



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Fundamentos sobre opciones financieras: Una revisión desde una perspectiva matemática

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Navarro Quiles, Ana (jccortes@imm.upv.es ; annaqui@posgrado.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas



1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se introducen los conceptos fundamentales sobre un tipo de productos financieros denominados opciones o derivados sobre una acción. El trabajo está orientado a introducir, desde una perspectiva matemática, las principales características de este tipo de contratos financieros. Específicamente se describen mediante funciones matemáticas definidas a trozos los beneficios que pueden ofrecer a vencimiento este tipo de productos financieros y se discuten las posiciones que adopta el inversor que adquiere cada uno de los tipos de contratos existentes, así como las posiciones de mercado de su contrapartida.

2 Introducción

Los mercados financieros, en gran medida, gobiernan muchas de las decisiones que afectan a las sociedades, y por tanto en particular a las personas. Disponer de métodos cuantitativos fiables, que complementen la descripciones cualitativas, para predecir el valor de los productos que se negocian en los mercados financieros es un objetivo claramente importante. En este sentido la Matemática ha desarrollado un papel fundamental a través de los potentes métodos econométricos. Este rol ha tenido particular relevancia en las aportaciones relativas a la descripción de la dinámica temporal de productos financieros complejos. En estas páginas se realiza una introducción a un tipo de productos financieros denominados derivados (**derivatives**) cuyo valor se *deriva* o apoya en el valor de un subyacente, que habitualmente es una acción (pero puede ser cualquier otro bien intangible o tangible). El objetivo de este trabajo es mostrar en futuras aportaciones, que se apoyarán en las ideas desarrolladas en este trabajo, métodos matemáticos que expliquen cómo determinar las primas o precios que fijan los agentes comercializadores de este tipo de productos financieros complejos. También es un objetivo importante discutir los aspectos financieros más importantes que se deducen desde la modelización matemática.

Como muchos de los conceptos que aparecerán a lo largo de estas páginas se usan en los mercados financieros en su terminología sajona, hemos decidido incorporar en letra negrita la correspondiente denominación para enriquecer la lectura.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Definir los conceptos y definiciones básicos que están involucrados en el estudio de opciones financieras de compra y venta.
- Determinar gráfica y algebraicamente los beneficios que arrojan las opciones financieras de compra y de venta.
- Determinar la visión del mercado que tiene el propietario de una opción de compra y de venta y de su contrapartida, así como los riesgos asociados a ambas posiciones.



4 Opciones sobre acciones (*stock options*)

Vamos a empezar revisando los principales conceptos, definiciones, notación, terminología, etc., que se utiliza habitualmente en el contexto de las opciones financieras, y que se utilizarán profusamente a lo largo de estas páginas.

Una opción (**option**) es un contrato que se firma en un momento temporal t_0 emitido sobre un subyacente (**underlying**) de modo que en un determinado momento posterior a la firma del contrato, denominado vencimiento (**maturity** o **expiration**), otorga un derecho (normalmente a comprar o vender el subyacente) al propietario o tenedor del contrato (**holder** o **buyer**) y una obligación a su contrapartida o vendedor (**writer** o **seller**). Por tener el derecho, el propietario del contrato paga en t_0 una prima (**prime**). Si el tenedor del contrato ejerce su derecho, en el vencimiento T pagará o recibirá (dependiendo, como veremos a continuación, del tipo de opción que se trate) una cantidad estipulada al inicio del contrato, que se denomina precio de ejercicio (**strike**).

Dependiendo de las especificaciones del contrato, existen diferentes tipos de opciones:

- Opción de compra (**Call option**): este contrato da derecho, al propietario o tenedor del contrato, a comprar el subyacente al vencimiento T del contrato. En ese momento el tenedor de la opción de compra pagará el precio de ejercicio al vendedor, y éste estará obligado a entregar el subyacente al propietario de la opción. Si el derecho de compra solo se puede ejercer en el instante final T , la **call** se llama europea (**European Call**) y si el derecho de compra se puede ejercer en cualquier instante t de la vida del contrato, es decir, $t_0 < t \leq T$, la **call** se llama americana (**American Call**).
- Opción de venta (**Put option**): este contrato da derecho, al propietario o tenedor del contrato, a vender el subyacente al vencimiento T del contrato. En ese momento el propietario de la opción de venta entregará a su contrapartida el subyacente y éste estará obligado a pagar al tenedor de la **put** el precio de ejercicio. Cuando el derecho de venta solo se puede ejercer al vencimiento T , la **put** se llama europea (**European Put**), mientras que si el derecho se puede ejercer en cualquier instante t de la vida del contrato, es decir, $t_0 < t \leq T$, la **put** se llama americana (**American Put**).

Es importante subrayar que mientras que en un contrato

- **Call**, tanto la prima como el precio de ejercicio lo paga el tenedor del contrato, y el dueño del subyacente es el vendedor.
- **Put**, la prima la paga el tenedor del contrato, quien a su vez es el propietario del subyacente, y en su contrapartida quien paga el precio de ejercicio.

Usualmente se utiliza la denominación posición corta (**short position**) a quien vende (o tiene obligación sobre) la opción y posición larga (**long position**) a quien compra (o tiene derecho sobre) la opción.

Para mayor claridad, en la Tabla 1 se resumen los principales derechos y obligaciones y la posición de las dos partes (tenedor y vendedor) de un contrato de opción de compra y de venta. En la Tabla 2 se detallan los principales aspectos de los contratos **call** y **put**.



OPCIÓN	Tenedor (holder)	Vendedor (writer)
Call (Comprar)	Derecho	Obligación
Put (venta)	Derecho	Obligación
Posición	Larga	Corta

Tabla 1. Derechos/Obligaciones y posiciones del tenedor y el vendedor de una opción **call** y de una opción **put**.

	Tenedor (holder)		Vendedor (writer)	
	CALL	PUT	CALL	PUT
Propietario del subyacente	---	si	si	---
Pago de la prima	si	si	---	---
Pago del precio de ejercicio	si	---	---	si

Tabla 2. Detalle de las características de los contratos de **call** y **put**.

5 El rol financiero de los contratos de opciones

Los contratos de opciones tienen principalmente dos funciones en los mercados financieros:

- Cobertura (**hedge**): mediante esta estrategia se consigue reducir el riesgo de la posición que se adopta en el mercado al hacer una inversión.
- Apalancamiento (**Leverage**): mediante esta estrategia se consigue con poco efectivo tomar una posición en el mercado que puede tener un importante efecto en la rentabilidad de la inversión sin haber comprado el producto subyacente (una acción, por ejemplo).

Veamos algunos ejemplos que ilustren las funciones anteriores:

- Ejemplo de estrategia de cobertura con una opción **put**. Supongamos que poseemos 1000 acciones de una compañía cuyo precio es 50€/acción. Corremos el riesgo de que la cotización de la acción baje. Para cubrirnos podemos comprar una opción **put** que venza dentro de 3 meses con un precio de ejercicio $K = 45€$. Esto nos dará derecho a vender la acción en 3 meses al precio 45€/acción si la acción valiese en 3 meses menos de 45€, por lo que nos cubriremos ante el riesgo de caída del precio de la acción. Para tener ese derecho pagamos a día de hoy 2€/acción, es decir, un total de 2000€. Con esta prima cubrimos los 50000€ que vale a día de hoy nuestra inversión. Obsérvese que si dentro de 3 meses las acciones cotizan, por ejemplo a 35€/acción, y no hubiéramos comprado la opción **put** perderíamos $(50 - 35) \times 1000 = 15000€$, mientras que comprando la **put** las pérdidas se reducen



considerablemente a $(50 - 45) \times 1000 = 5000€$ con una pequeña inversión de 2000€ que sumadas a las pérdidas arroja un valor total de $5000 + 2000 = 7000€$, cantidad que es menor que si no hubiéramos comprado la opción de venta.

- Ejemplo de estrategia de apalancamiento con una opción **call**. Supongamos que una acción de una compañía vale 100€ y que un inversor dispone de 500€, por tanto, el inversor puede adquirir solo 5 acciones. Si el inversor piensa que la acción subirá en los próximos meses puede utilizar las opciones **call** para apalancarse con su escaso efectivo y especular sobre las acciones, en lugar de comprarlas directamente. Ahora, supongamos que el precio de una opción **call** con precio de ejercicio 100€ es 2€. De este modo el inversor puede adquirir 250 opciones **call** (ahora ignoramos las comisiones para simplificar la exposición). Si en el vencimiento de la **call** la acción vale 110€, ejerceremos nuestro derecho de compra de la acción y nos embolsaremos $250 \times (110 - 100) = 2500€$, mientras que si hubiéramos comprado la acción habríamos ganado $5 \times (110 - 100) = 50€$. Por tanto, el retorno con la opción **call** es del 500% sobre la inversión y con la compra de las acciones es del 10% sobre la inversión. Esto es el apalancamiento. Por supuesto, si al vencimiento de la opción **call**, la acción vale menos de 100€ (el precio de ejercicio), se habrá perdido la prima inicial ($2 \times 250 = 500€$). Por tanto, al adquirir una opción **call** se tiene una visión alcista de la acción, pues se piensa que subirá el precio y por tanto al vencimiento se ejercerá la opción de compra sobre la acción.

6 Diagramas de pago de las opciones

Cuando se compra una opción **call** o **put** se adquiere un derecho de compra o de venta, respectivamente. Es por tanto natural plantearnos ahora la siguiente pregunta:

¿Cuándo se ejercerá una opción call/put?

Si se trata de una opción de tipo **call (put)** europea, el derecho se podrá ejercer únicamente al vencimiento T . En ese momento, si el valor del subyacente, S_T , es mayor (menor) que el precio de ejercicio K , $S_T > K$ ($S_T < K$), el propietario de la **call (put)** ejercerá su derecho y pagará (recibirá) el precio de ejercicio K y recibirá (entregará) el subyacente. Estas mismas ideas son válidas para opciones americanas sustituyendo T por t , siendo $t: t_0 < t \leq T$.

La terminología recogida en la Tabla 3 se utiliza de forma estándar para indicar a vencimiento del contrato de una opción europea, la relación de orden del valor del subyacente, S_T , y el precio del ejercicio K .

Un aspecto importante que merece la pena dejar claro es que aunque se ejerza la opción (es decir, esté ITM), esto no implica que el propietario de la opción tenga un beneficio. Esto es debido a que el coste de la posición inicial, las comisiones, etc. son ignoradas en nuestra presentación (y en la mayoría de la literatura disponible) y ello podría hacer que el retorno obtenido con el ejercicio de la opción fuese negativo, es decir, una pérdida. Sin embargo, el derecho de ejercicio se realiza, en ese caso, para disminuir las pérdidas totales.



Posición	¿Se ejerce la opción?	CALL	PUT
En el dinero/ITM (in the money)	Si	$S_T > K$	$S_T < K$
Al dinero/ATM (at the money)	Indiferente	$S_T = K$	$S_T = K$
Fuera del dinero/OTM (out of the money)	no	$S_T < K$	$S_T > K$

Tabla 3. Terminología para opciones **call** y **put** europeas a vencimiento, en función de si hay ejercicio o no de la opción.

En la Figura 1 se muestran las gráficas de los beneficios brutos o **pay-off** para posiciones cortas y largas de opción de compra y de venta al vencimiento T .

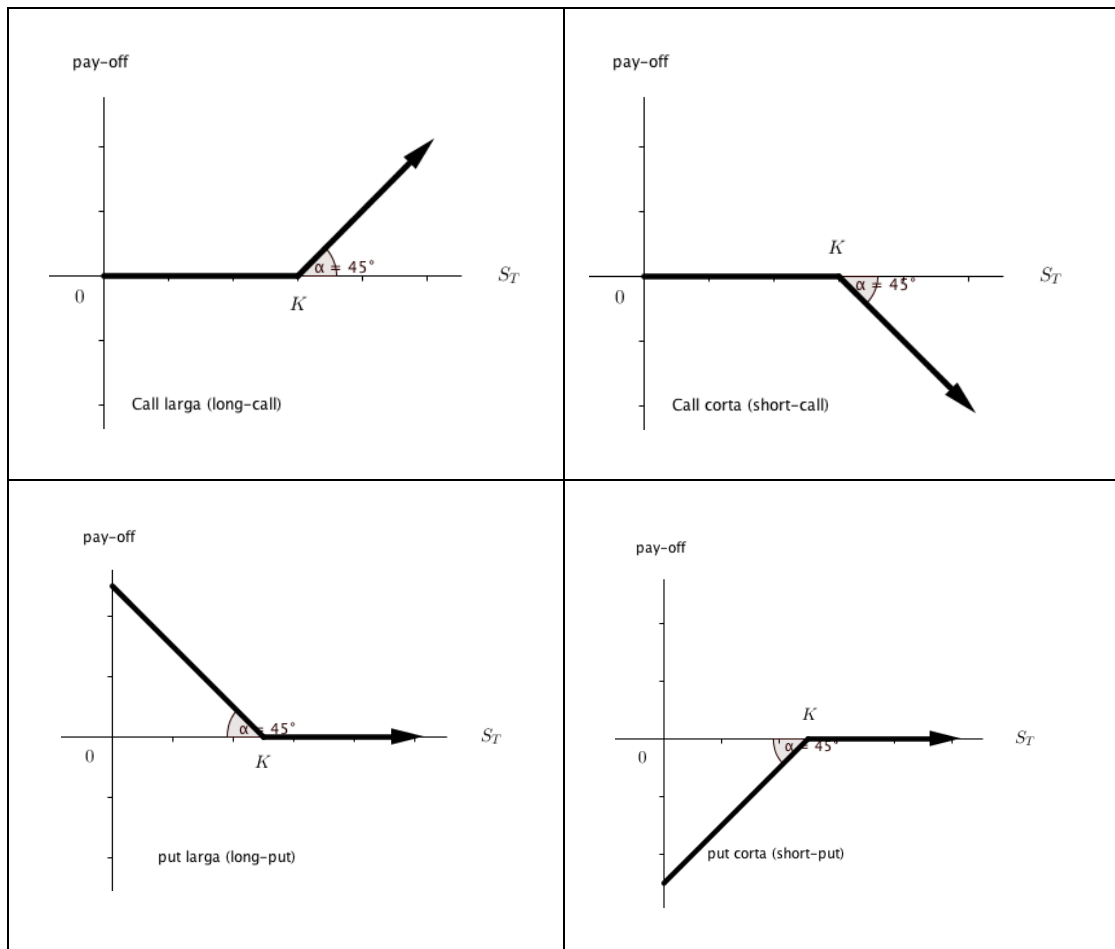


Figura 1. Diagramas de beneficios brutos o **pay-off** para posiciones cortas y largas de opción de compra y de venta al vencimiento T .

Obsérvese que la pendiente de las rectas es ± 1 , ya que, el **pay-off** es de la misma magnitud que el subyacente.



Por tanto, dado que la opción solo se ejerce cuando el **pay-off** es positivo se tienen las relaciones mostradas en la Ec.1.

$$\begin{cases} \text{pay-off (long call)} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+, \\ \text{pay-off (long put)} = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+. \end{cases}$$

Ecuación 1. Valores del **pay-off** para posiciones largas de compra (**call**) y de venta (**put**).

Si incluimos el coste de la prima (C para una **call** y P para una **put**), las funciones de beneficios/pérdidas (B/P) de una **call** y una **put** para las distintas posiciones corta y larga serán las mostradas en la Ec.2.

$$(B/P)_{CL}(S_T) = \begin{cases} -C & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ S_T - (C + K) & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

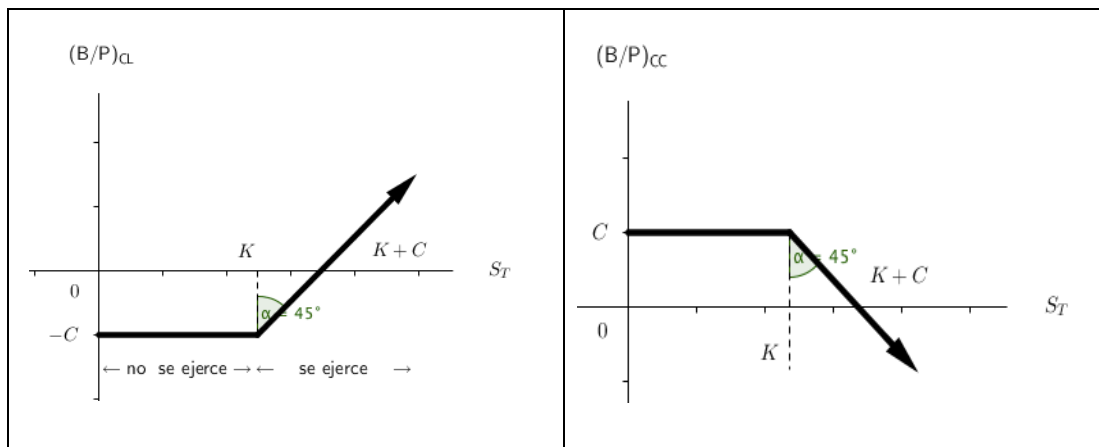
$$(B/P)_{CC}(S_T) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ -S_T + (C + K) & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

$$(B/P)_{PL}(S_T) = \begin{cases} -S_T + (K - P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ -P & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

$$(B/P)_{PL}(S_T) = \begin{cases} P & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ S_T - (K - P) & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Ecuación 2. Función de beneficios/perdidas (B/P) de una posición corta (C) y de una posición larga (L) de una **call** (C) y de una **put** (P) de primas C y P , respectivamente, precio de ejercicio K y vencimiento T .

En la Fig. 2 se han representado las funciones de la Ec.2.



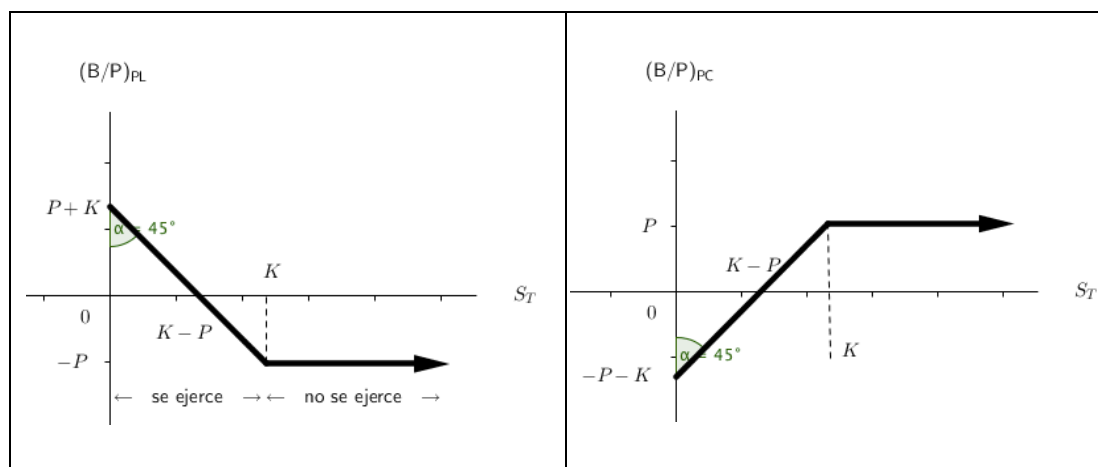


Figura 2. Representación gráfica de las funciones de beneficios/pérdidas dadas en la Ec.2.

Todas las gráficas de posiciones largas poseen una zona crítica del valor del subyacente a vencimiento donde a pesar de que hay pérdidas, el tenedor del contrato ejerce su derecho. Estas zonas críticas son:

- **Call** larga: $S_T \in [K, K + C]$.
- **Put** larga: $S_T \in [K - P, K]$.

Cuando a vencimiento el subyacente toma un valor en estos intervalos, el propietario de la opción ejerce su derecho para reducir sus pérdidas. Veámoslo con ejemplos:

- Si adquirimos hoy una opción **call** europea sobre la compra de un ordenador que actualmente vale 1500€ para comprarlo dentro de tres meses a 1200€ ($K = 1200$) y pagamos por ello una prima de 100€ ($C = 100$), entonces si pasados los tres meses el ordenador en el mercado tiene un precio comprendido en el rango $[1200, 1200 + 100] = [1200, 1300]$, por ejemplo, 1230€, ejerceremos nuestro derecho de compra y pagaremos 1200€, porque acudir al mercado libre nos costaría 1230€, es decir, más caro. Obsérvese que en realidad hemos tenido 70€ de pérdidas, $1230 - (1200 + 100) = -70$ €, ya que en total hemos gastado $1200 + 100 = 1300$ €, pero podríamos haber adquirido el ordenador por 1230€ si no hubiéramos adquirido la opción **call**. Ahora bien, siendo que al principio hemos comprado la **call** es mejor ejercerla porque sino la adquisición del ordenador implicaría gastarnos $100 + 1230 = 1330$ €, en lugar de 1300€.
- Y si por ejemplo, asumiendo el mismo precio actual del ordenador que en el ejemplo anterior, 1500€, adquirimos una **opción put** europea para vender el ordenador dentro de tres meses a 1800€ ($K = 1800$ €), pagando por ello una prima de 100€ ($P = 100$ €), entonces si pasados los tres meses en el mercado el ordenador tiene un precio que pertenece al intervalo $[1800 - 100, 1800] = [1700, 1800]$, por ejemplo, 1755€, ejerceremos nuestro derecho a vender el ordenador a 1800€, aunque, como veremos a continuación, ello acarrea pérdidas. A vencimiento entregaremos el ordenador y recibiremos 1800€, y con ello tenemos $-1755 + (1800 - 100) = -55$ € de pérdidas. Ahora bien, si no ejercemos el derecho de venta que nos da la **put** la pérdidas hubieran sido mayores, concretamente 100€ de la prima pagada al principio del contrato.



Lectura de las gráficas de las funciones de beneficios/perdidas de las opciones de compra y venta.

Las gráficas de la Figura 2 arrojan mucha información interesante sobre los contratos de opciones europeas de compra y venta en la fecha de vencimiento T , que es el momento crítico en que puede ejercerse el derecho que otorga la opción a su propietario. A continuación se detallan estas características, para cuya deducción es conveniente tener en cuenta tanto las expresiones algebraicas dadas en la Ec.2 como las representaciones gráficas de la Fig.2.

Long Call (opción de compra larga)

- Pérdidas limitadas a la prima. Las pérdidas se mueven en el intervalo $[-K, 0]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[0, K + C]$, es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K + C \Rightarrow \text{Pérdidas} \in [-K, 0].$$

- Beneficios potencialmente ilimitados. Los beneficios se mueven en el intervalo $[0, +\infty[$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[K + C, +\infty[$, es decir,

$$\text{Si } K + C \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, +\infty[.$$

- Visión alcista del subyacente, ya que, para que haya beneficios se espera que a vencimiento el valor del subyacente aumente.
- Una opción de compra debe ejercerse cuando a vencimiento el subyacente supere el precio de ejercicio.

Short Call (opción de compra corta)

- Pérdidas potencialmente ilimitadas. Las pérdidas se mueven en el intervalo $] -\infty, 0]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[K + C, +\infty[$, es decir,

$$\text{Si } K + C \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Pérdidas} \in] -\infty, 0].$$

- Beneficios limitados a la prima. Los beneficios se mueven en el intervalo $[0, K]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[0, K + C]$, es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K + C \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, K].$$

- Visión bajista del subyacente, ya que se espera que a vencimiento su valor disminuya, en cuyo caso tendremos beneficios.

Long Put (opción de venta larga)

- Pérdidas limitadas a la prima. Las pérdidas se mueven en el intervalo $[-K, 0]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[K - P, +\infty[$, es decir,

$$\text{Si } K - P \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Pérdidas} \in [-K, 0].$$

- Beneficios limitados. Los beneficios se mueven en el intervalo $[0, P + K]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[0, K - P]$, es decir,



$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K - P \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, P + K].$$

- Visión bajista del subyacente, ya que se espera que a vencimiento su valor disminuya, en cuyo caso nos encontraremos en la zona de beneficios.
- Una opción de venta debe ejercerse cuando a vencimiento el subyacente tengo un precio menor al precio de ejercicio.

Short Put (opción de venta corta)

- Pérdidas limitadas a la prima más el precio de ejercicio. Las pérdidas se mueven en el intervalo $[-P - K, 0]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[0, K - P]$, es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K - P \Rightarrow \text{Pérdidas} \in [-K - P, 0].$$

- Beneficios limitados a la prima. Los beneficios se mueven en el intervalo $[0, P]$ al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo $[K - P, +\infty[$, es decir,

$$\text{Si } K - P \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, P].$$

- Visión alcista del subyacente, ya que se espera que a vencimiento su valor aumente para movernos en la zona de beneficios.

Finalmente, es conveniente también conocer la siguiente terminología estándar, respecto de las posiciones optimistas (valor alcista del subyacente) y pesimistas (valor bajista del subyacente) del mercado: las posiciones **long call** y **short put** son optimistas, también llamadas **bullish/optimistic positions**, mientras que las posiciones **short call** y **long put** son pesimistas, también llamadas **bearish/pessimistic positions**.

7 Cierre

En estas páginas se ha visto un tipo de contratos financieros, denominados opciones (de compra y de venta) que permiten realizar inversiones mediante apalancamiento o adoptar posiciones de cobertura. Se han descrito, con ayuda de la formulación matemática, los diagramas de beneficio/pérdida del tenedor del contrato y de su contrapartida. Hemos mostrado cómo esta descripción matemática es muy útil para comprender con claridad la visión de quien adopta distintas estrategias en el mercado al invertir en estos productos. En posteriores trabajos se estudiarán productos financieros más complejos, concretamente los denominados derivados sintéticos, para cuya comprensión será de gran utilidad el estudio mostrado en este trabajo.

8 Bibliografía

[1] J.C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 5ª edición, 2003.

Se trata de un texto excelente donde puede encontrarse una introducción a las opciones financieras desde un enfoque que combina los aspectos cualitativos financieros con un nivel matemático elemental.