UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Las Matemáticas para la Gestión del Riesgo en Carteras Financieras.

Carteras compuestas por n activos con correlaciones estadísticas arbitrarias

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Navarro Quiles, Ana (jccortes@imm.upv.es; annaqui@posgrado.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En estas páginas se estudia el siguiente problema clave en la gestión del riesgo de carteras financieras formadas por un número arbitrario de activos: la determinación de los pesos porcentuales de cada uno de los activos que forman la cartera, de manera que se minimice el riesgo global de la inversión. Para ello, se asume que se conocen los retornos individuales esperados de cada uno de los activos de la cartera, así como las correlaciones estadísticas de dichos retornos.

2 Introducción

En Finanzas es frecuente que las inversiones se realicen mediante carteras compuestas por dos o más activos financieros. En este contexto, y a través de las series históricas de las cotizaciones de cada uno de los activos que constituyen la cartera, se puede determinar, utilizando técnicas estadísticas, los retornos esperados (a través de la media) de cada uno de los activos que forman la cartera, así como las correlaciones de dichos retornos (a través de la matriz de varianzas-covarianzas). Un objetivo esencial en este escenario es la determinación de los pesos porcentuales de cada uno de los activos que forman la cartera de manera que se consiga obtener un riesgo global mínimo de la cartera inversora. Este trabajo aborda la resolución este interesante problema utilizando herramientas matemáticas básicas de optimización.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Describir el problema de minimización del riesgo asociado a una cartera de inversión consistente en determinar los pesos de cada uno de los activos que forman la cartera de manera que se minimice el riesgo global de la inversión, asumiendo para ello que se conocen cada uno de los retornos esperados individuales de los diferentes activos que forman la cartera, así como sus correlaciones estadísticas.

- Desarrollar los principales pasos algebraicos que permiten obtener la expresión matemática de los pesos asociados a cada uno de los activos que forman la cartera de mínimo riesgo.

4 Planteamiento del problema

En el estudio de la Gestión del Riesgo en Carteras Financieras, un problema clave es la determinación de los pesos de los activos que forman la cartera de modo, que considerando su riesgo individual y su correlación estadística, se minimice el riesgo global de la cartera. En un primer paso, usualmente se aborda este problema para una cartera formada únicamente por dos activos, pero en este trabajo se abordará el caso general en que la cartera está formada por un número arbitrario, $n \geq 2$, de activos financieros $a_i,\ i = 1, 2, ..., n.$ Para ello se utilizará la potente notación matricial. De forma sucinta, en la Tabla 1 se resume la notación que se considerará a lo largo de estas páginas.

Concepto	Notación
Pesos cartera	$\vec{w}=[w_1,w_2,\dots,w_n]$.
Vector de unos	$\vec{1}=[1,1,\dots 1]$.
Condición pesos	$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \Leftrightarrow \vec{1}\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}$.
Retorno del activo a_i	$R_i = \dfrac{v_{i,T}-v_{i,0}}{v_{i,0}}, \quad 1\le i\le n.$
Retorno esperado del activo a_i	$\mu_i = \mathrm{E}[R_i], \quad 1\le i\le n.$
Vector de retornos esperados	$\vec{m}=[\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n]$.
Matriz de varianzas-covarianzas	$C=[c_{ij}], \quad c_{ij}=\begin{cases}\mathrm{Cov}[R_i,R_j] & \text{si} \quad i\ne j,\\ \mathrm{Var}[R_i] & \text{si} \quad i=j.\end{cases}$

Tabla 1. Notación utilizada en este trabajo, siendo $v_{i,0}$ y $v_{i,T}$ los valores inicial y final, respectivamente, del activo a_i, $1\le i\le n$. El superíndice T en $\vec{w}^{\mathrm{T}}$ denota la transposición del vector $\vec{w}$.

Con la notación introducida en la Tabla 1 se deducen algebraicamente las expresiones del retorno esperado, μ, y del riesgo, σ^2, de la cartera:

$$\mu=\vec{m}\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i w_i, \qquad \sigma^2=\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j=\vec{w}\cdot C\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}.$$

Ecuación 1. Valores del retorno esperado (μ) y el riesgo (σ^2) de la cartera. Obsérvese que μ también puede expresarse como $\mu=\vec{w}\cdot\vec{m}^{\mathrm{T}}$.

Desde el punto de vista matemático es interesante subrayar que como claramente la matriz de varianzas-covarianzas, C, es simétrica, y se puede probar que es semidefinida positiva (y definida positiva si C es invertible), entonces se cumple que $\vec{u}\cdot C\cdot\vec{u}^{\mathrm{T}}\ge 0$ ($\vec{u}\cdot C\cdot\vec{u}^{\mathrm{T}}>0$) para cualquier vector $\vec{u}=[u_1,u_2,\dots,u_n]$. Por tanto, en particular, tomando $\vec{u}=\vec{w}$, está garantizado que el riesgo de la cartera, σ^2, sea no negativo, $\sigma^2\ge 0$. En lo sucesivo se supondrá que C es definida positiva.

El objetivo que perseguimos es determinar los pesos w_i, $1\le i\le n$, de los activos financieros, a_i, $1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}$, respectivamente, que deben componer la cartera para que el riesgo, σ^2, de ésta sea mínimo, conocido un valor esperado del retorno, μ, de la cartera. Con objeto de despertar la intuición geométrica, en primer lugar, vamos a explorar -en el caso particular en que $n = 3$ (cartera formada por tres activos)- la relación entre el vector de pesos $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ y el punto $(\sigma,\ \mu)$ del riesgo-retorno esperado de la cartera. Obsérvese que el riesgo de la cartera está ahora considerado a través de la desviación típica, σ, (no de la varianza, σ^2). Posteriormente se abordará el caso general en que la cartera está formada por n activos.

La gráfica de la izquierda de la Figura 1 representa el plano $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ (si $n > 3$ se denomina hiperplano) que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. La parte sombreada del plano corresponde al corte del primer octante (u octante positivo), y representa carteras formadas por activos sin posición de venta en corto. El hiperplano completo se denomina "hiperplano de pesos de la cartera".

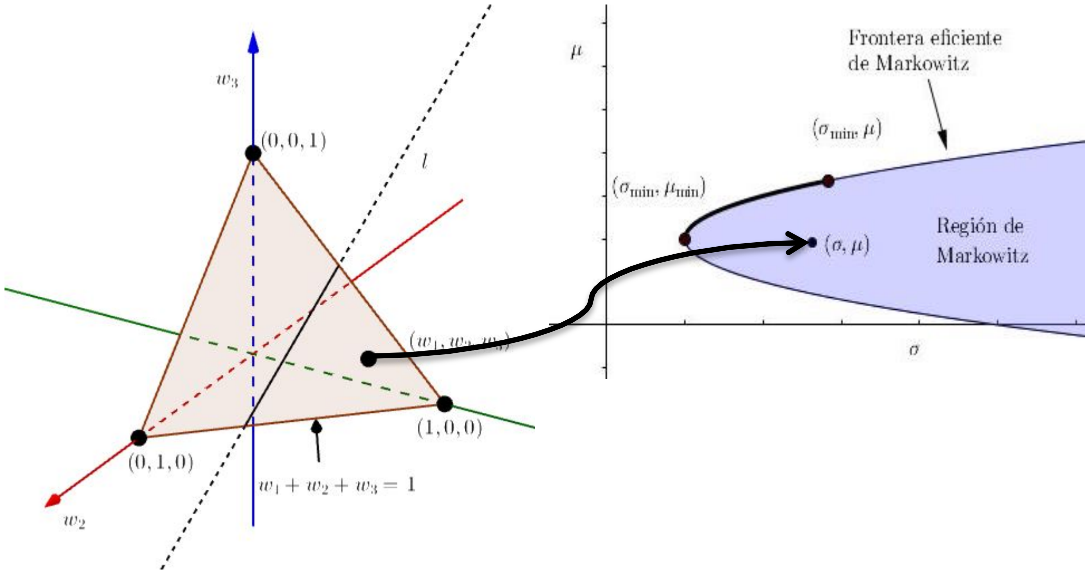

Figura 1. Representación gráfica en dimensión tres ($n = 3$) de la transformación $f(w_1, w_2, \ldots w_n) = (\sigma, \mu)$ definida en la Ec.2.

Para estudiar la anunciada relación entre $\vec{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ y $(\sigma,\ \mu)$ es conveniente definir la transformación

$$f : IR^n \to [0, +\infty[\times IR : f(w_1, \ldots, w_n) = (\sigma, \mu) \ \text{ donde } \left\{ \begin{array}{l} \mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = \vec{m} \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}}, \\ \sigma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j = \vec{w} \cdot C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}}. \end{array} \right.$$

Ecuación 2. Transformación del hiperplano de pesos $(w_1, \ldots, w_n)$ al plano riesgo-retorno esperado (σ, μ).

Una representación de la transformación f se muestra en la Figura 1. Para hacernos una idea de cómo se comporta esta transformación vamos a estudiar cómo se transforma una línea recta l, la cual, ahora ya para mayor generalidad se asumirá en dimensión n y expresada en forma paramétrica y pasando por dos puntos A y B:

$$l = l(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, \ldots, a_n t + b_n) = \vec{a}t + \vec{b}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n], \\ \vec{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]. \end{array} \right. \quad t \in IR.$$

Vamos a determinar la expresión de la curva $(\sigma,\ \mu)$ para el caso en que $\vec{w} = \vec{a}t + \vec{b}$. Primero expresemos μ y σ^2 en términos del parámetro t:

$$\mu = \vec{m} \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} = \vec{m} \cdot \left(\vec{a}t + \vec{b}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\vec{m} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}\right)t + \vec{m} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}},$$

$$\sigma^2 = \vec{w} \cdot C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} = \left(\vec{a}t + \vec{b}\right) \cdot C \cdot \left(\vec{a}t + \vec{b}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\vec{a} \cdot C \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}\right)t^2 + \left(\vec{b} \cdot C \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}} + \vec{a} \cdot C \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}\right)t + \vec{b} \cdot C \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}.$$

Despejando t de la expresión de μ y sustituyendo en la de σ^2 se tiene

$$\mu = \left(\vec{m} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}\right)t + \vec{m} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}} \Rightarrow t = \frac{\mu - \vec{m} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}}{\vec{m} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}}, \qquad \sigma^2 = \gamma(\alpha\mu + \beta)^2 + \delta(\alpha\mu + \beta) + \varepsilon,$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{\vec{m} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}}, \quad \beta = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}}{\vec{m} \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}}, \quad \gamma = \vec{a} \cdot C \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}}, \quad \delta = \vec{b} \cdot C \cdot \vec{a}^{\mathrm{T}} + \vec{a} \cdot C \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}, \quad \varepsilon = \vec{b} \cdot C \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}.$$

Observamos por tanto que σ^2 es una función cuadrática de μ, y en consecuencia, al variar $t \in R$, la línea recta $l(t)$ contenida en el hiperplano de pesos se transforma en los puntos $(\sigma^2,\ \mu)$ que forman una parábola. Esto sucede para "todas" las rectas que definen el hiperplano de pesos, definiendo, a modo de curvas de nivel, parábolas "disjuntas y paralelas" en el plano $(\sigma^2,\ \mu)$. En la parte derecha de la Figura 1 se representa en el plano $(\sigma,\ \mu)$ la raíz cuadrada de una de tales parábolas, denominada curva Markowitz, la cual obviamente no es una parábola, ya que, hemos tomado raíces cuadradas de una parábola.

5 Determinando la cartera de mínimo riesgo

El objetivo de este apartado es determinar el vector de pesos, $\vec{w}^* = \left[w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*\right]$, que minimiza el riesgo σ de la cartera. Obsérvese que como los rendimientos $R_i,\ 1 \le i \le n$, de los activos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que forman la cartera se asumen conocidos, entonces en la práctica y mediante técnicas estadísticas a partir de una serie histórica de los valores de las cotizaciones de los activos también se conocerá la matriz de varianzas-covarianzas C y los retornos esperados, $\mu_i = E\left[R_i\right]$, $1 \le i \le n$. Por tanto, una vez se determinen los pesos $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*$, quedará también determinado el punto $\left(\sigma_{\min}, \mu_{\min}\right)$ de mínimo riesgo mediante la primera expresión de la Ec.1. Se trata por tanto de minimizar el programa:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sigma^2 = \sigma^2\left(w_1, w_2, \ldots, w_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j = \vec{w} \cdot C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}}, \\ \text{sujeta a} & \sum_{i=1}^{n} w_i = \vec{1} \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} = 1. \end{array}\right\}$$

Ecuación 3. Programa de optimización para determinar los pesos $\vec{w}^* = \left[w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*\right]$ que minimizan la cartera formada por los n activos con matriz de varianza-covarianza C definida en la Tabla 1.

A continuación, para mayor claridad se explicitarán, utilizando la potente notación vectorial para derivadas, cada uno de los pasos que permiten determinar el mínimo global del programa de optimización formulado en la Ec.3. Para ello se aplicará el siguiente resultado que proporciona condiciones suficientes para asegurar la optimalidad global (véase Proposición 4.3 de la referencia [1]).

Sea el programa

$$\left.\begin{array}{llcl} \text{Optimizar} & f(w_1, \ldots, w_n) & & \\ \text{sujeto a:} & h_1(w_1, \ldots, w_n) & = & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ & h_m(w_1, \ldots, w_n) & = & 0. \end{array}\right\} \quad (I)$$

con $m < n$ donde f y h_i, $1 \le i \le m$, son funciones continuas y con derivadas continuas en un conjunto convexo abierto $D \subset IR^n$. Entonces se verifica que si f es convexa (cóncava) en el conjunto de soluciones factibles y h_i, $1 \le i \le m$, son lineales, todos los puntos críticos o estacionarios del programa (I) son mínimos (máximos) globales.

En nuestro contexto aplicamos el resultado anterior con

$$m = 1 < n,\ f = \sigma\left(w_1, w_2, \ldots, w_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j,\ \text{y}\ h_1 = h_1(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i - 1.$$

Obviamente las hipótesis para aplicar este resultado se cumplen porque tanto la función f definida en la Ec.3, como la función h_1 son continuas y con derivadas continuas (al ser funciones polinómicas de grado dos y uno, respectivamente, en todas sus variables $w_1, w_2, \ldots, w_n$) en el dominio $D = \left]0,1\right[\times \cdots \times \left]0,1\right[\subset IR^n$, que es un conjunto convexo. Además al ser f una forma cuadrática definida positiva está garantizado que es una función convexa, ya que, su matriz hessiana, $H(f)$, es definida positiva (por serlo la matriz C, véase [pág. 30, 5]):

$$\nabla(f) = \nabla\left(\sigma\left(w_1, w_2, \ldots, w_n\right)\right) = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial w_1}, \cdots, \frac{\partial \sigma}{\partial w_n}\right] = 2\vec{w}C, \qquad H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w_1 \partial w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w_n \partial w_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w_n^2} \end{bmatrix} = 2C.$$

Finalmente, obsérvese que la única restricción definida por h_1 es lineal respecto de $w_1, \ldots, w_n$. Por todo ello, es suficiente con determinar los puntos críticos o estacionarios $\vec{w}^* = \left[w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*\right]$ del programa de optimización de la Ec.3, lo cual se abordará a continuación aplicando una técnica clásica de optimización denominada "multiplicadores de Lagrange" [3]. Para ello se considera la función objetivo auxiliar

$$g = g\left(w_1, w_2, \ldots, w_n; \alpha\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_i w_j + \alpha\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right).$$

Ecuación 4. Función objetivo asociada al programa de minimización dado en la Ec.3 usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Para ello se calculan las derivadas parciales con respecto a $w_1, \ldots, w_n$ y α de la función auxiliar g definida en la Ec.4 y se igualan a cero dichas derivadas. Esto conduce a un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son los puntos críticos. Para facilitar la comprensión de los cálculos, en primer lugar, detallaremos los cálculos que permiten establecer la primera de las ecuaciones del sistema de ecuaciones. Observemos que

$$\frac{\partial g}{\partial w_1} = 2c_{11} w_1 + \left(c_{12} + c_{21}\right) w_2 + \ldots + \left(c_{1n} + c_{n1}\right) w_n - \alpha = 0,$$

y como la matriz de varianzas-covarianzas $C = \left[c_{ij}\right]$ es simétrica (véase Tabla 1), $c_{ij} = c_{ji},\ 1 \le i, j \le n$, por tanto

$$\frac{\partial g}{\partial w_1} = 2\left(c_{11} w_1 + c_{12} w_2 + \ldots + c_{1n} w_n\right) - \alpha = 2\sum_{j=1}^{n} c_{1j} w_j - \alpha = 0,$$

y, en general,

$$\frac{\partial g}{\partial w_i} = 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_j - \alpha = 0, \qquad 1 \le i \le n,$$

lo cual puede expresarse de forma compacta usando la notación vectorial

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{w}} = 2C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} - \alpha \vec{1}^{\mathrm{T}} = \vec{0}^{\mathrm{T}},$$

siendo $\vec{0} = [0,0,\ldots,0]$ el vector fila nulo de tamaño n. Por tanto como C es una matriz definida positiva, existe su inversa, C^{-1}, y de la relación anterior se obtiene

$$2C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} = \alpha \vec{1}^{\mathrm{T}} \Rightarrow C \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}} = \frac{\alpha}{2} \vec{1}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \vec{w}^{\mathrm{T}} = \frac{\alpha}{2} C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \vec{w} = \frac{\alpha}{2} \vec{1} \cdot C^{-1},$$

Ecuación 5. Condición sobre $\vec{w}$ y α al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange.

donde en el último paso se han utilizado las dos siguientes propiedades: $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ y que si C es simétrica entonces C^{-1} también es simétrica, por tanto $\left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = C^{-1}$. Observemos que falta por imponer la condición de punto crítico sobre la derivada respecto del multiplicador de Lagrange α:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 - \vec{w} \vec{1}^{\mathrm{T}}.$$

Sustituyendo en esta relación la expresión de $\vec{w}$ obtenida en la Ec.5 se determina el valor de α (o equivalentemente $\alpha/2$):

$$1 = \frac{\alpha}{2} \vec{1} \cdot C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\vec{1} \cdot C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}}}.$$

Obsérvese que $\vec{1} \cdot C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}}$ es un número. Ahora basta sustituir esta expresión de $\alpha/2$ en la expresión de $\vec{w}$ dada en la Ec.5 para obtener el punto crítico o candidato a mínimo (global):

$$\vec{w}^* = \frac{\vec{1} \cdot C^{-1}}{\vec{1} \cdot C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}}}.$$

Ecuación 6. Vector de pesos candidato a ser la solución del programa de optimización dado en la Ec.3.

Por tanto, se ha establecido el siguiente

Resultado principal

La cartera de mínimo riesgo tiene los pesos:

$$\vec{w}^* = \frac{\vec{1} \cdot C^{-1}}{\vec{1} \cdot C^{-1} \cdot \vec{1}^{\mathrm{T}}}.$$

Es interesante observar que el denominador de esta expresión es un número o escalar y es precisamente la suma de las componentes del vector de tamaño $1 \times n$ del numerador. Esto garantiza que las n componentes $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*$ del vector $\vec{w}^*$ suman 1. Obsérvese que "curiosamente" los pesos que minimizan el riesgo de la cartera no dependen del retorno esperado de la cartera sino de su volatilidad, al depender de la matriz de varianza-covarianzas, C.

5.1 Un ejemplo

En este subapartado se muestra una aplicación numérica de los resultados teóricos desarrollados en el apartado anterior. Vamos a suponer una cartera formada por tres activos para los cuales, se asume que se conocen (a partir de series históricas de cotizaciones y métodos estadísticos) sus retornos esperados

$$\vec{m} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3] = [E[R_1], E[R_2], E[R_3]] = [0.2, 0.1, 0.3],$$

las desviaciones típicas de los retornos

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] = \left[+\sqrt{Var[R_1]}, +\sqrt{Var[R_2]}, +\sqrt{Var[R_3]}\right] = [0.12, 0.01, 0.10],$$

y sus coeficientes de correlación de los retornos $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = E\left[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])\right]$, $1 \le i, j \le 3$, $i \ne j$,

$$\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = -0.10; \quad \rho_{1,3} = \rho_{3,1} = 0.05; \quad \rho_{2,3} = \rho_{3,2} = 0.15.$$

Por tanto, también se conoce su matriz de varianzas-covarianzas y su inversa

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0144 & -0.00012 & 0.0006 \\ -0.00012 & 0.0001 & 0.00015 \\ 0.0006 & 0.00015 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 70.4535 & 92.977 & -5.62186 \\ 92.977 & 10352.9 & -160.872 \\ -5.62186 & -160.872 & 102.75 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la Ec.6 se obtiene el vector de pesos de la cartera

$$\vec{w}^* = [w_1^*, w_2^*, w_3^*] = \frac{[1,1,1]\cdot\begin{bmatrix} 70.4535 & 92.977 & -5.62186 \\ 92.977 & 10352.9 & -160.872 \\ -5.62186 & -160.872 & 102.75 \end{bmatrix}}{[1,1,1]\cdot\begin{bmatrix} 70.4535 & 92.977 & -5.62186 \\ 92.977 & 10352.9 & -160.872 \\ -5.62186 & -160.872 & 102.75 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= [0.0152045, 0.990937, -0.00614153].$$

que minimiza su riesgo. Además, utilizando la Ec.1 se obtiene el retorno esperado (μ) y el valor del mínimo riesgo (σ)

$$\mu = \left[0.2, 0.1, 0.3\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.0152045 \\ 0.990937 \\ -0.00614153 \end{bmatrix} = 0.199386,$$

$$\sigma^2 = \left[0.0152045, 0.990937, -0.00614153\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.0144 & -0.00012 & 0.0006 \\ -0.00012 & 0.0001 & 0.00015 \\ 0.0006 & 0.00015 & 0.01 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0152045 \\ 0.990937 \\ -0.00614153 \end{bmatrix} = 0.0000963479.$$

Por tanto, el punto de mínimo riesgo es:

$$(\mu_{\min}, \sigma_{\min}) = (0.199386, 0.0098157).$$

6 Cierre

En este trabajo se ha estudiado, utilizando técnicas de optimización en varias variables elementales, el problema de la determinación de los pesos de los activos que deben componer una cartera financiera para que el riesgo de la cartera sea mínimo. Para ello se ha asumido que se conocen tanto los rendimientos medios de cada activo como la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos. Las ideas desarrolladas en este trabajo tienen una gran potencialidad práctica si se conjugan con métodos de predicción de activos financieros, ya que, se puede comprender cómo los *brokers* componen carteras financieras en basa a posiciones de riesgo mínimo.

7 Bibliografía

[1] Barbollá, R., Cerdá, E. Y Sanz, P.: "Optimización. Cuestiones, Ejercicicios y Aplicaciones a la Economía", Prentice-Hall, 2000.

Se trata de un texto excelente en el cual a través de numerosos ejercicios se revisan los aspectos más importantes de la optimización libre, con restricciones de igualdad y con restricciones de desigualdad.