del flujo en las fronteras de este volumen y de los términos fuente que haya en el interior del mismo. Un esquema de este volumen de control se muestra en la Figura 2.2. Todas las magnitudes que aparecen en esta figura únicamente dependen de la coordenada espacial x y del tiempo t . La variación de área hace que la última afirmación no sea completamente verdadera, ya que la velocidad, por ejemplo, deberá llevar cierta componente radial que cambia según la distancia al centro. No obstante, suponiendo que es suficientemente pequeña, podemos aproximar el flujo a cuasi unidimensional y utilizar las ecuaciones que se deducen a continuación.

Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad, o ecuación de conservación de la masa, impone que la variación de la masa en el interior de un volumen de control es igual a la diferencia entre el flujo que sale de él y el que entra. Si la longitud de este volumen es dx y su sección transversal, S , la variación de masa en el volumen de control es:

$$\frac{\partial(dm)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot dV)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot S \cdot dx)}{\partial t} \quad (2.1)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que el flujo o gasto másico se puede expresar como $\dot{m} = \rho \cdot u \cdot S$, su variación neta a lo largo del volumen de control queda de la siguiente

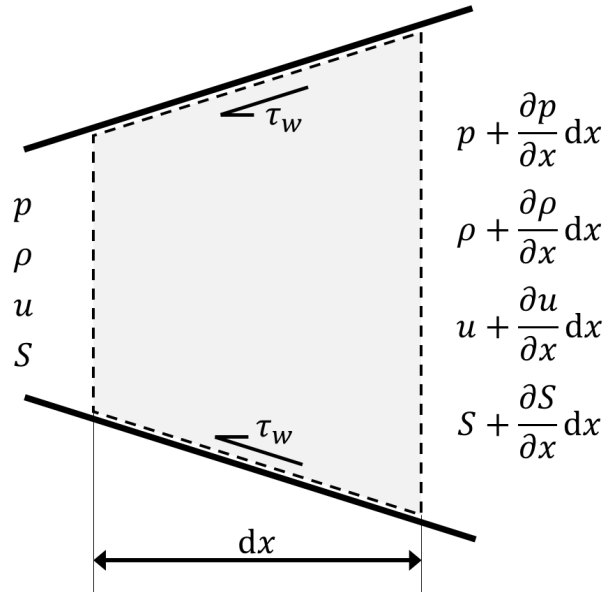


Figura 2.2: Esquema de un volumen de control arbitrario

forma:

$$\frac{\partial(\dot{m})}{\partial x} dx = \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot S)}{\partial x} dx \quad (2.2)$$

Si este último término es positivo, es decir, sale más fluido del que entra, el volumen de control se está vaciando. Teniendo esto en cuenta, la ecuación de continuidad se puede expresar como sigue:

$$\frac{\partial(\rho \cdot S \cdot dx)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot S)}{\partial x} dx \quad (2.3)$$

Ecuación del momento lineal

La conservación del momento lineal implica que la suma de todas las fuerzas que actúan en la frontera del volumen de control sean iguales a la variación de momento lineal del fluido en el interior del volumen. Es, por tanto, una aplicación de la segunda ley de Newton.

La fuerza neta que aparece en la frontera se debe a varias componentes. La primera de ellas es la diferencia de presión entre las fronteras del volumen de control, que está formada por la diferencia de presiones entre la entrada y la salida del volumen de control y por la

2. Métodos numéricos

componente horizontal de la fuerza que ejerce la presión en las paredes laterales cuando hay variación de área en el volumen de control:

$$-\frac{\partial(p S)}{\partial x} dx + p \frac{dS}{dx} dx \quad (2.4)$$

El signo negativo se debe al criterio de signos empleado, que considera positivas las fuerzas que actúan en la dirección x .

En segundo lugar, debemos considerar los esfuerzos cortantes que actúan entre el fluido en movimiento y las paredes estacionarias del conducto. Estas fuerzas se pueden modelar mediante un esfuerzo cortante τ_w que se opone al movimiento del fluido, como se puede observar en la Figura 2.2. Para el volumen infinitesimal que estamos considerando, esta fuerza superficial vendrá dada por la ecuación 2.5, donde D es el diámetro equivalente del conducto⁵.

$$-\tau_w dA = -\tau_w \pi D dx \quad (2.5)$$

Para evaluar el esfuerzo cortante se suele definir el factor de fricción f , los cuales se relacionan por medio de la expresión 2.6, donde aparecen las incógnitas ρ y u .

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho u |u| f \quad (2.6)$$

El factor de fricción f viene dado por el diagrama de Moody o distintas correlaciones que pueden encontrarse en [3] y que modelan el valor de f en función del número de Reynolds $Re = \frac{\rho u D}{\mu}$ y la rugosidad relativa del conducto. El cálculo de este valor supone un proceso iterativo, pues requiere el cálculo previo del número de Reynolds. Por este motivo, se recurre frecuentemente a asignar un valor constante a f comprendido entre 0,004 y 0,010 o a estimar su valor con los datos del anterior paso temporal.

Si tenemos en cuenta que estamos desarrollando las ecuaciones para un fluido unidimensional no viscoso, tiene poco sentido calcular el parámetro de fricción. No obstante, como ya se ha comentado, no existen fluidos sin viscosidad, por lo que este factor es una forma de corregir el comportamiento del ideal siguiendo utilizando las ecuaciones simples del caso no viscoso. La viscosidad actúa, por tanto, como un término sumidero, que absorbe cantidad de movimiento.

Una vez calculado el sumatorio de fuerzas que actúan sobre el volumen de control, buscamos cómo expresar la variación del momento lineal en el interior del mismo. De un

⁵El diámetro equivalente de un conducto, o diámetro hidráulico, es un término utilizado en la mecánica de fluidos para tratar tubos de cualquier geometría del mismo modo que los tubos circulares. Su valor es $D = 4 \frac{S}{P}$, donde S es la sección transversal del conducto y P , su perímetro.

modo similar al que hacíamos con la conservación de la masa, la variación del momento lineal se debe al cambio instantáneo de momento en el interior del volumen y al flujo neto de momento que entra y sale por las superficies del volumen:

$$\frac{\partial(u \, dm)}{\partial t} + \frac{\partial(u \, \dot{m})}{\partial x} dx = \frac{\partial(u\rho S \, dx)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S u^2)}{\partial x} dx \quad (2.7)$$

Igualando las fuerzas y la variación de momento lineal, la segunda ecuación de conservación viene dada por:

$$-\frac{\partial(pS)}{\partial x} dx + p \frac{dS}{dx} dx - \frac{1}{2} \rho u |u| f \pi D \, dx = \frac{\partial(u\rho S \, dx)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S u^2)}{\partial x} dx \quad (2.8)$$

En general, existe una ecuación de conservación del momento lineal en cada una de las dimensiones características del problema. Por estar suponiendo flujo unidimensional, tan solo se hará uso de una de ellas.

Ecuación de la energía

Si la ecuación de conservación del momento lineal se obtenía a partir de la segunda ley de Newton, la ecuación de la energía se puede obtener a partir del primer principio de la Termodinámica, según el cual la variación de la energía interna en un determinado volumen de control es igual a la diferencia entre el calor intercambiado por el volumen a través de sus paredes y el trabajo realizado por o sobre este volumen de control:

$$Q - W = \Delta U \quad (2.9)$$

Si derivamos el primer principio para considerar variaciones temporales, obtenemos la ecuación 2.10, donde E_0 es la energía interna total (o energía interna de parada) del volumen de control y H_0 , la entalpía total.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial x} dx \quad (2.10)$$

La variación de la energía interna total se puede escribir a partir de la energía interna específica de parada e_0 , la cual, por definición, depende de la energía interna específica y la velocidad u :

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\partial(e_0 \rho S \, dx)}{\partial t} = \frac{\partial((e + \frac{1}{2}u^2) \rho S \, dx)}{\partial t} \quad (2.11)$$

2. Métodos numéricos

Del mismo modo, la variación de entalpía de parada total se escribe a partir de la entalpía específica de parada, la cual está relacionada con la energía interna específica de parada:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} dx = \frac{\partial(h_0 \rho S u)}{\partial x} dx = \frac{\partial((e_0 + \frac{p}{\rho}) \rho S u)}{\partial x} dx \quad (2.12)$$

Por otra parte, la transferencia de calor desde las paredes de los conductos al volumen de control se puede calcular fácilmente a partir de la tasa de transferencia de calor por unidad de masa q :

$$\dot{Q} = q \rho S dx \quad (2.13)$$

Teniendo en cuenta que en general el trabajo realizado por o sobre el volumen de control es nulo en un conducto, por no existir desplazamiento del mismo, la ecuación de conservación de la energía se puede escribir como:

$$q \rho S dx = \frac{\partial(e_0 \rho S dx)}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 \rho S u)}{\partial x} dx \quad (2.14)$$

Resumiendo, se han obtenido las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido compresible en el interior de un conducto con variación de área, fricción en la pared y transferencia de calor. Desplazando todos los términos a un único lado de la igualdad y dividiendo por la longitud del volumen de control dx , obtenemos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas no lineales, formado por las ecuaciones de

continuidad,

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

momento lineal

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p) S}{\partial x} - p \frac{dS}{dx} + \frac{1}{2} \rho u |u| f \pi D = 0 \quad (2.16)$$

y energía.

$$\frac{\partial(e_0 \rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 \rho S u)}{\partial x} - q \rho S = 0 \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones consideran la presencia de un único fluido en el interior del conducto. Por cada especie adicional que queramos considerar en el problema es necesario añadir

una nueva variable al sistema: Y_j , que representa la fracción másica de la especie j en la mezcla. El sistema se completa con tantas ecuaciones de conservación de especies como especies consideremos menos 1. Las ecuaciones, teniendo en cuenta que en el interior del volumen de control el flujo se supone no reactivo, se corresponden con la ecuación 2.18 particularizada para cada especie.

$$\frac{\partial(\rho SY_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u SY_j)}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

El hecho de no utilizar n ecuaciones de conservación de especies, sino $n - 1$, se debe a que la concentración de la última especie se puede calcular sin necesidad de utilizar otra ecuación de conservación. Simplemente, teniendo en cuenta que el sumatorio de las fracciones másicas de todas las especies es la unidad y suponiendo que el flujo no es reactivo en el interior del volumen de control:

$$\sum_{j=1}^n Y_j = 1 \rightarrow Y_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \quad (2.19)$$

Por este motivo, cuando solo tenemos una especie, o cuando se simplifican todas las especies a una sola, no se utiliza ninguna ecuación adicional a las de continuidad, momento lineal y energía. En realidad, la ecuación de continuidad equivale a una ecuación de conservación de especies cuando la fracción másica es 1, es decir, para la mezcla completa.

Para resolver las ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.17 frecuentemente se recurre a expresarlas de forma conservativa. De este modo los métodos numéricos son capaces de capturar correctamente los saltos de presión y temperatura, lo cual es realmente útil en la línea de escape del motor, pues periódicamente se generan pulsos de presión y temperatura al abrir las válvulas de escape. El método de las Características y el método CIR⁶, por ejemplo, no están basados en esta formulación, sino en la llamada forma no conservativa de las ecuaciones. Por este motivo, no son útiles para mostrar la evolución de las discontinuidades bruscas como las ondas de choque.

La formulación tradicional no conservativa puede consultarse en [2]. En el presente trabajo, puesto que todos los métodos utilizados se basan en la forma conservativa de las ecuaciones, únicamente se muestra esta formulación. Para obtenerla se agrupan las ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.17 de modo que quede una derivada temporal, una derivada espacial, un término dependiente de la variación de área y un término fuente, que en el caso de la ecuación de continuidad es nulo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\rho u}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (2.20)$$

⁶Por sus autores Courant, Isaacson y Rees.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\rho u^2}{S} \frac{dS}{dx} + \rho G = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial(e_0 \rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\rho u h_0}{S} \frac{dS}{dx} - q \rho = 0 \quad (2.22)$$

Este sistema, donde se ha definido $G = \frac{1}{2}u|u|f\frac{4}{D}$, se puede expresar de forma vectorial, pues, como hemos visto, todas las ecuaciones que lo componen tienen la misma forma:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathbf{W}) = 0 \quad (2.23)$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u h_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho u h_0 \end{bmatrix} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G \\ -\rho q \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

\mathbf{W} se conoce como vector solución o vector de estado, ya que, a partir de él, es posible calcular el resto de variables termodinámicas. \mathbf{F} es el vector de flujo y \mathbf{C} , el vector que contiene los términos de variación de área, fricción y transmisión de calor.

Para resolver el problema todavía es necesario establecer ciertas relaciones adicionales, puesto que tenemos 5 incógnitas (ρ , u , p , h y e) y tan solo 3 ecuaciones.

En primer lugar, debemos recordar la expresión que relacionaba la entalpía con la energía interna:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.25)$$

Seguidamente, se busca relacionar la presión con el resto de variables. Para ello, suele utilizarse una ecuación de estado. Esto parece contradictorio, ya que aparece una nueva variable: la temperatura. No obstante, la energía interna es función de la temperatura, por lo que el sistema queda cerrado con estas dos nuevas ecuaciones. En el caso de considerar gas perfecto, las ecuaciones son las siguientes:

$$p = \rho R T \quad (2.26)$$

$$e = c_v T \quad (2.27)$$

En conductos donde es frecuente encontrar cambios en su sección transversal, resulta más conveniente incluir el área dentro del vector solución \mathbf{W} . De este modo, en los métodos de diferencias finitas, la conservación de masa mejora considerablemente, como se demuestra en el estudio de Arnau [4]. Para ello, se multiplican las ecuaciones 2.20, 2.21 y 2.22 por la sección S , que únicamente depende de la coordenada espacial x , por lo que puede incluirse dentro de la derivada temporal dando lugar a:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho u^2 + p)S)}{\partial x} - p \frac{dS}{dx} + \rho G S = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial(\rho e_0 S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h_0 S)}{\partial x} - q \rho S = 0 \quad (2.30)$$

La nueva definición de los vectores, por tanto, pasa a ser la siguiente:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho S \\ \rho u S \\ \rho e_0 S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u S \\ (\rho u^2 + p) S \\ \rho u h_0 S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dS}{dx}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G S \\ -\rho q S \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

En ambas formulaciones conservativas, el sistema a resolver en notación vectorial es idéntico, y se corresponde con la ecuación 2.23. La diferencia entre estas formulaciones radicarán en cómo obtener las variables termodinámicas a partir del vector solución \mathbf{W} . No obstante, siempre se hará uso de las 3 ecuaciones de conservación y de las 3 ecuaciones adicionales que cierran el sistema. Este aspecto es importante para mejorar la conservación de las propiedades, por lo que es positivo incorporar el área en el vector solución, tal y como se ha hecho en este trabajo.

2.2.2. Ecuaciones para volúmenes finitos

Hasta ahora se ha estudiado la variación de las propiedades en una distancia infinitesimal. No obstante, para los métodos de volúmenes finitos resulta más conveniente partir directamente de las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos, que se tratan de una simplificación de las ecuaciones generales para flujo no viscoso. Esto se debe a que a la hora de integrarlas en el volumen de control podremos transformar integrales de volumen en integrales de superficie y simplificar términos.

El significado físico de cada uno de los términos de las distintas ecuaciones es análogo al visto en la anterior formulación. Por ese motivo a continuación se presentan las

ecuaciones directamente, incluyendo únicamente comentarios que aporten información a lo comentado en la sección 2.2.1. Estas ecuaciones son para flujo 3D pero se simplificarán al realizar las integrales de volumen en el apartado 2.4. Como puede verse, no se asume que el área varíe ni que haya flujo unidimensional, ya que son ecuaciones a aplicar en un punto concreto del fluido.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.32)$$

Ecuación del momento lineal

En esta ecuación añadimos el término fuente correspondiente correspondiente al factor de fricción en cada dimensión espacial.

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p \bar{\mathbf{I}} + \rho \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

Ecuación de la energía

En este caso se añade el término que contempla la posible adición de calor.

$$\frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} + \nabla (\rho h_0 \mathbf{u}) - \rho q = 0 \quad (2.34)$$

Cabe indicar que simplificando estas ecuaciones para un volumen de control con flujo esencialmente unidimensional se puede llegar a las ecuaciones obtenidas en la sección 2.2.1. No obstante, como ya se ha indicado, para cada método resulta más interesante partir de un punto u otro.

2.3. Métodos de diferencias finitas

Los métodos de diferencias finitas son métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales aproximando las derivadas a diferencias finitas. Las propiedades del fluido se concentran, por tanto, en nodos, tal y como muestra la Figura 2.3. Si queremos obtener algún valor intermedio será necesario interpolar entre dos o más nodos.

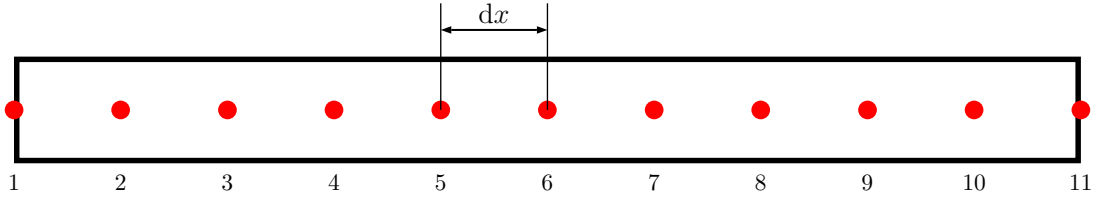


Figura 2.3: Discretización de un conducto mediante diferencias finitas

Según la forma en que aproximemos las derivadas de las ecuaciones de conservación obtendremos un método u otro de diferencias finitas. Por este motivo, existen una gran cantidad de métodos de diferencias finitas que poder aplicar en la resolución del flujo en el interior de conductos. Cada método tendrá sus propias características: nos encontraremos con métodos de primer orden o superior, con mayor o menor tiempo de cálculo y precisión, que capturan mejor o peor las discontinuidades, que sobreoscilan o no, etc. En cualquier caso, todos tienen una característica común: no son métodos conservativos⁷.

Puesto que el objetivo del trabajo no es comparar métodos de diferencias finitas entre sí, como ya hizo Arnau en [4], sino con métodos de volúmenes finitos, tomaremos un método como representativo del conjunto de diferencias finitas. Se tratará del método de Lax-Wendroff de dos pasos, utilizado en la actualidad en OpenWAM. Para obtener la formulación de este método planteamos previamente dos métodos más simples que lo componen. Se tratan del método de Lax-Friedrichs (paso 1) y del método de Leapfrog (paso 2). En cualquier caso, todos los métodos aproximarán la solución integrando numéricamente el sistema de ecuaciones 2.23:

$$\int_x \int_t \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathbf{W}) \right) dt \, dx = 0 \quad (2.35)$$

2.3.1. Método de Lax-Friedrichs

El método de Lax-Friedrichs es uno de los métodos de diferencias finitas más simples pero, a su vez, muy útil. Aproxima las derivadas de las ecuaciones 2.35 por medio de diferencias finitas de primer orden, es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (2.36)$$

⁷No debe confundirse el hecho de que los métodos de diferencias finitas sean no conservativos con que algunos de ellos estén basados en una formulación conservativa de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. La principal razón por la que no son conservativos es por hacer uso del Método de las Características para calcular las condiciones de contorno.

2. Métodos numéricos

Los subíndices indican la posición espacial de cada punto, mientras que los superíndices indican el instante temporal. \mathbf{W}_i^t , por tanto, representa el valor medio de las variables solución entre $i - \frac{1}{2}$ e $i + \frac{1}{2}$ en el tiempo t , mientras que $\mathbf{F}_{i-1/2}^t$ es el flujo medio a través de una supuesta frontera localizada en el punto medio entre los nodos $i - 1$ e i en el instante t . Un esquema de esta discretización se encuentra en la Figura 2.4.

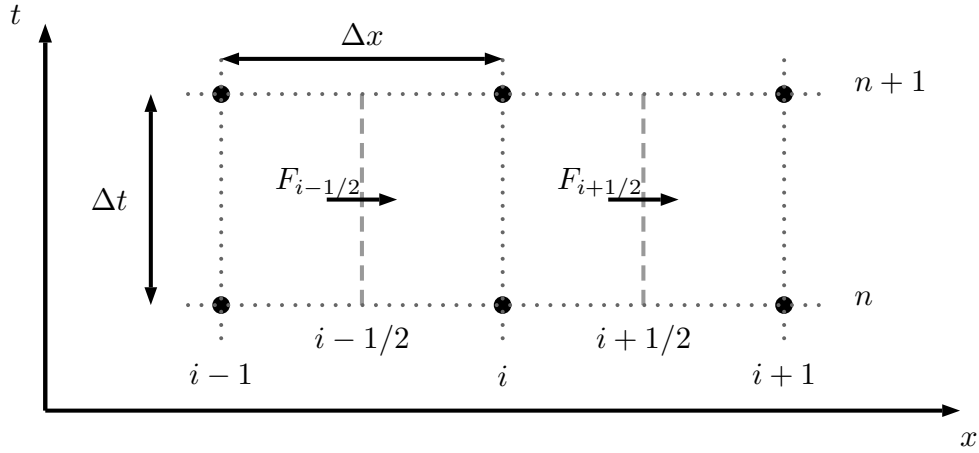


Figura 2.4: Discretización utilizada en métodos de diferencias finitas

Aplicando estas aproximaciones en 2.35, se obtiene la ecuación básica que resuelven varios métodos de diferencias finitas de primer orden:

$$\left(\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n\right) \Delta x + \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n\right) \Delta t + \mathbf{C}_i^n \Delta x \Delta t = 0 \quad (2.37)$$

En la anterior expresión aparece el vector solución en el siguiente paso temporal, por lo que despejándolo estaríamos resolviendo el problema:

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n\right) - \mathbf{C}_i^n \Delta t \quad (2.38)$$

La única dificultad que persiste en el problema es estimar los valores de $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}$, ya que únicamente disponemos de valores discretos en los nodos. La aproximación más simple consistiría en promediar los valores de los nodos adyacentes, de modo que:

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i\pm 1}^n\right) \quad (2.39)$$

Sustituyendo esta expresión en 2.38 se obtiene un método que proporciona oscilaciones

inestables tras cierto número de pasos temporales:

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) - \mathbf{C}_i^n \Delta t \quad (2.40)$$

Un método estable se consigue si en lugar de tomar el vector de estado en el punto i , este se aproxima mediante el valor medio de sus nodos adyacentes. Este esquema recibe el nombre de Lax-Friedrichs y se trata, por tanto, de un método de primer orden en espacio y tiempo:

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_{i+1}^n + \mathbf{W}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) - \mathbf{C}_i^n \Delta t \quad (2.41)$$

2.3.2. Método de Leapfrog

Para conseguir un método de segundo orden en espacio y tiempo, lo más sencillo es aproximar las derivadas mediante expresiones de segundo orden:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.42)$$

Sustituyendo estas aproximaciones en 2.35 se obtiene el método de Leapfrog, que, como puede observarse, requiere evaluar dos niveles temporales para calcular el tercero:

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) - 2\Delta t \mathbf{C}_i^n \quad (2.43)$$

2.3.3. Método de Lax-Wendroff de dos pasos

Para evitar tener que conocer dos instantes temporales al comienzo de la simulación y seguir disponiendo de un método de segundo orden en espacio y tiempo, se pueden combinar los métodos de Lax-Friedrichs y Leapfrog para obtener el método conocido como Lax-Wendroff de dos pasos, propuesto por Richtmyer en [5] y referenciado directamente como método de Lax-Wendroff en el presente trabajo.

Por tratarse de un método de segundo orden, la precisión de los resultados proporcionados por el método de Lax-Wendroff será mejor que la obtenida con uno de primer orden. En cambio, aparecerán oscilaciones al encontrarse con discontinuidades como ondas de choque, que físicamente no tienen sentido. Para evitarlo existen unos métodos conocidos como TVD que evitan la formación de estas oscilaciones, pero su tiempo de cálculo aumenta considerablemente.

2. Métodos numéricos

El primer paso del método de Lax-Wendroff consiste en aplicar el método de Lax-Friedrichs entre los nodos $i - 1$ e i , por un lado, y entre i e $i + 1$ por otro. Por medio de la ecuación 2.41 se obtienen los valores $\mathbf{W}_{i-1/2}^{n+1}$ y $\mathbf{W}_{i+1/2}^{n+1}$. Evaluando \mathbf{F} en estos nodos se obtienen los valores $\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1}$ y $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1}$, que se pueden utilizar para el cálculo de \mathbf{W}_i^{n+2} mediante el segundo paso utilizando el método de Leapfrog, que no requería conocer \mathbf{W}_i^{n+1} , como veíamos en la ecuación 2.43.

Esta es la base del método de Lax-Wendroff de dos pasos. Puesto que no permite calcular \mathbf{W}_i^{n+1} , sino \mathbf{W}_i^{n+2} , el método se reescribe utilizando un paso temporal intermedio, de modo que \mathbf{W}_i^{n+1} pasa a ser $\mathbf{W}_i^{n+1/2}$ y \mathbf{W}_i^{n+2} se convierte en \mathbf{W}_i^{n+1} , lo cual no altera el método ni la precisión, simplemente es cuestión de nomenclatura. Un esquema de este método se muestra en la Figura 2.5. En él se observa que se calculan soluciones intermedias en $(i \pm 1/2, n + 1/2)$ mediante el método de Lax-Friedrichs y, con esos valores, se aplica el de Leapfrog para obtener la solución en $(i, n + 1)$.

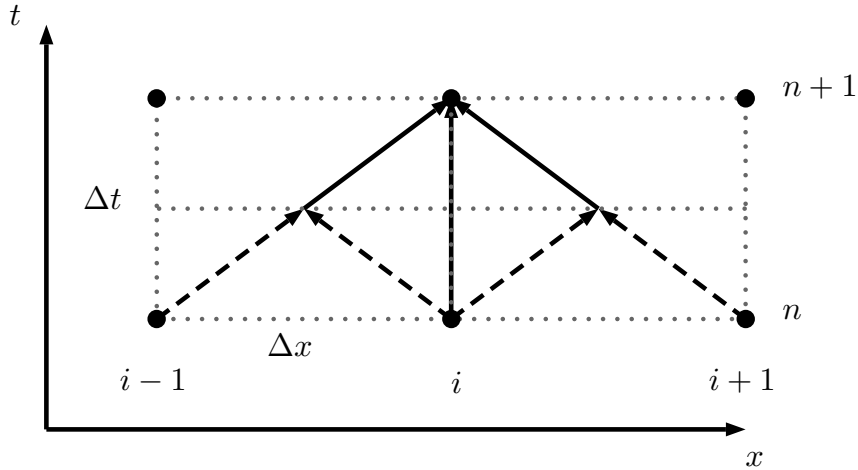


Figura 2.5: Patrón utilizado en el método de Lax-Wendroff de dos pasos

Volviendo a las ecuaciones 2.41 y 2.43, propias de los métodos de Lax-Friedrichs y Leapfrog, respectivamente, se observa que habría que incorporar los términos fuente $\mathbf{C}_{i\pm 1/2}^n$ y $\mathbf{C}_i^{n+1/2}$, los cuales no se conocen. Por ese motivo se suelen aproximar promediando los valores en los nodos adyacentes, dando lugar a

$$\mathbf{W}_{i\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_{i\pm 1}^n + \mathbf{W}_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i\pm 1}^n \mp \mathbf{F}_i^n) - \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{C}_{i\pm 1}^n + \mathbf{C}_i^n) \quad (2.44)$$

y

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{C}_{i+1/2}^{n+1/2} + \mathbf{C}_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (2.45)$$

Método	Patrón
Euler implícito	
Un lado	
Un lado	
Lax-Friedrichs	
Leapfrog	
Lax-Wendroff	
Beam-Warming	

Tabla 2.1: Patrones de distintos métodos de diferencias finitas

Existen, como ya se ha comentado, otros métodos numéricos que hacen uso de otros valores iniciales, e incluso métodos implícitos que permiten aproximar la solución \mathbf{W}_i^{n+1} a la real. Algunos de estos métodos y sus patrones pueden encontrarse en la Tabla 2.1 extraída de [6]. Cabe citar que no se hace uso de métodos implícitos, como el de Euler, porque suponen un elevado coste computacional al tener que resolver en cada paso un sistema de ecuaciones. Por este motivo, todos los métodos comentados en este trabajo son explícitos.

Tras estudios como el realizado por Arnau en [4], se concluyó que el método de Lax-Wendroff de dos pasos es suficientemente preciso y rápido para utilizarlo en la simulación de flujos en conductos, así como fácil de implementar como se ha observado anteriormente. El principal inconveniente del método es que provoca oscilaciones al no ser TVD, por lo que su uso en el escape, donde los saltos de presión y temperatura son mayores, puede dar lugar a errores no deseados. Para evitar este comportamiento, existen métodos TVD de diferencias finitas. No obstante, al seguir siendo no conservativos y requerir de mayor tiempo de cálculo, tomaremos el método de Lax-Wendroff como representativo de esta familia.

Condiciones de contorno

En todos estos métodos se observa que llega un instante en el que el patrón requiere información de un punto más allá del dominio para calcular la evolución de la frontera. Por ejemplo, en la Figura 2.3 para calcular los nodos 1 y 11 necesitaríamos conocer valores de fuera del dominio, lo cual no es viable. Por tanto, necesitamos resolver de otra manera los nodos externos de la malla. Para ello se utilizan las condiciones de contorno, que deben ser conocidas para resolver el problema. Como buscamos el valor del vector de estado en el nodo se tratan de condiciones de contorno de tipo Dirichlet.

Una de las dificultades de los métodos de diferencias finitas es cómo traducir la condición de contorno al valor del vector solución en los nodos de los extremos. Para ello, la táctica empleada frecuentemente consiste en resolver estos nodos mediante el Método de las Características, con el que habitualmente se resuelven las condiciones de contorno de Dirichlet. Este método, del que ya se ha hablado brevemente con anterioridad, es de primer orden en espacio y tiempo y está basado en una formulación no conservativa. Por este motivo, cada vez que un pulso llega al extremo se pierde información. Además, la recurrente interpolación que realiza entre el valor en el nodo frontera y el contiguo ralentiza considerablemente el proceso.

Por ello, debemos estudiar si los métodos de volúmenes finitos, cuyas condiciones de contorno no son de Dirichlet y, por tanto, se calculan mediante otros procedimientos, suponen una ventaja frente a diferencias finitas en cuanto a tiempo de cálculo y precisión. La diferencia entre ambos métodos es esperable que se acentúe al utilizar una geometría compleja, con numerosas condiciones de contorno. Este estudio se realiza en la sección 4, donde se utiliza un modelo unidimensional y otro cuasi bidimensional de una turbina desarrollados en el Instituto CMT-Motores Térmicos.

Condición CFL

Para concluir la sección dedicada a los métodos de diferencias finitas es necesario introducir el criterio de estabilidad CFL. En todos los métodos numéricos aparece el término Δt , que representa el paso temporal entre la solución existente y la solución a calcular. Su valor hasta el momento ha pasado inadvertido, pero, como puede suponerse, no es trivial.

Si imponemos un paso temporal excesivamente elevado la solución divergirá en apenas unas iteraciones, pues el método numérico no es capaz de reproducir fielmente la evolución del fluido, que se traslada entre celdas en menor tiempo del transcurrido entre dos pasos temporales consecutivos. Por el contrario, si el paso temporal es muy pequeño nos aseguraremos de que la solución no diverge. En cambio, el coste computacional será tan elevado que hará de cualquier método numérico un proceso altamente ineficiente.

Por este motivo, en un trabajo que busca la optimización del proceso de cálculo del flujo en el interior de conductos, resulta esencial conocer el paso temporal más grande que se puede imponer entre dos iteraciones consecutivas asegurando la convergencia del resultado. Para asegurar convergencia y optimizar el proceso, a diferencia de la malla del conducto, el paso temporal no lo define el usuario, sino que lo proporciona la condición o criterio de estabilidad CFL.

Este criterio, estudiado en 1928 por Courant, Friedrichs y Lewy, establece que las ondas no deben recorrer una distancia superior al tamaño de la malla en cada paso temporal. Esta condición se expresa matemáticamente por medio de la siguiente inecuación:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{max}^n} \quad (2.46)$$

donde c_{max}^n representa la mayor velocidad de propagación en el dominio en el instante n :

$$c_{max}^n = \text{máx}\{|u_i^n| + a_i^n\} \quad (2.47)$$

Esto quiere decir que el paso temporal más grande es aquel en el cual hay una onda que parte de un nodo en el instante n y llega al nodo contiguo en el instante $n + 1$. El resto de ondas viajan a menor velocidad, por lo que no llegan a los nodos contiguos y, por tanto, no violan el criterio de estabilidad.

La condición recogida en la ecuación 2.46 es solo válida para ondas lineales, cuya velocidad de propagación es constante. Cuando el flujo es no homoentrópico, como en los conductos de un MCIA, la velocidad del sonido cambia constantemente, por lo que es necesario ser más conservativos y no emplear un salto temporal tan elevado.

Por este motivo, estos autores definieron el número de Courant ν , que relaciona el paso temporal realizado con el paso máximo que aseguraría convergencia si la velocidad de propagación fuera constante:

$$\nu = \Delta t \frac{c_{max}^n}{\Delta x} \quad (2.48)$$

En la práctica, se otorga un valor determinado al número de Courant. Teniendo en cuenta la ecuación 2.46, el valor del número de Courant debe encontrarse entre 0 y 1. Una práctica habitual es imponer $\nu = 0,9$, a menos que el método numérico empleado dicte un límite inferior. De este modo, en cada instante temporal se calcula el valor de c_{max} y, a partir del número de Courant y el tamaño de la malla, se obtiene el paso temporal a efectuar.

Por tanto, del razonamiento anterior se desprende que si aumentamos n veces el número de nodos para conseguir mayor precisión, el tiempo de cálculo aumentará en n^2 . Esto se debe a que, por un lado, debemos realizar n veces más cálculos en cada instante temporal y, por otro lado, es necesario reducir el salto temporal n veces, de modo que para simular el mismo tiempo se requiere ahora alrededor de n pasos temporales. Este cálculo justifica, por tanto, la tendencia observada en la Figura 3.12, donde el tiempo de cálculo aumenta cuadráticamente con el número de nodos.

Cabe indicar que la condición CFL es una condición necesaria para la estabilidad, pero, en general, no es suficiente para asegurar la convergencia de la solución, como se recoge en [4]. No obstante, para los métodos utilizados en el presente trabajo, se puede demostrar que la condición CFL es condición suficiente para garantizar la estabilidad, por lo que en el resto del trabajo no nos preocuparemos por la convergencia siempre que se cumpla esta condición.

2.4. Métodos de volúmenes finitos

Los métodos de volúmenes finitos son también utilizados para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. A diferencia de los métodos de diferencias finitas, que concentraban las propiedades en nodos, estos métodos discretizan el dominio fluido en un conjunto de volúmenes finitos en cuyo interior las propiedades termodinámicas se mantienen constantes. Un esquema de esta discretización se muestra en la Figura 2.6.

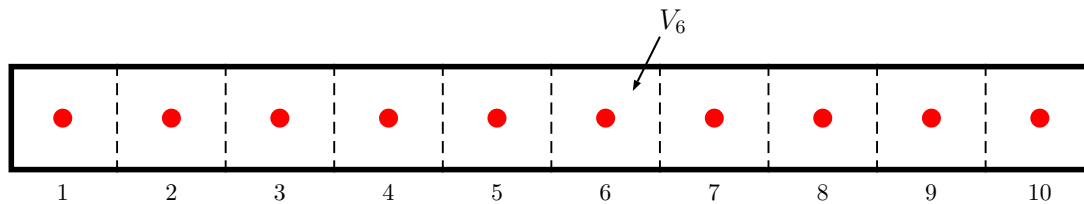


Figura 2.6: Discretización de un conducto mediante volúmenes finitos

Al igual que en diferencias finitas, existen numerosos métodos de volúmenes finitos que permiten aproximar las ecuaciones de conservación. En el presente trabajo se estudian dos de los más representativos. Se comienza explicando los fundamentos del método de Godunov y, seguidamente, se derivan los esquemas de alta resolución MUSCL, que se encuentran basados en el primer método.

Para resolver numéricamente las ecuaciones de Euler expuestas en el apartado 2.2.2, como ya se ha indicado, los métodos de volúmenes finitos convierten las integrales de volumen en integrales de superficie por medio del teorema de la divergencia, obteniéndose la solución débil de las ecuaciones. Estas integrales de superficie son, por tanto, flujos que

entran o salen de los volúmenes de control, por lo que en todo momento las propiedades termodinámicas se conservan, de ahí que reciban el nombre de métodos conservativos.

La formulación de estos métodos, por tanto, parte de las ecuaciones de Euler (2.32, 2.33 y 2.34). Para obtener su solución débil se realiza la integral sobre el volumen de cada celda:

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla (\rho \mathbf{u}) dV &= 0 \\
 \int_V \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_V \nabla (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) dV + \int_V \nabla p \bar{\mathbf{I}} dV + \int_V \rho \mathbf{G} dV &= \mathbf{0} \quad (2.49) \\
 \int_V \frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} dV + \int_V \nabla (\rho h_0 \mathbf{u}) dV - \int_V \rho q dV &= 0
 \end{aligned}$$

El teorema de la divergencia permite transformar las integrales de volumen que contienen el término de la divergencia en integrales de superficie evaluadas en la superficie exterior del volumen de control. Esto permite simplificar considerablemente los términos de las ecuaciones 2.49:

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{n} dS &= 0 \\
 \int_V \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} dS + \oint_{\Sigma} (p \bar{\mathbf{I}}) \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{G} dV &= \mathbf{0} \quad (2.50) \\
 \int_V \frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma} (\rho h_0 \mathbf{u}) \mathbf{n} dS - \int_V \rho q dV &= 0
 \end{aligned}$$

Particularizando ahora para un conducto en el cual el flujo es prácticamente unidimensional, donde la única componente significativa de la velocidad es la horizontal u , las integrales de superficie se simplifican considerablemente teniendo en cuenta los siguientes puntos:

- La velocidad en la pared es prácticamente paralela a la misma. De hecho, debido a la viscosidad, es nula, por lo que los términos convectivos de las ecuaciones se reducen a:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{n} dS &= -\rho u S|_L + \rho u S|_R \\
 \oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{u} \otimes u) \mathbf{n} dS &= -\rho u^2 S|_L + \rho u^2 S|_R \quad (2.51) \\
 \oint_{\Sigma} (\rho h_0 \mathbf{u}) \mathbf{n} dS &= -\rho h_0 u S|_L + \rho h_0 u S|_R
 \end{aligned}$$

2. Métodos numéricos

- El término de la presión no se anula en ninguna frontera. No obstante, se puede dividir en dos componentes: una equivale a la variación de presión entre la entrada y la salida del volumen, mientras que la otra recoge el efecto de la presión con el cambio de área en la dirección espacial considerada.

$$\oint_{\Sigma} p \mathbf{e}_x \mathbf{n} \, dS \approx -pS|_L + pS|_R + p_i (-S_L + S_R) \quad (2.52)$$

Cabe indicar que el término debido a la componente de la presión que actúa sobre las paredes se ha aproximado al valor medio de la presión en el volumen multiplicado por la diferencia de áreas entre la entrada y la salida. Esto es coherente si la variación del diámetro con la coordenada x es pequeña. Por supuesto, si disminuimos el tamaño de la celda, nos aproximaremos más al caso real. Este término equivale al que se obtenía para el método de diferencias finitas en la ecuación 2.29 $\left(-p \frac{dS}{dx}\right)$.

Una vez considerado esto podemos escribir el sistema de ecuaciones 2.50 en forma vectorial, que ayudará a la obtención de la solución. Definiendo los vectores

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u h_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G \\ -\rho q \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

el sistema a resolver es el siguiente:

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \, dV + (-\mathbf{F}_L S_L + \mathbf{F}_R S_R) + \mathbf{V}(-S_L + S_R) + \int_V \mathbf{C} \, dV = 0 \quad (2.54)$$

Como puede verse, el valor de los términos del vector de flujo \mathbf{F}_L y \mathbf{F}_R es hasta el momento una incógnita, pues requiere conocer las propiedades del fluido entre dos celdas distintas. Como veremos a continuación, este valor se obtiene resolviendo el problema de Riemann.

Este vector de flujo representa una de las propiedades más importantes de los métodos de volúmenes finitos. Como puede verse, la interacción de una celda con sus celdas adyacentes tiene lugar por medio de flujos y no por medio del valor concreto del nodo como sucedía en diferencias finitas. Esto asegura que lo que sale de una celda entra en la adyacente, sin perder nada por el camino, lo cual garantiza que los métodos de volúmenes finitos sean plenamente conservativos.

Finalmente, para evaluar las integrales restantes definiremos los valores medios de los

vectores en el interior de un volumen de control cualquiera:

$$\mathbf{W}_i = \frac{1}{V_i} \int_V \mathbf{W} \, dV, \quad \mathbf{C}_i = \frac{1}{V_i} \int_V \mathbf{C} \, dV \quad (2.55)$$

A partir de la anterior definición, el sistema queda

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} V_i + (-\mathbf{F}_{i-1/2} S_{i-1/2} + \mathbf{F}_{i+1/2} S_{i+1/2}) + \mathbf{V}_i(-S_{i-1/2} + S_{i+1/2}) + \mathbf{C}_i V_i = 0 \quad (2.56)$$

En función de cómo definamos la variación de \mathbf{W} en el interior del volumen y cómo evoluciona a lo largo del tiempo tendremos un método de volúmenes finitos u otro.

2.4.1. Método de Godunov

El método propuesto por Godunov en 1959 para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se basa en suponer que el vector solución \mathbf{W} se mantiene uniforme en cada volumen de control, tal y como muestra la Figura 2.7.

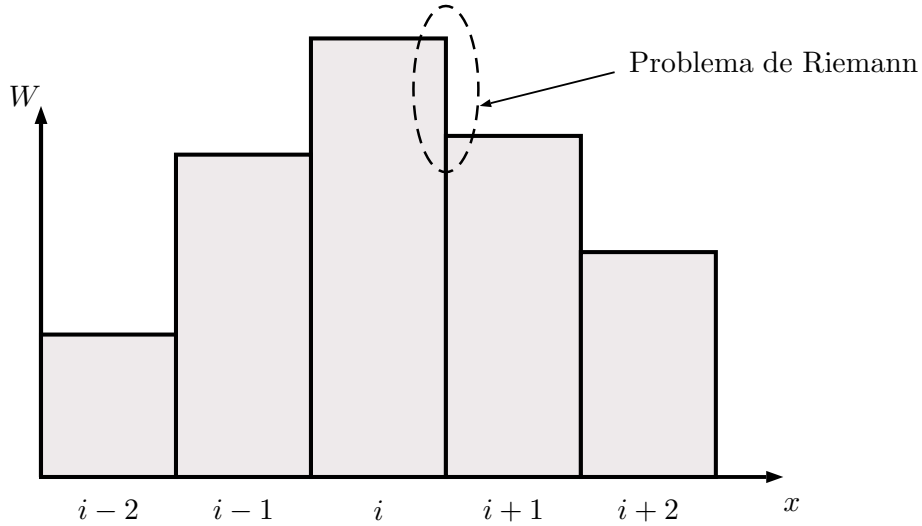


Figura 2.7: Discretización utilizada en el método de Godunov

Para obtener la solución en el siguiente paso temporal, aproximamos la derivada temporal mediante el método de Euler, de modo que de la ecuación 2.56 se puede despejar

2. Métodos numéricos

\mathbf{W}_i^{n+1} :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \left(\mathbf{F}_{i-1/2}^n S_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}^n S_{i+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{V_i} \mathbf{V}_i^n (S_{i-1/2} - S_{i+1/2}) + \Delta t \mathbf{C}_i^n \quad (2.57)$$

Dada la solución \mathbf{W}_i^n en todo el dominio, conocer los distintos valores de \mathbf{V}_i^n y \mathbf{C}_i^n no supone ningún problema. La dificultad del método, por tanto, consiste en obtener los valores de $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n$. Volviendo a la Figura 2.7, se observa que en las interfaces donde debemos calcular el vector \mathbf{F} aparecen discontinuidades en el instante t^n . La definición de $\mathbf{F}_{i+1/2}^n$ establece que este valor es el flujo medio que atraviesa la interfaz entre las celdas i e $i+1$ en el intervalo de tiempo Δt , es decir,

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{i+1/2} dt \quad (2.58)$$

Por tanto, es necesario conocer la evolución de F entre los instantes t^n y t^{n+1} , es decir, la evolución de un fluido que en un instante t^n posee diferentes magnitudes termodinámicas a un lado y otro de una frontera infinitesimal. Esta situación se conoce como problema de Riemann.

El problema de Riemann, en ausencia de los términos \mathbf{V} y \mathbf{C} , tiene solución analítica. De hecho, el problema del tubo de choque de Sod utilizado en la sección 3.2 para validar la implementación de los métodos y realizar un estudio de sensibilidad, no es más que una particularización de este problema cuando el flujo se encuentra en reposo a ambos lados de la discontinuidad. En dicha sección se detalla la solución analítica del problema.

Para ilustrar el problema de Riemann, consideremos la Figura 2.8. En ella se observa que en cada discontinuidad aparecen tres fenómenos fluidodinámicos: ondas de expansión (región sombreada), una discontinuidad de contacto (línea a trazos) y una onda de choque (línea continua), que se definen en el capítulo 3.

Observando la Figura 2.8 puede pensarse que no es posible realizar un paso temporal más grande que aquel en el que una onda recorra media celda, pues en caso contrario podría interactuar con la onda que parte del otro extremo y, por tanto, divergir. Esto es equivalente a que el número de Courant sea inferior a 0,5. No obstante, en artículos como [7] se demuestra que la condición necesaria para garantizar la estabilidad sigue siendo $\nu \leq 1$, tal y como se comprueba en los cálculos realizados, donde se toma un valor de 0,9 y no diverge.

Godunov utilizó para su método la solución analítica del problema de Riemann. El principal inconveniente de esta solución se encuentra en la necesidad de realizar un cálculo iterativo para obtener la solución exacta, como puede verse en la sección 3.2. Este problema debe resolverse en todas las interfaces en todos los pasos temporales. Esto ralentiza

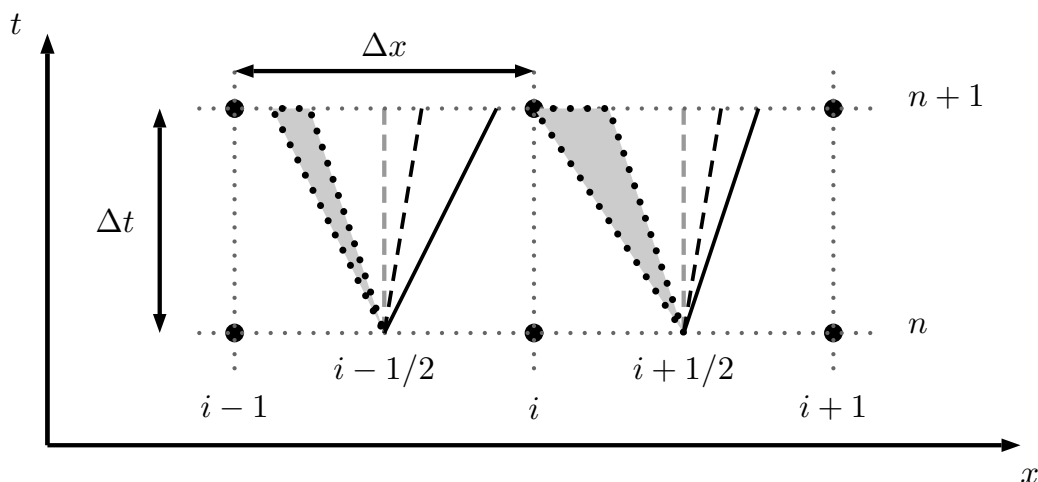


Figura 2.8: Evolución de las ondas en el problema de Riemann aplicado en métodos de volúmenes finitos

considerablemente el método, hasta el punto de ser 2,30 veces más lento que el de Lax-Wendroff según los cálculos de Winterbone en [2], lo cual desaconseja el uso del método de Godunov, pues el de Lax-Wendroff es de mayor orden y tiene menor coste.

El hecho de que este método sea tan lento se debe, en parte, a la necesidad de considerar los 10 casos que se pueden dar en el problema de Riemann, que se recogen en la Figura 2.9. Las condiciones iniciales a ambos lados de la frontera indicarán si la solución se corresponde con un caso u otro, es decir, si la frontera pertenece al flujo original de la celda izquierda, a mitad de la expansión, se encuentra entre la expansión y la onda de contacto, entre la onda de contacto y la onda de choque o en el flujo original de la derecha.

Ante este inconveniente, surge la idea de no obtener la solución exacta del problema de Riemann, sino una aproximada. Por este motivo, se han desarrollado solucionadores del problema de Riemann, entre los que se encuentran el de Roe, el de Harten-Lax-van Leer (HLL) o una extensión de este último conocida como HLLC.

En concreto, en la implementación del método de Godunov para el modelo de motor virtual de este trabajo se ha hecho uso del solucionador de Kurganov y Tadmor. Se trata de un método que no proporciona únicamente la solución aproximada del problema de Riemann, sino que es más genérico. Como parámetros de entrada únicamente necesita el valor de \mathbf{W} en dos celdas contiguas y la velocidad máxima de propagación en cada discontinuidad. El valor máximo de estas velocidades máximas es el que se utilizaba para el cálculo del paso temporal a partir del número de Courant. Como salida este método proporciona el vector de flujo \mathbf{F} en la interfaz de las celdas.

El desarrollo completo del solucionador aproximado de Kurganov y Tadmor puede encontrarse en [8]. Simplemente remarcaremos aquí que estima la solución del problema

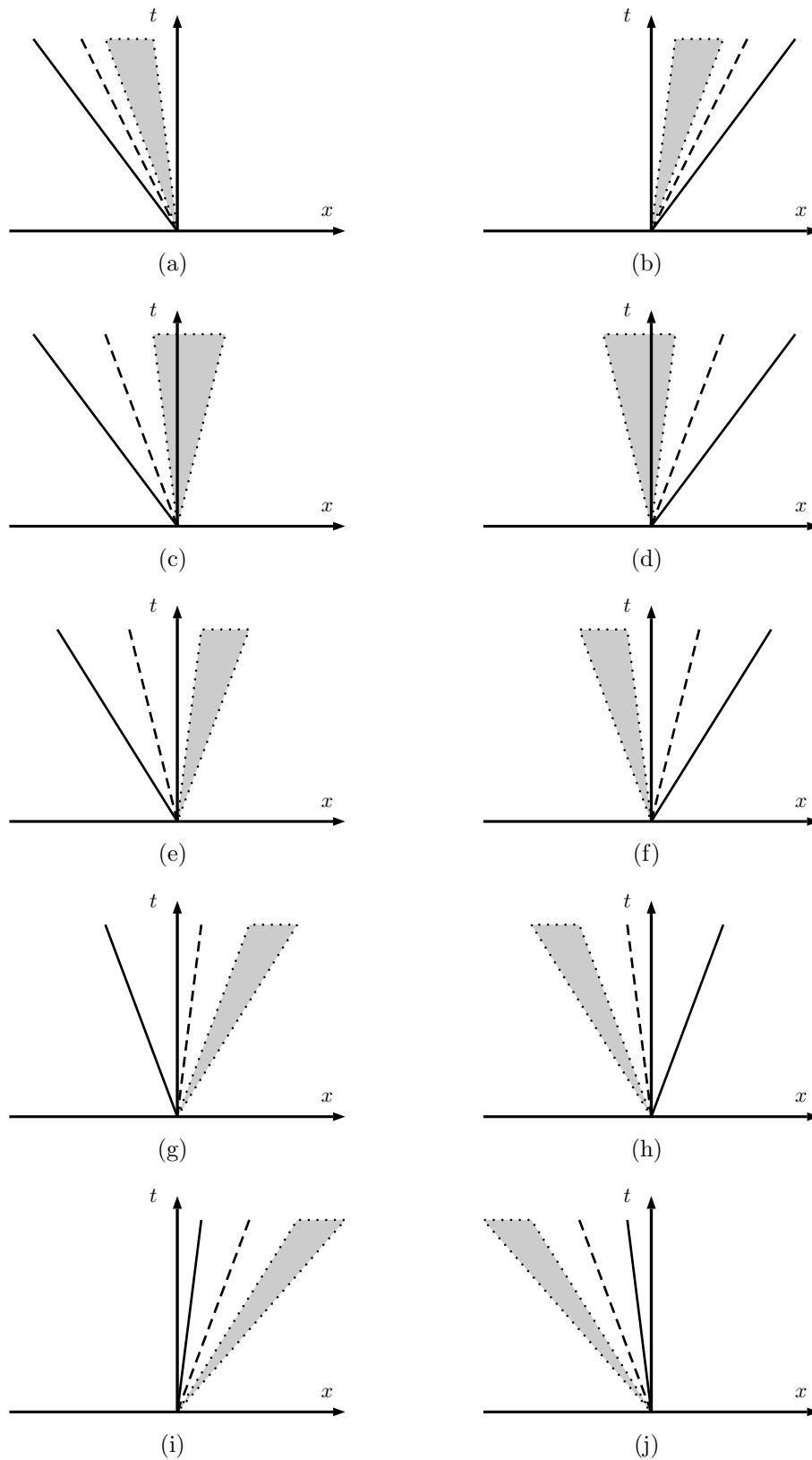


Figura 2.9: Posibles casos en el problema de Riemann

de Riemann promediando el vector de flujo de las celdas adyacentes y corrigiendo este resultado convectando el vector de flujo mediante la máxima velocidad de propagación.

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n) + c_{i+1/2_{max}}^n (\mathbf{W}_i^n - \mathbf{W}_{i+1}^n) \right] \quad (2.59)$$

Utilizando este aproximador del problema de Riemann en lugar de la solución exacta, continuamos teniendo un método de orden 1 pero se reduce considerablemente el tiempo de cálculo hasta equipararse al Lax-Wendroff, como se muestra más adelante en la Figura 3.13.

2.4.2. Esquemas MUSCL

Los esquemas MUSCL⁸ son métodos de mayor orden basados en el método de Godunov descrito anteriormente. La principal diferencia entre ambos se encuentra en la forma en que cada método supone la distribución del vector de estado \mathbf{W} en el interior de cada celda y cómo integra cada paso temporal.

Respecto a la distribución de \mathbf{W} , el método de Godunov, como se mostraba en la Figura 2.7, suponía que \mathbf{W} se mantenía constante en el interior del volumen de control, lo cual generaba importantes discontinuidades en la frontera entre celdas. Los métodos MUSCL, por su parte, suponen que el vector \mathbf{W} no es constante, sino que varía en el interior de la celda según una extrapolación lineal o de mayor orden, pero siempre asegurando que el valor medio en el instante t^n se corresponde con \mathbf{W}_i^n .

En el presente trabajo se ha escogido una extrapolación lineal, que permite obtener un método de 2º orden. Además, implica que el valor en el centro de la celda se corresponde con el valor medio \mathbf{W}_i^n , tal y como se muestra en la Figura 2.10. Esto garantiza que el método sea conservativo, ya que la integral de la distribución lineal sobre el volumen coincide con el producto del valor medio por el volumen total.

En la Figura 2.10 también se puede observar que continúa existiendo el problema de Riemann, si bien ya no es tan crítico como en el caso de Godunov, pues las rectas acercan las discontinuidades.

La cuestión que surge en este instante es saber el criterio según el cual se establecen las pendientes de las distribuciones de \mathbf{W} en cada celda. Para ello se supone que la pendiente Δ de la recta de la celda i es función del valor de w_{i-1} , w_i y w_{i+1} . Así, en los extremos

⁸Del inglés *Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws*.

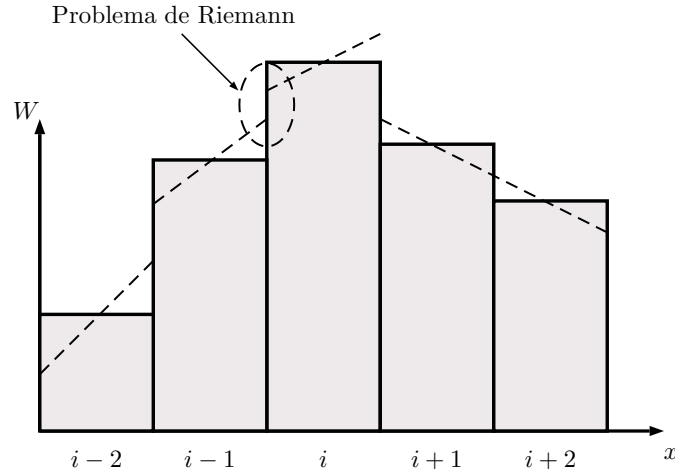


Figura 2.10: Planteamiento de los esquemas MUSCL

Left y *Right* de una celda, el valor será:

$$\begin{aligned} w_i^L &= w_i^n - \frac{1}{2}\Delta_i \\ w_i^R &= w_i^n + \frac{1}{2}\Delta_i \end{aligned} \tag{2.60}$$

Como \mathbf{W} es un vector, utilizamos en este apartado la notación de w_i indicando que representa una componente de \mathbf{W}_i . Por tanto, habrá que hacer este procedimiento para cada una de las componentes.

El método de Godunov no es más que una particularización de los esquemas MUSCL cuando la pendiente de las rectas es nula, es decir, $\Delta_i = 0$. En el caso general, su valor se podría obtener ponderando la solución de la celda situada a la derecha y la celda situada a la izquierda del volumen i mediante el parámetro ω , comprendido entre -1 y 1:

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(1 + \omega)(w_i^n - w_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(1 - \omega)(w_i^n - w_{i-1}^n), \quad -1 \leq \omega \leq 1 \tag{2.61}$$

Esto podría dar lugar a situaciones como la mostrada en la Figura 2.11. En ella se tiene que $w_i > w_{i-1}$, pero en la interfaz $i - 1/2$ el valor de w_i^L ha caído por debajo de w_{i-1} , lo cual da lugar a oscilaciones espurias como el método de Lax-Wendroff según se recoge en [2].

Con el fin de evitar casos como el de la Figura 2.11 se introdujeron los limitadores de flujo. Su principal función consiste en limitar las pendientes de las extrapolaciones a valores realistas. De este modo, cuando aparecen ondas bruscas limitan la pendiente,

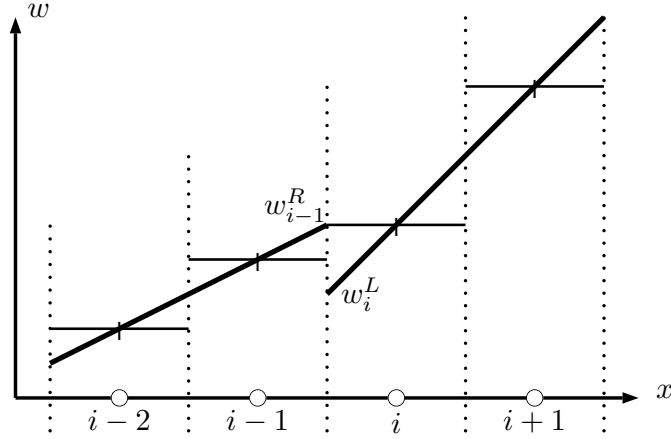


Figura 2.11: Ejemplo de extrapolación que daría lugar a oscilaciones espurias

convirtiendo el método a primer orden en espacio y evitando así la aparición de oscilaciones espurias. Si las ondas son suaves el limitador no actúa, por lo que en estos casos se trata de un método de segundo orden sin oscilaciones.

Matemáticamente los limitadores son funciones ϕ que asignan un valor a la pendiente de la recta, relacionando el valor de w_i con el de sus celdas adyacentes w_{i-1}^n y w_{i+1}^n . Para ello se definen los parámetros

$$\begin{aligned} r_i^R &= \frac{w_{i+1} - w_i}{w_i - w_{i-1}} \\ r_i^L &= \frac{w_{i-1} - w_i}{w_i - w_{i+1}} = \frac{1}{r_i^R} \end{aligned} \quad (2.62)$$

A partir de estos valores, el limitador proporciona la pendiente de la recta de la celda i y los valores en los extremos se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} w_i^L &= w_i^n - \frac{1}{2}\phi(r_i^L)(w_{i+1}^n - w_i^n) \\ w_i^R &= w_i^n + \frac{1}{2}\phi(r_i^R)(w_i^n - w_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Comparando las ecuaciones 2.60 y 2.63 se observa que se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\phi(r_i^L)(w_{i+1}^n - w_i^n) = \phi(r_i^R)(w_i^n - w_{i-1}^n) \quad (2.64)$$

lo cual indica que cualquier limitador de flujo debe cumplir la condición

$$\frac{\phi(r)}{r} = \phi\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.65)$$

Un ejemplo de cómo actúan estos limitadores se muestra en la Figura 2.12. Se observa que el limitador acerca la solución entre una celda y otra, sin llegar a casos como el mostrado en la Figura 2.11.

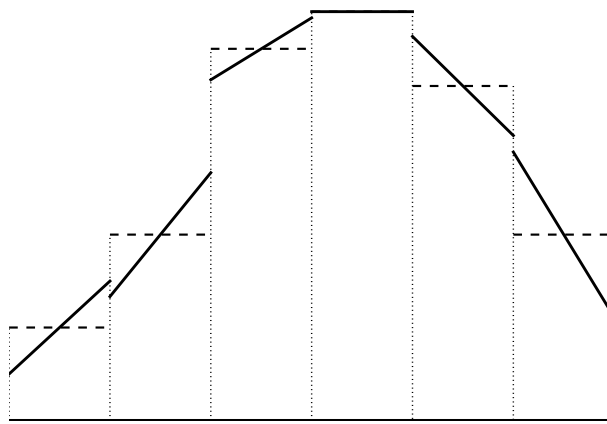


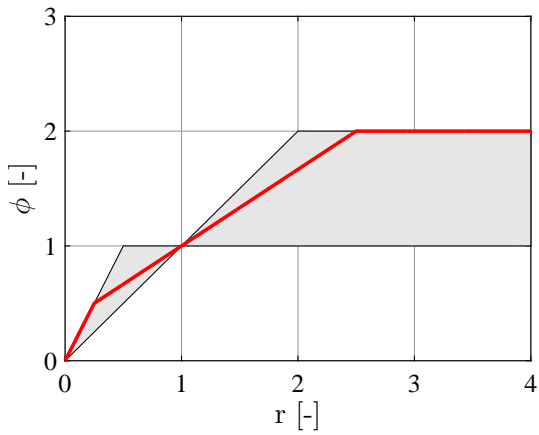
Figura 2.12: Ejemplo de extrapolación realizada utilizando un limitador

Existen multitud de limitadores, los cuales se comportan mejor o peor según el problema, por lo que la elección de uno u otro se suele realizar por medio de prueba y error. Algunos de estos limitadores se muestran en la Figura 2.13.

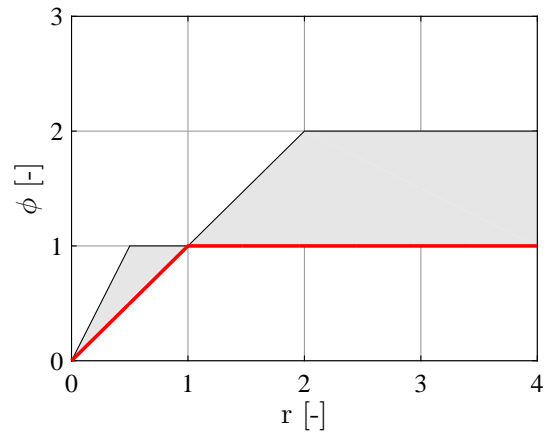
En el presente trabajo se estudian tres limitadores, que reciben el nombre de *Minmod*, *Van Leer* y *Superbee*. Estos limitadores son TVD de segundo orden, lo cual significa que se encuentran en una cierta región de la solución, conocida como región TVD, que garantiza la ausencia de oscilaciones espurias en la solución. Un limitador debe cumplir las siguientes condiciones para ser TVD [2], que se han incluido en la Figura 2.13:

$$\begin{aligned} r \leq \phi(r) \leq 2r, & \quad 0 \leq r \leq 1/2 \\ r \leq \phi(r) \leq 1, & \quad 1/2 \leq r \leq 1 \\ 1 \leq \phi(r) \leq r, & \quad 1 < r \leq 2 \\ 1 \leq \phi(r) \leq 2, & \quad r > 2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

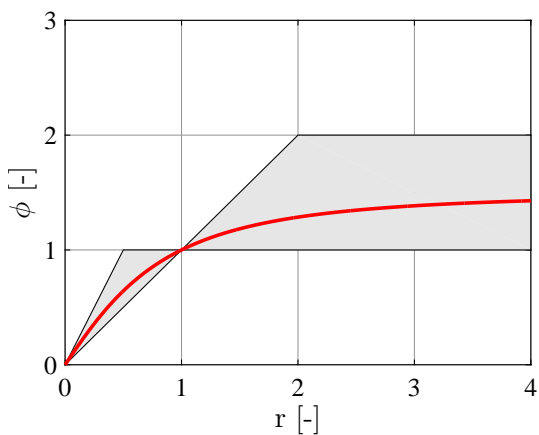
Una vez se ha calculado la distribución lineal del vector de estado \mathbf{W} en cada celda, debemos resolver el problema de Riemann en cada interfaz del mismo modo que con el método de Godunov. No obstante, en este caso no utilizaremos los valores medios del



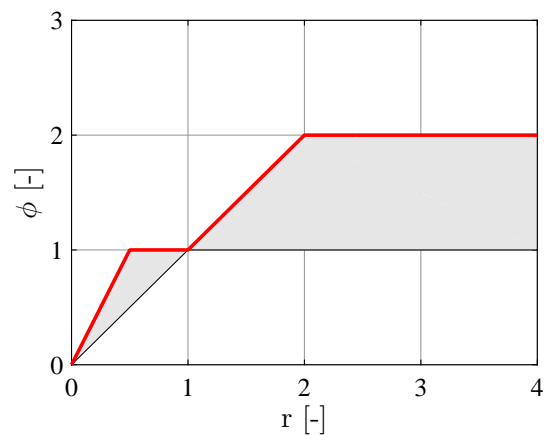
(a) Koren



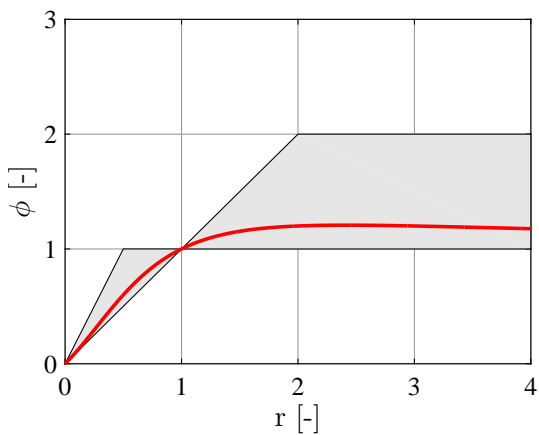
(b) Minmod



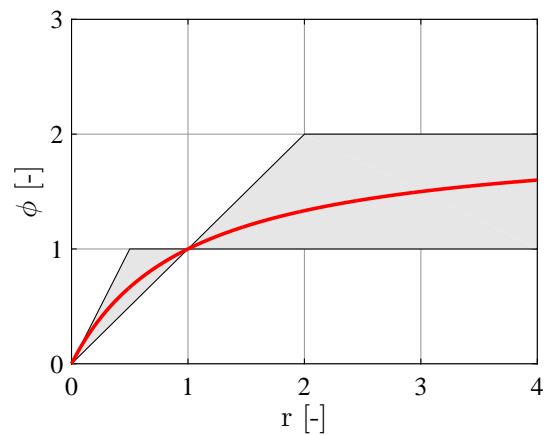
(c) Ospre



(d) Superbee



(e) Van Albada



(f) Van Leer

Figura 2.13: Limitadores de flujo habituales en problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

2. Métodos numéricos

vector de estado, sino los valores extrapolados en los extremos de la celda, donde se encuentra la discontinuidad. Por ese motivo, la verdadera utilidad de la extrapolación no es obtener la distribución a lo largo de la celda, sino simplemente conocer los valores en los extremos para resolver aproximadamente el problema de Riemann.

Volviendo a la ecuación 2.56, tan solo nos queda integrar en el tiempo para conocer el valor de \mathbf{W}_i en el siguiente paso temporal. Se pueden utilizar varios métodos, entre los cuales se encuentra el de Hancock, que se ha utilizado en este trabajo. Si el limitador de flujo era el que nos aseguraba que el método fuera de hasta segundo orden en espacio, la discretización temporal de Hancock nos asegurará que el método es siempre de segundo orden en tiempo.

Esta discretización comienza obteniendo los valores de \mathbf{W} en los extremos de cada celda con el limitador escogido según las ecuaciones 2.63. Una vez conocidos estos valores se estima el flujo en un paso temporal $\Delta t/2$ según la siguiente expresión, donde los vectores de flujo se obtienen simplemente evaluando el vector de estado en las fronteras:

$$\hat{\mathbf{W}}_i^n = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2V_i} \left[\mathbf{F}(\mathbf{W}_i^R) S_i^R - \mathbf{F}(\mathbf{W}_i^L) S_i^L \right] - \frac{\Delta t}{2V_i} \left[\mathbf{V}_i^n (S_i^R - S_i^L) \right] - \Delta t \mathbf{C}_i^n \quad (2.67)$$

El siguiente paso consiste en reevaluar el vector de estado en los extremos de la celda utilizando los mismos gradientes que en el primer caso, es decir, sin actualizar las pendientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^L &= \hat{\mathbf{W}}_i^n - \frac{1}{2} \phi(r_i^L) (\mathbf{W}_{i+1}^n - \mathbf{W}_i^n) \\ \hat{\mathbf{W}}_i^R &= \hat{\mathbf{W}}_i^n + \frac{1}{2} \phi(r_i^R) (\mathbf{W}_i^n - \mathbf{W}_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Con estos valores se resuelve el problema de Riemann en cada interfaz, que en nuestro caso aproximamos con Kurganov y Tadmor según la expresión 2.59 para obtener $\mathbf{F}_{i+1/2}^n$ y $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$. Finalmente, integramos en un paso temporal completo con estos valores del vector de flujo:

$$\hat{\mathbf{W}}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t}{2V_i} \left[\mathbf{F}_{i+1/2}^n S_i^R - \mathbf{F}_{i-1/2}^n S_i^L \right] - \frac{\Delta t}{2V_i} \left[\mathbf{V}_i^n (S_i^R - S_i^L) \right] - \Delta t \mathbf{C}_i^n \quad (2.69)$$

Condiciones de contorno

Para concluir el apartado es necesario indicar cómo tratar las condiciones de contorno con los métodos de volúmenes finitos, pues es diferente al proceso empleado con diferencias finitas.

En volúmenes finitos el procedimiento para incorporar las condiciones de contorno consiste en buscar el valor del vector de flujo entre la celda del extremo y el contorno, es decir, no buscamos el valor de la frontera sino el flujo que pasa por ella. No se trata, por tanto, de una condición de contorno de tipo Dirichlet. En la Figura 2.14 se comparan las incógnitas en la resolución de las condiciones de contorno mediante los métodos de diferencias finitas y los de volúmenes finitos.

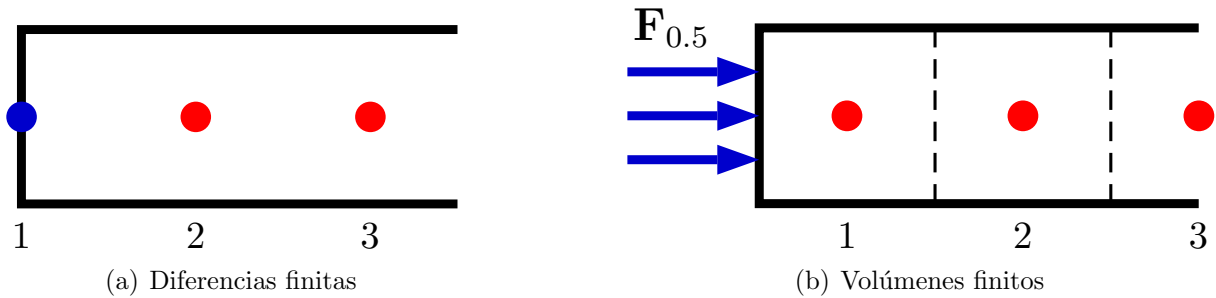


Figura 2.14: Incógnitas a resolver mediante las condiciones de contorno

Así, un extremo cerrado se traduce a un vector \mathbf{F} completamente nulo, lo cual es considerablemente más rápido de calcular que interpolar características para diferencias finitas.

En otros casos, como la unión entre conductos, se debe resolver el problema de Riemann al igual que se hace entre dos celdas cualesquiera, lo cual no supone un coste computacional excesivo.

En general, el cálculo de la condición de contorno mediante volúmenes finitos es más sencillo que con diferencias finitas, lo cual puede llevar a un ahorro en el tiempo de cálculo para geometrías complejas como la turbina del capítulo 4.

Capítulo 3

Estudio de sensibilidad

Índice

3.1. Introducción	43
3.2. Tubo de choque	44
3.2.1. Planteamiento	44
3.2.2. Solución analítica	45
3.2.3. Resultados	49
3.3. Pulso de presión	66
3.3.1. Planteamiento	66
3.3.2. Solución analítica	68
3.3.3. Resultados	68

3.1. Introducción

En el presente capítulo se pretende validar los códigos programados por medio de dos clásicos problemas ampliamente empleados en el estudio de métodos numéricos en la mecánica de fluidos computacional, pues su solución analítica es conocida. Se tratan del problema del tubo de choque de Sod y del pulso de presión inicialmente cuadrado que viaja a través de un tubo. En ambos casos se describirá el problema a resolver, se comentará la solución analítica y, finalmente, se realizará un estudio de sensibilidad con el fin de conocer el efecto que tiene el método empleado y el tamaño de la malla en la precisión del cálculo, el tiempo del cálculo y la conservación de la masa.

En el siguiente capítulo se realizará el estudio de una geometría más compleja, como la de una turbina utilizada en aplicaciones automovilísticas, que se validará mediante

resultados experimentales.

3.2. Tubo de choque

3.2.1. Planteamiento

El problema del tubo de choque propuesto por Sod en 1978 en [9] consiste en estudiar la evolución de un gas que se encuentra en el interior de un tubo con los extremos cerrados. Inicialmente, el tubo está dividido en dos regiones de igual tamaño por medio de un diafragma delgado. En cada una de las regiones encontramos el mismo gas en reposo, pero sus propiedades termodinámicas son distintas, es decir, el gas en cada una de las dos zonas tiene distinta presión, densidad y temperatura. Se trata, por tanto, de una simplificación del problema de Riemann que aparecía en los métodos de volúmenes finitos.

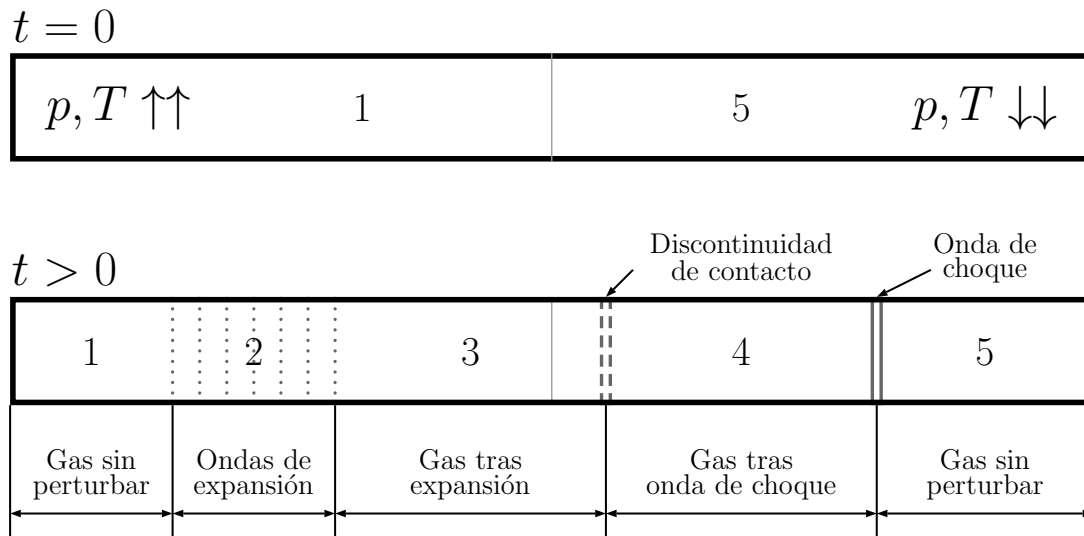


Figura 3.1: Esquema de la evolución del fluido en el tubo de choque

El motivo por el cual este problema se encuentra tan extendido en la validación de códigos numéricos se debe a que la rotura del diafragma crea tres ondas que son difíciles de reproducir fielmente mediante métodos numéricos. La evolución del fluido ante esta rotura se esquematiza en la Figura 3.1. En ella pueden observarse estas tres ondas que surgen buscando el equilibrio de presiones en el tubo.

- Onda de choque: al romperse el diafragma surge una onda de choque que eleva la presión del gas a baja presión hasta una presión intermedia. Esta onda, de muy

reducido espesor, provoca una evolución no isentrópica que también elevará la temperatura del gas.

- Ondas de expansión: por el motivo opuesto, el gas que inicialmente se encontraba a alta presión debe experimentar un proceso que reduzca esta presión hasta una intermedia. Por este motivo se generan unas ondas de expansión (o rarefacción) cuya función es reducir la presión inicial hasta aquella que había tras la onda de choque descrita anteriormente. A diferencia de la onda de choque, este proceso no es infinitesimal, ni una discontinuidad como tal, sino que la evolución del gas a través de las ondas de expansión es progresiva, siendo un proceso isentrópico.
- Onda o discontinuidad de contacto: tanto el gas que atraviesa la onda de choque como el que atraviesa la onda de expansión poseen idéntica presión, pues de otro modo no habría equilibrio en esta zona intermedia. No obstante, las temperaturas de uno y otro no son iguales, ya que provienen de evoluciones distintas: uno tenía una mayor temperatura y ha experimentado una evolución isentrópica mientras que el otro tenía una menor temperatura y ha sido comprimido bruscamente mediante un proceso no isentrópico. Por tanto, al tener misma presión pero distinta temperatura, aparece una onda de contacto, conocida en inglés como *contact discontinuity*.

En un instante cualquiera la distribución de presiones, densidades y velocidades podría ser la mostrada en la Figura 3.2. Se observan claramente la igualdad de presiones y velocidades a ambos lados de la onda de contacto, la continua evolución a través de las ondas de expansión y la variación brusca de las propiedades del gas con la onda de choque.

Este problema, además de utilizarse para la validación de métodos numéricos, ha gozado a lo largo del siglo XX de cierto interés experimental [10]. La primera instalación fue construida en 1899 por el científico francés Paul Vieille para estudiar el proceso de deflagración de cargas explosivas. En la actualidad, los tubos de choque se utilizan como túneles de viento de bajo coste y alta velocidad, en los cuales se ensayan una amplia variedad de dispositivos aeroespaciales a escala, como aviones supersónicos, misiles, impactos de asteroides o entrada atmosférica de transbordadores espaciales. Esta aplicación busca aprovechar la alta velocidad que se genera en la región comprendida entre la onda de choque y la de expansión, que incluye la onda de contacto. No obstante, la rápida reflexión de la onda de expansión provoca que la duración del ensayo esté limitada a unos pocos milisegundos. Por último, este dispositivo se ha utilizado también desde el punto de vista de la química, con el fin de estudiar la cinética de una reacción entre dos gases diferentes.

3.2.2. Solución analítica

Como se ha comentado anteriormente, el hecho de poder resolver analíticamente este problema ayuda a validar la implementación de códigos numéricos. De ahí que antes de

3. Estudio de sensibilidad

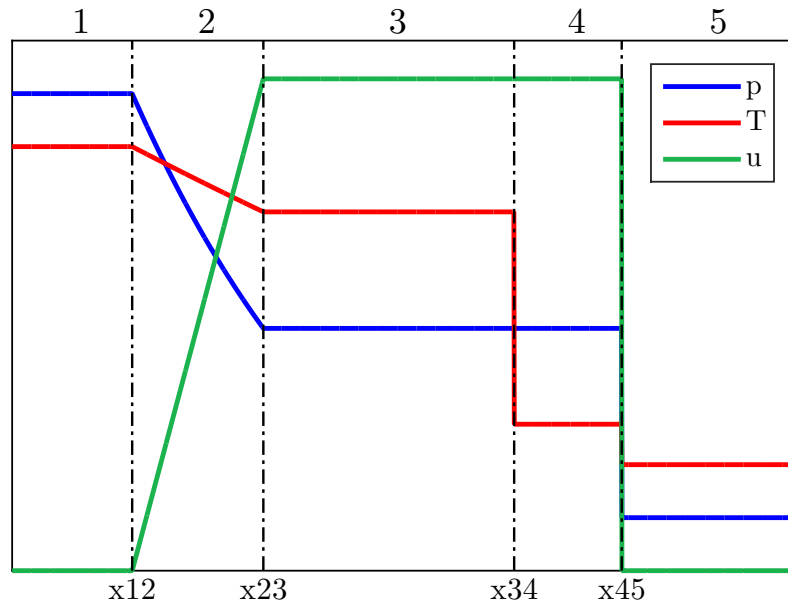


Figura 3.2: Distribución característica de las magnitudes termodinámicas en el tubo de choque

mostrar los resultados obtenidos aplicando técnicas de volúmenes finitos y diferencias finitas, resulte interesante resolver analíticamente el problema. Para ello realizaremos las hipótesis de gas perfecto, flujo unidimensional sin fricción ni adición de calor y tubo de sección constante.

Comenzamos dividiendo el tubo en cinco secciones que aparecían ya representadas en las Figuras 3.1 y 3.2:

1. Gas a elevada presión sin perturbar. Se extiende desde el comienzo del tubo hasta el principio de la onda de expansión.
2. Onda de expansión. Como ya se ha comentado anteriormente, la onda de expansión no es infinitesimal como la onda de choque, sino que tiene cierta amplitud, por lo que definimos esta segunda región.
3. Gas tras la onda de expansión. Incluye el gas que se encuentra entre el final de la expansión y la discontinuidad de contacto.
4. Gas tras la onda de choque. Comprende el gas que ya ha pasado por la onda de choque y se encuentra separado del que se ha expandido por medio de la discontinuidad de contacto.
5. Gas a baja presión sin perturbar. Esta zona incluye el gas al cual aún no le ha llegado la onda de choque.

Una vez definidas estas regiones, pasamos a calcular las propiedades termodinámicas del gas en cada una de las ellas. En las regiones 1 y 5 las propiedades serán las iniciales, pues la velocidad de propagación de las ondas es finita y aún no les ha llegado la información. En el resto de zonas el cálculo no es trivial, por lo que se detalla a continuación.

En primer lugar, en la onda de choque supondremos que se cumplen las ecuaciones de Rankine-Hugoniot, que permiten expresar la densidad y la velocidad tras la onda de choque en función de la densidad inicial y las presiones a ambos lados de la onda. Definiendo

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \beta = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \quad (3.1)$$

la densidad y la velocidad vienen dadas por 3.2 y 3.3.

$$\rho_4 = \rho_5 \cdot \frac{p_4 + \Gamma p_5}{p_5 + \Gamma p_4} \quad (3.2)$$

$$u_4 = (p_4 - p_5) \cdot \sqrt{\frac{1 - \Gamma}{\rho_5 \cdot (p_4 + \Gamma p_5)}} \quad (3.3)$$

Como puede comprobarse, en las expresiones 3.2 y 3.3 aparece explícitamente la presión tras la onda de choque, la cual es desconocida. No obstante, la onda de contacto asegura que la presión y la velocidad se mantienen constantes a ambos lados de la misma, es decir, $p_3 = p_4$ y $u_3 = u_4$. Por tanto, buscamos la forma de expresar la velocidad y la presión en la región 3 a partir de las de la región 1, que no han variado.

La velocidad tras la onda de choque será la resultante de una evolución isentrópica y viene dada por la expresión 3.4.

$$u_3 = (p_1^\beta - p_3^\beta) \cdot \sqrt{\frac{(1 - \Gamma^2) \cdot p_1^{1/\gamma}}{\Gamma^2 \cdot \rho_1}} \quad (3.4)$$

Igualando 3.3 y 3.4 obtenemos la presión $p_3 = p_4$ y la velocidad $u_3 = u_4$ ¹. A partir de 3.2 se obtiene la densidad en esta región y, con la ecuación de estado, la temperatura en 4. Por otra parte, recordando que la evolución a través de la onda de expansión es

¹Esta ecuación se resuelve fácilmente mediante algún método de búsqueda de ceros haciendo $u_3 - u_4 = 0$.

3. Estudio de sensibilidad

isentrópica:

$$\rho_3 = \rho_1 \cdot \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3.5)$$

Estas propiedades se mantienen fijas en las regiones 3 y 4. No obstante, el tamaño de estas regiones no permanece constante, sino que va evolucionando al desplazarse las ondas a lo largo del tubo. Para conocer la extensión de cada una de las regiones definimos las rectas x_{12} , x_{23} , x_{34} y x_{45} que parten del diafragma inicial, como se muestra en la Figura 3.3, y tendrán una pendiente en un diagrama $x - t$ igual a la inversa de su velocidad de propagación.

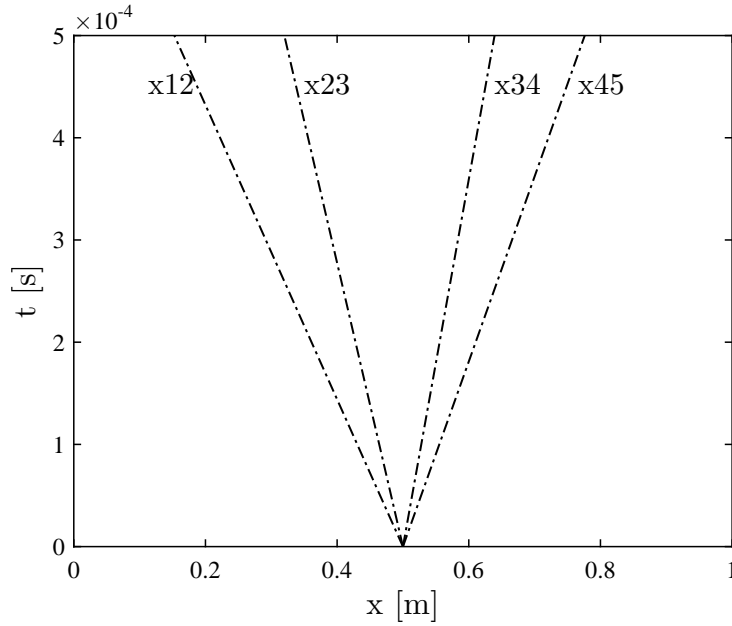


Figura 3.3: Rectas características en el tubo de choque

El frente de la onda de expansión se mueve a la izquierda a la velocidad del sonido del gas sin perturbar:

$$u_{12} = -a_1 = -\sqrt{\gamma RT_1} = -\sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \quad (3.6)$$

El final de esta onda de expansión se mueve a una velocidad igual a la velocidad del sonido en el final de la onda menos la velocidad del fluido en 3 ya calculada anteriormente:

$$u_{23} = -(a_3 - u_3) = -(\sqrt{\gamma RT_3} - u_3) \quad (3.7)$$

Por otra parte, la onda de contacto se mueve junto con el fluido, es decir, a la velocidad del fluido:

$$u_{34} = u_3 = u_4 \quad (3.8)$$

Finalmente, la onda de choque se mueve hacia la derecha a una velocidad tal que garantice cumplir la ecuación de continuidad en ambos lados de la onda:

$$\rho_5 u_{45} = \rho_4 (u_{45} - u_4) \rightarrow u_{45} = \frac{u_4}{1 - \rho_5/\rho_4} \quad (3.9)$$

Únicamente nos queda calcular las propiedades en el interior de la onda de expansión (región 2), que dependen del tiempo y la posición. Para ello buscamos la velocidad que tendría la recta característica que conecta un determinado punto x con el origen en un determinado instante t_j . A partir de esta velocidad se obtiene la velocidad del sonido local:

$$a(x, t_j) = (1 - \Gamma) \cdot a_1 - \Gamma \cdot \frac{x - x_0}{t_j}; \quad \forall x \in (x_{12}, x_{23}), t_j \quad (3.10)$$

$$T(x, t_j) = \frac{(a(x, t_j))^2}{\gamma R} \quad \forall x \in (x_{12}, x_{23}), t_j \quad (3.11)$$

Por último, la presión y la densidad en cada punto se obtienen a partir de la evolución isentrópica desde 1:

$$p(x, t_j) = p_1 \left(\frac{T(x, t_j)}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \forall x \in (x_{12}, x_{23}), t_j \quad (3.12)$$

$$\rho(x, t_j) = \rho_1 \left(\frac{T(x, t_j)}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \forall x \in (x_{12}, x_{23}), t_j \quad (3.13)$$

3.2.3. Resultados

Área constante

Una vez se ha explicado la solución analítica del problema del tubo de choque de Sod, pasamos a analizar las diferencias entre esta solución y la proporcionada por los distintos métodos numéricos implementados. Para ello particularizaremos el problema con los datos que figuran en la Tabla 3.1, que coinciden con los empleados por Winterbone en [2].

3. Estudio de sensibilidad

Propiedad	Izquierda	Derecha
p [bar]	5	1
T [K]	1200	300
u [m/s]	0	0
γ [-]	1,4	1,4
R [J/kgK]	287	287

Tabla 3.1: Condiciones iniciales en el tubo de choque

Comenzamos comprobando que los resultados obtenidos se asemejan al esquema mostrado en la Figura 3.2. Para ello se calcula, con un determinado número de nodos, las magnitudes termodinámicas características del problema y se comparan cualitativamente con la solución analítica.

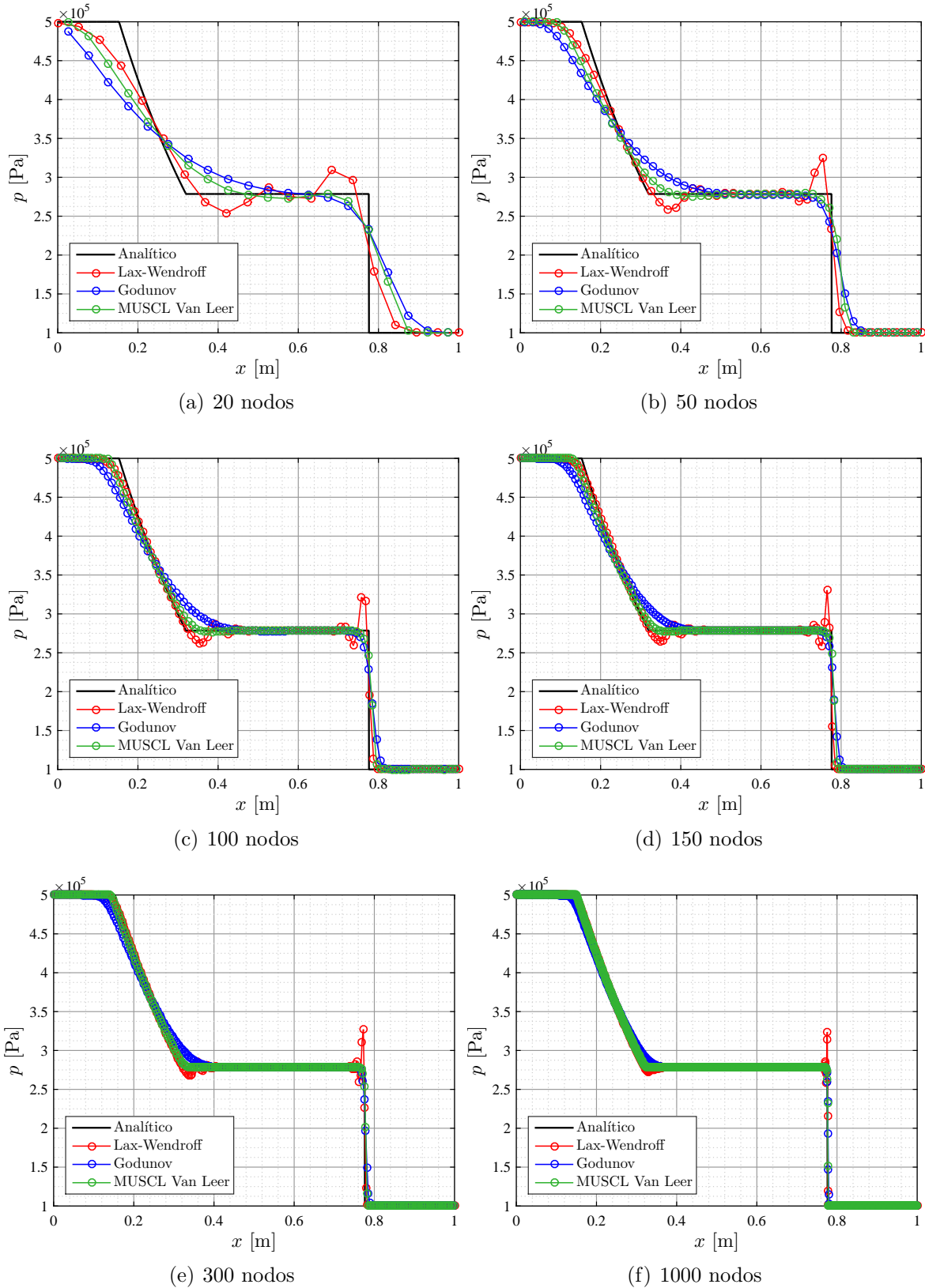
En las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se comprueba que un aumento del número de nodos aproxima la solución numérica a la analítica, como era de esperar. También se observan las características oscilaciones del método de Lax-Wendroff, pues no es TVD, así como la excesiva disipación del método de Godunov por ser de primer orden.

En dichas representaciones únicamente se ha mostrado un método MUSCL. Esto se debe a que los tres limitadores escogidos proporcionan resultados similares, ya que tienen la misma naturaleza: métodos de volúmenes finitos TVD de segundo orden en tiempo y hasta segundo orden en espacio. No obstante, si comparamos en la Figura 3.7 los tres métodos con 20 nodos, se observa que el limitador Van Leer proporciona unos resultados intermedios, pues no sobreoscila como el Superbee ni suaviza tanto como el Minmod. Por tanto, tomaremos el método de MUSCL Van Leer como el representativo de los distintos esquemas MUSCL.

Estos resultados son lógicos si observamos de nuevo la Figura 2.13. Superbee se encuentra en el límite superior de estabilidad, es decir, el límite máximo que puede tener un limitador para ser TVD. Minmod, por el contrario, se encuentra sobre el límite que asegura que el método es de hasta segundo orden. Por tanto, es coherente que el limitador Van Leer proporcione resultados comprendidos entre ambos extremos.

Una vez analizada cualitativamente la bondad de los distintos métodos numéricos, pasamos a cuantificar las diferencias entre estos métodos y la solución analítica. Para ello calcularemos en cada instante de tiempo la masa encerrada en el interior del tubo, así como la energía cinética.

El cálculo de estas propiedades es sencillo para los métodos de volúmenes finitos, pues

Figura 3.4: Presiones en el tubo de choque en $t = 0,5$ ms

3. Estudio de sensibilidad

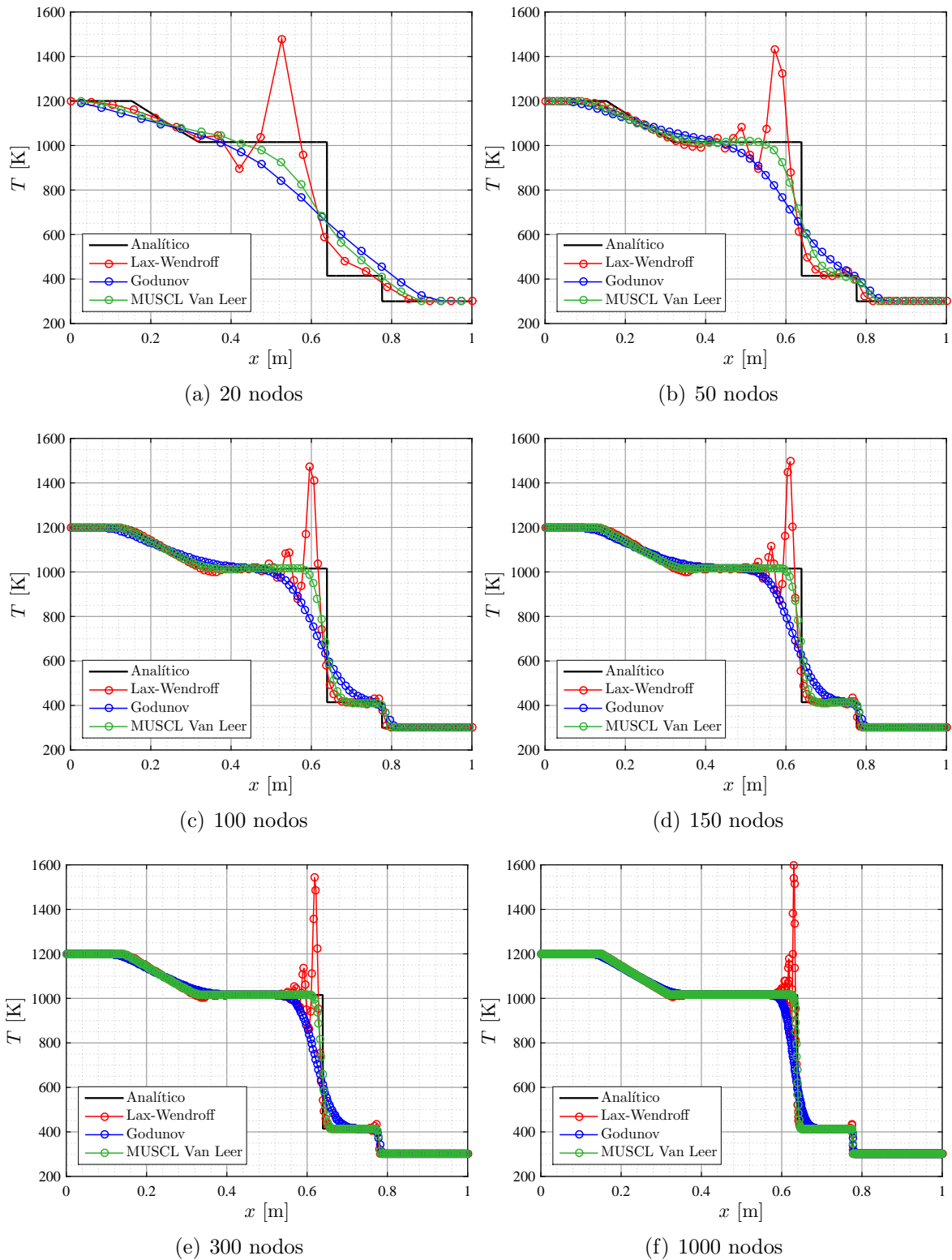
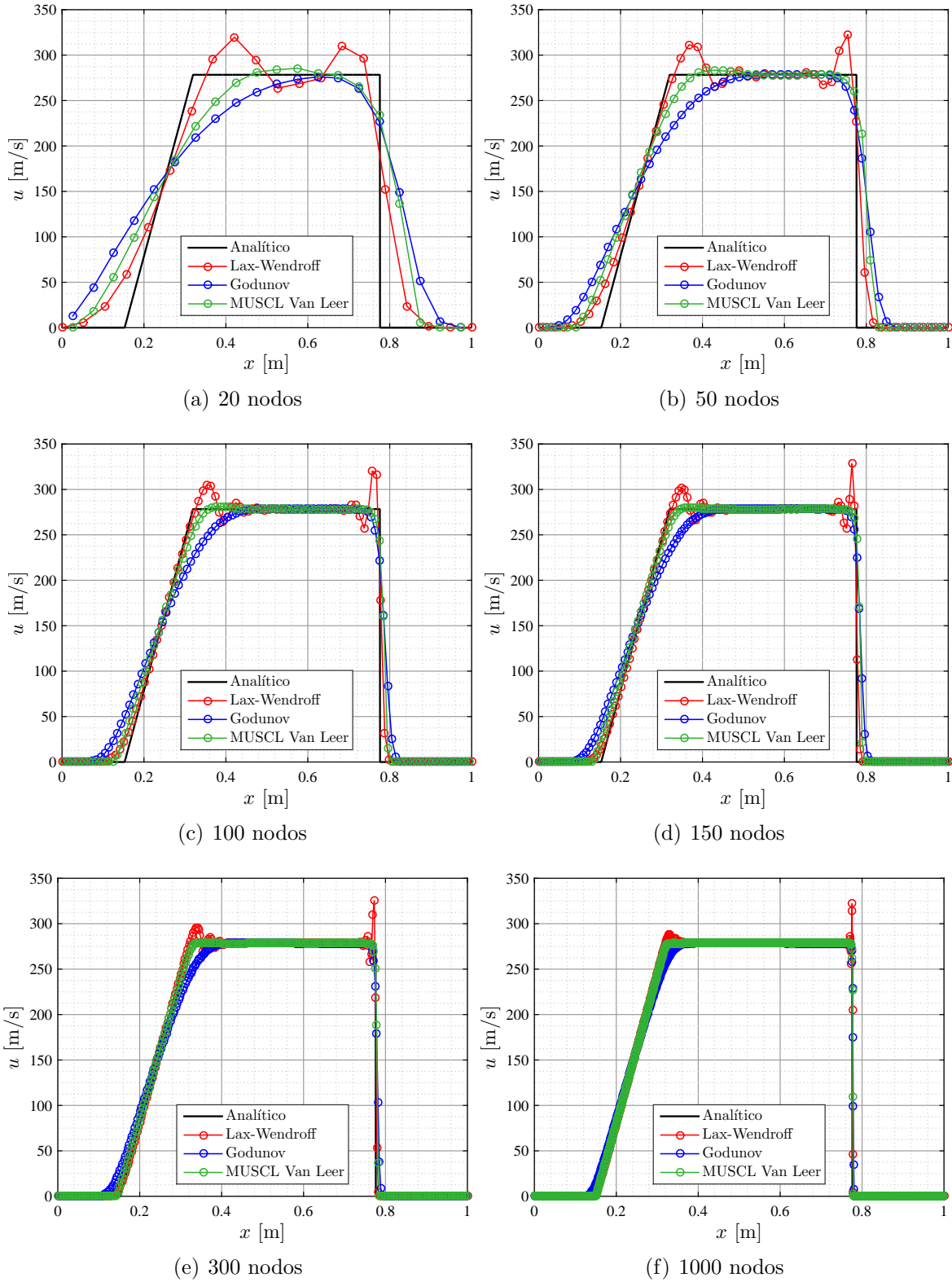


Figura 3.5: Temperaturas en el tubo de choque en $t = 0,5$ ms

Figura 3.6: Velocidades en el tubo de choque en $t = 0,5$ ms

3. Estudio de sensibilidad

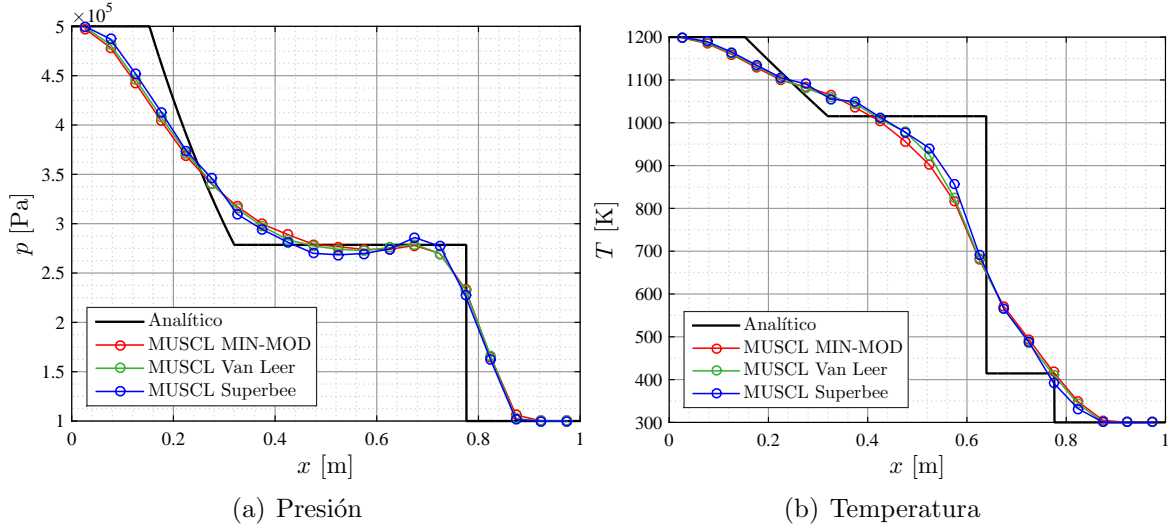


Figura 3.7: Comparación de los tres limitadores programados utilizados en el esquema MUSCL

únicamente hay que sumar la masa o la energía cinética de cada celda, es decir:

$$m(t) = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \pi \cdot \frac{D_i^2}{4} \cdot \Delta x_i \quad (3.14)$$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot u_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \pi \cdot \frac{D_i^2}{4} \cdot \Delta x_i \cdot u_i^2 \quad (3.15)$$

En el caso del método de Lax-Wendroff, por ser un método de diferencias finitas y concentrar sus propiedades en los nodos, el cálculo de la masa y la energía cinética requiere estimar cómo varía una determinada propiedad entre dos nodos consecutivos. Una opción es suponer una variación lineal entre los nodos y así poder integrar a lo largo de todo el tubo. Esta hipótesis no supone aumentar el error del método, pues para calcular la condición de contorno de extremo cerrado por medio del método de las características ya estamos suponiendo una variación lineal entre nodos. Las integrales resultantes son las siguientes y pueden resolverse analítica o numéricamente:

$$m(t) = \int_0^V \rho(x) dV = \frac{\pi}{4} \int_0^l \rho(x) D(x)^2 dx \quad (3.16)$$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^V \rho(x) u(x)^2 dV = \frac{\pi}{8} \int_0^l \rho(x) u(x)^2 D(x)^2 dx \quad (3.17)$$

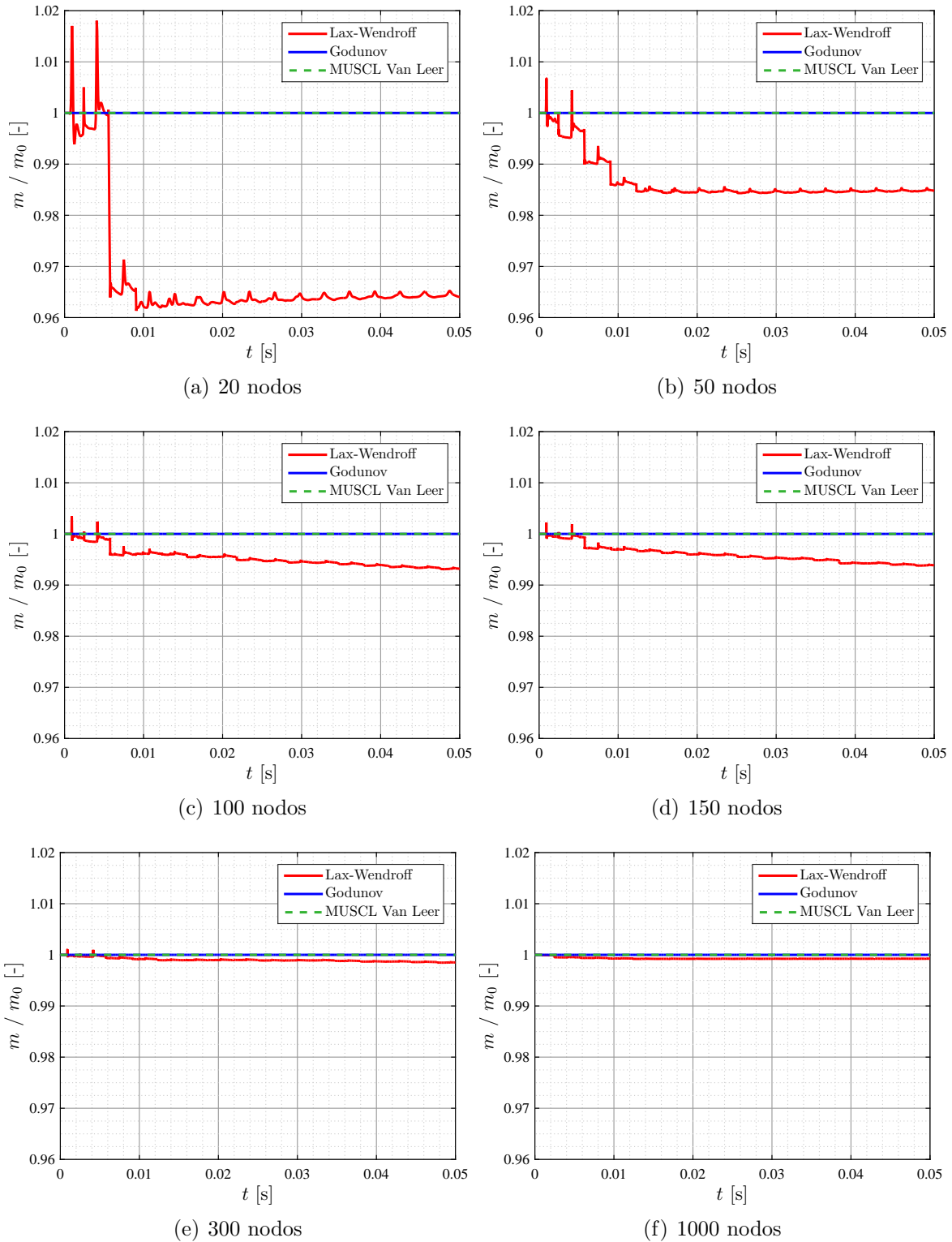


Figura 3.8: Efecto del número de nodos en la masa encerrada en el tubo de choque

3. Estudio de sensibilidad

En la Figura 3.8 se representa la cantidad de masa presente en el tubo en función del tiempo para distinto tamaño de la malla. Como era de esperar, los métodos de volúmenes finitos mantienen constante la masa, por ser intrínsecamente conservativos. En cambio, el método de diferencias finitas modifica la masa total en cada instante de tiempo, siendo mayor la pérdida cuanto más grande sea la malla empleada.

Como se observa en la Figura 3.8, la masa proporcionada mediante el método de Lax-Wendroff sufre grandes oscilaciones en determinados instantes de tiempo. Esto se debe a que justo en esos tiempos las ondas de choque o de expansión llegan a las paredes del tubo y el método de las características utilizado en las condiciones de contorno, es de primer orden no conservativo, y supone una mayor variación de masa. También puede observarse que llega un punto en el que la masa prácticamente se estabiliza. Esto se debe a que la presión es muy uniforme a lo largo del tubo y no hay saltos bruscos que hagan perder excesiva masa. En la Tabla 3.2 se cuantifica esta pérdida de masa una vez ya estabilizado el problema.

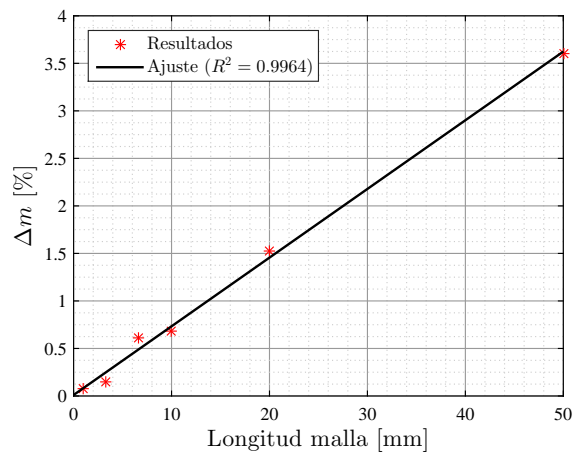


Figura 3.9: Pérdida de masa a los 0,05 ms en el tubo de choque

Número de nodos	Tamaño de malla [mm]	Pérdida de masa [%]
20	50	3,60
50	20	1,52
100	10	0,68
150	6,67	0,61
300	3,33	0,61
1000	1	0,08

Tabla 3.2: Pérdida de masa por el método de Lax-Wendroff en el tubo de choque

Los resultados ponen de manifiesto que la pérdida de masa aumenta de manera lineal con el tamaño de la malla, como se muestra en la Figura 3.9. Esto implica que si disponemos de una malla gruesa porque se busca un cálculo más rápido que preciso, nos interesará utilizar un método de volúmenes finitos y así evitar una elevada pérdida de masa.

Si realizamos los anteriores gráficos para la energía cinética que posee el gas en el interior del tubo obtenemos unas conclusiones distintas. En la Figura 3.10(a) se recoge, para un tamaño de celda de 2 cm (50 nodos) la energía cinética calculada por cada uno de los 3 métodos estudiados y se compara con la solución analítica. Puesto que esta solución es solo válida hasta que las ondas rebotan en los extremos del tubo, en la Figura 3.10(b) se muestra la evolución en un intervalo mayor de tiempo, donde sí se producen interferencias entre las ondas y disminuye considerablemente la energía cinética.

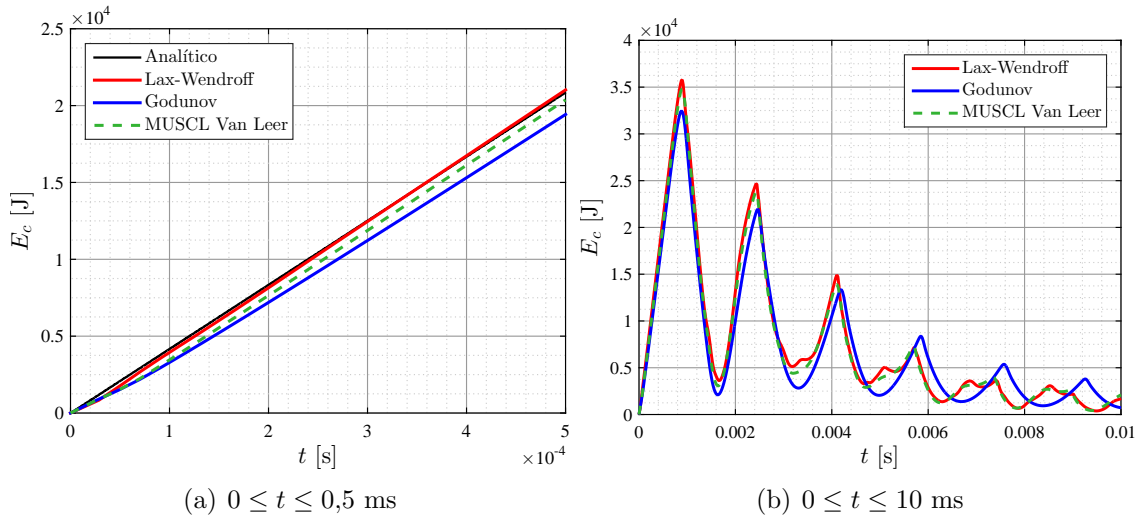


Figura 3.10: Variación de energía cinética en el tubo de choque

Puede apreciarse que las líneas roja y negra prácticamente se solapan, lo cual indica que el método de Lax-Wendroff es el que recoge más fielmente la evolución de la energía cinética, si bien las diferencias con el esquema MUSCL son pequeñas. El método de Godunov, al ser de primer orden, suaviza más los comportamientos del gas, por lo que la energía cinética es menor. Al analizar un mayor intervalo de tiempo se observa que los métodos de segundo orden recogen de manera más precisa la evolución de la energía cinética que el método de Godunov, al ser este último más disipativo.

Se ha observado, por tanto, que las diferencias entre los métodos de segundo orden y la solución analítica en cuanto a energía cinética son pequeñas. Si modificamos el tamaño de la malla (Figura 3.11) se observa que los métodos de Lax-Wendroff y MUSCL proporcionan siempre resultados similares, mientras que el método de Godunov mejora considerablemente al aumentar el número de nodos. No obstante, a la vista de los resultados de tiempo de cálculo que mostraremos más adelante en las Figuras 3.12 y 3.13, no

3. Estudio de sensibilidad

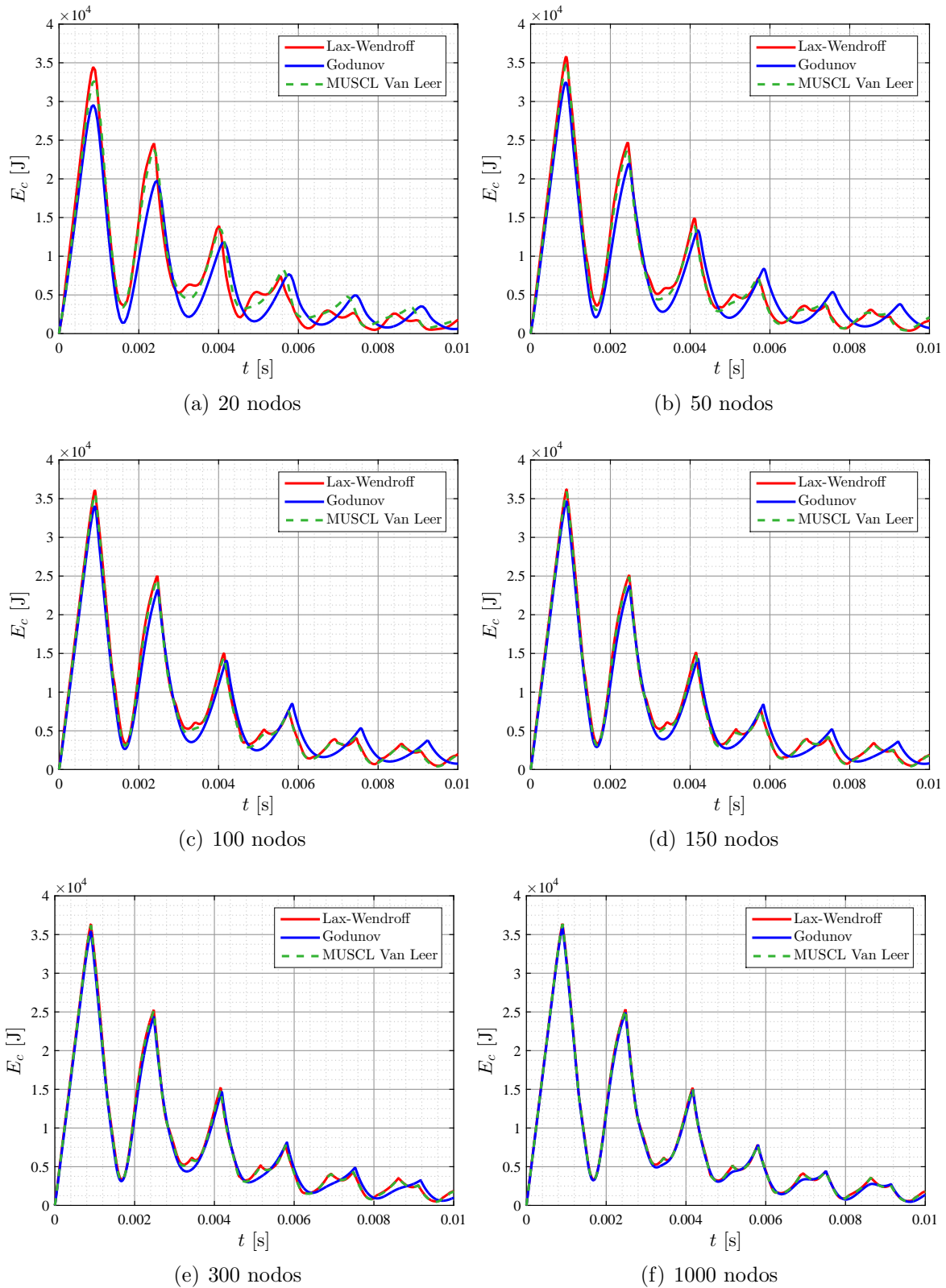


Figura 3.11: Efecto del número de nodos en la energía cinética en el tubo de choque

convendrá aumentar el número de nodos para aplicar el método de Godunov y así obtener un resultado preciso, sino que interesará más utilizar un método de segundo orden con menor número de nodos.

Resulta destacable que el método de Lax-Wendroff sea el que mejores resultados proporcione atendiendo a la energía cinética, pues como se veía en la Figura 3.8 implicaba una pérdida de masa. Esto hace, por tanto, que la energía cinética específica sea ligeramente superior a la analítica y compense la disminución de masa.

Reducir el tamaño de la malla, como se ha visto, mejora la precisión de los resultados. No obstante, esta mejora de la precisión viene acompañada, como ya se podía intuir, de un aumento en el tiempo de cálculo. Para estudiar este efecto se ha registrado el tiempo que tardaba cada método en realizar el cálculo con un número de nodos determinado. Puesto que se buscaba el tiempo invertido exclusivamente en el cálculo, en este estudio no se escribía ningún resultado en ningún fichero, ya que esto supondría estar computando tiempo que no corresponde al cálculo sino a la operación de escritura. La bondad de los resultados ya quedaba comprobada con el estudio de la influencia del número de nodos realizado anteriormente.

Con el fin de eliminar la incertidumbre asociada a un solo cálculo, pues el ordenador puede introducir alguna interrupción de mayor prioridad, se decidió lanzar cada cálculo 4 veces y promediar los resultados. Este procedimiento se llevó a cabo con dos compiladores: Microsoft Visual Studio 14.0 y TDM-GCC, observándose ciertas diferencias como se muestra en la Figura 3.12, donde los círculos $-o-$ representan cálculos puntuales y los asteriscos $-* -$, el valor medio.

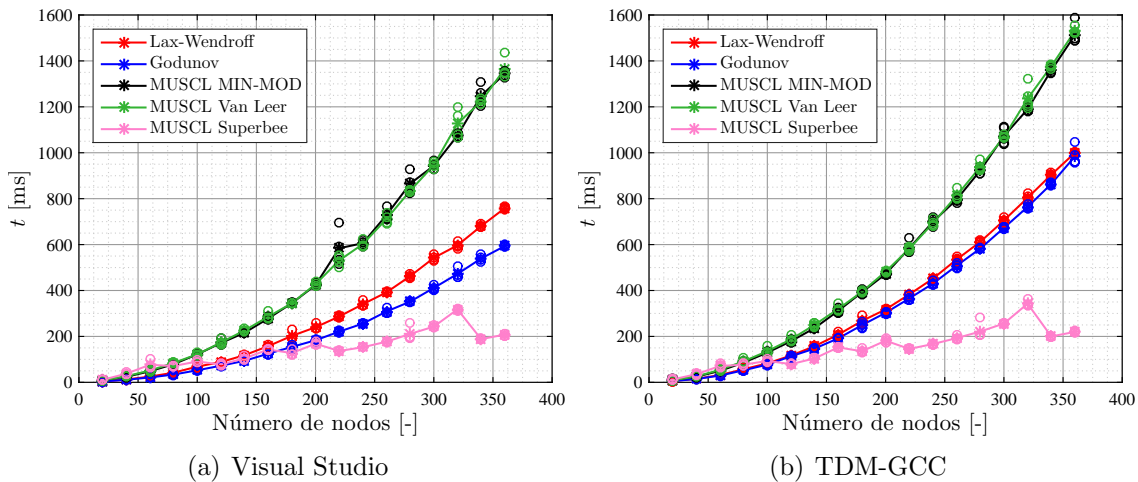


Figura 3.12: Tiempo invertido en el cálculo del tubo de choque en función del número de nodos y el método numérico

Independientemente del compilador y del método numérico elegidos, en la Figura 3.12 se comprueba que el tiempo de cálculo aumenta de forma cuadrática con el número de

3. Estudio de sensibilidad

nodos, como ya se había anticipado en la sección 2.3. Por otra parte, se observa que los métodos MUSCL suponen un mayor coste computacional. Este coste depende poco del limitador escogido, pues las curvas de MIN-MOD y Van Leer se solapan en la mayor parte del dominio. Por este motivo, resulta destacable que la curva Superbee caiga por debajo de las de Lax-Wendroff o Godunov e incluso reduzca en ciertos casos el tiempo de cálculo al aumentar el número de nodos. Esto se debe a que, a partir de un cierto número de nodos y un instante de tiempo, este método diverge, pues el limitador se encuentra definido sobre el límite superior de estabilidad, como se veía en la Figura 2.13. Según el instante en el que diverja proporciona un mayor o menor tiempo de cálculo, por lo que esta curva no es representativa de los métodos MUSCL.

De la Figura 3.12 también se desprende que el método de Godunov y el de Lax-Wendroff implican un tiempo de cálculo similar, considerablemente inferior al de los métodos MUSCL.

Para comprender mejor el coste computacional de cada método, se ha decidido adimensionalizar la Figura 3.12, eliminando así la dependencia cuadrática con el número de nodos. El método elegido en la Figura 3.13 para adimensionalizar se trata del Lax-Wendroff. Esto se debe a que es el método utilizado en la actualidad en OpenWAM y parte del interés de este trabajo radica en estudiar las ventajas de los métodos de volúmenes finitos respecto a este.

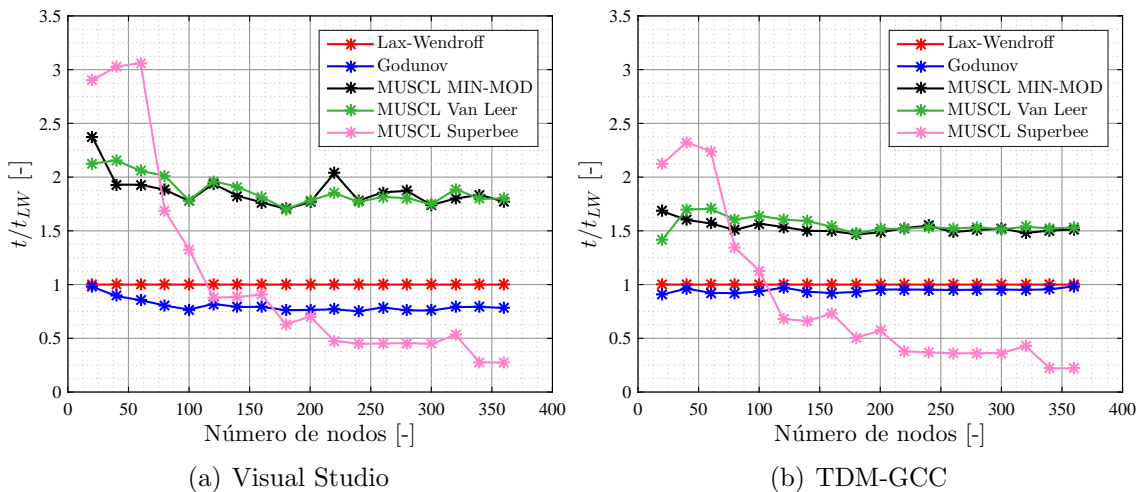


Figura 3.13: Tiempo relativo invertido en el cálculo del tubo de choque en función del número de nodos y el método numérico

La adimensionalización deja patente que el único método que supondría un ahorro en tiempo de cálculo respecto al Lax-Wendroff es el método de Godunov. Los métodos MUSCL, por el contrario casi doblan el tiempo de cálculo.

Estos primeros resultados ponen de manifiesto que si buscamos seguir fielmente las

oscilaciones de las magnitudes termodinámicas se necesita utilizar un método TVD, como los métodos MUSCL estudiados en este trabajo. No obstante, como acabamos de ver, requieren un tiempo de cálculo entre 1.5 y 2 veces mayor que el Lax-Wendroff. Esto implica que si buscamos mayor rapidez de cálculo sin perder la precisión que garantizan los métodos de segundo orden, utilizaremos el método de Lax-Wendroff.

En el caso en el que se haga uso de una malla gruesa para simular aún más rápido, surge el interés de utilizar el método de Godunov, cuyo tiempo de cálculo es algo inferior al de Lax-Wendroff y, a diferencia de este último, asegura la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía.

No obstante, para corroborar estas primeras conclusiones será necesario realizar estudios más exhaustivos como la modificación de la sección del tubo o utilizar geometrías más complejas como la de una turbina.

Área variable

Los conductos de sección variable son comunes en un motor de combustión interna alternativo. Además, la variación de la sección de un conducto supone eliminar el flujo unidimensional, puesto que debe tener ahora cierta componente radial. Por este motivo, se muestran a continuación las conclusiones obtenidas al variar el diámetro linealmente desde 2 cm en un extremo del tubo hasta 10 cm en el opuesto como muestra la Figura 3.14, donde también se representa el diafragma que separa los dos gases en la posición central.

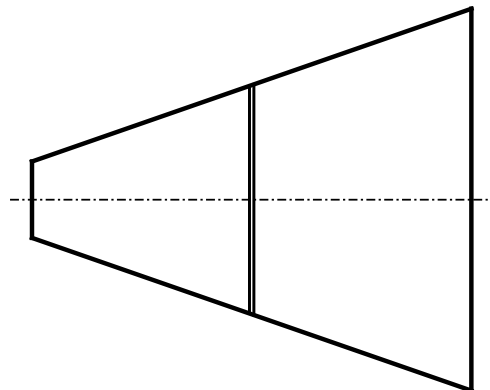


Figura 3.14: Geometría empleada para estudiar el tubo de choque de área variable

Entre las hipótesis llevadas a cabo para obtener la solución analítica se encontraba que la sección del tubo era constante. Al eliminar esta hipótesis ya no es posible encontrar una solución analítica como la anterior, por lo que, para llevar a cabo la comparación, utilizaremos la solución obtenida con una malla de 1000 nodos mediante un método MUSCL. Esto

3. Estudio de sensibilidad

es coherente, pues ya se ha comprobado en la sección anterior que al aumentar el número de nodos la solución coincide prácticamente con la analítica. Por otra parte, a pesar de que el flujo posee velocidad radial, mantendremos la suposición de flujo unidimensional, pues, de no ser así, no tendría sentido aplicar los métodos descritos en el capítulo 2.

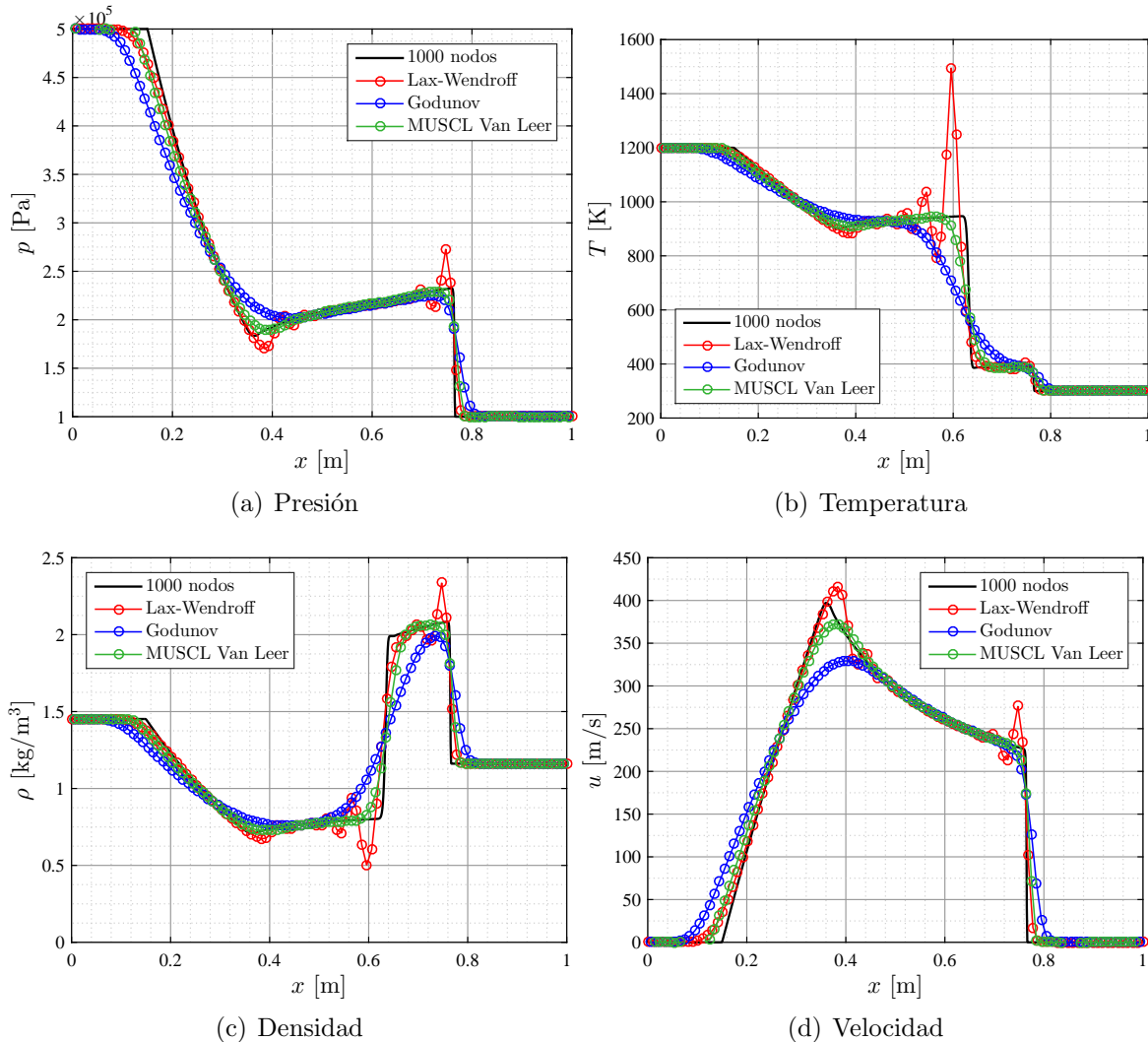


Figura 3.15: Variables termodinámicas en un tubo de choque con área variable

A pesar de no disponer de solución analítica, Winterbone también realizó estos cálculos en [2], por lo que supone una referencia a tener en cuenta para validar los resultados obtenidos en este trabajo. En la Figura 3.15 se muestran los resultados de presión, temperatura, velocidad y densidad para una malla de 1 cm, que difieren considerablemente de los mostrados en las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6.

Como se podía esperar, las magnitudes termodinámicas no permanecen constantes entre dos de las discontinuidades, como sucedía anteriormente, sino que deben adaptarse

a la variación de área.

La forma de cuantificar las diferencias de precisión al modificar el tamaño de la malla y utilizar un método u otro es similar a la del caso con área constante. En la Figura 3.16 se muestra la variación de masa respecto a la inicial y en la Figura 3.17 la energía cinética total en el interior del tubo. Se ha incluido además la variación de masa que tenía lugar con el método de Lax-Wendroff cuando el área era variable con el fin de poder comparar con esta nueva situación (línea roja a trazos).

En primer lugar, puede observarse en la Figura 3.16 que los métodos de Godunov y MUSCL siguen manteniendo la masa inicial, puesto que son conservativos. Como sucedía también cuando el área era constante (línea roja a trazos), el método de Lax-Wendroff no asegura la conservación de la masa. Aunque la pérdida máxima de masa en ambos se encuentra por debajo del 4%, se observa ahora que las diferencias son notablemente superiores al variar el área en todos los casos excepto cuando utilizamos solo 20 nodos, donde no alcanza un equilibrio de masa y, pasado cierto tiempo, el método empieza a generar, lo cual hace difícil hacer una predicción del comportamiento del método de Lax-Wendroff con tan pocos nodos cuando el área es variable.

Cabe destacar que no encontramos ahora ningún patrón que indique la pérdida de masa aproximada que vamos a tener con el método de Lax-Wendroff según la malla utilizada. Como puede observarse, al mallar con 150 nodos la pérdida es mucho mayor que la obtenida al utilizar 100 o 300 nodos. Esto puede deberse a que con esta configuración aparezca algún modo de oscilación que amplifique la pérdida de masa.

Por otra parte, observando la evolución de la energía cinética en la Figura 3.17, las conclusiones son similares a las obtenidas cuando la sección se mantenía constante. De nuevo observamos que los métodos de Lax-Wendroff y MUSCL proporcionan una solución bastante buena a pesar de que el número de nodos sea bajo y modelan similarmente la frecuencia de la variación de energía cinética. El método de Godunov, por el contrario, requiere de un alto número de nodos para coincidir con las otras soluciones.

La considerable pérdida de masa que tenía lugar cuando colocábamos 20, 50 o 150 nodos provoca que hacia el final del intervalo mostrado en la Figura 3.17 el método de Lax-Wendroff introduzca diferencias llamativas comparadas con la solución del caso de 1000 nodos que consideramos como representativo de la solución real. Esto se debe a que la energía cinética es proporcional a la masa, como veíamos en las ecuaciones 3.15 y 3.17.

En cuanto al tiempo de cálculo, las tendencias son iguales a las mostradas para sección constante, por lo que no se han incluido en este apartado.

3. Estudio de sensibilidad

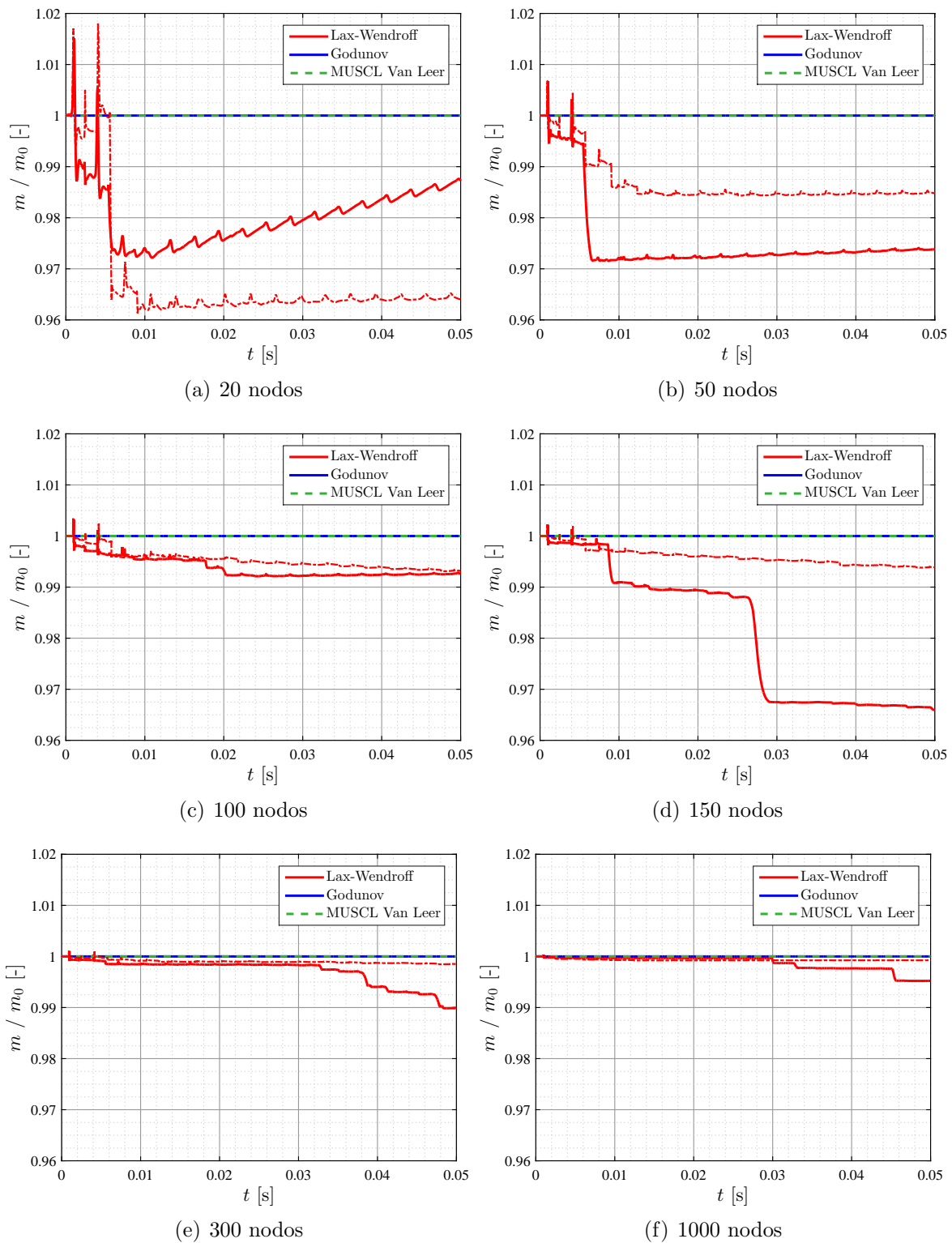


Figura 3.16: Efecto del número de nodos en la masa encerrada en el tubo de choque con área variable

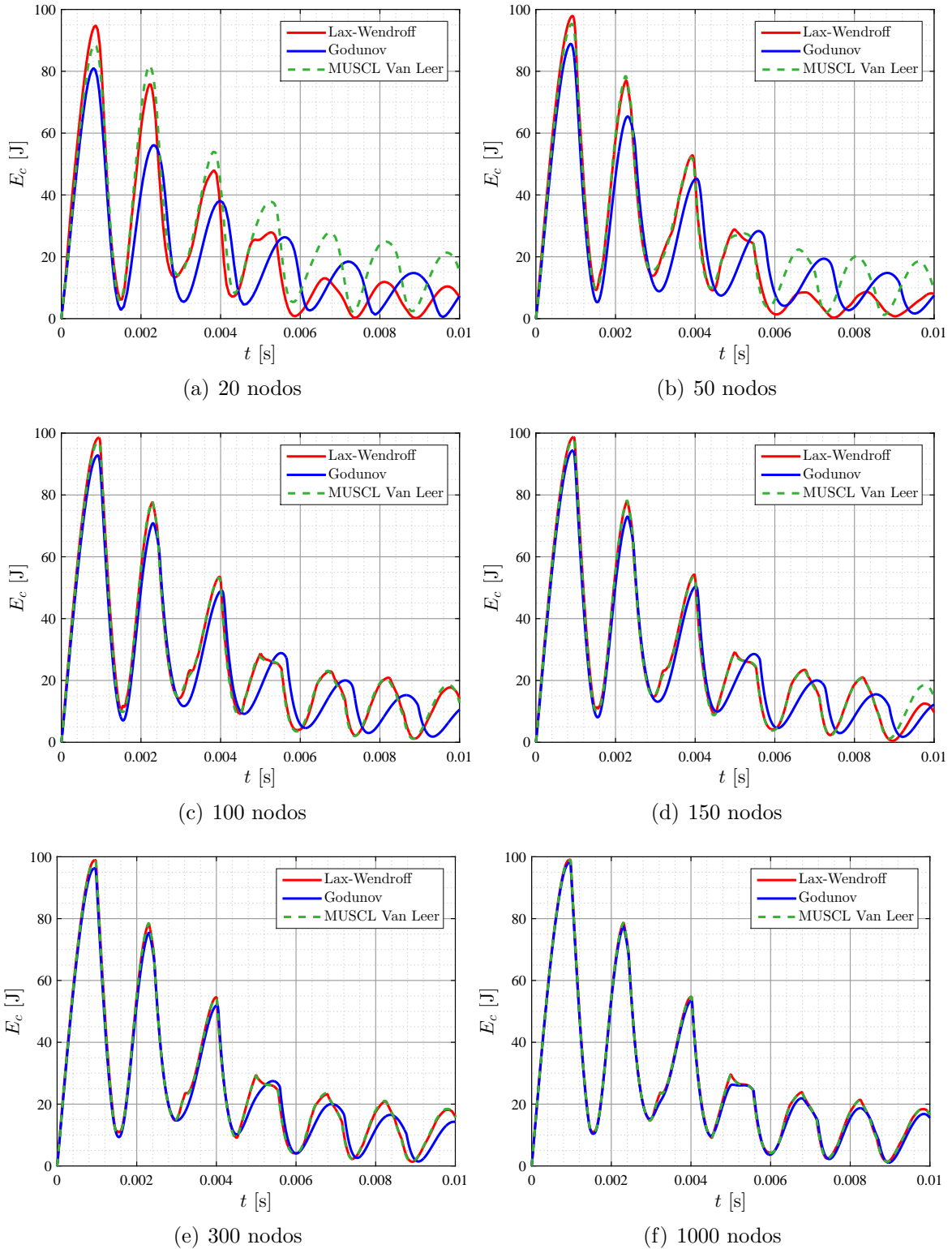


Figura 3.17: Efecto del número de nodos en la energía cinética en el tubo de choque con área variable

3.3. Pulso de presión

El siguiente problema a analizar corresponde a un pulso inicialmente cuadrado que se propaga a una velocidad determinada a lo largo de un tubo. A pesar de ser un problema similar al tubo de choque descrito en la sección 3.2, el pulso de presión nos permitirá observar de una manera más clara la reflexión de ondas en los extremos cerrados y la dispersión en frecuencia de cada método numérico.

3.3.1. Planteamiento

Tanto el pulso de presión como el tubo de choque son problemas que constan de un tubo con gas en su interior, diferenciándose tan solo en las condiciones iniciales impuestas, por lo que el planteamiento llevado a cabo para calcularlo será idéntico. En el caso anterior teníamos dos zonas bien diferenciadas con gas a alta presión y temperatura en una de ellas y gas a baja presión y temperatura en la otra. Ahora las condiciones iniciales consistirán en la excitación de una región del tubo que hará las veces de pulso inicial. Las hipótesis que asumiremos en este caso serán las mismas que en el tubo de choque, es decir, flujo unidimensional sin fricción ni adición de calor, gas perfecto y tubo de área constante. No obstante, también impondremos que el flujo sea inicialmente homoentrópico² para poder aplicar el Método de las Características en el cálculo de las condiciones iniciales y conseguir así un pulso cuadrado perfecto, sin reflexiones.

Para conseguir un pulso de presión cuadrado homoentrópico no es suficiente con imponer unas presiones, temperaturas y velocidades arbitrarias a una sección del tubo, sino que éstas deben ser coherentes entre sí para que el pulso inicial se desplace uniformemente en un sentido y no tenga otro comportamiento, como separarse en dos pulsos con distinto sentido y/o velocidad. Por este motivo, fijaremos la presión y la amplitud que tendrá este pulso y calcularemos la temperatura y la velocidad que debe llevar.

El método de las características establece que en un flujo homoentrópico las características λ y β , definidas en las expresiones 3.18 y 3.19, permanecen constantes en las rectas que viajan a velocidad $u + a$ y $u - a$, respectivamente, y se definen de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{a}{a_0} + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{u}{a_0} \quad (3.18)$$

$$\beta = \frac{a}{a_0} - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{u}{a_0} \quad (3.19)$$

²Un flujo homoentrópico es aquel en el que todos los puntos del fluido poseen el mismo nivel de entropía y se mantiene constante.

Teniendo esto claro, consideremos un punto P que recibe 2 rectas características: una característica λ que parte del pulso de presión (*left*) y otra característica β que proviene del flujo en reposo (*right*), como se muestra en la Figura 3.18. Por tanto, es posible particularizar las características en este punto, tal y como se realiza en las ecuaciones 3.20 y 3.21, donde se ha tomado como referencia el flujo en reposo, es decir, $0 \equiv R$.

$$\lambda_P = \frac{a_P}{a_0} + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{u_P}{a_0} = \frac{a_L}{a_0} + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{u_L}{a_0} \quad (3.20)$$

$$\beta_P = \frac{a_P}{a_0} - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{u_P}{a_0} = \frac{a_R}{a_0} = 1 \quad (3.21)$$

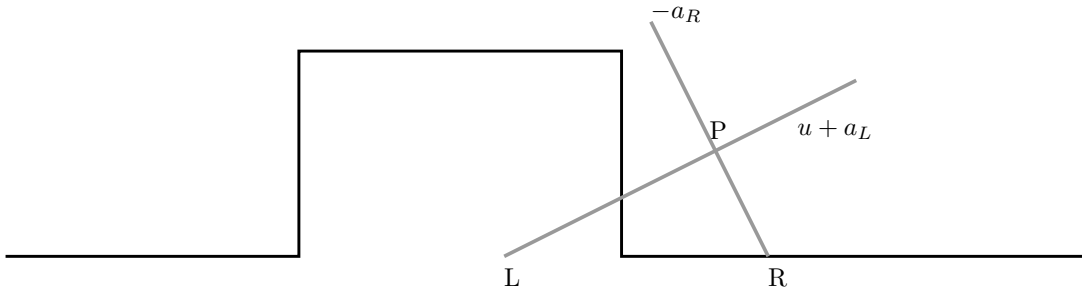


Figura 3.18: Evolución de las características en el pulso de presión

Sumando λ_P y β_P y dividiendo por 2 obtenemos

$$\frac{\lambda + \beta}{2} = \frac{a_P}{a_R} = \frac{1}{2} \frac{a_L}{a_R} + \frac{\gamma - 1}{4} \cdot \frac{u_L}{a_R} + \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

Por tratarse de un flujo homentrópico, podemos relacionar las velocidades del sonido entre el punto P , el pulso de presión L y el fluido en reposo R :

$$\frac{\lambda + \beta}{2} = \left(\frac{p_P}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_L}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} + \frac{\gamma - 1}{4} \cdot \frac{u_L}{a_R} + \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

Si tomamos un punto P tal que la velocidad y la presión sean iguales a las iniciales, es decir $P \equiv L$, podemos despejar de la ecuación 3.23 la velocidad que debe llevar el pulso inicial:

$$u_L = \frac{2}{\gamma - 1} \cdot a_R \left[\left(\frac{p_L}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] = \frac{2}{\gamma - 1} \cdot \sqrt{\gamma R T_R} \left[\left(\frac{p_L}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (3.24)$$

3. Estudio de sensibilidad

Por otra parte, la temperatura que tendrá el pulso se calcula sencillamente aplicando las propiedades del flujo homentrópico:

$$\frac{T_L}{T_R} = \left(\frac{p_L}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow T_L = T_R \left(\frac{p_L}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (3.25)$$

3.3.2. Solución analítica

Una vez planteado el problema resultaría interesante conocer su solución analítica. No obstante, deberíamos linealizar el problema para obtener una solución que nos proporcionase las diferentes variables termodinámicas a lo largo del tubo en cada instante de tiempo. Como el problema es claramente no lineal, realizar este procedimiento implicaría cierta cuota de error, por lo que dejaría de ser útil para analizar la sensibilidad de los métodos numéricos implementados.

Otra opción consistiría en aproximar la solución mediante series de senos y cosenos o por medio del método de las características. En ambos casos se obtendrían soluciones aproximadas, por lo que se ha recurrido a realizar la aproximación con un método ya implementado y no dedicar tiempo a otros métodos que, con suficiente número de nodos, darían la misma solución. Por ello, en este apartado, se realiza previamente el cálculo con 1000 nodos con el método de MUSCL Van Leer y se utiliza como referencia con la que comparar el resto de casos, de una forma similar a lo realizado en el tubo de choque de área variable.

3.3.3. Resultados

Comenzamos observando la evolución del pulso de presión a lo largo del tiempo. En la Figura 3.19 se ha representado el pulso en varios instantes de tiempo con un mismo método numérico (MUSCL Van Leer) y distinto número de nodos. En ella se puede observar la deformación del pulso al viajar por el conducto. Esto se debe a que físicamente no puede mantener la forma cuadrada inicial, pues, por un lado, tenemos la onda de choque que eleva bruscamente la presión del gas que inicialmente se encuentra en reposo y, por otro lado, tenemos la onda de expansión que, progresivamente, devuelve la presión elevada del pulso a la presión en reposo. La situación es, por tanto, similar al tubo de choque, si bien en este caso no aparece ninguna discontinuidad de contacto.

En la Figura 3.19(a) se muestra el pulso inicial. Se ha buscado que al variar el número de nodos la longitud del pulso de presión sea idéntica, motivo por el cual todos los casos estudiados son múltiplos de 20. En las siguientes figuras observamos cómo se va deformando el pulso. Esto se debe a que un gas a mayor presión viaja más rápido que otro a menor presión. Por tanto, el gas del frente de onda viajará más rápido que el gas en la

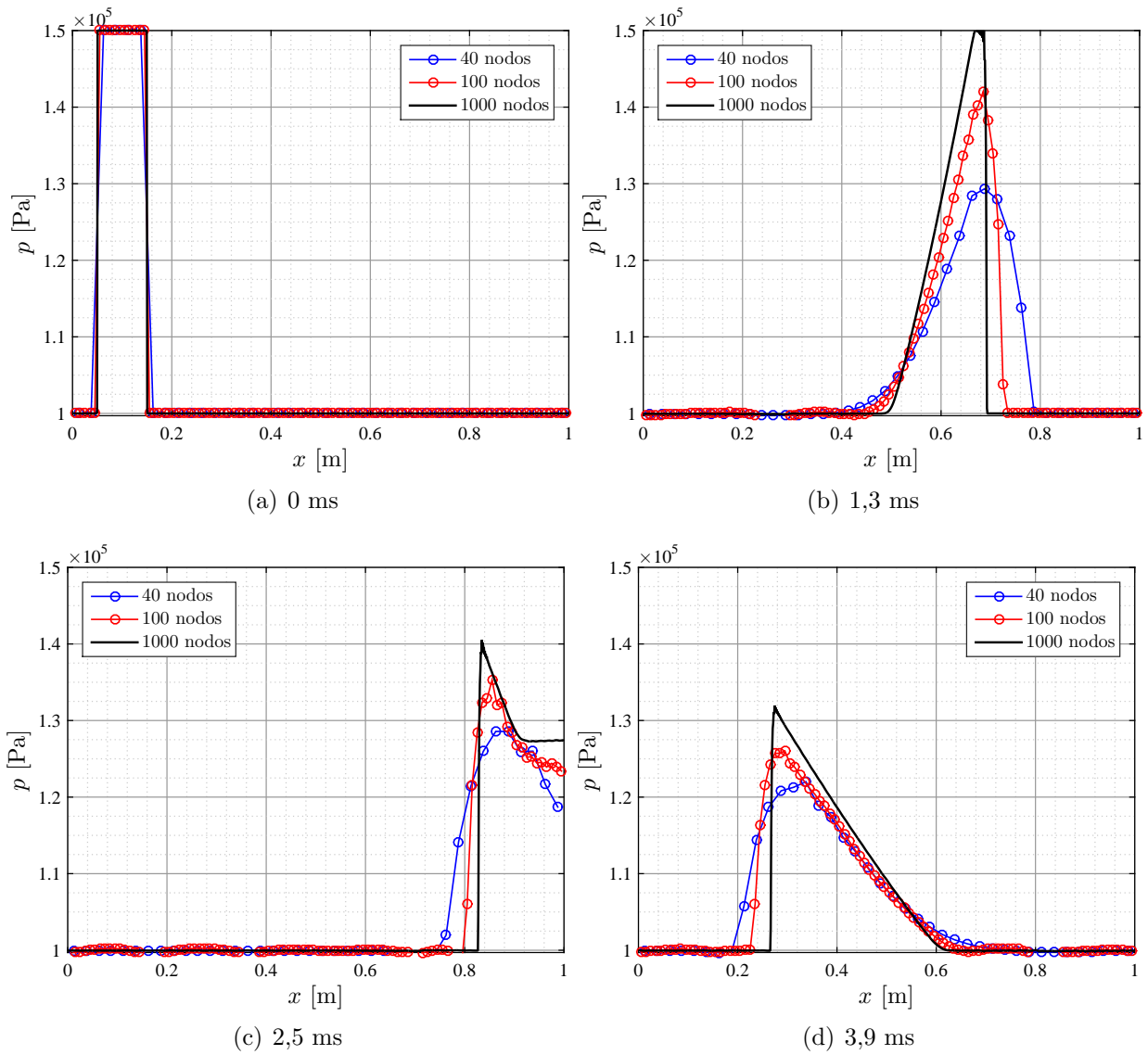


Figura 3.19: Evolución del pulso de presión

3. Estudio de sensibilidad

cola, por lo que la forma triangular que adquiere el pulso pasado cierto tiempo es lógica y no un error del método numérico como podría parecer, quedando justificada la formación de una onda de choque y otra de expansión o rarefacción.

En la Figura 3.19(c) podemos observar la reflexión de la onda en el extremo cerrado. Puesto que la velocidad en el mismo debe ser nula, la componente reflejada de la presión debe ser igual a la incidente. Por este motivo, el pulso deja de ser triangular y mantiene en una zona la presión constante, pues ésta es suma de la incidente y la reflejada. Solo considerando un elevado número de nodos se observa con claridad este fenómeno.

Una vez analizado el comportamiento típico de la onda de presión y comprobado que la solución obtenida con 1000 nodos es coherente con la que se obtendría según la teoría, realizamos el estudio cualitativo de sensibilidad, observando en la Figura 3.20 más claramente el efecto del número de nodos y del método numérico empleado.

De nuevo, como era de esperar, se obtiene una mayor precisión cuando el número de nodos es elevado, como se puede comprobar al incorporar 200 o 500 nodos, donde prácticamente se solapan las soluciones en todo el dominio y coinciden con la de 1000 nodos. Al aumentar el tamaño de la malla, nos alejamos más de la solución analítica. Destaca que el frente de onda ya no es abrupto, sino que para 20 o 40 nodos son una suave transición al igual que la onda de expansión.

En cuanto al método empleado, volvemos a encontrarnos los elevados picos de presión que introduce el método de Lax-Wendroff. En cambio, modela de una manera más adecuada la onda de choque, si bien no la coloca siempre donde debería de estar. Por otra parte, los métodos de Godunov y MUSCL modelan peor la forma del pulso de presión, pero, como ya sabemos, no implicarán pérdida de masa, cantidad de movimiento ni energía.

En efecto, en la Figura 3.21 queda patente de nuevo que los métodos de volúmenes finitos son conservativos, mientras que la cantidad de masa que en cada instante considera el método de Lax-Wendroff depende, como ya se veía en la sección 3.2, del tamaño de la malla. En este caso se repite el patrón mostrado en la Figura 3.8, es decir, la pérdida de masa es prácticamente proporcional al tamaño de la malla, como se muestra en la Figura 3.22.

Ha quedado claro, por tanto, que uno de los principales inconvenientes del método de Lax-Wendroff se trata de la no conservación de la masa. En cambio, en la anterior sección hemos notado que reproduce considerablemente bien la evolución de la energía cinética. Si observamos la evolución del caso estudiado en este apartado en la Figura 3.23, queda patente que esta conclusión sigue siendo coherente.

En primer lugar, se observa una brusca bajada de la energía cinética. Esto se debe a que el pulso de presión, como ya se ha visto en la Figura 3.20 se va deformando, adquiriendo una forma triangular. Lo mismo sucede con la velocidad, que cada vez alcanza valores menos altos pero cubre mayor parte del dominio. Así, al elevar esta magnitud al cuadrado

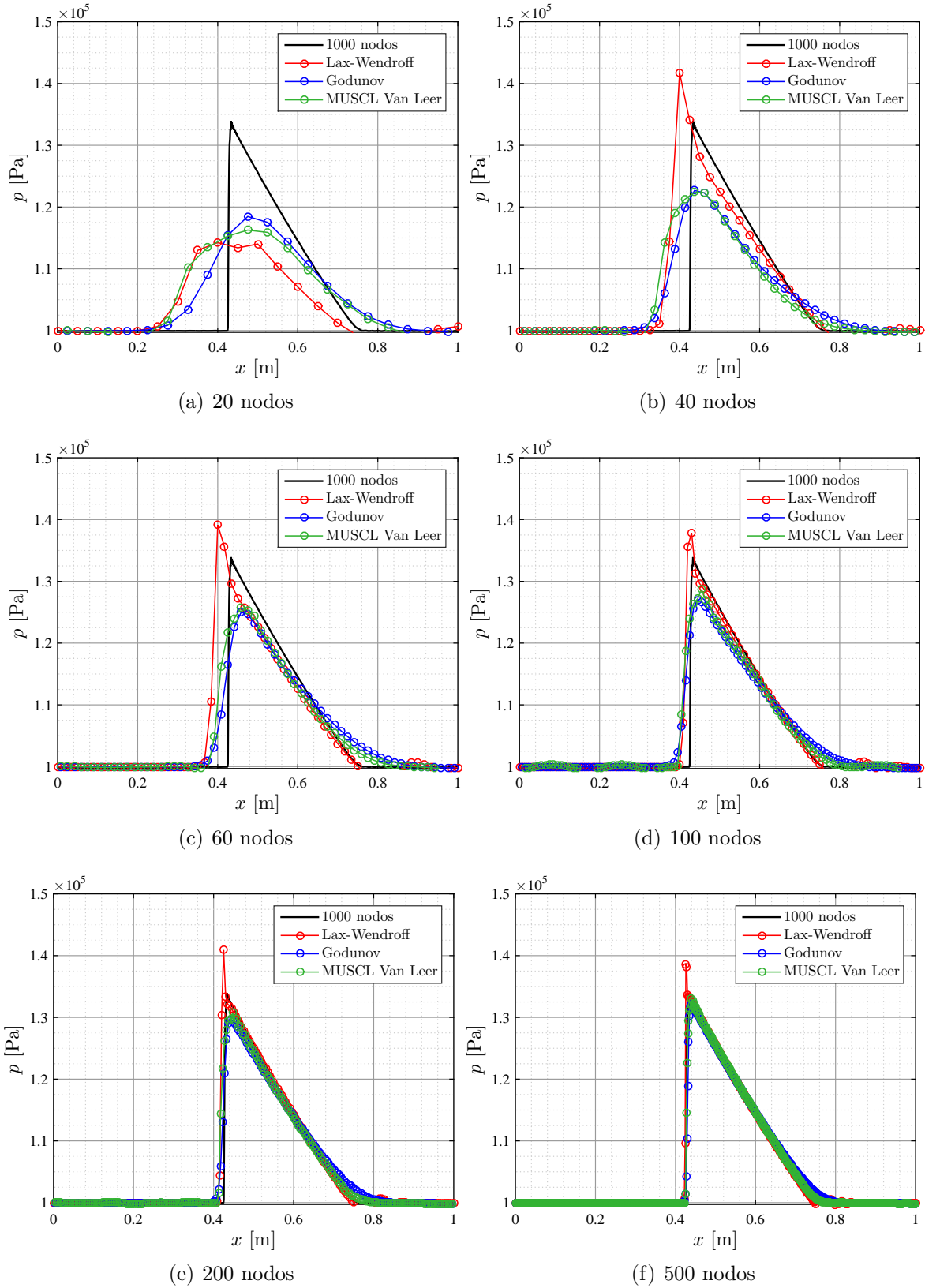


Figura 3.20: Pulso de presión transcurridos 3,5 ms

3. Estudio de sensibilidad

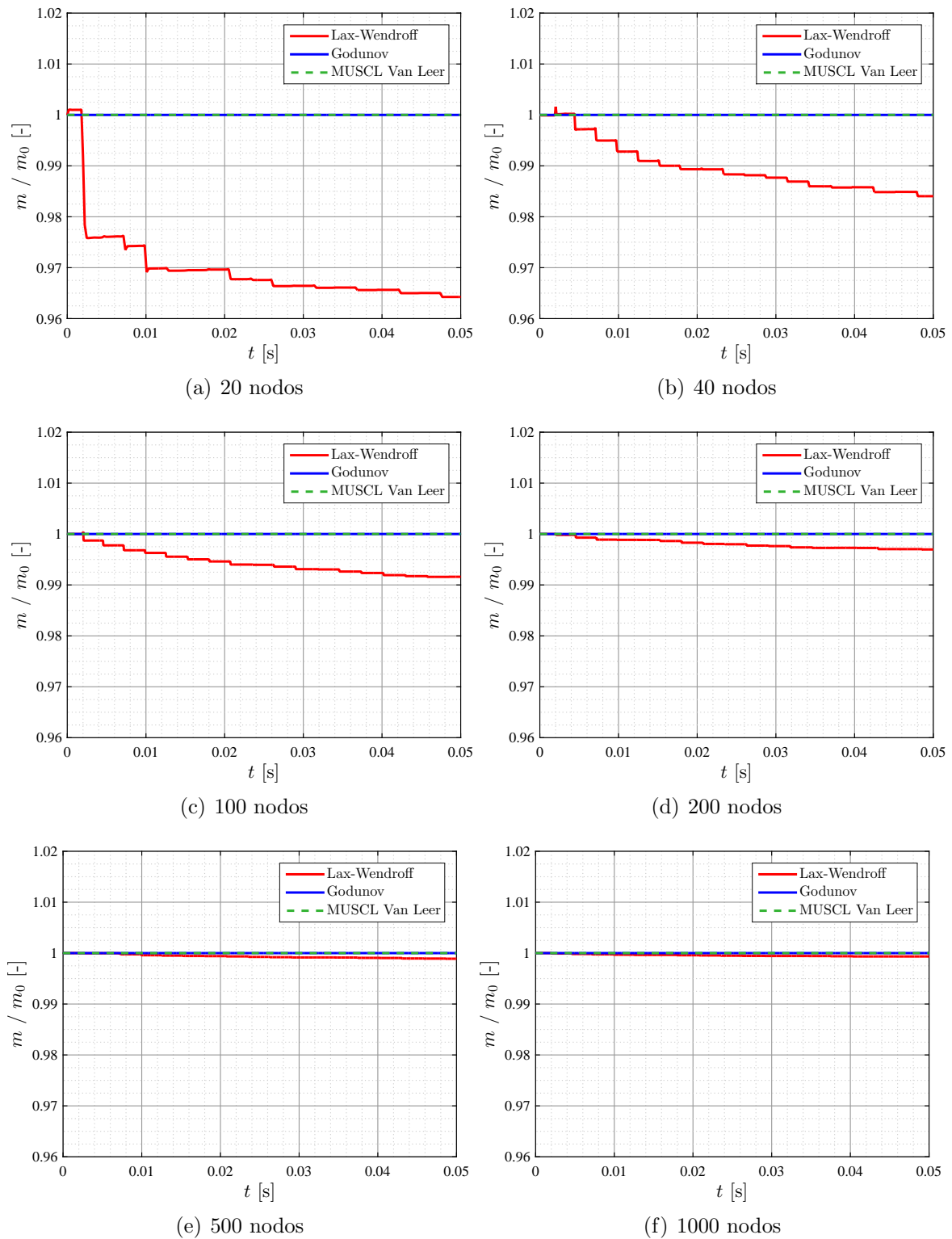


Figura 3.21: Efecto del número de nodos en la masa encerrada en el pulso de presión

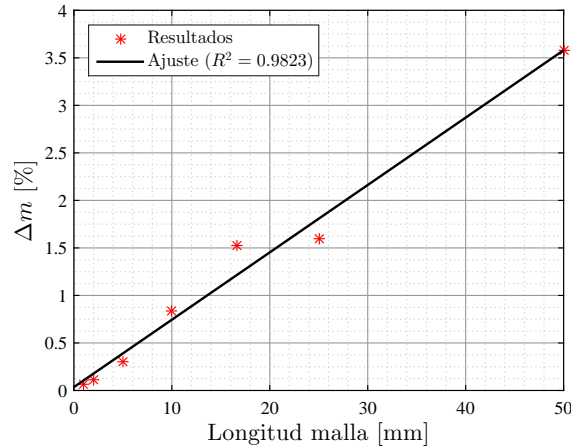


Figura 3.22: Pérdida relativa de masa a los 0,05 ms en el pulso de presión

para calcular la energía cinética, se obtiene cada vez un valor menor, hasta el punto en que sería nula al alcanzar el equilibrio.

También puede apreciarse que la energía cinética alcanza mínimos locales periódicamente. Estos mínimos son consecuencia de que cuando el pulso llega a la pared su velocidad cae hasta 0, por lo que la energía cinética experimenta un notable descenso.

Comparando ya el comportamiento particular de cada método se observa que para 20 nodos el método de Lax-Wendroff modela bien la situación hasta la llegada al primer extremo cerrado, a partir del cual se produce un fuerte descenso de la energía cinética, que no está motivado únicamente por la pérdida de masa, pues esta era de un 4% y la diferencia de energía cinética se encuentra en torno al 60%, sino que se debe a un pobre modelado de la reflexión de la onda. Con este escaso número de nodos los métodos de Godunov y MUSCL se acercan más a la solución teórica, si bien ya disminuyen muy bruscamente la energía cinética antes de la primera reflexión. Este comportamiento se podía intuir observando la Figura 3.20, pues estos métodos no modelaban bien la onda y no creaban valores altos que, al elevar al cuadrado, mantuviesen la energía cinética. De hecho, si nos fijamos en el instante $t = 3,5$ ms representado en dicha Figura, con 20 nodos ningún método modela bien el pulso, por lo que tampoco proporcionarán buenas estimaciones de la energía cinética.

A partir de 40 nodos, los tres métodos modelan de manera similar la energía cinética, encontrándose las mayores diferencias en los instantes iniciales, donde la energía aún es suficientemente elevada.

Estas conclusiones, por tanto, son similares a las obtenidas en el apartado 3.2 y nos sirven para confirmar lo enunciado entonces, si bien se ha encontrado que con 20 nodos el método de Lax-Wendroff tampoco es útil para modelar la energía cinética. No obstante,

3. Estudio de sensibilidad

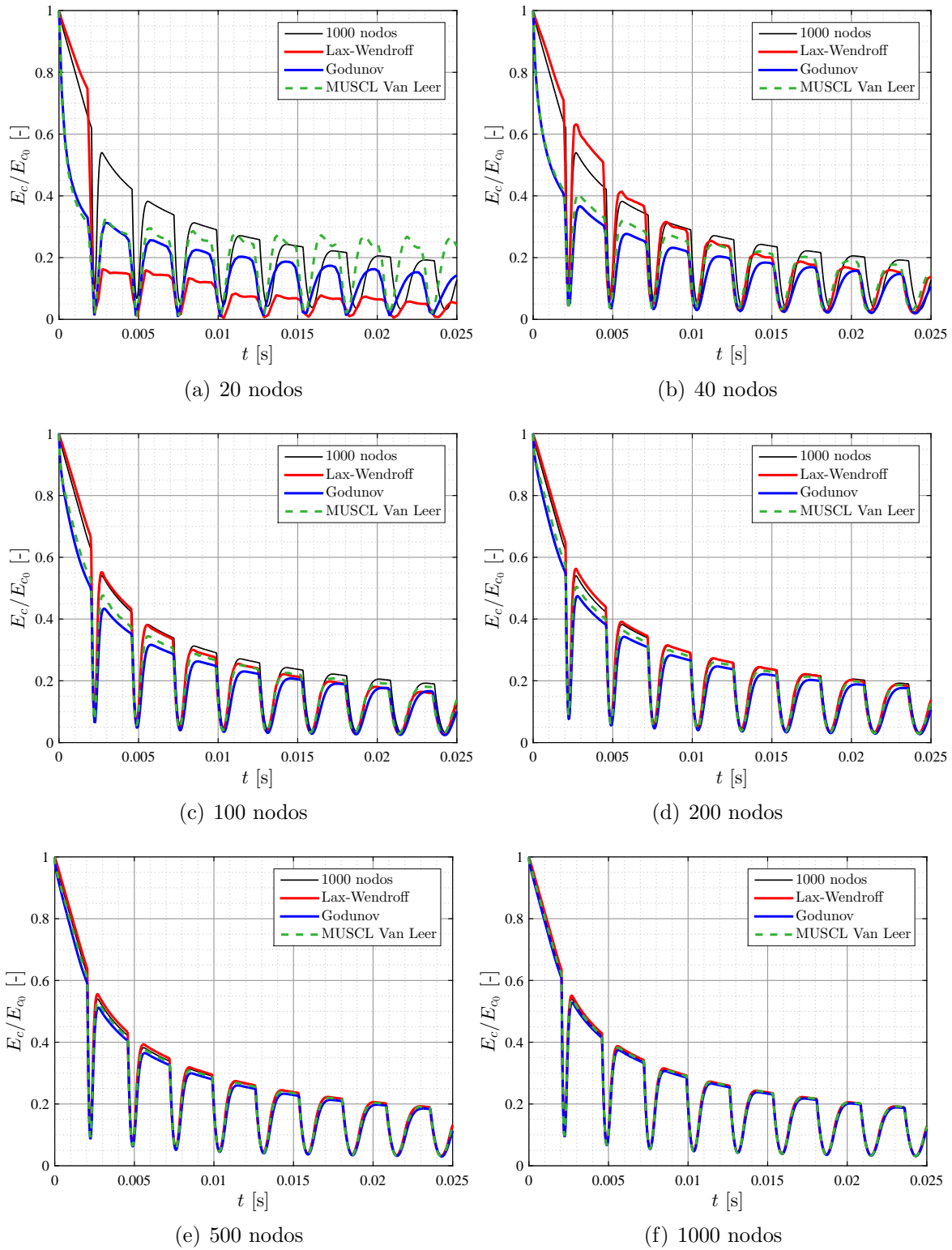


Figura 3.23: Efecto del número de nodos en la energía cinética en el pulso de presión

el interés real del estudio de este apartado radica en observar la dispersión en frecuencia de cada método, es decir, concluir cuál de ellos modela mejor la velocidad de propagación de las ondas. Esta dispersión queda patente en los mínimos locales que alcanza la energía cinética, pues coinciden con la llegada del pulso a los extremos.

Utilizando una malla de 5 cm (20 nodos) puede observarse que los mínimos de la energía cinética tienen lugar en tiempos menores que al considerar mayor número de nodos. Esto se debe a que con tan pocos nodos las temperaturas y las velocidades se simulan de forma poco precisa, por lo que la velocidad final de propagación no acaba coincidiendo con la del caso teórico. En este caso, al analizar la diferencia entre los distintos esquemas numéricos, se observa que el de Lax-Wendroff tiene menor dispersión. En cambio, su mínimo es menos pronunciado, lo cual indica que habrá frecuencias que viajen a mayor velocidad que otras, por lo que llegan al extremo en tiempos diferentes y el mínimo se abre. Es decir, los métodos de volúmenes finitos tienen la misma dispersión en todas las frecuencias mientras que el de Lax-Wendroff tiene mayor dispersión en ciertas frecuencias.

Al aumentar el número de nodos apenas se observan diferencias en cuanto a dispersión en frecuencia, por lo que, a la vista de los resultados de la Figura 3.23, no podemos afirmar que ninguno de los tres métodos sea más adecuado que el resto para modelar la propagación de las ondas.

Capítulo 4

Aplicación a geometría compleja

Índice

4.1. Introducción	77
4.2. Modelo de turbina	79
4.3. Resultados	83

4.1. Introducción

En un motor de combustión interna alternativo es habitual encontrar un pulso de presión en el instante en el que se abren las válvulas de escape y se cierran, pero no es común tener un extremo cerrado que haga retornar la onda. Por ese motivo, se ha llevado a cabo un estudio en el que se impone el pulso incidente en un caso más realista, como lo es una turbina, y se simula el flujo en su interior. Para ello se ha hecho uso de un modelo de turbina unidimensional desarrollado inicialmente por Payri *et al.* en [11], ampliado posteriormente por Serrano *et al.* en [12] y convertido en un modelo cuasi bidimensional por Galindo *et al.* en [13].

Al utilizar un modelo de un elemento complejo como lo es una turbina, no tenemos la certeza de que ni empleando una malla infinitamente pequeña vayamos a obtener la solución que se da en la realidad, puesto que ahora intervienen numerosos factores, como la transmisión de calor, el mapa de la turbina o la posición del TGV, así como algunas hipótesis que distancian el comportamiento ideal del modelado. En cambio, sí es de esperar que, a la vista de los resultados del Capítulo 3, un aumento del número de nodos conduzca a un aumento de la precisión. Por ello, a la incertidumbre asociada a los métodos numéricos, que se puede mejorar disminuyendo el tamaño de la malla, se suma ahora la incertidumbre del modelo de turbina empleado.

Por tanto, el problema a resolver, como ya se ha comentado, consiste en imponer un pulso de presión a la turbina y estudiar el pulso de salida, la variación de caudal que pueden conllevar los métodos no conservativos y el tiempo de cálculo que implica utilizar una geometría más compleja que un simple tubo cerrado en sus extremos.

Con el fin de validar los resultados proporcionados por el modelo de turbina y los métodos numéricos empleados, se ha utilizado como referencia una turbina radial ensayada en las instalaciones de CMT-Motores Térmicos con anterioridad al presente trabajo. En estos ensayos se utilizaron varios captadores para comparar variables medidas con otras simuladas. Las medidas experimentales no están exentas de error, lo cual también ha de tenerse en cuenta a la hora de comparar resultados.

Un esquema de la instalación experimental puede encontrarse en la Figura 6.1 en el documento de planos. Cabe destacar la utilización de 3 sensores de presión piezoeléctricos colocados en el conducto de entrada y salida, cuya función es descomponer las ondas de presión en sus componentes incidente y reflejada, siguiendo el procedimiento descrito en [14].

La componente incidente será la que impongamos como condición de contorno en nuestra simulación, tanto a la entrada como a la salida, y utilizaremos la componente reflejada para comparar la bondad de los resultados obtenidos con un método numérico u otro y modificando el tamaño de la malla.

Volviendo a la instalación experimental mostrada en la Figura 6.1, aparecen representados más elementos. Se observa que en el lado del compresor apenas hay sensores, pues la única función del mismo es actuar como freno de la turbina. En cambio, en la turbina encontramos un compresor de tornillo, resistencias eléctricas o una válvula rotativa para acondicionar el flujo a la entrada de la turbina. Asimismo, por tratarse de una turbina de geometría variable, se utiliza un sensor para conocer la posición de los álabes del estátor.

Para reproducir unas condiciones similares a las del ensayo es necesario unir la turbina con un conducto de entrada y otro de salida, en cuyos extremos se impondrán las presiones incidentes, tal y como muestra la Figura 4.1 y el nivel de entropía en cada instante. Como puede observarse, en la entrada se impone la componente incidente (azul) y se obtiene la reflejada (rojo), mientras que en la salida se calcula la componente transmitida (rojo) imponiéndose la segunda reflexión (azul). En estos puntos también se calcula el gasto másico con el fin de estudiar la pérdida de masa que conlleva cada método al utilizar una geometría compleja.

En la Figura 4.1 se muestran tres partes diferenciadas de la turbina, que se describen brevemente a continuación y cuyo modelado se detalla en la siguiente sección:

- **Voluta.** La voluta es el primer elemento con el que se encuentra el flujo al entrar en la turbina. Se trata de un conducto de sección variable en forma de espiral que reparte el flujo hacia el estátor en todas las direcciones radialmente.

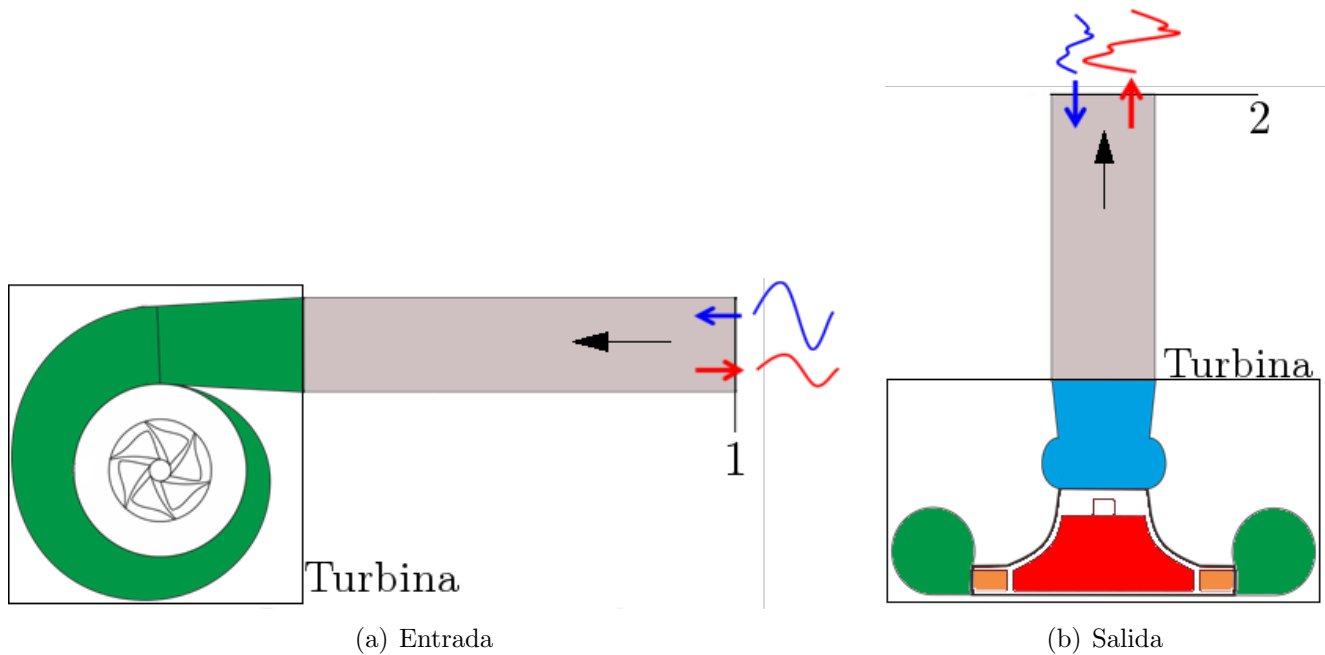


Figura 4.1: Turbina y conductos simulados con métodos numéricos

- **Estátor.** Se trata de un conducto que puede incorporar o no álabes y cuya función es transformar la entalpía del fluido en energía cinética, tal y como se muestra en la Figura 4.2, gracias a la disminución de la sección de paso, pues el flujo viaja en el sentido decreciente del radio. El proceso es adiabático, por lo que se conserva la entalpía total o de parada.
- **Rotor.** En el rotor el fluido experimenta una segunda expansión. Este elemento posee necesariamente álabes para dirigir el flujo y expandirlo. Como se encuentra girando, no se conserva la entalpía total, sino la roalpía¹, lo cual permite extraer trabajo del flujo.
- **Difusor.** A la salida del rotor se encuentra en ocasiones un difusor, que reduce la velocidad que pudiera llevar el fluido a la salida del rotor.

4.2. Modelo de turbina

El modelo empleado para simular la turbina está basado en el trabajo de Payri *et al.* [11]. Se trata de un modelo especialmente diseñado para acoplarlo con conductos

¹La roalpía es la propiedad que se conserva en el rotor de las turbinas. En las axiales se conserva la entalpía relativa de parada, ya que el radio de entrada es igual al de salida. Esto no sucede en las turbinas radiales como la analizada en este trabajo.

4. Geometría compleja

unidimensionales y resolverlos mediante modelos de acción de ondas como los utilizados en el presente trabajo. Para ello se modela la turbina mediante elementos simples, que se pueden incorporar sin complicación al cálculo del flujo en los conductos: dos toberas ideales y un volumen intermedio.

La primera tobera representa el estátor de la turbina, que supone la primera expansión del flujo, mientras que la segunda busca modelar el comportamiento del rotor, donde la energía cinética se transforma en energía mecánica. Estos procesos de expansión se muestran en la Figura 4.2.

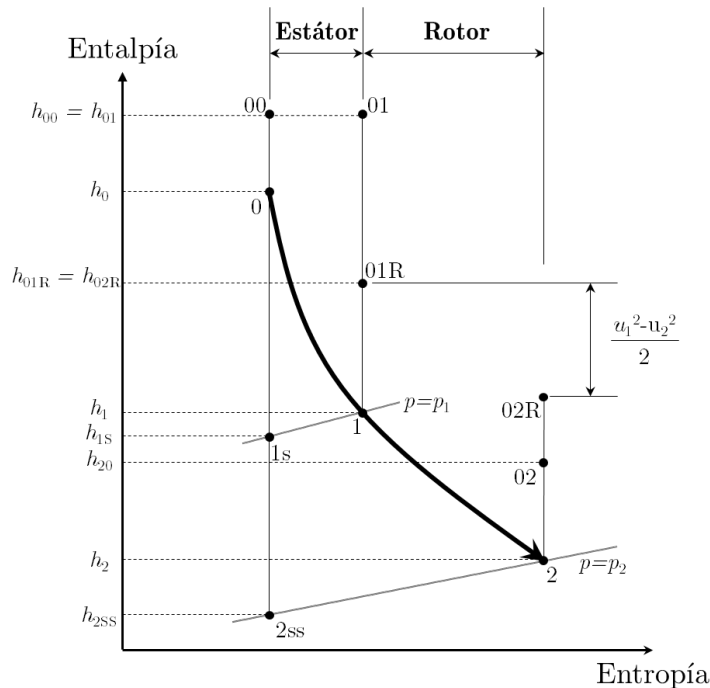


Figura 4.2: Proceso termodinámico característico de una turbina

Por otra parte, el volumen intermedio, que debe ser del orden del volumen total de la turbina, permite acumular masa en su interior. Esto hace posible simular fenómenos transitorios y así conocer la evolución térmica del motor desde el arranque en frío. En la Figura 4.3 aparece un esquema de la geometría empleada para el modelo.

El modelo recogido en [11] se basaba en dos hipótesis principales. La primera consistía en suponer flujo cuasiestacionario a través de las toberas que simulan la turbina, es decir, en ellas no hay acumulación de masa. Esta hipótesis está ampliamente extendida en el modelado de motores, pues el error cometido es simple inferior al 5%. Los fenómenos no estacionarios, como se ha indicado, se modelan satisfactoriamente mediante el volumen intermedio.

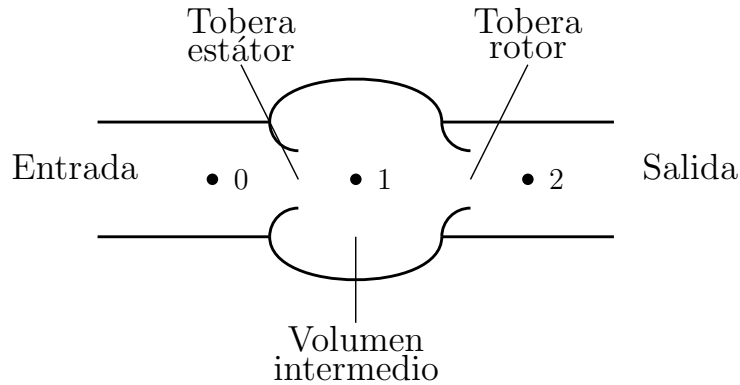


Figura 4.3: Geometría del modelo unidimensional de turbina utilizado

La segunda hipótesis consistía en imponer que el salto de presión fuera idéntico en el estátor que en el rotor. Esto es equivalente a afirmar que el grado de reacción² es igual a 0,5. Esta hipótesis es consistente en aquellas turbinas radiales en las que no existen álabes en el estátor y los del rotor eran radiales, es decir, sin curvatura a la salida. No obstante, con la llegada de las turbinas de geometría variable (TGV) la anterior hipótesis dejaba de ser válida, pues estas turbinas incorporan álabes en el estátor que modifican el grado de reacción según el punto de funcionamiento para mejorar las prestaciones.

Por este motivo, basándose en el trabajo de Payri, Serrano *et al.* en [12] mejoraron el modelo para incluir casos en los que el grado de reacción es distinto de 0,5, si bien el resto del proceso de cálculo que se describe más adelante es equivalente.

Centrándonos en este proceso de cálculo, cabe indicar que cualquiera de estos modelos (el original de 1996 o la nueva versión de 2008) únicamente necesitan conocer parámetros geométricos, gasto corregido \dot{m}^* , régimen corregido N^* , la relación de expansión y el rendimiento total a estático η_{T_s} para simular completamente la turbina. La relación de expansión y el rendimiento suelen obtenerse a partir de mapas de turbina, obtenidos a partir de puntos de funcionamiento medidos o mediante la información proporcionada por el fabricante de la turbina. Estos datos se pasan mediante un archivo `xml` al programa principal, que contiene el proceso de resolución de la turbina y los distintos métodos numéricos implementados.

Conocida esta información se calcula el salto de presiones estáticas que existe en el

²El grado de reacción evalúa el salto de presión en el rotor respecto al salto total de presión en la turbina.

4. Geometría compleja

estátor o, equivalentemente, en la primera tobera:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left[1 + \frac{T_{00}}{T_0} (GR - 1) \eta_{Ts} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_{00}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.1)$$

En la anterior ecuación k es el coeficiente politrópico en el estátor, que se calcula a partir del índice politrópico n obtenido a partir del mapa de la turbina. El grado de reacción, GR , se obtiene a partir de varios parámetros geométricos y del punto de funcionamiento mediante la siguiente expresión, cuya demostración viene dada en [12]:

$$GR = 1 - \frac{2R}{\pi^2 D_1 (D_2^2 - D_n^2)} \cdot \frac{\dot{m}^* \tan \alpha_1}{N^*} \cdot \left(\frac{p_2}{p_{00}} \right)^{-1} \left[\left(\frac{T_{00}}{T_0} \right)^{-1} - \eta_{Ts} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_{00}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right] \quad (4.2)$$

Los diámetros que aparecen en la anterior ecuación son los correspondientes a la sección entre estátor y rotor (1), a la parte exterior de salida del rotor (2) y a la parte interior de la salida del mismo (n), mientras que α_1 es el ángulo de entrada al rotor. Este ángulo variará según la posición de los álabes del estátor, que es la variable modificada en las turbinas de geometría variable.

Una vez calculada la relación de expansión en el estátor y el grado de reacción se obtienen las áreas efectivas de las dos toberas del modelo de turbina mediante la ecuación de la tobera:

$$S_{st} = \dot{m} \cdot \frac{\sqrt{\gamma R T_{00}}}{\gamma p_{00}} \cdot \left(\frac{p_{00}}{p_1} \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{00}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \right)^{-1} \quad (4.3)$$

$$S_{rt} = \dot{m} \cdot \frac{\sqrt{\gamma R T_{10}}}{\gamma p_{01}} \cdot \left(\frac{p_{01R}}{p_2} \right)^{1/\gamma} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{01R}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \right)^{-1}$$

Cabe indicar que en el rotor se utilizan componentes relativas porque en él se conserva la rotalpía y no la entalpía como sucede en el estátor.

En las anteriores expresiones se ha utilizado la expresión correspondiente al caso en el que el flujo no alcanza condiciones críticas en el interior de la tobera, es decir, se cumple

que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1}{p_{00}}\right) &\leq \left(\frac{p_1}{p_{00}}\right)_{crit} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \left(\frac{p_2}{p_{01R}}\right) &\leq \left(\frac{p_1}{p_{00}}\right)_{crit} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Con las áreas efectivas ya disponemos de la geometría completa del conjunto estátor-rotor. No obstante, todavía queda modelar la voluta.

Para ello originalmente se sustituía por un conducto de igual volumen que la voluta con una longitud igual al camino medio que recorre el gas en el fluido, es decir, media voluta. Este modelo solo recogía correctamente las fluctuaciones cuya longitud de onda era superior a la longitud de este conducto equivalente, es decir, hasta unos 600-1000 Hz.

Por ese motivo, Galindo *et al.* en [13] desarrollaron recientemente un nuevo modelo de voluta cuasi bidimensional tal que el conducto anterior incluye cambios de área y flujo que abandona la voluta lateralmente, de una forma más cercana al proceso que sucede en la realidad. En la siguiente sección se simularán el modelo completamente unidimensional de turbina, que llamaremos Turbina 1D, y este modelo con turbina cuasi bidimensional, al que haremos referencia como Turbina Q2D.

4.3. Resultados

Una vez descrito el componente a simular pasamos a comentar los resultados obtenidos.

Se simularon dos pulsos de distinta frecuencia y amplitud, cuyas componentes incidente y segunda reflexión, obtenidas tras la descomposición de las señales de presión experimentales, se muestran en las Figuras 4.4 y 4.5. Estas componentes se representaban anteriormente en el esquema de la Figura 4.1 con color azul. Además, en el pulso 1 la posición de la TGV se encontraba al 60% y en el pulso 2 al 80% de su abertura máxima.

Para analizar ambos pulsos se dispone de tres modelos de turbina cuyas características se exponen a continuación:

- Turbina 1D DF: es la turbina presentada en la sección anterior como unidimensional. Este modelo fue desarrollado para ser resuelto mediante diferencias finitas, por lo que únicamente se simulará por medio del método de Lax-Wendroff.
- Turbina Q2D: esta turbina, como ya se ha indicado, modela la voluta de forma cuasi bidimensional. Cuando se desarrolló este modelo se pensó ya en métodos de volúmenes finitos para simularla, por lo que utilizaremos los métodos de Godunov

4. Geometría compleja

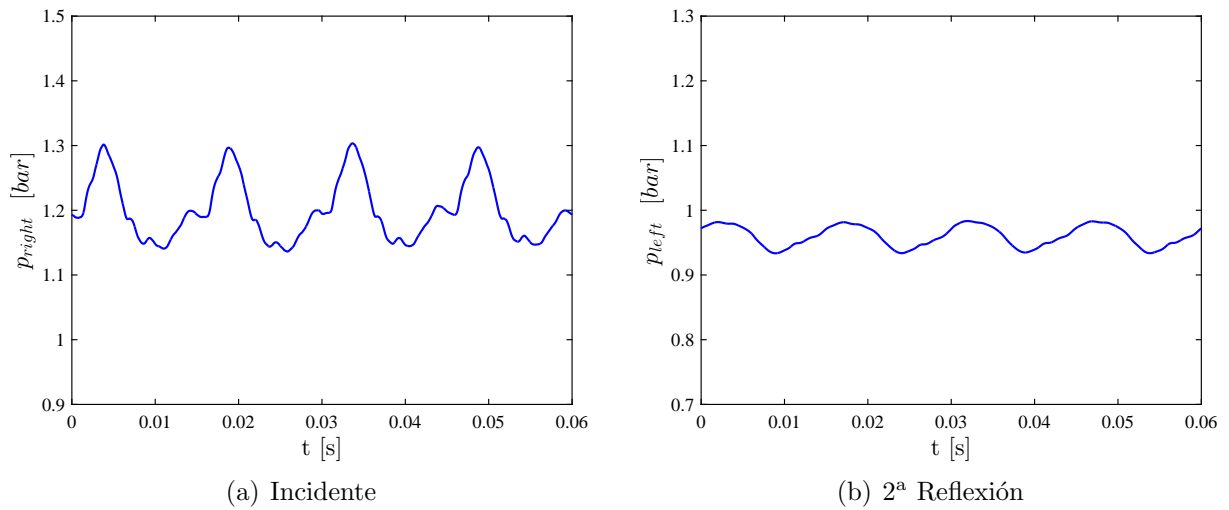


Figura 4.4: Componentes impuestas de la presión del pulso 1

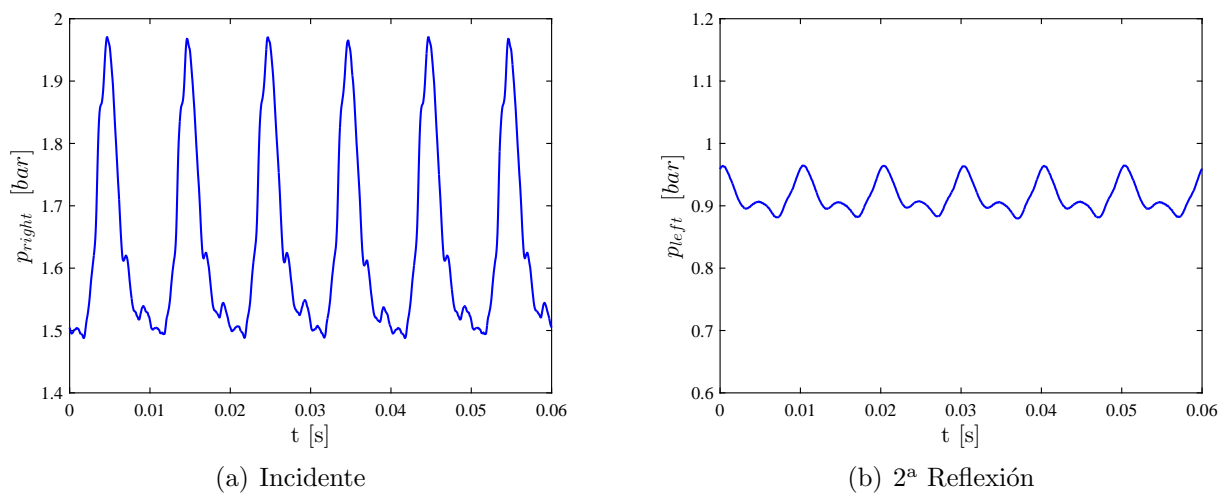


Figura 4.5: Componentes impuestas de la presión del pulso 2

y MUSCL en este caso. El código de esta turbina, a diferencia de la Turbina 1D, cuenta con tratamiento de especies y propiedades del gas variables, como R y γ .

- Turbina 1D VF: se trata de una simplificación de la Turbina Q2D que considera que la voluta no es bidimensional. No coincide exactamente con la Turbina 1D porque en este caso está diseñada para métodos de volúmenes finitos al descender de la Turbina Q2D. Por ese motivo, este modelo también distingue entre las diferentes especies del fluido, lo cual dificulta la comparación directa entre ambas turbinas unidimensionales en cuanto a tiempo de cálculo: la de diferencias finitas a priori tarda más en calcular las condiciones de contorno por utilizar el método de las características, mientras que la de volúmenes finitos realiza más cálculos en cada paso temporal por tener implementadas nuevas mejoras.

Comenzamos mostrando los resultados de la Turbina 1D. En las Figuras 4.6 y 4.7 aparece representado el espectro de presión obtenido mediante los métodos de Lax-Wendroff, Godunov y MUSCL, así como el obtenido experimentalmente para ambos pulsos de presión.

Tanto para el pulso 1 como el 2 se observa que todos los métodos proporcionan resultados cercanos a los experimentales hasta una frecuencia cercana a 1000 Hz incluso con una malla de 16 mm. En el pulso 1 podemos apreciar una notable diferencia en el entorno de 1100 Hz entre los resultados simulados y los experimentales. Esto se debe más a una mala predicción por parte del modelo de Turbina 1D que a diferencias entre métodos numéricos. No obstante, a partir de unos 1400 Hz las diferencias vuelven a ser pequeñas.

En cambio, en el pulso 2, por ser de mayor amplitud, las diferencias son más elevadas a partir de 1000 Hz independientemente del método numérico utilizado. Estas diferencias se acentúan fundamentalmente en la presión transmitida.

Centrándonos en los diferentes métodos numéricos, se observa que el de Godunov es excesivamente disipativo para mallas grandes, lo cual es una desventaja pese a ser conservativo. Por otra parte, si nos fijamos en detalle, el método de Lax-Wendroff modela mejor los primeros armónicos, por lo que si tuviéramos que escoger uno de estos métodos atendiendo a nivel de presión sería este último.

No obstante, debemos recordar que el método de Lax-Wendroff, al no ser conservativo, implica pérdida de masa. En la Figura 4.8 se ha representado la variación de caudal entre la entrada y la salida del dominio integrando el gasto másico puntual a lo largo de varios periodos. En esta representación queda patente que no es posible predecir la pérdida de masa que va a generar el método de Lax-Wendroff si utilizamos una malla superior a 2 mm. Se observa cierto patrón característico entre ambas simulaciones, lo cual puede deberse a la interacción de ciertas longitudes de onda con el tamaño de la malla y la turbina. Por ello, es de esperar que si modificásemos la turbina la variación de caudal adquiriría otra forma.

4. Geometría compleja

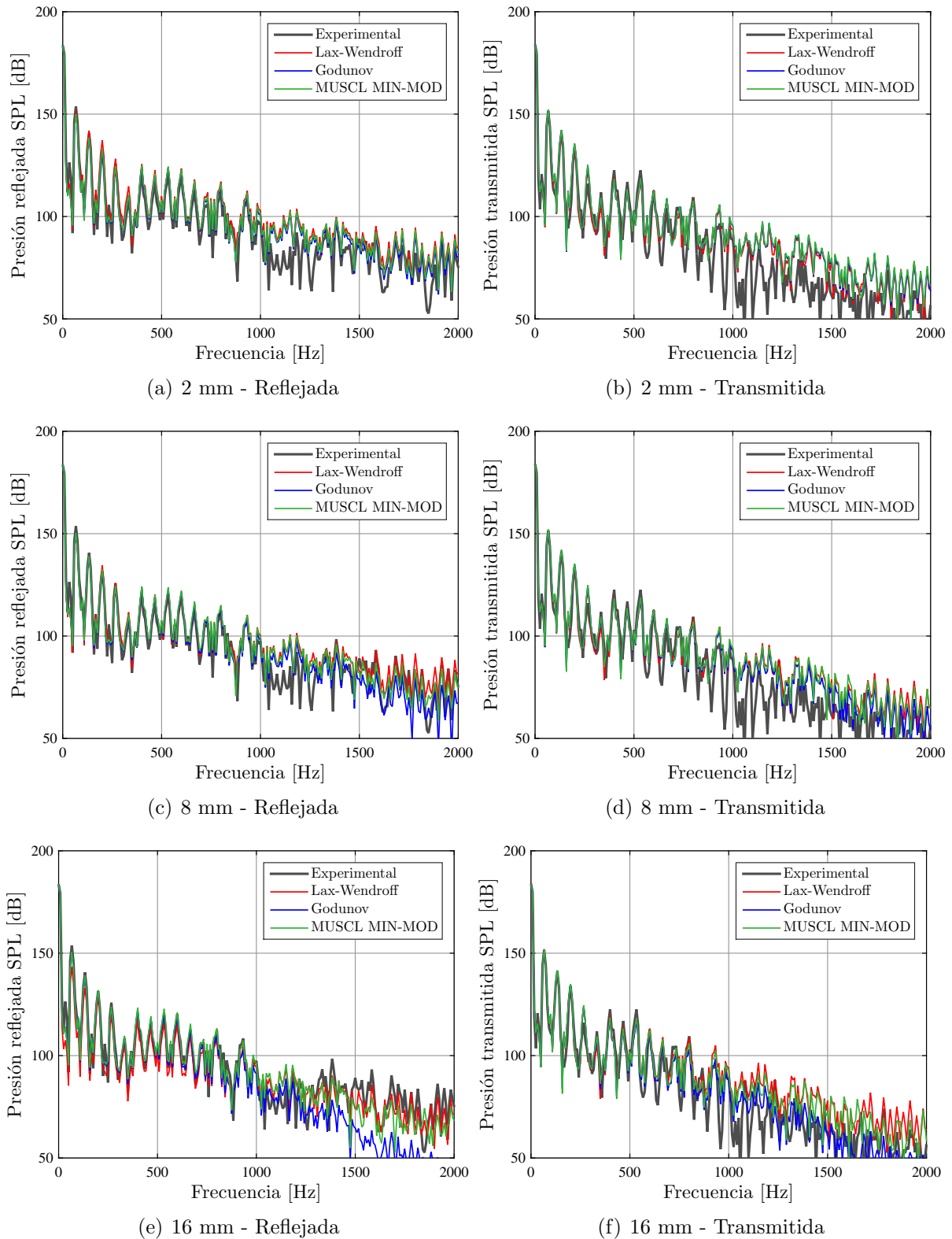


Figura 4.6: Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 1 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina 1D

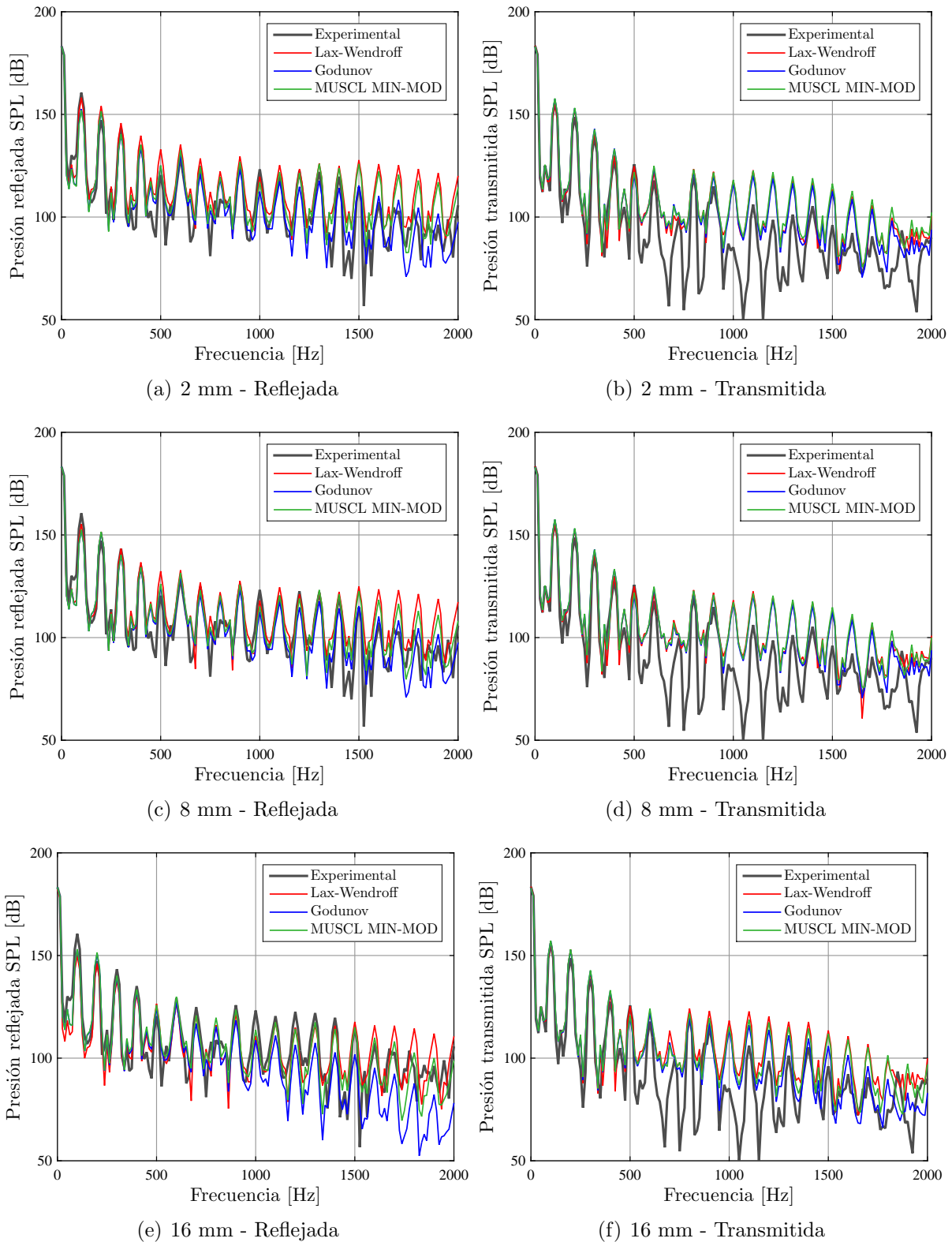


Figura 4.7: Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 2 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina 1D

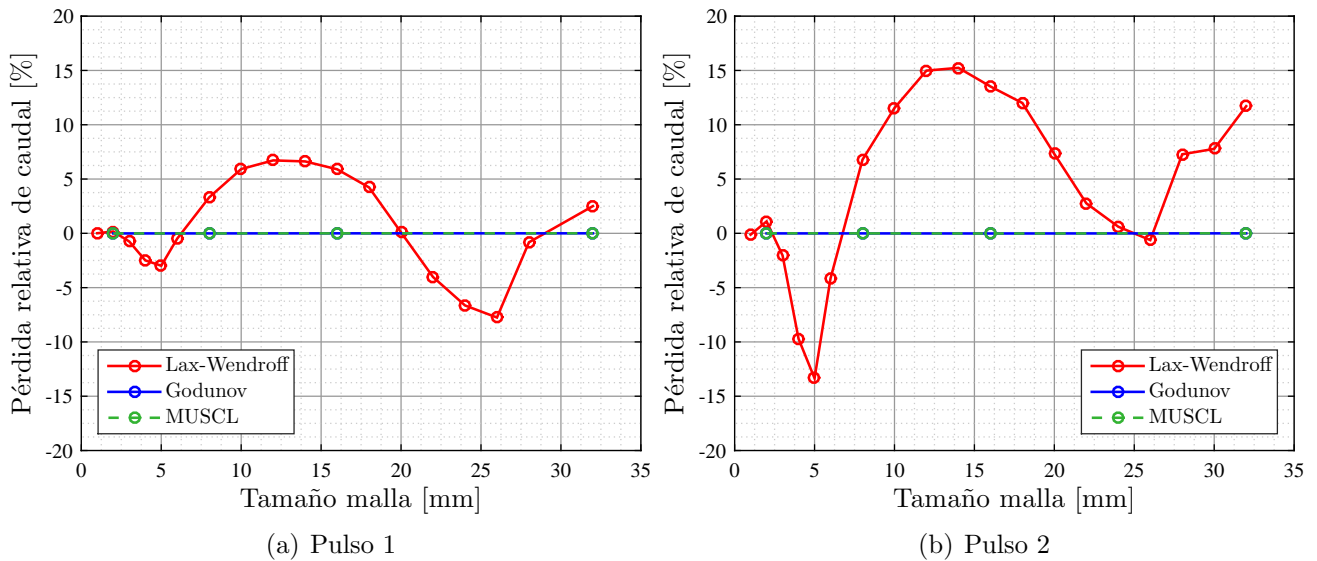


Figura 4.8: Variación de caudal entre la entrada y la salida del dominio fluido

Los valores tan altos de variación de caudal que se observan en la Figura 4.8, sobre todo en el pulso de mayor amplitud, no son admisibles en una buena simulación. Por lo tanto, podemos concluir que no es conveniente utilizar una malla superior a 2 mm con el método de Lax-Wendroff, mientras que en las Figuras 4.6 y 4.7 se observa que tampoco interesa simular la Turbina 1D mediante métodos de volúmenes finitos puesto que no captan tan correctamente algunos armónicos. Por este motivo, se repiten los anteriores cálculos mediante el modelo de Turbina Q2D, que únicamente se simula mediante volúmenes finitos debido a la dificultad de tratar los flujos que entran y salen de las celdas de la voluta mediante diferencias finitas. Estos resultados se muestran en las Figuras 4.9 y 4.10.

En estas Figuras se observa que el modelo de Turbina Q2D proporciona unos resultados más cercanos a la solución experimental incluso con una malla relativamente grande para un elemento de pequeñas dimensiones como una turbina. El método de Godunov, al ser de primer orden, se encuentra siempre por debajo del MUSCL, por lo que sobre todo en el pulso 2 se aleja de los resultados experimentales. No obstante, es un método a tener en cuenta para futuras aplicaciones por conservar el caudal y requerir menor tiempo de cálculo como se muestra a continuación.

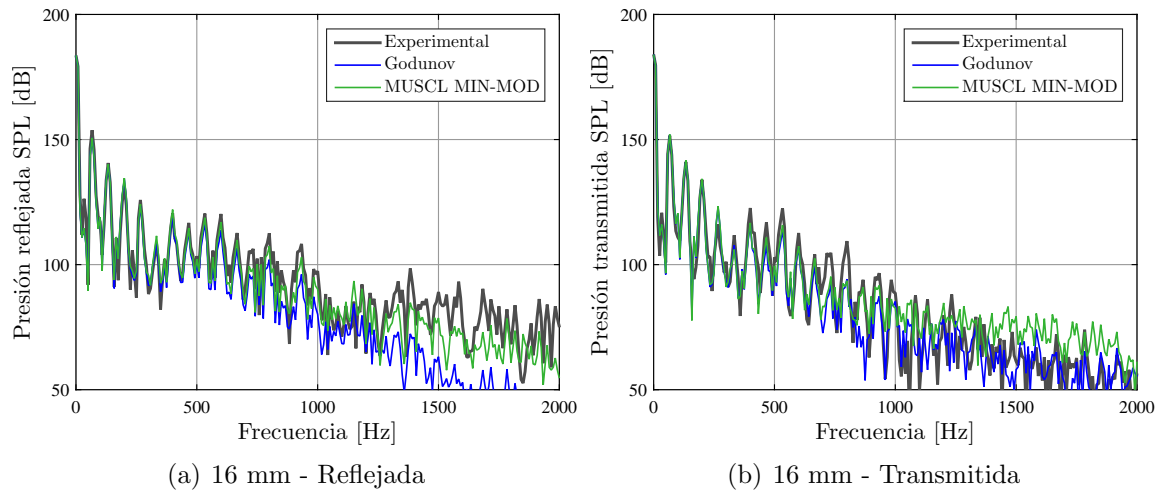


Figura 4.9: Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 1 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina Q2D

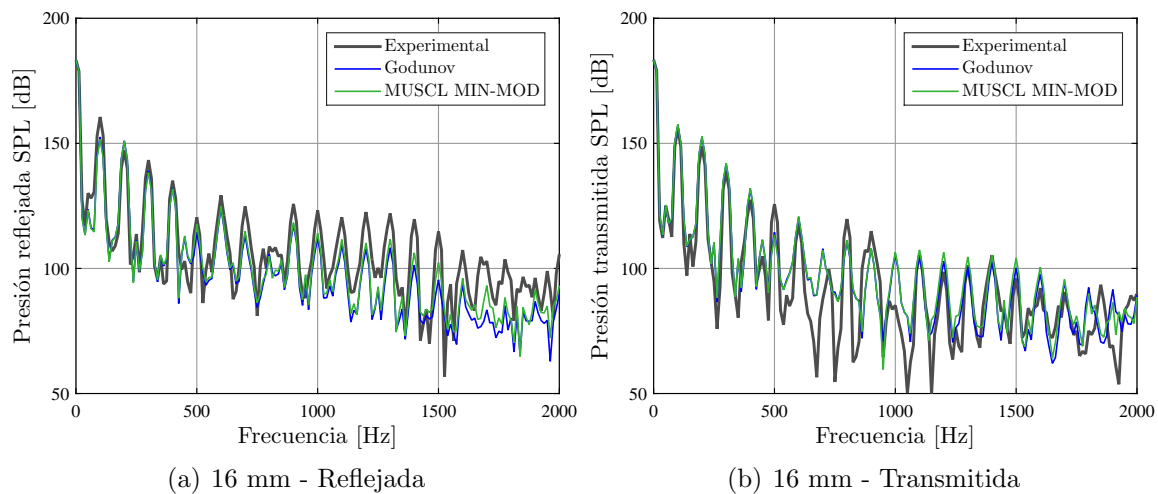


Figura 4.10: Presiones reflejadas y transmitidas en el pulso 2 según el tamaño de malla y el método numérico con el modelo de Turbina Q2D

Finalmente, se ha realizado un estudio del tiempo de cálculo requerido por cada modelo y cada método. Los resultados se presentan en la Figura 4.11. Únicamente se muestran los tiempos de cálculo necesarios para simular el pulso 2, ya que son equivalentes a los del pulso 1.

4. Geometría compleja

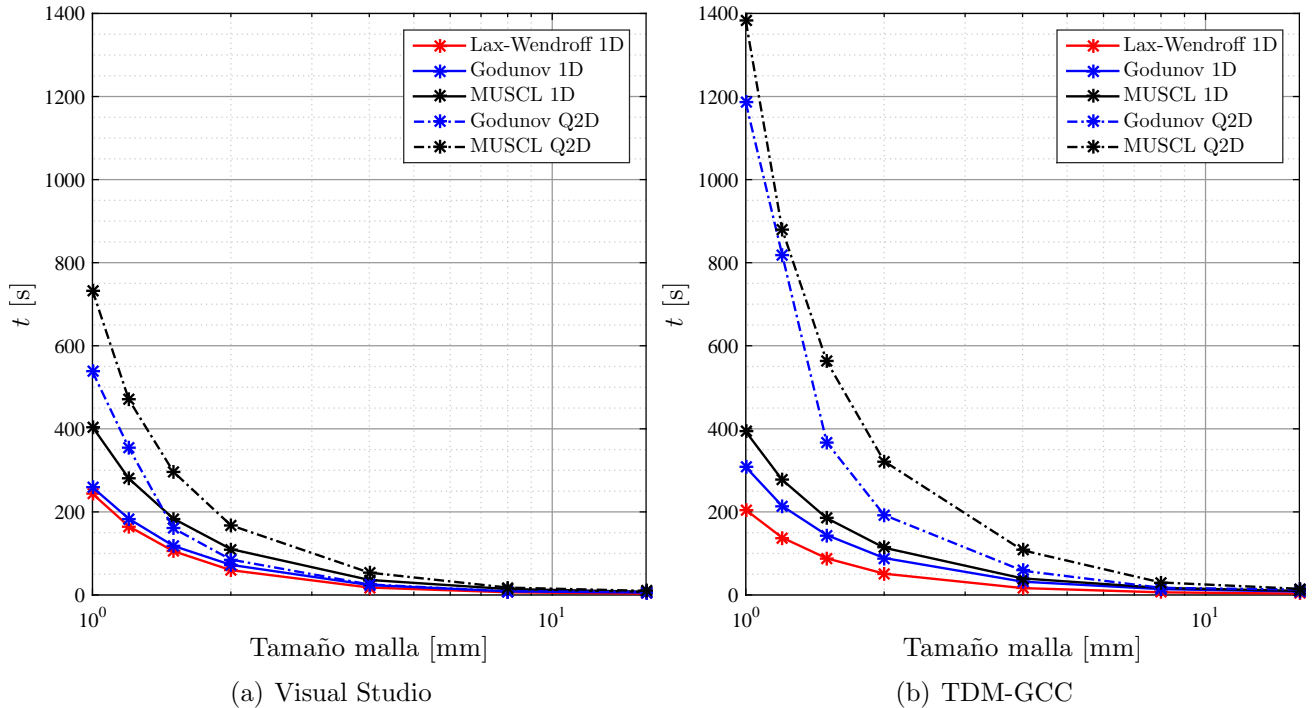


Figura 4.11: Tiempo invertido en la simulación de la turbina en función del tamaño de la malla y el método numérico

Como comentábamos anteriormente, el modelo de Turbina 1D simulado mediante volúmenes finitos incorpora más cálculos que el de diferencias finitas, por lo que no obtenemos las mismas curvas que en el tubo de choque. No obstante, sí puede observarse claramente que el modelo de Turbina Q2D requiere un tiempo de cálculo notablemente superior al resto. Esto se debe a que en cada celda de la voluta sale flujo tanto axial como radialmente, por las condiciones de contorno aumentan. Asimismo, el número de celdas de esta voluta es el doble, ya que en el caso 1D únicamente se simula el camino medio del flujo, es decir, media voluta.

En la Figura 4.11 se observa que con una malla suficientemente pequeña la tendencia es parabólica, como era de esperar. En cambio, si ampliamos la imagen, puede verse que esto no sucede para mallas grandes, donde otros cálculos tienen más peso, como la resolución de las toberas. En la Figura 4.12 también se observa que la Turbina Q2D es interesante para aplicar en el modelo de motor virtual ya que, con una malla de 8 mm tiene el mismo coste computacional que una de 4 mm simulada con Lax-Wendroff y, además de conservar el caudal, proporciona mejores resultados, como veíamos en la Figura 4.10 con una malla de 16 mm.

Por otra parte, cabe destacar que la Turbina Q2D deja de guardar la relación cuadrática al disminuir la malla por debajo de un tamaño determinado. Esto puede deberse a que

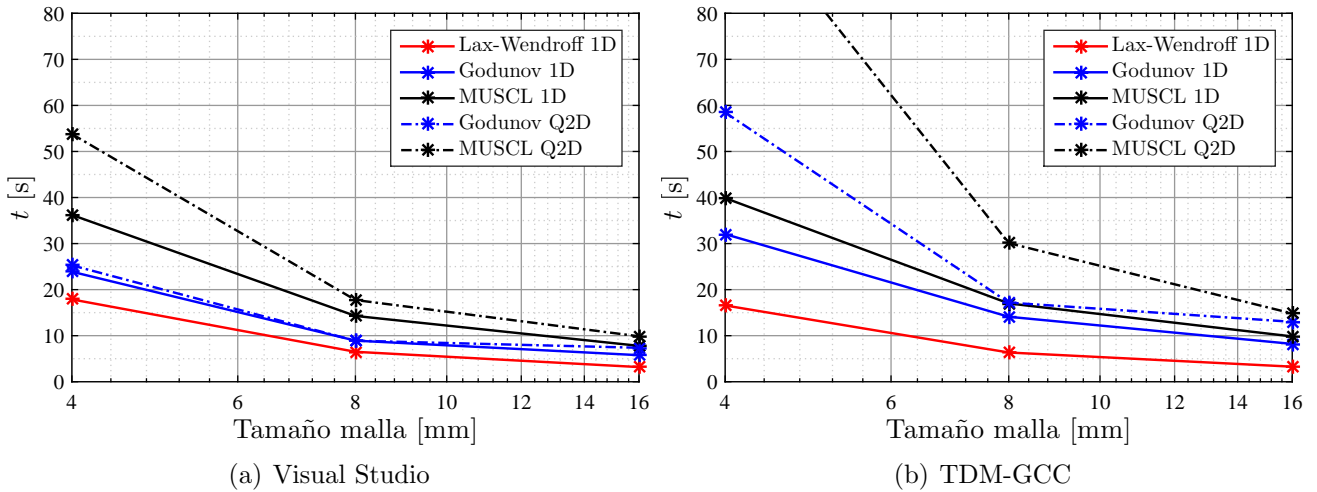


Figura 4.12: Detalle del tiempo invertido en la simulación de la turbina en función del tamaño de la malla y el método numérico

llena completamente la memoria caché y debe pasar información a la memoria RAM, la cual es más lenta, o a que las celdas de la voluta sean tan pequeñas que genere flujo cuya velocidad de propagación sea tan grande que obligue a realizar un paso temporal muy pequeño. En cualquier caso, no será frecuente utilizar mallas tan pequeñas, ya que suponen excesivo tiempo de cálculo y los resultados proporcionados con mallas más grandes se han mostrado satisfactorios.

En cuanto al compilador empleado, se observa una gran diferencia al simular la Turbina Q2D, que es mucho más rápida con Visual Studio. En cambio, TDM-GCC calcula ligeramente más rápido la Turbina 1D, al contrario que sucedía con el tubo de choque. No obstante, si nos tuviéramos que decantar por uno de ellos tomaríamos el Visual Studio. Esta diferencia se observa de forma más detallada si adimensionalizamos el tiempo de cálculo con el de Lax-Wendroff, como se realiza en la Figura 4.13. Al disminuir el tamaño de la malla los métodos de volúmenes finitos se acercan al cómputo de Lax-Wendroff en el caso 1D, mientras que la evolución en el caso Q2D no se puede generalizar.

4. Geometría compleja

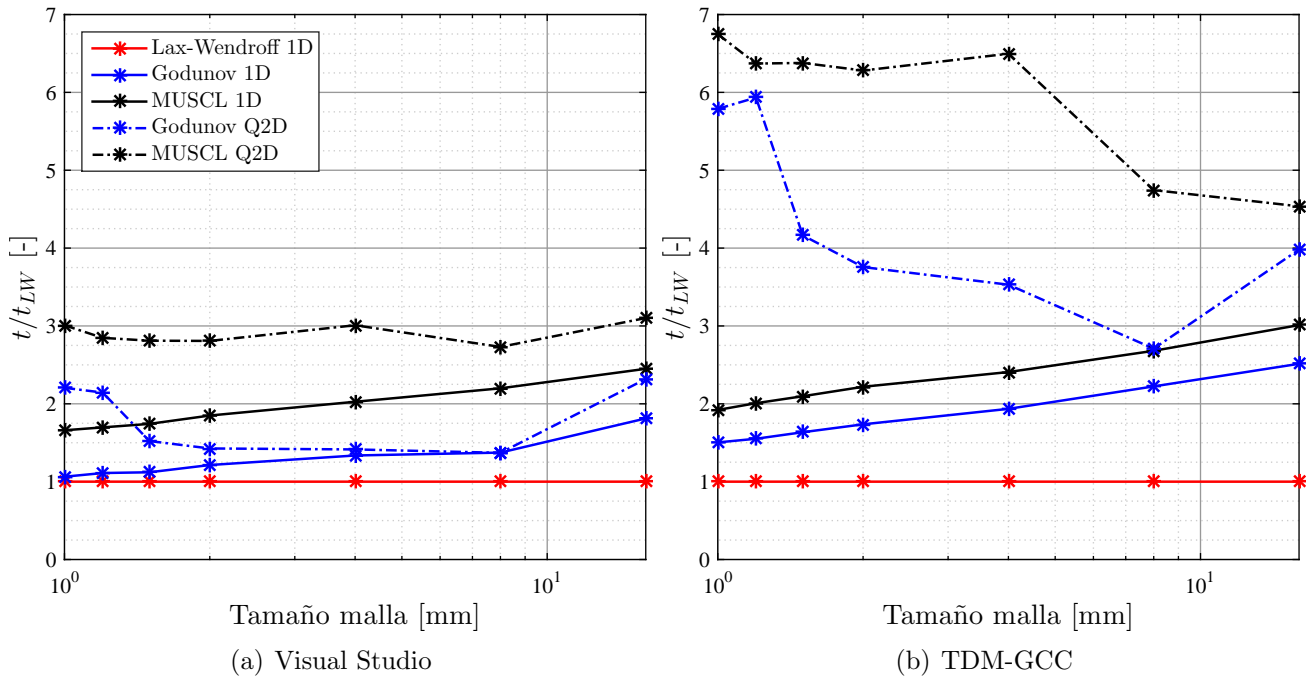


Figura 4.13: Tiempo adimensional invertido en la simulación de la turbina en función del tamaño de la malla y el método numérico

Capítulo 5

Conclusiones

Índice

5.1. Principales aportaciones y conclusiones	93
5.2. Trabajos futuros	96

5.1. Principales aportaciones y conclusiones

El presente Trabajo Fin de Grado ha estado enfocado, tal y como se enunciaba en el capítulo 1, a la optimización del proceso de cálculo de un modelo de motor virtual. Tras la realización del mismo se dispone de un modelo versátil y robusto, con gestión automática de memoria y que permite intercambiar y añadir fácilmente métodos de cálculo. Asimismo, se ha mejorado la velocidad de cálculo respecto al código anterior gracias a una optimización de las secuencias de cálculo y a permitir el cálculo en paralelo de conductos independientes.

Con este modelo implementado se ha realizado un estudio de sensibilidad de varios métodos numéricos. Se ha podido comprobar a lo largo del trabajo que los métodos de volúmenes finitos son plenamente conservativos, lo cual permite utilizarlos en mallas grandes, donde los métodos de diferencias finitas, como el de Lax-Wendroff, pueden llegar a perder un 4% de la masa con mallas de 5 cm. Esta pérdida de masa se acentúa, como se ha podido observar, en conductos con sección variable o con una geometría compleja como la de una turbina.

En cuanto a precisión en los resultados instantáneos, tal y como era de esperar, el método de Godunov es el que más se aleja de la realidad, por ser excesivamente difusivo. Los métodos de Lax-Wendroff y MUSCL se acercan más a las soluciones teóricas u obtenidas experimentalmente, pues se tratan de métodos de 2º orden. Se ha comprobado

5. Conclusiones

que el método de Lax-Wendroff modela mejor la energía cinética instantánea, si bien no conserva la masa, por lo que no es posible decantarse por uno u otro en cuanto a precisión del cálculo cuando la sección es constante. En cambio, si hay variación de área los métodos MUSCL proporcionan mejores resultados.

No obstante, el método de Lax-Wendroff, al no ser TVD, crea oscilaciones sin sentido físico en presencia de elevados gradientes de presión, temperatura o velocidad. Esto puede ser un inconveniente a la hora de calcular contaminantes, pues la temperatura es un parámetro crítico en las reacciones químicas. Así, un pico de temperatura podría hacer reaccionar ciertos compuestos que en condiciones normales no reaccionarían, lo cual llevaría a una mala predicción de los contaminantes e incumplir uno de los objetivos globales del proyecto de motor virtual en el que se engloba el presente trabajo.

Se ha comprobado también que ninguno de los métodos supone una ventaja en cuanto a dispersión en frecuencia. Para mallas grandes el método de Lax-Wendroff dispersa más unas frecuencias que otras, mientras que los métodos de volúmenes finitos dispersan por igual todas las frecuencias. Al reducir el tamaño de la malla los tres métodos proporcionan una dispersión despreciable.

Por otra parte, una de las principales aportaciones del trabajo ha sido comparar tiempos de cálculo de los diferentes métodos numéricos con las herramientas informáticas disponibles hoy en día. En la Tabla 5.1 se muestran los tiempos relativos obtenidos en la simulación del tubo de choque y se comparan con los recogidos por Winterbone en [2].

Método numérico	Winterbone [2]	Resultados VS	Resultados TDM-GCC
Lax-Wendroff	1	1	1
Godunov	1,31 ¹ - 2,30 ²	0,8	0,95
MUSCL	9,35	1,9	1,5

Tabla 5.1: Comparación de tiempos de cálculo en el tubo de choque

En esta tabla se observan grandes diferencias entre los cálculos realizados por Winterbone y los obtenidos en este trabajo. Especialmente destaca que en sus cálculos los esquemas MUSCL eran 9,5 veces más lentos que el método de Lax-Wendroff, mientras que en el presente trabajo se han obtenido relaciones que no llegan al doble. También se aprecia la reducción del tiempo de cálculo mediante el método de Godunov. La explicación a este descenso del tiempo de cálculo de los métodos de volúmenes finitos no puede deberse únicamente al avance de la informática, sino que es de esperar que el código programado por Winterbone y el utilizado en este trabajo presenten diferencias en cuanto al cálculo de las condiciones de contorno mediante volúmenes finitos.

¹Solucionador HLL.

²Solución exacta.

Precisamente, en la turbina simulada en el capítulo 4 se ha visto que las condiciones de contorno son una parte fundamental del proceso de cálculo. La turbina cuasi bidimensional, por presentar una geometría más compleja, requería de un mayor tiempo de cálculo comparada con el modelo unidimensional. Los tiempos relativos de cálculo de este problema se recogen en la Tabla 5.2.

Método numérico	Resultados VS	Resultados TDM-GCC
Lax-Wendroff 1D	1	1
Godunov 1D	1,1 - 1,8	1,5 - 2,5
MUSCL 1D	1,7 - 2,5	2 - 3
Godunov 2D	1,5 - 2,2	3 - 6
MUSCL 2D	3	5 - 7

Tabla 5.2: Comparación de tiempos de cálculo con la turbina simulada

Destaca la notable diferencia entre compiladores en un mismo ordenador. Esto indica que cuando se disponga del código completo del modelo de motor virtual sea necesario realizar un estudio entre varios compiladores.

Teniendo en cuenta la información descrita en los párrafos anteriores, las conclusiones que se pueden extrapolar para el modelo de motor virtual son las siguientes:

En simulaciones donde se busca obtener tendencias de la evolución del motor con escaso coste computacional se hará uso de una malla grande, del orden de 5 - 10 cm, pues, como se ha comprobado, el tiempo de cálculo aumenta con el número de nodos al cuadrado. El método a utilizar en este caso será el de Godunov, pues es el más eficiente de los 3 estudiados en el presente trabajo y, además, asegura la conservación de las propiedades termodinámicas. Esta configuración también será útil para simular transitorios del vehículo prácticamente a tiempo real, como las aceleraciones típicas que se exigen para superar el ciclo de homologación.

Si estamos interesados en obtener resultados más precisos, como estudiar el efecto que tiene modificar la geometría de la turbina, es más conveniente decantarse por un método de segundo orden y reducir el tamaño de la malla hasta 1 cm. En este aspecto, el método que mejores resultados ofrece en tiempo de cálculo es el de Lax-Wendroff.

No obstante, para simular conductos del escape, donde las fluctuaciones de presión y temperatura son elevadas y es importante que no se produzcan oscilaciones para predecir correctamente los contaminantes, no interesa el método de Lax-Wendroff, sino uno TVD. Por ello, es más acertado hacer uso de un esquema MUSCL, ya que evita alcanzar temperaturas no realistas provocadas por las oscilaciones. Entre los distintos limitadores que se pueden utilizar con estos esquemas, el de Van Leer proporciona resultados intermedios entre la posible divergencia del Superbee y la excesiva disipación del Minmod.

Finalmente, al simular componentes concretos del motor como una turbina, lo idóneo es emplear métodos de volúmenes finitos si buscamos una rápida simulación. Como se ha visto, con una malla de 16 mm se puede simular aceptablemente una turbina, mientras que se necesitaría una malla inferior al centímetro para conseguir una cierta conservación del caudal con diferencias finitas.

5.2. Trabajos futuros

Aunque los objetivos expuestos en la sección 1.2 han sido cumplidos en su totalidad, existen varias tareas que podrían realizarse a partir de este Trabajo Fin de Grado.

En primer lugar, cabe indicar que a lo largo del trabajo, se ha asumido que los métodos de diferencias finitas son no conservativos. Sin embargo, como se ha podido comprobar, la no-conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía se produce por hacer uso del Método de las Características para calcular las condiciones de contorno. Por este motivo, resultaría interesante implementar un método de diferencias finitas que calcule las condiciones de contorno mediante flujos, al igual que se ha hecho en este trabajo para los métodos de volúmenes finitos. Así tendríamos métodos de diferencias finitas conservativos que podríamos comparar con los de volúmenes finitos en cuanto a precisión y tiempo de cálculo.

A la vista de los resultados obtenidos en el capítulo 4, sería deseable obtener un modelo de turbina que representase mejor el comportamiento real de la misma, principalmente los fenómenos de frecuencia superior a 1000 Hz. No obstante, se debe tener en cuenta que los datos con los que se compara son experimentales, de ahí que exista cierta incertidumbre en los resultados. Por ello, una posible tarea a realizar sería simular mediante RANS una turbina y comparar los resultados con los obtenidos mediante el modelo cuasi bidimensional de turbina, observando así si concuerdan los resultados o si se puede mejorar el modelo. Esta idea se planteó en el trabajo pero debido al elevado coste computacional del CFD se acabó descartando.

Para concluir, podría realizarse un estudio concreto de cómo afecta el tamaño de malla y el método numérico a elementos del motor donde el flujo es reactivo, como el filtro de partículas o el catalizador de oxidación. De este modo se podría comparar la conservación de especies mediante los métodos de volúmenes finitos y los de diferencias finitas. Otra tarea a realizar en estos mismos dispositivos consistiría en utilizar mallas grandes y simular el flujo mediante métodos conservativos para poder analizar con rapidez la evolución de los contaminantes y observar las ventajas e inconvenientes frente a los modelos 0D de estos elementos.

Bibliografía

- [1] [On-line] CMT-Motores Térmicos, “Openwam - The opensource 1D gas-dynamic code.” <http://www.cmt.upv.es/OpenWam.aspx>, 2016.
- [2] D. E. Winterbone y R. J. Pearson, *Theory of Engine Manifold Design: wave action methods for IC engines*. Professional Engineering Publishing, 2000.
- [3] F. M. White, *Fluid mechanics*. McGraw-Hill, 2011.
- [4] F. J. Arnau, *Métodos numéricos para el modelado unidimensional del proceso de renovación de la carga*. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, 2005.
- [5] R. D. Richtmyer, *A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics*. No. 63, National Center for Atmospheric Research, 1963.
- [6] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, vol. 132. Springer, 1992.
- [7] C. Berthon, “Why the MUSCL–Hancock Scheme is L1-stable”. *Numerische Mathematik*, vol. 104, no. 1, pp. 27–46, 2006.
- [8] A. Kurganov y E. Tadmor, “New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations”. *Journal of Computational Physics*, vol. 160, no. 1, pp. 241–282, 2000.
- [9] G. A. Sod, “A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws”. *Journal of computational physics*, vol. 27, no. 1, pp. 1–31, 1978.
- [10] I. Danaila, P. Joly, S. M. Kaber, y M. Postel, *An Introduction to Scientific Computing: Twelve Computational Projects Solved with MATLAB*. Springer, 2006.
- [11] F. Payri, J. Benajes, y M. Reyes, “Modelling of supercharger turbines in internal-combustion engines”. *International journal of mechanical sciences*, vol. 38, no. 8, pp. 853–869, 1996.

- [12] J. R. Serrano, F. J. Arnau, V. Dolz, A. Tiseira, y C. Cervelló, “A model of turbocharger radial turbines appropriate to be used in zero-and one-dimensional gas dynamics codes for internal combustion engines modelling”. *Energy Conversion and Management*, vol. 49, no. 12, pp. 3729–3745, 2008.
- [13] J. Galindo, A. Tiseira, P. Fajardo, y L. M. García-Cuevas, “Development and validation of a radial variable geometry turbine model for transient pulsating flow applications”. *Energy Conversion and Management*, vol. 85, pp. 190–203, 2014.
- [14] G. Piñero, L. Vergara, J. M. Desantes, y A. Broatch, “Estimation of velocity fluctuation in internal combustion engine exhaust systems through beamforming techniques”. *Measurement Science and Technology*, vol. 11, no. 11, p. 1585, 2000.

Documento II: Planos

Capítulo 6

Planos

Para la realización del presente Trabajo Fin de Grado se ha hecho uso de los ensayos experimentales de una turbina ensayada en las instalaciones del Instituto CMT-Motores Térmicos. Un esquema de la instalación empleada se muestra en la Figura 6.1. En círculos azules se indican los sensores implementados. Como puede observarse, la única función del compresor es actuar como freno de la turbina y, por ello, se encuentra menos sensorizado. Los conductos de entrada y salida de la turbina presentan 3 sensores de presión consecutivos para poder realizar la descomposición de ondas que se utilizaba para validar el modelo numérico.

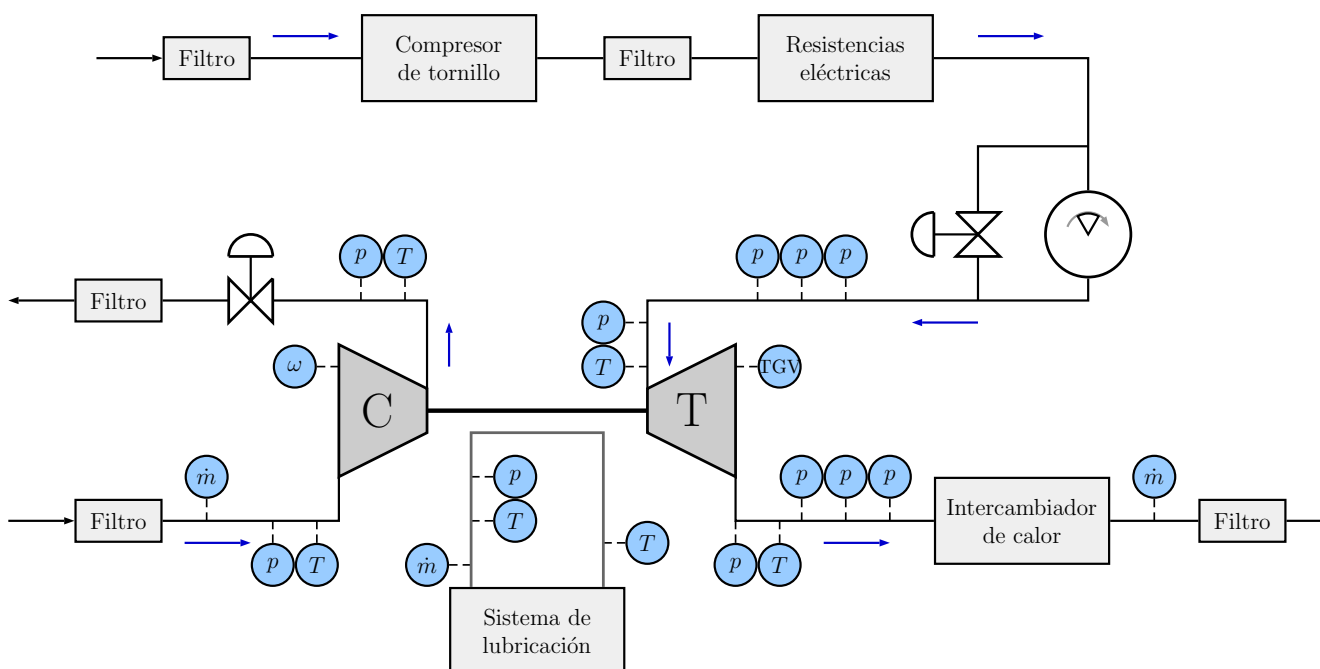


Figura 6.1: Esquema de la instalación experimental utilizada para ensayar la turbina

6. Planos

Esta instalación experimental se encuentra en el interior de una sala de ensayos, cuya distribución se puede observar en la Figura 6.2. Como puede verse, la sala consta de dos plantas. La planta baja dispone de una sala para el técnico desde la cual controlar la instalación mediante equipos de control y visualmente a través de una ventana. En la sala de ensayos se encuentran todos los elementos de la instalación mostrados en la Figura 6.1 a excepción del compresor de tornillo, que está situado en la planta superior, acompañado de una válvula de regulación.

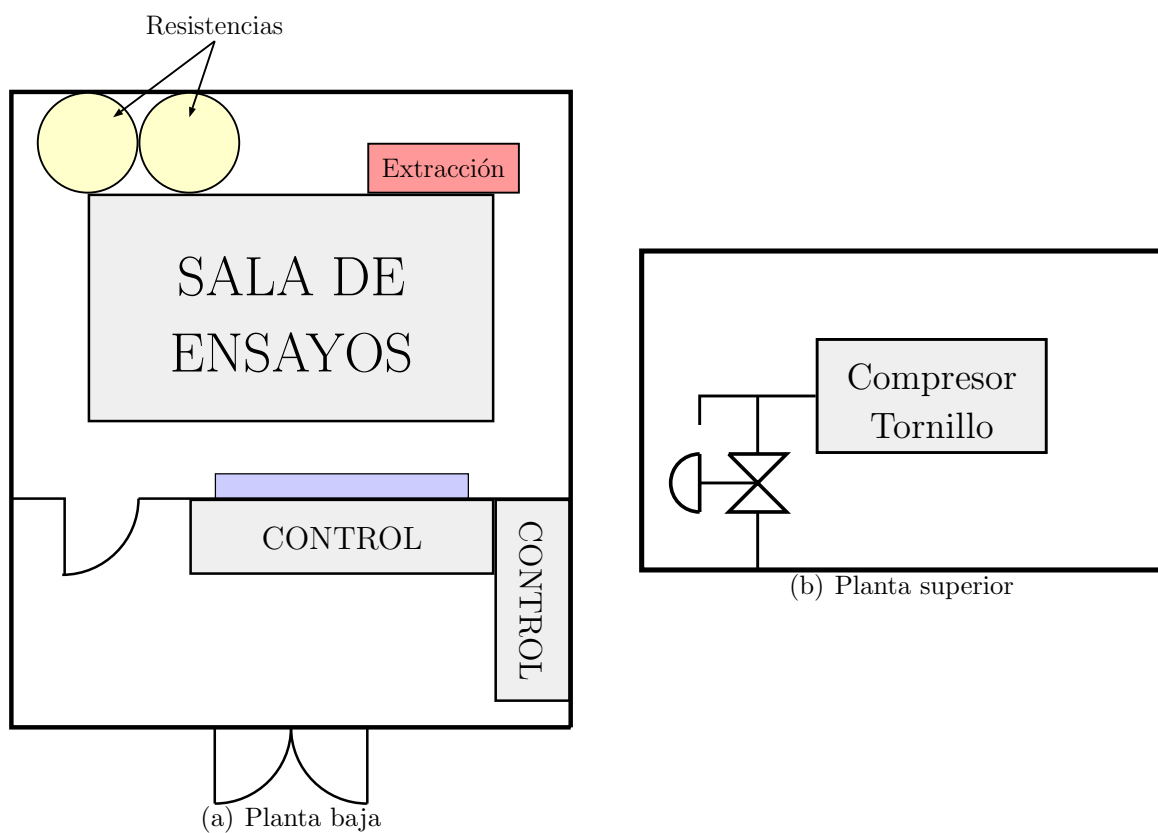


Figura 6.2: Esquema de la sala donde se ensayó la turbina

Por otra parte, en la Figura 6.3 se muestra el lugar en el que se desarrolló el trabajo. El plano corresponde a la quinta planta del edificio 6D de la Universitat Politècnica de València, donde se encuentra situado el Instituto CMT-Motores Térmicos. La posición de la mesa de trabajo aparece coloreada.

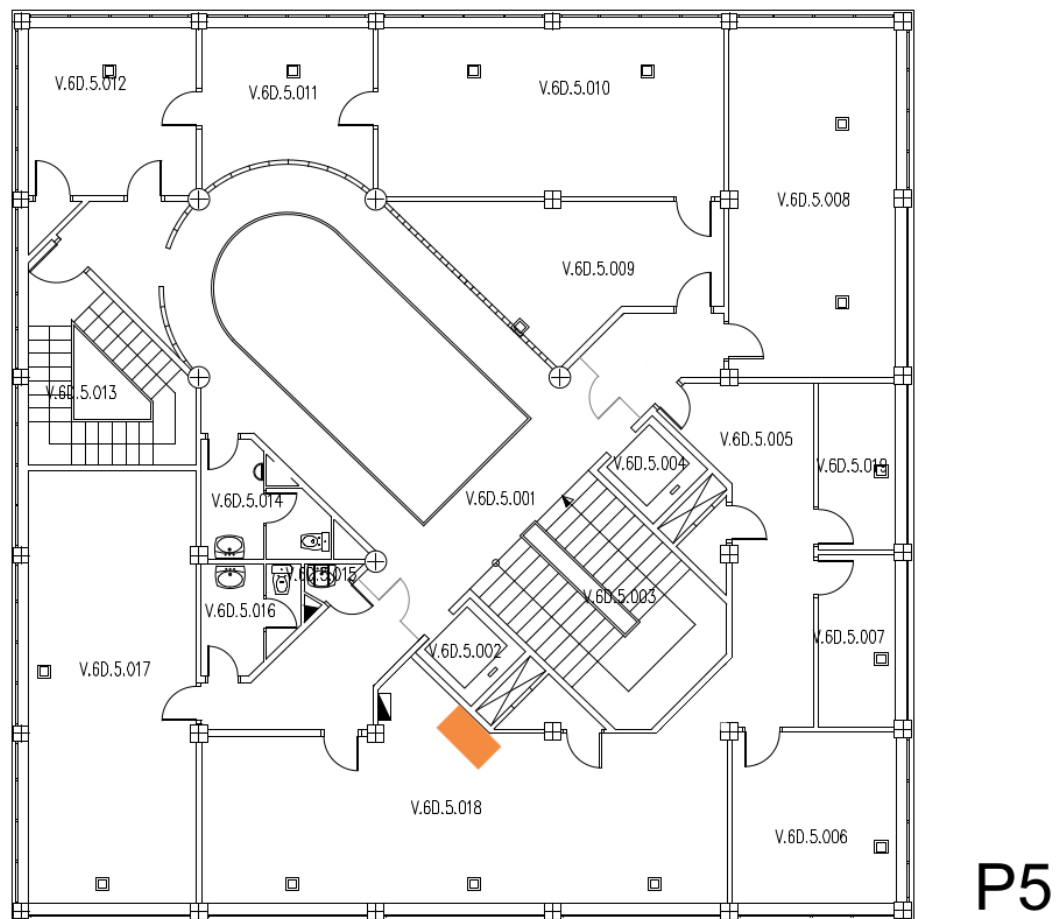
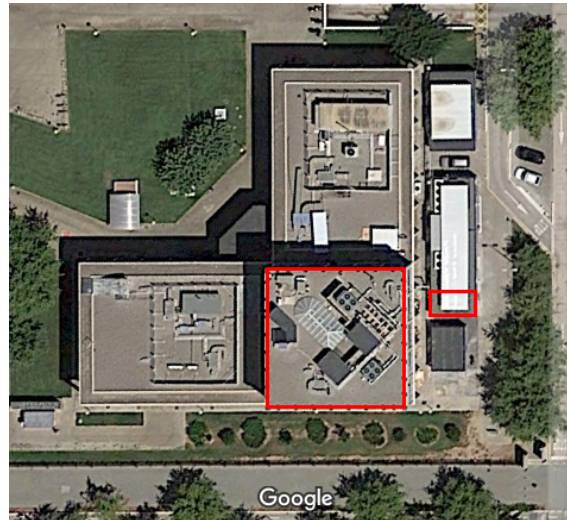


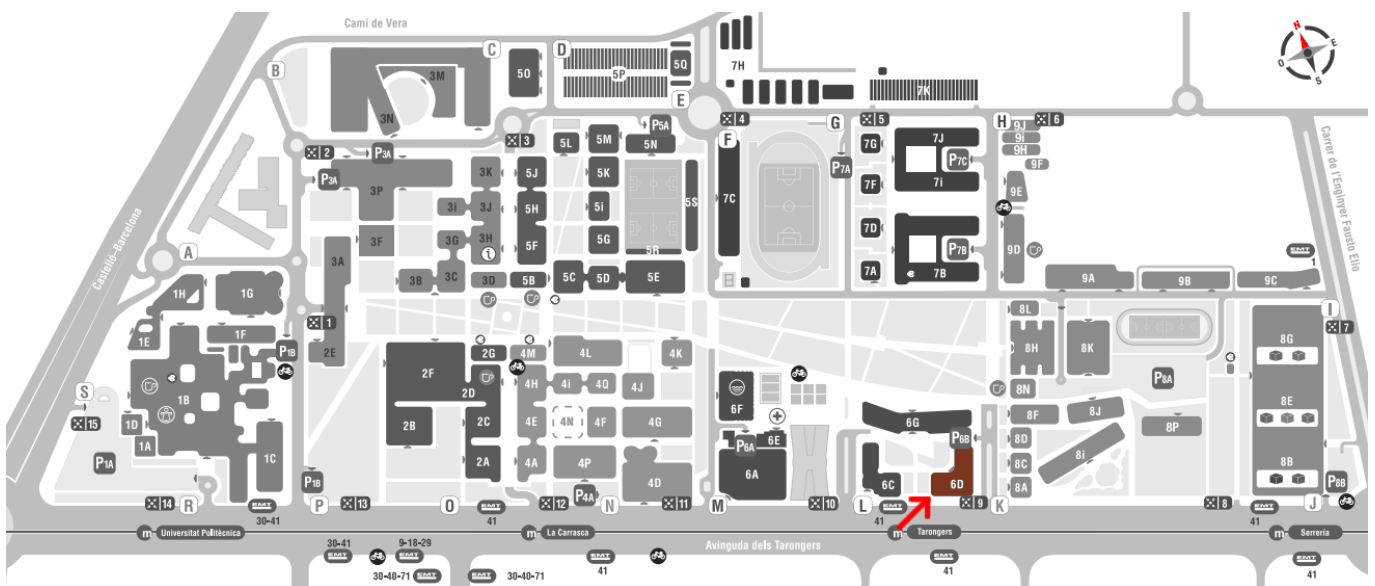
Figura 6.3: Localización del puesto de trabajo en el edificio 6D

6. Planos

Finalmente, en la Figura 6.4 se indica la localización del puesto de trabajo y de la sala de ensayos en la Universitat Politècnica de València.



(a) Puesto de trabajo y sala de ensayos



(b) Edificio 6D

Figura 6.4: Localización del puesto de trabajo y la sala de ensayos en la universidad

Documento III: Pliego de condiciones

Capítulo 7

Pliego de condiciones

Introducción

Tal y como se ha remarcado a lo largo del presente Trabajo Fin de Grado, el proyecto únicamente consta de parte teórica, sin haberse realizado expresamente ensayos experimentales. Por ese motivo, en esta sección se recogen solo los artículos del pliego de condiciones relacionados con las obligaciones de los trabajadores y su seguridad e higiene en el puesto de trabajo. Al final de cada artículo se indica cómo se ha aplicado el mismo durante la realización del trabajo.

Artículo I: Obligaciones y derechos de los trabajadores

Incumbe a los trabajadores, la obligación de cooperar en la prevención de riesgos profesionales en la empresa y el mantenimiento de la máxima higiene en la misma, a cuyos fines deberán cumplir fielmente los preceptos de esta Ordenanza y de sus instrucciones complementarias, así como las órdenes e instrucciones, que a tales efectos les sean dados por sus superiores.

Los trabajadores, expresamente, están obligados a:

- *Recibir las enseñanzas sobre materia en Seguridad e Higiene y sobre salvamento y socorrismo en los centros de trabajo que les sean facilitados por la empresa o en las instrucciones del Plan Nacional.*
- *Usar correctamente los medios de protección personal y cuidar de su perfecto estado de conservación.*
- *Dar cuenta inmediatamente a sus superiores de las averías y las deficiencias que puedan ocasionar peligros en cualquier centro o puesto de trabajo.*

7. Pliego de condiciones

- *Cuidar y mantener su higiene personal para evitar enfermedades contagiosas o molestias a los compañeros de trabajo.*
- *Someterse a los reconocimientos médicos preceptivos y vacunaciones o inmunizaciones ordenados por las Autoridades Sanitarias competentes o por el Servicio Médico de las Empresas.*
- *No introducir bebidas u otras sustancias no autorizadas en los centros de trabajo. Tampoco se podrá presentar o permanecer en los mismos en estado de embriaguez o de cualquier otro género de intoxicación.*
- *Cooperar en la extinción de siniestros y en el salvamento de las víctimas de accidentes de trabajo en las condiciones que, en cada caso, fueren racionalmente exigibles.*

Todo trabajador, después de solicitar de su inmediato superior medios de protección personal de carácter preceptivo para la realización de su trabajo, queda facultado para demostrar la ejecución de éste, en tanto no le sean facilitados dichos medios, si bien deberá dar cuenta del hecho al Comité de Seguridad e Higiene o a uno de sus compañeros, sin perjuicio, además de ponerlo en conocimiento de la Inspección Provincial de Trabajo.

En este aspecto, se han seguido la normativa interna vigente en el Instituto CMT-Motores Térmicos al respecto.

Artículo II: Seguridad estructural

Todos los edificios permanentes o provisionales, serán de construcción segura y firme para evitar riesgos de desplome y los derivados de los fenómenos atmosféricos. Por este motivo los cimientos, pisos y demás elementos de los edificios ofrecerán resistencia suficiente para sostener y suspender con seguridad, las cargas para los que han sido calculados.

Además, para preservar esta seguridad, se indicará por medio de rótulos o inscripciones las cargas que los locales pueden soportar o suspender, quedando totalmente prohibido sobrecargar los pisos y plantas de los edificios.

Este Trabajo Fin de Grado se ha llevado a cabo en el edificio 6D de la Universitat Politècnica de Valencia que cumple con la normativa relacionada con la seguridad estructural.

Artículo III: Superficies y cubicación

Los locales de trabajo reunirán las siguientes condiciones mínimas:

- *Tres metros de altura desde el piso al techo.*
- *Dos metros cuadrados de superficie por cada trabajador.*
- *Diez metros cúbicos para cada trabajador.*

No obstante, en los establecimientos comerciales, de servicios y locales destinados a oficinas y despachos la altura a que se refiere el apartado 1 podrá quedar reducida hasta 2,5 m, pero respetando la cubicación que se establece en el tercer apartado y siempre que el aire se renueve suficientemente.

Para el cálculo de la superficie y el volumen, no se tendrá en cuenta los espacios ocupados por máquinas, aparatos, instalaciones y materiales.

Una vez más, cabe indicar que el edificio donde se realizó el trabajo cumple las condiciones mínimas que recoge el presente artículo. La posición de la mesa de trabajo se encuentra en el Documento II y el espacio para cada trabajador ha sido superior al especificado en este artículo.

Artículo IV: Suelos, techos y paredes

El pavimento constituirá un conjunto homogéneo, llano y liso, sin soluciones de continuidad; será de material consistente, no resbaladizo o susceptible de serlo con el uso y además de fácil limpieza. Estará al mismo nivel, y de no ser así, se salvarán las diferencias de altura por medio de rampas con pendientes no superiores al 10 %.

Por otro lado, tanto los techos como las paredes, deberán reunir las condiciones suficientes para resguardar a los trabajadores de las inclemencias del tiempo. Si han de soportar o suspender cargas deberán reunir las condiciones que se establezcan para estos en el artículo segundo.

La sala donde se realizó el trabajo cuenta con un pavimento llano y liso, así como las soluciones necesarias para evitar goteras al localizarse en la planta superior del edificio.

Artículo V: Disposiciones generales

Todos los lugares de trabajo o tránsito tendrán iluminación natural, artificial o mixta, pero en cualquier caso apropiado a las operaciones que en ellos se esté realizando. Aunque la luz, como se acaba de comentar puede ser natural o artificial, se intentará en la medida de lo posible que ésta sea natural.

7. Pliego de condiciones

Se deberá intensificar la iluminación en máquinas peligrosas, lugares de tránsito con riesgo de caídas, escaleras y salidas de urgencia.

El lugar de trabajo cuenta con unos grandes ventanales que permiten la entrada de luz natural, la cual se puede regular mediante persianas venecianas y combinarse con la luz blanca artificial para evitar reflejos. Asimismo, las escaleras de emergencia vienen señalizadas de forma inequívoca.

Artículo VI: Iluminación de emergencia

En todos los centros de trabajo, se dispondrá de medios de iluminación de emergencia adecuados a las dimensiones de los locales y al número de trabajadores ocupados simultáneamente, capaces de mantener al menos durante una hora la intensidad de cinco luxes y mediante una fuente de energía que será independiente del sistema normal de iluminación.

A lo largo de la estancia en el Instituto CMT-Motores Térmicos se ha informado de los cortes de luz puntuales que se iban a producir, lo cual evitaba el apagado imprevisto de los equipos. Además, el edificio cuenta con la correspondiente iluminación de emergencia.

Artículo VII: Ventilación, temperatura y humedad

En los lugares de trabajo y sus anexos se mantendrá, por medios naturales o artificiales, unas condiciones atmosféricas adecuadas, evitando el aire viciado, exceso de calor o de frío, humedad o sequía y los olores desagradables.

En ningún caso, el anhídrido carbónico ambiental, podrá sobrepasar la proporción de 50/10000, y el monóxido de carbono, la de 1/10000.

En los locales de trabajo cerrados, el suministro de aire fresco y limpio por hora y por trabajador, será al menos de 30 metros cúbicos, salvo que se efectúe una renovación total del aire varias veces por hora, no inferior a seis veces para trabajos sedentarios, ni a diez veces para trabajos que exijan un esfuerzo físico superior al normal. En el otro extremo, la circulación de aire en locales cerrados se acondicionará de modo que los trabajadores no estén expuestos a corrientes molestas y que la velocidad del aire no exceda de 15 metros por minuto con temperatura normal, ni de 45 metros por minuto en ambientes extremadamente calurosos.

En los centros de trabajo expuestos a altas y bajas temperaturas, serán evitadas las variaciones bruscas por el medio que se considere más eficaz. Cuando la temperatura sea extremadamente distinta entre los lugares de trabajo, deberán existir locales de paso para

que los operarios se adapten gradualmente de unas condiciones a las otras.

De acuerdo con todo lo anterior, se fijan como límites de temperatura y humedad en locales y para los distintos trabajos, siempre que el procedimiento de fabricación lo permita, los siguientes:

- *Para trabajos sedentarios: de 17 a 22 °C.*
- *Para trabajos ordinarios: de 15 a 18 °C.*
- *Para trabajos que exija acusado esfuerzo muscular: de 12 a 15 °C.*

A pesar de estas limitaciones, todos los trabajadores estarán debidamente protegidos contra las irradiaciones directas y excesivas de calor. La humedad relativa de la atmósfera oscilará del 40 al 60 %, salvo en instalaciones que haya peligro de generarse electricidad estática, en cuyo caso este valor se deberá limitar necesariamente por debajo del 50 %.

En aquellos trabajos, en los que por exigencias del proceso los locales están sometidos a un calor o frío extremo, se eliminará la permanencia de los operarios estableciendo, en cada caso, los turnos adecuados.

Todas las medidas recogidas en este artículo se cumplen en el puesto de trabajo gracias al sistema de ventilación y aire acondicionado.

Artículo VIII: Ruidos, vibraciones y trepidaciones

Este artículo no se aplica en el presente trabajo, pues no existen máquinas que produzcan vibraciones ni ruidos desagradables en el lugar de trabajo.

Artículo IX: Protección contra contactos en equipos eléctricos

En las instalaciones y equipos eléctricos, para la protección de las personas contra los contactos con partes habitualmente en tensión, se adoptarán alguna de las siguientes prevenciones:

- *Se alejarán las partes activas de la instalación a distancia suficiente del lugar donde las personas habitualmente se encuentran o circulan, para evitar un contacto fortuito o por la manipulación de objetos conductores, cuando éstos puedan ser utilizados cerca de estas partes activas de la instalación.*
- *Se recubrirán las partes activas con el aislamiento apropiado, que permita conservar indefinidamente las propiedades del conductor y que limiten la corriente de contacto a un valor inocuo para las personas.*

7. Pliego de condiciones

- *Se interpondrán obstáculos que impidan todo contacto accidental con las partes activas de la instalación. Los obstáculos de protección deben estar fijados en forma segura y ser capaces de resistir los esfuerzos mecánicos usuales. Para la protección contra los riesgos de contacto con las masas de las instalaciones que puedan quedar accidentalmente con tensión, se adoptarán, en corriente alterna uno o varios de los siguientes dispositivos de seguridad:*
 - *Puesta a tierra de las masas. Las masas deben estar unidas eléctricamente a una toma de tierra o a un conjunto de tomas de tierra interconectadas, que tengan una resistencia apropiada. Las instalaciones, tanto con neutro aislado como con neutro unido a tierra, deben estar permanentemente controladas por un dispositivo que indique automáticamente la existencia de cualquier defecto de aislamiento, o que separe automáticamente al instalación o parte de la misma, en la que esté el defecto de la fuente de energía de la que alimenta.*
 - *Dispositivos de corte automático o de aviso, sensibles a la corriente de defecto (interruptores diferenciales), o a la tensión de defecto (relés de tierra).*
 - *Unión equipotencial o por superficie aislada de tierra o de las masas (conexiones equipotenciales).*
 - *Separación de los circuitos de utilización de las fuentes de energía, por medio de transformadores o grupos convertidores, manteniendo aislados de tierra todos los conductores del circuito de utilización, incluso el neutro.*
 - *Poner doble aislamiento de los equipos y máquinas eléctricas.*

En el caso de que existan en la empresa circuitos alimentados mediante corriente continua, se adoptarán sistemas de protección adecuados para cada caso, similares a los que se acaban de mencionar para la corriente alterna.

A este efecto, se han tomado las protecciones necesarias para aislar cables y los equipos eléctricos presentes en la sala donde se realizó el trabajo.

Artículo X: Electricidad estática

Dado que no hay riesgo de acumulación de electricidad estática en el puesto de trabajo, este artículo no se ha tenido en cuenta.

Artículo XI: Recomendaciones sobre materias inflamables

Este artículo no se aplica al presente trabajo puesto que no se almacenan ni acumulan sustancias inflamables en el lugar de realización del trabajo.

Artículo XII: Prevención y extinción de incendios

En los centros de trabajo que ofrezcan peligro de incendios, con o sin explosión, se adoptarán las prevenciones que se indican a continuación, combinando su empleo con la protección general más próxima que puedan prestar los servicios públicos contra incendios:

- 1. Donde existan conducciones de agua a presión, se instalarán suficientes tomas o bocas de agua a distancia conveniente entre sí y cercanas a los puestos fijos de trabajo y lugares de paso personal, colocando junto a tales tomas las correspondientes mangueras, que tendrán la sección y resistencia adecuadas para soportar la presión.*
- 2. Cuando se carezca normalmente de agua a presión o ésta sea insuficiente, se instalarán depósitos con un volumen suficiente para poder combatir los posibles incendios.*
- 3. En los incendios provocados por líquidos, grasas, pinturas inflamables o polvos orgánicos, solo se deberá emplear agua, y esta deberá estar además muy pulverizada.*
- 4. No se empleará agua para extinguir fuegos en polvos de aluminio o magnesio en presencia de carburo de calcio u otras sustancias que al contacto con el agua produzcan explosiones, gases inflamables o incluso nocivos.*
- 5. En incendios que afecten a instalaciones eléctricas con tensión, se prohibirá el empleo de extintores de espuma química, soda ácida o agua.*
- 6. En la proximidad a los puestos de trabajo con mayor riesgo de incendio, se dispondrán, colocados en sitio visible y accesible fácilmente, extintores portátiles o móviles sobre ruedas, de espuma física o química, mezcla de ambas o polvos secos, anhídrido carbónico o agua, según convenga a la causa determinante del fuego a extinguir que sea más probable que haga su aparición.*
- 7. Cuando se empleen distintos tipos de extintores serán rotulados con carteles indicadores del lugar o clase de incendio en el que deban emplearse. Estos extintores serán revisados periódicamente y cargados según las normas de las casas constructoras inmediatamente después de usarlos.*
- 8. Se instruirá al personal, cuando sea necesario, del peligro que presenta el empleo de tetracloruro de carbono y cloruro de metilo en atmósferas cerradas y de las reacciones químicas peligrosas que puedan producirse en los locales de trabajo entre los líquidos extintores y las materias sobre las que puedan proyectarse.*
- 9. En las dependencias con alto riesgo de incendio, queda terminantemente prohibido fumar o introducir cerillas, mecheros o útiles de ignición. Esta prohibición se indicará con carteles visibles a la entrada y en los espacios libres de las paredes de tales dependencias.*

7. Pliego de condiciones

10. *Se prohíbe igualmente al personal introducir o emplear útiles de trabajo, no autorizados por la empresa que puedan ocasionar chispas por contacto o proximidad a sustancias inflamables.*
11. *Es obligatorio el uso de guantes, manoplas, mandiles o trajes ignífugos, y de calzado especial contra incendios, que las empresas facilitarán a los trabajadores para uso individual.*

Aunque el riesgo de incendio en el puesto de trabajo es mínimo, el edificio cuenta con los correspondientes extintores y salidas de emergencia a utilizar en caso de incendio.

Documento IV: Presupuesto

Capítulo 8

Presupuesto

Introducción

En este último documento del trabajo se pretende cuantificar el precio de los recursos utilizados en la realización del Trabajo Fin de Grado. A este efecto se computarán las horas empleadas por las distintas personas que han contribuido al mismo, así como los recursos materiales e informáticos requeridos.

Cabe indicar que no se tiene en cuenta los costes asociados al ensayo de la turbina empleada en el capítulo 4, pues se trata de ensayos realizados con anterioridad al presente trabajo y que, simplemente, se han reutilizado sin suponer ningún coste adicional. Por el mismo motivo, no se ha considerado el coste de modelado unidimensional y cuasi bidimensional de la turbina.

Presupuesto parcial

A continuación se detalla por separado los costes de cada una de las actividades necesarias para la realización del trabajo. La unidad monetaria utilizada será el euro (€).

Se puede observar que en las diferentes actividades aparecen tres niveles de investigadores:

- Director de instituto universitario. Se trata del tutor del trabajo fin de grado y coordinador del proyecto de motor virtual. El valor del tiempo dedicado a la supervisión del trabajo se estima en 100 €/h.
- Ingeniero doctor. Se trata de uno de los ingenieros encargados del desarrollo del modelo termofluidodinámico del motor virtual. Su coste horario puede estimarse en 41,87 €/h.

8. Presupuesto

- Ingeniero de grado. El autor del presente trabajo, a efectos presupuestarios, puede considerarse un ingeniero de grado, con una atribución de 27,59 €/h.

1. Recopilación de información

La recopilación de información consistió en la búsqueda de los distintos métodos numéricos, valorando las ventajas e inconvenientes conocidos de cada uno de ellos para decidir cuáles implementar para el modelo de motor virtual. En este sentido, el coste de la bibliografía no se ha tenido en cuenta por ser material propiedad de la universidad, tratarse de recursos adquiridos con suficiente tiempo o disponibles libremente en internet.

Recurso	Unidades [h]	Precio unitario [€/h]	Importe [€]
Ingeniero doctor	10	41,87	418,70
Ingeniero de grado	30	27,59	827,70
Bibliografía	-	-	0
Total			1246,40

Tabla 8.1: Presupuesto de la Actividad 1

2. Implementación de los métodos

Una vez buscada la información se hacía necesario implementarla sobre la base de OpenWAM. Para ello se mejoró la implementación del método de diferencias finitas de Lax-Wendroff y se programaron los métodos de volúmenes finitos de Godunov y MUSCL. En esta actividad el Ingeniero doctor realizó una importante labor siendo ayudado en la medida de lo posible por el autor del trabajo.

El software empleado en esta tarea contaba con licencia gratuita para la investigación, por lo que el coste de sus licencias se asume nulo.

Recurso	Unidades [h]	Precio unitario [€/h]	Importe [€]
Ingeniero doctor	80	41,87	3349,60
Ingeniero de grado	50	27,59	1379,50
Licencias de software	-	-	0
Total			4729,10

Tabla 8.2: Presupuesto de la Actividad 2

3. Preprocesado y cálculo

Para llevar a cabo los cálculos fue necesario configurar las opciones de los diferentes compiladores. Asimismo, en la simulación de la turbina se hizo necesario generar archivos `.xml` con el mapa de la turbina, su geometría y sus condiciones de contorno. Para esta última tarea, además de software libre, se utilizó el programa Matlab con licencia investigadora, cuyo precio anual se reparte entre esta actividad y la del postprocesado.

Recurso	Unidades [h]	Precio unitario [€/h]	Importe [€]
Ingeniero doctor	20	41,87	837,40
Ingeniero de grado	70	27,59	1931,30
Licencias de software	-	-	206,61
Total			2975,31

Tabla 8.3: Presupuesto de la Actividad 3

4. Postprocesado

Los resultados proporcionados por el código implementado se recogen en ficheros `.DAT`, por lo que es necesario leerlos con algún programa y observar con él si los resultados son coherentes y obtener tendencias. En este trabajo se ha echo uso de Matlab, programa con el cual también se han trazado las figuras que aparecen en el presente documento. La labor en este aspecto del ingeniero doctor consistía fundamentalmente en guiar el trabajo y dar el visto bueno a los resultados.

Recurso	Unidades [h]	Precio unitario [€/h]	Importe [€]
Ingeniero doctor	5	41,87	209,35
Ingeniero de grado	100	27,59	2759,00
Licencias de software	-	-	206,61
Total			3174,96

Tabla 8.4: Presupuesto de la Actividad 4

5. Seguimiento del trabajo

Durante todo el desarrollo del proyecto se han llevado a cabo reuniones con el tutor y, a la vez, coordinador del proyecto global del motor virtual para valorar el trabajo realizado y proponer mejoras y soluciones a los problemas encontrados. Esta labor se llevaba a cabo mediante reuniones semanales o quincenales de aproximadamente una hora de duración.

8. Presupuesto

El tiempo dedicado por el autor del trabajo es superior puesto que requería la preparación de material para estas sesiones. Para ello se utilizó el programa Powerpoint del paquete Microsoft Office 2013.

Recurso	Unidades [h]	Precio unitario [€/h]	Importe [€]
Catedrático universidad	30	100	3000
Ingeniero doctor	15	41,87	628,05
Ingeniero de grado	40	27,59	1103,60
Licencias de software	-	-	123,14
Total			4854,79

Tabla 8.5: Presupuesto de la Actividad 5

6. Redacción documento

La última actividad necesaria para completar el Trabajo Fin de Grado consistía en redactar el presente documento. Al haberse redactado mediante software libre relacionado con L^AT_EX, no se considera coste adicional de licencias. La supervisión del correspondiente documento se incluye en la actividad 5, por lo que en este apartado solo se recoge la dedicación del autor.

Recurso	Unidades [h]	Precio unitario [€/h]	Importe [€]
Ingeniero de grado	130	27,59	3586,70
Licencias de software	-	-	0
Total			3586,70

Tabla 8.6: Presupuesto de la Actividad 6

Recursos comunes

La realización del trabajo ha requerido de cierto material adicional que ha sido común a la mayoría de las actividades descritas con anterioridad. Entre este material se encuentra el ordenador portátil empleado por el autor del proyecto y el ordenador de sobremesa utilizado por el ingeniero doctor. A este efecto se considerará el coste de amortización de estos equipos suponiendo un periodo de amortización de 5 años.

Por último, se estima el coste del material de oficina del que se ha hecho uso durante el trabajo, como puede ser papel, material de escritura o tóner de impresora.

Concepto	
Equipo portátil	900 €
Equipo de sobremesa	800 €
Coste equipos	1700 €
Periodo amortización	5 años
Periodo amortizado	9 meses
Coste mensual amortización	28,33 €
Coste total amortización	255 €

Tabla 8.7: Amortización de los equipos informáticos utilizados

Recurso	Importe [€]
Amortización equipos	255
Material de oficina	25
Total	280

Tabla 8.8: Presupuesto de los recursos comunes

Presupuesto global

Una vez detallado el coste de las distintas actividades y recursos empleados pasamos a sumarlos para obtener el presupuesto global del trabajo antes de impuestos:

Actividad	Importe [€]
1. Recopilación información	1246,40
2. Implementación	4729,10
3. Preprocesado y cálculo	2975,31
4. Postprocesado	3174,96
5. Seguimiento del trabajo	4854,79
6. Redacción documento	3586,70
Recursos comunes	280,00
Total	20847,26

Tabla 8.9: Presupuesto global del trabajo sin impuestos

Añadiendo el correspondiente 21 % de IVA se obtiene el presupuesto total del trabajo.

8. Presupuesto

Concepto	Importe [€]
Presupuesto bruto	20847,26
IVA (21 %)	4377,93
Presupuesto neto	25225,19

Tabla 8.10: Presupuesto global del trabajo con IVA