

Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística

Complexity in the modelling process of a statistics task

Àngels Aymerich, Lluís Albarracín
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
angels.pureza@gmail.com, lluis.albarracin@uab.cat

Abstract

En este artículo presentamos un análisis cualitativo del proceso de modelización de un grupo de trabajo formado por alumnos de 15-16 años trabajando en una actividad estadística con datos reales. En concreto, identificamos las fases del proceso de modelización siguiendo el ciclo de modelización de (Blum, Leiss, 2007) y discutimos los resultados desde la perspectiva de las dificultades encontradas durante el análisis y la complejidad del proceso de modelización analizado.

In this paper we present the qualitative analysis of the modelling process of a 15-16 years old students teams working in a statistics activity with real data. We identify the different phases of the modelling process using the modelling cycle proposed by (Blum, Leiss, 2007) and we discuss the results from the perspective of the difficulties founded during the analysis and the complexity of the modelling process analyzed.

Keywords: Mathematical modelling, Secondary school, modelling cycle, Statistics

Palabras clave: Modelización matemática, Educación Secundaria, ciclo de modelización, Estadística

1 Introducción

Desde el trabajo seminal de Pollak (1979), en los últimos años se ha incrementado el interés por introducir actividades que promuevan la modelización matemática en diferentes niveles educativos (Vorhölter et al., 2014).

En este artículo presentamos un estudio exploratorio para estudiar el proceso por el que los alumnos en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria (15-16 años) crean modelos matemáticos durante la resolución de una actividad relativa al ámbito estadístico. En concreto, analizamos y describimos desde el punto de vista cualitativo las diferentes fases en el proceso de modelización tomando como referencia teórica el ciclo de modelización de (Blum, Leiss, 2007). Los procesos de modelización han sido descritos como cíclicos de forma general en la literatura y pretendemos estudiar si este tipo de descripción es adecuado para el tipo de trabajo matemático promovido en determinadas tareas de modelización.

La actividad utilizada en el estudio es un caso de *modelling-eliciting activitie* o actividad que promueve la modelización (Lesh, 2010), y presenta un contexto realista para promover la modelización matemática, y consiste en proporcionar a los alumnos una cierta cantidad de datos numéricos que se corresponden con distribuciones de los salarios de los trabajadores de diferentes empresas. En este caso, el uso de la estadística nos ofrece la oportunidad que los alumnos combinen diferentes herramientas de cálculo y de tratamiento de datos para poder dar una respuesta realista a las preguntas formuladas. Así la actividad conjuga procesos de estadística y de modelización matemática, y es un fin en sí misma y un medio para el aprendizaje.

2 Referentes teóricos

A continuación presentamos los diferentes referentes teóricos en los que se basa nuestro estudio, incluyendo aspectos sobre la modelización matemática y el aprendizaje y enseñanza de la estadística.

2.1 Modelos matemáticos

Aunque la literatura ofrece diversas definiciones de modelo matemático, en este trabajo tomamos como referencia la definición proporcionada por Lesh, Harel (2003):

"Models are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s). Models include both: (a) a conceptual system for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) accompanying procedures for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals. Mathematical models are distinct from other categories of models mainly because they focus on structural characteristics (rather than, for example, physical, biological, or artistic characteristics) of systems they describe" (Harel y Lesh, Harel 2003, p.159).

Siguiendo esta perspectiva, la modelización matemática se puede entender como la creación

de estructuras o sistemas complejos que se crean para explicar otros fenómenos, generalmente en contextos científicos o de resolución de problemas. Durante el proceso de modelización matemática se producen revisiones de los productos desarrollados (ya sean modelos o métodos asociados a ellos) en las que se dan forma a los elementos y relaciones que verdaderamente dan sentido al modelo elaborado. Los modelos, entendidos como sistemas complejos, permiten entender una realidad a partir de simplificarla, en un proceso denominado matematización. Una vez creados, los modelos matemáticos pueden exportados a situaciones reales distintas de la estudiada inicialmente, pueden ser generalizados y se pueden someter a procesos de validación para garantizar su eficacia.

2.2 Modelizando los procesos de modelización matemática

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos matemáticos para describir fenómenos o para resolver problemas es objeto de discusión y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo, 2006). En general, se acepta que los procesos de modelización tienen una naturaleza cíclica. Se entiende que los procesos de modelización se pueden dividir en diferentes fases y que los alumnos las recorren ordenadamente durante el trabajo de modelización, pasando a la siguiente fase cuando consideran que el trabajo en esa fase se ha cerrado satisfactoriamente. En el momento en el que tratan de validar el modelo generado, deciden si este se ajusta a sus necesidades y en caso negativo vuelven a iniciar el proceso con la intención de cambiar o refinar el modelo matemático construido. De esta forma, el proceso se repite en diferentes iteraciones en las que se mejoran los modelos y soluciones encontradas. Algunos autores, como (Barbosa, 2009) o (Villa Ochoa, et al., 2010), se han mostrado críticos con esta formulación cíclica de los procesos de modelización, como detallamos en la sección 2.3.

Las fases que describen el proceso han sido analizadas por diversos investigadores y existe un gran número de propuestas para caracterizar los procesos de modelización (Perrenet, Zwaneveld, 2012) a las que se han diseñado gráficos que representan el proceso. A continuación destacamos algunas de estas propuestas, que pueden entenderse como modelos para explicar el proceso de modelización matemática.

El primero de estos esquemas es el elaborado por Pollak (1979) en el que se diferencia entre el dominio matemático y el resto del mundo (Fig. 1). Pollak considera problemas con contexto real e introduce la idea de diferenciar la situación problemática en su propio entorno del producto matemático elaborado para dar respuesta a los interrogantes del problema. Esta separación conlleva el proceso de matematización de un fenómeno y la interpretación de los modelos elaborados en el contexto real a modo de validación.

Berry, Davies (1996) presentan un esquema (Fig. 2) en el que se detallan las fases de modelización, manteniendo la diferenciación visual entre los dominios real y matemático y que está presente en el citado artículo, aunque no se explicita en el gráfico propuesto. Las fases que conforman la propuesta se inician con la lectura del enunciado del problema, la formulación de un modelo matemático, el proceso de resolución matemática, la interpretación y validación de la solución y una fase de refinamiento del modelo generado.

De esta forma, Berry, Davies, (1996) entienden el proceso de modelización como un proceso eminentemente cíclico en el que los modeladores/resolutores van recorriendo las distintas fases durante su trabajo mientras mejoran los resultados obtenidos. En este proceso de refinamiento, los modeladores se replantean el trabajo realizado en cada una de las fases y las recorren nuevamente hasta llegar a un momento en el que el modelo generado se adecua a las necesidades

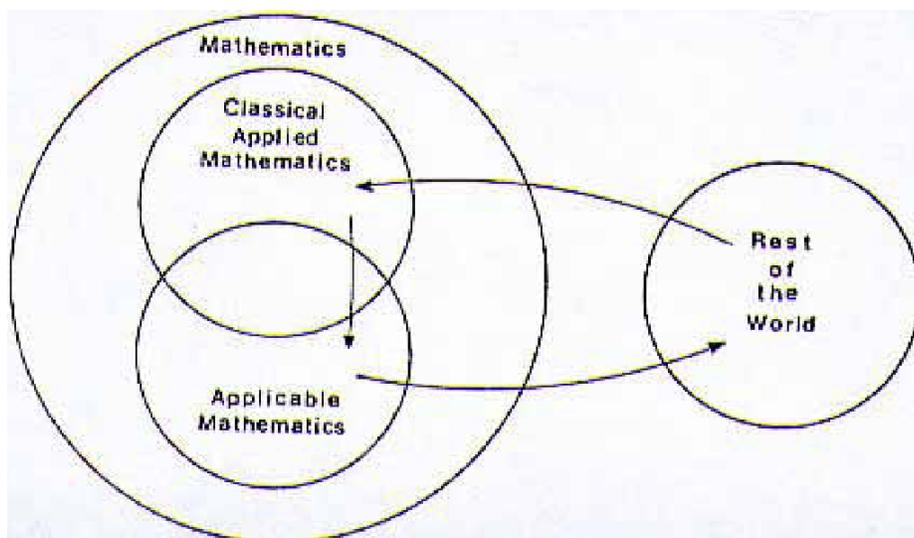


Figura 1 – El ciclo de Pollak, 1979.

generadas por el problema. Es en este momento en el que el ciclo se da por terminado y se inicia la última fase, que es la de reporte de resultados.

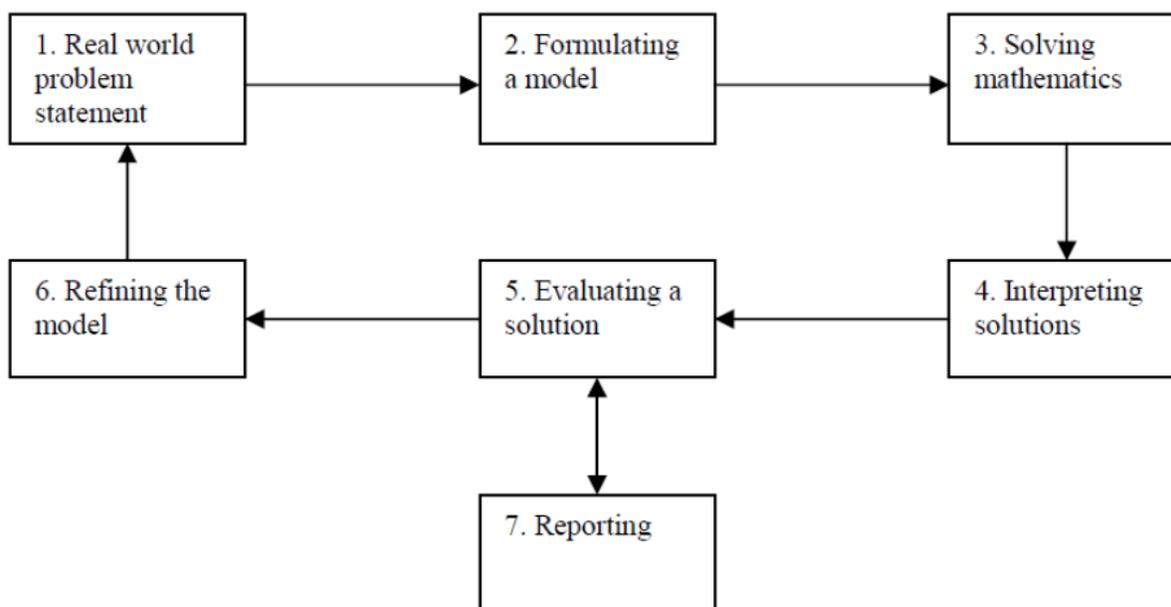


Figura 2 – El ciclo de (Berry, Davies, 1996).

En los últimos años se han presentado alternativas para representar los procesos de modelización como la de Geiger (2011), en la Fig. 3, que amplía la visión ofrecida por los referentes anteriores incluyendo aspectos novedosos como el uso de tecnologías en las diferentes fases del proceso de modelización, pero en la que se sigue manteniendo la visión de la modelización como un proceso cíclico en el que los modelizadores van avanzando de forma secuencial siguiendo las diferentes fases. En este caso, destacamos la presencia de la influencia de los contextos de aprendizaje matemático, que pueden adaptarse a diferentes realidades educativas, tanto dentro como fuera de las aulas, pero que no modifican la visión cíclica del proceso, que es parte del objeto de

estudio de este artículo.

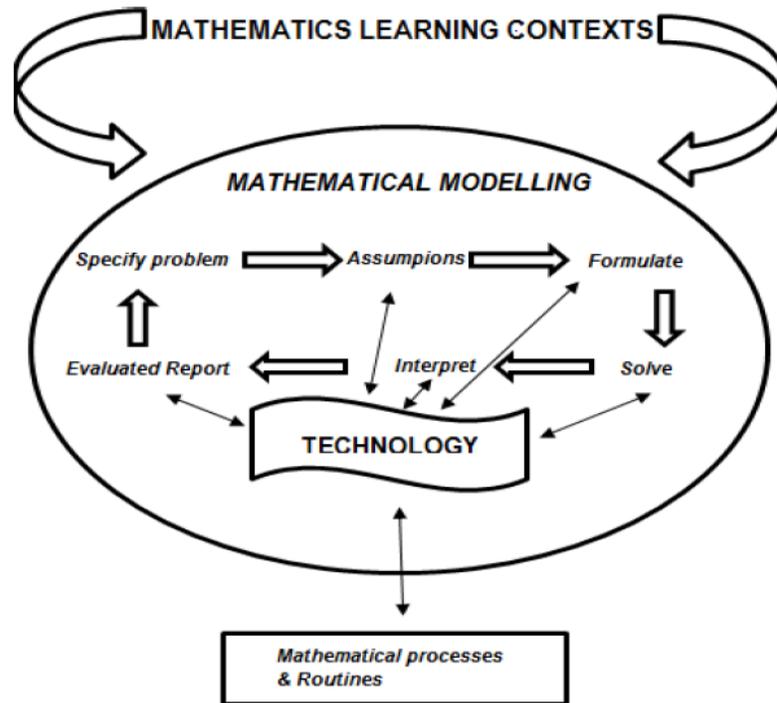


Figura 3 – El ciclo de (Geiger, 2011).

En particular, el gráfico de representación de los procesos de modelización matemática de uso más extendido es el presentado por Blum, Leiss (2007) y que se muestra en la Fig. 4. En este modelo se puede observar la diferenciación entre el dominio matemático y el dominio real, distinguiendo entre los modelos situados en la realidad de la abstracción que se elabora al pasar al dominio matemático. Este modelo sigue la diferenciación de fases del proceso de modelización presentada por Blum (2002), entendido nuevamente como un proceso cíclico y que se divide en las siguientes fases:

1. simplificar el problema real a un modelo real
2. matematizar el modelo real, pasando a un modelo matemático
3. buscar una solución a partir del modelo matemático
4. interpretar la solución del modelo matemático
5. validar la solución matemática interpretándola en el contexto del problema real

Sol et al. (2011) desarrollan una guía que permite establecer la clasificación en las fases del ciclo de modelización de Blum, Leiss (2007) a partir de diversos indicadores que se pueden observar en el trabajo desarrollado por los alumnos durante una tarea de modelización. Dado que utilizamos esta aportación para dar soporte al análisis que presentamos en la sección 5 incluimos aquí la Tabla 1 que actúa a modo de resumen de los indicadores propuestos por Sol et al. (2011).

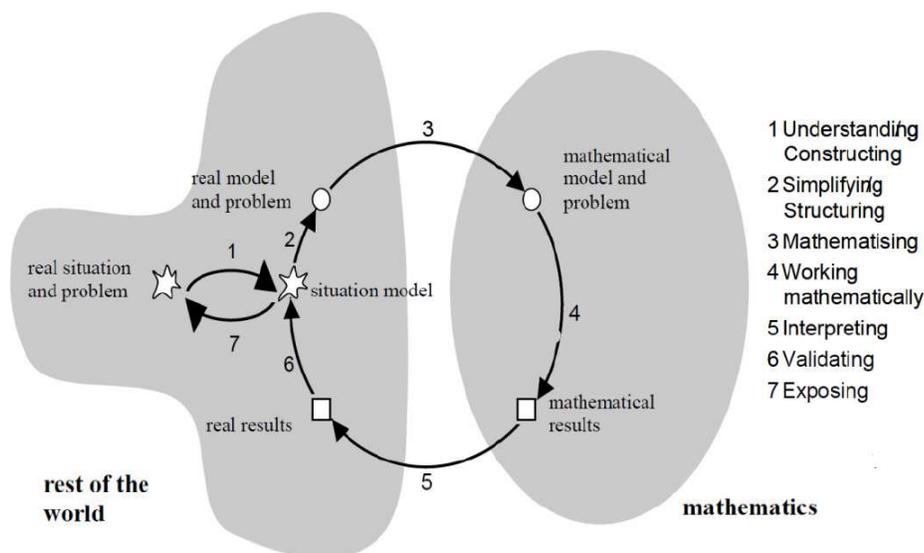


Figura 4 – El ciclo de (Blum, Leiss, 2007).

Tabla 1 – Indicadores de análisis propuestos por (Sol et al., 2011).

Fases de Blum	Acciones hipotéticas observables
Construyendo	1. Reconocer un problema social abordable matemáticamente 2. Concretar una finalidad problemática y reconocer medios para resolverla.
Matematizando	3. Identificar objetos y relaciones relevantes 4. Seleccionar variables. Decidir valores. 5. Reconocer los ámbitos matemáticos del modelo 6. Explicitar relaciones entre objetos reales y contenidos matemáticos 7. Controlar la coherencia en el conjunto de relaciones matemáticas establecidas
Trabajando matemáticamente	8. Explicitar la relación entre variables usando lenguaje matemático 9. Formular hipótesis matemáticas 10. Formulación de problemas y subproblemas 11. Resolución de problemas
Interpretando	12. Encontrar e interpretar la solución matemática
Validando	13. Reconocer el significado y alcance de soluciones y conclusiones en la situación real. Explicitan el modelo. 14. Validar el modelo. 15. Modificar el modelo si es necesario
Exponiendo	16. Comunicar el proceso y resultados cuando el modelo sea válido

2.3 Discusiones sobre la naturaleza de los procesos de modelización

Algunos investigadores han llamado la atención a la naturaleza de estas descripciones de los procesos de modelización, ya que el recorrido que siguen los alumnos es no lineal y se constatan dificultades para situar la actuación de los alumnos al trabajar en actividades de modelización en el plano real o el matemático, como si la distinción entre estas dos zonas fuera una barrera difusa (Ärleböck, 2009). En la literatura se encuentran posicionamientos contrarios sobre el significado del término *realidad* en el ámbito de la modelización matemática. Blum, Borromeo (2009), basándose en Pollak (1979), entienden la noción de realidad como todo aquello externo a la propia matemática, es decir, al “resto del mundo”, lo cual incluye la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y el resto de disciplinas científicas. Otros autores ponen en entredicho la noción de la realidad separada de las matemáticas, según Barbosa (2009) la noción de realidad externa

a las matemáticas sustenta una visión del modelo matemático como un retrato aproximado de la realidad lo cual ha sido desafiado por muchos investigadores que argumentan que la matemática es parte de la realidad y que los modelos matemáticos son necesariamente sesgados o parciales. La discusión sobre la naturaleza de la modelización matemática no debería afectar a la relevancia de ésta como actividad promotora de trabajo matemático en las aulas, o, siguiendo a Villa Ochoa et al. (2010):

”Sea cual sea la noción de realidad adoptada, ésta presupone concepciones ontológicas cuya discusión escapa al objetivo de este artículo, sin embargo, es claro que ninguna de estas nociones objeta la importancia de la implementación de la modelación como un recurso en el aula de clase.” (Villa-Ochoa, et al. 2009, p.1087)

2.4 La Estadística desde la perspectiva de la Educación Matemática

El ámbito de trabajo de la actividad utilizada en este artículo es el de la Estadística. Los estándares de NCTM recomiendan enfatizar la Estadística y la Probabilidad para potenciar el razonamiento y poder integrar el alumno como ciudadano partícipe de la sociedad actual (NCTM, 2003). A pesar de las continuas recomendaciones curriculares, la Estadística se suele tratar en las aulas de manera tecnicista, tal y como argumenta Batanero (2000):

”Los nuevos currículos de educación primaria y secundaria incluyen en forma generalizada recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística. Sin embargo, en la práctica son todavía pocos los profesores que enseñan este tema y en otros casos se trata muy brevemente, o en forma excesivamente formalizada...” (Batanero, 2000, p.6)

En general, la didáctica de la Estadística no ha recibido la misma atención que otros contenidos matemáticos, pero se introduce la noción de cultura o alfabetización estadística como una necesidad del ciudadano en la sociedad actual Gal (2002). Este concepto está evolucionando hacia el sentido estadístico propuesto por Batanero (2013):

”En este trabajo sugerimos las siguientes componentes en el sentido estadístico: (a) La comprensión de las ideas estadísticas fundamentales, que han contribuido al desarrollo de la estadística, se requieren en la resolución de problemas estadísticos y pueden ser enseñadas en varios niveles educativos; (b) la competencia de análisis de datos; (c) el razonamiento a partir de los datos, para realizar inferencias de muestras a poblaciones y/o tomar decisiones acertadas en situaciones inciertas.” (Batanero, 2013, p. 1)

También afirma que la estadística es inseparable del contexto y promueve su enseñanza mediante proyectos con un contexto significativo para el alumnado (Batanero, 2000). Siguiendo esta línea, en nuestro estudio utilizamos un contexto realista en una actividad estadística para promover un proceso de modelización durante el trabajo con alumnos de Educación Secundaria.

3 Objetivos del estudio

En este artículo presentamos un estudio de tipo exploratorio basado en un análisis cualitativo del proceso de modelización llevado a cabo por alumnos de 4º curso de ESO (15-16 años) al trabajar en una actividad con datos estadísticos. Nuestros objetivos son los siguientes:

- Describir el proceso de modelización de uno de los grupos de trabajo desde la perspectiva del ciclo de modelización presentado por Blum, Leiss (2007).
- Estudiar la complejidad del proceso descrito y compararlo con la visión cíclica que predomina en la literatura.

4 Metodología

En esta sección presentamos el diseño de la actividad utilizada y los datos de los que disponemos, así como el proceso de análisis que nos lleva a la descripción del proceso de modelización de uno de los grupos de alumnos.

4.1 Diseño de la actividad

En este artículo estudiamos el trabajo en el aula de 72 alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria trabajando con una actividad diseñada para promover la modelización a partir de datos estadísticos. Se trata de un estudio exploratorio basado en un análisis de tipo cualitativo. Los alumnos, en grupos de tres, no tenían experiencia previa en actividades de modelización. Se propone el trabajo en grupo de los estudiantes porque debe permitir la construcción de modelos matemáticos en colaboración.

La actividad propuesta debía ser capaz de promover por ella sola que los alumnos creen modelos complejos siguiendo las directrices propuestas por Lesh (2010) en las denominadas *model-eliciting activities*.

- Las *model-eliciting activities* no se han desarrollado para ser tratamientos de instrucción cuyo valor depende de su capacidad para inducir ganancias significativas de aprendizaje en los estudiantes
- Los estudiantes pueden desarrollar sus propias adaptaciones significativas de conceptos matemáticos en periodos de durante 60-90 minutos
- Los estudiantes que muestran mayores logros en este tipo de actividades no siempre son los mismos que alcanzan las mayores puntuaciones en las pruebas de conocimiento matemático habituales

La actividad utilizada se elaboró a partir de una actividad de la web del proyecto NRIC y se le hicieron diversas modificaciones para aumentar su autenticidad (Palm, 2008) tal y como hemos hecho en otras actividades de modelización a partir de situaciones realistas (Albarracín, Gorgorió 2013a, 2013b, 2014). A partir de una contextualización de las distribuciones de sueldos siguiendo una idea expuesta en Lewitt, Dubner (2010) en la que se propone deducir el tipo de empresa en función de la distribución de sueldos de sus trabajadores. Los sueldos sobre los que trabajar son proporcionados a los alumnos en una tabla en la que cada columna muestra los sueldos referentes a los trabajadores de una empresa, como se muestra en la Tabla 2. El enunciado concreto de la actividad es el siguiente:

En la siguiente tabla encontramos un listado de sueldo de cinco empresas diferentes:
a. Analiza los datos de manera que te permitan obtener una visión de la estructura de cada empresa. Redacta tus conclusiones y qué métodos has utilizado. b. Este análisis

ha de dar unos criterios para clasificarlas. Clasifica las empresas argumentando porqué cada una cumple los criterios que has establecido.

Los alumnos trabajan en equipos de 3 o 4 personas, con lo que en total se obtuvieron 22 grabaciones del audio del trabajo realizado por cada equipo, así como los 22 informes finales con las respuestas elaboradas. Dada la naturaleza del análisis que presentamos en esta sección, la cantidad de datos disponible es inabarcable, pero nos permitió escoger el trabajo de un equipo, denominado G1g05, para el que era asequible transcribir todas las intervenciones de los alumnos y que presentaron un informe final claro y completo que se complementa con las notas que tomaron durante la resolución del problema. Consideramos que la elección del equipo de trabajo analizado no altera los aspectos esenciales que pretendemos analizar, ya que la totalidad de las grabaciones y informes muestran un desarrollo matemático del mismo nivel de complejidad. La Fig. 5 muestra un extracto del trabajo escrito de los integrantes del grupo G1g05, en el que se puede observar una propuesta de clasificación de los empleados de una empresa.

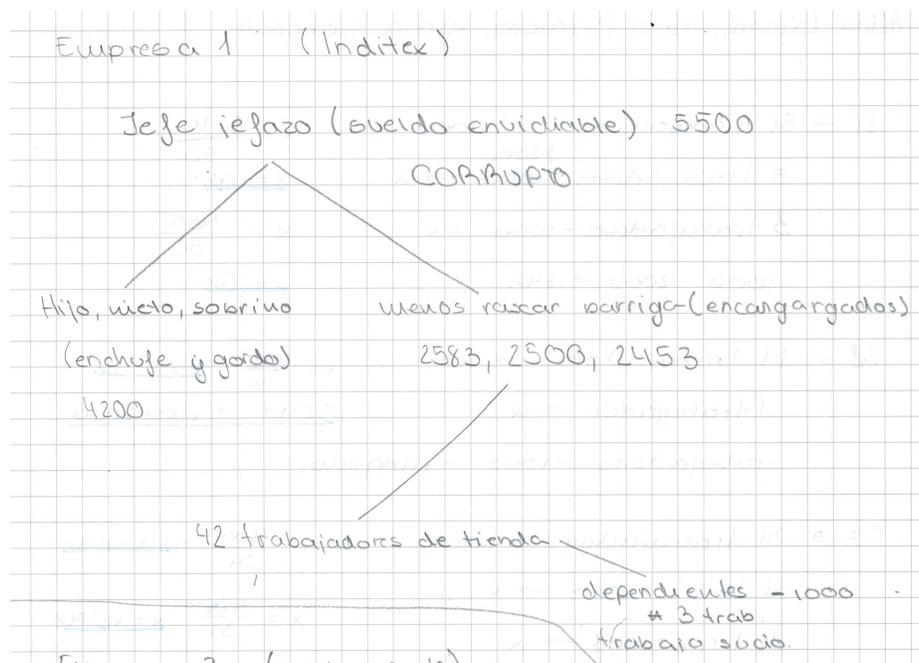


Figura 5 – Un extracto del trabajo escrito por los alumnos del grupo G1g05.

5 Análisis del proceso de modelización

Para el análisis de los datos, la grabación de la resolución de la actividad del grupo G1g05 se transcribe en un fichero de texto. En la transcripción se adjuntan aspectos relevantes del trabajo matemático identificados en los diferentes materiales escritos producidos por los alumnos. El análisis del proceso de modelización se realiza sobre esta concreción de lo ocurrido en el aula, conscientes de no poder acceder a los pensamientos y decisiones no formuladas en voz alta o sobre el papel pero con una gran cantidad de material para analizar.

El análisis de la actividad, que es de tipo cualitativo, está dirigido a caracterizar los datos desde la perspectiva del esquema de Blum, Leiss (2007) a partir de determinar las fases de

Tabla 2 – Tabla de sueldos proporcionada a los alumnos.

	E1	E2	E3	E4	E5
Trabajador1	1032	1200	922	1900	1530
Trabajador2	1045	1360	803	2200	1246
Trabajador3	1103	1595	801	1428	2082
Trabajador4	1043	1961	932	1241	1523
Trabajador5	1172	1275	3814	1051	1545
Trabajador6	1131	1333	3663	1393	1607
Trabajador7	1027	1440	3595	1083	1612
Trabajador8	2500	1270	3527	1228	1494
Trabajador9	1143	2089	1327	1385	1420
Trabajador10	1016	1875	1384	1193	1334
Trabajador11	4200	1871	1816	1007	1146
Trabajador12	1154	1209	1728	1498	1361
Trabajador13	1113	1638	1982	1353	1498
Trabajador14	1091	1976	1180	1468	1561
Trabajador15	2453		1214	1 031	1567
Trabajador16	1006		1183	1086	1493
Trabajador17	1083		1241	1134	1402
Trabajador18	1186		1273	1037	1610
Trabajador19	1109		1320	1459	1425
Trabajador20	1183		1534	1482	1085
Trabajador21	1172		1101	1250	1145
Trabajador22	1037		1360	1053	1673
Trabajador23	1149		1716	1215	1329
Trabajador24	1150		1252	1347	1315
Trabajador25	1166		1359	1073	910
Trabajador26	5500		1930	1194	1386
Trabajador27	1097		1544	1038	1546
Trabajador28	1113		1881	1445	1331
Trabajador29	1122		1354	1426	1515
Trabajador30	1139		1518	1474	1387
Trabajador31	1029		1299	1431	1626
Trabajador32	812			1409	1183
Trabajador33	2583			1497	1459
Trabajador34	1073			1081	1349
Trabajador35	1096			1468	1266
Trabajador36	745			1470	1835
Trabajador37	1163			1220	1642
Trabajador38	1051			1417	1389
Trabajador39	1018			1009	932
Trabajador40	1090			1041	
Trabajador41	1128			1348	
Trabajador42	1161			1370	
Trabajador43	1055			1460	
Trabajador44	1123			1175	
Trabajador45	1162			1358	
Trabajador46	1007			1104	
Trabajador47	1101			1188	
Trabajador48	803			1113	
Trabajador49	1134			1126	
Trabajador50	1193			1484	

modelización que atraviesan los alumnos en su trabajo de aula. El análisis se realiza en diversas fases en las que se distinguen episodios a diferentes niveles. Primeramente, tratamos de distinguir los episodios propios del trabajo en el contexto real de los episodios que se centran en el trabajo en el dominio matemático. Posteriormente describimos las acciones concretas que se efectúan en cada episodio para tener una descripción que permita, en un último estadio, analizar los datos desde la perspectiva del ciclo de modelización de Blum, Leiss (2007) determinando las fases de modelización de cada episodio. Los episodios se definen como unidades temporales en las que el centro de la discusión es un mismo objeto, matemático o no, y son distinguidos por separado por los dos autores y consensuados posteriormente siguiendo el procedimiento definido en Ferrer et al. (2014).

En la primera fase del análisis aparecen dificultades para determinar de forma clara la distinción entre aquellos episodios en los que los alumnos trabajan en la dimensión del mundo real y aquellos episodios en los que trabajan en el dominio matemático. Una muestra es el siguiente diálogo registrado entre los tres miembros del grupo G1g05, denominados B, C y L:

B: Esos son los sueldos.

C: Vale.

L: Sí.

L: Cada una tiene un número.

C: ¡Mira el trabajador 26, eh!

L: ... digo cada una [*se refiere a las empresas*] tiene... ¿tiene diferente número de trabajadores no?

C: Claro y diferentes sueldos.

C: Qué os parece [*C lee enunciado de nuevo en voz alta*]

B: Hombre. ¿Los de mil irían juntos no?

L: Los superiores a mil, que hay pocos, pero los hay.

C: Los superiores y los menores... iguales o menos.

L: Menores de mil no hay.

BC: Sí mira.

L: Ah, sí aquí.

C: 803, 745.

B: 801... todos estos.

C: 832. ¿Los marco?

B: Mejor lo hacemos con diferentes colores.

C: Entonces ponemos los menores de mil y... pero, entonces, los mayores serían todos los otros.

L: Claro.

C: Pero no hay ninguno de 1000.

L: No los de mil dejamos sin marcar. Los mayores de mil los marcamos también.

C: Entonces al ir mirando uno a uno observan los valores anómalos.

C: Este aquí, este,...

L: Jopé, este no está nada mal tampoco.

C: Tampoco...este...el 33...aquí, tía todos estos 3000, 3000, 3000 3000.

C: ¿Ya está no?

B: Ya está.

C: Sí ya esta.

C: ¿Y los que que van de 1000 a 2000?

En este extracto podemos observar que los alumnos trabajan con los valores de los sueldos (elaborando su primera tentativa de clasificación) mientras los comentan desde el punto de vista de su propia experiencia (*Jopé, este no está nada mal tampoco*). En otros pasajes identifican al mayor sueldo como el *Jefe* o asignan profesiones al resto de los valores y pasan a denominarlos de esa forma mientras los utilizan en su clasificación o trabajan matemáticamente con ellos.

Por este motivo, incluimos una tercera dimensión que denominamos *Límite entre el mundo real y las matemáticas* (LM en las Fig. 6, 7 y 8). Pertenecen a esta nueva dimensión de análisis aquellos episodios en los que los alumnos tratan con los datos proporcionados y los utilizan al mismo tiempo como objetos que definen a trabajadores y como valores numéricos con los que pueden realizar cálculos o tratarlos desde el punto de vista matemático. La inclusión de este nuevo dominio choca con la versión ofrecida por Blum, Leiss (2007) que se muestra en la Fig. 4 y que presenta lo que entendemos como una visión sobresimplificada del proceso de modelización. Una muestra del tipo de intervenciones que se pueden englobar en este dominio es la siguiente afirmación "el jefe tiene el doble que el de la limpieza". En esta afirmación el alumno se refiere a un valor concreto (el sueldo de una persona al que consideran el jefe al tener el sueldo más alto) tanto como la identificación de la persona como un valor que permite realizar comparaciones numéricas. En este sentido, debido a la naturaleza de los datos proporcionados, entendemos que los alumnos se sitúan en un espacio de trabajo que no podemos ubicar específicamente en relación al mundo real o al dominio matemático, y en el que los dos dominios participan de la elaboración de los contenidos.

A partir de esta primera codificación iniciamos una segunda etapa de análisis en la que nos centramos en identificar con más precisión el aspecto central de cada uno de los episodios de la resolución. Entendemos que en cada episodio los alumnos trabajan en un aspecto concreto identificable del proceso de modelización siguiendo el modelo propuesto por Blum, Leiss (2007). El análisis en esta etapa necesitó de varias iteraciones para dar sentido a la descripción obtenida del trabajo de los alumnos. En concreto, hemos distinguido las siguientes categorías, que son las que se muestran en las figuras 6, 7 y 8:

LE: Lectura del enunciado.

AA: Aclaraciones y discusión para entender el problema¹.

SM: Modelo Situado.

RM: Modelo Real.

LM: Límite entre las matemáticas y el mundo real.

MM: Modelo matemático.

La Fig. 6 muestra una de las primeras tentativas de elaborar un gráfico que describa el proceso

¹Se identifica con SM en los posteriores por cambios en el proceso de análisis.

de modelización de los alumnos. Se muestra un esquema en forma de grafo orientado en el que se detalla el recorrido realizado por los alumnos y en el que la numeración de cada flecha permite observar el orden temporal de las acciones. En esta primera propuesta de esquema observamos dificultades para diferenciar los episodios en los que los alumnos trabajan con modelos en el dominio real, ya sea considerando la situación real estudiada o desarrollando un primer modelo situado en la realidad, ya que parten, en todo caso de la descripción numérica dada. Estas dificultades siguen la misma línea que las presentadas para distinguir entre el dominio real y el dominio matemático en la etapa anterior.

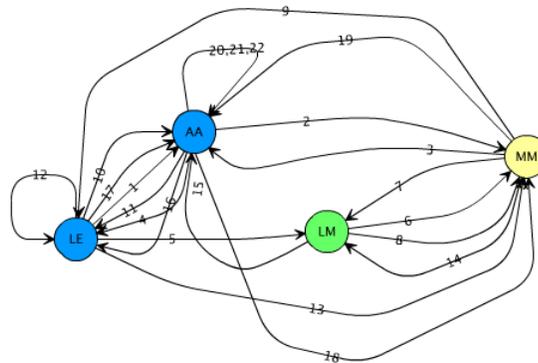


Figura 6 – Primera aproximación gráfica al análisis. Se muestra un grafo que representa el proceso de modelización de los alumnos

La Fig. 7 muestra el producto final del análisis para esta etapa. Se incluye una diferenciación entre el modelo real y el modelo situado. Para ello nos basamos en la naturaleza de los comentarios de los alumnos, que en ocasiones discuten sobre su conocimiento sobre empresas del mundo real, especialmente en las fases finales, en las que tratan de validar su modelo matemático y lo contrastan con su conocimiento previo.

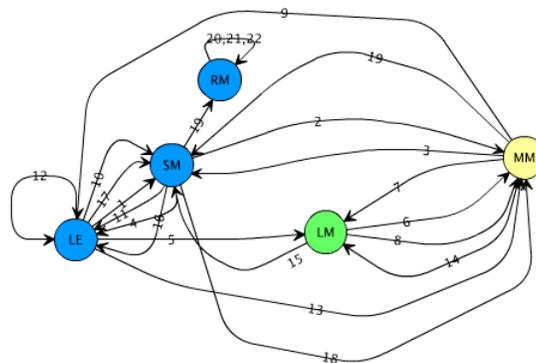


Figura 7 – Segunda aproximación gráfica para el análisis.

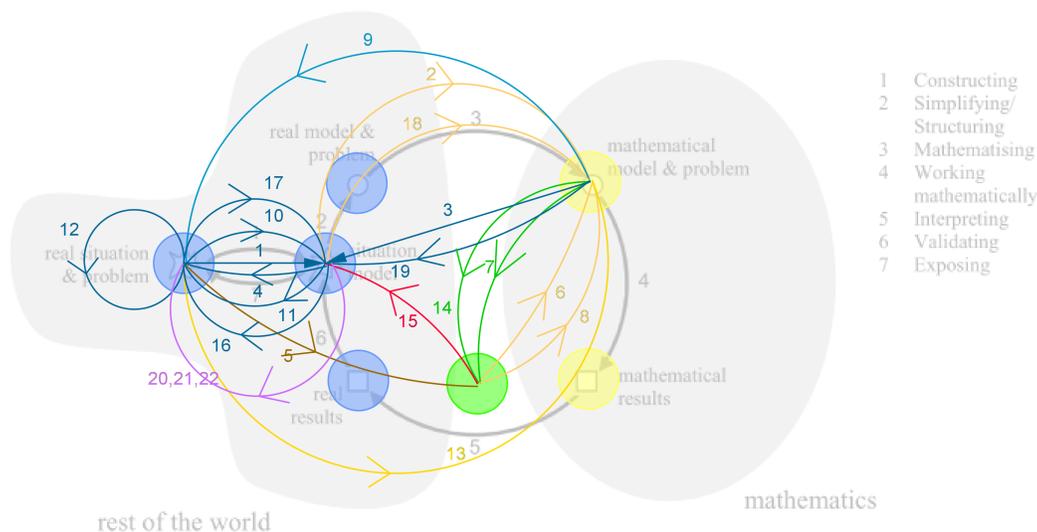
A partir de esta segunda codificación que ya posee una clara estructura temporal, iniciamos una tercera etapa de análisis en la que nos centramos en identificar el tipo de actividad matemática que los alumnos realizan en cada episodio, siguiendo los indicadores de la propuesta realizada por Sol et al. (2011) para identificar las fases del ciclo de Blum, Leiss (2007). En la tabla 3 detallamos la codificación realizada para cada uno de los 22 episodios en los que hemos dividido el trabajo de los alumnos.

Esta tabla de codificación muestra la fase que hemos asignado a cada uno de los episodios.

Destaca la ausencia de fases en las que se simplifique la situación dada. Entendemos que este hecho se debe a la naturaleza del enunciado proporcionado a los alumnos, en el que se encuentra la lista de valores de los sueldos de las empresas sin opción para consultar más datos de ellas.

6 Resultado final del proceso de análisis

De esta forma obtenemos una clasificación de los episodios en relación a la fase del ciclo de modelización de Blum, Leiss (2007) a la que corresponden. Para representar en un gráfico el proceso seguido por los alumnos del grupo, añadimos un espacio situado entre los dos dominios (real y matemático) que en la Fig. 8 viene representado por el círculo verde. De esta forma hemos podido identificar los aspectos principales del trabajo realizado en cada momento del proceso de modelización pero hemos necesitado introducir un elemento nuevo que modifica la propuesta original de Blum, Leiss (2007) para poder ubicar el dominio en el que los alumnos trabajan. En concreto, añadimos un espacio a caballo entre el dominio real y el matemático en el esquema de modelización (en verde en la Fig. 8).



LEYENDA DE COLORES PARA EL GRÁFICO

Construyendo	Azul fuerte
Matematizando	Naranja.
Trabajando matemáticamente	Amarillo.
Interpretando	Azul claro.
Validando	Rojo.
Exponiendo	Lila

Figura 8 – Proceso de modelización analizado definitivo.

El diagrama representado en la Fig. 8 es el producto final del análisis realizado y muestra dos aspectos importantes que queremos puntualizar. Por una parte, muestra la necesidad de añadir un dominio situado entre la realidad y las matemáticas, que debe ser resuelto desde el punto de vista teórico. Por otro lado, el gráfico muestra la evolución del trabajo de los alumnos

durante la actividad de forma que se puede observar una gran cantidad de tomas de decisiones y replanteamientos del camino a seguir, así como diferentes tipos de trabajo matemático. Es en este sentido en el que nos referimos en el título del artículo al estudio de la complejidad del proceso de modelización, que ha mostrado ser alta.

7 Conclusiones

En este artículo presentamos el análisis de una tarea de modelización en la que se utilizan datos estadísticos contextualizados para promover el proceso de modelización. El análisis se ha realizado tratando de utilizar como referente el ciclo de modelización presentado por Blum, Leiss (2007), que es una aportación teórica que ha tenido un gran impacto en la literatura relacionada con la investigación de la modelización matemática.

En el análisis descrito se muestran las dificultades observadas para realizar una codificación precisa de los procesos de modelización que realiza un grupo de alumnos al resolver la tarea. En concreto observamos una gran dificultad para determinar en cada episodio la pertenencia al dominio real o al dominio matemático, en consonancia con Barbosa (2009) que argumenta que la distinción entre realidad y matemáticas puede resultar difusa. En el caso estudiado, la naturaleza de la tarea nos parece clave para determinar esta dificultad. Dado que los alumnos no trabajan a partir de observar directamente las empresas que son objeto de estudio y todo lo que tienen de ellas es una descripción en forma de tablas de sueldos, en ocasiones asimilan esos valores a objetos reales mientras operan con ellos y los tratan como objetos matemáticos. De esta forma, entendemos que en otras situaciones de modelización en las que los alumnos tengan descripciones numéricas de objetos o fenómenos reales (ya sean dadas en la actividad o obtenidas en el proceso de modelización) se puede observar esta situación de ambigüedad.

En paralelo, una vez superada esta primera dificultad, observamos que la forma del grafo que representa el proceso de modelización llevado a cabo por los alumnos no representa un ciclo de modelización. Una primera mirada al grafo nos proporciona una visión de desorden, dada su complejidad, pero que recupera su significado al observar las decisiones que los alumnos toman en cada fase del proceso. Blum, Borromeo (2009) ya presentaron un caso de estudio en el que los datos del análisis no coincidían con esta visión cíclica, pero entendemos que los resultados del análisis presentado en este artículo muestran un nivel de complejidad aún mayor.

Desde este punto de vista, entendemos que las representaciones que se encuentran en la literatura ofrecen una visión distorsionada de la complejidad de los procesos de modelización matemática y podrían llevar a equívocos no deseados al no existir concordancia entre lo esperado y lo observado. Este aspecto puede ser clave en la implementación de actividades de aula y las expectativas del profesorado, que pueden verse desbordados por el tipo de trabajo a promover o coordinar.

Por lo señalado, entendemos que la caracterización de los procesos de modelización debería entenderse como un campo abierto de estudio que requiere de aportaciones que permitan superar las dificultades detectadas en este trabajo.

Referencias

-  Albarracín, L., Gorgorió, N. (2013a).
Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto.
Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 16(3), 289–315.
-  Albarracín, L., Gorgorió, N. (2013b).
Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: una propuesta de aula a partir de los modelos generados por los alumnos.
Modelling in Science Education and Learning 6, 33–48.
-  Albarracín, L., Gorgorió, N. (2014).
Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers.
Educational Studies in Mathematics 86(1), 79–96.
-  Ärlebäck, J. B. (2009).
On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school.
The Mathematics Enthusiast 6(3), 331–364.
-  Barbosa, J. C. (2009).
Modelagem e modelos matemáticos na educação científica.
Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia 2(2), 69–85.
-  Batanero, C. (2000).
¿Hacia dónde va la educación estadística?.
Biaix 15, 2–13.
-  Batanero, C. (2013).
Sentido estadístico: Componentes y desarrollo.
Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 149–156.
-  Berry, J., Davies, A. (1996).
Written reports.
Mathematics Learning and Assessment: Sharing Innovative Practices. (3–11).
-  Blum, W. (2002).
ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education.
Discussion document Educational studies in mathematics 51(1-2), 149–171.
-  Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009).
Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?
Journal of mathematical modelling and application 1(1), 45–58.
-  Blum, W., Leiss, D. (2007).
How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project.
Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. Elsevier. (222–231).
-  Borromeo Ferri, R. (2006).
Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process.
ZDM 38(2), 86–95.

-  Ferrer Puigdel·l·ivol, M., Morera ·Ubada, L., Fortuny Aymem·, J. M. (2014). *Efectos de la actuaci·n docente en la generaci·n de oportunidades de aprendizaje matem·tico*. Ense·anza de las ciencias 32, 385–405.
-  Gal, I. (2002). *Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities*. International Statistical Review 70(1), 1–25.
-  Geiger, V. (2011). *Factors affecting teachers adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling*. Trends in teaching and learning of mathematical modelling. Springer (305–314).
-  Lesh, R., Harel, G. (2003). *Problem solving, modeling, and local conceptual development*. Mathematical thinking and learning 5(2-3), 157–189.
-  Lesh, R. (2010). *Tools, researchable issues & conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully*. Journal of Mathematical Modelling and Application 1(2), 16–48.
-  Levitt, S. D., Dubner, S. J. (2005). *Freakonomics: A Rogue Economist Explores the Hidden Side of Everything*. William Morrow 61.
-  NCTM (2003). *Principios y Est·ndares para la Educaci·n Matem·ticas*. Sevilla: SAEM Thales.
-  Perrenet, J., Zwaneveld, B. (2012). *The many faces of the mathematical modeling cycle*. Journal of Mathematical Modelling and Application 1(6), 3–21.
-  Palm, T. (2008). *Impact of authenticity on sense making in word problem solving*. Educational Studies in Mathematics 67(1), 37–58.
-  Pollak, H. O. (1979). *The interaction between mathematics and other school subjects*. New Trends in Mathematics Teaching IV, Paris.
-  Sol, M., Gim·nez, J., Rosich, N. (2011). *Trayectorias modelizadoras en la ESO*. Modelling in Science Education and Learning 4, 329–343.
-  Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M. (2010). *Sentido de realidad en la modelaci·n matem·tica*. ALME 23. Comit· Latinoamericano de Matem·tica Educativa-Colegio Mexicano de Matem·tica Educativa.
-  Vorh·lter, K., Kaiser, G., Borromeo Ferri, R. (2014). *Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education*. Transforming Mathematics Instruction. Springer (21–36).

Tabla 3 – Codificación final de los episodios 1.

Trayecto	Descripción	Fase del ciclo
1	Discusión sobre los primeros pasos a seguir, identificación de información relevante a partir de mirar los datos uno por uno.	Construyendo
2	Clasificación de los trabajadores en bloques, según si su sueldo es mayor de 2000, menor de 1000 o entre los valores 1000 y 2000. La distinción se realiza con colores sobre el folio y supone un primer modelo matemático.	Trabajando matemáticamente
3	Revisan el enunciado para determinar si su primera clasificación se ajusta a los que les pide el enunciado.	Construyendo
4	Nueva lectura del enunciado y discusión sobre el significado de las preguntas.	Construyendo
5	Observan que la necesidad de comparar empresas les obliga establecer como criterios de distinción los valores máximo y mínimo de los sueldos, discuten detalles de la elaboración de estos criterios pero no los establecen.	Matematizando Trabajando matemáticamente Interpretando
6	Observan la necesidad de utilizar la proporción de trabajadores en cada clase (porcentajes)	Trabajando matemáticamente
7	Cálculo de los porcentajes sobre los datos originales, refiriéndose verbalmente a los valores de los sueldos como trabajadores	Trabajando matemáticamente Interpretando
8	Cálculos de porcentajes y operaciones simples sin contemplar el contexto.	Trabajando matemáticamente
9	Vuelta al enunciado para comprobar que están tratando de dar respuesta a las preguntas formuladas.	Interpretando
10	Discusión y aclaraciones sobre qué se debe hacer. Momentos de duda sobre si han resuelto el problema planteado.	Construyendo
11	Relectura del enunciado y discusión que continua de 10.	Construyendo
12	Segunda relectura consecutiva del enunciado mientras discuten si es necesario ampliar los elementos de clasificación de empresas que han considerado.	Construyendo
13	Consideran la posibilidad de comparar con gráficos. Trabajan en elaborar un gráfico de barras para una de las empresas. Descartan esta vía, con lo que no alteran los criterios desarrollados hasta el momento.	Trabajando matemáticamente
14	Ampliación del modelo. Deciden incluir en los criterios el número de trabajadores (en empresas pequeñas, medianas y grandes) pero no le asignan un criterio claro ni una formulación matemática, únicamente es una consideración que no concretan, con lo que amplían el modelo situado pero no el modelo matemático desarrollado.	Interpretando
15	Validación del modelo a partir de comparar ejemplos de empresas reales que conocen y de los que infieren sus listas de salarios. Observan dificultades para distinguir algunas de las empresas que se plantean.	Validando
16	Nueva lectura del enunciado para introducir nuevos elementos en el modelo.	Construyendo

Tabla 4 – Codificación final de los episodios 2.

Trayecto	Descripción	Fase del ciclo
17	Discusión sobre los nuevos elementos a considerar y la forma de utilizarlos. Deciden modificar la clasificación y trabajar con intervalos de sueldos flexibles, que se adapten a cada empresa.	Construyendo
18	Cálculos relacionados con los intervalos.	Trabajando matemáticamente
19	Discusión y acuerdos sobre la forma de explicar el proceso para definir los intervalos.	Construyendo
20	Utilizan un ejemplo real para ejemplificar el proceso de elaboración del criterio de clasificación basado en intervalos de sueldos.	Exponiendo
21	Explicación del método general de clasificación (modelo definitivo).	Exponiendo
22	Uso del modelo para clasificar las listas de sueldo dadas en el enunciado.	Exponiendo

Modelling in Science Education and Learning
<http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>