MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 9(2), 2016 DOI: 10.4995/msel.2016.3909.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Coloreando el Álgebra Lineal

Coloring Linear Algebra

María José Beltrán-Meneu
Universitat de València
maria.jose.beltran@uv.es

Marina Murillo-Arcila
Universitat Politècnica de València
mamuar1@posgrado.upv.es

Abstract

En este trabajo se presenta un ejemplo de cómo introducir conceptos básicos de Álgebra Lineal en un primer curso de Ingeniería a partir del modelo de color RGB basado en la síntesis aditiva de los tres colores de luz primarios rojo, verde y azul. Utilizando este modelo se pretende establecer una conexión entre la obtención de colores por adición y los conceptos matemáticos de espacio vectorial, combinación lineal de vectores y envoltura convexa. Para visualizar esta conexión nos ayudamos del software Geogebra.

We present an example of how we can introduce basic concepts on Linear Algebra in a first course of an Engineering School. We use the RGB pattern color which allows us to decompose a color into three primary colors (namely, red, green, blue). By using this model we give a natural connexion between the additivity of the color decomposition and the notions on linear algebra (as vector space, linear combination and convex linear span of vectors). To visualize these connexions we use Geogebra.

Keywords: Linear Algebra, linear combination, mathematical modelling, RGB pattern color

Palabras clave: Álgebra lineal, combinación lineal, modelización matemática, modelo de color RGB

1 Introducción

La propuesta didáctica que presentamos a continuación surge de la necesidad de conectar las matemáticas con el mundo real. Los contenidos de matemáticas impartidos en los primeros cursos de las carreras de ingeniería presentan una gran complejidad para el alumno debido a su alto nivel de razonamiento abstracto. Por esta razón es necesario buscar modelos que materialicen los contenidos y pongan de manifiesto la utilidad de las matemáticas. Es por ello que utilizamos los principios de la Educación Matemática Realista (RME) (Gravemeijer, 1999), basada en cuatro niveles de actividades: el situacional, referencial, general y formal. De la combinación de estos 4 tipos de actividades se consigue que el alumno adquiera conceptos formales a partir de una situación real.

Nuestra propuesta didáctica se focaliza en el área del álgebra lineal, una rama de las matemáticas que, debido a su alto contenido teórico, requiere de un alto nivel de abstracción por parte del alumnado que no siempre es alcanzado. Es por ello que establecemos una conexión entre algunos conceptos básicos de esta materia y el modelo de color RGB basado en la síntesis aditiva, con el que es posible obtener cualquier color mediante la mezcla por adición de los tres colores de luz primarios: rojo, verde y azul.

Existen diversos artículos en los que se presentan propuestas didácticas para introducir o aplicar diferentes conceptos del álgebra lineal a nivel universitario. En (Montero, 2008), (Domínguez, 2011) y (Montero, Badía, 2011) los autores presentan diversas aplicaciones al mundo de las telecomunicaciones y la imagen digital tales como el cifrado de mensajes, la compresión de imágenes y audios, la detección de movimiento en una escena, etc. En (Calabuig et al., 2013) los autores muestran cómo el uso del álgebra lineal nos permite estudiar probabilidades y estrategias ganadoras para juegos de mesa, y en (Calabuig et al., 2015) presentan una propuesta basada en la descomposición en valores singulares de una matriz.

Nuestra propuesta se encuadra en el marco de la teoría APOS (acción-proceso-objeto-esquema) propuesta por Dubinsky y McDonald (Dubinsky, McDonald, 2001). Esta teoría propone que los procesos son creados a partir de acciones concretas mediante un proceso de abstracción y que los objetos matemáticos se crean a partir de dichos procesos. Cuando un alumno asimila las acciones, trabajando dentro del modelo RGB, puede examinar sus propiedades y establecer relaciones. De esta forma acciones concretas forman los procesos que son encapsulados para formar objetos matemáticos. Finalmente, el conjunto de acciones, procesos y objetos se organizan formando esquemas mentales.

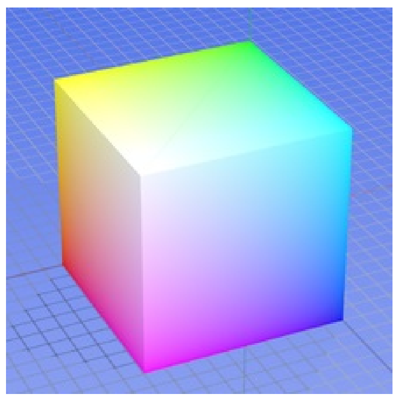
Con este planteamiento, presentamos un modelo que esperamos motive al alumnado y le ayude en la comprensión de conceptos elementales del álgebra lineal como son los vectores y sus relaciones. Para visualizar dicho modelo y poder relacionarlo con los conceptos matemáticos hacemos uso del software dinámico multiplataforma *Geogebra*.

2 Propuesta Didáctica

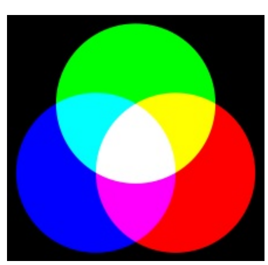
La siguiente propuesta didáctica va dirigida a alumnos de primer curso de álgebra lineal de Ingeniería que sólo conocen la definición de espacio vectorial. Utilizamos el sistema RGB de colores para comprender mejor esta estructura algebraica e introducir nuevos conceptos como son la combinación lineal de vectores, sistema generador y base de un espacio vectorial, y envoltura convexa de un conjunto de vectores.

RGB es un modelo de color basado en la síntesis aditiva. En el sistema aditivo de síntesis de color, en el cual los colores se consiguen mezclando luz de color en lugar de pigmentos, el rojo es un color primario, junto con el verde y el azul. Esto significa que cuando se trabaja con luz de color, basta con mezclar esos tres colores en diferentes proporciones para obtener todos los demás. Para crear las tonalidades claras y oscuras, se reduce o aumenta la luminosidad o intensidad de los colores primarios. Cuando ningún color luz está presente, se percibe el negro. Este sistema aditivo de colores luz es el que utilizan los monitores y televisores para producir colores. Lo siguen algunos sistemas de codificación de imagen y vídeo como son el JPEG o el MPEG.

En este modelo se identifica cada color con un vector de $\mathbb{R}^3$, donde cada coordenada representa la intensidad de los colores rojo (R), verde (G) y azul (B), que varía en una escala que va del 0 al 255. Es por ello que el conjunto de todos los colores puede visualizarse como un cubo de lado 255.



El color rojo se representa mediante el vector $(255, 0, 0)$, el verde con el vector $(0, 255, 0)$ y el azul con el vector $(0, 0, 255)$, obteniendo en cada caso un color resultante monocromático. La ausencia de color, es decir, el color negro, se obtiene cuando las tres componentes son 0, obteniendo el vector $(0, 0, 0)$. Al mezclar cualquier par de colores primarios, aparecen los colores aditivos secundarios: amarillo $(255, 255, 0)$, cian $(0, 255, 255)$ y magenta $(255, 0, 255)$. El color blanco se forma al mezclar los tres colores primarios $(255, 255, 255)$. De esta forma, identificamos la mezcla de colores con suma de vectores.



En primer lugar, se plantea al alumno si el conjunto de todos los colores luz existentes constituye un espacio vectorial.

Un **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es una terna $(V,+,\cdot)$ donde V es un conjunto no vacío y $+,\cdot$ son dos operaciones del tipo $+ : V \times V \to \mathbb{R}$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ denominadas "suma de vectores" y "producto por un escalar" respectivamente, y con las siguientes propiedades: denotando $+(u,v) = u+v$ y $\cdot(\lambda, v) = \lambda v$,

(1.) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (propiedad asociativa).

(2.) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (propiedad conmutativa).

(3.) $\exists\ e \in V$ tal que $e + v = v + e = v$, $\forall\ v \in V$ (elemento neutro).

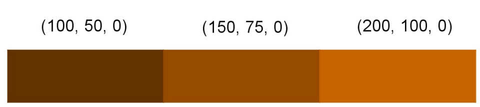
(4.) $\forall v \in V\ \exists w \in V$ tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).

(5.) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$.

(6.) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ y $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$ (propiedad distributiva).

(7.) $1v = v$, $\forall v \in V$.

Si pensamos en el conjunto de todos los colores como vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, y, z) donde $0 \leq x, y, z \leq 255$, podemos identificar la mezcla de colores con la suma de vectores, y el producto de un vector por un escalar como la modificación de la intensidad de los colores primarios rojo, verde y azul que constituyen el color. Por ejemplo, el color marrón oscuro se identifica en la escala RGB con el vector $(100, 50, 0)$. Si lo multiplicamos por 1.5 obtenemos el vector $(150, 75, 0)$ que se identifica con el color marrón. Sin embargo, si lo multiplicamos por 2 obtenemos el vector $(200, 100, 0)$ que representa el marrón claro.



Es evidente que se verifican las propiedades asociativa y conmutativa a la hora de mezclar colores. Identificando el negro, vector $(0, 0, 0)$, con la ausencia de color, podemos tomarlo como el elemento neutro. También es fácil comprobar que se verifican las propiedades 5, 6 y 7. En cambio, en el sistema RGB no tiene sentido considerar los elementos opuestos ya que si por ejemplo tomamos el color rojo $(255, 0, 0)$, vemos que no existe ningún color que al mezclarlo con él produzca el color negro. Además, nos encontramos con otra dificultad; las componentes de los vectores que representan los colores varían entre 0 y 255, por lo que en el modelo RGB no tiene sentido multiplicar los vectores por cualquier valor real.

Por tanto, el modelo de color RGB no es un espacio vectorial. Más adelante veremos que se corresponde con la estructura algebraica conocida como envoltura convexa de un conjunto de puntos. Aprovechamos este modelo para introducir el concepto matemático de combinación lineal de vectores y sistema generador.

Diremos que un vector $v \in V$ es **combinación lineal** de los vectores $\{v_1, \ldots v_n\}$ si existen $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$.

Si consideramos los colores rojo, verde y azul, observamos que podemos obtener cualquier otro color a partir de ellos; es decir, todo color se puede expresar como combinación lineal de los

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

vectores rojo, verde y azul. Si tomamos cualquier color (x, y, z), siempre podemos encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que:

$$\alpha_1(255, 0, 0) + \alpha_2(0, 255, 0) + \alpha_3(0, 0, 255) = (x, y, z)$$

tomando $\alpha_1 = \frac{x}{255}$, $\alpha_2 = \frac{y}{255}$ y $\alpha_3 = \frac{z}{255}$. En la siguiente tabla vemos la correspondencia de algunos colores en el modelo RGB.

Indice	Color	RGB	Indice	Color	RGB
0		0, 0, 0	16		153, 153, 255
1		255, 255, 255	17		153, 51, 102
2		255, 0, 0	18		255, 255, 204
3		0, 255, 0	19		204, 255, 255
4		0, 0, 255	20		102, 0, 102
5		255, 255, 0	21		255, 128, 128
6		255, 0, 255	22		0, 102, 204
7		0, 255, 255	23		204, 204, 255
8		128, 0, 0	24		0, 0, 128
9		0, 128, 0	25		255, 0, 255
10		0, 0, 128	26		255, 255, 0
11		128, 128, 0	27		0, 255, 255
12		128, 0, 128	28		128, 0, 128
13		0, 128, 128	29		128, 0, 0
14		192, 192, 192	30		0, 128, 128
15		128, 128, 128	31		0, 0, 255

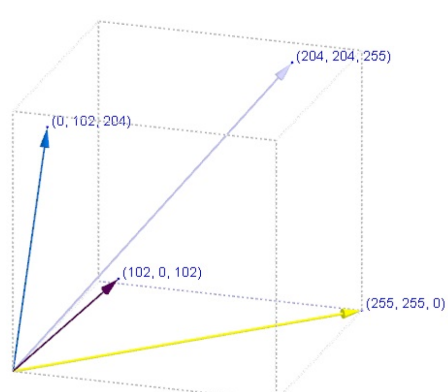
Ahora se le pide al alumno que considere la terna de colores $(255, 255, 0)$, $(0, 102, 204)$ y $(102, 0, 102)$ y establezca qué colores pueden obtenerse como resultado de mezclar los anteriores con diferentes intensidades. Se observa que también en este caso podemos obtener cualquier color. En efecto, de la ecuación

$$\alpha_1(255, 255, 0) + \alpha_2(0, 102, 204) + \alpha_3(102, 0, 102) = (x, y, z),$$

se obtiene que el sistema resultante:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 255\alpha_1 & + & 102\alpha_3 & = & x \\ 255\alpha_1 & + & 102\alpha_2 & = & y \\ 204\alpha_2 & + & 102\alpha_3 & = & z \end{array} \right. \tag{1}$$

tiene solución única al ser el determinante de la matriz de coeficientes distinto de 0. Si, por ejemplo, queremos obtener el color $(204, 204, 255)$, tendremos que mezclar los tres colores anteriores tomando $\alpha_1 = \frac{7}{15}$, $\alpha_2 = \frac{5}{6}$ y $\alpha_3 = \frac{5}{6}$.



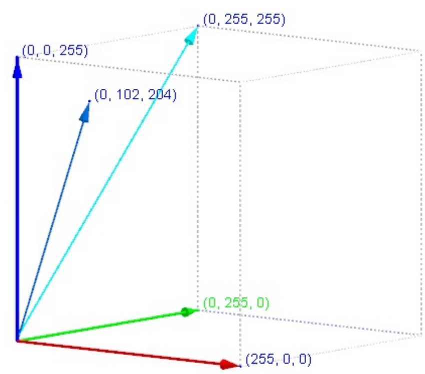
En cambio, si se considera la terna de colores verde, azul y cian, tenemos una situación diferente. Si tomamos el color $(0, 102, 204)$ observamos que podemos obtenerlo mezclando, en diferentes intensidades, los colores azul y verde, o mezclando el azul y cian, o el verde y cian:

$$\alpha_1(0, 255, 0) + \alpha_2(0, 0, 255) + \alpha_3(0, 255, 255) = (0, 102, 204),$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 255\alpha_1 & + & 255\alpha_3 & = & 102 \\ 255\alpha_2 & + & 255\alpha_3 & = & 204 \end{array} \right. \tag{2}$$

Esto ocurre porque el sistema de ecuaciones que obtenemos es compatible indeterminado. Sin embargo, vemos que el rojo no puede conseguirse mezclando dicha terna de colores, ya que en este caso se obtiene un sistema incompatible:

$$\alpha_1(0, 255, 0) + \alpha_2(0, 0, 255) + \alpha_3(0, 255, 255) = (255, 0, 0).$$



Acabamos de ver que las dos primeras ternas consideradas generan toda la gama de colores mientras que si mezclamos diferentes intensidades de los colores verde, azul y cian hay colores que no podemos conseguir. De este manera, nos encontramos en situación de presentar los conceptos de sistema generador y base de un espacio vectorial.

Dado un espacio vectorial V diremos que los vectores $\{v_1, \ldots v_n\}$ son un **sistema generador** de V si todo vector $v \in V$ puede expresarse como combinación lineal de ellos.

Dado un espacio vectorial V diremos que los vectores $\{v_1, \ldots v_n\} \subset V$ son una **base** de V si forman un sistema generador y, además, ninguno de ellos puede ser expresado como combinación lineal de los restantes.

En los ejemplos anteriores se observa que los colores rojo, verde y azul: $(255, 0, 0)$, $(0, 255, 0)$ y $(0, 0, 255)$, generan todo el conjunto de colores y ninguno de ellos puede obtenderse mezclando los otros dos. Esto ocurre porque los vectores $(255, 0, 0)$, $(0, 255, 0)$ y $(0, 0, 255)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, si mezclamos los colores verde, azul y cian, $(0, 255, 0)$,$(0, 0, 255)$ y $(0, 255, 255)$, hay colores que no podemos conseguir. Además, observamos que el cian se obtiene mezclando el verde y el azul. Esto ocurre porque los vectores $(0, 255, 0)$,$(0, 0, 255)$ y $(0, 255, 255)$ no son sistema generador ni base de $\mathbb{R}^3$. Con estos ejemplos, se pretende que el alumno llegue por sí mismo a entender que para generar cualquier color será necesario tomar tres colores de forma que ninguno de ellos pueda obtenerse mezclando los restantes. Por otra parte, deberá darse cuenta de que al considerar más de tres colores, siempre habrá alguno que será combinación de los demás.

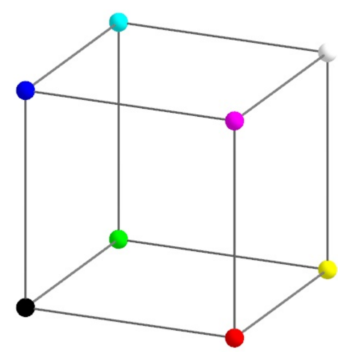
Por último, utilizamos el modelo RGB para introducir el concepto de conjunto convexo y envolvente convexa de un conjunto de puntos:

Sea V un espacio vectorial. Decimos que un conjunto $C \subset V$ es **convexo** si para todo par de puntos $x,\ y \in C$, y para todo $\alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$. Dados k puntos $\{x_1, \dots x_k\} \subset V$, su **envolvente convexa** S es el conjunto

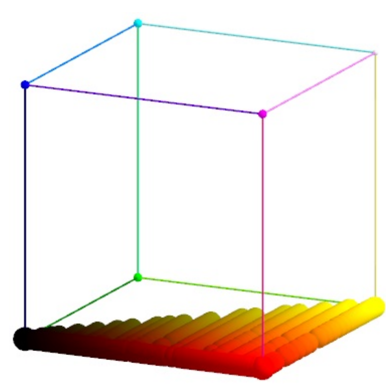
$$S = \{\alpha_1 x_1 + \dots \alpha_k x_k, \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \dots \alpha_k = 1\}.$$

Este conjunto es el menor conjunto convexo que contiene a $\{x_1, \dots x_k\}$.

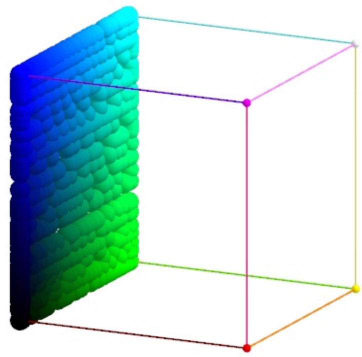
En el modelo RGB vemos que el conjunto de todos los colores constituye un conjunto convexo. Esto puede comprobarse fácilmente en la siguiente imagen. Se observa que el conjunto de todos los colores es la envolvente convexa de los puntos vértices del cubo.



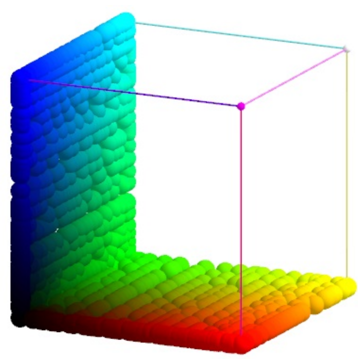
Si nos centramos en los vértices negro, amarillo y rojo, se puede observar que su envoltura convexa corresponde a la gama de colores que se visualiza en la siguiente figura:



Si ahora tomamos un punto más y consideramos los vértices negro, azul, verde y cian, vemos que su envoltura convexa coincide con los colores de la cara del cubo que se muestra a continuación:



Por último, ayudándonos de la siguiente figura, estudiamos una propiedad de los conjuntos convexos: la convexidad no se conserva mediante la unión. Para ello tomamos dos caras de colores del cubo y observamos que ambas son conjuntos convexos. Sin embargo la unión de ambas no lo es:



Su envoltura convexa es el prisma triangular de vértices negro, rojo, amarillo, verde, cian y azul.

3 Conclusión

A través de la modelización se pretende que el alumno establezca una conexión entre los conceptos abstractos del álgebra lineal y sus aplicaciones al mundo real. Apoyándonos en la teoría APOS y en la propuesta anterior, podemos diseñar una serie de actividades a través de las cuales el alumno pueda asimilar y adquirir los conceptos previamente desarrollados. Estas actividades deberán realizarse en el aula de informática de la universidad para que el alumno pueda hacer uso del software *Geogebra*, que contribuirá en gran medida a la visualización del modelo.

Referencias

Calabuig, J. M., Garcia-Raffi, L. M., Sánchez-Pérez, E. A. (2013).
Álgebra lineal y juegos de mesa.
Modelling in Science Education and Learning 6, 185–195.

Calabuig, J. M., Garcia-Raffi, L. M., Sánchez-Pérez, E. A. (2015).
Álgebra lineal y descomposición en valores singulares.
Modelling in Science Education and Learning 8(2), 133–144.

Domínguez Jiménez, M. (2011).
Matrices: un modelo para las fotografías digitales.
Modelling in Science Education and Learning 4, 169–179.

Dubinsky, E., McDonald, M. (2001).
APOS: a constructivist theory of learning. The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study,
Kluwer Academic Publishers (275–282).

Eguiluz, J. (2001).
Introducción a CSS.
Capítulo 3, Librosweb.

Gravemeijer, K. (1999).
How emergent models may foster the constitution of formal mathematics.
Mathematical Thinking and Learning 1, 155–177.

Lay, D.C. (1994).
Linear algebra and its applications.
Pearson Education.

Montero Morales, J. (2008).
Algebra aplicada en el mundo de las telecomunicaciones.
Modelling In Science Education And Learning 1, 25–28.

Montero Morales, J., Badía Folguera, D. (2011).
Modelización matemática y álgebra: un tándem perfecto en la formación de ingenieros.
Modelling In Science Education And Learning 4, 21–33.