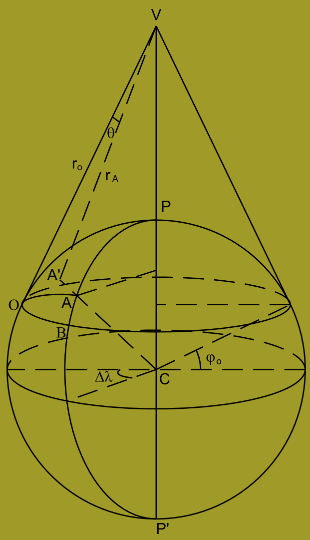
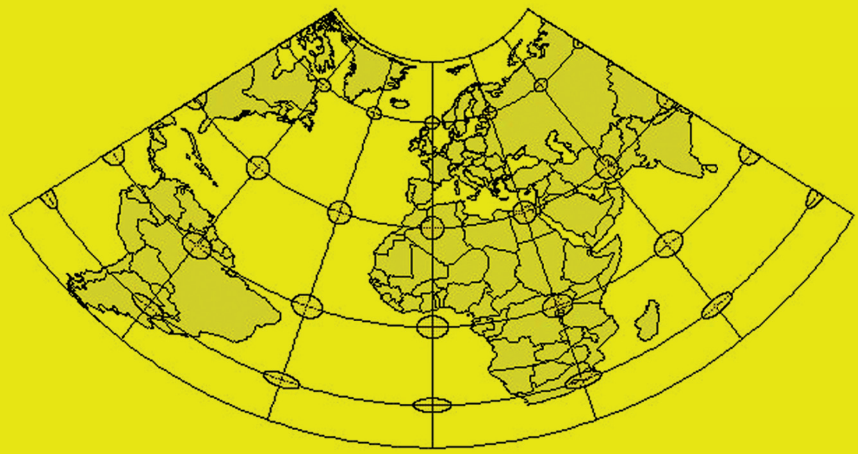


FUNDAMENTOS DE CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA

Sergio Baselga Moreno

2ª edición



$$k_1 = \frac{ds'}{ds} = \frac{\sqrt{\begin{pmatrix} d\varphi & d\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\varphi^{\ 2} + y_\varphi^{\ 2} & x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda \\ x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda & x_\lambda^{\ 2} + y_\lambda^{\ 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}}}{\sqrt{\begin{pmatrix} d\varphi & d\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \nu^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}}}$$

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Fundamentos de cartografía matemática
2ª edición

Sergio Baselga Moreno

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Primera edición, 2006
Segunda edición, 2014

d*istribución:* Tel. 96 387 70 12 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 607_13_02_01

Imprime: Byprint Percom, sl.
Impreso en papel Coral Book

ISBN: 978-84-9048-170-7
Impreso bajo demanda

Impreso en España

ÍNDICE

Prólogo

El presente texto es una exposición concisa de los fundamentos de la Cartografía Matemática, disciplina cuyo objeto de estudio son las proyecciones cartográficas y su aplicación a los problemas que plantean materias como la Geodesia, la Teledetección o los Sistemas de Información Geográfica.

En él se establece, para comenzar, el principal problema de la cartografía: la imposibilidad de desarrollar una superficie esférica o elipsoidal sobre una superficie en general plana sin que aparezcan deformaciones en el proceso constructivo. A continuación, en el siguiente tema, se describen los sistemas de proyección más extendidos, que, cada uno a su manera, resuelven parcialmente el problema de las deformaciones. El siguiente tema introduce el estudio y tratamiento riguroso de las deformaciones de una proyección con la posibilidad de aplicación tanto a una proyección creada por el usuario como a las analizadas en el tema anterior.

Quiero hacer notar al lector que con esta secuencia altero el orden habitual (y quizá lógico) de las publicaciones de cartografía matemática que tratan primero la teoría de deformaciones proyectivas para adentrarse después en los distintos tipos de proyecciones existentes. Mi intención no ha sido otra que el ir introduciendo la formulación matemática en orden creciente de dificultad para facilitar, quizá, el proceso de asimilación, aunque ello conlleve el tener que hacer alguna digresión hacia conceptos anteriormente vistos o, lo que es peor, explicaciones que sólo quedarán completas al final del estudio del texto. Mis disculpas al lector si no he conseguido el objetivo de facilitar la comprensión.

El texto se completa con un último tema dedicado a la resolución de problemas geodésicos sobre la proyección y dos apéndices, uno dedicado a las proyecciones oficiales y el otro que contiene las soluciones a los ejercicios que a lo largo del texto se van planteando.

Por otra parte, cabe decir que el texto presente, dedicado a la presentación de los fundamentos teóricos y de modo muy elemental a la resolución de problemas geodésicos sobre el plano de una proyección, debe completarse inevitablemente con la realización de prácticas informáticas encaminadas a resolver los problemas de mayor complejidad y volumen de datos que aparecen en las distintas disciplinas que integran la geomática.

Finalmente, quiero mostrar mi agradecimiento a mis compañeros Luis García-Asenjo y Caren Femenia por el inestimable apoyo prestado durante la elaboración del texto, así como a los alumnos que inevitablemente tuvieron que sufrir las distintas versiones del mismo y que con sus sugerencias y correcciones han contribuido a su mejora.

TEMA 1

Introducción a la Cartografía Matemática

La Cartografía es la ciencia que estudia la representación *gráfica* de la Tierra o parte de ella en una superficie plana (*carta*). Se encuentra íntimamente ligada a otra disciplina, la Geodesia, que se encarga del estudio de la forma y dimensiones de la Tierra así como de su campo gravitatorio. De esta manera, una define el espacio tridimensional (o tetradimensional según se mire) que habitamos mientras que la otra se encarga de su plasmación parcial o total sobre una superficie plana – usualmente – o de la realización de globos y modelos en relieve, procesos que no se encuentran exentos de problemas y aproximaciones.

Desde las culturas mesopotámica y egipcia el ser humano se ha dedicado a ellas movido por la necesidad de conocer y dominar el territorio en que habita. Así, tanto la geodesia como la cartografía se han ido desarrollando desde el principio de los tiempos junto con la geometría, astronomía y demás ciencias afines.

El término cartografía ha acabado extendiéndose a la realización de cualquier modelo bi o tridimensional de la Tierra o de cualquier otro astro bien sea de modo parcial o total. De este modo, los distintos trabajos (concepción y preparación, captura de información, reducciones y proyecciones de la misma, simbolización y edición cartográfica, impresión, etc.) que terminan en la obtención de cualquier tipo de modelo terrestre o de parte del universo, bien sea en soporte papel o digital, reciben el nombre de proceso cartográfico.

En general, se denomina *plano* a aquella representación plana de una porción de la superficie terrestre en la que dada su pequeña extensión puede prescindirse de la consideración de la curvatura terrestre – estamos hablando sólo de representar la planimetría – sin que se produzcan deformaciones superiores a la precisión métrica de la cartografía. Por otra parte, se denomina *mapa* a la representación plana de una porción de la superficie terrestre que por su extensión, dada su curvatura, necesita ser tratada mediante las transformaciones que estudia la Cartografía Matemática.

Clásicamente suele situarse el límite entre unos y otros en la escala 1:10000, de este modo, cartas de escala 1:10000 o menor se suelen llamar mapas mientras que escalas mayores corresponden a los planos. Cabe indicar, no obstante, que la realización cada vez más requerida de cartografía digital y no destinada a su impresión en papel, en la cual las dimensiones de la representación son muy variables e incluso existe frecuente desconocimiento de la escala de elaboración; hace necesaria la recuperación del concepto inicial de mapa (estudio y tratamiento de deformaciones/Cartografía Matemática) y plano (deformaciones despreciables o despreciadas).

En concreto nos dedicaremos de aquí en adelante al estudio de la elaboración de mapas mediante los procedimientos de la Cartografía Matemática y a toda su problemática que, a modo de resumen, consiste en el desarrollo sobre un plano de una superficie esférica o de un elipsoide de revolución. Así, si bien es conocida la imposibilidad de desarrollar una esfera (o un elipsoide de revolución) sobre un plano sin deformaciones ni rasgaduras, se pretenderá que la representación conserve algunas de las propiedades métricas originales (por ejemplo conservación de formas, o conservación de áreas, etc.) según el uso al que se vaya a destinar.

Sabías que…

El problema al que se enfrentan quienes diseñan un balón de fútbol es similar al de la Cartografía Matemática. ¿Sabes cuántos pentágonos tiene un balón de los conformados con pentágono y hexágonos?

1. Introducción

El problema de representar una superficie sobre otra es materia de la Geometría Diferencial (a la cual tendremos que dedicar algún tiempo). En algunas ocasiones nos encontraremos con el problema de plasmar una porción (o el todo) de una esfera sobre un plano: este será el caso de la realización de mapas celestes, o de cartas en que el modelo terrestre esférico sea suficiente. Por el contrario, en la mayoría de las ocasiones el modelo facilitado será el elipsoidal, es decir se considerará que la Tierra es un elipsoide de revolución (o a veces, por suerte las menos, un elipsoide triaxial) y habremos de desarrollarlo sobre un plano.

Cabe advertir que, a nuestros efectos, un primer paso ya ha sido realizado en todo este proceso de abstracción: la compleja superficie terrestre (usualmente sólo una porción de la misma) ya ha sido "reducida" sobre una superficie de referencia auxiliar: esfera o elipsoide (véase figura 1). Éste paso o "reducción" de la *superficie terrestre* cuya figura no responde a ninguna geometría sencilla, primero a otra figura de geometría complicada llamada *geoide* definida como superficie equipotencial cero, y posteriormente a otra figura de geometría sencilla que será la *superficie de referencia* (elipsoide o esfera) es materia de la Geodesia y por tanto no nos dedicaremos a ella (obviamente un repaso de conceptos de Geodesia nunca vendrá mal) sino que la supondremos nuestro punto de partida. A partir de ahí el objetivo será la realización del mapa mediante un proceso de “proyección”.

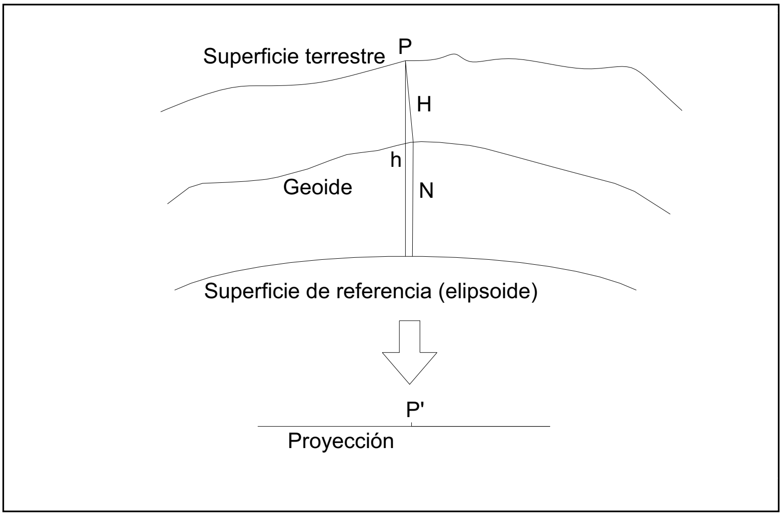


Figura 1. Superficies en el proceso de representación cartográfica

En los próximos apartados estudiaremos los requerimientos generales para definir una proyección, analizaremos los sistemas de proyección de uso más extendido y en algún lugar de este camino nos encontraremos preparados para definir nuestra propia proyección.

1.1. Concepto de proyección

En rigor, una proyección cartográfica es una correspondencia biunívoca entre los puntos de la superficie de referencia – esfera o elipsoide – y los puntos del plano:

$$\begin{aligned} x &= x(\lambda, \varphi) \\ y &= y(\lambda, \varphi) \end{aligned} \qquad (1\text{-}1)$$

$$\lambda = \lambda(x, y)$$
$$\varphi = \varphi(x, y) \qquad (1\text{-}2)$$

De la formulación de estas funciones x e y (y por tanto de sus inversas λ y φ) dependen las propiedades de la proyección definida. Obsérvese como, por el momento, no hemos puesto ninguna condición sobre su forma y propiedades, salvo que definan una aplicación biunívoca, por lo que en principio la libertad en su elección es total.

2. Geodesia y Cartografía Matemática

Como ya hemos dicho, la Geodesia, que estudia la superficie de referencia elegida bien sea esfera o elipsoide, y la Cartografía Matemática, que se encarga del estudio de las posibles aplicaciones biunívocas entre esta superficie de referencia y el plano, son dos disciplinas muy estrechamente relacionadas. Por tanto, no podemos seguir adelante con el estudio de la Cartografía Matemática sin habernos asegurado que al menos los conceptos básicos de la Geodesia, en particular aquéllos sobre la geometría de elipsoides y esferas se recuerdan.

Hagamos por tanto una breve digresión para recordar algunos conceptos básicos de Geodesia, advirtiendo no obstante a quien tenga buena memoria que puede pasar directamente al tema siguiente.

2.1. Geometría del elipsoide de revolución

Consideremos un elipsoide de revolución en torno al eje Z y un punto P en su superficie, que por comodidad supondremos en el plano XZ. La vertical (normal al elipsoide) en P intersecta al eje de revolución de dicho elipsoide en el punto E, según se muestra en la figura 2.

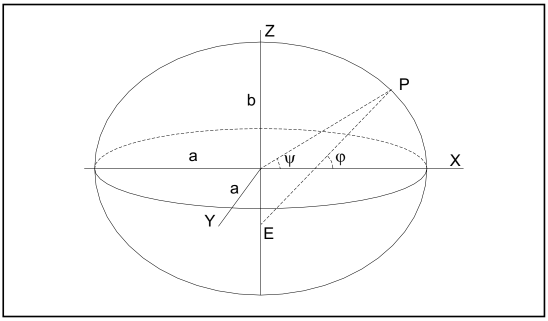


Figura 2. Elipsoide de revolución

Recuérdese que un elipsoide de revolución (en torno al eje Z en nuestro caso) queda definido geométricamente con dos de los siguientes parámetros:

- Semieje mayor, a (p.ej. a = 6378388 Hayford, a = 6378137 GRS80)

- Semieje menor, b

- Aplanamiento, $f = \frac{a-b}{a}$ (p.ej. f = 1/297 Hayford, f = 1/298,257222101 GRS80)

- Primera excentricidad, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

- Segunda excentricidad, $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

A continuación trabajemos con los dos planos fundamentales que contiene el haz de planos definido mediante la vertical geodésica del punto P (es decir PE): el primer vertical y el plano meridiano.

El primer vertical es el plano que contiene la vertical y es perpendicular al plano meridiano. La sección que efectúa sobre el elipsoide (véase fig. 3) tiene por radio de curvatura ν, a veces designado por N, y es uno de los dos radios de curvatura fundamentales, llamado *normal principal* o *gran normal* o simplemente radio de curvatura de la sección por el primer vertical. En el dibujo se corresponde con el segmento EP.

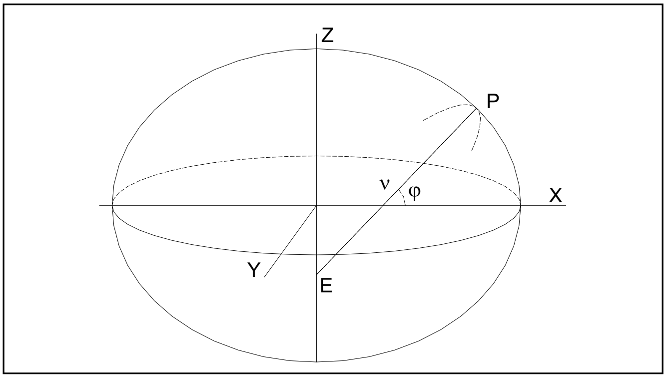


Figura 3. Primer vertical, ν

Su expresión es:

$$\nu = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad (1\text{-}3)$$

El plano meridiano: es el plano que contiene la vertical del punto (y por tanto el punto) y el eje de revolución del elipsoide (recuérdese que ambas líneas son coplanarias si estamos tratando de un elipsoide pero no en el caso del geoide). La sección que efectúa sobre el elipsoide (véase fig. 4) es el propio meridiano. Pero ¿cuál es el radio de curvatura del meridiano? Obviamente un radio que, al igual que en el caso del primer vertical, depende de la localización del punto P. Se designa por ρ o M y nos referiremos a él simplemente como *radio de curvatura de la elipse meridiana.*

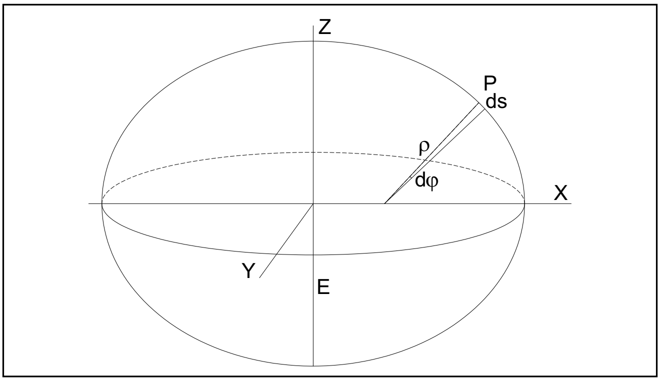


Figura 4. Radio de curvatura de la elipse meridiana, ρ

Obsérvese que una definición más operativa desde el punto de vista de la geometría diferencial sería $\rho = \dfrac{ds}{d\varphi}$, que quizá se prefiera recordar como $ds = \rho d\varphi$

El valor de dicho radio se puede calcular por

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\mathrm{sen}^2\varphi)^{3/2}} \tag{1-4}$$

Cualquier plano normal genérico de acimut θ: define una sección normal al elipsoide de radio de curvatura R_θ, donde su valor viene dado por el teorema de Euler

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\rho} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\nu} \tag{1-5}$$

Ejercítate…	Calcula los valores máximos y mínimos que puede alcanzar el radio de curvatura de una sección normal

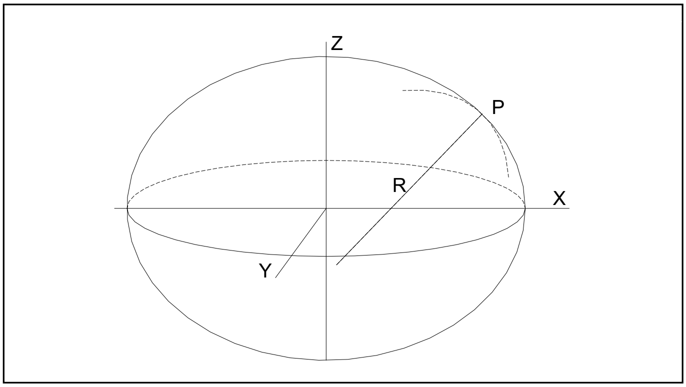


Figura 5. Radio de curvatura de una sección normal genérica, R

De las definiciones anteriores resulta evidente cómo podemos calcular longitudes de arcos de paralelo o de meridiano. En efecto, un paralelo de latitud φ tiene por radio (véase nuevamente la figura 3)

$$r = \nu \cos \varphi \tag{1-6}$$

de modo que la longitud de arco a lo largo de dicho paralelo se obtiene fácilmente

$$ds = \nu \cos \varphi \, d\lambda \tag{1-7}$$

$$s = \nu \cos \varphi \, \Delta\lambda \tag{1-8}$$

Por su parte un arco de meridiano, cuyo radio recordemos se designa por ρ (atención: ρ variará con la latitud), tiene un elemento diferencial de longitud

$$ds = \rho d\varphi \tag{1-9}$$

de modo que la longitud de arco de meridiano se obtiene por

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(1-e^2 \mathrm{sen}^2\varphi)^{3/2}} d\varphi \tag{1-10}$$

La integral resultante no tiene primitiva, lo que nos obliga a realizar integración numérica. Algunas de las soluciones propuestas en los distintos textos de Geodesia se dan en la siguiente caja.

ALGUNAS SOLUCIONES AL PROBLEMA DEL CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

- El clásico texto de Tardi, P. (1954) *Traité de Géodésie*, ofrece una primera aproximación

$$s \approx \rho\Delta\varphi\left[1+\frac{e^2}{8}(\Delta\varphi)^2\cos 2\varphi_M\right]$$ donde $\rho=\rho(\varphi_M)$ y φ_M es una latitud media

- El libro de Snyder, J.P. (1997) *Map Projections. A Working Manual*, realiza un desarrollo en serie que permite aproximar la longitud de arco de meridiano desde el ecuador hasta una latitud φ por

$$\int_0^{\varphi}\rho d\varphi \approx a\left[\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\frac{5e^6}{256}\right)\varphi-\left(\frac{3e^2}{8}+\frac{3e^4}{32}+\frac{45e^6}{1024}\right)\mathrm{sen}2\varphi+\left(\frac{15e^4}{256}+\frac{45e^6}{1024}\right)\mathrm{sen}4\varphi-\left(\frac{35e^6}{3072}\right)\mathrm{sen}6\varphi\right]$$

- Por su parte, el libro de García-Asenjo, L. y Hernández, D. (2003) *Geodesia*, Ed. Universidad Politécnica de Valencia también realiza un desarrollo en serie de potencias que permite obtener la longitud de arco de meridiano desde el ecuador hasta una latitud φ por

$$\int_0^{\varphi}\rho d\varphi = a(1-e^2)(g_1+g_2+g_3+g_4+g_5+\ldots)$$

$$g_1=\varphi$$

$$g_2=\frac{3}{2}e^2\left(-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\varphi\right)$$

$$g_3=\frac{15}{8}e^4\left(-\frac{1}{4}\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi-\frac{3}{8}\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{3}{8}\varphi\right)$$

$$g_4=\frac{35}{16}e^6\left(-\frac{1}{6}\mathrm{sen}^5\varphi\cos\varphi-\frac{5}{24}\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi-\frac{5}{16}\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{5}{16}\varphi\right)$$

$$g_5=\frac{315}{128}e^8\left(-\frac{1}{8}\mathrm{sen}^7\varphi\cos\varphi-\frac{7}{48}\mathrm{sen}^5\varphi\cos\varphi-\frac{35}{192}\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi-\frac{35}{128}\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{35}{128}\varphi\right)$$

(Prestemos atención a que todas estas expresiones exigen que la latitud sea expresada en radianes)

Recordemos finalmente que la resolución de problemas geométricos sobre el elipsoide es abordable si bien resulta una tarea ciertamente costosa. En su lugar los geodestas suelen recurrir a menudo a la aplicación del *teorema de Gauss* (algunos como el citado tienen la suerte de tener más de un teorema al que nos referimos por su nombre, ¿recuerdas algún otro “teorema de Gauss”?).

El teorema dice que podemos aplicar una superficie sobre otra sin desgarraduras ni dobleces si y sólo si la curvatura (o, equivalentemente, el radio de curvatura) de ambas superficies es la misma en el punto de contacto. Esta transformación conserva los ángulos, las distancias y las superficies, aunque obviamente esta afirmación sólo es exacta en términos diferenciales.

Evidentemente, según el teorema de Gauss, la aplicación de la superficie de un elipsoide de revolución sobre un plano sin desgarraduras y/o dobleces resulta imposible, como ya sabíamos.

En nuestro caso, siguiendo el teorema de Gauss, podremos transformar los problemas geodésicos definidos sobre la superficie del elipsoide a la superficie de una esfera, que llamaremos *esfera local* o *esfera de Gauss*[1], cuyo radio es la media geométrica de los radios de curvatura principales en el punto, es decir, el radio medio será

$$R = \sqrt{\rho\nu} \tag{1-11}$$

Los resultados que se obtienen tras aplicación del teorema de Gauss suelen considerarse válidos para lados de hasta centenares de kilómetros, puesto que la precisión obtenida es mejor que 1 ppm.[2]

> Sabías que…
>
> El teorema de Gauss, en su versión conocida como teorema Gauss-Bonnet
>
> $\frac{1}{2\pi}\iint_S \kappa dS = 2$ ($\kappa \equiv$ curvatura gaussiana de cualquier superficie del mismo género que la esfera)
>
> es una versión bidimensional de las ecuaciones de campo de la Relatividad Generalizada de Einstein.

2.2. Geometría de la esfera

Si la superficie de referencia elegida es la esfera nos encontraremos con una geometría aún más sencilla. Ya no existirán distintos radios de curvatura sino uno único, R, para toda la superficie (las fórmulas utilizadas para el elipsoide siguen siendo válidas pero con a=b, comprueba tú mismo cómo se simplifican).

La longitud de cualquier arco de círculo máximo (recuerda que un círculo máximo es cualquiera que se obtenga cortando a la esfera por un plano que pase por su centro) se calcula fácilmente, por ejemplo para un arco de meridiano

$$ds = Rd\varphi \tag{1-12}$$

$$s = R\Delta\varphi \tag{1-13}$$

[1] No confundir con la esfera de Jacobi cuyo radio es el semieje mayor del elipsoide *a*.

[2] Nos estamos refiriendo aquí a la Geodesia Clásica y a su límite de precisión de 1 ppm o 10^{-6}. Actualmente la Geodesia Espacial proporciona precisiones globales mucho mejores – del orden de 10^{-9} o 1 ppb en terminología americana – de modo que esta aproximación deja de ser válida a distancias mucho más cortas.

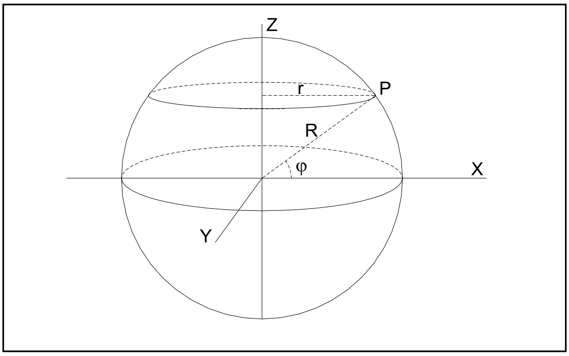


Figura 6. Superficie de referencia esférica

Mientras que la longitud de arco de paralelo se puede calcular a partir de

$$ds = rd\lambda = R\cos\varphi d\lambda \quad (1\text{-}14)$$

$$s = r\Delta\lambda = R\cos\varphi\Delta\lambda \quad (1\text{-}15)$$

$r = R\cos\varphi$ es evidentemente el radio del paralelo de latitud φ considerado.

La resolución de cualquier triángulo sobre la esfera es un problema de trigonometría esférica, no obstante también se puede realizar una aproximación conocida como *teorema de Legendre* que nos permite resolver el triángulo esférico como si fuera (otro) triangulo plano.

El teorema de Legendre afirma que se puede resolver un triángulo esférico como un triángulo plano cuyos lados tienen la misma longitud que los análogos del triángulo esférico y cuyos ángulos son los análogos del triángulo esférico disminuidos cada uno de ellos en un tercio del exceso esférico. Recordemos que en un triángulo esférico la suma de los ángulos interiores es siempre mayor que 180º, este “exceso” sobre 180º es lo que se llama exceso esférico (que además es igual al área del triangulo esférico dividida por el cuadrado del radio de la esfera) y se suele designar por ε.

Lo que propone Legendre es que puesto que en un triángulo plano la suma de ángulos ha de ser 180º, podemos repartir el exceso esférico restándolo a partes iguales en cada uno de los ángulos. Es una idea extremadamente sencilla y no obstante ofrece resultados aceptables incluso para lados de decenas de kilómetros[3].

[3] Entiéndase a este respecto lo mismo que en la nota anterior, es decir, sólo para Geodesia clásica

Para seguir leyendo haga click aquí