

José M. Gozávez Zafrilla  
Asunción Santafé Moros

# **Análisis y simulación de procesos con MATHCAD**

**EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Ingeniería Química y Nuclear de la Universitat Politècnica de València

*Colección Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: GOZÁLVEZ ZAFRILLA, J.M. y SANTAFÉ MOROS, A. (2015) *Análisis y simulación de procesos con Mathcad*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2015 (versión impresa)  
Primera edición, 2015 (versión electrónica)

© José M. Gozávez Zafrilla  
Asunción Santafé Moros

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución:* Telf.: 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 6261\_01\_01

ISBN: 978-84-9048-403-6 (versión impresa)  
ISBN: 978-84-9048-404-3 (versión electrónica)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

## PRÓLOGO

Este libro trata el desarrollo de modelos de procesos químicos y su implementación en el ordenador para simular y analizar el comportamiento u optimizar sus características.

En los primeros capítulos del libro se tratan los modelos de subsistemas homogéneos basados en balances de materia y energía, así como los modelos de parámetro distribuido basados en ecuaciones de gradiente máximo. Posteriormente se pasa a tratar la creación de modelos de sistemas a partir de los modelos de los subsistemas que los componen. Finalmente, se incluyen dos capítulos adicionales de análisis de estabilidad y de optimización.

Cada capítulo incluye una breve descripción teórica acompañada de ejemplos de aplicación. En estos ejemplos se desarrollan en primer lugar las ecuaciones del modelo, para a continuación implementar un código de cálculo en Mathcad® que permitirá obtener la solución y realizar análisis. Se ha escogido este entorno de cálculo porque utiliza una simbología muy aproximada a la del lenguaje matemático convencional, facilitando con ello la comprensión de los desarrollos y su extrapolación a otros entornos de programación. Se incluye además un anexo sobre este entorno matemático.

Este libro se enmarca dentro de las acciones del Equipo de Innovación y Calidad Educativa ASEI (Aplicación de la Simulación en la Enseñanza de la Ingeniería) al cual pertenecen los autores. Ambos agradecen a Yolanda Gozávez Zafrilla su contribución a la mejora del formato y redacción.

José M. Gozávez Zafrilla & Asunción Santafé Moros



## ÍNDICE

---

1.	INTRODUCCIÓN .....	1
1.1.	Usos y ventajas de la simulación .....	2
1.2.	El proceso de la simulación .....	3
1.3.	Precauciones a tener en cuenta .....	4
2.	MODELOS BASADOS EN BALANCES GLOBALIZADOS DE MATERIA .....	5
2.1.	Introducción .....	5
2.2.	Ejemplo: ajuste de concentración en una piscina .....	8
2.3.	Ejemplo: mezcla de corrientes gaseosas .....	18
2.4.	Ejemplo: etapa de absorción no estacionaria .....	24
3.	MODELOS CON BALANCE GLOBALIZADO DE ENERGÍA .....	33
3.1.	Ejemplo: tanque calentado por resistencia .....	35
3.2.	Ejemplo: reacción exotérmica en un sistema de RCTA .....	38
4.	MODELOS DE GRADIENTE MÁXIMO ESTACIONARIOS .....	49
4.1.	Deducción de las ecuaciones de balance para gradiente máximo .....	49
4.2.	Ejemplo: reactor pistón con intercambiador .....	51
4.3.	Ejemplo: reacción en fase gas en un reactor pistón .....	61
5.	MODELOS DINÁMICOS DE GRADIENTE MÁXIMO .....	67
5.1.	Modelos de gradiente máximo y EDP .....	67
5.2.	Expresión de las EDP en diferencias finitas .....	68
5.3.	Ejemplo: variación de temperatura en un conducto .....	70
5.4.	Ejemplo: estudio dinámico de un reactor pistón isoterma .....	74
5.5.	Ejemplo: estudio dinámico de un reactor pistón adiabático .....	81
6.	MODELOS DE SISTEMAS ESTACIONARIOS .....	91
6.1.	Sistemas estacionarios, cuasi-estacionarios y dinámicos .....	91
6.2.	Resolución matricial de sistemas estacionarios con bucles .....	93
6.3.	Resolución iterativa de sistemas estacionarios .....	94
6.3.	Ejemplo: sistema de reactor y separadores .....	96

6.4. Ejemplo: sistema de molino y tamiz.....	108
6.5. Ejemplo: sistema de fangos activos.....	116
7. MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS.....	127
7.1. Cálculo de sistemas dinámicos.....	127
7.2. Ejemplo: sistema dinámico de tanques, reactor y separador .....	128
8. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD .....	135
8.1. Ejemplo: estabilidad de reactor biológico .....	137
8.2. Ejemplo: estabilidad de reactor con camisa intercambiadora.....	139
9. OPTIMIZACIÓN .....	151
9.1. Ejemplo: optimización de un proceso por interpolación cuadrática .....	152
9.2. Ejemplo: formulación de un abono mediante programación lineal .....	158
9.3. Ejemplo: optimización por Lagrange de un sistema de agitación .....	160
9.4. Ejemplo: optimización de un sistema mediante PNL.....	168
ANEXOS DE CÁLCULO CON MATHCAD.....	171
A1. Resolución numérica de ecuaciones algebraicas .....	171
A2. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias .....	179
A3. Resolución numérica del gradiente máximo no estacionario .....	188
A4. Cálculo de sistemas estacionarios mediante sustitución directa .....	192
A5. Métodos de optimización .....	194
BIBLIOGRAFÍA .....	199

# 1. INTRODUCCIÓN

Desde un punto de vista técnico, la simulación es una técnica que busca imitar el comportamiento de un objeto o fenómeno. Se podría entender como un procedimiento de análisis y obtención de información del comportamiento de objetos reales basado en la creación de una réplica o modelo que presenta un comportamiento análogo al objeto que representa, al menos en los aspectos más relevantes de los fenómenos estudiados sobre éste.

Atendiendo a la base sobre la que se realizan los modelos, se pueden clasificar en dos grandes categorías:

- Modelos físicos, basados en analogías, que pueden ser una réplica a diferente escala del objeto (maqueta o planta piloto) o bien sistemas físicos que tienen un comportamiento similar (p. e.: una analogía de resistencia entre transferencia de materia y transferencia de calor).
- Modelos conceptuales, especialmente los basados en ecuaciones que conforman una estructura matemática, que se resuelve en muchas ocasiones con el ordenador.

En muchas ocasiones, el objeto en cuestión tiene partes claramente identificables que están interconectadas. Se puede entender un sistema como una disposición de elementos unidos por flujos de materiales, energías o información que interaccionan entre sí. En el caso particular de la ingeniería de procesos, los sistemas estudiados son los encargados de realizar los procesos industriales, de los cuales, los procesos químicos son quizás el ejemplo más característico.

Para poder obtener información de un modelo basado en ecuaciones es necesario tanto plantearlo adecuadamente como resolverlo. En muy pocos casos existirá solución analítica, siendo necesario emplear métodos numéricos. La solución del modelo queda materializada normalmente como un código capaz de proporcionar resultados de comportamiento del sistema correspondientes a diferentes situaciones especificadas mediante información sobre el sistema y las acciones que le afectan.

Para ciertos problemas estandarizados con una solución definida (p. e. torres de destilación o reactores de cinética sencilla) existen programas conocidos como simuladores de procesos en los que el usuario define las características del proceso y ajusta los parámetros de la simulación. En estos casos, el usuario no necesitará normalmente desarrollar los modelos particulares, limitándose a definir las condiciones de funcionamiento de los elementos así como su interconexión.

En Himmelblau y Bischoff (1976) podemos encontrar un detallado análisis sobre los tipos de modelo, sus características y aplicaciones.

## 1.1. Usos y ventajas de la simulación

La simulación presenta ciertas ventajas sobre la experimentación convencional, pues consume menos recursos y permite obtener estimaciones del comportamiento del proceso con rapidez. No obstante, hay que tener en cuenta que la simulación no sustituye a la experimentación sino que es complementaria de ésta, ya que muchos parámetros empleados en los programas de simulación necesitan ajustarse a partir de resultados experimentales, existiendo además casos de difícil o imposible simulación con el conocimiento y medios actuales. Asimismo, la simulación puede ser muy interesante para guiar los procesos de experimentación e incluso ayudar a comprender ciertos fenómenos físicos.

Las técnicas de simulación se utilizan en muchos campos de la ingeniería y de las ciencias. La simulación permite estudiar condiciones difíciles o costosas de conseguir de manera experimental. Asimismo, permite explorar distintas posibilidades con gran rapidez, pudiendo realizar análisis a diferente escala temporal. De esta manera resulta mucho más fácil aplicar técnicas de análisis como los estudios de sensibilidad, estabilidad u optimización. En el campo concreto de la Ingeniería Química, los simuladores de procesos químicos son empleados para diseñar, desarrollar, controlar y optimizar procesos químicos. La Figura 1 muestra los campos en los que un ingeniero químico podría utilizar la simulación, principalmente con el fin de mejorar los procesos o diseñar otros nuevos.

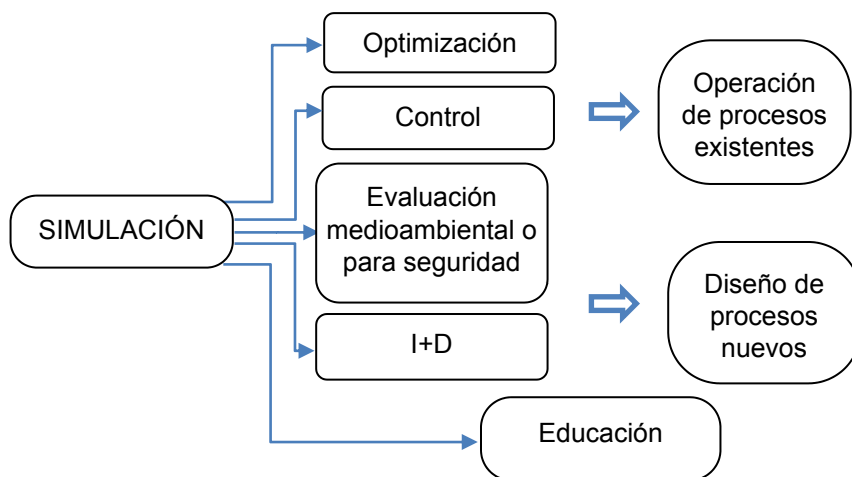


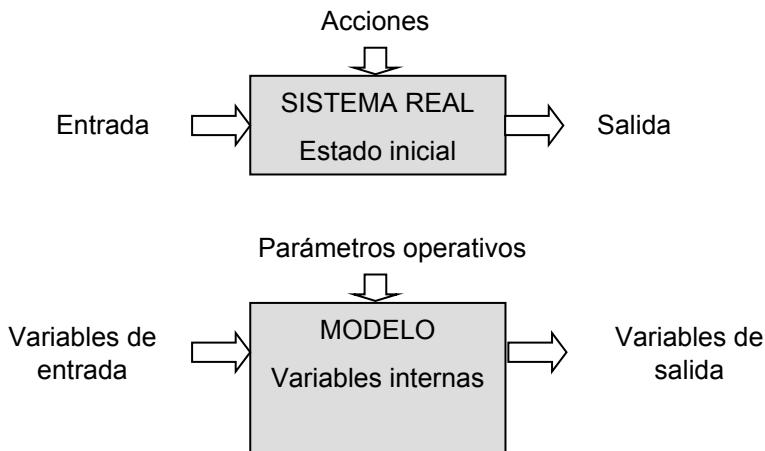
Figura 1. Usos de la Simulación en Ingeniería de Procesos



## 1.2. El proceso de la simulación

En un sistema real pueden existir entradas en forma de flujos de materia o energía, unas veces en forma de corrientes que entran en un punto concreto, otras veces de forma distribuida. Debido a estas entradas y a cambios que acontecen dentro del sistema, éste modificará su estado interno a lo largo del tiempo y puede producir asimismo salidas de materia y energía.

Existen variables no relacionadas con las entradas que influyen sobre el comportamiento del sistema que se denominan parámetros. Normalmente, los valores de estas variables pueden ser modificados a través de una acción. En el proceso de conceptualización aparecerán como coeficientes dentro de las ecuaciones que explican el comportamiento del fenómeno. Cuando pueden ser modificados desde el exterior, el modelo del sistema debe incluir información sobre sus valores a lo largo del tiempo. La Figura 2 indica, a grandes rasgos, la equivalencia establecida entre el sistema real y el modelo.



**Figura 2. Conceptualización desde el sistema real al sistema lógico**

Los modelos se obtienen mediante combinación y simplificación de ecuaciones de diferente tipo, pertenecientes a una de estas categorías:

- Ecuaciones de balance (de materia total, de componente, de energía o de cantidad de movimiento.
- Velocidades cinéticas de procesos (químicos, biológicos, etc.)
- Relaciones estequiométricas
- Ecuaciones de transferencia de materia
- Ecuaciones constitutivas (p. e. ecuaciones de estado, leyes de válvulas, etc.)

En dichas ecuaciones aparecen coeficientes que pueden ser constantes o dependientes del tiempo y del espacio y variables que explican el “estado” del sistema estudiado que también tienen dependencia temporal o espacial. En el proceso de simplificación se podrá descartar determinadas variables como no relevantes para el fenómeno estudiado. Las variables no descartadas pueden a su vez ser dependientes entre sí, por lo que se podrán poner unas como función de otras. De esta manera, el conjunto de variables de estado del modelo estará constituido por variables independientes seleccionadas arbitrariamente. El comportamiento del sistema debe quedar explicado en el nivel de descripción necesario para nuestros fines al poder ponerse el resto de variables en función de las variables de estado.

### 1.3. Precauciones a tener en cuenta

Como se ha indicado, en el estado actual de conocimientos, muchos parámetros utilizados por los modelos deben obtenerse experimentalmente. Si los datos no son correctos, los resultados de la simulación tampoco lo serán. Por ejemplo, la imprecisión en los datos fisicoquímicos empleados afecta a la de los resultados producidos. Otros errores pueden provenir de la propia estructura del modelo, bien por simplificaciones excesivas, bien por errores conceptuales. Por otra parte, los modelos demasiado complejos pueden ser impracticable por la dificultad de ajustar sus parámetros. Se debe tener especial cuidado a realizar simulaciones fuera de los límites de validez de las ecuaciones y correlaciones utilizadas en la construcción del modelo. La Figura 3 indica un ejemplo en el que un ajuste lineal ha dejado de ser un modelo válido al extrapolar fuera del rango del ajuste.

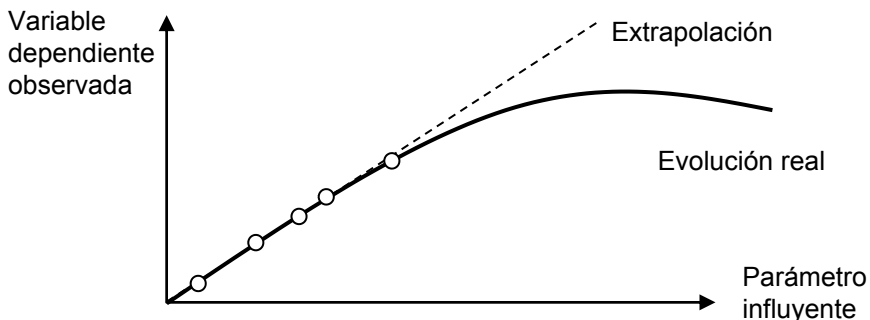


Figura 3. Error de extrapolación

## 2. MODELOS BASADOS EN BALANCES GLOBALIZADOS DE MATERIA

### 2.1. Introducción

El balance de materia globalizado implica la suposición de que el contenido del sistema o subsistema que se modeliza es homogéneo. Esto implica a su vez considerar que las propiedades intensivas (temperatura, presión, composición y propiedades específicas) son homogéneas en todo su interior. Cuando esto se cumple, las variables intensivas (específicas) de cualquier corriente convectiva saliente del sistema adoptan los mismos valores que las variables correspondientes en el interior del sistema.

Al usar la hipótesis de balance globalizado se asume que las variaciones espaciales son irrelevantes. Esto puede corresponderse con una descripción bastante realista de la naturaleza del sistema o bien ser una mera simplificación realizada con el objetivo de poder resolver fácilmente el modelo.

Hay que comentar que son posibles modelos mixtos en los que unas variables son consideradas globalizadas y otras no. Si todas las variables del sistema son consideradas globalizadas, se podrá decir que el modelo resultante es cero-dimensional y como se verá su relación entre entrada y salida será dependiente exclusivamente del tiempo y en el caso de los modelos estacionarios constante.

La ecuación de partida para cualquier balance globalizado es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Acumulación} = & \text{Entrada convectiva} - \text{Salida convectiva} \\ & + \text{Difusión neta} \\ & + \text{Generación} \end{aligned}$$

Esta ecuación puede aplicarse a materia, energía y cantidad de movimiento, si bien la aplicación del último tipo de balances a problemas globalizados no resulta usual.

En el caso de los balances de materia, estos pueden realizarse para masa o moles. Para tener determinado el modelo, es necesario establecer un balance por cada componente o bien sustituir uno de los balances de componente por un balance de materia total.

El balance de materia total  $M$ , a un sistema de volumen  $V$ , se expresaría como:

$$\frac{dM}{dt} = m_e - m_s + m_d + r_t V$$

La variación depende de los flujos convectivos de materia entrante  $m_e$  y saliente  $m_s$ , el flujo difusivo neto  $m_d$  y la generación total de materia por unidad de volumen  $r_t$ . El balance de materia puede aplicarse tanto para variables que representan masa o como moles. Si se realiza el balance para variables que representan masa, el término de generación es nulo (a no ser que hubiera reacciones nucleares que transformaran masa en energía). Cuando se aplica sobre las moles totales, el término de generación no es necesariamente nulo, ya que las reacciones, dependiendo de la estequiometría pueden implicar un cambio en el número de moles presentes en el sistema.

De manera análoga, el balance de materia total sobre un componente específico  $M_i$ , se expresaría particularizando los términos para el componente  $i$ :

$$\frac{dM_i}{dt} = m_{e,i} - m_{s,i} + m_{d,i} + r_i V$$

El término de acumulación se refiere a la variación de la propiedad (materia total o cantidad de componente en este caso) y se obtendrá de la derivada temporal. Tanto este término como el resto de términos se deberán poner en función de variables de estado oportunas. De esta manera se llega a tener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Los sistemas de EDO pueden resolverse mediante métodos numéricos adecuados. Se remite al anexo A2 para una descripción de su uso en Mathcad, así como de las precauciones a tomar.

El caso de problemas globalizados más típico es el de los tanques agitados donde la hipótesis de homogeneidad se cumple de forma bastante aproximada. Sin embargo, otros sistemas, aun no siendo completamente homogéneos, son tratados como sistemas homogéneos; un ejemplo son los platos de transferencia de las torres de separación.

### **2.1.1. Estado estacionario de un modelo globalizado**

Los modelos de balance globalizado de tipo dinámico suelen estar constituidos por una o varias EDO, en las que las variables de estado aparecen en el término de la derivada temporal, siendo función los sumandos de la derecha del conjunto de variables de estado.

Para que sistema globalizado pueda alcanzar el estado estacionario, la entrada debe ser constante a partir de un determinado momento y los coeficientes de las ecuaciones que lo definen independientes del tiempo, lo cual equivale a que no hay cambios internos.

Esto implica que las diferentes variables de estado son constantes y, por tanto, lo son sus derivadas temporales. Cuando se está interesado en obtener la solución estacionaria, ésta se obtendrá considerando que las propiedades dentro del sistema no varían y, por tanto, el término acumulativo es nulo. Esto implica que el sistema de EDO se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas en la forma de un conjunto de expresiones igualadas a cero. Para la mayoría de los casos la solución estacionaria se obtiene mediante un método numérico. Excepto en el caso de funciones lineales donde se asegura un único vector de soluciones, de manera general podrían existir múltiples vectores solución estacionarios o bien ninguno.

### **2.1.2. Definición de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**

Un sistema de EDO está bien definido para su resolución numérica si hay una EDO por cada variable de estado, y además:

- En la parte izquierda de cada EDO cada variable de estado aislada aparece derivada por la variable de integración.
- En la parte derecha de las EDO, aparecen funciones que están definidas a partir de parámetros constantes, funciones de las variables de estado y de la variable de integración, o bien las mismas variables de estado o la variable de integración.

## 2.2. Ejemplo: ajuste de concentración en una piscina

Se busca obtener el modelo para el estudio de la evolución del nivel y concentración de sal en la piscina de una piscifactoría cuyas características relevantes están definidas en la Tabla 1.

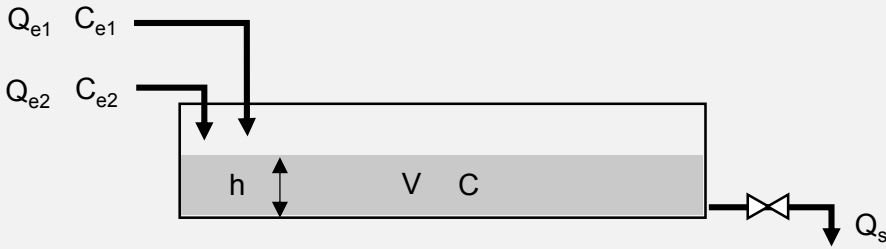


Figura 4. Esquema con las corrientes

Tabla 1. Datos del sistema con tanque

Sección de la piscina:	$S = 100 \text{ m}^2$	
Sección de salida del conducto:	$S_c = 0.01 \text{ m}^2$	
Caudales máximos de entrada:	$Q_{e1max} = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$	$Q_{e2max} = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$
Concentraciones de entrada:	$C_{e1} = 0.1 \text{ mol/m}^3$	$C_{e2} = 5.0 \text{ mol/m}^3$
Factor de pérdidas en la salida:	$\alpha(a) = \frac{0.005 a}{1 + 0.5 a}$	
Pérdida de carga en la salida:	$h_f(Q, a) = \left(\frac{1}{\alpha(a)}\right) \cdot Q^2$	

1) Si el sistema parte del siguiente estado inicial de nivel y concentración de sal:

$$h_0 = 0.2 \text{ m} \quad C_0 = 1 \text{ kg/m}^3$$

Obtener la evolución durante un tiempo de 4 h si los caudales de entrada adoptan sus valores máximos y la apertura tiene un valor  $a = 0.5$ .

2) Calcúlese de forma exacta el estacionario que se alcanzará.

3) Determinar los caudales y la apertura de válvula para alcanzar un estacionario con el nivel, concentración y caudal de renovación siguientes:

$$h_{est,II} = 0.5 \text{ m} \quad C_{est,II} = 3 \text{ kg/m}^3 \quad Q_{s,est,II} = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 4) Obténgase la evolución del sistema durante una maniobra que, partiendo del estacionario calculado en el Apartado 2, permita obtener el estacionario definido en el Apartado 3 acercándose lo antes posible a la concentración deseada. Determinése el tiempo para el cual se alcanza la concentración objetivo.

### 2.2.1. Desarrollo del modelo y estrategia de solución

Para resolver el Apartado 1 se debe obtener un modelo de variación de la altura del sistema. Esto requiere realizar un balance de materia total, ya que la altura del sistema está directamente relacionada con la cantidad de líquido que hay en él. Como no se indica otra cosa se ha supuesto que la sección es recta (constante en toda la altura del depósito).

Se parte de la ecuación de balance globalizada a masa, en este caso no hay términos de difusión de materia entre el sistema y el entorno, existiendo solamente términos convectivos de entrada y de salida, por lo tanto:

$$ACUMULACIÓN = ENTRADA - SALIDA$$

La masa dentro del sistema es:

$$M = \rho V$$

Y su derivada respecto del tiempo es la acumulación existente, por lo tanto:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = (\rho_{e1} Q_{e1} + \rho_{e2} Q_{e2}) - \rho_s Q_s$$

Por considerarse el sistema globalizado, la densidad de la corriente de salida es la del interior del sistema. Además, para una fácil resolución se supondrá que la densidad de la disolución es similar a la del fluido puro, por lo que se tiene:

$$\rho_{e1} \approx \rho_{e2} \approx \rho = \rho_s$$

Bajo estas simplificaciones se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = (Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s$$

$$V = S h$$

Y la ecuación diferencial que define dicha evolución es la siguiente:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s}{S}$$

Llegado a este punto hay que tener en cuenta que la entrada al sistema es constante o una función del tiempo independiente del sistema. No obstante, el caudal de salida es función del nivel de fluido en el depósito por lo que va a ser necesario determinar la dependencia del caudal con la altura de depósito y la apertura de la válvula.

Aplicando la ecuación de Bernouilli entre el fondo del depósito (1) y un punto a la salida del conducto (2) se tiene:

$$\left[ \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \right] = \left[ \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \right] + h_f$$

$$\left[ \frac{0 + \gamma h}{\gamma} + 0 + 0 \right] = \left[ \frac{0}{\gamma} + \frac{\left(\frac{Q}{S_c}\right)^2}{2g} + 0 \right] + \frac{Q^2}{\alpha(a)}$$

De esta expresión se puede despejar el caudal de salida del fluido en función del nivel de líquido en el tanque y de la apertura de la válvula:

$$Q_s(h, a) = \sqrt{\frac{\alpha(a)}{1 + \frac{\alpha(a)}{2g S_c^2}}} h$$

Así pues se observa que la ecuación diferencial que define la evolución del nivel del tanque sólo depende del propio nivel y de parámetros conocidos por lo que se puede resolver para el caso de que 'a' sea constante o una función del tiempo conocida.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(Q_{e1}(t) + Q_{e2}(t)) - Q_s(h, a)}{S}$$

Para determinar la evolución de la concentración se parte de la ecuación de balance globalizado aplicada a la conservación de componente:



$$\frac{d(V C)}{dt} = (Q_{e1} C_{e1} + Q_{e2} C_{e2}) - Q_s C_s$$

Derivando por partes y teniendo en cuenta que en un tanque de mezcla completa se cumple aproximadamente la hipótesis de balance globalizado  $C = C_s$  se llega a la siguiente ecuación:

$$V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} = (Q_{e1} C_{e1} + Q_{e2} C_{e2}) - Q_s C$$

Si en esta ecuación se sustituye la expresión de la derivada del volumen:

$$V \frac{dC}{dt} + C \cdot ((Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s) = (Q_{e1} C_{e1} + Q_{e2} C_{e2}) - Q_s C$$

se llega tras despejar a:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{(Q_{e1} C_{e1} + Q_{e2} C_{e2}) - (Q_{e1} + Q_{e2}) C}{V}$$

y en términos de la variable de estado  $h$  se tiene:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{(Q_{e1} C_{e1} + Q_{e2} C_{e2}) - (Q_{e1} + Q_{e2}) C}{S h}$$

Obsérvese que ha desaparecido el término del caudal de salida, pero la ecuación continúa acoplada con la de variación de altura por aparecer  $h$  en el denominador, por lo que ambas EDO deben resolverse conjuntamente.

### 2.2.2. Resolución en Mathcad

Se asignan a continuación las variables del problema, nótese que el índice inicial que se utilizará para los vectores es 0.

$$\text{ORIGIN} = 0 \qquad S := 100 \text{ (m}^2\text{)} \qquad S_c := 0.01 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$Q_{e1\text{max}} := 0.015 \text{ (m}^3\text{/s)} \qquad Q_{e2\text{max}} := 0.015 \text{ (m}^3\text{/s)}$$

$$C_{e1} := 0.1 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$C_{e2} := 5 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$\text{Gravedad (m/s}^2\text{):}$$

$$g := 9.81 \text{ (m}^2\text{/s)}$$

Caudal de salida (m<sup>3</sup>/h):

$$\alpha(a) := \frac{0.005 \cdot a}{1 + 0.5 \cdot a}$$

$$Q_s(h, a) := \sqrt{\frac{\alpha(a)}{1 + \frac{\alpha(a)}{2 \cdot g \cdot S_c^2}}} \cdot h$$

Apartado 1:

Condiciones iniciales:

$$h_0 := 0.2 \text{ (m)}$$

$$C_0 := 1 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

Apertura de la válvula:

$$a := 0.5$$

Caudales entrantes:

$$Q_{e1} := Q_{e1\max}$$

$$Q_{e2} := Q_{e2\max}$$

Para cada EDO definimos funciones que calculan las derivadas de las variables de estado:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s}{S}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{(Q_{e1} \cdot C_{e1} + Q_{e2} \cdot C_{e2}) - (Q_{e1} + Q_{e2}) \cdot C}{S \cdot h}$$

$$D_h(h) := \frac{(Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s(h, a)}{S}$$

$$D_C(h, C) := \frac{(Q_{e1} \cdot C_{e1} + Q_{e2} \cdot C_{e2}) - (Q_{e1} + Q_{e2}) \cdot C}{S \cdot h}$$

Obsérvese que, en este caso, ambas funciones no dependen de  $t$ . No obstante, el método de integración de Mathcad exige que se defina una única función que proporcione ambas derivadas. Ésta debe incluir como primer argumento la variable de integración y como segundo el vector de variables de estado:

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{C} \end{pmatrix} \leftarrow X$$

$$\begin{pmatrix} D_h(h) \\ D_C(h, C) \end{pmatrix}$$

Se definen los límites del intervalo de integración (tomamos un tiempo final de 4 h expresado en segundos) y el número de puntos de salida de la solución:

$$t_f := 4 \cdot 3600 \text{ (s)} \quad N := 200$$

Se define el vector de condiciones iniciales de las variables de estado. Cabe destacar que se ha decidido que  $h$  sea la primera variable de estado y  $C$  la segunda, por tanto, este orden debe mantenerse tanto en la definición del vector de condiciones iniciales como en la extracción de la solución.

$$X_0 := \begin{pmatrix} h_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

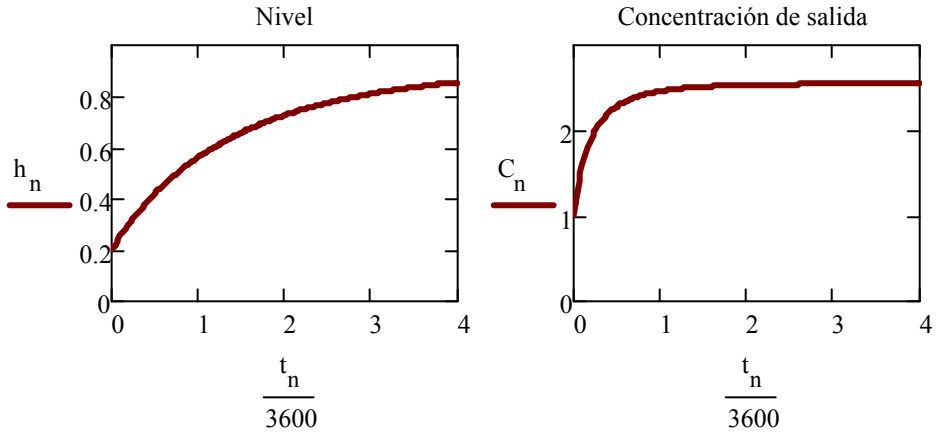
Se aplica un método numérico de integración:

$$\text{SOL} := \text{AdamsBDF}(X_0, 0, t_f, N, D)$$

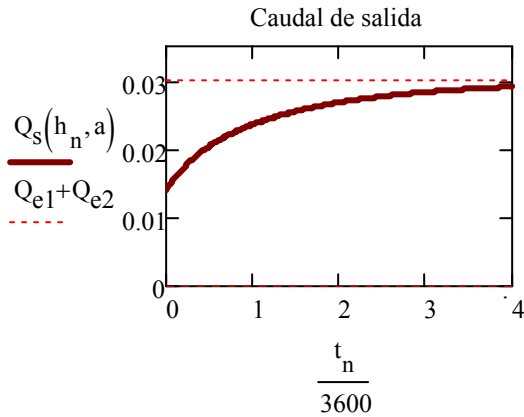
Finalmente, se extrae y representa la solución:

$$\begin{pmatrix} t \\ h \\ C \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{SOL}^{\langle 0 \rangle} \\ \text{SOL}^{\langle 1 \rangle} \\ \text{SOL}^{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix}$$

$n := 0..N$



Se observa como la altura del fluido y el nivel de concentración en el tanque aumentan, tendiendo a sus valores estacionarios. Para la altura final, el caudal de salida tiende a igualarse con el caudal total entrante.



Apartado 2:

En la figura se aprecia que se está cerca de un estado estacionario, siendo los últimos valores:

$$h_N = 0.855 \text{ (m)} \quad C_N = 2.549 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

Se toman estos valores como valores de partida en el cálculo exacto del valor estacionario.

Para seguir leyendo hacer click [aquí](#)