

**TRABAJO FINAL**  
**MÁSTER EN DIRECCIÓN FINANCIERA Y FISCAL**  
**FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS**



---

**MODELOS DINÁMICOS ESTOCÁSTICOS DE PASO  
TEMPORAL VARIABLE PARA SUBYACENTES COTIZADOS**

**IMPLEMENTACIÓN WEB EN TIEMPO REAL USANDO  
PROGRAMACIÓN VERSÁTIL**

---



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

**CURSO 2015-2016**

**Autor:**  
David Argilés Ortiz

**Directores:**  
Dr. Juan Carlos Cortés López  
Dr. Rafael Jacinto Villanueva Micó



# ÍNDICE

Agradecimientos.....	3
Índice de Figuras.....	5
Índice de Gráficos.....	6
Índice de Tablas.....	8
Resumen.....	13
Objetivos.....	15
1. Introducción.....	17
1.1 El sistema financiero.....	17
1.2 La Bolsa de Valores.....	19
1.3 Subyacentes representativos sectoriales.....	21
2. Dos modelos estocásticos para subyacentes cotizados.....	25
2.1 Preliminares estocásticos.....	25
2.1.1 Proceso estocástico de Wiener: definición y propiedades.....	25
2.1.2 Proceso de Markov.....	27
2.1.3 Método de máxima verosimilitud.....	28
2.1.4 Contrastes de hipótesis.....	30
2.1.5 Medidas de bondad de ajuste.....	32
2.2 El modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico.....	33
2.3 Modelo diario.....	35
2.3.1 Estimación puntual de los parámetros.....	35
2.3.2 Estimación probabilística por intervalos de confianza de los parámetros.....	39
2.3.3 Predicción puntual a corto plazo.....	40
2.3.4 Predicción probabilística por intervalos de confianza a corto plazo.....	41
2.3.5 Resultados obtenidos empleando predicción puntual a corto plazo.....	42
2.3.6 Predicción puntual paso a paso.....	53
2.3.7 Predicción probabilística por intervalos de confianza paso a paso.....	54
2.3.8 Resultados obtenidos empleando predicción puntual paso a paso.....	55
2.4 Modelo semanal.....	65
2.4.1 Estimación puntual de parámetros.....	65
2.4.2 Estimación probabilística por intervalos de confianza de los parámetros.....	66
2.4.3 Predicción puntual a corto plazo.....	67
2.4.4 Predicción probabilística por intervalos de confianza a corto plazo.....	67

2.4.5	Resultados obtenidos empleando predicción puntual a corto plazo.....	68
2.4.6	Predicción puntual paso a paso. ....	75
2.4.7	Predicción probabilística por intervalos de confianza paso a paso. ....	75
2.4.8	Resultados obtenidos empleando predicción puntual paso a paso. ....	76
2.5	Contrastes de hipótesis para la comparación de la tasas de rendimiento del modelo diario y del modelo semanal.....	80
2.5.1	Test de razón de verosimilitudes. ....	80
2.5.2	Test de tipo ANOVA.....	82
2.6	Contrastes de hipótesis para la comparación de la tasas de rendimiento entre días diferentes en el modelo semanal. ....	83
3.	Publicación automatizada de resultados en Internet. ....	93
3.1	Implementación de los modelos diario y semanal en Google Spreadsheets. ....	93
3.2	Creación de página web en Wordpress para la publicación automatizada de los modelos diario y semanal. ....	94
3.2.1	Instalación y configuración básica de Wordpress. ....	96
3.2.2	Personalización y desarrollo de sub-menús.....	101
3.2.3	Visualizer: plug-in de gráficos en Wordpress.....	105
3.2.4	Implementación de la publicación automatizada de resultados en Internet. ..	106
	Conclusiones.....	111
	Bibliografía.....	113

## Agradecimientos

*A mi mujer y mi hija, por su apoyo incondicional y paciencia infinita, sacrificando muchos fines de semana para que este trabajo haya podido ser realizado.*

*Al resto de mi familia, por su constante apoyo.*

*A mis directores en este Trabajo Fin de Máster, Juan Carlos Cortés y Rafael Jacinto Villanueva, por su excelente dirección técnica, dedicación y buen hacer. Ojalá hubiera muchos docentes e investigadores como ellos en las universidades españolas.*

*A la Universitat Politècnica de València y sus profesores, a los que estoy muy agradecido por la excelente formación que durante todos estos años he recibido.*

*A todos ellos, muchas gracias de todo corazón.*



## Índice de Figuras

Figura 1. El sistema financiero. ....	17
Figura 2. Evolución del IBEX-35 en los últimos 5 años. ....	20
Figura 3. Evolución comparativa del IBEX-35 y Banco Santander en los últimos 5 años. ....	22
Figura 4. Evolución comparativa del IBEX-35 e Iberdrola en los últimos 5 años. ....	22
Figura 5. Evolución comparativa del IBEX-35 y Telefónica en los últimos 5 años. ....	23
Figura 6. Aspecto del panel de control de webs avanzadas de la Universitat Politècnica de València. ....	95
Figura 7. Página de descarga de Wordpress. ....	96
Figura 8. Creación de base de datos en panel de control. ....	98
Figura 9. Pantalla inicial de instalación de Wordpress. ....	99
Figura 10. Panel de control Wordpress. ....	100
Figura 11. Aspecto inicial de la página web después de la instalación. ....	100
Figura 12. Sub-menú Apariencia, Personalizar: configuración del título de página web e icono. ....	101
Figura 13. Sub-menú Apariencia, Menús: gestión de los elementos del menú. ....	102
Figura 14. Sub-menú Apariencia, Página de inicio: ejemplo de configuración de un objeto tipo "Circlelcon". ....	103
Figura 15. Sub-menú Meta Slider: configuración del carrusel de imágenes. ....	104
Figura 16. Aspecto de la página web personalizada con Wordpress. ....	105
Figura 17. Panel de instalación del plug-in de Wordpress Visualizer. ....	106
Figura 18. Menú de configuración de Google Spreadsheets para publicación en web. ....	107
Figura 19. Biblioteca de gráficos creados con Visualizer. ....	108
Figura 20. Flujo de datos entre Google Spreadsheets – Visualizer – Wordpress. ....	109

## Índice de Gráficos

Gráfico 1. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días – B. Santander.....	44
Gráfico 2. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días - B. Santander. ....	44
Gráfico 3. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del MAPE a 90 días – B. Santander.....	45
Gráfico 4. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del RMSE a 90 días – B. Santander.....	45
Gráfico 5. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola. ....	47
Gráfico 6. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días – Iberdrola. ....	48
Gráfico 7. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del MAPE a 90 días – Iberdrola.....	48
Gráfico 8. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del RMSE a 90 días – Iberdrola.....	49
Gráfico 9. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización 5 días - Telefónica. ....	50
Gráfico 10. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días – Telefónica.....	51
Gráfico 11. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del MAPE a 90 días – Telefónica.....	52
Gráfico 12. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del RMSE a 90 días – Telefónica.....	52
Gráfico 13. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza a 5 días - B. Santander. ....	56
Gráfico 14. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días – B. Santander.....	57
Gráfico 15. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del MAPE a 90 días – B. Santander. ....	57
Gráfico 16. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del RMSE a 90 días – B. Santander. ....	58
Gráfico 17. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza a 5 días - Iberdrola. <i>Fuente: elaboración propia.</i> ....	59
Gráfico 18. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días – Iberdrola. ....	60



Gráfico 19. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del MAPE a 90 días – Iberdrola.....	60
Gráfico 20. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del RMSE a 90 días – Iberdrola.....	61
Gráfico 21. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza a 5 días – Telefónica.....	63
Gráfico 22. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días – Telefónica.....	63
Gráfico 23. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del MAPE a 90 días – Telefónica.....	64
Gráfico 24. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del RMSE a 90 días – Telefónica.....	64
Gráfico 25. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander. ....	69
Gráfico 26. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días – Iberdrola. ....	72
Gráfico 27. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica. ....	74
Gráfico 28. Modelo semanal - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander. ....	77
Gráfico 29. Modelo semanal - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola. ....	78
Gráfico 30. Modelo semanal - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica. ....	79

## Índice de Tablas

Tabla 1. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza - B. Santander. ....	42
Tabla 2. Modelo diario - Predicción puntual de la log-cotización a corto plazo. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander. ....	43
Tabla 3. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza - Iberdrola. ....	46
Tabla 4. Modelo diario - Predicción puntual de la log-cotización a corto plazo. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola. ....	46
Tabla 5. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo de la log-cotización. Parámetros e intervalos de confianza de la log-cotización - Telefónica. ....	49
Tabla 6. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica. ....	50
Tabla 7. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Parámetros del modelo en los 5 días de predicción – Banco Santander. ....	55
Tabla 8. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander. ....	56
Tabla 9. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Parámetros del modelo en los 5 días de predicción – Iberdrola. ....	58
Tabla 10. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola. ....	59
Tabla 11. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Parámetros del modelo en los 5 días de predicción – Telefónica. ....	62
Tabla 12. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica. ....	62
Tabla 13. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza - B. Santander. ....	68
Tabla 14. Modelo semanal - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza a 5 días - B. Santander. ....	69
Tabla 15. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Medidas de bondad de ajuste - B. Santander. ....	70
Tabla 16. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza - Iberdrola. ....	71
Tabla 17. Modelo semanal - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza a 5 días - Iberdrola. ....	71
Tabla 18. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Medidas de bondad de ajuste - Iberdrola. ....	72

Tabla 19. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza – Telefónica.....	73
Tabla 20. Modelo semanal - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza a 5 días - Telefónica.....	74
Tabla 21. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Medidas de bondad de ajuste - Telefónica.....	74
Tabla 22. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización paso a paso. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander.....	76
Tabla 23. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización paso a paso. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola. ....	77
Tabla 24. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización paso a paso. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica.....	79
Tabla 25. Resultado del test de hipótesis (2.5.1) basado en el estadístico (2.5.2). ....	81
Tabla 26. Resultado del test de hipótesis (2.5.3) basado en el estadístico (2.5.4) de un test ANOVA al nivel de significatividad $\alpha = 0.05$ , siendo que el valor crítico de $F \sim F_{4, n-5} = F(4,85)$ es 2.3766, ya que la muestra es de tamaño 90. Si el valor del estadístico $F$ dado en (2.5.4) es menor de 2.3766 se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula $H_0$ definida en (2.5.3).82	
Tabla 27. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los lunes ( $i = 1$ ) con el resto de días de la semana $R_2$ (martes), $R_3$ (miércoles), $R_4$ (jueves) y $R_5$ (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo $n_1 = 18$ , $n_2 = 19$ , $n_3 = 18$ , $n_4 = 18$ y $n_5 = 17$ los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de $n = 90$ datos. Si el valor $Z_{i,j}$ , $j \in \{2,3,4,5\}$ es tal que $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$ se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.....	84
Tabla 28. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los martes ( $i = 2$ ) con el resto de días de la semana $R_1$ (lunes), $R_3$ (miércoles), $R_4$ (jueves) y $R_5$ (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo $n_1 = 18$ , $n_2 = 19$ , $n_3 = 18$ , $n_4 = 18$ y $n_5 = 17$ los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de $n = 90$ datos. Si el valor $Z_{i,j}$ , $j \in \{1,3,4,5\}$ es tal que $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$ se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.....	84
Tabla 29. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los miércoles ( $i = 3$ ) con el resto de días de la semana $R_1$ (lunes), $R_2$ (martes), $R_4$ (jueves) y $R_5$ (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo $n_1 = 18$ , $n_2 = 19$ , $n_3 = 18$ , $n_4 = 18$ y $n_5 = 17$ los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de $n = 90$ datos. Si el valor $Z_{i,j}$ , $j \in \{1,2,4,5\}$ es tal que $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$ se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.....	85

Tabla 30. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los jueves ( $i = 4$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles), y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Banco Santander..... 85

Tabla 31. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los viernes ( $i = 5$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles) y  $R4$  (jueves) y, mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Banco Santander..... 86

Tabla 32. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los lunes ( $i = 1$ ) con el resto de días de la semana  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles),  $R4$  (jueves) y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in 2,3,4,5$  es tal que  $Z_{i,j} \in -1.96,1.96$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Iberdrola. .... 86

Tabla 33. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los martes ( $i = 2$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R3$  (miércoles),  $R4$  (jueves) y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Iberdrola. .... 87

Tabla 34. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los miércoles ( $i = 3$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R4$  (jueves) y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Iberdrola. .... 87

Tabla 35. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los jueves ( $i = 4$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles), y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Iberdrola. .... 88

Tabla 36. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los viernes ( $i = 5$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles) y  $R4$  (jueves) y, mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Iberdrola. .... 88

Tabla 37. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los lunes ( $i = 1$ ) con el resto de días de la semana  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles),  $R4$  (jueves) y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{2,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Telefónica. .... 89

Tabla 38. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los martes ( $i = 2$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R3$  (miércoles),  $R4$  (jueves) y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Telefónica. .... 89

Tabla 39. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los miércoles ( $i = 3$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R4$  (jueves) y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Telefónica. .... 90

Tabla 40. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los jueves ( $i = 4$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles), y  $R5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Telefónica. .... 90

Tabla 41. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los viernes ( $i = 5$ ) con el resto de días de la semana  $R1$  (lunes),  $R2$  (martes),  $R3$  (miércoles) y  $R4$  (jueves) y, mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n1 = 18$ ,  $n2 = 19$ ,  $n3 = 18$ ,  $n4 = 18$  y  $n5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96,1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H0$ . Subyacente: Telefónica. .... 91



## Resumen

La Bolsa de Valores proporciona información relevante para la adecuada valoración de la cotización de subyacentes ya que pone en un mismo plano la oferta y la demanda, es decir, lo que el mercado está dispuesto a pagar por ellos.

La evolución de la cotización de los subyacentes está influenciada por muchos factores entre los que cabe destacar la coyuntura económica, los tipos de interés, la inflación, la política monetaria y las tensiones políticas, entre otros.

En el presente Trabajo Fin de Máster (TFM) se ha desarrollado dos modelos, diario y semanal, para la modelización de la evolución temporal de una variable aleatoria, en este caso la cotización, de cada unos de los tres subyacentes elegidos bajo estudio. Estos tres subyacentes, pertenecientes al IBEX-35, han sido seleccionados por su elevada capitalización bursátil al considerarse representativos de determinados sectores: Banco Santander (banca), Iberdrola (energía) y Telefónica (telecomunicaciones).

El modelo 1, o modelo diario, consiste en predecir las cotizaciones del subyacente cada día a cierre de la Bolsa. El modelo 2, o modelo semanal, consiste en 5 sub-modelos, uno para cada día de la semana de actividad bursátil (de lunes a viernes), que pretende analizar si existe un efecto respecto del día de la semana en que cotiza el subyacente.

A partir del modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico, se modeliza el comportamiento de una acción o subyacente descrito por una ecuación diferencial estocástica que resolveremos aplicando el cálculo estocástico de Itô, y cuya solución es un proceso de Markov de primer orden. Trabajaremos con log-cotizaciones ya que, como veremos en el desarrollo del trabajo, las log-cotizaciones poseen importantes propiedades estadísticas que permiten aprovechar los resultados teóricos de la Teoría de la Probabilidad y la Estadística para construir, a partir de ellas, un modelo robusto, fiable y computacionalmente asequible. Las buenas propiedades de las log-cotizaciones son heredadas a partir de las que posee el Movimiento Browniano o proceso de Wiener, que es la fuente de modelización de la incertidumbre o el ruido en el modelo Log-normal. Concretamente, el movimiento browniano tiene incrementos independientes, estacionarios y gaussianos.

Para la estimación puntual de los parámetros del Modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico se hará uso del método de máxima verosimilitud (maximización de la función de log-verosimilitud) junto con una aproximación asintótica basada en la inversa de la matriz de información de Fisher. Ello nos permitirá la obtención de estimaciones

probabilísticas basadas en intervalos con un nivel de confianza del 95%. Todo ello es necesario para poder confeccionar el método de predicción a corto plazo basado en predicciones puntuales y estimaciones probabilísticas por intervalos de confianza. La predicción a corto plazo consiste en observar el proceso estocástico de las log-cotizaciones hasta el instante  $n$ , y predecirlo para los instantes posteriores. El criterio aplicado es el de minimizar el error cuadrático medio de las predicciones de las log-cotizaciones.

También obtendremos la predicción puntual paso a paso que, a partir del método de predicción puntual a corto plazo, incorpora las últimas log-cotizaciones reales disponibles en cada nuevo paso para realizar la siguiente estimación probabilística.

Una vez aplicados los modelos diario y semanal, con estimación a corto plazo y paso a paso, se procede a aplicar los contrastes de hipótesis que permitirán determinar si existe una diferencia estadísticamente significativa entre el modelo diario y semanal, así como entre un día de la semana y otro en cuanto a sus rendimientos. Para ello, se implementa un test de razón de verosimilitudes, un test de tipo ANOVA (análisis de la varianza) y un contraste de hipótesis para determinar si existen diferencias significativas entre las tasas de rendimiento entre los diferentes días de la semana, esto es, entre el modelo diario y semanal.

Adicionalmente, también se calcularán medidas de bondad de ajuste para la validación de los modelos diario y semanal, en concreto, el error porcentual absoluto medio (Mean Absolute Percentage Error, MAPE) y el error cuadrático medio (Root Mean Squared Error, RMSE).

Los resultados de las predicciones, con sus intervalos de confianza, serán publicados en una página web desarrollada con Wordpress, la cual está alojada en los servidores de la Universitat Politècnica de València. Los cálculos que implementan los modelos diario y semanal han sido volcados en una hoja de cálculo que funciona desde Google Spreadsheets, la cual de manera automatizada mediante la ejecución de un script actualiza diariamente las cotizaciones, rehace los cálculos y envía los nuevos resultados a la página web.



## Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster (TFM) es la implementación de dos modelos estocásticos, el modelo diario y el modelo semanal, para la predicción de la cotización de tres subyacentes seleccionados que son representativos de tres sectores muy importantes en la economía española (banca, energía y telecomunicaciones), así como la publicación de los resultados de predicción en una página web desarrollada con Wordpress la cual se actualiza automáticamente con la última cotización disponible.

Todo ello se pretende conseguir mediante:

- La modelización del comportamiento de una acción o subyacente aplicando el modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico y su resolución haciendo uso del cálculo estocástico de Itô.
- La aplicación del método de máxima verosimilitud para la estimación puntual de los parámetros del modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico.
- La obtención de los intervalos de confianza con un nivel de confianza del 95%.
- El desarrollo de un método de predicción a corto plazo y un método de predicción puntual paso a paso.
- El desarrollo de dos modelos, diario y semanal, para la modelización de la evolución temporal de la cotización de tres subyacentes representativos en banca, energía y telecomunicaciones.
- El estudio de los modelos diario y semanal para determinar si existe un efecto respecto de la tasa de rendimiento en función del día de la semana en que cotiza el subyacente.
- La aplicación de contrastes de hipótesis que permitirán determinar si existe una diferencia estadísticamente significativa entre el modelo diario y semanal.
- El cálculo de medidas de bondad de ajuste para la validación de los modelos diario y semanal.
- La publicación en una página web de los resultados obtenidos por el modelo diario y semanal, que se actualizará automáticamente incorporando la última cotización disponible.



# 1. Introducción.

## 1.1 El sistema financiero.

El principal cometido del sistema financiero es canalizar el ahorro de las unidades que tienen superávit de fondos (familias, empresas y sector público ahorradores) hacia las unidades deficitarias (actividad económica real en familias, empresas y sector público), lo cual se lleva a cabo en los mercados financieros en los que intervienen intermediarios financieros que intercambian instrumentos financieros (o activos financieros). Estos instrumentos financieros permiten a los ahorradores obtener un rendimiento determinado en función del riesgo y la liquidez del instrumento financiero seleccionado. Cuanto mayor es el riesgo y menor la liquidez, mayor es el rendimiento.

En la Figura 1 se puede observar cómo interactúan entre sí los diferentes elementos que forman el sistema financiero.

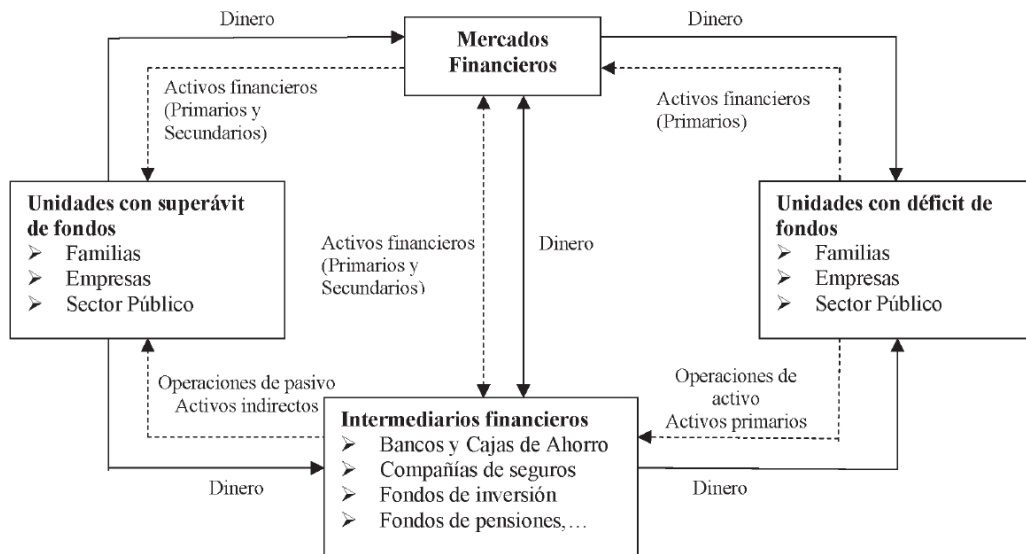


Figura 1. El sistema financiero.

Fuente: Banca y mercados financieros [14].

El riesgo total que asumen las unidades con superávit de fondos es la suma entre lo que se conoce como riesgo sistemático y riesgo no sistemático:

- El riesgo sistemático depende de la evolución global de la economía por lo que es fuertemente dependiente de la situación política general, de las tasas de inflación, de los conflictos mundiales, de los tipos de interés, de las políticas que se adoptan

por los gobiernos y organismos reguladores, etc. Este riesgo no puede eliminarse, es inherente al sistema financiero.

- El riesgo no sistemático es el riesgo específico que se asume por el hecho de invertir en un determinado instrumento financiero y no en otro. No todos los instrumentos financieros ofrecen el mismo grado de liquidez y rendimiento a cambio de un riesgo, que en este caso sería un riesgo no sistemático.

Según I. Barroso [5], en España podemos distinguir los siguientes mercados financieros:

- Mercado monetario o de dinero: se caracteriza por tener activos de bajo riesgo y elevada liquidez, que se emiten por lo general a corto plazo (menos de un año y medio), y cuyos emisores gozan de gran solvencia al ser normalmente el Estado, grandes empresas de reconocida solvencia, etc.
- Mercado interbancario: en este mercado las entidades bancarias acuden para realizar operaciones de crédito o de préstamo con otras entidades bancarias. Es un mercado regulado por el Banco de España.
- Mercado de deuda anotada: la función principal de este mercado es la de posibilitar la colocación de deuda pública emitida por el Tesoro (emisor) a los inversores finales con el fin de obtener liquidez suficiente para acometer las necesidades que el Estado pueda tener. Los intermediarios en este caso son las entidades bancarias.
- Mercado de capitales: la Bolsa de Valores es el mercado de capitales por excelencia en el que se llevan a cabo operaciones de compra y venta de acciones. Se pone en contacto el ahorro privado con la obtención de financiación para las empresas a largo plazo. Aunque en sus orígenes funcionaba con un sistema de contratación en corros, en los que los operadores se reunían para contratar dentro de un rango de tiempo concreto y con unos límites determinados, en la actualidad se emplea el mercado continuo el cual está asistido por ordenador y que recibe las órdenes de compra y venta vía terminales informatizados. Por lo general, el mercado continuo está abierto de lunes a viernes y de 9:00 a 17:30.

Las cuatro Bolsas de Valores que existen en España son la de Madrid, Valencia, Barcelona y Bilbao.

## 1.2 La Bolsa de Valores.

La primera Bolsa de Valores se creó en Ámsterdam a principio del siglo XVII. La primera cotización que se registró fue la de la Compañía de las Indias Orientales la cual estaba participada por comerciantes.

En la actualidad, los mercados financieros están muy globalizados. A ello han contribuido enormemente las nuevas tecnologías así como las redes de contratación y negociación de activos financieros las cuales han permitido reducir los costes de intermediación y agilizar las operaciones enormemente.

La integración e interconexión de los mercados a nivel mundial es muy elevada, habiendo una fuerte dependencia los unos de otros. La globalización de los mercados financieros ha aportado ventajas y ha abierto nuevas posibilidades de negocio pero por el contra ha introducido un enorme grado de complejidad. Las crisis financieras se producen con mayor velocidad e interdependencia, obligando a los inversores a adoptar cada vez más nuevas estrategias de diversificación del riesgo.

La Bolsa de Valores es un mercado secundario donde se compran y venden acciones, obligaciones, bonos y otros activos financieros, siendo su función principal la de proporcionar liquidez a los títulos ya emitidos a través de su negociación. La liquidez se consigue poniendo en contacto a los ahorradores/inversores (compradores) y las instituciones/empresas (vendedores), cuya interacción genera las cotizaciones (precios). La Bolsa de Valores facilita la canalización del ahorro hacia los activos financieros que considera más atractivos y los dota de liquidez. Así mismo, proporciona seguridad jurídica ya que la Bolsa de Valores está regulada por la Ley 24/1988 del Mercado de Valores de 28 de julio de 1988, que es el eje central del derecho que regula el mercado bursátil. La implementación de dicha regulación y la vigilancia del mercado es ejercida por la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV).

La Bolsa de Valores proporciona información relevante para la adecuada valoración de subyacentes ya que pone en un mismo plano la oferta y la demanda, lo que el mercado está dispuesto a pagar por ellos.

Los índices bursátiles reflejan la evolución en el tiempo que tienen los precios de los subyacentes cotizados, de forma que pueden considerarse representativos de la variación media de los precios del mercado. Son muy útiles para analizar la evolución de un sector de forma conjunta (energético, bancario, servicios, etc.) así como para

constatar el estado general de la economía y la confianza de los inversores. En España, el índice bursátil más importante es el IBEX-35, que reúne a los 35 valores con mayor liquidez del mercado continuo. Es un índice ponderado por la capitalización bursátil de cada subyacente (nº de acciones emitidas por valor de cotización de cada acción).

En la Figura 2 se puede observar la evolución del IBEX-35 en los últimos 5 años.

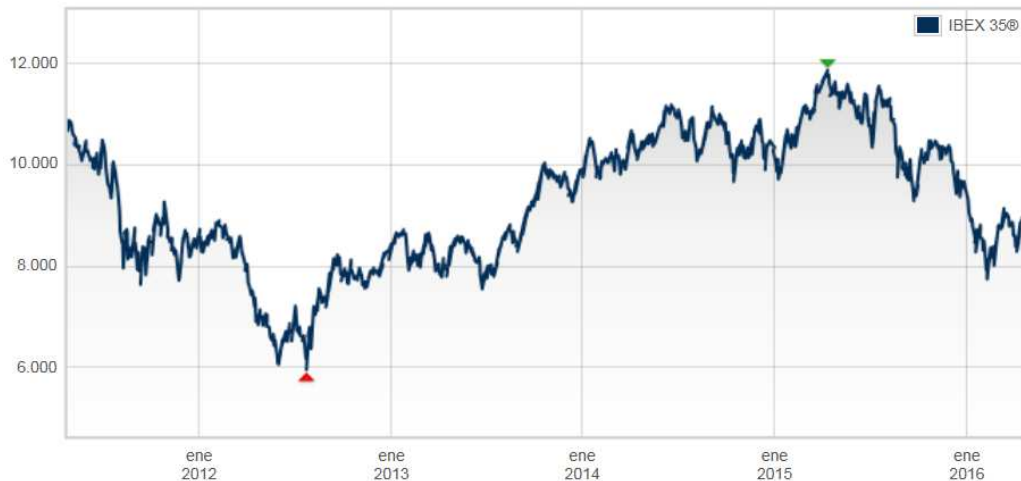


Figura 2. Evolución del IBEX-35 en los últimos 5 años.

*Fuente: Bolsa de Madrid [19].*

La evolución de la cotización de los subyacentes está influenciada por muchos factores entre los que podríamos destacar:

- La coyuntura económica: es indiscutible que la situación económica de un país influye de manera decisiva en la Bolsa y sirve a su vez como un factor de predicción del futuro de la economía de ese país. La Bolsa se anticipa a lo que va a suceder y descuenta determinados acontecimientos positivos o negativos. En momentos de bonanza existe más ahorro que acudirá a invertir en Bolsa. En cambio, en épocas de recesión o crisis, al aumentar el desempleo y por consiguiente disminuir la capacidad de ahorro, hay menos capital disponible para destinar al mercado bursátil.
- Los tipos de interés: la dependencia en este caso es obvia ya que existe una competencia por atraer inversión por parte del mercado monetario. Si los tipos de interés están elevados, el mercado monetario atraerá más inversores movidos por la obtención de buenos rendimientos con menor riesgo.

- La política monetaria: las decisiones políticas que se adoptan por los gobiernos tienen un reflejo directo en la aceleración o desaceleración del crecimiento de la economía. También tienen influencia directa en las cotizaciones bursátiles al ejercer un efecto directo sobre la confianza de los inversores.
- La inflación: cuando los precios se elevan el ahorro disminuye y por tanto la inversión en Bolsa también disminuye ya que hay menos capital que se puede destinar a ello.
- Interdependencia mundial: la economía está conectada mundialmente mediante múltiples relaciones en forma de tratados, préstamos, deuda emitida, alianzas estratégicas y políticas, etc. La inversión en un país determinado vendrá dada por su situación política, por la estabilidad de su moneda y por las expectativas del mercado de valores y los tipos de interés de los activos financieros.
- Tensiones políticas: cuando existe inestabilidad política internacional la bolsa se resiente ya que el riesgo que percibe el inversor es mucho mayor e intenta buscar otras inversiones más seguras y menos dependientes de la situación política.

### **1.3 Subyacentes representativos sectoriales.**

Los modelos diario y semanal desarrollados en el presente trabajo han sido testeados en 3 subyacentes cotizados del IBEX-35, los cuales han sido seleccionados por su capitalización bursátil como representativos de determinados sectores.

#### Banco Santander (sector banca)

Banco Santander es una entidad bancaria española con sede en Santander, cuyos orígenes datan de 1857. Es un banco cuya principal área de negocio es el tramo minorista, presentando casi un 70% de su beneficio.

A finales de 2015 tenía más de 13.000 oficinas, cerca de 200.000 empleados y más de 120 millones de clientes. Es la primera entidad bancaria española por capitalización bursátil, con 65.792 millones de euros y las 72ª del mundo. A cierre de 2015 tenía unos activos valorados en 327.039 millones de euros y un beneficio neto de 977 millones de euros.



Figura 3. Evolución comparativa del IBEX-35 y Banco Santander en los últimos 5 años.

Fuente: Bolsa de Madrid [19].

### Iberdrola (sector energético)

Iberdrola es una empresa española que tiene su sede en Bilbao y que se dedica a la producción de energía así como a la comercialización y distribución. Surge de la fusión entre Hidroeléctrica Española e Iberduero en 1992 y en la actualidad tiene actividad en más de 40 países, más de 30.000 empleados y aproximadamente 32.000 abonados en todo el mundo.

A nivel internacional es una de las mayores empresas eléctricas, siendo el segundo grupo que más energía produce en España y el primero por capitalización bursátil en la actualidad.

Su capitalización bursátil a 31 de diciembre de 2015 era de 41.506 millones de euros.



Figura 4. Evolución comparativa del IBEX-35 e Iberdrola en los últimos 5 años.

Fuente: Bolsa de Madrid [19].



### Telefónica (sector telecomunicaciones)

Telefónica es una empresa española de telecomunicaciones con sede en Madrid que se fundó en 1924. En sus orígenes fue una empresa pública hasta que se privatizó en 1995. Está considerada la empresa de telecomunicaciones europea más importante, y ocupa a nivel mundial el quinto puesto por relevancia.

Comercialmente opera con los nombres de Movistar en España y Latinoamérica, O2 en el resto de Europa y Vivo en Brasil. Tiene casi 120.000 empleados en todo el mundo y cuenta con 315 millones de abonados.

Su capitalización bursátil a 31 de diciembre de 2015 era de 50.921 millones de euros, la más relevante del sector telecomunicaciones.



Figura 5. Evolución comparativa del IBEX-35 y Telefónica en los últimos 5 años.

*Fuente: Bolsa de Madrid [19].*



## 2. Dos modelos estocásticos para subyacentes cotizados.

### 2.1 Preliminares estocásticos.

#### 2.1.1 Proceso estocástico de Wiener: definición y propiedades.

Un proceso estocástico describe la evolución temporal de una variable aleatoria. Uno de los procesos estocásticos más importantes en estadística, y que usaremos a lo largo de este trabajo, se denomina el Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener. Este proceso toma valores continuos y depende de la variable tiempo, la cual también se considera continua. El Movimiento Browniano resulta adecuado para describir el comportamiento de variables económico-financieras, como es el caso de los activos subyacentes.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo gaussiano<sup>1</sup>. Su introducción se realizó de forma intuitiva en 1827 por el botánico escocés Robert Brown quien lo utilizó para describir el movimiento aleatorio de las partículas de polen en el agua debido a la interacción molecular. A este fenómeno se le denominó “Movimiento Browniano”.

En el siglo XX, se descubrió la utilidad de dicho instrumento matemático en múltiples campos, en particular en el campo de las finanzas, en el que se utilizó dicho instrumento para la modelización del comportamiento de los precios bursátiles. Louis Bachelier (1900) hizo uso de las mismas en su tesis doctoral “La Teoría de la Especulación” para modelizar ciertos activos financieros [2]. No obstante, el trabajo de Bachelier no fue comprendido en su época y durante mucho tiempo permaneció ignorado. Con posterioridad, fue Norbert Wiener quien consiguió formalizar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano y de ahí que también se le denomine proceso de Wiener [11]. A lo largo de este documento, el Movimiento Browniano o proceso de Wiener se denotará por:  $\{W(t; \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  o brevemente por  $\{W(t) : t \geq 0\}$ .

El Movimiento Browniano,  $\{W(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estocástico que cumple:

**MB.1.** Comienza en el origen con probabilidad 1:  $P[W(0) = 0] = 1$ .

---

<sup>1</sup> Se recuerda que un proceso estocástico  $\{X(t; \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  se dice que es gaussiano si las distribuciones finito dimensionales de dicho proceso son gaussianas, en particular,  $X(t; \cdot)$  es una variable aleatoria gaussiana para cada  $t \in T$ .

**MB.2.** Los incrementos del Browniano dados por,  $W(t) - W(s)$ , son variables aleatorias independientes:

$$W(t_1) - W(t_0); W(t_2) - W(t_1); \dots; W(t_{n+1}) - W(t_n),$$

con  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty$ .

**MB.3.** Tiene incrementos estacionarios:

$$W(t + \Delta t) - W(t) \stackrel{d}{=} W(s + \Delta t) - W(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty,$$

donde el símbolo  $\stackrel{d}{=}$  denota que la igualdad anterior es en distribución.

**MB.4.** Los incrementos del proceso son gaussianos de media 0 y varianzat – s:

$$W(t) - W(s) \sim N(0; t - s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Considerando las propiedades MB.1 y MB.4, en el caso particular en que  $s = 0$ , se deduce que,

$$W(t) \sim N(0; t),$$

es decir, que fijado  $t$ , la variable aleatoria  $W(t)$  sigue una distribución normal o gaussiana de media 0 y desviación típica  $\sqrt{t}$ .

A continuación, se especifica las principales propiedades estadísticas del proceso estocástico Movimiento Browniano  $\{W(t), t \geq 0\}$ . Para algunas de estas propiedades no daremos la demostración, la cual está disponible en [15].

**P.1. Función Media:** A partir de las condición MB.4, se deduce que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$\mu_{S(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

**P.2. Función Covarianza:** Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias,  $W(s)$  y  $W(t)$ , que se obtienen al fijar dos instantes  $s$  y  $t$ , respectivamente. En efecto, veamos que se cumple

$$\text{Cov}[W(t), W(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

En efecto, si tomamos  $0 \leq s \leq t \leq +\infty$ , entonces utilizando la propiedad P.1 y las propiedades básicas del operador esperanza se tiene:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[W(t), W(s)] &= E[W(t)W(s)] - E[W(t)]E[W(s)] \\
 &= E[W(t)W(s) - (W(s))^2 + (W(s))^2] \\
 &= E[(W(t) - W(s))W(s) + (W(s))^2] \\
 &= E[(W(t) - W(s))W(s)] + E[(W(s))^2] \\
 &= E[(W(t) - W(s))(W(s) - W(0))] + E[(W(s))^2] \\
 &= E[W(t) - W(s)]E[W(s) - W(0)] + E[(W(s))^2] \\
 &= (E[W(t)] - E[W(s)])(E[W(s)] - E[W(0)]) + E[(W(s))^2] \\
 &= E[(W(s))^2] \\
 &= \text{Var}[W(s)] \\
 &= s.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que si en la relación anterior tomamos  $s = t$ , se obtiene la propiedad MB.4, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es  $t$ .

**P.3.  $W(t)$  es  $\frac{1}{2}$ -autosemejante:** Esta es, únicamente, una propiedad geométrica que formalmente se denota de la siguiente manera.

$$W(Tt) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} W(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

**P.4. Las trayectorias muestrales de  $W(t)$**  son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto. Se puede demostrar que  $W(t)$  tiene trayectorias que no son de variación acotada, lo que significa que no son derivables (las trayectorias del Movimiento Browniano tienen puntos angulosos, es decir, con pico para todo instante de tiempo  $t$ ).

### 2.1.2 Proceso de Markov.

Sea  $\{X(t): t \in (0, \infty)\}$  un proceso estocástico, donde  $X(t)$  es una variable aleatoria continua dentro del espacio definido

$$(-\infty, \infty) \text{ ó } [0, \infty) \text{ ó } [0, M]. \quad (2.1.1)$$

Sea  $p(x, t)$  la función densidad de probabilidad (p.d.f) asociada a la variable aleatoria continua  $X(t)$ . Encontrar la probabilidad asociada a la variable aleatoria  $X(t)$  requiere integrar  $p(x, t)$ :

$$\text{Prob} \{X(t) \in [a, b]\} = \int_a^b p(x, t) dx. \quad (2.1.2)$$

Tanto el tiempo como el espacio definido son continuos.

Asumiendo que  $\{X(t): t \in (0, \infty)\}$  es un proceso estocástico continuo en el tiempo con el mismo espacio definido en (2.1.1), entonces  $\{X(t): t \in (0, \infty)\}$  es un proceso de Markov si, dada cualquier secuencia temporal,  $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ ,

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{X(t_n) \leq y | X(0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ = \text{Prob}\{X(t_n) \leq y | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

El estado futuro del proceso de Markov sólo depende del estado actual y no de su historia pasada. Además, cabe destacar que la probabilidad en (2.1.1) lo es en términos de distribución acumulada. La condición en (2.1.1) se conoce como la propiedad de Markov.

### 2.1.3 Método de máxima verosimilitud.

En este apartado vamos a realizar la estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo Log-Normal, usando para ello una técnica estadística llamada método de máxima verosimilitud.

Para comprender mejor cómo se aplica el método de máxima verosimilitud en el contexto que nos ocupa, vamos en primer lugar a recordar una serie de conceptos y definiciones que se requerirán para aplicar este método de estimación.

El método de máxima verosimilitud está basado en el concepto de función de verosimilitud, debido a R.A. Fisher, y es uno de los conceptos más importantes en Inferencia Estadística.

Supondremos, para fijar ideas, que hemos obtenido una muestra  $\{x_k: 0 \leq k \leq N\}$  de una población descrita por una variable aleatoria continua con una función de densidad  $p(x; \vec{\theta})$  dependiente del vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$ . Los resultados son análogos si la población es discreta. Si consideramos muestras aleatorias simples, la probabilidad de que ocurra la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  para un vector dado del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  viene descrita por la función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p) de la muestra y que denotamos por  $L$ .

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \vec{\theta}). \quad (2.1.4)$$

El problema que nos planteamos ahora es, dada una muestra fija pretendemos estimar el valor del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  que es desconocido.

Recordaremos que si  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  es una muestra dada, se llama función de verosimilitud a la función de  $\vec{\theta}$  dada por:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \theta). \quad (2.1.5)$$

Recalcamos que esta función se considera ahora como función solo de  $\vec{\theta}$  y no de la muestra, que ya es fija, al construirse esta función después de haber obtenido la muestra. En este sentido podríamos utilizar simplemente la notación  $L(\vec{\theta})$ , aunque lo más usual es mantener la muestra de la notación de  $L$ .

El método de máxima verosimilitud está basado en una idea muy simple, y quizás por eso es tan importante, que consiste en considerar como mejor estimación del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  el valor que haga máxima  $L$  para la muestra dada. Es decir, dada  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  consideremos mejor estimación  $\vec{\theta}_1$  que  $\vec{\theta}_2$  si

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_1) > L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_2), \quad (2.1.6)$$

lo que significa que el valor de  $\vec{\theta}_1$  es más probable que el valor de  $\vec{\theta}_2$  dada la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . En otras palabras, es este método de estimación la idea consiste en elegir la *moda* de la distribución a posteriori de  $\vec{\theta}$ .

Teniendo en cuenta que la función de verosimilitud es mayor o igual que cero para todo valor de  $\vec{\theta}$  y que la función logaritmo es monótona creciente resulta que:

$$\max[L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})] = \max[\ln(L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}))]. \quad (2.1.7)$$

Se utiliza en la práctica el  $\ln L$  en lugar de  $L$  por ser más fácil, en aras de calcular el máximo de la función de verosimilitud o equivalentemente de la función de log-verosimilitud, pues la derivación de una suma es más sencilla que la de un producto.

Si la muestra depende únicamente de un parámetro  $\theta$ , entonces  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  es un estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$  para la distribución poblacional definida por  $p(x; \theta)$  si  $\hat{\theta}$  hace máximo el valor de la función de verosimilitud, o lo que es lo mismo, hace máximo:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \sum_{k=1}^N \ln p(x_k, \theta). \quad (2.1.8)$$

En consecuencia, el cálculo efectivo de  $\hat{\theta}$  se reduce a resolver la ecuación:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0, \quad (2.1.9)$$

de forma que si  $\hat{\theta}$  es solución de esta ecuación,  $\hat{\theta}$  será máximo si la segunda derivada es negativa.

Si la distribución poblacional depende de  $n$  parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  habrá que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Comprobando luego que si  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)$  verifica este sistema, además hace el *hessiano* correspondiente definido negativo.

#### 2.1.4 Contrastes de hipótesis.

Frecuentemente, el problema que se presenta en estadística no es simplemente la estimación de un parámetro sino el diseño de una regla de decisión que nos conduzca a la aceptación o rechazo de alguna afirmación que hemos hecho sobre la población.

Si proponemos una hipótesis sobre los elementos de la población, diremos que estamos utilizando una hipótesis estadística. Por ejemplo, si suponemos que una población es normal o que su media es 24, estaremos haciendo hipótesis estadísticas. Estas hipótesis se pueden referir únicamente al valor de un parámetro poblacional (media, varianza, mediana,...) o a la ley que rige el comportamiento del fenómeno aleatorio a estudio (la población es uniforme, normal,...).

La única forma de tener certeza absoluta sobre una cierta hipótesis estadística es estudiando toda la población. Por distintas razones, esto no es posible en muchos casos, con lo que es necesario que tomemos decisiones sobre la población a partir de la información contenida en una muestra.

Los métodos que conducen a la aceptación o rechazo de una hipótesis estadística constituyen una parte fundamental de la Inferencia Estadística y se denominan contrastes, pruebas o tests de hipótesis estadísticas. Esta teoría de los contrastes de



hipótesis fue iniciada por Fisher y fundamentada por Neyman y Pearson. De una forma esquemática, el problema se plantea en las etapas siguientes:

- a) Se establece una hipótesis sobre la población, que se denota por  $H_0$  y se denomina hipótesis nula y frente a ella se enuncia otra hipótesis que se denota por  $H_1$  y se denomina hipótesis alternativa.
- b) Se aplica un experimento para el que sabemos que si se supone cierta la hipótesis  $H_0$ , la probabilidad de que ocurra un cierto suceso  $S$  es pequeña.
- c) Si al elegir una muestra de esa población ocurre el suceso  $S$  se rechaza la hipótesis  $H_0$  y en caso contrario se acepta. La justificación es que si  $H_0$  es cierta el suceso  $S$  tiene una probabilidad pequeña, luego si ha ocurrido  $S$ , se ha dado un suceso de probabilidad pequeña o bien es que  $H_0$  es falsa. Como parece natural no admitir lo primero, se concluye que  $H_0$  es falsa.

Esta descripción general de un contraste de hipótesis se concreta en la práctica como sigue:

- i) Se definen las hipótesis nula  $H_0$  (por ejemplo,  $H_0 : \mu = 3$ ) y alternativa  $H_1$  (por ejemplo,  $H_1 : \mu \neq 3$ ).
- ii) Se define un estadístico (por ejemplo, la media muestral ( $\bar{x}$ )) para el que se conoce su distribución si  $H_0$  es cierta.
- iii) Se delimitan dos regiones complementarias y excluyentes  $A$  y  $S$  denominadas regiones de aceptación y rechazo, respectivamente, de forma que la probabilidad de que el estadístico definido en ii) pertenezca a  $S$  si  $H_0$  es cierta, es una cantidad prefijada, que se denota por  $\alpha$  y se llama nivel de significación del test (normalmente  $\alpha = 0.01$ ,  $\alpha = 0.05$ ).
- iv) Se selecciona una muestra aleatoria de la población y se adopta la regla de decisión siguiente: si el estadístico definido en ii) para la muestra obtenida pertenece a  $A$  se acepta  $H_0$  y en caso contrario, se rechaza  $H_0$  y en consecuencia se acepta  $H_1$ , al nivel de significación  $\alpha$ .

#### Test de razón de verosimilitudes. Hipótesis simples

Supongamos que se trata de contrastar la hipótesis  $H_0 : \theta = \theta_0$  frente a la alternativa  $H_1 : \theta = \theta_1$  en donde ambas hipótesis son simples. Sea  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  la función de verosimilitud que es función de  $\theta$  y notemos por brevedad  $L(\theta)$ . Construyendo el cociente,

$$\lambda = \frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)}$$

es evidente que si este cociente es suficientemente grande se debe rechazar  $H_0$  pues la muestra da mayor verosimilitud al valor  $\theta = \theta_1$  que al valor  $\theta = \theta_0$ . Por lo tanto, si suponiendo  $H_0$  cierta conocemos la distribución de  $\lambda$ , fijado  $\alpha$ , podemos obtener un valor  $\lambda_\alpha$  tal que,

$$P\left[\lambda > \frac{\lambda_\alpha}{H_0}\right] = \alpha,$$

y en consecuencia adoptar la regla de decisión siguiente: si  $\lambda > \lambda_\alpha$  se rechaza  $H_0$ , en caso contrario se acepta.

Contrastes de diferencias de medias. Poblaciones normales de varianzas conocidas.

Si se supone que  $H_0$  es cierta, sabemos que la variable  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  sigue una distribución

$N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$  lo que nos permite calcular  $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$  de forma que,

$$P\left[-\lambda_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \lambda_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha,$$

y adoptar la regla de decisión siguiente:

$$\text{si } \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \in \left[ d - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, d + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right],$$

se acepta  $H_0$ , y en caso contrario se rechaza.

### 2.1.5 Medidas de bondad de ajuste.

Las medidas de bondad de ajuste que se emplearán para la validación de los modelos diario y semanal aplicados a los subyacentes seleccionados (Banco Santander, Iberdrola y Telefónica) serán:

- Error porcentual absoluto medio (*Mean Absolute Percentage Error*, MAPE).
- Error cuadrático medio (*Root Mean Squared Error*, RMSE).
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones y predicciones (puntuales y por intervalos).

En base a los resultados obtenidos según las medidas de bondad del ajuste anteriormente especificadas, se evaluará la adecuación y ajuste del modelo, para proceder así a realizar las predicciones del subyacente en cuestión.

#### Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)

El MAPE se calcula como el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados,  $\hat{Y}_i$ , y los observados,  $Y_i$ , dividido por las observaciones correspondientes, quedando expresado como un porcentaje de los valores reales. Es decir, si se pronostican  $k$  periodos y los valores reales corresponden a  $k$  periodos, el MAPE se calcula como:

$$MAPE = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|Y_i - \hat{Y}_i|}{Y_i}.$$

Además de realizar el correspondiente contraste de los resultados que esta medida presente con cada uno de los tres métodos, individualmente, se considerará un error global de diagnóstico tolerable cuando el MAPE obtenido sea inferior al 5%, constituyendo este nivel de aproximación una referencia más exigente al estándar en estadística.

#### Error Cuadrático Medio (RMSE)

El error cuadrático medio (RMSE), es una medida de bondad de ajuste que mide la distancia euclídea por término medio entre los valores observados,  $Y_i$ , y los estimados,  $\hat{Y}_i$ . Cuanto menor sea el resultado del RMSE, entonces se podrá decir que el error en el modelo presentado será menor. Su valor está definido de la siguiente manera:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{k}}.$$

## 2.2 El modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico.

El modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico para modelizar el comportamiento de una acción o subyacente  $S = S(t)$  que cotiza en la Bolsa está descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica de tipo Itô (Teorema 5.2.5 de [17]),

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), & t > 0, \\ S(0) &= S_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

donde,

- $S(t)$  es el subyacente en el instante temporal  $t > 0$ . Se asume que es un proceso estocástico.
- $S_0$  es el valor del subyacente en el instante temporal inicial  $t = 0$ .
- $W(t)$  es el proceso de Wiener o Movimiento Browniano.
- $\mu$  representa la tasa instantánea “media” del rendimiento del subyacente. Se asume que es un valor determinista,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si  $\mu > 0$  ( $< 0$ ) la acción se ha revalorizado (devaluado) en “media”. Este parámetro se debe calibrar a partir de datos reales de cotización del subyacente.
- $\sigma$  representa la variabilidad o volatilidad del subyacente. Se asume que es un valor determinista,  $\sigma > 0$ . Al igual que  $\mu$ , también debe calibrarse a partir de una serie histórica del subyacente.

Utilizando el cálculo estocástico de Itô [15] y [1], se puede demostrar que la solución  $S(t)$  del problema (2.2.1) es,

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} e^{\sigma W(t)}. \quad (2.2.2)$$

Es conveniente, para simplificar el tratamiento operacional, trabajar con los logaritmos de las cotizaciones (log-cotizaciones),  $\ln(S(t))$ . Tomando logaritmos en (2.2.2) se obtiene,

$$\ln(S(t)) = \ln(S_0) + Rt + \sigma W(t), \quad R = \mu - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (2.2.3)$$

En lo sucesivo, trabajaremos en las unidades temporales entre observaciones de la cotización del subyacente ( $t_k = k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), que habitualmente serán los precios de cotización a cierre diario de la sesión.

Se desarrollarán dos modelos:

- Modelo 1, o modelo diario, consistente en describir las cotizaciones del subyacente cada día a cierre de la Bolsa.
- Modelo 2, o modelo semanal, consistente en 5 sub-modelos, uno para cada día de la semana de actividad bursátil (de lunes a viernes), que pretende analizar si existe un efecto respecto del día de la semana en que cotiza el subyacente.

## 2.3 Modelo diario.

Recordemos que este modelo se denominará Modelo 1. A partir de (2.2.3), este modelo se describe por:

$$\begin{aligned}\ln(S(k)) &= \ln(S_0) + Rk + \sigma W(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \\ &= \ln(S_0) + \sum_{i=1}^k R_i + \sigma W(k).\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

Como se ha adelantado anteriormente, el modelo se aplicará a la modelización de la cotización de tres subyacentes representativos del IBEX-35, y por ello se asumirá que los valores de  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , representan los días consecutivos de cotización, así  $k = 0$  corresponde al día 15 de enero de 2015 y  $k = n$  corresponde al día 26 de mayo de 2015, en total 90 muestras.

### 2.3.1 Estimación puntual de los parámetros.

Supongamos que  $S_0 = s_0$  es un valor determinista conocido, y por comodidad denotaremos,

$$V = \sigma^2, \quad (2.3.2)$$

$$Y_k = \ln(S(k)), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.3.3)$$

De esta forma, (2.3.1) se escribe como,

$$Y_k = Y_0 + \sum_{i=1}^k R + \sqrt{V}W(k). \quad (2.3.4)$$

Sustituyendo en (2.3.4)  $k$  por  $k - 1$ , obtenemos,

$$Y_{k-1} = Y_0 + \sum_{i=1}^{k-1} R + \sqrt{V}W(k-1). \quad (2.3.5)$$

Restando (2.3.5) de (2.3.4) se llega a la recurrencia,

$$Y_k = Y_{k-1} + R + \sqrt{V}(W(k) - W(k-1)). \quad (2.3.6)$$

Como por las propiedades del proceso de Wiener se tiene que sus incrementos son gaussianos de media cero y varianza el incremento, esto es,

$$W(k) - W(k-1) \sim N(0; 1), \quad (2.3.7)$$

de (2.3.6) se deduce que la distribución de  $Y_k$  condicionada a  $Y_{k-1}$  es gaussiana de media  $Y_{k-1} + R$  y varianza  $V$ ,

$$Y_k | Y_{k-1} \sim N(Y_{k-1} + R; V), \quad (2.3.8)$$

ya que,  $Y_k$  es la suma de dos variables aleatorias gaussianas independientes:

- $W(k) - W(k - 1)$  es gaussiana según (2.3.6).
- $Y_{k-1} = Y_{k-2} + R(W(k - 1) - W(k - 2))$ , aplicando (2.3.6) con la traslación de subíndices  $k \rightarrow k - 1$ .
- $W(k) - W(k - 1)$  y  $W(k - 1) - W(k - 2)$  son variables aleatorias gaussianas independientes porque por definición el proceso de Wiener tiene incrementos independientes.

Por otra parte, según el teorema 5.2.5 [17], la solución  $S(t)$  de la ecuación diferencial estocástica (2.2.1) es un proceso de Markov de primer orden (véase 2.1.2) y por tanto también  $Y(t) = \ln(S(t))$  y su discretización  $Y_k$ .

A continuación, se aprovechará esta propiedad para estimar los parámetros  $R$  y  $V$  utilizando el método de máxima verosimilitud (véase 2.1.3). Para ello, a partir de una muestra de cotizaciones  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , consideraremos las log-cotizaciones  $Y_0 = \ln(S_0), Y_1 = \ln(S_1), \dots, Y_n = \ln(S_n)$  y construimos la función de verosimilitud,

$$\begin{aligned} l(R, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n) &= f(R, V; Y_0) f(R, V; Y_1 | Y_0) f(R, V; Y_2 | Y_0, Y_1) \\ &\times f(R, V; Y_n | Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

siendo  $f(R, V; Y_0)$  la función densidad de probabilidad  $Y_0$ ;  $f(R, V; Y_1 | Y_0)$  la función densidad de probabilidad de transición de  $Y_1$  dado  $Y_0$ ;  $f(R, V; Y_2 | Y_0, Y_1)$  la función densidad de probabilidad de transición de  $Y_2$  dados  $Y_0$  e  $Y_1$ ; etc.

Como  $Y_k$  es un proceso de Markov de orden 1 y se ha asumido que  $Y_0 = \ln(S_0)$  es conocido (por serlo  $S_0$ ), de (2.3.9) se tiene,

$$\begin{aligned} l(R, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n) &= f(R, V; Y_1) f(R, V; Y_2 | Y_1) \dots f(R, V; Y_n | Y_{n-1}) \quad (2.3.10) \\ &= \prod_{k=1}^n f(R, V; Y_k | Y_{k-1}) \end{aligned}$$

siendo,

$$f(R, V; Y_1 | Y_0) = f(R, V; Y_1), \quad (2.3.11)$$

Tomando logaritmos neperianos en (2.3.10) se construye la función de log-verosimilitud,

$$\begin{aligned} L(R, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n) &= \ln(l(R, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n)) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(f(R, V; Y_k | Y_{k-1})). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Por (2.3.8) se deduce que,

$$f(R, V; Y_k | Y_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{1}{2V}(Y_k - Y_{k-1} - R)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.13)$$

Sustituyendo (2.3.13) en (2.3.12) se obtiene,

$$\begin{aligned} L = L(R, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{1}{2V}(Y_k - Y_{k-1} - R)^2}\right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi V) - \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - R)^2 \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(V) - \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - R)^2. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Ahora buscamos los valores  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$  de  $R$  y  $V$  respectivamente, que maximizan la función de log-verosimilitud  $L = L(R, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$  dada en (2.3.14) sobre el dominio convexo,

$$D = \{(R, V) \in \mathbb{R}^2, R \in \mathbb{R}, V > 0\}. \quad (2.3.15)$$

Para ello, en primer lugar calculamos los puntos críticos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial R} &= \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - R) = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial V} &= -\frac{n}{2V} + \frac{1}{2V^2} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - R)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.16)$$

De la primera ecuación de (2.3.16) se deduce,

$$\hat{R} = \frac{Y_n - Y_0}{n}. \quad (2.3.17)$$

Sustituyendo  $R = \hat{R}$  en la segunda ecuación de (2.3.16), se obtiene,

$$\hat{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2. \quad (2.3.18)$$

Comprobemos que el punto crítico  $(\hat{R}, \hat{V})$  dado por (2.3.17) y (2.3.18) es un máximo de la función log-verosimilitud dada por (2.3.14) en el dominio (2.3.15). Para ello, construimos, en primer lugar, la matriz *hessiana*,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial R^2} &= -\frac{n}{V}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} &= \frac{n}{2V^2} - \frac{1}{V^3} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - R)^2, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial V} &= \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial V} = -\frac{1}{V^2} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - R) = -\frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial V}. \end{aligned} \right\} (2.3.19)$$

Obsérvese que para calcular la última expresión,  $\frac{\partial^2 L}{\partial R \partial V}$ , se ha utilizado la expresión de  $\frac{\partial L}{\partial R}$  calculada en (2.3.16). A continuación, evaluamos cada una de las derivadas dadas en (2.3.19) en el punto crítico determinado en (2.3.17) y (2.3.18):

$$(\hat{R}, \hat{V}) = \left( \frac{Y_n - Y_0}{n}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2 \right). \quad (2.3.20)$$

De esta forma se obtiene,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 L}{\partial R^2} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} &= -\frac{n}{\hat{V}} < 0, \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} &= \frac{n}{2(\hat{V})^2} - \frac{1}{(\hat{V})^3} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2 \\ &= \frac{n}{2\hat{V}^2} - \frac{1}{\hat{V}^3} (n\hat{V}) = -\frac{n}{\hat{V}^2} < 0. \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial V} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} &= -\frac{1}{\hat{V}} \left. \frac{\partial L}{\partial R} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} = -\frac{1}{\hat{V}} \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Para el cálculo de  $\left. \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})}$  se ha utilizado que al ser  $(R, V) = (\hat{R}, \hat{V})$  solución del sistema de ecuaciones (2.3.16) se cumple, según (2.3.18), que,

$$\sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2 = n \hat{V}.$$



Y para el cálculo de  $\left. \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial V} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})}$  se ha aplicado que, según (2.3.16), al ser  $(\hat{R}, \hat{V})$  solución del sistema de ecuaciones (2.3.16), se verifica que,

$$\left. \frac{\partial L}{\partial V} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} = 0.$$

Por lo tanto, la matriz *hessiana*  $H(L(\hat{R}, \hat{V}))$  de la función  $L = L(R, V) = L(R, V; Y_o, Y_1, \dots, Y_n)$  definida en (2.3.14) y evaluada en el punto crítico  $(\hat{R}, \hat{V})$  dado en (2.3.20) está dada por,

$$H(L(\hat{R}, \hat{V})) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^2 L}{\partial R^2} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} & \left. \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial R} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial V} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} & \left. \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} \right|_{(R,V)=(\hat{R},\hat{V})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\hat{V}} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{V}^2} \end{bmatrix}.$$

Al ser  $H(L(\hat{R}, \hat{V}))$  una matriz diagonal, sus valores propios son los elementos de la diagonal,

$$\sigma(H(L(\hat{R}, \hat{V}))) = \left\{ -\frac{n}{\hat{V}}, -\frac{n}{2\hat{V}^2} \right\},$$

los cuales son ambos negativos, por lo que el punto crítico  $(\hat{R}, \hat{V})$  dado en (2.3.20) es un máximo local de la función de log-verosimilitud  $L = L(R, V; Y_o, Y_1, \dots, Y_n)$  [3].

### 2.3.2 Estimación probabilística por intervalos de confianza de los parámetros.

Los cálculos anteriores mostrados en (2.3.19) permiten determinar la matriz de información de Fisher.

$$Inf = \begin{bmatrix} -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial R^2}\right] & \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial L} \\ -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial L \partial R}\right] & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{V} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2V^2} \end{bmatrix},$$

cuya inversa es la matriz de varianza-covarianza asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud [7].

$$Inf^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{V}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2V^2}{n} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Var[\hat{R}] & Cov[\hat{R}, \hat{V}] \\ Cov[\hat{R}, \hat{V}] & Var[\hat{V}] \end{bmatrix}.$$

La aproximación anterior es asintótica y para legitimarla supondremos que el tamaño de la muestra  $n$  es mayor que 30 (en nuestro caso particular hemos tomado  $n$  igual a 90) en nuestra aplicación posterior a datos reales. Así, aplicando el Teorema del Límite Central podemos completar las estimaciones puntuales de  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$  dadas en (2.3.17) y (2.3.18) respectivamente, con intervalos de confianza para  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$  a un nivel de confianza  $1 - \alpha$ ,

$$\hat{R} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{V}}{n}}, \quad (2.3.21)$$

$$\hat{V} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2\hat{V}}{n}}, \quad (2.3.22)$$

siendo  $z_q$  el cuartil de orden  $q$  de la distribución normal estándar.

### 2.3.3 Predicción puntual a corto plazo.

En este apartado se desarrolla un método de predicción a corto plazo basado en predicciones puntuales y predicciones probabilísticas con intervalos de confianza.

La predicción a corto plazo consiste en observar el proceso estocástico de las log-cotizaciones  $Y_t$  definido en (2.3.3) hasta el instante  $n$ , y predecirlo para  $t > n$ .

Como criterio de predicción utilizaremos el valor  $\hat{Y}_t$  que minimiza el error cuadrático medio que dará como predictor puntual de  $Y_t$  con  $t > n$ , conocidas las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ , y la esperanza de  $Y_t$  dadas las  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ :

$$\hat{Y}_t = E[\hat{Y}_t | Y_0, Y_1, \dots, Y_n] = E[Y_t | Y_n]. \quad (2.3.23)$$

Para calcular esta esperanza utilizamos recursivamente la relación (2.3.6) con  $k = t$ :

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + R + \sqrt{V}(W(t) - W(t-1)) \\ &= Y_{t-2} + R + \sqrt{V}(W(t-1) - W(t-2)) \\ &\quad + R + \sqrt{V}(W(t) - W(t-1)) \\ &= Y_{t-2} + 2R + \sqrt{V}(W(t) - W(t-2)) \\ &= \dots \\ &= Y_n + (t-n)R + \sqrt{V}(W(t) - (W(n))), \quad t > n. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Y_t = Y_n + (t-n)R + \sqrt{V}(W(t) - W(n)), \quad t > n. \quad (2.3.24)$$

Como  $E[W(t)] = 0$  para  $t \geq 0$ , de (2.3.23) y (2.3.24) se deduce:

$$\hat{Y}_t = E[Y_t|Y_n] = Y_n + (t - n)R, \quad t > n. \quad (2.3.25)$$

Como desconocemos  $R$ , utilizaremos su estimación  $\hat{R}$  dada en (2.3.17) para obtener el predictor puntual:

$$\hat{Y}_t = Y_n + (t - n)\hat{R}, \quad t > n. \quad (2.3.26)$$

### 2.3.4 Predicción probabilística por intervalos de confianza a corto plazo.

Para construir predicciones probabilísticas basadas en intervalos de confianza, en primer lugar vamos a determinar la distribución del error de la predicción. El error de la predicción es  $\hat{Y}_t - Y_t$ , y utilizando (2.3.24) y (2.3.25), este error puede expresarse de la siguiente manera:

$$\hat{Y}_t - Y_t = (t - n)(\hat{R} - R) - \sqrt{V}(W(t) - W(n)). \quad (2.3.27)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (2.3.17) y (2.3.24) con  $t > n$  y  $n \rightarrow 0$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \hat{R} - R &= \frac{Y_n - Y_0}{n} - R \\ &= \frac{(Y_0 + (n - 0)R + \sqrt{V}(W(n) - W(0))) - Y_0}{n} - R \\ &= \frac{\sqrt{V}}{n}W(n), \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

donde se ha utilizado que por definición del movimiento browniano,  $W(0) = 0$  con probabilidad 1 (véase Apartado 2.1.1).

Sustituyendo (2.3.28) en (2.3.27) se obtiene,

$$\hat{Y}_t - Y_t = (t - n)\frac{\sqrt{V}}{n}W(n) - \sqrt{V}(W(t) - W(n)). \quad (2.3.29)$$

Esta expresión permite deducir la distribución del error  $\hat{Y}_t - Y_t$ , ya que,

$$W(n) = W(n) - W(0) \text{ y } W(t) - W(n), \quad 0 < n < t$$

son variables aleatorias gaussianas de media 0 y varianza  $n$  y  $t - n$  respectivamente, por lo que de (2.3.29) se deduce,

$$\hat{Y}_t - Y_t \sim N\left(0; \frac{V(t - n)t}{n}\right), \quad (2.3.30)$$

al ser  $\hat{Y}_t - Y_t$  una transformación lineal de dos variables aleatorias gaussianas,  $W(n) = W(n) - W(0)$  y  $W(t) - W(n)$ , con media,

$$E[\hat{Y}_t - Y_t] = (t - n) \frac{\sqrt{V}}{n} E[W(n)] - \sqrt{V}(E[W(t) - W(n)]) = 0,$$

y varianza,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{Y}_t - Y_t] &= \text{Var} \left[ (t - n) \frac{\sqrt{V}}{n} W(n) - \sqrt{V}(W(t) - W(n)) \right] \\ &= \left( (t - n) \frac{\sqrt{V}}{n} \right)^2 \text{Var}[W(n)] + (\sqrt{V})^2 \text{Var}[W(t) - W(n)] \\ &= \left( \frac{t - n}{n} \right)^2 Vn + V(t - n) \\ &= V(t - n) \left( \frac{t - n}{n} + 1 \right) \\ &= \frac{V(t - n)t}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto, tomando la estimación puntual  $\hat{V}$  de  $V$ , se obtiene que el intervalo de confianza de la predicción está dado por,

$$\hat{Y}_t \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{V}(t - n)t}{n}}. \quad (2.3.31)$$

### 2.3.5 Resultados obtenidos empleando predicción puntual a corto plazo.

#### Banco Santander

En la Tabla 1 se especifican las estimaciones puntuales,  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R$  y  $V$ , respectivamente, del modelo diario dado en (2.2.3) y (2.3.2) aplicando las fórmulas (2.3.17) y (2.3.18) respectivamente, para el Banco Santander, empleando 90 muestras. También se incluyen las predicciones de dichos parámetros mediante intervalos de confianza aplicando las expresiones (2.3.21) y (2.3.22).

Estimador	Valor	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
$\hat{R}$	0,000920932	-0,002112594	0,003954458
$\hat{V}$	0,000215589	0,000152598	0,000278579

Tabla 1. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 2 se especifican las predicciones, para 5 días, de las log-cotizaciones considerando el modelo diario. Estas predicciones se han construido de forma puntual utilizando la expresión (2.3.26) y de forma probabilística mediante los intervalos de confianza dados en (2.3.31). En el Gráfico 1 se han representado todos estos valores a 5 días. Se observa que el modelo proporciona buenas predicciones.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,880385982	1,851447991	1,909323973
28/05/2015	1,881306914	1,840158169	1,922455659
29/05/2015	1,882227846	1,831557977	1,932897715
01/06/2015	1,883148778	1,824326532	1,941971024
02/06/2015	1,884069710	1,817955550	1,950183871

Tabla 2. Modelo diario - Predicción puntual de la log-cotización a corto plazo.  
Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander.

*Fuente: elaboración propia.*

En el Gráfico 2 se han representado los valores correspondientes a la predicción a 90 días, junto con sus intervalos de confianza, haciendo uso de las expresiones anteriormente mencionadas para la predicción a 5 días.

Como era previsible, conforme la predicción se realiza a más largo plazo, el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) y el Error Cuadrático Medio (RMSE) aumentan, lo cual se puede observar en los Gráficos 3 y 4. A partir del 8 de septiembre el MAPE es mayor del 5%, llegándose a superar el 8% el último día de predicción.

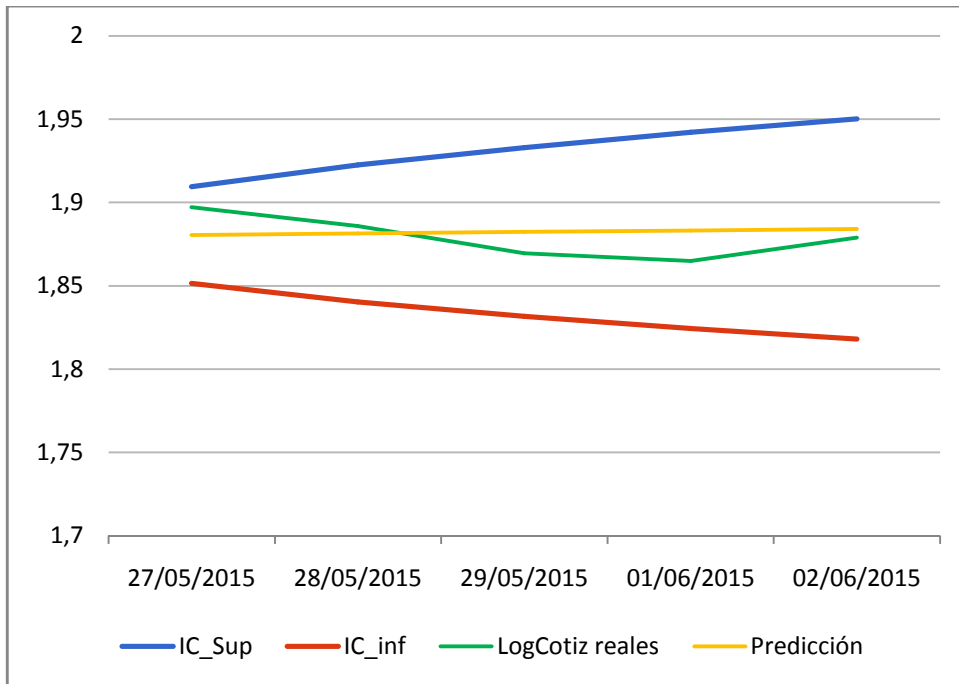


Gráfico 1. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días – B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

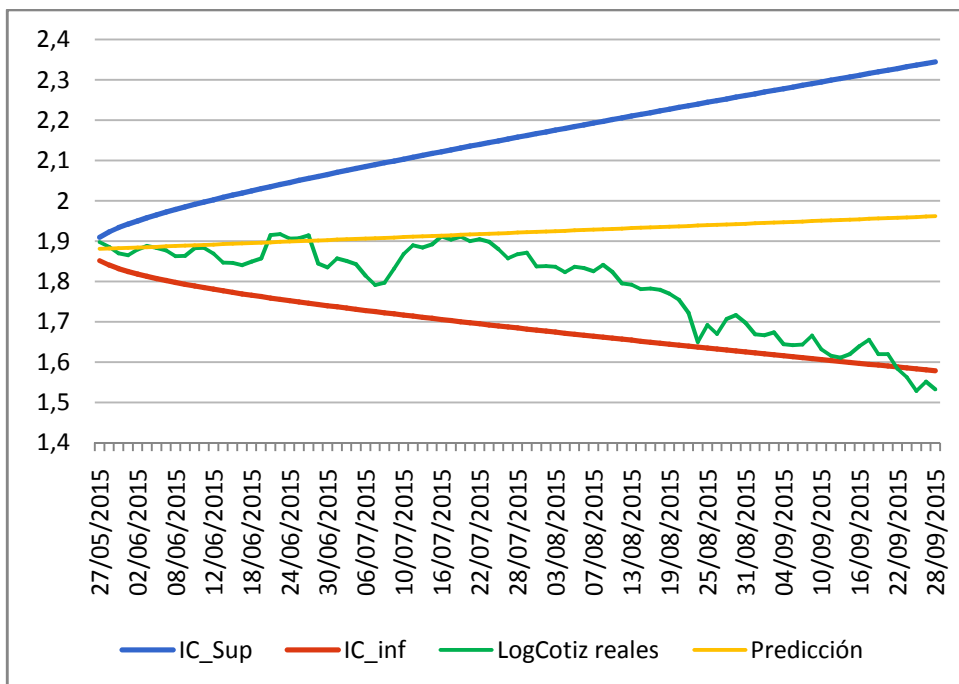


Gráfico 2. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

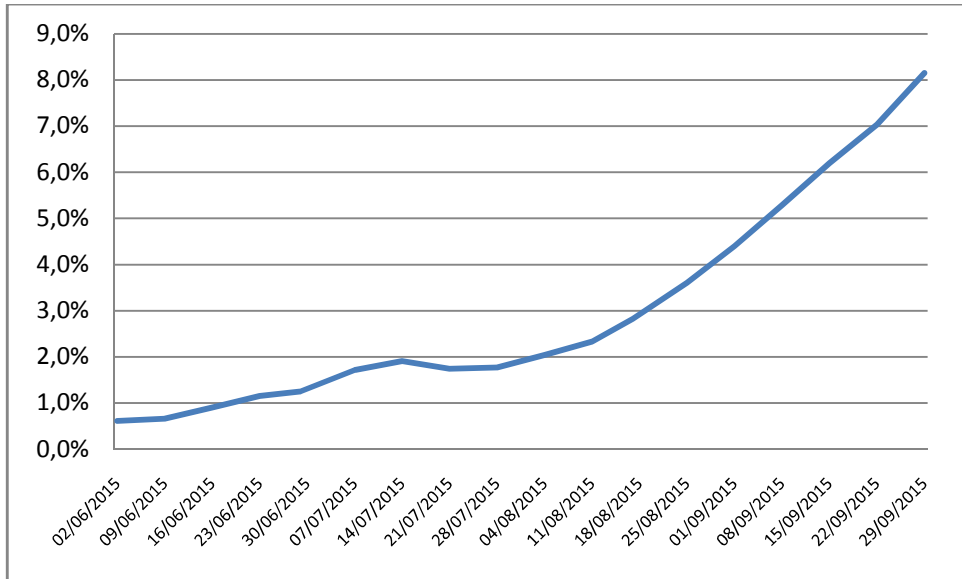


Gráfico 3. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del MAPE a 90 días – B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

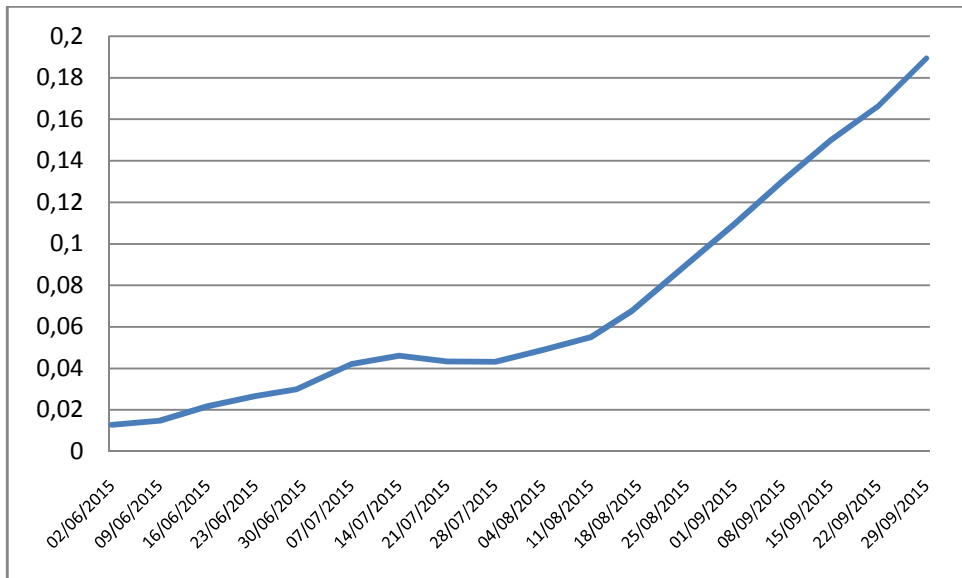


Gráfico 4. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del RMSE a 90 días – B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

Iberdrola

En la Tabla 3 se especifican las estimaciones puntuales,  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R$  y  $V$ , respectivamente, del modelo diario dado en (2.2.3) y (2.3.2) aplicando las fórmulas (2.3.17) y (2.3.18) respectivamente, para Iberdrola, empleando 90 muestras. También se incluyen las predicciones de dichos parámetros mediante intervalos de confianza aplicando las expresiones (2.3.21) y (2.3.22).

Estimador	Valor	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
$\hat{R}$	0,001291481	-0,001157750	0,003740713
$\hat{V}$	0,000140537	0,000099470	0,000181599

Tabla 3. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo. Parámetros e intervalos de confianza - Iberdrola.

*Fuente: elaboración propia.*

En la Tabla 4 se especifican las predicciones, para 5 días, de las log-cotizaciones considerando el modelo diario. Estas predicciones se han construido de forma puntual utilizando la expresión (2.3.26) y de forma probabilística mediante los intervalos de confianza dados en (2.3.31).

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,826808047	1,803443870	1,850172225
28/05/2015	1,828099529	1,794876539	1,861322519
29/05/2015	1,829391010	1,788480782	1,870301238
01/06/2015	1,830682491	1,783190134	1,878174848
02/06/2015	1,831973973	1,778594214	1,885353731

Tabla 4. Modelo diario - Predicción puntual de la log-cotización a corto plazo. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola.

*Fuente: elaboración propia.*



En el Gráfico 5 se han representado todos estos valores a 5 días. Se observa que el modelo proporciona buenas predicciones.

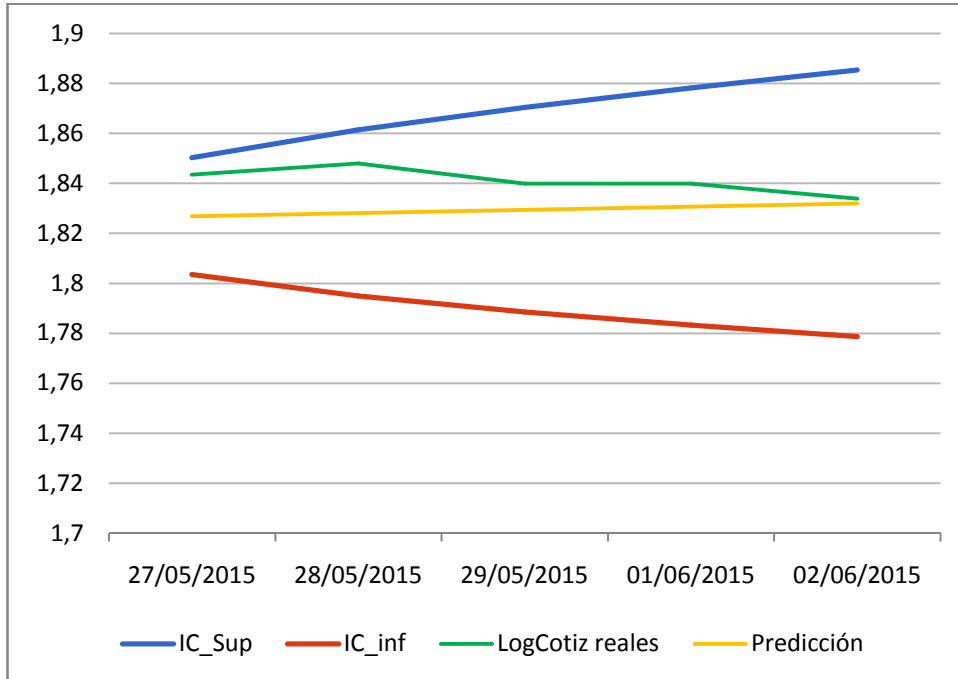


Gráfico 5. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior. Se observa así mismo cómo la predicción de la log-cotización se aproxima fielmente a la log-cotización real.

En el Gráfico 6 se han representado los valores correspondientes a la predicción a 90 días, junto con sus intervalos de confianza, haciendo uso de las expresiones anteriormente mencionadas para la predicción a 5 días.

Como era previsible, conforme la predicción se realiza a más largo plazo, el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) y el Error Cuadrático Medio (RMSE) aumentan, lo cual se puede observar en los Gráficos 7 y 8.

En el caso de Iberdrola, no se alcanza un MAPE del 5% en la predicción a 90 días, es decir, el modelo se ajusta mejor en el caso de este subyacente concreto. El último día de predicción el MAPE es casi del 4%.

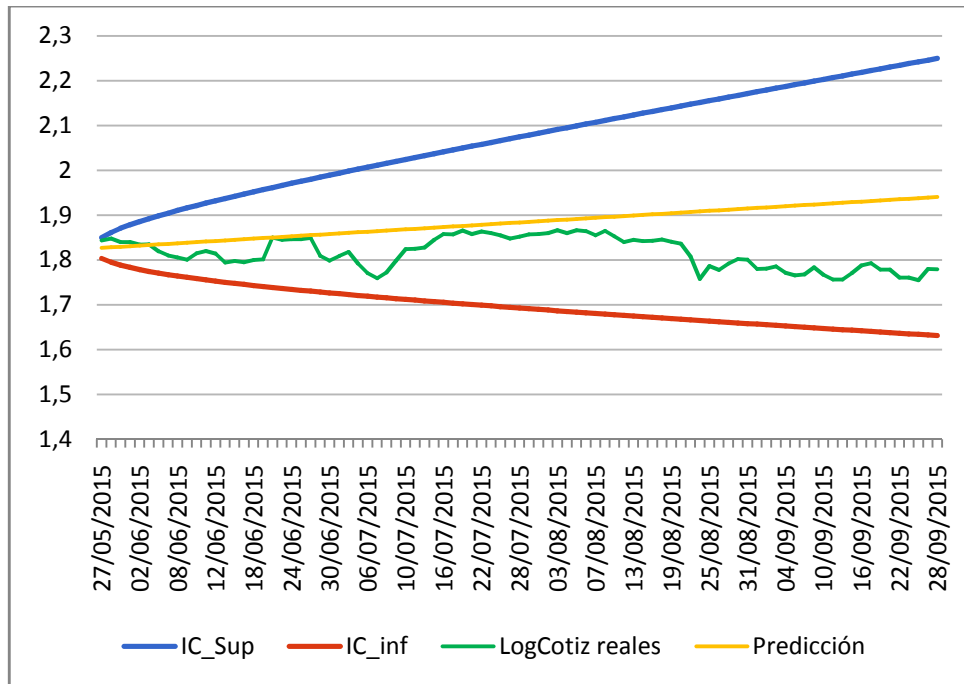


Gráfico 6. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

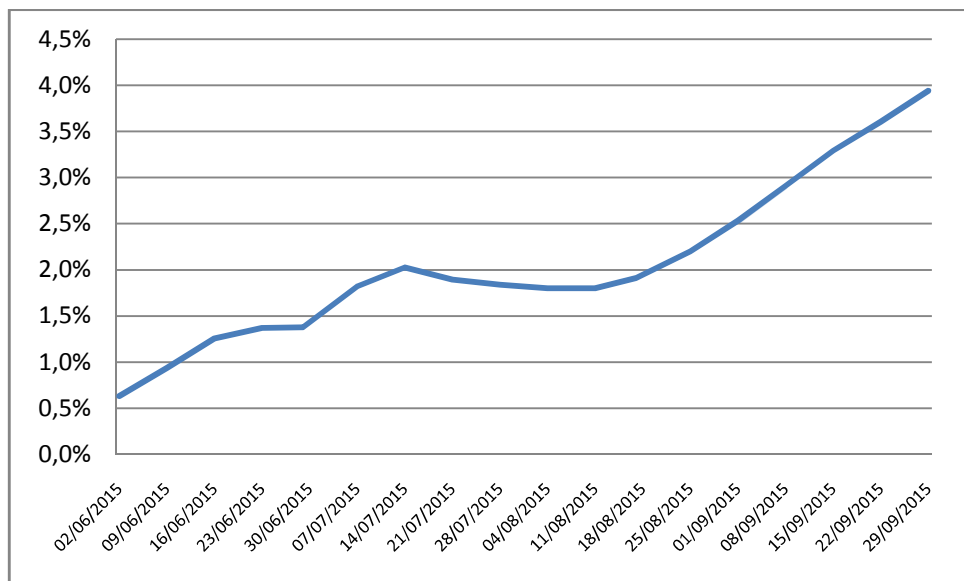


Gráfico 7. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo - Evolución del MAPE a 90 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

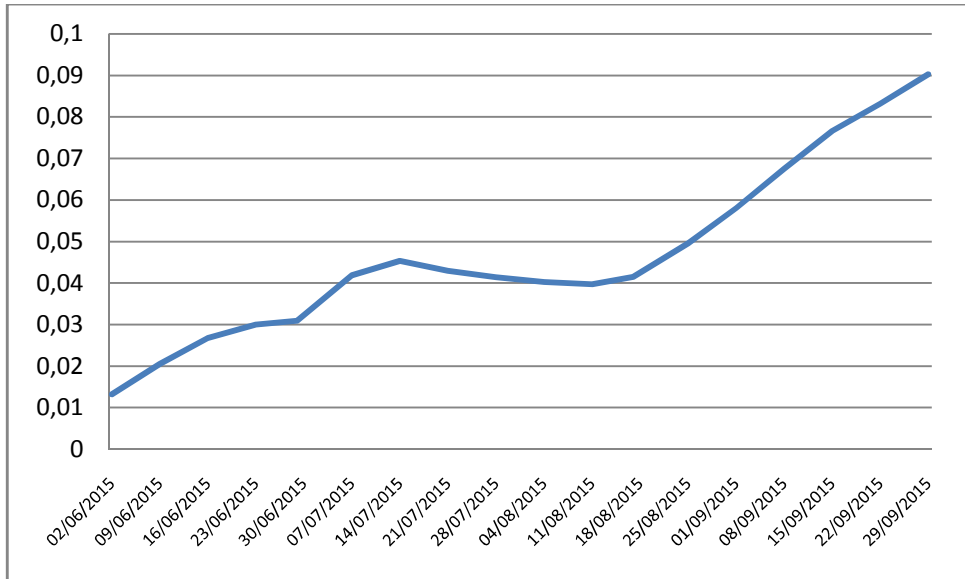


Gráfico 8. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del RMSE a 90 días – Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

### Telefónica

En la Tabla 5 se especifican las estimaciones puntuales,  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R$  y  $V$ , respectivamente, del modelo diario dado en (2.2.3) y (2.3.2) aplicando las fórmulas (2.3.17) y (2.3.18) respectivamente, para Telefónica, empleando 90 muestras. También se incluyen las predicciones de dichos parámetros mediante intervalos de confianza aplicando las expresiones (2.3.21) y (2.3.22).

Estimador	Valor	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
$\hat{R}$	0,001021241	-0,001433200	0,003475682
$\hat{V}$	0,000141135	0,000099898	0,000182372

Tabla 5. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo de la log-cotización. Parámetros e intervalos de confianza de la log-cotización - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 6 se especifican las predicciones, para 5 días, de las log-cotizaciones considerando el modelo diario. Estas predicciones se han construido de forma puntual utilizando la expresión (2.3.26) y de forma probabilística mediante los intervalos de confianza dados en (2.3.31).

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	2,560184662	2,536770788	2,583598535
28/05/2015	2,561205903	2,527912247	2,594499559
29/05/2015	2,562227144	2,521229898	2,603224390
01/06/2015	2,563248385	2,515655010	2,610841760
02/06/2015	2,564269626	2,510776327	2,617762925

Tabla 6. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización.  
Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

En el Gráfico 9 se han representado todos estos valores a 5 días. Se observa que el modelo proporciona buenas predicciones.

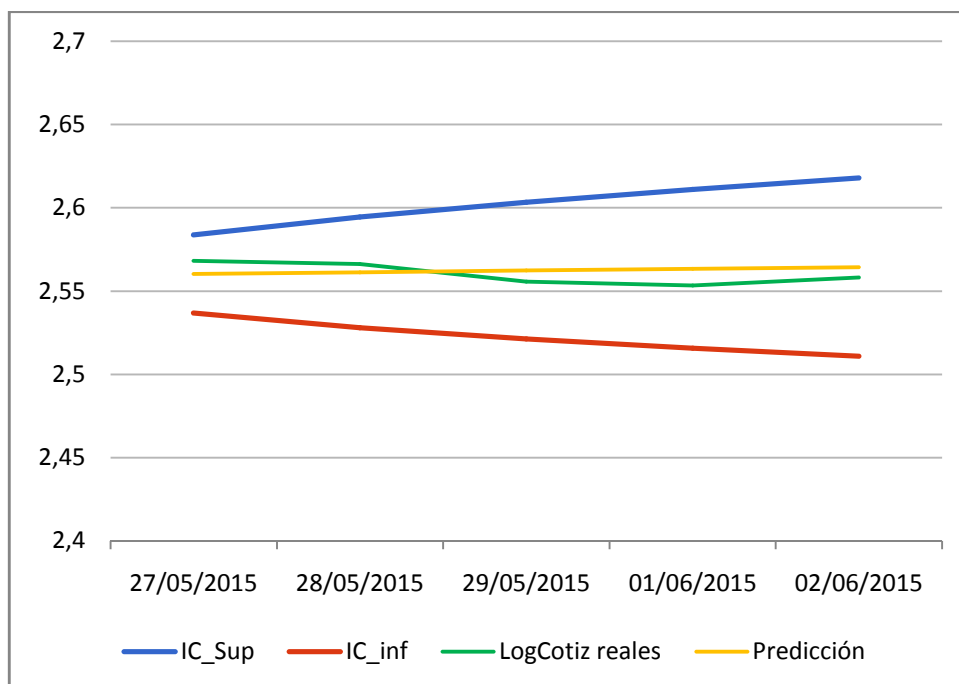


Gráfico 9. Modelo diario - Predicción puntual corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior. Se observa así mismo cómo la predicción de la log-cotización se aproxima fielmente a la log-cotización real.

En el Gráfico 10 se han representado los valores correspondientes a la predicción a 90 días, junto con sus intervalos de confianza, haciendo uso de las expresiones anteriormente mencionadas para la predicción a 5 días.

Como era previsible, conforme la predicción se realiza a más largo plazo, el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) y el Error Cuadrático Medio (RMSE) aumentan, lo cual se puede observar en los Gráficos 11 y 12.

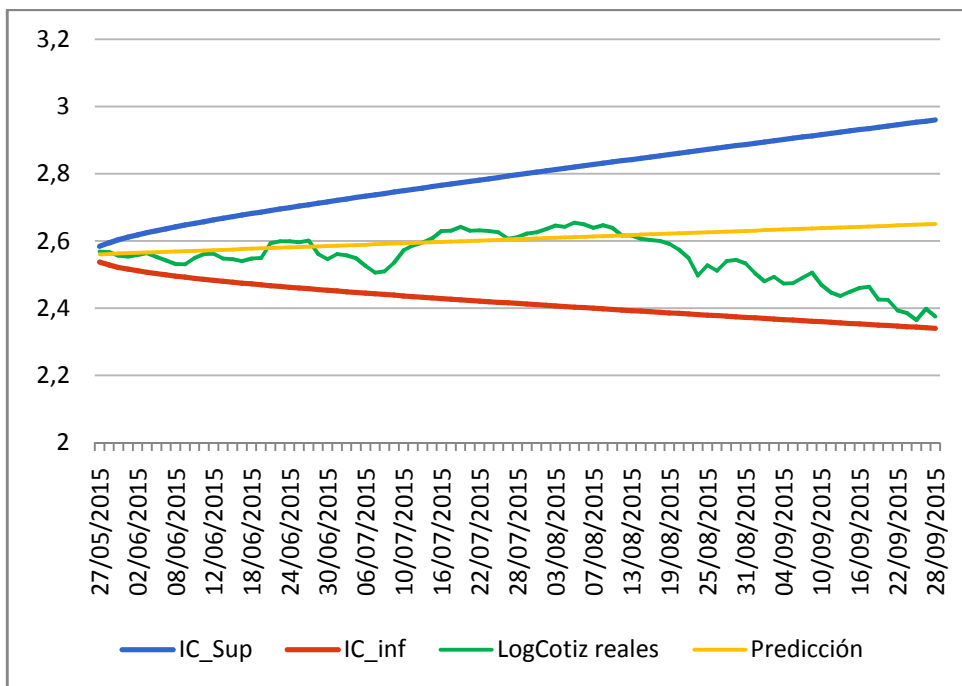


Gráfico 10. Modelo diario - Predicción puntual a corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

En el caso de Telefónica, tampoco se alcanza nunca el MAPE del 5% para la predicción que se realiza a 90 días. El último día de predicción el MAPE casi es del 3%. El subyacente al que mejor se adapta el modelo es Telefónica.

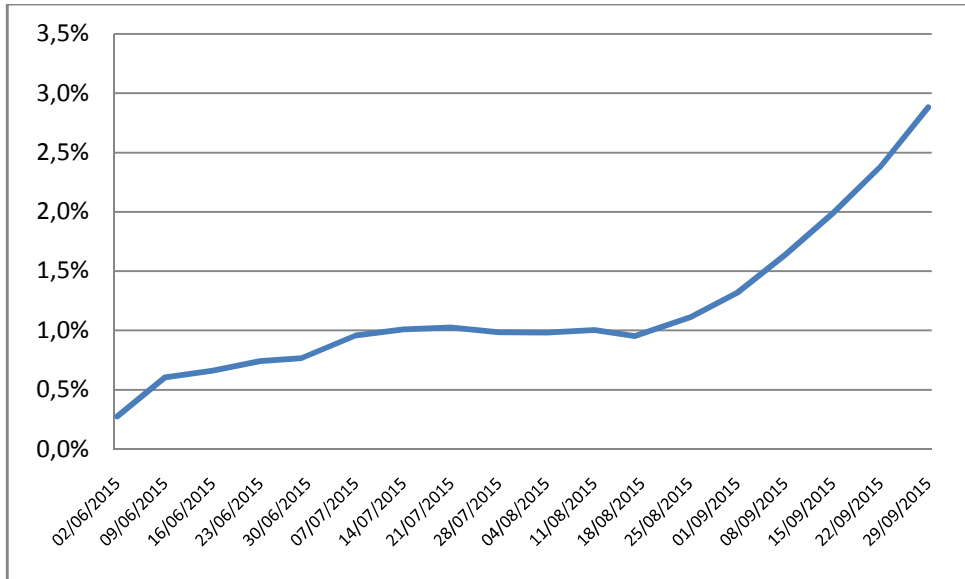


Gráfico 11. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del MAPE a 90 días – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

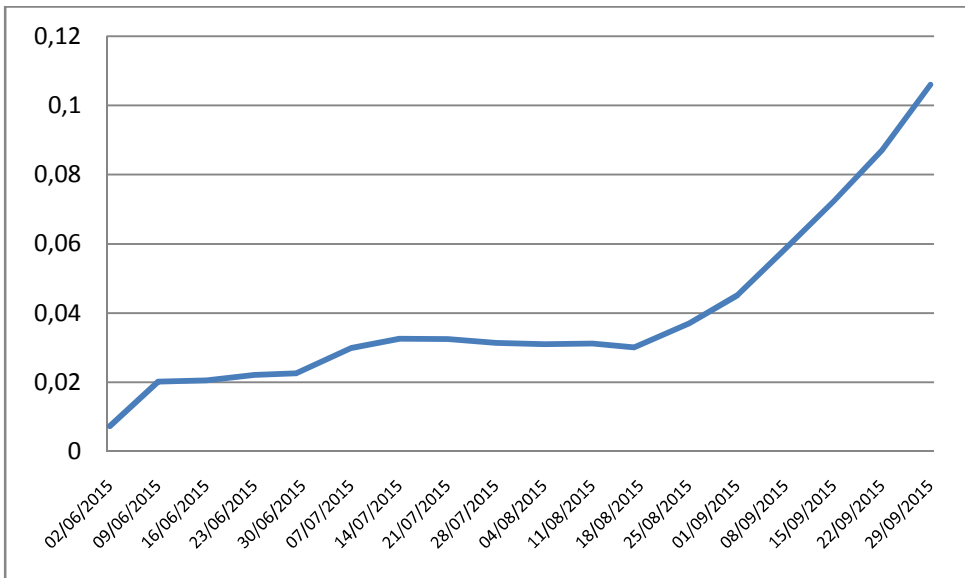


Gráfico 12. Modelo diario – Predicción puntual a corto plazo – Evolución del RMSE a 90 días – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Es importante hacer notar que, conforme la predicción se amplía en número de días, el error cometido es mayor, algo que sucede en menor medida en la predicción paso a paso, que estudiaremos a continuación.

### 2.3.6 Predicción puntual paso a paso.

En este apartado se desarrolla un método de predicción paso a paso basado en predicciones puntuales y predicciones probabilísticas con intervalos de confianza.

La predicción paso a paso consiste en utilizar las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  para predecir únicamente  $Y_{n+1}$ . A continuación, conocido el valor de la acción el día  $n + 1$ , denotado por  $Y_{n+1}$ , predecir el valor del subyacente el día siguiente,  $n + 2$ , denotado por  $Y_{n+2}$ , a partir de las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ , y así sucesivamente.

Este método “paso a paso” se basa por tanto en la misma idea del método “a corto plazo”, con el único cambio que la predicción dada en (2.3.26) ahora se toma  $t = n + 1$ .

$$\hat{Y}_{n+1} = Y_n + \hat{R}_n, \quad (2.3.32)$$

donde  $\hat{R}_n = \hat{R}$  definido en (2.3.17). En el instante  $t = n + 2$ , aplicando (2.3.26), se obtiene la predicción,

$$\hat{Y}_{n+2} = Y_{n+1} + \hat{R}_{n+1}. \quad (2.3.33)$$

Calculando  $\hat{R}_{n+1}$  a partir de las log-cotizaciones reales  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}$  según la adaptación de (2.3.17):

$$\hat{R}_{n+1} = \frac{Y_{n+1} - Y_0}{n + 1}. \quad (2.3.34)$$

En el instante  $t = n + 3$ , aplicando (2.3.26), se obtiene la predicción,

$$\hat{Y}_{n+3} = Y_{n+2} + \hat{R}_{n+2}. \quad (2.3.35)$$

Calculando  $\hat{R}_{n+2}$  a partir de las log-cotizaciones reales  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}$  según la adaptación de (2.3.17):

$$\hat{R}_{n+2} = \frac{Y_{n+2} - Y_0}{n + 2}. \quad (2.3.36)$$

Y el proceso continua de la misma forma para realizar predicciones posteriores.

En general, por tanto, conocidas las log-cotizaciones reales  $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ , la predicción puntual será:

$$\hat{Y}_{m+1} = Y_m + \hat{R}_m. \quad (2.3.37)$$

### 2.3.7 Predicción probabilística por intervalos de confianza paso a paso.

Para construir las predicciones probabilísticas aprovechamos los resultados obtenidos en el Apartado 2.3.4.

A partir de las log-cotizaciones reales  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ , se construye el intervalo de confianza para la predicción de  $Y_{n+1}$  dado en (2.3.31) tomando  $t \rightarrow n + 1$ ,

$$\hat{Y}_{n+1} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \quad (2.3.38)$$

donde  $Y_{n+1}$  está definido en (2.3.32) y  $\hat{V}_n = \hat{V}$  dado en (2.3.18).

Por tanto, la predicción puntual y por intervalos de confianza al nivel  $1 - \alpha$  para el instante  $n + 1$  están dados por (2.3.32) y (2.3.38) respectivamente.

A partir de las log-cotizaciones reales  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ , se construye el intervalo de confianza para la predicción de  $Y_{n+2}$  tomando,

$$\hat{Y}_{n+2} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}, \quad (2.3.39)$$

donde  $\hat{V}_{n+1}$ , adaptando (2.3.18), viene dado por,

$$\hat{V}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_{n+1})^2, \quad (2.3.40)$$

siendo  $\hat{R}_{n+1}$  el valor definido en (2.3.34).

Del mismo modo, a partir de las log-cotizaciones reales  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}$ , se construye el intervalo de confianza para la predicción de  $Y_{n+3}$ ,

$$\hat{Y}_{n+3} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}_{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)}, \quad (2.3.41)$$

donde  $\hat{V}_{n+2}$ , adaptando (2.3.18), viene dado por,

$$\hat{V}_{n+2} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+2} (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_{n+2})^2, \quad (2.3.42)$$

siendo  $\hat{R}_{n+2}$  el valor definido en (2.3.36).

El proceso de construcción de los intervalos de confianza siguientes se sigue de forma análoga.



En general, por tanto, conocidas las log-cotizaciones,  $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$ , la predicción probabilística por intervalos de confianza será:

$$\hat{Y}_m \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}_m \left(1 + \frac{1}{m}\right)}, \quad (2.3.43)$$

$$\hat{Y}_{m+1} = Y_m + \hat{R}_m. \quad (2.3.44)$$

### 2.3.8 Resultados obtenidos empleando predicción puntual paso a paso.

#### Banco Santander

En la Tabla 7 se especifican las estimaciones puntuales de los parámetros para los cinco días siguientes a la última cotización disponible,  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R$  y  $V$ , respectivamente, del modelo diario con predicción puntual paso a paso dado en (2.3.37), aplicando las fórmulas (2.3.34) y (2.3.40), para Banco Santander, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores).

Estimador	Valor	Estimador	Valor
$\hat{R}_{27/05/2015}$	0,001105372	$\hat{V}_{27/05/2015}$	0,000216281
$\hat{R}_{28/05/2015}$	0,000968738	$\hat{V}_{28/05/2015}$	0,000215629
$\hat{R}_{29/05/2015}$	0,000782327	$\hat{V}_{29/05/2015}$	0,000216507
$\hat{R}_{01/06/2015}$	0,000726318	$\hat{V}_{01/06/2015}$	0,000214496
$\hat{R}_{02/06/2015}$	0,000866032	$\hat{V}_{02/06/2015}$	0,000214073

Tabla 7. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización.  
Parámetros del modelo en los 5 días de predicción – Banco Santander.

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 8 se proporciona las predicciones de las log-cotizaciones a 5 días dadas por (2.3.32) así como sus intervalos de confianza superior e inferior que vienen dados por (2.3.43). En el Gráfico 13 se puede observar la representación gráfica de estas predicciones, sus intervalos de confianza y la log-cotización real. La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,880385982	1,851447991	1,909323973
28/05/2015	1,898275355	1,869292674	1,927258036
29/05/2015	1,886673820	1,85773657	1,915611071
01/06/2015	1,870119931	1,841125482	1,899114381
02/06/2015	1,865581342	1,836723530	1,894439154

Tabla 8. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización.  
Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

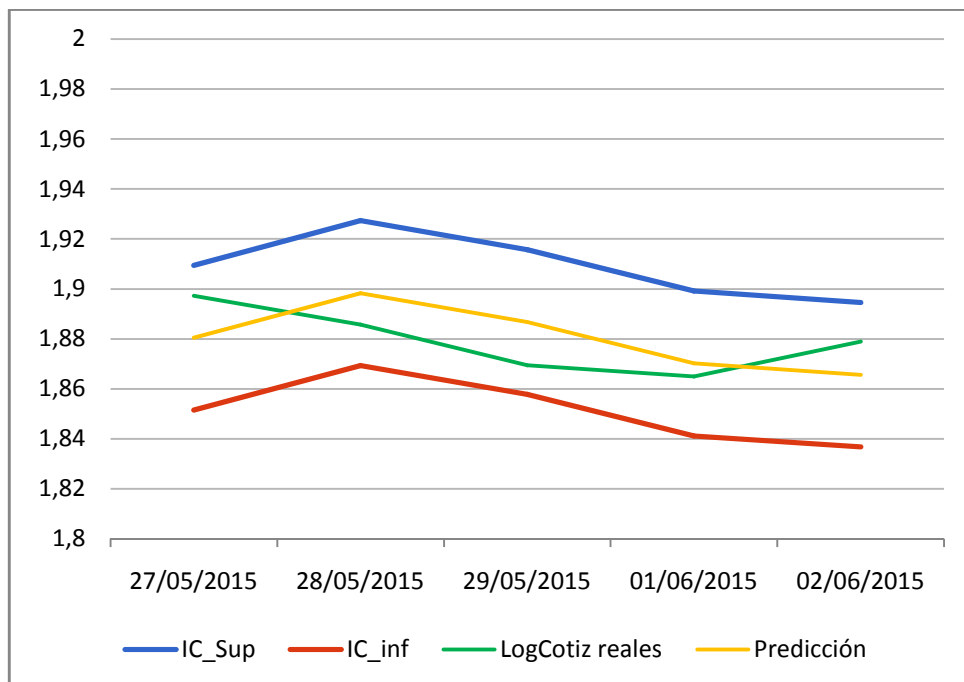


Gráfico 13. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza a 5 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

Se observa como el modelo de estimación puntual paso a paso se ajusta mejor que el modelo de estimación puntual a corto plazo, lo cual era de esperar al incorporar el primero las últimas log-cotizaciones disponibles. Esto se confirma si se amplía el

número de predicciones, como se puede observar en el Gráfico 14 en el que se muestra la predicción a 90 días.

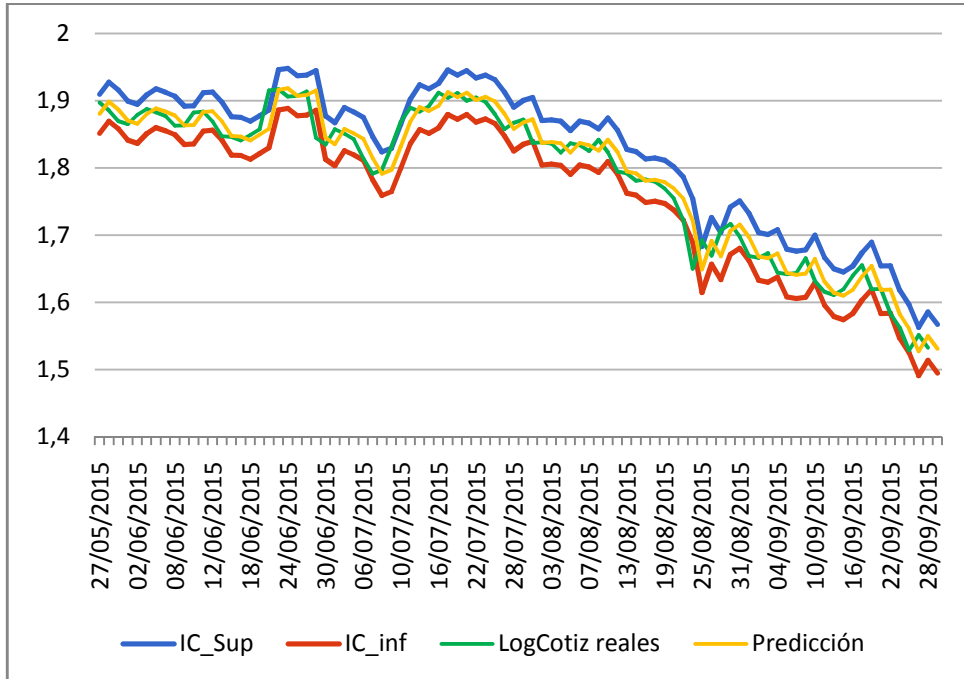


Gráfico 14. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

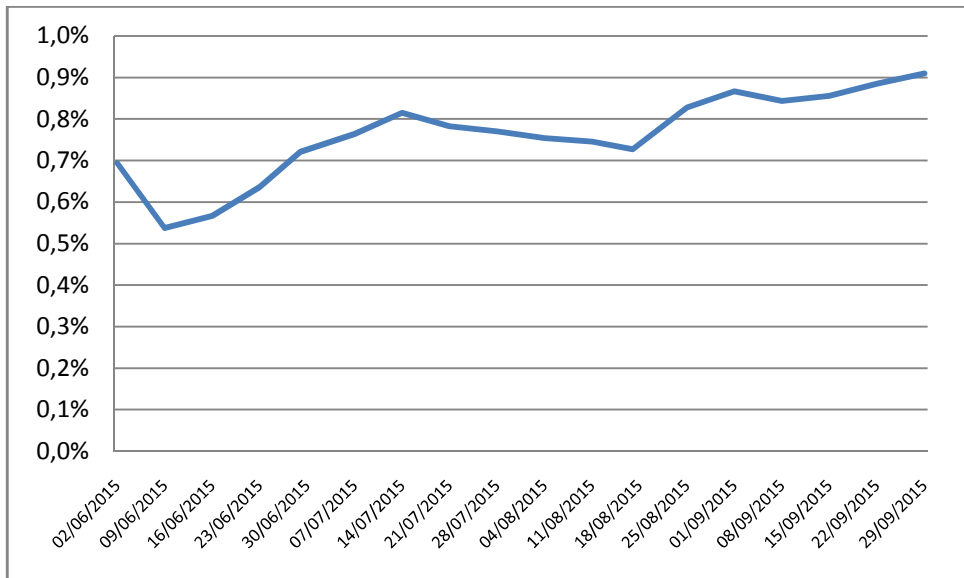


Gráfico 15. Modelo diario - Predicción puntual a paso a paso - Evolución del MAPE a 90 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

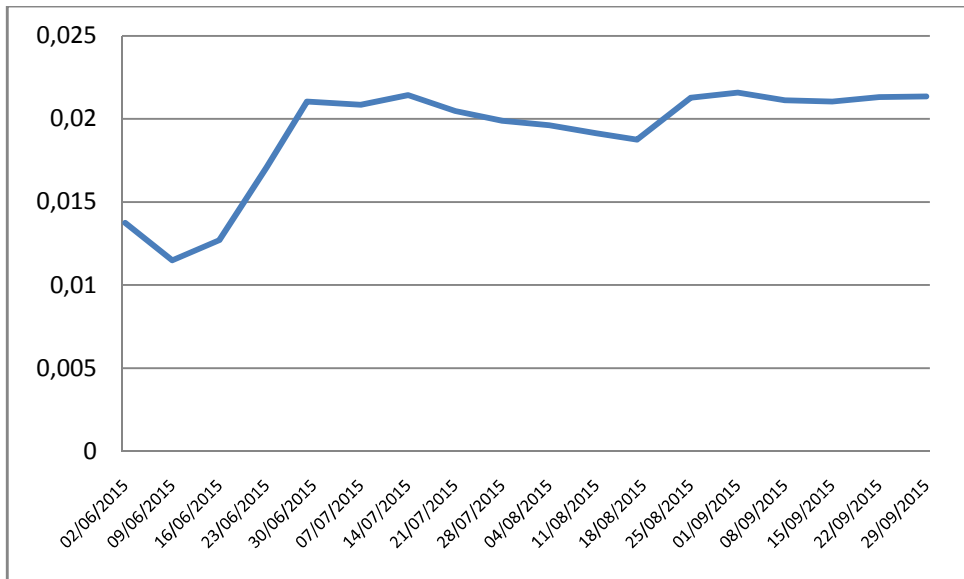


Gráfico 16. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del RMSE a 90 días – B. Santander.  
Fuente: elaboración propia.

Los Gráficos 15 y 16 muestran la evolución del MAPE y RMSE en los 90 días de predicción. Tanto el MAPE como el RMSE son mucho menores en comparación con el modelo de predicción puntual a corto plazo.

### Iberdrola

En la Tabla 9 se especifican las estimaciones puntuales de los parámetros para los cinco días siguientes a la última cotización disponible,  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R$  y  $V$ , respectivamente, del modelo diario con predicción puntual paso a paso dado en (2.3.37), aplicando las fórmulas (2.3.34) y (2.3.40), para Iberdrola, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores).

Estimador	Valor	Estimador	Valor
$\hat{R}_{27/05/2015}$	0,001473840	$\hat{V}_{27/05/2015}$	0,000141985
$\hat{R}_{28/05/2015}$	0,001507598	$\hat{V}_{28/05/2015}$	0,000140546
$\hat{R}_{29/05/2015}$	0,001404637	$\hat{V}_{29/05/2015}$	0,000140010
$\hat{R}_{01/06/2015}$	0,001389694	$\hat{V}_{01/06/2015}$	0,000138541
$\hat{R}_{02/06/2015}$	0,001311341	$\hat{V}_{02/06/2015}$	0,000137660

Tabla 9. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización.  
Parámetros del modelo en los 5 días de predicción – Iberdrola.  
Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 10 se proporciona las predicciones de las log-cotizaciones a 5 días dadas por (2.3.32) así como sus intervalos de confianza superior e inferior que vienen dados por (2.3.43). En el Gráfico 17 se puede observar la representación gráfica de estas predicciones, sus intervalos de confianza y la log-cotización real. La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,826808047	1,803443870	1,850172225
28/05/2015	1,844876543	1,821393680	1,868359405
29/05/2015	1,849489858	1,826127728	1,872851989
01/06/2015	1,841319148	1,818002953	1,864635344
02/06/2015	1,841304205	1,818111938	1,864496472

Tabla 10. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

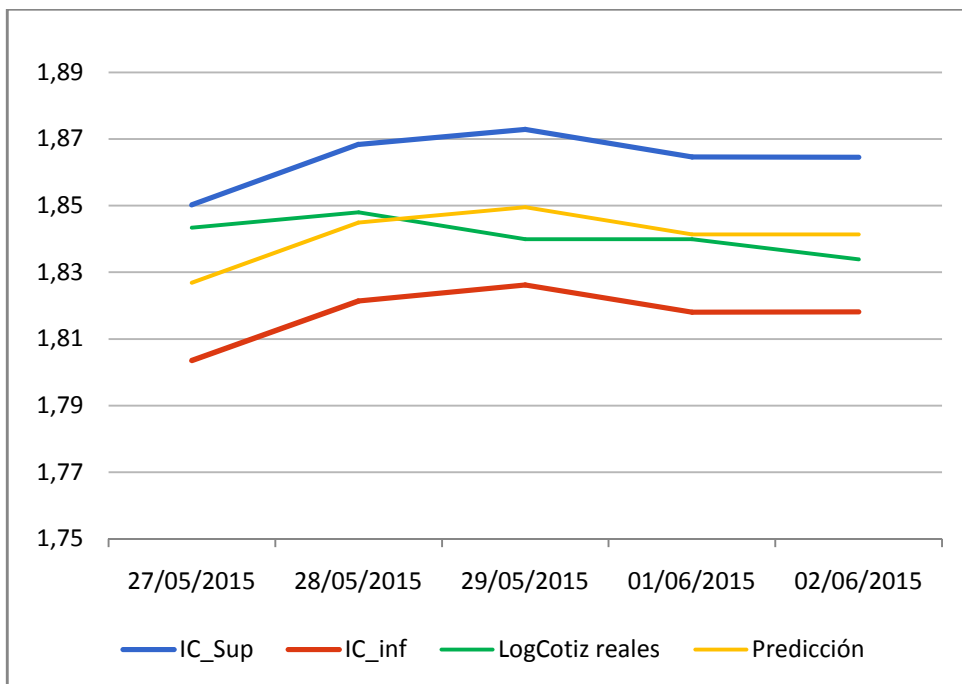


Gráfico 17. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza a 5 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

Se observa como el modelo de estimación puntual paso a paso se ajusta mejor que el modelo de estimación puntual a corto plazo, lo cual era de esperar al incorporar el primero las últimas log-cotizaciones disponibles. Esto se confirma si se amplía el número de predicciones, como se puede observar en el Gráfico 18 en el que se muestra la predicción a 90 días.

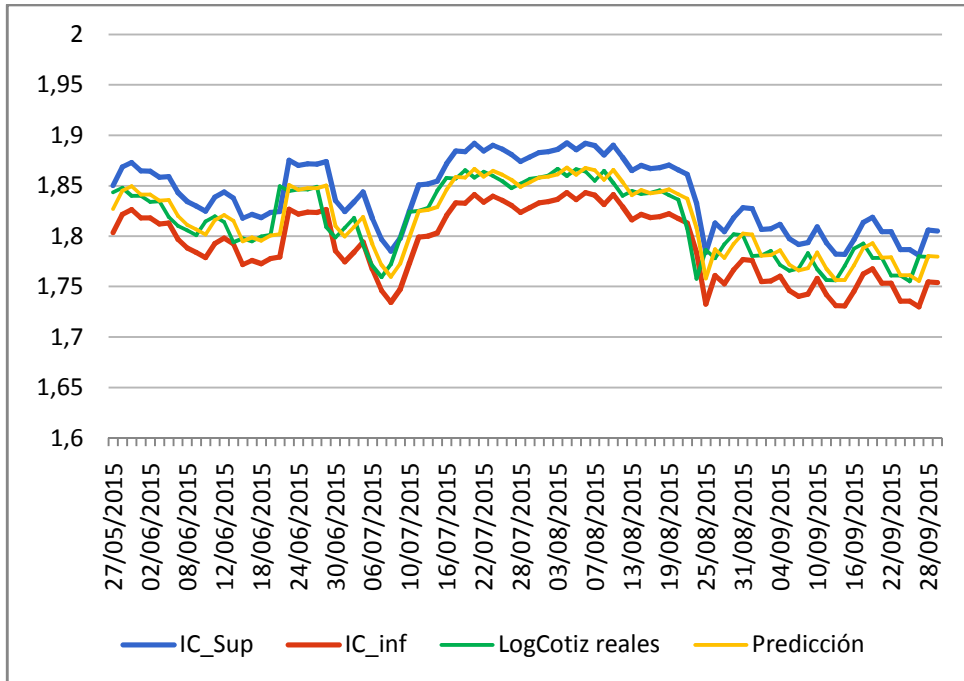


Gráfico 18. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

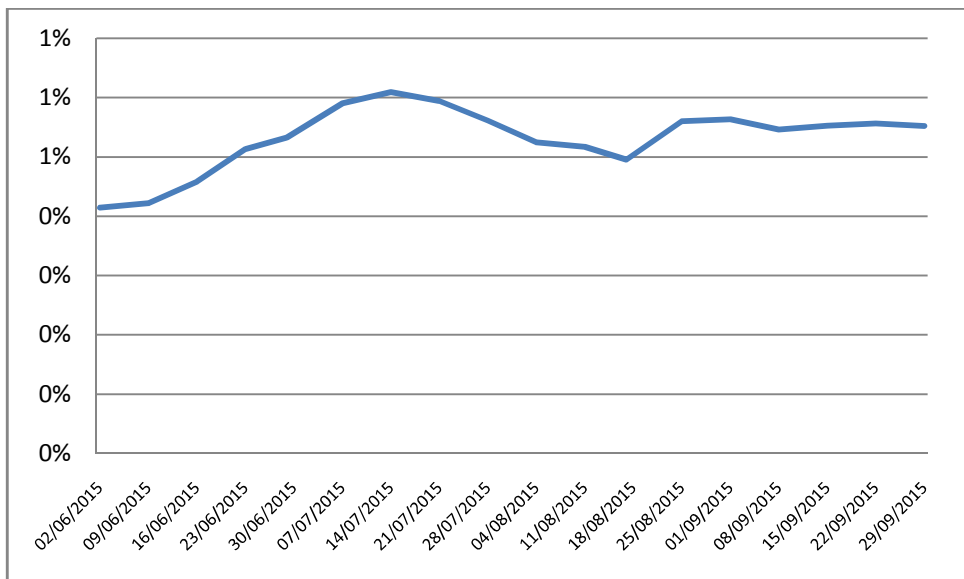


Gráfico 19. Modelo diario - Predicción puntual a paso a paso - Evolución del MAPE a 90 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

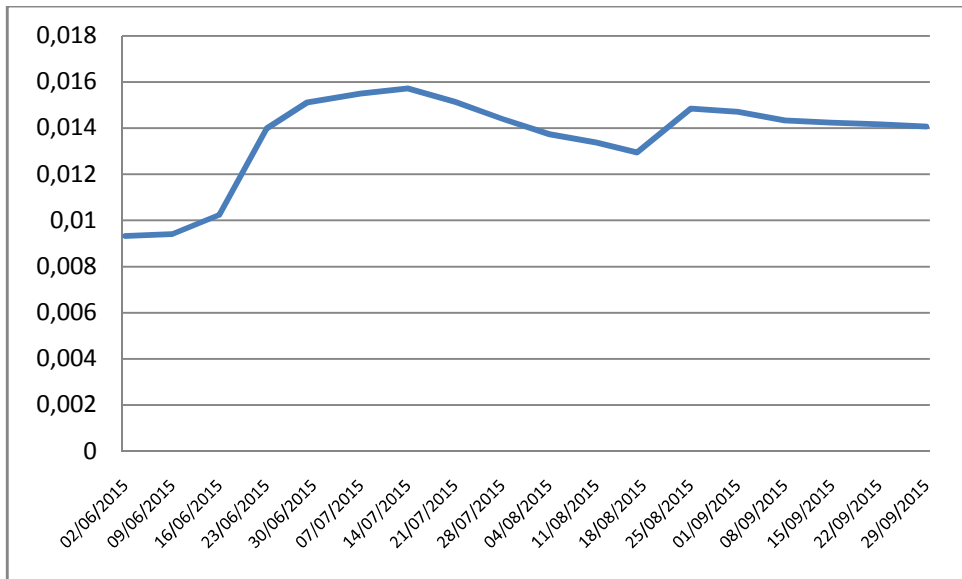


Gráfico 20. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del RMSE a 90 días – Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

Los Gráficos 19 y 20 muestran la evolución del MAPE y RMSE en los 90 días de predicción. Tanto el MAPE como el RMSE son mucho menores en comparación con el modelo de predicción puntual a corto plazo, lo cual confirma que el modelo de predicción puntual paso a paso es mejor que el modelo de predicción puntual a corto plazo.

### Telefónica

En la Tabla 11 se especifican las estimaciones puntuales de los parámetros para los cinco días siguientes a la última cotización disponible,  $\hat{R}$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R$  y  $V$ , respectivamente, del modelo diario con predicción puntual paso a paso dado en (2.3.37), aplicando las fórmulas (2.3.34) y (2.3.40), para Telefónica, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores).

En la Tabla 12 se proporciona las predicciones de las log-cotizaciones a 5 días dadas por (2.3.32) así como sus intervalos de confianza superior e inferior que vienen dados por (2.3.43).

En el Gráfico 21 se puede observar la representación gráfica de estas predicciones, sus intervalos de confianza y la log-cotización real. La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior.

Estimador	Valor	Estimador	Valor
$\hat{R}_{27/05/2015}$	0,001107361	$\hat{V}_{27/05/2015}$	0,000140252
$\hat{R}_{28/05/2015}$	0,001074465	$\hat{V}_{28/05/2015}$	0,000138826
$\hat{R}_{29/05/2015}$	0,000950796	$\hat{V}_{29/05/2015}$	0,000138740
$\hat{R}_{01/06/2015}$	0,000915873	$\hat{V}_{01/06/2015}$	0,000137378
$\hat{R}_{02/06/2015}$	0,000955268	$\hat{V}_{02/06/2015}$	0,000136077

Tabla 11. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización.  
Parámetros del modelo en los 5 días de predicción – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	2,560184662	2,536770788	2,583598535
28/05/2015	2,569128917	2,545789848	2,592467987
29/05/2015	2,567177004	2,543958259	2,590395749
01/06/2015	2,556626516	2,533416280	2,579836753
02/06/2015	2,554259685	2,531165008	2,577354362

Tabla 12. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso de la log-cotización.  
Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Se observa como el modelo de estimación puntual paso a paso se ajusta mejor que el modelo de estimación puntual a corto plazo, lo cual era de esperar al incorporar el primero las últimas log-cotizaciones disponibles. Esto se confirma si se amplía el número de predicciones, como se puede observar en el Gráfico 22 en el que se muestra la predicción a 90 días.



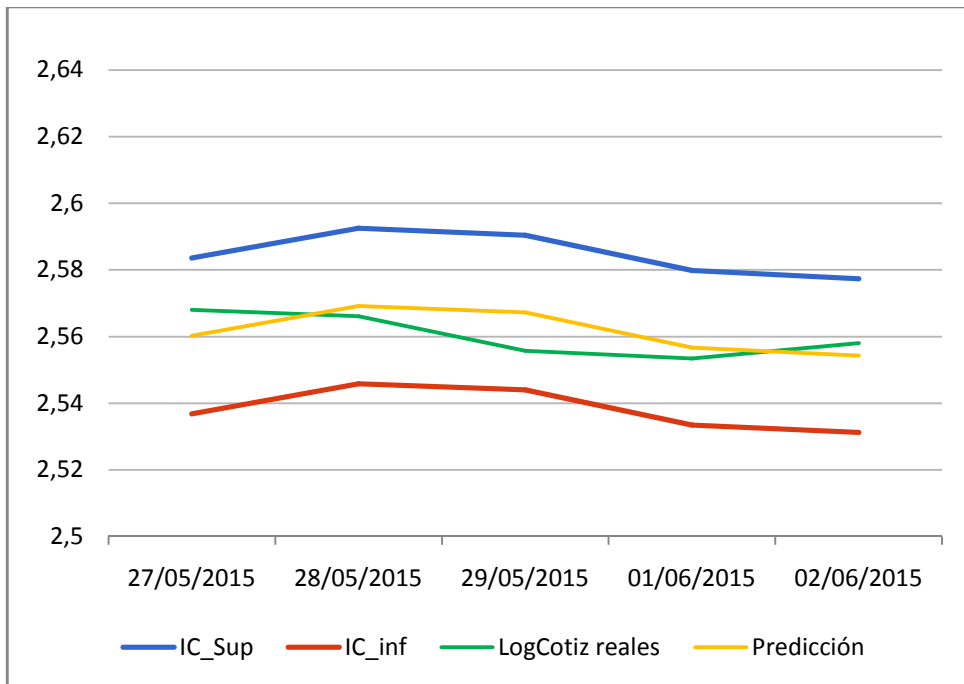


Gráfico 21. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza a 5 días – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

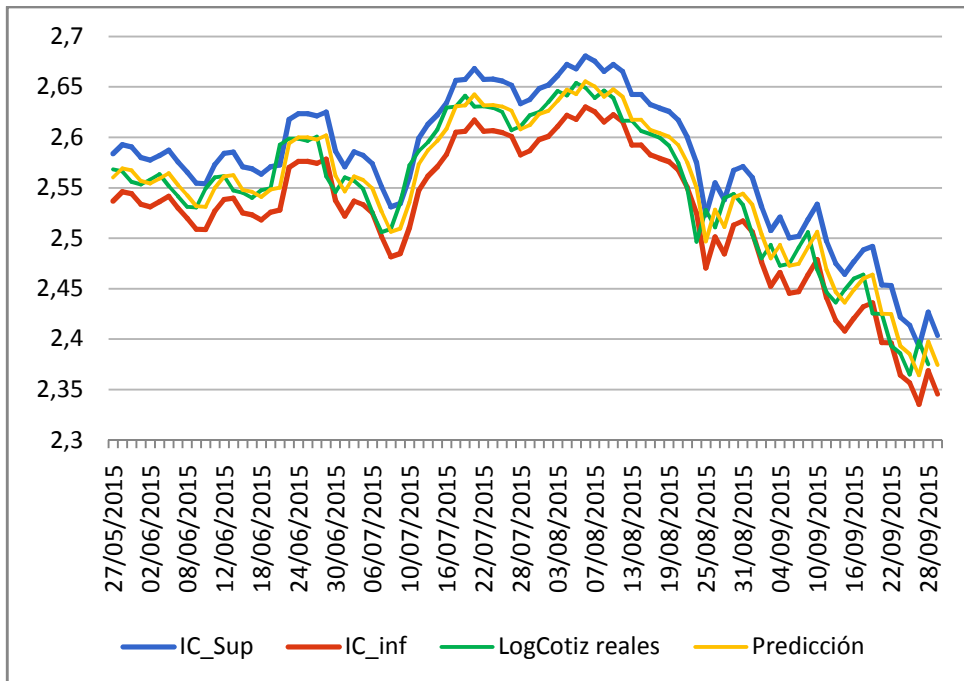


Gráfico 22. Modelo diario - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 90 días – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

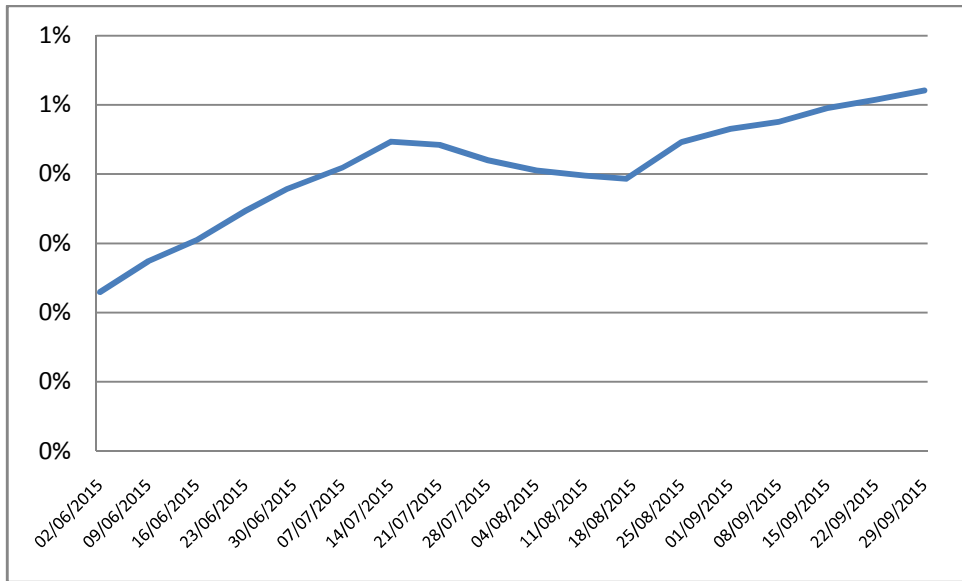


Gráfico 23. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del MAPE a 90 días – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

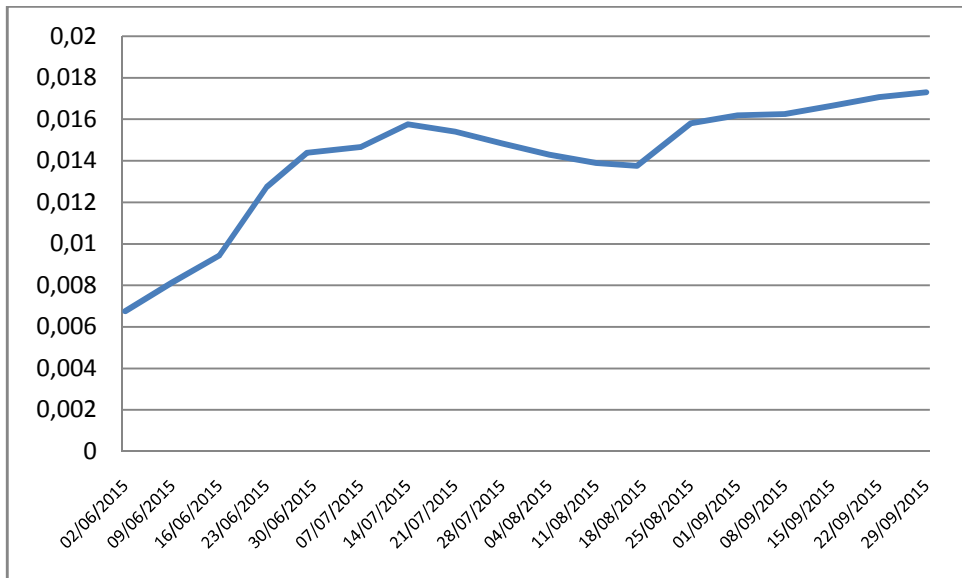


Gráfico 24. Modelo diario – Predicción puntual a paso a paso – Evolución del RMSE a 90 días – Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Los Gráficos 23 y 24 muestran la evolución del MAPE y RMSE en los 90 días de predicción. Tanto el MAPE como el RMSE son mucho menores en comparación con el modelo de predicción puntual a corto plazo, lo cual confirma que el modelo de predicción puntual paso a paso es mejor que el modelo de predicción puntual a corto plazo.

## 2.4 Modelo semanal.

Recordemos que este modelo se denominará Modelo 2, o Modelo semanal. Como este modelo es similar en su desarrollo al Modelo 1, o Modelo diario, la exposición del Modelo 2 se realizará de forma más sucinta.

El objetivo del Modelo 2 es estudiar el efecto del día de la semana en las cotizaciones de un subyacente financiero. Por ello, a diferencia del Modelo 1, ahora en el Modelo 2 aparecerán cinco tasas de rendimiento:  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ , correspondientes a los lunes, martes, miércoles, jueves y viernes, respectivamente, en lugar de una única tasa de rendimiento  $R$  como sucede en el Modelo 1. Análogamente a como se procedió en el Modelo 1, también ahora se considera discretización del tiempo  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Es conveniente introducir la siguiente notación que simplificará la exposición del Modelo 2:

$$K(i) = d, \quad d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4.1)$$

y que asocia a cada día de la serie de cotizaciones disponible ( $i = 0$  corresponde al primer día de cotización,  $i = 1$  corresponde al segundo día de cotización, etc.) el día de la semana que le corresponda ( $d = 1$  (lunes),  $d = 2$  (martes),  $d = 3$  (miércoles),  $d = 4$  (jueves),  $d = 5$  (viernes)). Por ejemplo, si  $K(20) = 3$ , significa que el vigésimo día de cotización fue un miércoles. Por tanto,  $R_{K(i)}$  representa la tasa de rendimiento del día  $i$  (cuyo día de la semana será el valor  $K(i) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ).

### 2.4.1 Estimación puntual de parámetros.

Con la identificación  $S(t) = S(k)$ , es decir,  $t = k$ , las expresiones (2.3.2) y (2.3.3) conducen ahora al modelo de log-cotizaciones:

$$\begin{aligned} \ln(S(k)) &= \ln(S_0) + \sum_{i=1}^k R_{K(i)} + \sigma W(k) \\ &= \ln(S_0) + \sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^k R_d + \sigma W(k). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Usando la notación introducida en (2.3.2) y (2.3.3), esta expresión se reescribe, para  $k$  y  $k - 1$ , respectivamente, de la forma,

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= Y_0 + \sum_{i=1}^k R_{K(i)} + \sqrt{V}W(k), \\ Y_{k-1} &= Y_0 + \sum_{i=1}^{k-1} R_{K(i)} + \sqrt{V}W(k-1), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

y restando la segunda expresión de la primera, se obtiene,

$$Y_k = Y_{k-1} + R_{K(k)} + \sqrt{V}(W(k) - W(k-1)). \quad (2.4.4)$$

Teniendo en cuenta que por las propiedades el proceso de Wiener,  $W(k) - W(k-1) \sim N(0; 1)$ , se deduce que la distribución de  $Y_k$  dado  $Y_{k-1}$  es gaussiana de media  $Y_{k-1} + R_{K(k)}$  y varianza  $V$ .

$$Y_k | Y_{k-1} \sim N(Y_{k-1} + R_{K(k)}; V). \quad (2.4.5)$$

Siguiendo un proceso análogo al desarrollado para el Modelo 1, es sencillo probar que la función de log-verosimilitud ahora viene dada por:

$$\begin{aligned} L(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, V; Y_0, Y_1, \dots, Y_n) &= \sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^n \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{1}{2V}(Y_i - Y_{i-1} - R_d)^2} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(V) - \frac{1}{2V} \sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^n (Y_i - Y_{i-1} - R_d)^2. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Los estimadores máximo verosímiles son:

$$\hat{R}_d = \frac{1}{n_d} \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^n (Y_i - Y_{i-1}), \quad d = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (2.4.7)$$

siendo  $n_d$  el número de días total,  $n$ , que son el día  $d$  (por ejemplo, si hay 121 cotizaciones,  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{120}$ ,  $n = 120$ , y si  $d = 2$ , vemos de esos días cuántos fueron martes ( $d = 2$ ), si por ejemplo, hubieran 21 martes, entonces  $n_2 = 21$ ), y

$$\hat{V} = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^n (Y_i - Y_{i-1} - \hat{R}_d)^2. \quad (2.4.8)$$

## 2.4.2 Estimación probabilística por intervalos de confianza de los parámetros.

La matriz de información de Fisher para el Modelo 2 se obtiene de forma análoga a como se describió para el Modelo 1. Dicha matriz es diagonal e invertible, y su inversa

es la matriz de varianza-covarianza asintótica de los estimadores máximo verosímiles dados en (2.4.7) y (2.4.8), y está dada por:

$$Inf^{-1} = \begin{bmatrix} V/n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V/n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V/n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V/n_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V/n_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V^2/n \end{bmatrix}, \quad n = \sum_{d=1}^5 n_d. \quad (2.4.9)$$

A partir de esta matriz  $Inf^{-1}$  se pueden obtener los intervalos de confianza aproximados para los seis parámetros del modelo:

$$\hat{R}_d \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{V}}{n_d}}, \quad d = 1,2,3,4,5, \quad (2.4.10)$$

$$\hat{V} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2\hat{V}^2}{n}}, \quad (2.4.11)$$

siendo  $z_q$  el cuartil de orden  $q$  de la distribución normal estándar.

### 2.4.3 Predicción puntual a corto plazo.

Del mismo modo que se presentó para el Modelo 1 en el apartado 2.3.3, ahora, a partir de las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ , el predictor de  $Y_t$  con  $t > n$  es:

$$\hat{Y}_t = E[Y_t | Y_1, \dots, Y_n] = Y_n + \sum_{i=n+1}^t R_K(i). \quad (2.4.12)$$

Como no conocemos el valor exacto de  $R_K(i)$ , usaremos como predictor,

$$\hat{Y}_t = Y_n + \sum_{i=n+1}^t \hat{R}_K(i). \quad (2.4.13)$$

### 2.4.4 Predicción probabilística por intervalos de confianza a corto plazo.

En este contexto aprovecharemos que sabemos que el error de predicción  $\hat{Y}_t - Y_t$  sigue la siguiente distribución:

$$\hat{Y}_t - Y_t \sim N\left(0; \hat{V} \sum_{d=1}^5 \frac{m_d(m_d + n_d)}{n_d}\right), \quad (2.4.14)$$

siendo  $m_d$  el número de días observados entre  $n$  y  $t$  cuyo día de la semana es  $d$ , es decir, el número de elementos del conjunto,

$$i \in \{n + 1, n + 2, \dots, t : K(i) = d\}. \quad (2.4.15)$$

Sustituyendo  $V$  por  $\hat{V}$ , se obtiene el intervalo de confianza de la predicción a corto plazo:

$$\hat{Y}_t \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V} \sum_{d=1}^5 \frac{m_d(m_d + n_d)}{n_d}}. \quad (2.4.16)$$

## 2.4.5 Resultados obtenidos empleando predicción puntual a corto plazo.

### Banco Santander

En la Tabla 13 se especifican las estimaciones puntuales,  $\hat{R}_d$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R_d$  y  $V$ , respectivamente, del modelo semanal dado en (2.4.4) aplicando las fórmulas (2.4.7) y (2.4.8) para el Banco Santander, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores). También se incluyen las predicciones de dichos parámetros mediante intervalos de confianza aplicando las expresiones (2.4.10) y (2.4.11).

Estimador	Valor	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
$\hat{R}_1$	0,001554300	-0,005084426	0,008193073
$\hat{R}_2$	-0,002597037	-0,009058722	0,003864647
$\hat{R}_3$	-0,002212270	-0,008851020	0,004426480
$\hat{R}_4$	0,005167906	-0,001470844	0,011806656
$\hat{R}_5$	0,003002843	-0,003828375	0,009834060
$\hat{V}$	0,000206506	0,000146169	0,000266843

Tabla 13. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo.  
Parámetros e intervalos de confianza - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 14 se especifican las predicciones, para 5 días, de las log-cotizaciones considerando el modelo semanal. Estas predicciones se han construido de forma puntual utilizando la expresión (2.4.13) y de forma probabilística mediante los

intervalos de confianza dados en (2.4.16). En el Gráfico 25 se han representado todos estos valores a 5 días.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,877252780	1,84831514	1,906190420
28/05/2015	1,882420686	1,841496684	1,923344689
29/05/2015	1,885423529	1,835276211	1,935570847
01/06/2015	1,886977852	1,829080180	1,944875525
02/06/2015	1,884380815	1,819672177	1,949089453

Tabla 14. Modelo semanal - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización.  
Predicciones e intervalos de confianza a 5 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

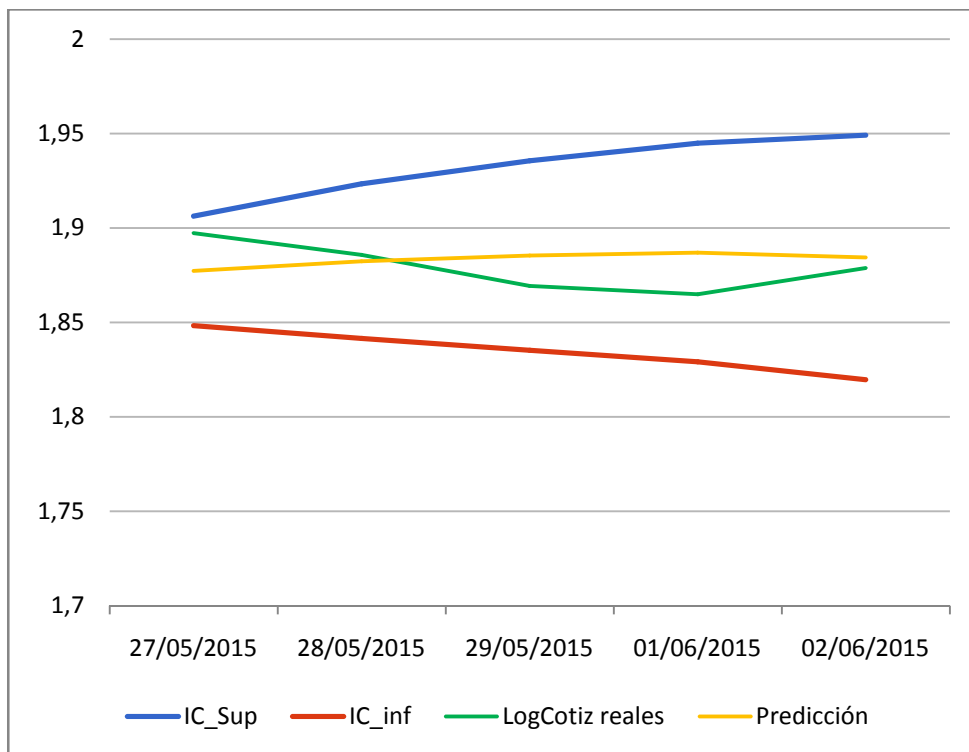


Gráfico 25. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

Los resultados obtenidos en las medidas de bondad de ajuste son:

<b>MAPE (%)</b>	0,712995579
<b>RMSE</b>	0,029935132

Tabla 15. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Medidas de bondad de ajuste - B. Santander.

*Fuente: elaboración propia.*

La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior. Se observa así mismo cómo la predicción de la log-cotización se ajusta adecuadamente a la log-cotización real de manera similar a como lo realizaba el modelo diario.

El MAPE obtenido en los cinco primeros días de predicción es 0,71%, muy similar al obtenido en el modelo diario, que era 0,69%. En el caso del RMSE sucede lo mismo.

#### Iberdrola

En la Tabla 16 se especifican las estimaciones puntuales,  $\hat{R}_d$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R_d$  y  $V$ , respectivamente, del modelo semanal dado en (2.4.4) aplicando las fórmulas (2.4.7) y (2.4.8) para Iberdrola, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores). También se incluyen las predicciones de dichos parámetros mediante intervalos de confianza aplicando las expresiones (2.4.10) y (2.4.11).

En la Tabla 17 se especifican las predicciones, para 5 días, de las log-cotizaciones considerando el modelo semanal. Estas predicciones se han construido de forma puntual utilizando la expresión (2.4.13) y de forma probabilística mediante los intervalos de confianza dados en (2.4.16). En el Gráfico 26 se han representado todos estos valores a 5 días.



Estimador	Valor	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
$\hat{R}_1$	-0,001942400	-0,007338009	0,003453111
$\hat{R}_2$	0,001467713	-0,003783939	0,006719366
$\hat{R}_3$	0,000259638	-0,005135922	0,005655198
$\hat{R}_4$	0,002878345	-0,002517215	0,008273905
$\hat{R}_5$	0,003931009	-0,001620976	0,009482994
$\hat{V}$	0,000136406	0,000096551	0,000176261

Tabla 16. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo.  
Parámetros e intervalos de confianza - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,825776204	1,802257504	1,849294905
28/05/2015	1,828654549	1,795394084	1,861915014
29/05/2015	1,832585558	1,791828960	1,873342156
01/06/2015	1,830643109	1,783587509	1,877698710
02/06/2015	1,832110822	1,779519696	1,884701949

Tabla 17. Modelo semanal - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización.  
Predicciones e intervalos de confianza a 5 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

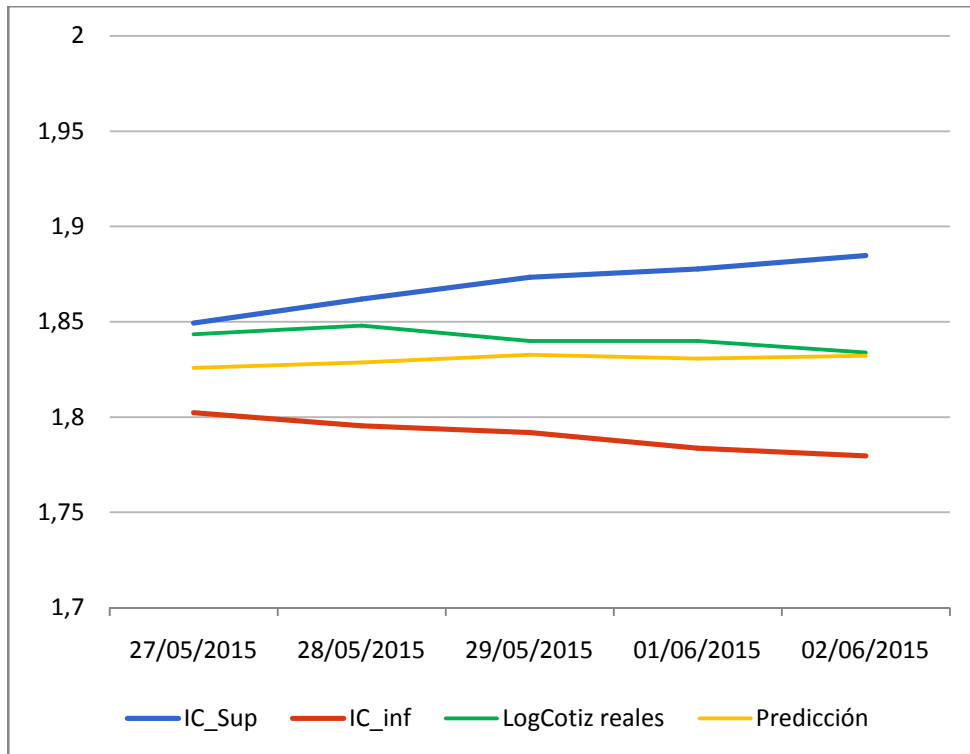


Gráfico 26. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

Los resultados obtenidos en las medidas de bondad de ajuste son:

<b>MAPE (%)</b>	0,599945592
<b>RMSE</b>	0,024732874

Tabla 18. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Medidas de bondad de ajuste - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior. Se observa así mismo cómo la predicción de la log-cotización se ajusta adecuadamente a la log-cotización real de manera similar a como lo realizaba el modelo diario.

El MAPE obtenido en los cinco primeros días de predicción es 0,59%, muy similar al obtenido en el modelo diario, que era 0,41%. En el caso del RMSE sucede lo mismo. Destacar así mismo que el RMSE es aceptable en relación al valor de las predicciones que estamos realizando.

Telefónica

En la Tabla 19 se especifican las estimaciones puntuales,  $\hat{R}_d$  y  $\hat{V}$ , de los parámetros  $R_d$  y  $V$ , respectivamente, del modelo semanal dado en (2.4.4) aplicando las fórmulas (2.4.7) y (2.4.8) para Telefónica, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores). También se incluyen las predicciones de dichos parámetros mediante intervalos de confianza aplicando las expresiones (2.4.10) y (2.4.11).

Estimador	Valor	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
$\hat{R}_1$	0,001429900	-0,003979833	0,006839603
$\hat{R}_2$	-0,002304776	-0,007570209	0,002960656
$\hat{R}_3$	0,000585747	-0,004823971	0,005995465
$\hat{R}_4$	0,001961098	-0,003448619	0,007370816
$\hat{R}_5$	0,003771842	-0,001794712	0,009338396
$\hat{V}$	0,000137123	0,000097058	0,000177187

Tabla 19. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo.  
Parámetros e intervalos de confianza – Telefónica.

*Fuente: elaboración propia.*

En la Tabla 20 se especifican las predicciones, para 5 días, de las log-cotizaciones considerando el modelo semanal. Estas predicciones se han construido de forma puntual utilizando la expresión (2.4.13) y de forma probabilística mediante los intervalos de confianza dados en (2.4.16). En el Gráfico 27 se han representado todos estos valores a 5 días.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	2,559749167	2,536168754	2,58332958
28/05/2015	2,561710266	2,528362525	2,595058006
29/05/2015	2,565482108	2,524618565	2,606345651
01/06/2015	2,566911992	2,519732918	2,614091067
02/06/2015	2,564607216	2,511878091	2,617336342

Tabla 20. Modelo semanal - Predicción puntual a corto plazo de la log-cotización.  
Predicciones e intervalos de confianza a 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

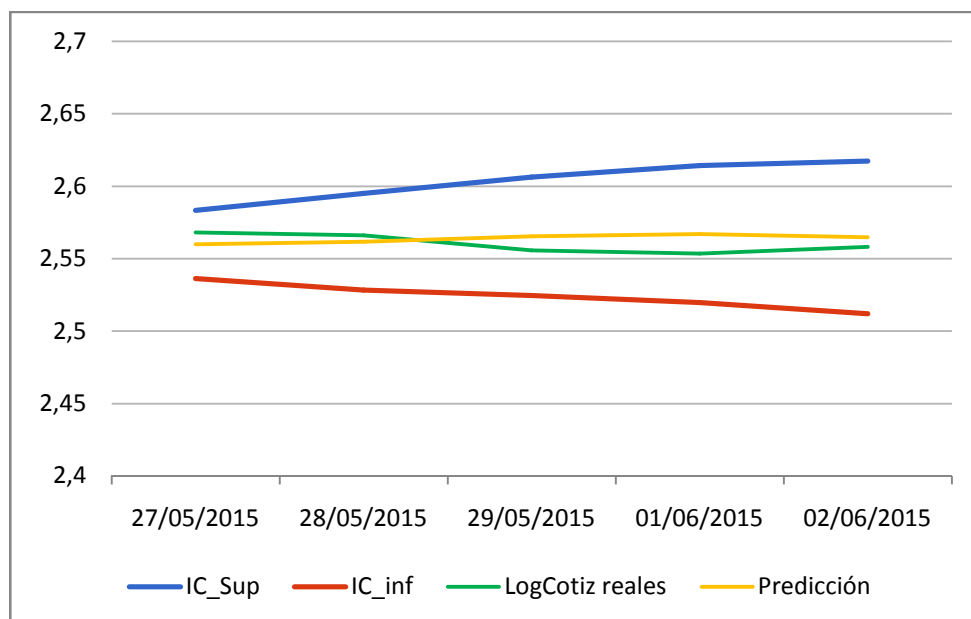


Gráfico 27. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización corto plazo e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Los resultados obtenidos en las medidas de bondad de ajuste son:

<b>MAPE (%)</b>	0,333320919
<b>RMSE</b>	0,019071085

Tabla 21. Modelo semanal - Predicción puntual corto plazo. Medidas de bondad de ajuste - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior. Se observa así mismo cómo la predicción de la log-cotización se ajusta adecuadamente a la log-cotización real de manera similar a como lo realizaba el modelo diario.

El MAPE obtenido en los cinco primeros días de predicción es 0,33%, muy similar al obtenido en el modelo diario, que era 0,23%. En el caso del RMSE sucede lo mismo. Destacar así mismo que el RMSE es aceptable en relación al valor de las predicciones que estamos realizando.

#### 2.4.6 Predicción puntual paso a paso.

A partir de las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ , y de la expresión (2.4.12) aplicada para  $t = n + 1$ , se obtiene la predicción puntual:

$$\hat{Y}_{n+1} = Y_n + \hat{R}_{K(n+1)}, \quad (2.4.17)$$

donde  $\hat{R}_{K(n+1)}$  está definido en (2.4.7). En este punto es importante observar que si la última log-cotización disponible,  $Y_n$ , corresponde a un martes, por ejemplo, entonces  $K(n + 1) = 3$  (miércoles), entonces,

$$\hat{R}_{K(n+1)} = \hat{R}_3 = \frac{1}{n_3} \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=3}}^{n+1} (Y_i - Y_{i-1}). \quad (2.4.18)$$

#### 2.4.7 Predicción probabilística por intervalos de confianza paso a paso.

A partir de las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ , y de la expresión (2.3.37) aplicada para  $t = n + 1$ , se obtiene la predicción probabilística:

$$\hat{Y}_{n+1} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V} \left( 1 + \frac{1}{n_{K(n+1)}} \right)}. \quad (2.4.19)$$

## 2.4.8 Resultados obtenidos empleando predicción puntual paso a paso.

### Banco Santander

En la Tabla 22 se proporciona las predicciones de las log-cotizaciones a 5 días dadas por (2.4.17) así como sus intervalos de confianza superior e inferior que vienen dados por (2.4.19), empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores). En el Gráfico 28 se puede observar la representación gráfica de estas predicciones, sus intervalos de confianza y la log-cotización real. La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,877252780	1,848209384	1,906296175
28/05/2015	1,902337890	1,873243043	1,931432736
29/05/2015	1,888707925	1,859448841	1,917967009
01/06/2015	1,870891927	1,841802270	1,899981585
02/06/2015	1,862257987	1,833156401	1,891359573

Tabla 22. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización paso a paso.  
Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander.

*Fuente: elaboración propia.*

Se observa así mismo cómo la predicción de la log-cotización se ajusta adecuadamente a la log-cotización real de manera similar a como lo realizaba el modelo diario. En la predicción paso a paso, conforme se amplía el número de días de predicción, se obtiene una mejora con respecto al modelo a corto plazo ya que incorpora las últimas log-cotizaciones disponibles.

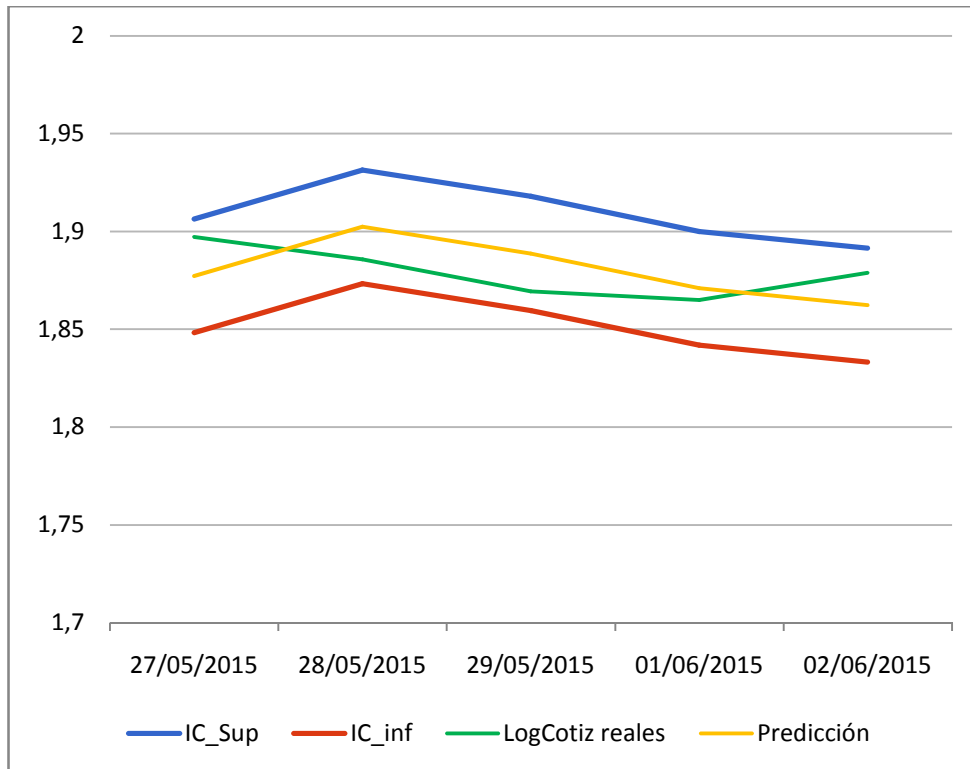


Gráfico 28. Modelo semanal - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - B. Santander.

Fuente: elaboración propia.

### Iberdrola

De manera análoga, en la Tabla 23 se proporciona las predicciones de las log-cotizaciones a 5 días para Iberdrola, empleando 90 log-cotizaciones anteriores.

Fecha	Predicción Log-cotización	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	1,825776204	1,802125794	1,849426615
28/05/2015	1,846281047	1,822756819	1,869805276
29/05/2015	1,851913269	1,828349802	1,875476737
01/06/2015	1,837972062	1,814563285	1,861380839
02/06/2015	1,841382224	1,818074514	1,864689934

Tabla 23. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización paso a paso. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

En el Gráfico 29 se puede observar la representación gráfica de estas predicciones, sus intervalos de confianza y la log-cotización real. La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior.

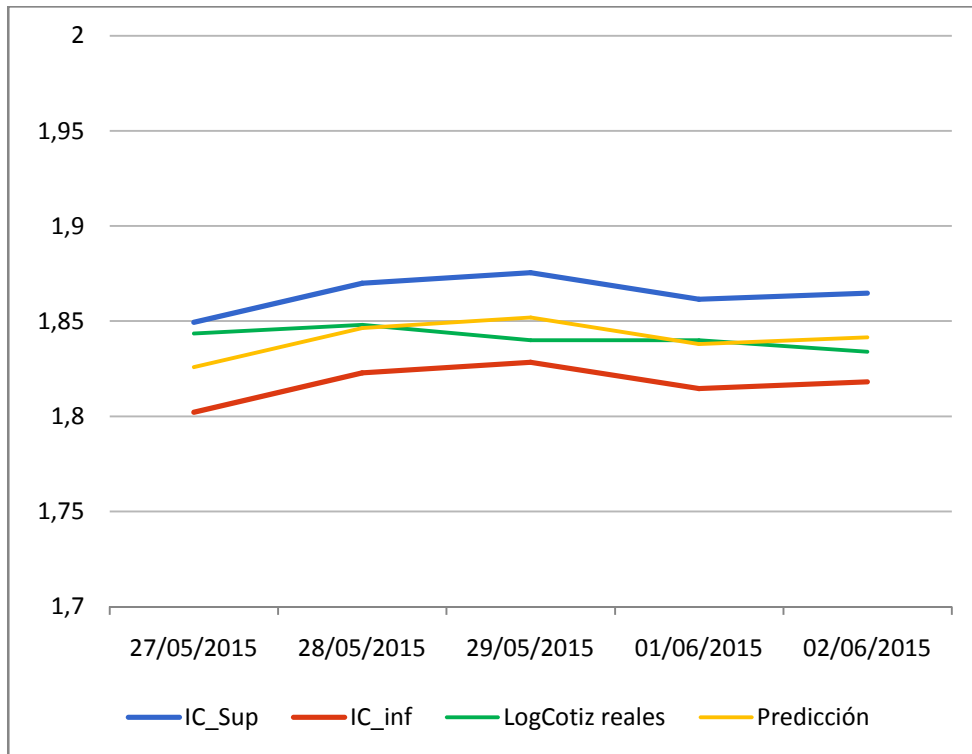


Gráfico 29. Modelo semanal - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Iberdrola.

*Fuente: elaboración propia.*

La predicción de la log-cotización se ajusta adecuadamente a la log-cotización real de manera similar a como lo realizaba el modelo diario. En la predicción paso a paso, conforme se amplía el número de días de predicción, se obtiene una mejora con respecto al modelo a corto plazo ya que incorpora las últimas log-cotizaciones disponibles.

### Telefónica

En la Tabla 24 se proporciona las predicciones de las log-cotizaciones a 5 días dadas por (2.4.17) así como sus intervalos de confianza superior e inferior que vienen dados por (2.4.19) para Telefónica, empleando 90 muestras (log-cotizaciones anteriores). En el Gráfico 30 se puede observar la representación gráfica de estas predicciones, sus intervalos de confianza y la log-cotización real. La predicción obtenida para los cinco días siguientes se encuentra dentro de los intervalos de confianza superior e inferior.



Fecha	Predicción	Intervalo de confianza inferior	Intervalo de confianza superior
27/05/2015	2,559749167	2,536266339	2,583231995
28/05/2015	2,569982655	2,546613637	2,593351673
29/05/2015	2,569874380	2,546411008	2,593337753
01/06/2015	2,557105605	2,533786662	2,580424549
02/06/2015	2,551039035	2,527827771	2,574250299

Tabla 24. Modelo semanal - Predicción puntual de la log-cotización paso a paso. Predicciones e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

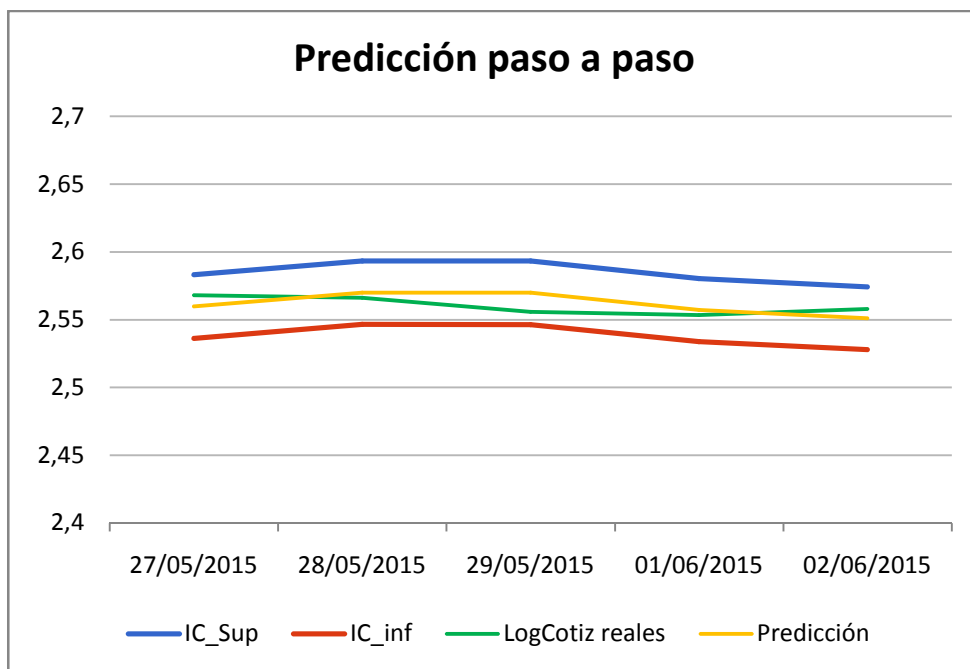


Gráfico 30. Modelo semanal - Predicción puntual paso a paso e intervalos de confianza de la log-cotización a 5 días - Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

## 2.5 Contrastes de hipótesis para la comparación de la tasas de rendimiento del modelo diario y del modelo semanal.

El objetivo de este apartado es testear la hipótesis nula  $H_0$  de que las tasas de rendimiento  $R_i$  y  $R_j$ ,  $i \neq j$ , de dos días diferentes de la semana no difieren entre si. Esto se realizará para cada uno de los subyacentes del IBEX-35 seleccionados en nuestro estudio. El análisis se basará en dos tipos de test de hipótesis:

- Test de razón de verosimilitudes: este es un test asintótico, y por tanto aproximado, que puede aceptarse como válido en nuestro contexto porque se dispone de un gran número  $n$  de datos ( $n \geq 90$ ).
- Test de tipo ANOVA (ANalysis Of VAriance): este es un test exacto.

### 2.5.1 Test de razón de verosimilitudes.

Vamos a realizar un test estadístico para comparar globalmente ambos modelos, diario y semanal, en términos de las tasas de rendimiento planteando:

$$\begin{aligned} H_0 &: R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5, \\ H_1 &: R_i \neq R_j, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

para alguna pareja  $(i, j)$  con  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i \neq j$ .

Es importante observar que si la hipótesis nula  $H_0$  es verdadera, los modelos diario y semanal coinciden ya que estadísticamente el modelo diario sería equivalente al modelo semanal. Para testear la hipótesis nula  $H_0$  se realizará un test de razón de verosimilitudes. Para este test se considera el estadístico,

$$T = 2L(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3, \hat{R}_4, \hat{R}_5, \hat{V} | Y_1, Y_2, \dots, Y_n) - 2L(\hat{R}, \hat{V} | Y_1, Y_2, \dots, Y_n),$$

siendo  $R_i, 1 \leq i \leq 5$  y  $\hat{V}$  las estimaciones de los parámetros del modelo semanal (véase (2.4.7) y (2.4.8) respectivamente) y  $\hat{R}, \hat{V}$  son las estimaciones de los dos parámetros del modelo diario (véase 2.3.17 y 2.3.18 respectivamente). Se puede probar que el estadístico  $T$  sigue una distribución asintótica  $\chi^2$  con  $6 - 2 = 4$  grados de libertad.

$$T \sim \chi^2(4).$$

Obsérvese que, teniendo en cuenta (2.4.6), (2.4.8), (2.3.14) y (2.3.18),  $T$  se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 T &= 2\left\{-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\hat{V}) - \frac{1}{2\hat{V}} \sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^k (Y_i - Y_{i-1} - \hat{R}_d)^2\right\} \\
 &\quad - 2\left\{-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\hat{V}) - \frac{1}{2\hat{V}} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2\right\} \\
 &= 2\left\{-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\hat{V})\right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\frac{1}{n}\sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^n (Y_i - Y_{i-1} - \hat{R}_d)^2} \sum_{d=1}^5 \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^k (Y_i - Y_{i-1} - \hat{R}_d)^2\right\} \\
 &\quad - 2\left\{-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\hat{V}) - \frac{1}{2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2\right\} \\
 &= \left\{-n\ln(2\pi) - n\ln(\hat{V}) - \frac{n}{2}\right\} - \left\{-n\ln(2\pi) - n\ln(\hat{V}) - \frac{n}{2}\right\} \\
 &= n\ln\left(\frac{\hat{V}}{\hat{\hat{V}}}\right).
 \end{aligned}$$

En la Tabla 25 se recogen los valores del estadístico,

$$T = n \ln\left(\frac{\hat{V}}{\hat{\hat{V}}}\right), \quad (2.5.2)$$

para los tres subyacentes seleccionados, así como el resultado del test al nivel de significación del 5% teniendo en cuenta que el valor crítico de una  $\chi^2(4)$  a este nivel de significación es 9.4877.

Subyacente	Estadístico $T$	Resultado del test
Banco Santander	3,873751142	No se rechaza la hipótesis nula
Iberdrola	2,685024714	No se rechaza la hipótesis nula
Telefónica	2,595783036	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 25. Resultado del test de hipótesis (2.5.1) basado en el estadístico (2.5.2).

Fuente: elaboración propia.

Si  $T$  dado por (2.5.2) es menor que 9.4877, no se rechaza la hipótesis nula. En nuestro caso se han obtenido los resultados mostrados en la Tabla 25, por tanto en los tres subyacentes seleccionados se tiene, desde un punto de vista estadístico, que el modelo diario y el modelo semanal no son diferentes.

## 2.5.2 Test de tipo ANOVA.

Observemos en primer lugar que la variación total del modelo semanal ( $VT_s$ ) y la variación total del modelo diario ( $VT_d$ ) está dada por:

$$VT_s = n\hat{V} \quad , \quad VT_s = n\hat{V}$$

respectivamente, mientras que la variación explicada por los días de la semana ( $VEDS$ ) es,

$$VEDS = VT_s - VT_d = n(\hat{V} - \hat{V}).$$

Asumiendo que la hipótesis nula:

$$\begin{aligned} H_0 & : R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 \\ H_1 & : R_i \neq R_j, \dots \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

es verdadera,  $VEDS$  y  $VT_d$  son independientes y,

$$VEDS \sim \chi^2(4 = (n - 2) - (n - 5)) \quad , \quad VT_d \sim \chi^2(n - 5)$$

por lo que el estadístico,

$$F = \frac{\frac{VEDS}{4}}{\frac{VT_d}{(n-5)}} \sim F(4, n - 5), \quad (2.5.4)$$

es decir,  $F$  tiene una distribución  $F$  de Snedecor de parámetros 4 y  $n-5$  grados de libertad. En la Tabla 26 se recogen los resultados del test ANOVA para los tres activos analizados.

Subyacente	Estadístico $F$	Resultado del test
Banco Santander	0,934604886	No se rechaza la hipótesis nula
Iberdrola	0,643515636	No se rechaza la hipótesis nula
Telefónica	0,621817350	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 26. Resultado del test de hipótesis (2.5.3) basado en el estadístico (2.5.4) de un test ANOVA al nivel de significatividad  $\alpha = 0.05$ , siendo que el valor crítico de  $F \sim F(4, n - 5) = F(4, 85)$  es 2.3766, ya que la muestra es de tamaño 90. Si el valor del estadístico  $F$  dado en (2.5.4) es menor de 2.3766 se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$  definida en (2.5.3).

Fuente: elaboración propia.

El test ANOVA ratifica los resultados obtenidos por el test de razón de verosimilitudes, es decir, el modelo diario y el modelo semanal no son estadísticamente diferentes para los tres subyacentes estudiados.

## 2.6 Contrastes de hipótesis para la comparación de la tasas de rendimiento entre días diferentes en el modelo semanal.

En este apartado se estudia la siguiente cuestión, centrada en el modelo diario: ¿podemos asegurar que existen diferencias significativas entre las tasas de rendimiento entre los diferentes días de la semana?.

En otras palabras, por ejemplo, para la acción de Telefónica, ¿es el rendimiento de los martes significativamente diferente al rendimiento de los jueves?. Para dar respuesta a esta interesante cuestión planteamos el siguiente test de hipótesis basado en la comparación de medias de dos tasas de rendimiento  $R_i$  y  $R_j$  con  $1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$ , fijos:

$$\begin{aligned} H_0 & : R_i = R_j, \\ H_1 & : R_i \neq R_j. \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Para ello consideramos el siguiente estadístico,

$$Z_{i,j} = \frac{\hat{R}_i - \hat{R}_j}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n_i} + \frac{\hat{\sigma}^2}{n_j}}}, \tag{2.6.2}$$

donde  $n_i$  y  $n_j$ , denotan el número de día de la muestra total que son el día  $i$  y  $j$  de la semana, respectivamente. Este test está basado en la independencia de  $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3, \hat{R}_4, \hat{R}_5$ , y en la normalidad asintótica de estos cinco estimadores. Para aplicar el test basta observar que asintóticamente el estadístico,

$$Z_{i,j} \sim N(0; 1). \tag{2.6.3}$$

Al nivel de significatividad  $\alpha = 0.05$ , el valor crítico del estadístico  $Z_{i,j}$  es el intervalo  $(-1.96, 1.96)$ .

Así, si  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta la hipótesis nula  $H_0$  definida en (2.6.1) y se acepta que las tasas de rendimiento de la acción los días de la semana  $i$  y  $j$  son iguales.

En las Tablas 27 a 31 se recogen los resultados obtenidos por el Banco Santander, comparando si existen diferencias significativas al nivel  $\alpha = 0.05$  de las cotizaciones de

los lunes ( $i = 1$ ), respecto de los demás días de la semana ( $j \in \{2,3,4,5\}$ ). Para ello, se ha implementado los cuatro tests definidos en (2.6.1) por  $Z_{1,2}$ ;  $Z_{1,3}$ ;  $Z_{1,4}$ ; y  $Z_{1,5}$ .

#### Banco Santander

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{1,2}$	0,878286489	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,3}$	0,786327547	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,4}$	-0,754384515	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,5}$	-0,298046774	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 27. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los lunes ( $i = 1$ ) con el resto de días de la semana  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{2,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.

Fuente: elaboración propia.

De manera equivalente, se ha implementado también para el resto de días de la semana.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{2,1}$	-0,878286489	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,3}$	-0,081403738	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,4}$	-1,642797424	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,5}$	-1,167245607	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 28. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los martes ( $i = 2$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_3$  (miércoles),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{3,1}$	-0,786327547	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,2}$	0,081403738	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,4}$	-1,540712062	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,5}$	-1,073059665	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 29. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los miércoles ( $i = 3$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{4,1}$	0,754384515	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,2}$	1,642797424	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,3}$	1,540712062	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,5}$	0,445482722	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 30. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los jueves ( $i = 4$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles), y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{5,1}$	0,298046774	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,2}$	1,167245607	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,3}$	1,073059665	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,4}$	-0,445482722	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 31. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los viernes ( $i = 5$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles) y  $R_4$  (jueves) y, mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Banco Santander.

Fuente: elaboración propia.

En ninguno de los test de hipótesis implementados se puede rechazar la hipótesis nula por lo que no podemos asegurar que existan diferencias significativas entre las tasas de rendimiento entre los diferentes días de la semana para el subyacente estudiado.

### Iberdrola

En la siguientes tablas se recogen los resultados obtenidos por Iberdrola, comparando si existen diferencias significativas al nivel  $\alpha = 0.05$  de las cotizaciones de los lunes ( $i = 1$ ), respecto de los demás días de la semana ( $j \in \{2,3,4,5\}$ ).

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{1,2}$	-0,887708865	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,3}$	-0,565638720	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,4}$	-1,238292230	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,5}$	-1,486975734	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 32. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los lunes ( $i = 1$ ) con el resto de días de la semana  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{2,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.



De manera equivalente, se ha implementado también para el resto de días de la semana.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{2,1}$	0,887708865	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,3}$	0,314477340	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,4}$	-0,367205481	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,5}$	-0,631756748	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 33. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los martes ( $i = 2$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_3$  (miércoles),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Iberdrola.

Fuente: elaboración propia

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{3,1}$	0,565638720	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,2}$	-0,314477340	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,4}$	-0,672653510	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,5}$	-0,929476125	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 34. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los miércoles ( $i = 3$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{4,1}$	1,238292230	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,2}$	0,367205481	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,3}$	0,672653510	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,5}$	-0,266501587	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 35. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los jueves ( $i = 4$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles), y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Iberdrola.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{5,1}$	1,486975734	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,2}$	0,631756748	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,3}$	0,929476125	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,4}$	0,266501587	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 36. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los viernes ( $i = 5$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles) y  $R_4$  (jueves) y, mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Iberdrola.

Fuente: elaboración propia

En ninguno de los test de hipótesis implementados se puede rechazar la hipótesis nula por lo que no podemos asegurar que existan diferencias significativas entre las tasas de rendimiento entre los diferentes días de la semana para el subyacente estudiado.

Telefónica

En la siguientes tablas se recogen los resultados obtenidos por Telefónica, comparando si existen diferencias significativas al nivel  $\alpha = 0.05$  de las cotizaciones de los lunes ( $i = 1$ ), respecto de los demás días de la semana ( $j \in \{2,3,4,5\}$ ).

Para ello, se ha implementado los cuatro tests definidos en (2.6.1) por  $Z_{1,2}$ ;  $Z_{1,3}$ ;  $Z_{1,4}$ ; y  $Z_{1,5}$ .

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{1,2}$	0,969635665	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,3}$	0,216261864	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,4}$	-0,136092970	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{1,5}$	-0,591358522	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 37. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los lunes ( $i = 1$ ) con el resto de días de la semana  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{2,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{2,1}$	-0,969635665	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,3}$	-0,750470827	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,4}$	-1,107555468	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{2,5}$	-1,554379890	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 38. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los martes ( $i = 2$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_3$  (miércoles),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,3,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Telefónica.

Fuente: elaboración propia

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{3,1}$	-0,216261864	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,2}$	0,750470827	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,4}$	-0,352354834	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{3,5}$	-0,804508542	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 39. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los miércoles ( $i = 3$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_4$  (jueves) y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,4,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{4,1}$	0,136092970	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,2}$	1,107555468	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,3}$	0,352354834	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{4,5}$	-0,457223826	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 40. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los jueves ( $i = 4$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles), y  $R_5$  (viernes), mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,5\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

Estadístico	Valor	Hipótesis nula $H_0$ $R_1 = R_2, R_1 = R_3, R_1 = R_4, R_1 = R_5$
$Z_{5,1}$	0,591358522	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,2}$	1,554379890	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,3}$	0,804508542	No se rechaza la hipótesis nula
$Z_{5,4}$	0,457223826	No se rechaza la hipótesis nula

Tabla 41. Resultado de los cuatro tests de hipótesis definidos en (2.6.1) para comparar las tasas de rendimiento de los viernes ( $i = 5$ ) con el resto de días de la semana  $R_1$  (lunes),  $R_2$  (martes),  $R_3$  (miércoles) y  $R_4$  (jueves) y, mediante el estadístico (2.6.2), siendo  $n_1 = 18$ ,  $n_2 = 19$ ,  $n_3 = 18$ ,  $n_4 = 18$  y  $n_5 = 17$  los números totales de lunes, martes, miércoles, jueves y viernes respectivamente que hay en la muestra total de  $n = 90$  datos. Si el valor  $Z_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,3,4\}$  es tal que  $Z_{i,j} \in (-1.96, 1.96)$  se acepta (no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ . Subyacente: Telefónica.

Fuente: elaboración propia.

En ninguno de los test de hipótesis implementados se puede rechazar la hipótesis nula por lo que no podemos asegurar que existan diferencias significativas entre las tasas de rendimiento entre los diferentes días de la semana para el subyacente estudiado, por tanto, los modelos diario y semanal no son estadísticamente diferentes para los subyacentes estudiados.



### **3. Publicación automatizada de resultados en Internet.**

En este capítulo se hará una descripción de las herramientas desarrolladas para la publicación de los resultados de este trabajo en una página web en Internet, de manera automatizada, y sin hacer uso de servidores propios.

#### **3.1 Implementación de los modelos diario y semanal en Google Spreadsheets.**

La implementación de los Modelos 1 y 2, diario y semanal respectivamente, se ha llevado a cabo en un hoja de cálculo Excel. Sin embargo, cuando apagamos nuestro ordenador personal, la hoja de cálculo deja de estar disponible tanto para nosotros como para un posible servicio que hiciera una llamada a nuestra hoja de cálculo con el fin de publicar sus resultados actualizados en una página web en Internet.

Una posible solución sería ubicar nuestra hoja de cálculo en un servidor que estuviera siempre encendido, con lo que solucionaríamos el problema pero siempre tendríamos que tener dicho servidor en funcionamiento.

La alternativa pasa por el empleo de servicios comerciales para el alojamiento de la hoja de cálculo, de manera que pueda estar siempre disponible para que el servicio que gestiona la descarga de datos y posterior publicación en una página web disponga siempre de la información actualizada.

Entre las diversas opciones que ofrece el mercado, posiblemente las hojas de cálculo de Google sean las más conocidas. Permiten crear online hojas de cálculo a las que pueden acceder simultáneamente varios usuarios y procesos, estando siempre disponibles. Permiten así mismo la programación de gráficas, la importación de datos desde bases de datos externas (muy útil para importar automáticamente las últimas cotizaciones disponibles) y prácticamente las mismas funciones básicas que una hoja de cálculo normal.

Es de especial relevancia la posibilidad de programar y ejecutar scripts de manera automatizada para que, aún cuando la hoja de cálculo no esté abierta en ningún ordenador, se lleven a cabo funciones de manera automatizada en los servidores de Google. En el caso particular del presente trabajo, se ha implementado un disparador “trigger” para que cada veinticuatro horas se ejecute una secuencia de comandos que descargue la última cotización disponible de los tres subyacentes bajo estudio y rehaga

todos los cálculos en los Modelos 1 y 2, teniendo en cuenta la última cotización del día anterior que se acabe de incorporar.

El código fuente del disparador es el siguiente, el cual cada vez que se ejecuta activa la actualización de todos los campos de la hoja de cálculo residente en los servidores de Google:

```
functioncreateTimeDrivenTriggers() {  
  // Disparadorcada24horas.  
  ScriptApp.newTrigger('myFunction')  
  .timeBased()  
  .everyHours(24)  
  .create();  
}
```

### **3.2 Creación de página web en Wordpress para la publicación automatizada de los modelos diario y semanal.**

Para la publicación de los resultados que se obtienen a partir de los Modelos 1 y 2 en los tres subyacentes seleccionados es necesario disponer de un servidor web en el que alojar nuestra página web.

En el mercado existen multitud de proveedores de este tipo de servicios a un coste anual muy reducido. Teniendo en cuenta que este es un trabajo académico en el marco del Máster en Dirección Financiera y Fiscal de la Universitat Politècnica de València, se ha decidido hacer uso del servicio gratuito de webs avanzadas que el Área de Sistemas de la Información y las Comunicaciones pone a disposición tanto de alumnos como del resto de personal universitario.

Es importante destacar que el Área de Sistemas de Información y las Comunicaciones de la Universitat Politècnica de Valencia dispone de una normativa de publicación de contenidos web en sus servidores. En dicha normativa se definen las directrices de uso del servicio y se regulan aspectos tanto de protección de datos como de contenidos autorizados para su publicación así como de las posibles responsabilidades personales que se pudieran derivar de la publicación de los contenidos.

La dirección web del presente trabajo es: <http://daaror.upv.edu.es/>



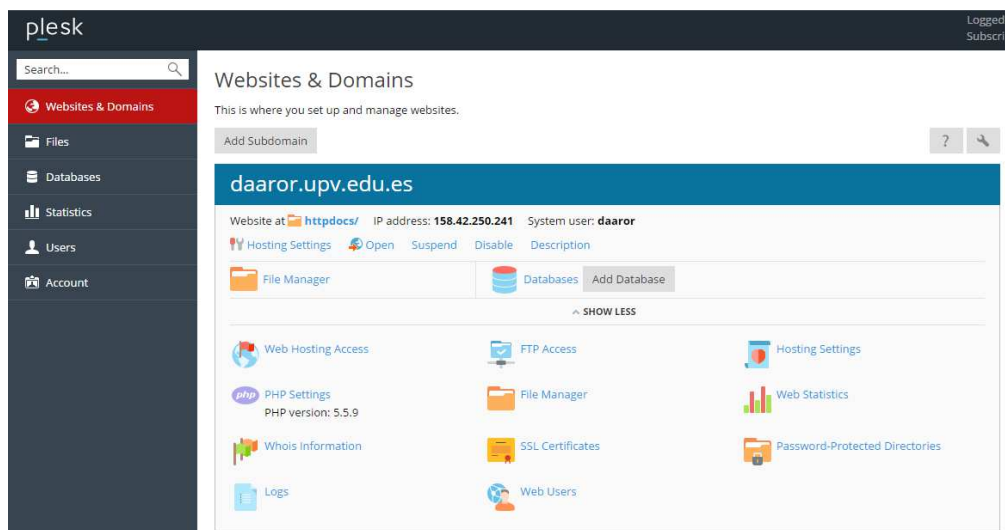


Figura 6. Aspecto del panel de control de webs avanzadas de la Universitat Politècnica de València.

Fuente: <https://plesk.upv.edu.es>

El sistema elegido para la publicación automatizada de los contenidos resultado de este trabajo en Internet ha sido Wordpress, que es lo que se conoce como un CMS, es decir, un “Content Management System”. A pesar de que en sus orígenes Wordpress surgió para proporcionar servicios de blog de una manera rápida y sencilla, con el paso de los años ha evolucionado y permite no sólo la presentación de contenidos muy visuales sino también opciones muy avanzadas como tiendas virtuales para comercio electrónico, entre otros.

Wordpress emplea el lenguaje de programación PHP y soporta el manejo de bases de datos MySQL. El servidor web donde se instale Wordpress ha de soportar por tanto PHP y MySQL, en caso contrario el sistema no funcionará.

Se trata así mismo de un software gratuito que dispone de un enorme número de desarrolladores independientes que constantemente mejoran el sistema Wordpress y amplían sus capacidades con nuevos plug-ins.

Como curiosidades, indicar que su desarrollador principal se llama Matt Mullenweg, que la empresa “Automattic” es la más relevante a día de hoy en el alojamiento de webs Wordpress gratuitas y que las diferentes versiones de Wordpress lleven el nombre de músicos de jazz.

### 3.2.1 Instalación y configuración básica de Wordpress.

A continuación, se describe uno a uno los pasos seguidos para la instalación y configuración de Wordpress en el servicio avanzado de páginas web de la Universitat Politècnica de València [22].

#### Obtención de Wordpress

En primer lugar, se ha de obtener la última versión de Wordpress que esté disponible. Es importante que se instale la última versión ya que la Universitat Politècnica de Valencia, por motivos de seguridad, exige que todos los Wordpress estén actualizados con la última versión posible. En caso de no actualizarse, pasados unos días, el servicio web queda automáticamente bloqueado y nuestra web deja de estar disponible.

Para descargar Wordpress hay que acceder mediante cualquier navegador web a la dirección oficial desde donde Wordpress se distribuye (<https://wordpress.org/>) y pulsar en el botón descargar.



Figura 7. Página de descarga de Wordpress.

Fuente: <https://wordpress.org>

#### Copia de los ficheros de instalación de Wordpress

Una vez se ha descargado el paquete de instalación de Wordpress, el siguiente paso es descomprimir el fichero y copiar todos los archivos resultantes mediante el protocolo ftp o mediante el interfaz Plesk de webs avanzadas de la Universitat Politècnica de Valencia, a la carpeta del servidor web donde estará alojada nuestra página web. En nuestro caso esa carpeta se llama httpdocs y ya viene configurada por defecto como directorio raíz.

Es conveniente indicar que, además de un conjunto de ficheros de configuración ubicados en el directorio raíz, se instalarán tres carpetas: wp-admin (contiene el panel

de control de Wordpress), wp-includes (contiene archivos de sistema) y wp-content (aquí estarán ubicados los archivos con los contenidos de nuestra página web). Queda fuera de los objetivos del presente trabajo profundizar en las estructuras internas de carpetas y ficheros de configuración de Wordpress [16], pero sí es necesario tener en cuenta que futuras actualizaciones de Wordpress modificarán tanto los ficheros ubicados en el directorio raíz como los ubicados dentro de las carpetas wp-admin y wp-includes.

### Creación y configuración de la base de datos de Wordpress

En primer lugar, se ha de modificar el nombre del fichero “wp-config-sample.php” por “wp-config.php”, y abrirlo con un editor de textos. Una vez dentro veremos, entre otros, los siguientes campos a cumplimentar con el nombre de la base de datos, el usuario y contraseña:

```
// ** MySQL settings - You can get this info from your web host ** //  
/** The name of the database for WordPress */  
define('DB_NAME', 'database_name_here');  
/** MySQL database username */  
define('DB_USER', 'username_here');  
/** MySQL database password */  
define('DB_PASSWORD', 'password_here');  
/** MySQLhostname */  
define('DB_HOST', 'localhost');
```

El panel de control de webs avanzadas de la UPV, que usa como gestor Plesk, permite la creación de una base de datos para nuestro Wordpress. Para la creación de una base de datos nueva hemos de dirigirnos a la pestaña “Databases” dentro de nuestro panel de control y pinchar en “Add database”. Una vez dentro, simplemente habría que rellenar los campos que se nos solicita con el nombre de la base de datos que queramos crear, su nombre de usuario y contraseña. Estos datos los deberemos rellenar posteriormente en el fichero “wp-config.php”, quedando en nuestro caso particular como sigue:

```
// ** MySQL settings - You can get this info from your web host ** //  
/** The name of the database for WordPress */  
define('DB_NAME', 'daaror_mdff');  
/** MySQL database username */  
define('DB_USER', 'daaro_daaror');  
/** MySQL database password */  
define('DB_PASSWORD', '*****');  
/** MySQL hostname */  
define('DB_HOST', 'localhost');
```

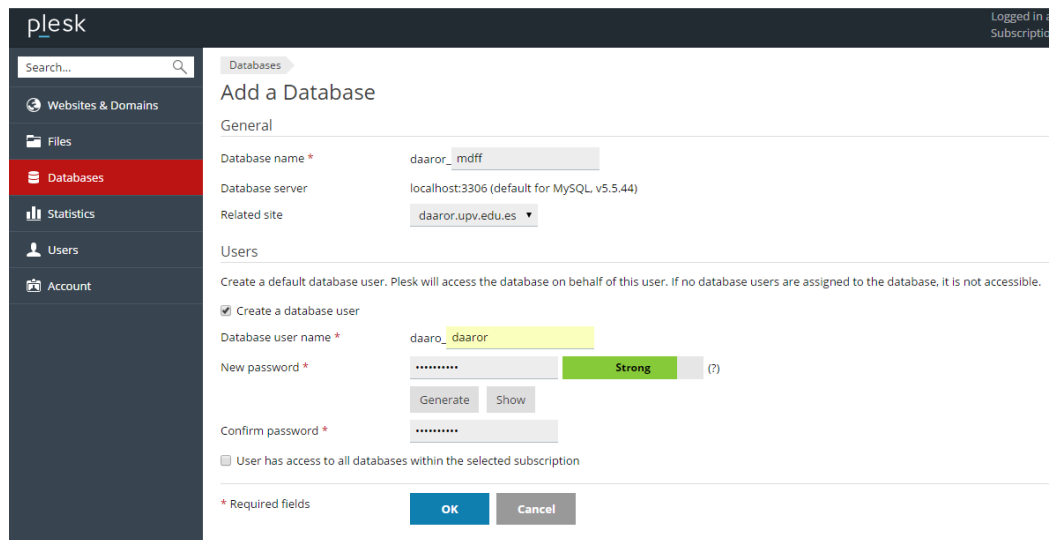


Figura 8. Creación de base de datos en panel de control.

Fuente: <https://plesk.upv.edu.es>

### Inicialización de la instalación de Wordpress

Antes de iniciar la instalación de Wordpress, se ha de tener en cuenta que es necesario entrar en la carpeta httpdocs y eliminar el fichero “index.html” que el servicio de webs avanzadas de la UPV instala por defecto. De esta forma, cuando accedamos a la dirección de nuestra web, el navegador encontrará, en lugar del fichero “index.html” el fichero “index.php”, que da acceso a Wordpress.

El siguiente paso es acceder directamente a nuestra web, en este caso <http://daaror.upv.edu.es/>, para iniciar la instalación de Wordpress en nuestro servidor. Después de seleccionar el idioma para la instalación, la pantalla que aparece solicita un nombre para el sitio web así como un usuario y contraseña para el panel de administración al que accederemos posteriormente. También se solicita una dirección de correo electrónico para que en caso de perder la contraseña de administración se pueda recuperar enviándola al correo que indiquemos.

Si el proceso se ha completado correctamente aparece un mensaje de confirmación. Con este paso, se ha completado la instalación de Wordpress en nuestro servidor de webs avanzadas de la UPV.

Hola

¡Bienvenido al famoso proceso de instalación de WordPress en cinco minutos! Simplemente completa la información siguiente y estarás a punto de usar la más enriquecedora y potente plataforma de publicación personal del mundo.

### Información necesaria

Por favor, debes facilitarnos los siguientes datos. No te preocupes, siempre podrás cambiar estos ajustes más tarde.

**Título del sitio**

**Nombre de usuario**   
Los nombres de usuario pueden tener únicamente caracteres alfanuméricos, espacios, guiones bajos, guiones medios, puntos y el símbolo @.

**Contraseña**    
**Fuerte**  
**Importante:** Necesitas esta contraseña para acceder. Por favor, guárdala en un lugar seguro.

**Tu correo electrónico**   
Comprueba bien tu dirección de correo electrónico antes de continuar.

**Visibilidad para los buscadores**  Disuade a los motores de búsqueda de indexar este sitio  
Depende de los motores de búsqueda atender esta petición o no.

Figura 9. Pantalla inicial de instalación de Wordpress.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

### Acceso al panel de control de Wordpress

El siguiente paso es el acceso al panel de control de Wordpress, desde donde gestionaremos nuestra página web y podremos seleccionar plantillas de formato, instalar plug-ins, introducir contenidos, etc.

Para acceder al panel de control, en este caso particular, hemos de ir a la siguiente dirección web:

<http://daaror.upv.edu.es/wp-login.php>

En caso de ser una página web distinta, el acceso sería el siguiente:

<http://direccionweb/wp-login.php>

Este es el aspecto que tiene el panel de control de Wordpress en la versión 4.5.2 instalada para el desarrollo del presente trabajo:

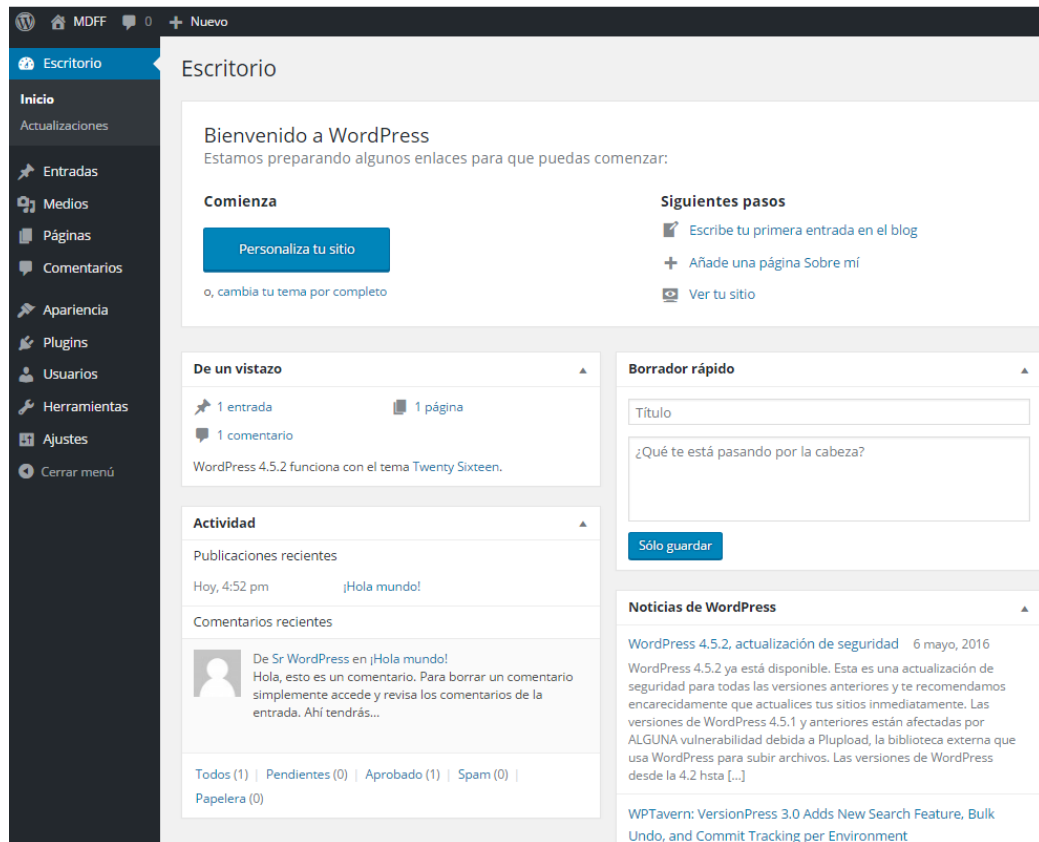


Figura 10. Panel de control Wordpress.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

El aspecto que tiene nuestra página web en esta fase es el siguiente:

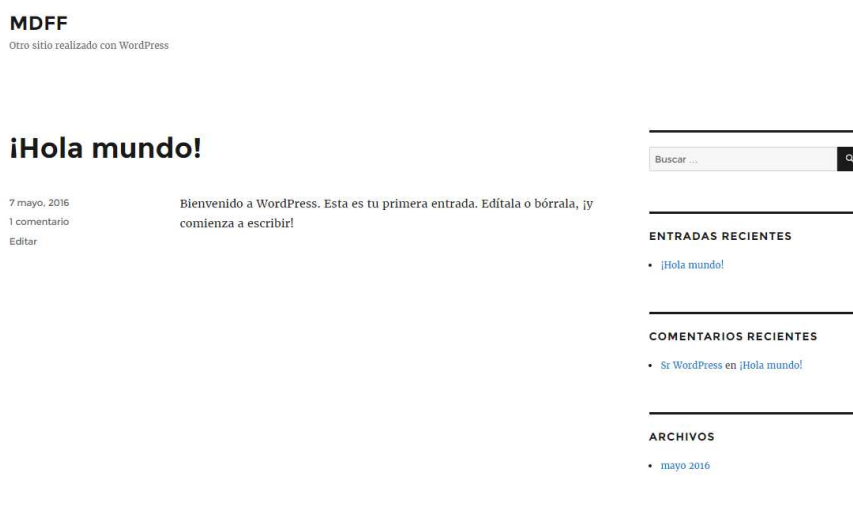


Figura 11. Aspecto inicial de la página web después de la instalación.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

### 3.2.2 Personalización y desarrollo de sub-menús.

A continuación, se describe los pasos más importantes seguidos en el desarrollo personalizado de la página web en Wordpress para la publicación de contenidos dinámicos objeto del presente trabajo [4].

El aspecto inicial de la página web Wordpress es muy básico, por lo cual el primer paso en esta sección será la personalización del sitio web para dotarlo de una imagen funcional y atractiva [18]. Para ello, desde el panel de control de Wordpress, sub-menú Apariencia, Temas, se seleccionará un tema distinto del actual. En este caso particular, el tema seleccionado es el denominado “Vantage”. Existen temas predefinidos en Wordpress que implementan un esqueleto de página web básico que posteriormente hay que seguir personalizando.

A continuación, desde el sub-menú Apariencia, Personalizar, podremos dotar de un título a la página web así como de un icono representativo que será el que se mostrará en el navegador que se utilice. Wordpress permite un nivel de personalización muy elevado, pudiendo decidir la ubicación de los menús, si son simples o compuestos, la distribución de los elementos que compondrán la página web, etc.



Figura 12. Sub-menú Apariencia, Personalizar: configuración del título de página web e icono.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

El siguiente paso es, desde el sub-menú Apariencia, Widgets, eliminaremos todos los complementos que no queramos mantener en nuestra página web. Por defecto se instalan muchos que, para el cometido de nuestra página web, no serán necesarios, como por ejemplo los tableros de noticias RSS o las entradas tipo blog. Únicamente seleccionaremos el encabezado “header”, el pie de página “footer” y la barra de menú “sidebar”.

Desde el sub-menú Apariencia, Menús, se puede crear la estructura de menú y sub-menús que darán lugar al mapa web. Sin embargo, se ha optado por implementar los menús posteriormente desde la creación de páginas como se explicará más adelante. Esta sección es muy útil cuando, con posterioridad a haber creado la estructura de páginas de nuestra web, se desea alterar fácilmente el orden de los elementos del menú de navegación, ya que dispone de un interfaz muy intuitivo que simplemente arrastrando los menús se permite su reordenación.

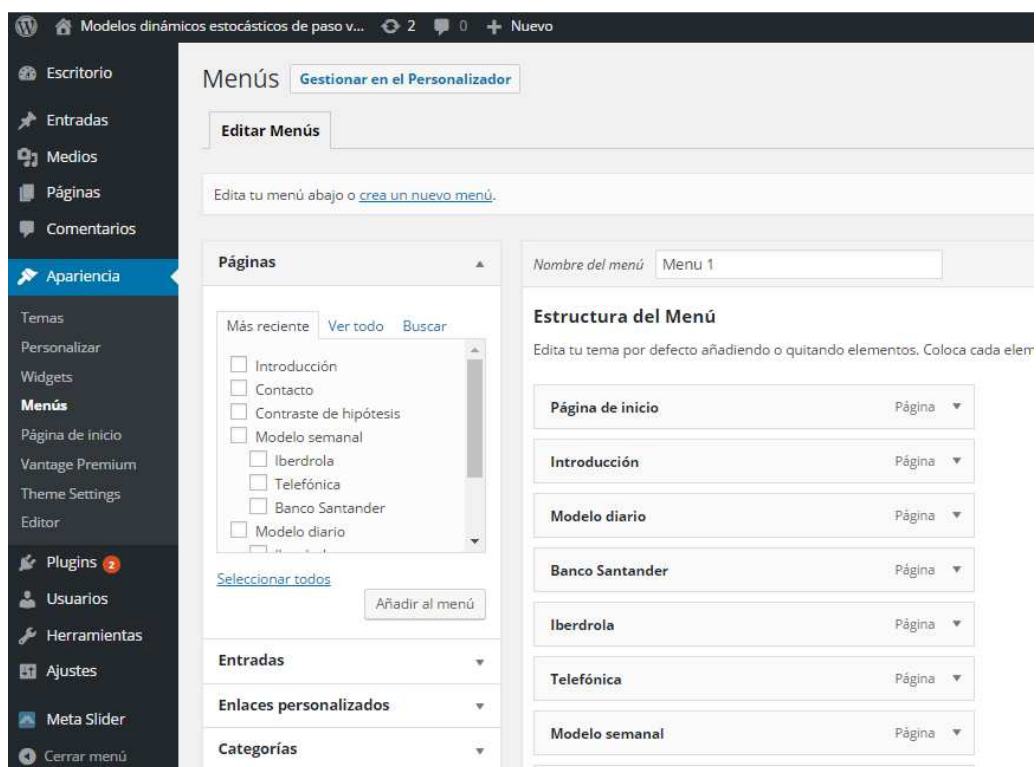


Figura 13. Sub-menú Apariencia, Menús: gestión de los elementos del menú.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

El siguiente paso consiste en la personalización de la página de inicio desde el sub-menú Apariencia, Página de inicio. Por defecto, el tema “Vantage” instala muchos complementos que no son necesarios. En nuestra página web eliminaremos todos los complementos menos los objetos de tipo “CircleIcon” que utilizaremos en el pie de página para implementar accesos directos a las páginas web de los tres subyacentes seleccionados. A continuación se puede observar un ejemplo de configuración de uno de los objetos de tipo “CircleIcon”.



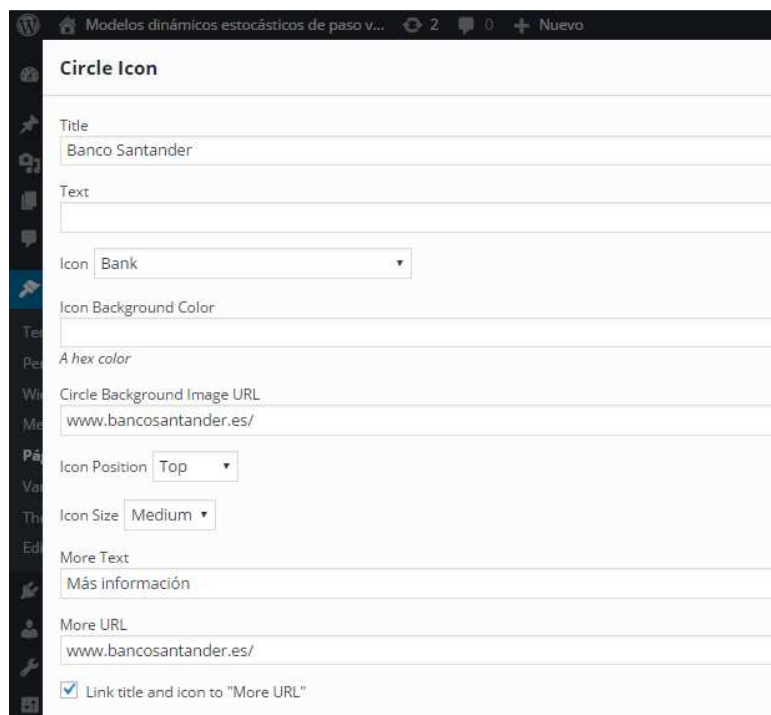


Figura 14. Sub-menú Apariencia, Página de inicio: ejemplo de configuración de un objeto tipo "CircleIcon".

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

Finalmente, el último paso que realizaremos para completar la personalización de la página web será la implementación de un carrusel de imágenes en la página de inicio. Los carruseles de imágenes dotan de dinamismo y vistosidad a las páginas de inicio por lo que son muy populares. Existe una gran variedad de carruseles de imágenes para Wordpress, sin embargo, se ha seleccionado el conocido como "Meta Slider" ya que es compatible con el tema "Vantage" que se ha instalado en nuestra página web y no tiene coste.

La instalación del carrusel de imágenes se lleva a cabo desde el sub-menú Plugins, pulsando en el botón añadir nuevo. Desde el cuadro de búsqueda se puede localizar el plug-in "Meta Slider" y proceder a su instalación.

Una vez instalado el plug-in, se ha de proceder a su activación en el sub-menú Apariencia, Theme Settings, Home, Home page slider. Se puede disponer de varios carruseles de imágenes predefinidos y desde este sub-menú se puede seleccionar el que se desee en cada momento.

Para poder disponer de imágenes que añadir al carrusel, previamente se han de subir al servidor web desde el sub-menú Medios, Añadir Nuevo. El funcionamiento de esta sección es muy intuitivo ya que únicamente arrastrando se puede añadir tantas

imágenes como se desee. Todas las imágenes empleadas en la web que se ha realizado para este trabajo son libres de derechos de autor.

A continuación, se procede a la configuración de las imágenes que se desee mostrar en cada carrusel y para ello nos dirigiremos al sub-menú Meta Slider, crearemos un nuevo carrusel de imágenes pulsando en el botón “+”, y añadiremos tantas imágenes como se desee. En cada imagen se podrá añadir el texto que se quiera mostrar en el pie de la imagen, el cual proporcionará una descripción de los contenidos a los que se accederá si se pulsa encima de la imagen. Así mismo, para cada imagen del carrusel se puede definir un enlace personalizado al que se accederá si se pulsa encima de la imagen que se esté mostrando en ese momento.

Por defecto, el tamaño de texto que aparece con cada imagen es muy pequeño. Para modificarlo, así como para centrar el texto, se ha de editar la hoja de estilos CSS de nuestra página web añadiendo el siguiente código:

```

}
.metaslider .caption,
.metaslider .cs-title,
.metaslider .flex-caption {
font-size: 1.5em; /* adjust as necessary */
text-align: center
}

```

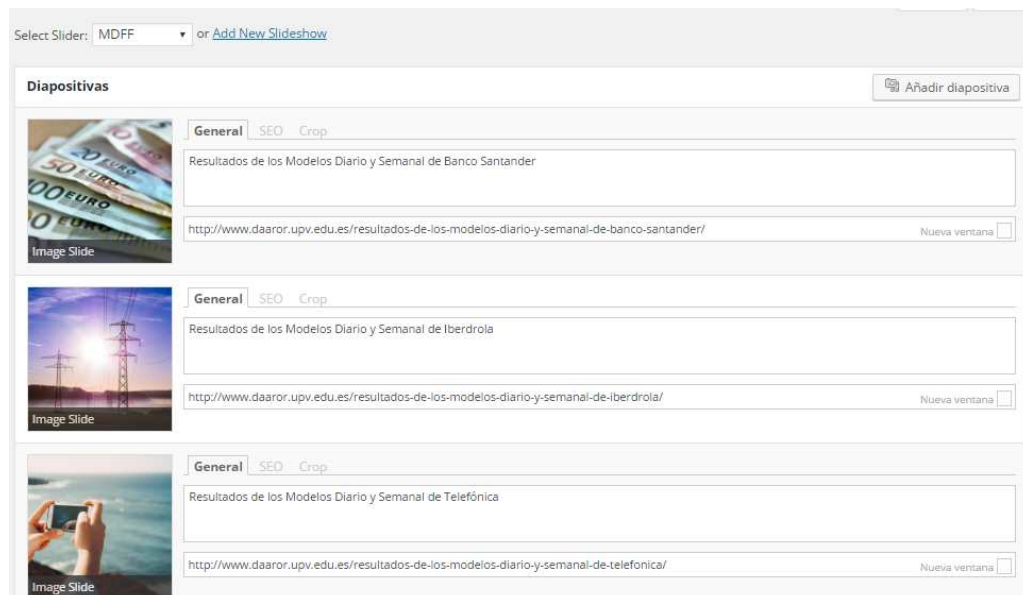


Figura 15. Sub-menú Meta Slider: configuración del carrusel de imágenes.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

Por último, siguiendo el mismo procedimiento que en la instalación del plug-in “Meta Slider”, se ha de llevar a cabo la instalación del plug-in conocido como “Exclude Pages from Navigation”, lo cual permitirá la creación de páginas con contenido que no aparezca directamente vinculado en el menú de navegación. Para excluir una página concreta del menú de navegación se desmarcará la opción “Include this page in the list of pages” ubicada en el menú de edición de cada página de contenidos que posteriormente desarrollaremos. Esto es muy útil para no duplicar accesos al mismo contenido dado que las páginas a las que se accederá pulsando en las imágenes del carrusel serán diferentes de las que se ofrecen en el menú de navegación principal.

El aspecto que tiene nuestra página web después de finalizar los pasos básicos descritos para su personalización es el siguiente:



Figura 16. Aspecto de la página web personalizada con Wordpress.

Fuente: <http://daaror.upv.edu.es/>

### 3.2.3 Visualizer: plug-in de gráficos en Wordpress.

A fin de poder vincular la información contenida en la Excel que tenemos disponible en Google Spreadsheets con nuestra página web Wordpress, se va a hacer uso de un plug-in que goza de un amplio reconocimiento y aceptación: Visualizer.

Para poder llevar a cabo la instalación, hemos de ir al menú Plugins y desde ahí pulsar en el botón Añadir nuevo. Desde esta nueva página, en el cuadro buscador hay que

insertar el nombre del plug-in, esto es, Visualizer. Una vez lo encuentre y aparezca en pantalla, simplemente pulsando en Instalar ahora se procederá a la instalación.

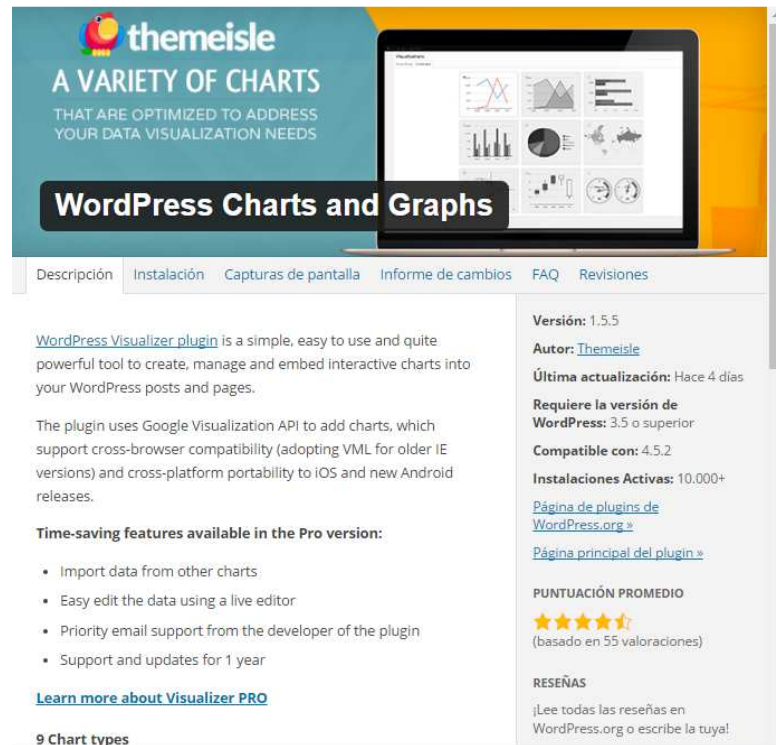


Figura 17. Panel de instalación del plug-in de Wordpress Visualizer.

Una vez completada la instalación, el siguiente paso es programar el plug-in para que sea capaz de extraer la información contenida en nuestra Excel ubicada en Google Spreadsheets.

Para ello, el primer paso es ir al menú Medios y seleccionar Visualizer Library, lo cual nos conducirá al gestor de gráficos que se creen con el plug-in Visualizer. Para añadir un nuevo gráfico se ha de pulsar en “Add new”. La primera pantalla nos pedirá que elijamos el tipo de gráfico que deseamos de entre los 9 tipos de gráfico disponible (líneas, puntos, tarta, etc.) y a continuación se ofrece personalizar el gráfico creado.

### 3.2.4 Implementación de la publicación automatizada de resultados en Internet.

A continuación, se describe los pasos a seguir para implementar la publicación automatizada de resultados correspondientes a la predicción de los modelos diario y semanal en nuestra página web de Wordpress:

- 1- Implementar en Google Spreadsheets los modelos diario y semanal, con actualización automatizada de cotizaciones cada 24 horas.

- 2- Implementar en Google Spreadsheets una hoja Excel, por cada uno de los modelos (diario y semanal) y subyacentes, que contenga la información de las predicciones que se desee mostrar en el gráfico, teniendo en cuenta que la fila 1 deberá contener el título de la serie, la fila 2 el tipo de datos de cada columna y a partir de la fila 3 se ubicarán los datos. Es importante seguir el esquema indicado ya que sino Visualizer no reconoce como gráfico los datos y no los representa. Por lo general, los modelos diario y semanal de cada subyacente se implementarán en hojas diferentes del mismo libro Excel, y posteriormente se creará una hoja Excel por cada uno de los gráficos que se desee mostrar tomando únicamente los datos correspondientes a los gráficos.
- 3- El siguiente paso es la publicación de las hojas Excel de cada uno de los gráficos que se quiera crear. Para ello, en Google Spreadsheets, se seleccionará cada hoja Excel donde estén los datos que se desea mostrar en un gráfico y desde el menú Archivo, Publicar en la Web, accederemos al menú de configuración de la publicación de los contenidos en Internet.



Figura 18. Menú de configuración de Google Spreadsheets para publicación en web.

Pinchando en el botón “Todo el documento” se abrirá un desplegable que nos permitirá seleccionar qué hoja del libro Excel queremos publicar. A continuación, se ha de seleccionar “Valores separados por comas (.csv)” ya que es el formato

que espera Visualizer. Una vez se han completado estos pasos, pulsando en el botón “Publicar” se activar la publicación en Internet y se nos proporciona un enlace web directo el cual deberemos copiar en el menú de configuración de Visualizer.

- 4- Crear un gráfico nuevo en Visualizer pulsando “Add new”. En la primera pantalla de configuración se selecciona el tipo de gráfico que deseamos crear (en este caso líneas), y en la siguiente pantalla de configuración, momento en que se indica el origen de los datos del gráfico, se debe seleccionar “From Web”, y pegar en el cuadro de diálogo que aparece el enlace que hemos obtenido en el punto 3.
- 5- Desde el menú Advanced, se puede personalizar el gráfico: definir el tipo y tamaño de letra, títulos, grosor de línea y colores, etc.
- 6- Una vez finalizada la configuración de nuestro gráfico, pulsamos en “Save Chart” y ya disponemos una referencia del estilo [visualizer id="XXX"] que, copiada en cualquier sitio de nuestra web, implementará la gráfica programada.

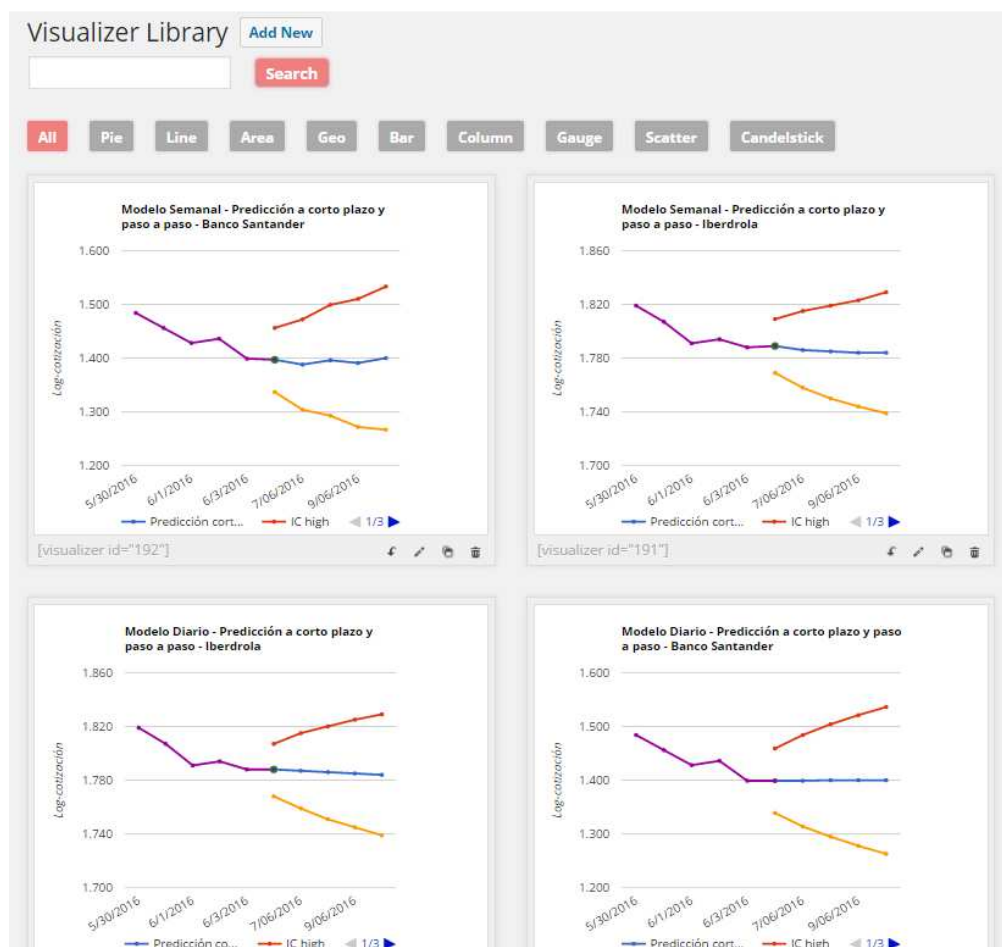


Figura 19. Biblioteca de gráficos creados con Visualizer.

- 7- Se ha programado, dentro del mismo libro Excel, una hoja por cada una de las gráficas que deseamos publicar en nuestra página web. Repetir los pasos 3 a 6 tantas veces como gráficas se desee publicar.

En resumen, el flujo de datos es el siguiente:

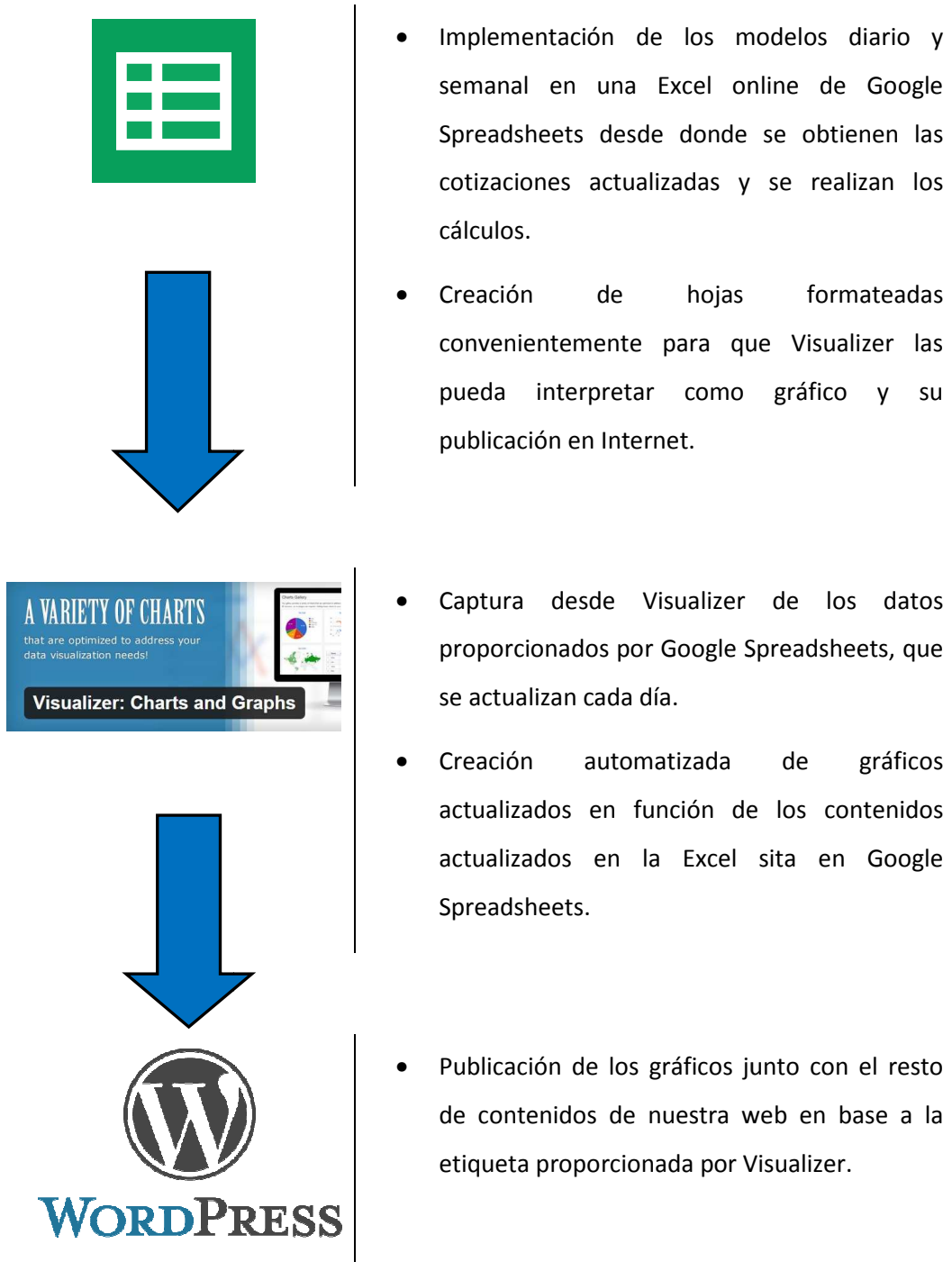


Figura 20. Flujo de datos entre Google Spreadsheets – Visualizer – Wordpress.





## Conclusiones

Mediante el modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico, aplicando el cálculo estocástico de Itô, cuya solución es un proceso de Markov de primer orden, se han desarrollado dos modelos, diario y semanal, que trabajando con log-cotizaciones consiguen modelizar la evolución temporal de la cotización de diferentes subyacentes cotizados del mercado español, concretamente, Banco Santander, Iberdrola y Telefónica.

La estimación puntual de los parámetros del modelo de Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico se ha hecho mediante el uso del método de máxima verosimilitud (maximización de la función de log-verosimilitud) y la posterior aproximación asintótica de la varianza y covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud basados en la inversa de la matriz de información de Fisher. Ello ha permitido la obtención de los intervalos de confianza con un nivel de confianza del 95%.

En los modelos diario y semanal se ha aplicado un método de predicción a corto plazo, basado en predicciones puntuales y estimaciones probabilísticas por intervalos de confianza, y un método puntual paso a paso, que a partir del método de predicción puntual a corto plazo, incorpora las últimas log-cotizaciones reales disponibles en cada nuevo paso para realizar la siguiente estimación probabilística.

Adicionalmente, también se han calculado medidas de bondad de ajuste para la validación de los modelos diario y semanal, en concreto, el error porcentual absoluto medio (Mean Absolute Percentage Error, MAPE), que ha resultado tener para todos los subyacentes estudiados un valor menor del 5% (error tolerable), un error cuadrático medio (Root Mean Squared Error, RMSE) aceptable estadísticamente, y unos intervalos de confianza que han recogido la incertidumbre las predicciones de los subyacentes bajo estudio, en todos los casos.

Cabe destacar que el modelo paso a paso se ajusta mejor que el modelo a corto plazo conforme se amplía el número de predicciones, lo cual es natural ya que el modelo paso a paso incorpora las últimas log-cotizaciones disponibles para llevar a cabo la siguiente predicción.

Los tests de contraste de razón de verosimilitudes y el test ANOVA (análisis de la varianza) no descartan la hipótesis nula, por tanto, no permiten afirmar que los modelos diario y semanal sean estadísticamente diferentes para los tres subyacentes cotizados modelizados. Así mismo, como era de esperar a la vista de los resultados de los test de contraste de razón de verosimilitudes y el test ANOVA, el contrastes de hipótesis para la comparación de la tasas de rendimiento entre días diferentes en el modelo semanal no revelan que exista una diferencia

entre las tasas de rendimiento de los lunes, martes, miércoles, jueves o viernes. Por tanto, no podemos asegurar que existan diferencias significativas entre las tasas de rendimiento entre diferentes días de la semana. No obstante, la metodología desarrollada es completamente general y puede ser aplicada para contrastar la misma hipótesis estadística nula para cualquier otro activo cotizado.

La implementación de los modelos diario y semanal ha sido llevada a cabo mediante Excel, que después ha sido trasladada a Google Spreadsheets online para su publicación en web y actualización automática de resultados mediante el uso de scripts. La página web, que se ha desarrollado mediante Wordpress e incluye los resultados de las predicciones con sus intervalos de confianza, está alojada en los servidores de la Universitat Politècnica de València y está accesible en la siguiente dirección web: <http://www.daror.upv.edu.es/>

## Bibliografía

### Libros

- [1] ALLEN, A. (2007). *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Rotterdam: Springer.
- [2] BACHELIER, L. (1900): *Théorie de la spéculation*. París: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, pp. 21–86.
- [3] BARBOLLÁ, R., CERDÁ, E. Y SANZ, P. (2000). *Optimización. Cuestiones, Ejercicios y Aplicaciones a la Economía*. Madrid: Prentice-Hall.
- [4] BLAKELEY, T. (2008). *WordPress Theme Design*. Birmingham: Packt Publishing Ltd.
- [5] BARROSO, I. (2001). *Manual de la inversión en bolsa – Tomos 1 y 2*. Madrid: Inversor ediciones.
- [6] DE GROOT, M.H. (1992). *Probabilidad y estadística*. Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.
- [7] KARLIN, S., TAYLOR, H.M. (1981). *A First Course in Stochastic Processes*. Nueva York: Academic Press.
- [8] KENDALL, M.G., STUART, A. (1968). *The Advanced Theory of Statistics*. Londres: Charles Griffin.
- [9] KIYOSHI, I. (1944). *Stochastic Integral*. Tokio: Imperial Academy.
- [10] KIYOSHI, I. (1961). *Lectures on Stochastic Processes*. Bombay: Tata Institute.
- [11] KLEBANER, F.C. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Londres: Imperial College Press.
- [12] KROL, L. (2015). *WordPress 4.x Complete*. Birmingham: Packt Publishing Ltd.
- [13] LAMBERTON, D., LAPEYRE, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Nueva York: Chapman and Hall/CRC.
- [14] MARTÍNEZ ÁLVAREZ, J.A. y CALVO GONZÁLEZ, J.L. (2012). *Banca y mercados financieros*. Valencia: Tirant lo Blanch.
- [15] ØKSENDAHL, B. (1998). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Nueva York: Springer.
- [16] PLUMLEY, G. (2015). *Teach yourself visually WordPress*. Indianapolis: John Wiley & Sons, Inc.
- [17] SOONG, T.T. (1973). *Random Differential Equations in Science and Engineering*. New York: Academic Press.

- [18] WILLIAMS, B., DAMSTRA D., STERN, H. (2013). *Professional WordPress development and design*. Indianapolis: John Wiley&Sons, Inc.

#### **Páginas web**

- [19] *Bolsa de Madrid*. <http://www.bolsademadrid.es> [Consulta: 23 de abril de 2016]

#### **Documentos en línea**

- [20] FORMARIZ, F. (2007). *Curso de Bolsa y Mercados Financieros*. Madrid: Bolsa de Madrid
- [21] MARTÍNEZ ABASCAL, E. y FERNÁNDEZ, P. (1997). *La bolsa en España: funcionamiento y magnitudes*. Navarra: IESE
- [22] AREA DE SISTEMAS DE INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES (2004). Normativa de Publicación de Contenidos Web en los Servidores de la Universidad Politécnica De Valencia ([http://www.upv.es/entidades/ASIC/menu\\_urlc.html?/entidades/ASIC/normativa/normativa\\_web.pdf](http://www.upv.es/entidades/ASIC/menu_urlc.html?/entidades/ASIC/normativa/normativa_web.pdf)).

#### **Base de datos**

- [23] GOOGLE FINANCE. Cotizaciones de los subyacentes Banco Santander (BME:SAN), Iberdrola (BME:IBE) y Telefónica España (BME:TEF).