

Resumen

La presente tesis doctoral se centra en la construcción de esquemas en diferencias finitas y el análisis numérico de relevantes modelos de valoración de opciones que generalizan el modelo de Black-Scholes. Se proporciona un análisis cuidadoso de las propiedades de las soluciones numéricas tales como la positividad, la estabilidad y la consistencia.

Con el fin de manejar la frontera libre que surge en los problemas de valoración de opciones Americanas, se aplican y se estudian diversas técnicas de transformación basadas en el método de fijación de las fronteras (front-fixing). Se presta especial atención a la valoración de opciones de múltiples activos, como son las opciones "exchange" y "spread". Se propone una transformación apropiada que permite la eliminación del término de derivadas cruzadas. Se estudian también técnicas de transformación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para eliminar términos de convección y de reacción con el propósito de simplificar los modelos y evitar posibles problemas de estabilidad.

Esta tesis se compone de seis capítulos. El primer capítulo es una introducción que contiene las definiciones de opción y términos relacionados y la derivación de la ecuación de Black-Scholes, así como aspectos generales de la teoría de los esquemas en diferencias finitas, incluyendo preliminares de análisis numérico.

El capítulo 2 está dedicado a resolver el modelo lineal de Black-Scholes para opciones Americanas put y call. Para fijar las fronteras del problema de frontera libre se aplican transformaciones como la de Landau y un nuevo cambio de variable propuesto. Esto lleva a una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal en un dominio fijo. Se proponen esquemas numéricos explícitos estables y consistentes que preservan la positividad y monotonidad de la solución de acuerdo con el comportamiento de la solución exacta.

La eficiencia del método front-fixing mostrada en el capítulo 2 ha motivado el estudio de su aplicación a algunos modelos no lineales más complicados. En particular, se propone un cambio de variables que lleva a una nueva frontera dependiente del tiempo en lugar de una fija. Este cambio se aplica a modelos no lineales de Black-Scholes para opciones Americanas, como son el de Barles y Soner y el modelo RAPM (Risk Adjusted Pricing Methodology). Se construye un algoritmo numérico eficiente para el caso general de volatilidad no constante en la sección 3.1. Con el fin de resolver la ecuación, se proponen varios métodos de diferencias finitas, incluyendo métodos explícitos, implícitos y ADE (Alternating Direction Explicit). Se proponen asimismo nuevas modificaciones del método de Newton para la solución de los sistemas no lineales derivados. En la sección 3.2 se aplica por primera vez el método front-fixing a un problema de valoración de opciones con cambio de regímenes. Dado que en este modelo hay varios regímenes, aparecen varias fronteras libres por lo que la transformación de variables lleva a un sistema de ecuaciones no lineales. Este sistema se resuelve con un esquema en diferencias finitas explícito. Mediante el enfoque de Von Neumann se prueba la estabilidad del esquema.

El capítulo 4 ofrece una nueva técnica para la resolución de problemas de valoración de opciones Americanas basada en la racionalidad de los inversores. Aparece una función de la intensidad que se puede reducir en el caso más simple a la técnica de penalización (penalty

method). Este enfoque tiene en cuenta el posible comportamiento irracional de los inversores. En la sección 4.2 se aplica esta técnica al modelo de cambio de regímenes lo que lleva a un nuevo modelo que tiene en cuenta el posible ejercicio irracional, así como varios estados del mercado. El enfoque del parámetro de racionalidad junto con una transformación logarítmica permiten construir un esquema numérico eficiente sin aplicar el método front-fixing o la conocida formulación de LCP (Linear Complementarity Problem). Se propone una familia de esquemas ponderados tanto para opciones americanas de tipo vanilla como para el modelo de cambio de regímenes. Se estudian las propiedades cualitativas de la función de intensidad y de las soluciones numéricas.

El capítulo 5 se dedica a la valoración de opciones de activos múltiples. Una transformación apropiada permite la eliminación del término de derivadas cruzadas evitando inconvenientes computacionales y posibles problemas de estabilidad.

Las conclusiones se muestran en el capítulo 6. Se pone en relieve varios aspectos de la presente tesis. Todos los modelos considerados y los métodos numéricos van acompañados de varios ejemplos y simulaciones. Se estudia la convergencia numérica que confirma el estudio teórico de la consistencia. Las condiciones de estabilidad son corroboradas con ejemplos numéricos. Los resultados se comparan con métodos relevantes de la bibliografía mostrando la eficiencia de los métodos propuestos.