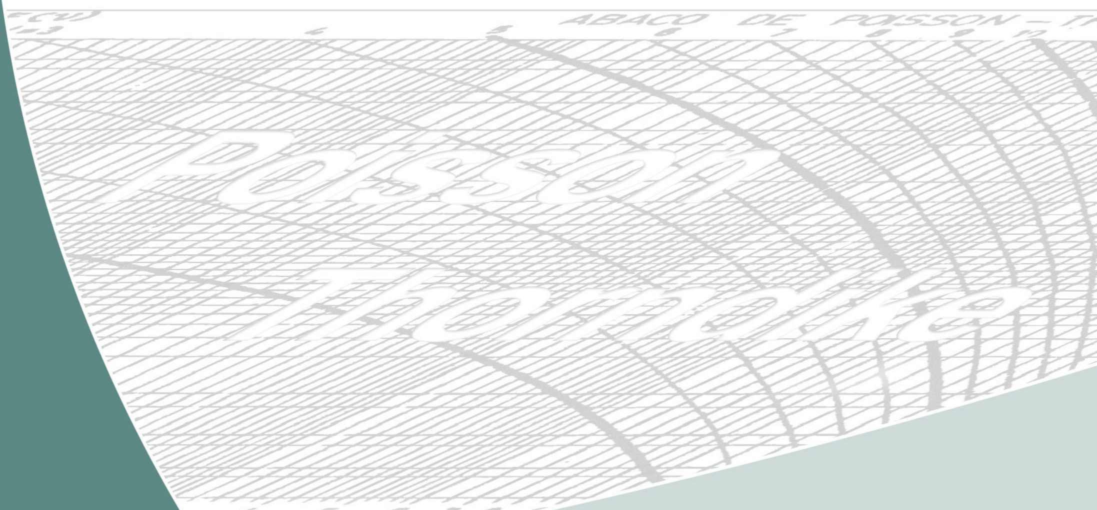
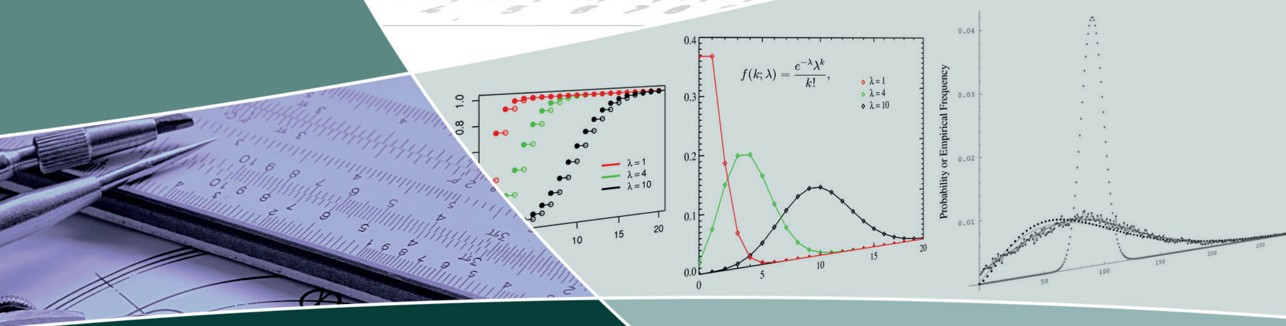
acadèmica

Distribuciones de probabilidad

Problemas y recursos prácticos

Nuria Portillo Poblador
Amparo Montesinos Guillot
Mª Fulgencia Villa Juliá
Santiago Vidal Puig
Jorge Martín Marín





EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Nuria Portillo Poblador
Amparo Montesinos Guillot
Mª Fulgencia Villa Juliá
Santiago Vidal Puig
Jorge Martín Marín

Distribuciones de probabilidad
Problemas y recursos prácticos

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: PORTILLO POBLADOR, NURIA [et al] (2013) *Distribuciones de probabilidad: Problemas y recursos prácticos.* Valencia : Universitat Politècnica

Primera edición, 2013

Distribución: pedidos@editorial.upv.es /
Telf. 963 877 012/ www.editorial.upv.es / Ref. 907

Imprime: By print percom sl.

ISBN: 978-84-9048-014-4
Impreso bajo demanda

Impreso en España

ÍNDICE

PRÓLOGO

El objetivo fundamental de este texto es mejorar el proceso y el resultado de aprendizaje de los alumnos de los Grados de Ingeniería Civil y Obras Públicas para la asignatura de Estadística Básica. Para ello, el grupo de profesores que imparte esta asignatura ha dirigido sus esfuerzos en crear nuevos recursos y adaptar los ya existentes.

Los cuatro tipos de recursos docentes de los que consta la publicación, corresponden al bloque temático *Distribuciones de Probabilidad*. A través de estas actividades se pretende:

- Que el alumno perciba que existen diferentes formas de adquirir el conocimiento y gestionar su aprendizaje.
- Consolidar los conceptos asociados al temario.
- Fomentar aptitudes como la autonomía, el trabajo cooperativo, la gestión del tiempo…

A continuación, se describe cada uno de los recursos diseñados y se indica cuál debe ser el uso de los mismos para obtener el máximo provecho por parte del alumno.

Recursos Docentes

Se han desarrollado cuatro tipos de actividades. Cada una de ellas se identifica con una imagen tal y como se recoge en la tabla siguiente:

Recurso	Imagen
Problemas Resueltos	
Práctica en Aula	

Recurso	Imagen
Práctica con Software Informático	
Problemas Propuestos	

Problemas Resueltos

Esta sección consta de un conjunto de problemas representativos de los conceptos trabajados y expuestos en el aula. La resolución de estos problemas se explica con detalle para que el alumno sea capaz de entender y reproducir el proceso de análisis y resolución de los mismos.

Es conveniente que el alumno previamente se haya familiarizado con los conceptos correspondientes al bloque temático.

Práctica en Aula

En cada práctica en aula se propone un número reducido de ejercicios que los alumnos deberán resolver conjuntamente con otros compañeros bajo la dirección del profesor.

El alumno debe tener en cuenta los objetivos conceptuales de la práctica y estudiarlos previamente.

Práctica con Software Informático

Esta actividad consta de dos partes. En la primera se presenta un caso real y se proponen una serie de preguntas que el alumno debe resolver utilizando el programa informático Statgraphics. Este apartado está totalmente guiado para facilitar el proceso de aprendizaje. Por ello, en la segunda parte se presentan las soluciones y comentarios a las diferentes preguntas propuestas.

Problemas Propuestos

Esta sección recoge un conjunto de problemas que permiten al alumno trabajar los conceptos expuestos desarrollados en este bloque temático. La solución de los mismos se encuentra al final de esta publicación.

Es conveniente que el alumno previamente se haya familiarizado con los conceptos correspondientes al bloque temático y haya realizado las actividades descritas anteriormente. Las soluciones se recogen en el anexo 1.

Agradecimientos

Los profesores agradecen las sugerencias aportadas por los alumnos de cursos anteriores. Estas sugerencias han sido fundamentales para la estructuración y composición de esta publicación.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS RESUELTOS

A) Distribuciones Discretas

1.- El Ayuntamiento de Valencia está interesado en regular un semáforo en función del número de vehículos que se acumulan en el mismo cada vez que se pone rojo para los vehículos (variable **X**). Para ello decide tomar muestras en diferentes condiciones tanto atmosféricas, como horarias (diferentes horas del día y diferentes días de la semana). De una muestra de tamaño 2000 obtiene los siguientes resultados:

X	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	199	0.0995
1	402	0.201
2	602	0.301
3	397	0.1985
4	195	0.0975
5	204	0.101
≥6	1	0.0005

A partir de dicha información, el ayuntamiento ha estimado que la función de probabilidad para dicha variable es:

X	Función de Probabilidad
0	0.1
1	0.2
2	0.3
3	0.2
4	0.1
5	0.1
≥6	0

Calcular:

a) La función de distribución para dicha variable.

b) La probabilidad de que se acumulen en el semáforo al menos 2 vehículos hasta que se ponga verde de nuevo.

c) La probabilidad de que se acumulen en el semáforo como mínimo 3 vehículos y como máximo 5.

d) La probabilidad de que se acumulen en el semáforo menos de 3 vehículos hasta que se ponga verde de nuevo.

e) La probabilidad de que se acumulen en el semáforo más de 4 vehículos hasta que se ponga verde de nuevo.

Resolución

a) Sea X=número de vehículos que se acumulan en un semáforo hasta que se pone verde de nuevo, la función de distribución la podemos encontrar en la siguiente tabla en la última columna.

X	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**	**Función de Probabilidad $P(X=x_0)$**	**Función de distribución $P(X\leq x_0)$**
0	199	0.0995	0.1	0.1
1	402	0.201	0.2	0.3
2	602	0.301	0.3	0.6
3	397	0.1985	0.2	0.8
4	195	0.0975	0.1	0.9
5	204	0.101	0.1	1
≥6	1	0.0005	0	1

b) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X\leq 1)=1-F(1)=1-0.3=0.7$

c) $P(3\leq X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0.2+0.1+0.1=0.4$

d) $P(X<3)=P(X\leq 2)=F(2)=0.6$

e) $P(X>4)=1-P(X\leq 4)=1-0.9=0.1$

2.- Un juego de azar consiste en tirar un dado no trucado una única vez. La ganancia del juego depende del número que se ha obtenido tirando el dado, de manera que si se apuestan 10€:

Resultado del dado	**Ganancia según el resultado del dado**
1	-10
2	-10
3	-10
4	10
5	20
6	30

a) Calcula ganancia esperada con este juego en cada tirada (esperanza matemática).

b) ¿Será rentable este juego para el casino?

Resolución

a) Sea X=resultado del dado

Sea h(X)=ganancia obtenida según el resultado del dado
$E[h(X)]=1/6\cdot(-10)+1/6\cdot(-10)+1/6\cdot(-10)+1/6\cdot 10+1/6\cdot 20+1/6\cdot 30=5$

b) Este juego no resultaría rentable para el casino puesto que tiene ganancia positiva para el jugador y, por tanto, negativa para el casino que perderia por término médio 5€ en cada jugada.

3.-Una compañía de seguros de automóviles quiere determinar el sistema bonus-malus a aplicar a sus conductores asegurados. Si el conductor es bueno, la prima del seguro le debería costar 300€; si por el contrario es un mal conductor, dicha prima debería ser de 600€. Se sabe que la probabilidad de tener algún accidente al año es del 20% para los conductores buenos; sin embargo, el porcentaje de los conductores que tienen algún accidente al año es del 50% en el caso de los conductores malos. Por otra parte se conoce que un 40% de los conductores son buenos, siendo el 60% restante malos.

a) ¿Cuánto debería cobrarse a un nuevo asegurado?

b) ¿Cuál es la bonificación que debería aplicarse a un conductor que tras su primer año de asegurado no haya tenido ningún accidente?

Resolución

a) Definimos los sucesos:

A=tener algún accidente al año

B= el conductor es bueno P(B)=0.4 P(A/B)=0.2

M=el conductor es malo P(M)=0.6 P(A/M)=0.5

Sea X= tipo de asegurado atendiendo a su calificación de buen o mal conductor, X={B,M}

h(X)=prima a cobrar a un asegurado dependiendo de si es bueno o malo, luego h(B)=300€ y h(M)=600€

E[h(X)]=h(B)P(B)+ h(M)P(M)=300·0.4+600·0.6=480€ es la prima a cobrar a un nuevo asegurado puesto que no sabemos si es bueno o malo

b) Sabemos que el conductor tras su primer año de asegurado no ha tenido ningún accidente, luego las probabilidades anteriores de buen o mal conductor están condicionadas a que el conductor no ha tenido ningún accidente y serán por tanto diferentes.

Para calcular ahora las nuevas probabilidades deberemos aplicar el teorema de Bayes.

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}/B)P(B)}{P(\overline{A}/B)P(B) + P(\overline{A}/M)P(M)} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.8 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6} = \frac{0.32}{0.62} = 0.5161$$

$$P(M/\overline{A}) = 1 - P(B/\overline{A}) = 1 - 0.5161 = 0.4839$$

$$E[h(X)] = h(B)P(B/\overline{A}) + h(M)P(M/\overline{A}) = 300 \cdot 0.5161 + 600 \cdot 0.4839 = 445.17\,€$$

Luego la bonificación será de 480-445.17=34.83€

4.- Al llegar a un semáforo sólo se pueden elegir entre seguir recto o girar a la derecha. Si la probabilidad de girar a la derecha es 0.1 se pide:

a) Identificar la variable implicada y su distribución.

b) Determinar la probabilidad de que de una serie de 6 vehículos que esperan la apertura del semáforo, 3 vehículos giren a la derecha.

c) Determinar la probabilidad de que de una serie de 6 vehículos que esperan la apertura del semáforo, 5 o más vehículos giren a la derecha.

d) Determinar la probabilidad de que de una serie de 6 vehículos que esperan la apertura del semáforo, al menos uno gire a la derecha.

e) Determinar la probabilidad de que de una serie de 6 vehículos que esperan la apertura de un semáforo, todos vayan recto.

f) Determinar la probabilidad de que el primer vehículo que gire a la derecha sea el quinto. Identifica previamente la variable implicada y su distribución.

Resolución

a) Sea X=número de vehículos que giran a la derecha de un total de 6,

X~B(6, 0.1)

b) $P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0.1^3\cdot(1-0.1)^{6-3}=0.0146$

c)

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)=\binom{6}{5}\cdot 0.1^5\cdot(1-0.1)^{6-5}+\binom{6}{6}\cdot 0.1^6\cdot(1-0.1)^{6-6}=$$

$$=0.000054+0.000001=0.000055$$

d) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}\cdot 0.1^0\cdot(1-0.1)^{6-0}=$

$$=1-0.5314=0.4686$$

e) $P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0.1^0\cdot(1-0.1)^{6-0}=0.5314$

f) Y=número de vehículos que han de pasar por el cruce hasta que el primero gire a la derecha, Y~G(0.1)

$P(Y=5)=(1-0.1)^{5-1}\cdot 0.1=0.06561$

5.-En el Ayuntamiento de Valencia el número de accidentes laborales por semana sigue una distribución de Poisson de parámetro 5.5 accidentes. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que en una semana haya tres accidentes laborales.

b) Calcular la probabilidad de que en una semana haya más de tres accidentes laborales

c) Calcular la probabilidad de que en una semana haya tres accidentes laborales y la semana siguiente otros tres.

d) Calcular la probabilidad de que a lo largo de dos semanas haya 6 accidentes laborales. ¿Es mayor, menor o igual a la probabilidad del apartado c)?

Resolución

a) X= número de accidentes laborales por semana ~ Ps (5.5)

$$P(X=3)=e^{-5.2}\frac{5.5^3}{3!}=0.1133$$

b) P(X>3)=1-P(X≤3)=1-0.2017=0.7983

c) X_i= número de accidentes laborales por semana ~ Ps (5.5) i=1,2

Como suponemos que el número de accidentes semanales de una semana es independiente de la semana siguiente, entonces:

$$P((X_1=3)\cdot(X_2=3))=P(X_1=3)\,P(X_2=3)=(e^{-5.5}\frac{5.5^3}{3!})^2=0.1133^2=0.0128$$

d) Sea $Y=X_1+X_2$ entonces Y=número de accidentes laborales en dos semanas

Y~ Ps (5.5+5.5)=Ps(11)

$$P(Y=6)=e^{-11}\frac{11^6}{6!}=0.0411$$

La probabilidad obtenida ahora es mayor puesto que la combinación de accidentes laborales semanales solicitada en el apartado c) sería una de las posibles combinaciones que pueden darse en este caso.

6.-Una empresa que fabrica un tipo de pieza utilizada en la construcción produce un 2% de piezas defectuosas. La empresa vende las piezas en cajas de 500 unidades.

a) ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria: nº de piezas defectuosas en una caja? Justifica la respuesta.

b) ¿Sobre qué población está definida esta variable aleatoria?

c) ¿A qué otra u otras distribuciones puede aproximarse razonablemente la variable aleatoria considerada? Justifica las respuestas.

Para seguir leyendo haga click aquí