

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

**Estimación y acotación del error de discretización
en el modelado de grietas mediante el método
extendido de los elementos finitos**

Presentada por: D. Octavio Andrés González Estrada

Dirigida por: Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

Dr. D. Juan José Ródenas García

Valencia, Febrero de 2010

TESIS DOCTORAL

**Estimación y acotación del error de discretización
en el modelado de grietas mediante el método
extendido de los elementos finitos**

que para la obtención del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

presenta

D. Octavio Andrés González Estrada

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
de la Universidad Politécnica de Valencia

Dirigida por

Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández
Dr. D. Juan José Ródenas García

Valencia, Febrero de 2010

TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN Y ACOTACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN
EN EL MODELADO DE GRIETAS MEDIANTE EL MÉTODO
EXTENDIDO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Presentada por: D. Octavio Andrés González Estrada

Dirigida por: Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

Dr. D. Juan José Ródenas García

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. _____

VOCALES: Dr. D. _____

Dr. D. _____

Dr. D. _____

SECRETARIO: Dr. D. _____

En Valencia, a 16 de Febrero de 2010.

Resumen

El Método de los Elementos Finitos (MEF) se ha afianzado durante las últimas décadas como una de las técnicas numéricas más utilizadas para resolver una gran variedad de problemas en diferentes áreas de la ingeniería, como por ejemplo, el análisis estructural, análisis térmicos, de fluidos, procesos de fabricación, *etc.* Una de las aplicaciones donde el método resulta de mayor interés es en el análisis de problemas propios de la Mecánica de la Fractura, facilitando el estudio y evaluación de la integridad estructural de componentes mecánicos, la fiabilidad, y la detección y control de grietas.

Recientemente, el desarrollo de nuevas técnicas como el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM) ha permitido aumentar aún más el potencial del MEF. Dichas técnicas mejoran la descripción de problemas con singularidades, con discontinuidades, *etc.*, mediante la adición de funciones especiales que enriquecen el espacio de la aproximación convencional de elementos finitos.

Sin embargo, siempre que se aproxima un problema mediante técnicas numéricas, la solución obtenida presenta discrepancias con respecto al sistema que representa. En las técnicas basadas en la representación discreta del dominio mediante elementos finitos (MEF, XFEM, ...) interesa controlar el denominado error de discretización. En la literatura se pueden encontrar numerosas referencias a técnicas que permiten cuantificar el error en formulaciones convencionales de elementos finitos. No obstante, por ser el XFEM un método relativamente reciente, aún no se han desarrollado suficientemente las técnicas de estimación del error para aproximaciones enriquecidas de elementos finitos.

El objetivo de esta Tesis es cuantificar el error de discretización cuando se utilizan aproximaciones enriquecidas del tipo XFEM para representar problemas propios de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal (MFEL), como es el caso del modelado de una grieta. En este sentido, se propone el desarrollo de un estimador del error *a posteriori* basado en la reconstrucción de la solución de elementos finitos, el cual ha sido especialmente adaptado a aproximaciones de XFEM. Para la evaluación del campo reconstruido se ha utilizado una técnica de reconstrucción que puede ser considerada como una extensión de la técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR) a formulaciones con elementos enriquecidos.

Por otra parte, los estimadores de error pueden subestimar o sobrestimar el error

exacto en norma energética. No obstante, en la práctica resulta de mayor interés poder garantizar que se ha alcanzado cierto nivel de precisión, por lo que resulta útil acotar el error de manera que se establezca un criterio de seguridad para aceptar la solución de EF. Por esta razón, en esta Tesis se propone una técnica de evaluación de cotas superiores del error adaptada a XFEM, la cual está basada en la reconstrucción de la solución, y en la evaluación de los defectos introducidos en el equilibrio al forzar la continuidad del campo reconstruido.

La técnica de estimación del error y la técnica de obtención de cotas superiores del error han sido verificadas mediante ejemplos numéricos con solución de referencia conocida. Los resultados obtenidos indican una alta precisión en la estimación y acotación del error.

Summary

The Finite Element Method (FEM) has consolidated itself in recent decades as one of the most widely used numerical techniques to solve a variety of problems in different areas of engineering such as structural analysis, thermal analysis, fluids analysis, manufacturing processes, *etc.*. One application where the method is most interesting is the analysis of problems within the area of Fracture Mechanics, facilitating the study and evaluation of the structural integrity of mechanical components, reliability, and detection and control of cracks.

Recently, the development of new techniques as the Extended Finite Element Method (XFEM) has increased even more the potential of FEM. These techniques improve the description of features like singularities, discontinuities, *etc.*, by adding special functions that enrich the space of the standard finite element approximation.

However, whenever one approximates a problem using numerical techniques, the solution presents differences with respect to the system it represents. In techniques based on a discrete representation of the domain through finite elements (FEM, XFEM, . . .) it is a matter of utmost concern the control of the discretization error. In the literature, many references can be found to techniques that allow quantification of the error in standard finite element formulations. Nevertheless, being the XFEM a relatively recent method, there are not yet sufficiently developed techniques for estimating the error for enriched finite element approximations.

The objective of this Thesis is to quantify the discretization error when XFEM approximations are used to represent problems in the field of Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), as is the case of modelling a crack. In this sense, it is proposed to develop an *a posteriori* error estimator based on the recovery of the finite element solution, which has been specially adapted to XFEM approximations. A recovery technique which can be considered as an extension of the Superconvergent Patch Recovery (SPR) technique to enriched approximations has been used for the evaluation of the recovered field.

Moreover, the error estimators can underestimate or overestimate the exact error in energy norm. In practice, it is of greater interest to ensure that the solution has reached a certain level of accuracy, bounding the error so that a safety criterion to accept the FE solution can be defined. For this reason, this Thesis proposes a technique for

evaluating upper bounds of the error well suited to XFEM approximations, which is based on the recovery of the solution, and the evaluation of the defects introduced into the equilibrium by forcing the continuity of the recovered field.

The error estimation and error bounding techniques have been verified through numerical examples with known reference solution. The results indicate a high accuracy of the error estimate and the upper bound of the error.

Resum

El Mètode dels Elements Finitos (MEF) s'ha refermat durant les últimes dècades com una de les tècniques numèriques més utilitzades per a resoldre una gran varietat de problemes en diferents àrees de l'enginyeria, com per exemple, l'anàlisi estructural, anàlisis tèrmiques, de fluids, processos de fabricació, *etc.* Una de les aplicacions on el mètode resulta de major interès és en l'anàlisi de problemes propis de la Mecànica de la Fractura, facilitant l'estudi i avaluació de la integritat estructural de components mecànics, la fiabilitat, i la detecció i control de clavills.

Recentment, el desenrotllament de noves tècniques com el Mètode Estés dels Elements Finitos (XFEM) ha permès augmentar encara més el potencial del MEF. Dites tècniques milloren la descripció de problemes amb singularitats, amb discontinuïtats, *etc.*, per mitjà de l'addició de funcions especials que enriqueixen l'espai de l'aproximació convencional d'elements finits.

No obstant, sempre que s'aproxima un problema per mitjà de tècniques numèriques, la solució obtinguda presenta discrepàncies amb respecte al sistema que representa. En les tècniques basades en la representació discreta del domini per mitjà d'elements finits (MEF, XFEM, . . .) interessa controlar el denominat error de discretització. En la literatura es poden trobar nombroses referències a tècniques que permeten quantificar l'error en formulacions convencionals d'elements finits. No obstant això, per ser el XFEM un mètode relativament recent, encara no s'han desenrotllat prou les tècniques d'estimació de l'error per a aproximacions enriquides d'elements finits.

L'objectiu d'esta Tesi és quantificar l'error de discretització quan s'utilitzen aproximacions del tipus XFEM per a representar problemes propis de la Mecànica de la Fractura Elàstic Lineal (MFEL), com és el cas del modelatge d'un clavill. En este sentit, es proposa el desenrotllament d'un estimador de l'error *a posteriori* basat en la reconstrucció de la solució d'elements finits, el qual ha sigut especialment adaptat a aproximacions de XFEM. Per a l'avaluació del camp reconstruït s'ha utilitzat una tècnica de reconstrucció que pot ser considerada una extensió de la tècnica Superconvergent Patch Recovery (SPR) a formulacions amb elements enriquits.

D'altra banda, els estimadors d'error poden subestimar o sobrestimar l'error exacte en norma energètica. No obstant això, en la pràctica resulta de major interès poder garantir que s'ha aconseguit cert nivell de precisió, per la qual cosa resulta útil de-

limitar l'error de manera que s'establisca un criteri de seguretat per a acceptar la solució d'EF. Per esta raó, en esta Tesi es proposa una tècnica d'avaluació de cotes superiors de l'error adaptada a XFEM, la qual està basada en la reconstrucció de la solució, i en l'avaluació dels defectes introduïts en l'equilibri al forçar la continuïtat del camp reconstruït.

La tècnica d'estimació de l'error i la tècnica d'obtenció de cotes superiors de l'error han sigut verificades per mitjà d'exemples numèrics amb solució de referència coneguda. Els resultats obtinguts indiquen una alta precisió en l'estimació i acotació de l'error.

A Aida

A mi familia

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Javier Fuenmayor por toda la confianza brindada. Hace ya varios años toqué su puerta en busca de una oportunidad para realizar el doctorado, y es gracias a él que hoy culmino con éxito la elaboración de esta Tesis. A él agradezco el haber estado siempre dispuesto a ayudar, aconsejar y guiarme de forma oportuna a lo largo de mi trabajo.

Pocas líneas son cortas para mostrar mi aprecio hacia Juan José Ródenas. Doy gracias de haber tenido la suerte de tenerlo como director, tanto por sus cualidades como profesor e investigador, como por la clase de persona que es. Siempre motivando, escuchando y esforzándose por entender la curva sinusoidal que puede llegar a ser el estado anímico de un doctorando. A él agradezco su preocupación, sus consejos y su constante disposición a ayudar en el complejo camino que es para un estudiante el inicio de una carrera investigadora. A Juanjo y Javier, decirles que ha sido un privilegio para mí tenerlos como directores.

Al profesor Pedro Díez por su colaboración en cuestiones concernientes a la base teórica de las técnicas desarrolladas. Al profesor Stéphane Bordas y al Dr. Marc Dufлот por sus contribuciones al trabajo conjunto realizado.

A mis compañeros del Área de Ingeniería Mecánica de este mismo Departamento agradezco el tiempo compartido. El conocimiento y las experiencias vividas con ustedes nunca las olvidaré, seguirán siendo parte de mí para toda la vida.

A mis buenos amigos a ambos lados del Atlántico les doy gracias por estar ahí, siguiendo conmigo el camino, y sirviendo de apoyo cuando los he necesitado. A Dorian, por comenzar junto a mí la aventura del doctorado. A Miguel, por todas las cosas aprendidas juntos, las largas conversaciones y los viajes realizados. A Betty, Pedro, Manolo, Jorge, William, Iñaki, Laura, Ilaria, y muchas otras personas que han dejado una huella en mi vida mil gracias.

A mi familia, porque sin ellos no hubiera sido posible llegar hasta aquí, y porque son mi aliento para continuar. Porque siempre me han servido de ejemplo para formarme como persona y cada nuevo día comprendo aún más lo afortunado que he sido. A mi madre y a mi abuela, por su inagotable amor, por su interés constante en mi bienestar, por su apoyo inconmensurable durante toda mi vida.

A mi mujer Aida, por todo el amor que me ha ofrecido incondicionalmente, por querer construir junto a mí un proyecto más grande que cualquier tesis, una familia. A ella agradezco especialmente el esfuerzo que ha hecho, porque sé con certeza lo que ha significado para ella estar conmigo durante esta larga empresa, porque soy consciente de toda la paciencia y el empeño que ha puesto de su parte. Lejos de nuestros hogares, ha sido para mí un sostén inestimable ante las adversidades, y compañía para disfrutar de tantas experiencias nuevas. A tí, Aida, te agradezco por querer ser testigo y protagonista en mi vida.

Índice general

Resumen	I
Summary	III
Resum	V
Agradecimientos	IX
Nomenclatura	XXIII
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.2. Organización de la Tesis	3
2. Introducción a la Mecánica de la Fractura	7
2.1. Introducción	7
2.2. Planteamiento del problema elástico	8
2.2.1. Ecuaciones gobernantes	9
2.2.2. Formulación variacional o forma débil	10
2.2.3. Planteamiento mediante elementos finitos	11
2.3. Campos de extremo de grieta en MFEL	13
2.4. Factor de Intensidad de Tensiones	16
2.4.1. Métodos locales	17
2.4.2. Métodos energéticos	17
2.5. Métodos numéricos para el modelado de grietas	24
2.6. Conclusiones	28
3. Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM)	29
3.1. Introducción	29
3.2. Revisión del desarrollo del método XFEM	30
3.3. Partición de la Unidad	33
3.4. Modelado de grietas mediante XFEM	34
3.4.1. Aproximación de elementos finitos enriquecidos	35
3.4.2. Funciones de enriquecimiento	38

3.5.	Integración numérica	43
3.6.	Área de enriquecimiento	47
3.7.	Evaluación del Factor de Intensidad de Tensión	50
3.8.	Descripción geométrica de grietas mediante <i>level sets</i>	50
3.8.1.	Level Set Method	51
3.8.2.	Fast Marching Method	54
3.8.3.	Acoplamiento entre XFEM y LSM	55
3.9.	Conclusiones	58
4.	Estimación y acotación de la norma energética del error en el MEF	61
4.1.	Introducción	61
4.2.	Medida y estimación del error de discretización	62
4.2.1.	Medida del error de discretización	62
4.2.2.	Estimación del error de discretización	64
4.3.	Estimadores de error basados en residuos	66
4.4.	Estimadores basados en técnicas de reconstrucción de la solución	69
4.4.1.	Estimador de error ZZ	70
4.4.2.	Técnicas de reconstrucción de la solución	74
4.4.3.	Técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR)	77
4.4.4.	Mejoras del SPR. La técnica SPR-C	84
4.5.	Técnicas de estimación del error en PUM	100
4.5.1.	Estimadores del error para GFEM	100
4.5.2.	Técnica XMLS	104
4.5.3.	Técnica XGR	108
4.5.4.	Estimadores residuales del error para XFEM	109
4.5.5.	Otros trabajos	110
4.6.	Cotas del error	111
5.	Estimación del error en XFEM. Técnica SPR-CX	121
5.1.	Introducción	121
5.2.	Técnica SPR-CX	122
5.2.1.	Evaluación directa de tensiones reconstruidas en puntos de integración	123
5.2.2.	Tratamiento del campo singular	124
5.2.3.	Cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad	126
5.2.4.	Formación de patches	127
5.2.5.	Minimización de la norma L_2 de $(\sigma^* - \sigma^h)$	128
5.3.	Resultados numéricos	129
5.3.1.	Ejemplo 1. Problema de Westergaard	129
5.3.2.	Validación de la solución de XFEM	134
5.3.3.	Índice de efectividad del estimador propuesto	139
5.3.4.	Convergencia del error	144
5.3.5.	Influencia de la precisión del FIT	147
5.3.6.	Efecto de la técnica de descomposición <i>singular+suave</i>	148
5.3.7.	Influencia del tamaño del área de descomposición	151

5.3.8. Precisión del campo reconstruido de tensiones σ^*	153
5.3.9. Imposición de condiciones de equilibrio	156
5.3.10. Condiciones tipo Mortar en el frente de grieta	159
5.3.11. Influencia del grado polinómico en el ajuste	164
5.3.12. Ejemplo 2. Placa infinita con una grieta inclinada sujeta a carga uniaxial	164
5.3.13. Comparación con el estimador XMLS	167
6. Cotas superiores del error en XFEM	173
6.1. Introducción	173
6.2. Tensiones estáticamente admisibles para cotas del error	174
6.3. Evaluación de los defectos introducidos en el equilibrio	175
6.4. Resultados numéricos	178
6.4.1. Precisión de la cota superior del error $\mathcal{E}_{UB,0}$	180
6.4.2. Precisión de la cota superior del error \mathcal{E}_{UB}	180
6.4.3. Efecto de los términos correctores de la falta de equilibrio	182
6.4.4. Efectividad de la cota superior $\mathcal{E}_{UB,2}$	185
6.4.5. Estimación de error de la solución reconstruida	189
6.5. Conclusiones	192
7. Conclusiones y trabajos futuros	195
7.1. Conclusión general y aportaciones	195
7.2. Trabajos futuros	198
A. Estimación y acotación del error en problemas singulares resueltos mediante el MEF	201
A.1. Introducción	201
A.2. Planteamiento del problema	201
A.3. Extracción del GSIF mediante integrales de dominio	203
A.4. Estimación del error	205
A.5. Cotas superiores del error	207
A.6. Resultados numéricos	207
A.6.1. Problema de una entalla en V	208
A.6.2. Índice de efectividad	209
A.6.3. Cotas superiores del error	210
A.7. Conclusiones	211
Bibliografía	213

Índice de figuras

2.1. Cuerpo con grieta interior sujeto a carga externas.	9
2.2. Transformación de coordenadas.	12
2.3. Modos de apertura de grieta.	14
2.4. Notación para la definición del campo de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.	16
2.5. Grieta en un dominio bidimensional. Contorno Γ_J usado en el cálculo de J	19
2.6. Funciones q de tipo piramidal (izq.) y plateau (der.) en dos dimensiones.	21
2.7. Mallas con grieta interior: (a) sin modelar la grieta, (b) con elementos que se alinean con la discontinuidad, (c) con nodos enriquecidos que tienen gdl adicionales.	25
3.1. Clasificación de nodos en XFEM por tipo de enriquecimiento.	38
3.2. Coordenadas polares usadas para evaluar las funciones de enriquecimiento de extremo de grieta	39
3.3. Discontinuidad en un problema unidimensional. Se representan las funciones de forma convencionales de elementos finitos.	41
3.4. Diferentes tipos de funciones de Heaviside.	42
3.5. Efecto de la función signo y la función signo desplazada en la interpolación mediante funciones de forma.	43
3.6. Cuadratura estándar de 2×2 puntos de Gauss.	44
3.7. Subdivisión de elementos intersecados. La interfase se indica en línea gruesa, las divisiones en subdominios en líneas discontinuas, y los puntos de integración con triángulos.	45
3.8. Transformación realizada en la integración casi-polar para funciones singulares en extremo de grieta.	46
3.9. La posición de los puntos de integración en el elemento de extremo de grieta cambia cuando la grieta se propaga. Este cambio de posición afecta los datos históricos para los problemas plásticos ya que los puntos de evaluación han cambiado.	46
3.10. Soporte nodal intersectado por la grieta y subdividido de manera uniforme mediante cuadriláteros.	47

3.11. Elementos seleccionados en el enriquecimiento topológico para dos mallas con diferente tamaño de elemento h . Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición.	48
3.12. Elementos seleccionados en el enriquecimiento geométrico para dos mallas con diferente tamaño de elemento h . Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición.	49
3.13. Enriquecimiento geométrico usando área fija de radio r_e	49
3.14. Representación de la función de <i>level set</i> φ que se interseca con el plano \mathbb{R}^2 en la curva $\Gamma(t)$	53
3.15. Clasificación de los nodos en el Fast Marching Method (SUKUMAR ET AL., 2003)	55
3.16. Representación de la funciones de <i>level set</i> para una grieta en 2D.	56
4.1. Patch de elementos para el nodo i	78
4.2. Cálculo de valores nodales superconvergentes para elementos lineales y cuadráticos.	82
4.3. Patches en la frontera del dominio con 1 ó 2 elementos.	82
4.4. Patches utilizados para la reconstrucción de tensiones en la interfase entre dos materiales.	83
4.5. Sistemas de referencia locales para patches en el interior y en la frontera del dominio	93
4.6. Criterio de difracción para introducir discontinuidades en la aproximación mediante XMLS.	106
5.1. Evaluación de σ_i^* en diferentes tipos de patches.	126
5.2. Formación de patches. Para elementos intersecados con la grieta se forman dos sub-patches, uno a cada lado de la grieta.	128
5.3. Problema de Westergaard. Placa infinita con grieta de longitud $2a$ sujeta a tracciones uniformes σ_∞ (biaxiales) y τ_∞ . Porción finita del dominio, Ω , modelada con EF.	130
5.4. Modo I: Modelo para grieta en placa infinita sometida a carga biaxial en el infinito ($\sigma_\infty = 100$, $\tau_\infty = 0$). $K_{I,ex} = 177.2453850905516$	132
5.5. Modo II: Modelo para grieta en placa infinita sometida a carga biaxial en el infinito ($\sigma_\infty = 0$, $\tau_\infty = 100$). $K_{II,ex} = 177.2453850905516$	132
5.6. Modo Mixto. Modelo para grieta en placa infinita sometida a carga biaxial en el infinito ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$). $K_{I,ex} = K_{II,ex} = 88.6226925452758$	133
5.7. Secuencia de mallas estructuradas con elementos cuadriláteros.	133
5.8. Secuencia de mallas no estructuradas con elementos cuadriláteros.	134
5.9. Secuencia de mallas estructuradas con elementos triangulares.	134
5.10. Secuencia de mallas no estructuradas con elementos triangulares.	135

5.11. Convergencia de la norma energética del error para el problema de Westergaard en Modo I y mallas estructuradas de elementos cuadriláteros lineales. Enriquecimiento topológico vs. enriquecimiento geométrico.	136
5.12. Distribución de la norma energética del error para el problema de Westergaard en Modo I en una malla de 3200 elementos. Enriquecimiento topológico vs. enriquecimiento geométrico.	136
5.13. Convergencia del Factor de Intensidad de Tensiones: a) Convergencia de K_I a $K_{I,ex}$, b) Evolución del error relativo de K_I	137
5.14. Error estimado en norma energética $\ \mathbf{e}_{es}\ $ para mallas estructuradas y no estructuradas con elementos CUAD4.	138
5.15. Error relativo del FIT para modos I y II, mallas estructuradas.	139
5.16. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas estructuradas con CUAD4. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).	140
5.17. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas no estructuradas con CUAD4. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).	140
5.18. Distribución de la norma energética del error para el problema en Modo I.	141
5.19. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para mallas estructuradas de elementos CUAD4.	142
5.20. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para mallas no estructuradas de elementos CUAD4.	144
5.21. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas estructuradas con TRI3. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).	145
5.22. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas no estructuradas con TRI3. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).	145
5.23. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para mallas estructuradas de elementos TRI3.	146
5.24. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para mallas no estructuradas de elementos TRI3.	147
5.25. Modo I con mallas estructuradas. Comparación de las velocidades de convergencia para $\ \mathbf{e}^*\ $ y $\ \mathbf{e}\ $	148
5.26. Modo I. Efectividad local D en los alrededores de la singularidad en una malla de 12800 elementos para distintos grados de precisión de K_I ($K_{I,ex} = 177.245385090556$).	149
5.27. Modo I y mallas estructuradas. Indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ con descomposición <i>singular+suave</i> (SPR-CX) y sin descomposición (SPR-C).	150
5.28. Modo I y mallas estructuradas. Error estimado en norma energética con descomposición <i>singular+suave</i> (SPR-CX) y sin descomposición (SPR-C).	150

5.29. Modo I y mallas estructuradas de elementos CUAD4. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para diferentes radios ρ con un radio de enriquecimiento de área fija $r_e = 0.5$	151
5.30. Modo I y mallas estructuradas de elementos CUAD4. Evolución del error estimado en norma energética $\ \mathbf{e}_{es}\ $ para diferentes radios ρ con un radio de enriquecimiento de área fija $r_e = 0.5$	152
5.31. Índice de efectividad local D en los alrededores del la singularidad en una malla con 12800 elementos para el problema en modo I, con $\rho = r_e$ y $\rho < r_e$	152
5.32. Modo I, malla estructurada 2. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.	154
5.33. Modo II, malla estructurada 2. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.	155
5.34. Modo mixto, malla estructurada 3. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.	156
5.35. Modo mixto, malla no estructurada 2. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.	157
5.36. Evolución de los errores en norma energética $\ \mathbf{e}\ $ y $\ \mathbf{e}^*\ $ para mallas estructuradas y no estructuradas de elementos CUAD4.	158
5.37. Índice de efectividad local D aplicando condiciones de equilibrio en patches (SPR-CX), y sin aplicar condiciones de equilibrio (SPR-X).	159
5.38. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para mallas estructuradas de elementos CUAD4.	160
5.39. Error exacto en σ_{yy} para: a) la solución de EF, b) equilibrado normal en el frente de grieta y c) equilibrado con mortar.	162
5.40. Índice de efectividad local D utilizando a) equilibrado normal en el frente de grieta, y b) equilibrado tipo mortar.	163
5.41. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ usando el equilibrado tipo mortar en el frente de grieta.	163
5.42. Índice de efectividad local D para diferentes grados de ajuste polinómico en patches, en una malla con 288 elementos en Modo II.	165
5.43. Evolución de la efectividad global θ para distintos esquemas de ajuste polinómico bajo diferentes modos de carga.	166
5.44. Problema de una placa con grieta inclinada bajo carga axial.	167
5.45. Distribución de la tensión de Von Mises σ_{vm} para la solución de elementos finitos σ^h y la solución reconstruida σ^* en el problema de una placa con una grieta inclinada.	167

5.46. Distribución en elementos del error estimado en norma energética $\ \mathbf{e}_{es}\ $ para el problema de una placa con una grieta inclinada.	168
5.47. Error estimado en norma energética $\ \mathbf{e}_{es}\ $ para el problema de una placa con una grieta inclinada.	168
5.48. Modo mixto, malla no estructurada 4. Índice de efectividad local D . . .	169
5.49. Modo mixto, mallas no estructuradas: a) Convergencia del error estimado en norma energética. b) Convergencia del error de la solución reconstruida.	170
5.50. Evolución de los indicadores globales θ , $m(D)$ y $\sigma(D)$ para modo mixto y mallas no estructuradas.	171
6.1. Evolución del estimador del error y la cota superior $\mathcal{E}_{UB,0}$ para modos I, II y modo mixto. CUAD4 en mallas estructuradas (izq.) y mallas no estructuradas (der.).	181
6.2. Evolución de las efectividades para el estimador del error, \mathcal{E}_{SPR-CX} , y la cota superior \mathcal{E}_{UB} usando el campo exacto del error en desplazamientos, para modos I, II y modo mixto. CUAD4 en mallas estructuradas (izq.) y mallas no estructuradas (der.).	182
6.3. Evolución del valor absoluto de los términos correctores del equilibrio en modos I, II y modo mixto. CUAD4 en mallas estructuradas (izq.) y mallas no estructuradas (der.).	184
6.4. Modos I, II y mixto para mallas estructuradas y no estructuradas, CUAD4. Evolución del índice de efectividad global para el error estimado \mathcal{E}_{SPR-CX} , y las cotas superiores del error \mathcal{E}_{UB} y $\mathcal{E}_{UB,2}$	186
6.5. Modos I, II y mixto para mallas estructuradas y no estructuradas, TRI3. Evolución del índice de efectividad global para el error estimado \mathcal{E}_{SPR-CX} , y las cotas superiores del error \mathcal{E}_{UB} y $\mathcal{E}_{UB,2}$	187
6.6. Evolución del índice de efectividad global para las estimaciones del error en el campo reconstruido \mathcal{E}_1^* , \mathcal{E}_2^* y para la cota superior \mathcal{E}_{UB}^* . . .	193
A.1. Sólido elástico con una entalla en forma de V	202
A.2. Evaluación de σ_i^* en diferentes tipos de patches.	206
A.3. Modelo geométrico para el problema de un entalla en forma de V. . .	208
A.4. Mallas 1 a 5 de la secuencia de refinamiento h-adaptativa.	209
A.5. Evolución del error estimado en norma energética.	210
A.6. Evolución del índice de efectividad global.	210
A.7. Evolución del índice de efectividad global para la cota superior del error utilizando distintos tipos de refinamiento.	211

Índice de tablas

3.1. Algoritmo para la actualización de las funciones de level sets en el modelado de crecimiento de grietas	58
4.1. Posibles funciones base usadas en la aproximación mediante MLS. . .	105
4.2. Algoritmo para la reconstrucción del campo de deformaciones mediante la técnica XMLS	107
4.3. Algoritmo para el cálculo de cotas superiores del error en una secuencia de mallas adaptativas	120
5.1. Índice de efectividad θ para mallas estructuradas de elementos CUAD4.	143
5.2. Índice de efectividad θ para mallas no estructuradas de elementos CUAD4.	143
5.3. Índice de efectividad θ para mallas estructuradas de elementos TRI3. .	143
5.4. Índice de efectividad θ para mallas no estructuradas de elementos TRI3.	143
5.5. Velocidad de convergencia media de la norma energética del error $\ \mathbf{e}_{es}\ $ para mallas estructuradas y no estructuradas con elementos CUAD4. .	146
6.1. Algoritmo para el cálculo de cotas superiores del error en una secuencia de mallas XFEM	179
6.2. Mallas estructuradas con elementos CUAD4. Efectividades para el estimador del error $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$ y las cotas superiores $\theta_{\text{UB},0}$, θ_{UB} , $\theta_{\text{UB},1}$ y $\theta_{\text{UB},2}$	188
6.3. Mallas no estructuradas con elementos CUAD4. Efectividades para el estimador del error $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$ y las cotas superiores $\theta_{\text{UB},0}$, θ_{UB} , $\theta_{\text{UB},1}$ y $\theta_{\text{UB},2}$	189
6.4. Mallas estructuradas con elementos TRI3. Efectividades para el estimador del error $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$ y las cotas superiores $\theta_{\text{UB},0}$, θ_{UB} , $\theta_{\text{UB},1}$ y $\theta_{\text{UB},2}$	190
6.5. Mallas no estructuradas con elementos TRI3. Efectividades para el estimador del error $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$ y las cotas superiores $\theta_{\text{UB},0}$, θ_{UB} , $\theta_{\text{UB},1}$ y $\theta_{\text{UB},2}$	191
A.1. Índice de efectividad θ para mallas con refinamiento uniforme y refinamiento h -adaptativo.	211

A.2. Índice de efectividad de la cota superior θ_{UB} para mallas con refinamiento uniforme y refinamiento h -adaptativo.	212
--	-----

Nomenclatura

Se resumen a continuación las notaciones y convenciones más relevantes usadas en el texto. Las matrices y vectores se representarán mediante caracteres en negrita. Las matrices se indicarán con letras mayúsculas, y los vectores con minúsculas. Se utilizarán caracteres en itálica para representar los nombres de las constantes y variables escalares.

b	Vector de fuerzas por unidad de volumen.
δ	Delta de Kronecker.
D	Matriz de elasticidad del material.
<i>D</i>	Efectividad local.
<i>E</i>	Módulo de Young.
ε	Campo de deformaciones.
$\ \mathbf{e}\ $	Error en norma energética.
F_ℓ	Funciones de enriquecimiento de extremo de grieta.
<i>G</i>	Tasa de liberación de energía.
Γ	Contorno del sólido.
<i>H</i>	Funciones de enriquecimiento de Heaviside.
<i>I</i>	Integral de interacción.
<i>J</i>	Integral J.
κ	Constante de Kolosov.
<i>K</i>	Factor de intensidad de tensiones.
K_I, K_{II}, K_{III}	Factor de intensidad de tensiones en modos I, II y III.
μ	Modulo de rigidez a cizalladura.
N	Funciones de forma.

n_e	Número de elementos de la malla.
n_n	Número de nodos de la malla.
n_{gdl}	Número de grados de libertad.
\mathbf{n}	Vector normal al contorno.
ρ	Radio de descomposición.
$\boldsymbol{\sigma}$	Campo de tensiones.
$\boldsymbol{\sigma}^h$	Campo de tensiones solución de EF.
$\boldsymbol{\sigma}^*$	Campo reconstruido de tensiones.
$\boldsymbol{\sigma}_{\text{sno}}$	Campo suave de tensiones.
$\boldsymbol{\sigma}_{\text{sing}}$	Campo singular de tensiones.
$\bar{\mathbf{t}}$	Vector de fuerzas por unidad de superficie.
θ	Efectividad global.
\mathbf{u}	Vector de desplazamientos.
\mathbf{u}^h	Vector de desplazamientos solución de EF.
ν	Coefficiente de Poisson.
U	Energía de deformación.
W	Densidad de energía de deformación.
\mathbf{x}	Vector de posición global.
$\check{\mathbf{x}}$	Vector de posición local.
Ω	Dominio del sólido.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de grietas mediante la Mecánica de la Fractura(MF) es primordial para cuantificar y predecir el comportamiento de estructuras bajo condiciones de servicio. La correcta evaluación de los parámetros que caracterizan los campos de desplazamientos y tensiones en las cercanías de la grieta se convierte en un aspecto fundamental del análisis ya que establece las condiciones para el crecimiento de grieta y finalmente el fallo estructural.

Desde sus inicios a mediados del siglo pasado, la MF ha evolucionado hasta cambiar de forma dramática nuestro entendimiento del comportamiento mecánico de los materiales. Su mayor impacto ha sido quizás el establecimiento de una nueva filosofía de diseño basada en la tolerancia al daño, la cual se ha consolidado como el estándar en las industrias aeroespacial y aeronáutica. Otras aplicaciones en la industria incluyen el diseño de estructuras, el diseño de piezas para fabricación en grandes series, *etc.* En las últimas décadas, la MF ha aprovechado de forma considerable el desarrollo de los métodos numéricos aplicados al análisis de la mecánica del sólido.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) constituye sin duda uno de los métodos numéricos más potentes para dar solución aproximada a un amplio rango de problemas en ingeniería, y ha sido utilizado durante mucho tiempo para evaluar la integridad estructural. Sin embargo, aunque el MEF es muy robusto y ha sido ampliamente desarrollado desde mediados del siglo pasado, sus características no le permiten representar adecuadamente el comportamiento real de ciertos tipos de problemas. En particular, el MEF resulta menos eficiente para modelar problemas que involucran discontinuidades o singularidades. Para modelar una grieta mediante el MEF es necesario utilizar una malla de elementos finitos que represente la geometría de la grieta, y recurrir a procedimientos especiales que permitan capturar el carácter singular de la solución en el extremo de grieta. Estos inconvenientes son aún mayores cuando se desea modelar la propagación de la grieta, ya que se debe adaptar la aproximación en cada etapa de crecimiento.

Con el propósito de subsanar dichas dificultades y aumentar el potencial del MEF,

en los últimos años se han desarrollado diferentes métodos numéricos basados en el concepto de la Partición de la Unidad estudiado por MELENK Y BABUŠKA (1996). En dichos métodos, la idea es enriquecer el espacio de aproximación de elementos finitos con funciones especiales que permitan representar la información conocida *a priori* del problema. Para el caso de una grieta, dichas funciones han de representar la discontinuidad que se introduce en el campo de desplazamientos, y la singularidad en el extremo de grieta.

Uno de estos nuevos métodos es el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM) desarrollado en sus inicios por BELYTSCHKO Y BLACK (1999). El método se basa en introducir funciones de enriquecimiento que añaden grados de libertad adicionales a la aproximación estándar de Elementos Finitos en problemas que contienen algún campo discontinuo o singular. Es decir, se enriquecen los elementos situados alrededor del extremo de grieta y a lo largo de sus caras, de manera que puedan representar la grieta sin modificar la discretización. Así, se evita además regenerar la malla a medida que la discontinuidad cambia su geometría, resultando en menores costes computacionales y menores errores inducidos. El XFEM constituye un importante avance en la resolución de problemas de la MF mediante técnicas de elementos finitos, y es hoy en día un área donde se realiza un intenso trabajo.

Por otra parte, cabe señalar que para la mayoría de problemas en ingeniería no es posible obtener expresiones analíticas del modelo matemático que permitan determinar el grado de precisión de la solución aproximada. En estos casos se recurre entonces a los denominados estimadores del error de discretización, los cuales permiten obtener una medida del grado de aproximación de la solución de EF a la solución exacta. Las técnicas de estimación del error *a posteriori* son usadas frecuentemente para evaluar la calidad de la solución de elementos finitos o para controlar procesos de refinamiento adaptativo. Uno de los estimadores del error más utilizados en el MEF es el estimador propuesto por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987), el cual se caracteriza por ser muy robusto y bastante sencillo de implementar en códigos de elementos finitos.

STROUBOULIS ET AL. (2006) indicaron que el desarrollo de técnicas de estimación de error para los métodos del tipo XFEM resulta de especial interés debido a la creciente importancia que tienen estos métodos tanto en el ámbito científico como en el ingenieril, más aún considerando el hecho de que dichos métodos suelen utilizar discretizaciones poco refinadas. Siguiendo esta línea, BORDAS Y DUFLOT (2007), RÓDENAS ET AL. (2008c), DUFLOT Y BORDAS (2008) han presentado los primeros estimadores del error para aproximaciones realizadas mediante XFEM.

En general, los estimadores del error de discretización pueden subestimar o sobrestimar la norma energética del error exacto. Sin embargo, en la práctica resulta de mayor interés poder garantizar que se ha alcanzado cierto nivel de precisión, por lo que resulta útil definir una cota superior del error que establezca un criterio de seguridad para aceptar la solución de EF. En este sentido, BABUŠKA ET AL. (1999) indicaron que es posible acotar el error dentro de un rango definido por una cota superior y una cota inferior.

1.1. Objetivos

El objetivo principal de la Tesis es *cuantificar el error de discretización cometido en problemas resueltos mediante el XFEM a través del desarrollo de estimadores del error y cotas superiores del error especialmente adaptados a la aproximación enriquecida.*

Para conseguir dicho objetivo se han planteado una serie de objetivos parciales, que se enumeran a continuación:

1. Realizar una revisión del Método Extendido de los Elementos Finitos y elaborar la implementación del método dentro de un código de elementos finitos, adecuándolo al modelado de problemas en el ámbito de la Mecánica de la Fractura.
2. Revisar las técnicas de estimación y acotación del error de discretización disponibles para el Método de los Elementos Finitos, analizando sus ventajas e inconvenientes con vistas a una posible adaptación al entorno XFEM.
3. Desarrollar un estimador del error de discretización para problemas de la Mecánica de la Fractura resueltos mediante el XFEM. El estimador debe tener en cuenta la discontinuidad de la aproximación a lo largo de las caras de grieta y la singularidad presente en el frente de la grieta.
4. Desarrollar una técnica eficiente de obtención de cotas superiores del error para problemas resueltos mediante el XFEM.
5. Validar mediante ejemplos numéricos las técnicas de estimación y acotación del error. Se han de utilizar problemas con solución de referencia conocida para poder valorar adecuadamente la precisión de los resultados.

1.2. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se revisan algunos conceptos fundamentales dentro del área de la Mecánica de la Fractura. En primer lugar, se presenta el problema elástico que gobierna el comportamiento de un sólido con una grieta. Se estudian las expresiones que representan los campos singulares en el extremo de grieta, y se introduce el concepto del Factor de Intensidad de Tensiones como parámetro caracterizante del proceso de fractura. Finalmente, se realiza un breve resumen de los métodos numéricos más utilizados para el modelado computacional de grietas.

En el Capítulo 3 se estudia el Método Extendido de los Elementos Finitos como técnica para modelar problemas de la Mecánica de la Fractura. El método se basa en enriquecer la aproximación de elementos finitos de modo que el espacio de la aproximación sea más cercano al espacio solución. Así, el problema se resuelve en un espacio más rico, que es capaz de representar mejor las características particulares de los problemas típicos de la MF. Para llevar a cabo el enriquecimiento de la aproximación, el XFEM aprovecha la propiedad de Partición de la Unidad de las funciones de forma convencionales de elementos finitos. A lo largo del capítulo se analizan aspectos

relevantes para la precisión y convergencia de la solución, como son por ejemplo, la integración numérica de los elementos enriquecidos y la selección de la parte del dominio que se debe enriquecer. En la parte final, se realiza un resumen de las técnicas de *level sets*, las cuales han sido utilizadas prácticamente desde los inicios del XFEM como herramientas para la caracterización de la geometría de la grieta dentro de la aproximación de elementos finitos.

El Capítulo 4 está dedicado a la estimación y acotación del error de discretización en formulaciones convencionales de elementos finitos. Debido a la aproximación que se hace de problemas de la mecánica del medio continuo mediante un modelo discreto de elementos finitos, aparece el denominado *error de discretización*. El capítulo comienza con la introducción de conceptos sencillos relativos a la medida y estimación del error. Posteriormente, se introducen los dos tipos principales de estimadores del error: i) estimadores basados en residuos, y ii) estimadores basados en la reconstrucción de la solución. Dentro de estos últimos se prestará especial atención al estimador del error *a posteriori* de ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987), el cual combinado con la técnica *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) (ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1992a) constituye uno de los estimadores del error más utilizados, y la base fundamental del trabajo realizado en esta Tesis. Seguidamente, se resumen algunos de los estimadores desarrollados hasta la fecha para métodos basados en la Partición de la Unidad. Finalmente, se presenta el concepto de acotación del error y se estudian algunas de sus características más importantes.

En el Capítulo 5 se trata el problema de la estimación del error en aproximaciones del tipo XFEM, y es en este capítulo donde se aborda la primera parte del objetivo principal de esta Tesis. Luego de una introducción a la problemática que plantea estimar el error en aproximaciones enriquecidas, se presenta el planteamiento de un estimador del error basado en las ideas de la técnica SPR, el cual ha sido especialmente adaptado al entorno XFEM. El estimador considera, entre otros aspectos, una técnica de descomposición para reconstruir la solución en problemas singulares y un procedimiento especial de ensamblado en patches para aproximaciones discontinuas. Asimismo, se considera la aplicación de restricciones al campo reconstruido de manera que se fuerce el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio. Al final del capítulo, se realiza la validación del estimador propuesto mediante una serie de ejemplos numéricos, así como también un estudio de la influencia de los distintos parámetros que afectan la calidad del campo reconstruido.

El Capítulo 6 trata sobre la acotación del error de discretización en aproximaciones del tipo XFEM. Como otra de las aportaciones de esta Tesis, en este capítulo se propone una técnica de obtención de cotas superiores del error, la cual está basada en el estimador propuesto en el capítulo anterior, y en la mejora de un procedimiento de evaluación de cotas superiores del error previamente disponible para entornos convencionales de elementos finitos. La técnica es validada mediante ejemplos numéricos al final del capítulo.

Por último, en el capítulo de Conclusiones se recogen las conclusiones generales y aportaciones originales que derivan del trabajo realizado en esta Tesis. Se destaca la

importancia de las técnicas desarrolladas, habiéndose formulado uno de los primeros estimadores del error para XFEM, y la primera técnica de acotación del error basada en la reconstrucción de la solución para XFEM. Asimismo, se indican los posibles trabajos futuros siguiendo la misma línea de investigación desarrollada en esta Tesis.

Capítulo 2

Introducción a la Mecánica de la Fractura

2.1. Introducción

La aparición de los conceptos fundamentales de la Mecánica de la Fractura (MF) se remonta hasta principios del siglo pasado. Observaciones experimentales y el desarrollo en la teoría de la elasticidad ayudaron a esbozar los aspectos fundamentales de la teoría de la Mecánica de la Fractura, la cual sirvió para explicar las diferencias significativas entre el comportamiento teórico de los modelos considerando el enfoque clásico de la Resistencia de Materiales y los resultados obtenidos experimentalmente. Dichas diferencias se atribuyeron a la existencia de *defectos internos* en el material que introducían cambios drásticos en la distribución del campo de tensiones alrededor de cada defecto o discontinuidad, haciendo que se produjera el daño por fractura a tensiones inferiores al límite de fluencia del material. GRIFFITH (1921) fue el primero en establecer una relación entre la resistencia a la fractura y el tamaño de la grieta, formulando un criterio de fallo en términos de la variación total de la energía durante el proceso de fractura, marcando con ello el comienzo de la Mecánica de la Fractura moderna.

La introducción de conceptos como el Factor de Intensidad de Tensiones, la tasa de liberación de energía, *etc.* cambió por completo la manera como se acostumbraba tratar los problemas de grietas. Gradualmente, se fueron desarrollando métodos energéticos globales, y se obtuvieron soluciones para problemas de la teoría clásica de la MF. Los métodos energéticos (que consideran la variación de la energía a medida que la grieta se propaga) permitieron a su vez extender la teoría de la MF al área de los problemas no lineales. La introducción de la integral J por RICE (1968) fue un avance importante que permitió que técnicas numéricas potentes, como es el caso del Método de los Elementos Finitos (MEF), fueran utilizadas posteriormente de manera eficiente

para evaluar las magnitudes de interés en problemas complejos de MF. La integral J fue definida para un sólido como una integral de contorno independiente del camino equivalente a la tasa de cambio de la energía potencial por unidad de longitud durante la propagación de grieta.

Hoy en día, la disciplina de la Mecánica de la Fractura es ampliamente utilizada en aplicaciones industriales donde el diseño tolerante al daño y la estimación de la vida a fatiga resultan críticas. Se pueden encontrar muchos ejemplos de dichas aplicaciones en las industrias aeroespacial y aeronáutica. En las últimas décadas, dicha disciplina ha aprovechado significativamente los avances en los métodos numéricos aplicados al análisis de la mecánica del sólido.

Uno de los enfoques más utilizados en las fases de diseño para resolver problemas en la industria es el de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL). Este enfoque se puede utilizar cuando el estado tensional presente en el componente es fundamentalmente elástico, y se asume la condición denominada *small scale yielding*. Esta condición implica que el tamaño de la zona plástica que se desarrolla alrededor del extremo de grieta se mantiene pequeño en comparación con las longitudes características del problema. Para problemas industriales esta consideración resulta conservadora, ya que la deformación plástica cerca del extremo de grieta consume energía que, en el caso elástico, estaría disponible para contribuir en el avance de la grieta. Esta característica justifica su uso para materiales con comportamiento frágil y materiales dúctiles con cargas que no sean excesivamente elevadas. En el desarrollo de este trabajo se considerará el enfoque de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL).

En la primera parte del presente capítulo se realiza la introducción del problema elástico que define el comportamiento de un sólido con una grieta. Posteriormente, se presentan las expresiones que definen los campos singulares alrededor del extremo de grieta, y se comentan otros aspectos relativos a la Mecánica de la Fractura. A continuación, se expone el concepto del Factor de Intensidad de Tensiones como parámetro caracterizante de los procesos de fractura, y se hace una breve revisión de los métodos existentes para su evaluación. Finalmente, se resumen los métodos numéricos más utilizados para el modelado computacional de grietas, y se presentan las conclusiones.

2.2. Planteamiento del problema elástico

En esta sección se resume la formulación de la mecánica del medio continuo que define el comportamiento de un cuerpo con una grieta interior. En la definición del problema elasto-estático lineal se ha considerado que el campo de desplazamientos es discontinuo a lo largo de las caras de grieta. Se indican las ecuaciones gobernantes correspondientes a la *forma fuerte* y a la *forma débil* del sistema de ecuaciones.

2.2.1. Ecuaciones gobernantes

Se considera un cuerpo con dominio Ω y contorno Γ que presenta una discontinuidad interior. El contorno del sólido Γ se divide en tres partes, Γ_u , Γ_t y Γ_c (con Γ_{c^+} y Γ_{c^-} para cada cara de la grieta) como se indica en la Figura 2.1. Se imponen condiciones de contorno esenciales (tipo Dirichlet) restringiendo los desplazamientos en el contorno Γ_u , y condiciones naturales (tipo Neumann) aplicando tracciones en el contorno Γ_t . La superficie de la grieta Γ_c se considera libre de carga.

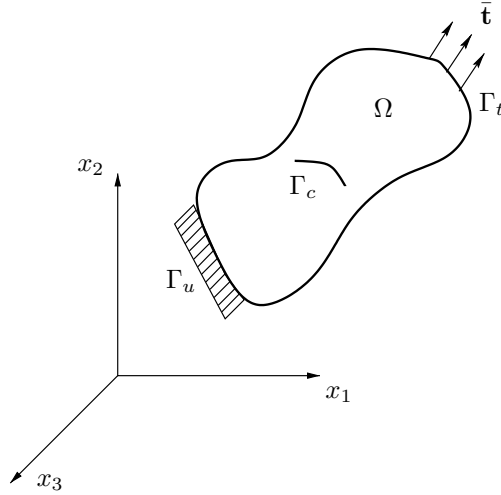


FIGURA 2.1. *Cuerpo con grieta interior sujeto a carga externas.*

Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno que definen la formulación diferencial para este problema se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0 & \text{en } \Omega \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \Gamma_t \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{en } \Gamma_c \\
 \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma_u
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde \mathbf{n} denota el vector normal unitario hacia el exterior del contorno, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de Cauchy, \mathbf{u} es el vector de desplazamientos para un punto del sólido $\mathbf{x} \in \Omega$, \mathbf{b} es el vector de fuerzas volumétricas por unidad de volumen que actúan sobre el cuerpo, $\bar{\mathbf{t}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ son las tracciones y desplazamientos impuestos sobre el contorno. Para el problema bidimensional la ecuación de equilibrio toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos las ecuaciones cinemáticas están definidas por la relación entre el tensor de deformación y el campo de desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{u} \quad (2.3)$$

Donde $\nabla_s = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$ es la parte simétrica del operador gradiente y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformación lineal. La relación constitutiva que gobierna el comportamiento mecánico del cuerpo, definida entre las tensiones y las deformaciones para un material elástico lineal, está dada por la ley de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Donde \mathbf{D} es el tensor de elasticidad de cuarto orden de la ley de Hooke. El tensor de elasticidad es simétrico y, si el comportamiento del material es isótropo, dependerá solamente del módulo de elasticidad del material, E , y del coeficiente de Poisson, ν .

2.2.2. Formulación variacional o forma débil

La forma débil, a diferencia de la forma fuerte, no requiere una continuidad fuerte del campo de variables. Obtener la solución exacta para la forma fuerte del sistema de ecuaciones es, por lo general, muy difícil para los problemas prácticos de ingeniería. La forma débil representada en forma integral requiere una continuidad más débil del campo de variables, por lo que resulta más apropiada para obtener aproximaciones de la solución.

Para plantear la formulación variacional del problema resumido en la Sección 2.2.1 se define un espacio de desplazamientos admisibles expresado como:

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in C^0 \text{ y discontinuo en } \Gamma_c, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u\} \quad (2.5)$$

Además, se define el espacio de variación admisible de los desplazamientos (desplazamientos virtuales) como:

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in C^0 \text{ y discontinuo en } \Gamma_c, \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma_u\} \quad (2.6)$$

Con estas definiciones, y teniendo en cuenta los desplazamientos virtuales \mathbf{v} y la Ecuación 2.1, se obtiene la forma débil de las ecuaciones de equilibrio expresada como:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (2.7)$$

Usando la relación constitutiva en la Ecuación 2.4 y las restricciones cinemáticas en su formulación débil, el problema variacional queda definido mediante la siguiente expresión:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.8)$$

siendo $a(\cdot, \cdot)$ la forma bilineal del problema y $l(\cdot)$ la forma lineal del mismo:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (2.9)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (2.10)$$

En BELYTSCHKO Y BLACK (1999) se muestra que la forma débil anterior es equivalente a la forma fuerte presentada en la Ecuación 2.1.

2.2.3. Planteamiento mediante elementos finitos

La formulación variacional presentada en el apartado anterior constituye la base para el desarrollo del Método de los Elementos Finitos. En los libros de ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000), BATHE (1996) y muchos otros se puede encontrar una explicación completa de los principios fundamentales del método y su aplicación para la resolución de problemas de la mecánica del medio continuo.

En este apartado se introducen conceptos fundamentales relativos al planteamiento del MEF para la resolución de problemas con pequeños desplazamientos, considerando comportamiento elástico lineal del material.

Considérese un dominio bidimensional en equilibrio Ω discretizado por medio de una malla de elementos finitos de tamaño h . El problema definido en la Ecuación 2.8 se puede plantear bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos como la resolución de un sistema lineal de ecuaciones expresado de la forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}^e \quad (2.11)$$

Donde \mathbf{u} es el campo solución de la aproximación asociado a los desplazamientos, \mathbf{K} representa una matriz de rigidez global que relaciona los desplazamientos con las fuerzas aplicadas, y \mathbf{f}^e son las fuerzas equivalentes en los nodos de la malla correspondientes a las deformaciones y tensiones iniciales, las fuerzas volumétricas y las fuerzas superficiales aplicadas.

De acuerdo a la metodología del MEF las coordenadas $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$ se interpolan a partir de los valores nodales $\mathbf{x}_i = \{x_i, y_i\}^T$ en el elemento tal que la aproximación se define como:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{x}_i \quad (2.12)$$

donde n es el número de nodos del elemento y \mathbf{N}_i es la matriz de funciones de forma del elemento correspondiente al nodo i :

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Las funciones de forma suelen definirse para un elemento de referencia usando coordenadas locales al elemento. Para el elemento cuadrilátero bilineal de la Figura 2.2 las funciones de forma en función del sistema de coordenadas locales (ξ, η) se definen como:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2} \quad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2} \quad (2.14)$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2} \quad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{2} \quad (2.15)$$

Utilizando la misma representación isoparamétrica de elementos finitos, el campo de desplazamientos $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}^T$ se interpola de manera análoga a partir de los valores de desplazamiento en los nodos del elemento:

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i \quad (2.16)$$

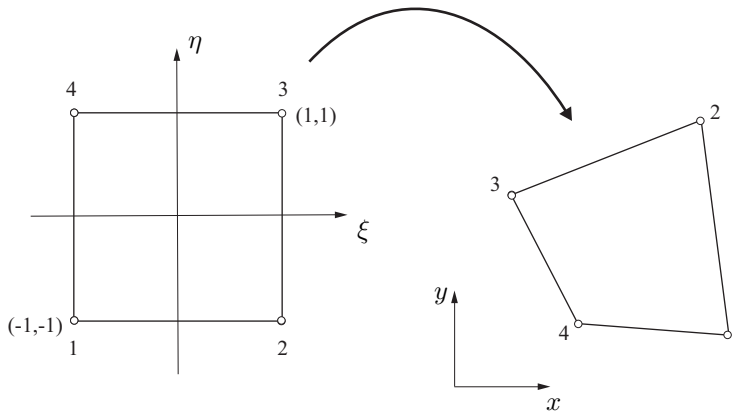


FIGURA 2.2. Transformación de coordenadas.

Asimismo, el campo de deformaciones se puede interpolar como:

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.17)$$

donde la matrix \mathbf{B}_i se define como la derivada de la matrix de funciones de forma \mathbf{N}_i respecto a las coordenadas globales:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Las funciones de forma dependen explícitamente de las coordenadas locales, por lo que resulta necesario utilizar una transformación de coordenadas para obtener \mathbf{B} . Usando la regla de la cadena se evalúan los términos de las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales (x, y) como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde \mathbf{J} es la matriz jacobiana de transformación de coordenadas definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Recordando la expresión en la Ecuación 2.12 se puede plantear la derivada de x respecto a ξ como:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \quad (2.21)$$

Los términos restantes se evalúan de manera similar. El determinante de la matriz jacobiana \mathbf{J} relaciona el elemento diferencial $d\xi d\eta$ con el elemento diferencial $dx dy$ en el sistema global.

La matriz de rigidez \mathbf{K}_e del elemento Ω_e se puede escribir entonces como:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.22)$$

donde \mathbf{D} representa la matriz constitutiva o matriz de propiedades del material que relaciona las tensiones con las deformaciones.

Una vez se tienen las matrices de rigidez en elemento, se ensambla la matriz de rigidez global \mathbf{K} y el vector de fuerzas equivalentes en nodos \mathbf{f}^e para posteriormente resolver el sistema lineal de la Ecuación 2.11.

2.3. Campos de extremo de grieta en MFEL

En esta sección se presenta una breve descripción de aspectos relevantes de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Primero, se define la grieta y se presenta el concepto de modo de carga. Posteriormente, se introducen los campos de extremo de grieta, y se comentan algunas de sus características.

Matemáticamente, una grieta se entiende como una línea de discontinuidad libre de carga (a menos que se establezca lo contrario) en dos dimensiones, o una superficie de discontinuidad libre de carga, no necesariamente plana, en tres dimensiones.

Las grietas en un sólido pueden estar solicitadas de tres modos diferentes, como se ilustra en la Figura 2.3:

- Modo de apertura (modo I)
- Modo de deslizamiento o cortadura (modo II)
- Modo de desgarramiento (modo III)

Los campos de tensiones, de deformaciones y de desplazamientos en el extremo de la grieta pueden ser representados como una combinación lineal de aquellos campos obtenidos individualmente para cada uno de los diferentes modos.

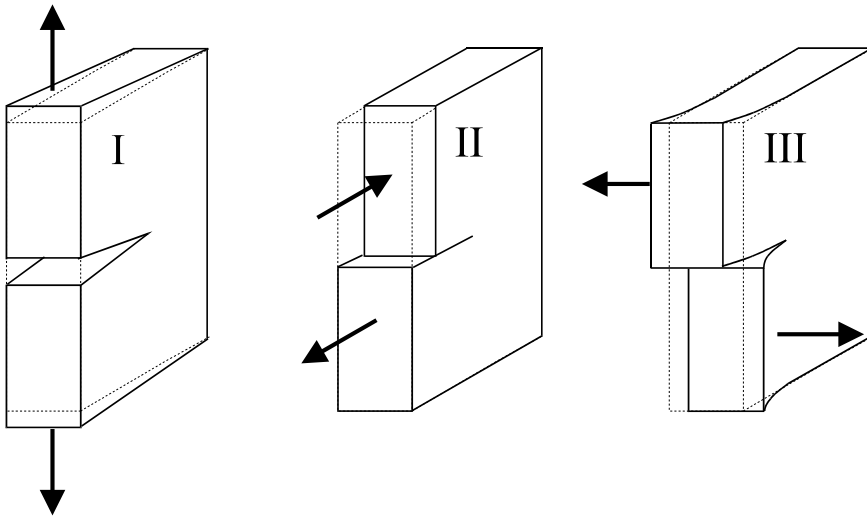


FIGURA 2.3. *Modos de apertura de grieta.*

En Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) los problemas se caracterizan por presentar un comportamiento singular en deformaciones y tensiones en el extremo o frente de grieta. Las expresiones que representan el primer término (término singular) del desarrollo asintótico de la solución en desplazamientos y en tensiones se pueden encontrar en textos introductorios a la Mecánica de la Fractura (KANNINEN Y POPELAR, 1985). Para cada modo de carga, la magnitud del campo de tensiones está definida por un escalar K denominado Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Existe un FIT para cada modo de carga, que se denotarán como K_I , K_{II} y K_{III} para los Modos I, II y III respectivamente. Las expresiones de los desplazamientos, asociadas al término singular del campo asintótico de extremo de grieta, para el caso general en tres dimensiones de un sólido con comportamiento elástico, lineal e isótropo, utilizando la nomenclatura de la Figura 2.4 son:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\phi}{2} (\kappa - \cos \phi) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} (2 + \kappa + \cos \phi) \quad (2.23a)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} (\kappa - \cos \phi) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\phi}{2} (2 - \kappa - \cos \phi) \quad (2.23b)$$

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad (2.23c)$$

Y para las tensiones:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\phi}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \left(2 + \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \right) \quad (2.24a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\phi}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \quad (2.24b)$$

$$\sigma_{33} = 0 \text{ (tensión plana)} \quad ; \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \text{ (deformación plana)} \quad (2.24c)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\phi}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \right) \quad (2.24d)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad (2.24e)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\phi}{2} \quad (2.24f)$$

donde r y ϕ representan coordenadas polares respecto al extremo de grieta, μ es el módulo de rigidez a cizalladura y κ la constante de Kolosov, definidas en función de parámetros de material E (módulo de Young) y ν (coeficiente de Poisson) según las expresiones:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{en deformación plana} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en tensión plana} \end{cases} \quad (2.25)$$

Es posible expresar la Ecuación 2.24 para las componentes de tensión en coordenadas polares σ_{rr} , $\sigma_{r\phi}$, $\sigma_{\phi\phi}$ como:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\phi}{2} \left(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{5}{4} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \right) \quad (2.26a)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\phi}{2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \right) \quad (2.26b)$$

$$\sigma_{r\phi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \right) \quad (2.26c)$$

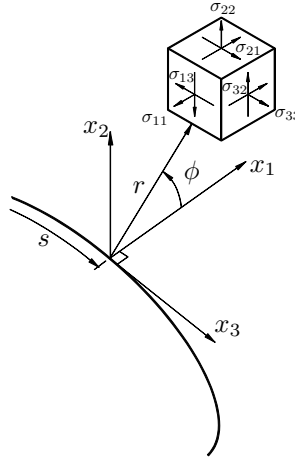


FIGURA 2.4. Notación para la definición del campo de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.

En las expresiones presentadas anteriormente, los campos de tensiones son singulares debido al término \sqrt{r} y los FIT pueden considerarse como sus parámetros caracterizantes, los cuales indican la amplitud de los campos singulares de tensión.

2.4. Factor de Intensidad de Tensiones

A mediados del siglo pasado se introdujo el concepto del Factor de Intensidad de Tensiones, K , como una medida de la intensidad de la singularidad que sirve de parámetro caracterizante de la severidad de la grieta. Así, se indicó que para componentes elásticos cargados del mismo modo, los campos de tensiones alrededor de un extremo de grieta estaban distribuidos de manera similar, y $K \propto \sigma\sqrt{\pi r}$ controlaba el valor local de la tensión.

Los factores de intensidad de tensiones asociados con cada uno de los tres modos independientes de apertura de grieta tienen unidades de $Pa\sqrt{m}$ en el sistema métrico, y se definen mediante las siguientes expresiones:

$$K_{\text{I}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22}(r, 0) \sqrt{2\pi r} \quad (2.27)$$

$$K_{\text{II}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{12}(r, 0) \sqrt{2\pi r} \quad (2.28)$$

$$K_{\text{III}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{23}(r, 0) \sqrt{2\pi r} \quad (2.29)$$

Se puede demostrar que el valor del FIT para cada uno de los modos de apertura depende de la carga externa aplicada definida por una tensión σ_0 y la longitud de la grieta a . De esta manera, en general se puede escribir:

$$K = C\sigma_0\sqrt{\pi a} \quad (2.30)$$

Donde C es un factor geométrico que depende del modo de apertura y tipo de carga. Para una placa de dimensiones infinitas sometida a una tensión σ_0 y con una grieta transversal de longitud $2a$ el valor de la constante es $C = 1$ y , por lo tanto,

$$K = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.31)$$

A partir de la teoría de la elasticidad es posible encontrar los valores del Factor de Intensidad de Tensiones para otros casos simples. Sin embargo, para la mayor parte de los problemas prácticos en ingeniería es necesario recurrir a métodos numéricos tales como el MEF, el Método de Elementos de Contorno (*Boundary Element Method*, BEM) o más recientemente métodos sin malla, que permitan aproximar el valor de K .

Existen numerosas técnicas de postprocesamiento de la solución numérica que, siguiendo planteamientos locales o globales (energéticos), son utilizadas habitualmente para la extracción de los FITs (BANKS-SILLS, 1991) o, de manera equivalente, para la evaluación de la tasa de liberación de energía G .

2.4.1. Métodos locales

Los *métodos directos o locales* estiman un valor de K a partir de la solución obtenida alrededor del extremo de grieta. Estas técnicas requieren generalmente un elevado grado de refinamiento de la malla de elementos finitos, muchas veces combinado con el uso de elementos singulares, ya que su precisión está basada en la correcta representación de los campos asintóticos alrededor del extremo de grieta. A continuación se indican algunos de los métodos locales más utilizados para la obtención del FIT (GINER, 2001):

- Extrapolación de desplazamientos y tensiones.
- Técnica de correlación de desplazamientos (DCT).
- Método de las fuerzas nodales.
- Técnica de desplazamiento en los nodos *quarter point* (QPDT).
- Ajuste por mínimos cuadrados.

2.4.2. Métodos energéticos

Los *métodos energéticos o indirectos* son considerados los métodos más precisos y eficientes para el cálculo del FIT en MFEL (BANKS-SILLS, 1991, LI ET AL., 1985). A diferencia de los métodos directos, se caracterizan por evaluar la tasa de liberación de energía G , con la que posteriormente se obtiene una estimación de K .

Considerando que el estudio que nos ocupa en esta tesis está relacionado con la estimación del error cometido en aproximaciones del tipo XFEM, resulta relevante destacar

que los métodos energéticos presentan ventajas importantes frente a los métodos locales en cuanto a la estimación del error de discretización inducido en la evaluación de K , entre las que sobresalen dos principales:

- En la evaluación de los parámetros energéticos globales interviene la solución del problema en zonas alejadas del extremo de grieta, donde el campo solución de la aproximación es más suave y, consecuentemente, es evaluado con mayor exactitud mediante MEF. El carácter global de los métodos energéticos favorece la obtención de resultados precisos con mallas relativamente más bastas, sin necesidad de realizar mayores refinamientos en las inmediaciones de los puntos singulares.
- Los métodos energéticos permiten estimar con precisión el error de discretización cometido en relación con parámetros caracterizantes propios de MFEL como son K , G o J (ver STROUBOULIS ET AL., 2000a, AINSWORTH Y ODEN, 2000).

Entre los métodos indirectos que se pueden encontrar en la bibliografía cabe destacar los siguientes:

- Diferencias finitas de la energía potencial de deformación elástica U .
- Método de la derivada de la matriz de rigidez.
- Método de las funciones de extracción.
- Método del cierre virtual de grieta (VCCT)
- Integrales de contorno (integral J y otras integrales).
- Método de la integral de dominio equivalente (EDI)

Entre estos, los métodos basados en integrales de dominio (como por ejemplo el método EDI o integral de dominio equivalente a la integral J) permiten una fácil implementación en códigos de elementos finitos, resultando en general muy atractivos para su utilización en entornos XFEM.

Integral de contorno J

Como se ha mencionado anteriormente, el cálculo de los parámetros que caracterizan los procesos de fractura mediante la correcta representación de la solución en cercanías de la singularidad suele presentar dificultades. Por esta razón, RICE (1968) y CHEREPANOV (1967) propusieron, independientemente, la conocida integral J como medio para calcular la tasa de liberación de energía G a través de una integral de contorno evaluada sobre un camino que circunscribe la singularidad. Aunque la formulación original de la integral J estaba limitada a problemas sin tensiones o deformaciones internas, sin cargas en caras de grieta, *etc.*, desarrollos posteriores han extendido la formulación a situaciones más complejas. La propiedad de independencia del camino de la integral J permite la evaluación de la tasa de liberación de energía de forma muy eficiente a partir de soluciones de elementos finitos.

Se asume que el sólido homogéneo está en equilibrio sin fuerzas por unidad de volumen, las caras de grieta libres de carga, que las deformaciones y rotaciones son suficientemente pequeñas, se considera también un comportamiento elástico del material. Sea Γ_J un contorno cualquiera que rodea el extremo de grieta, definido en sentido antihorario desde una cara de grieta hasta la otra, sea \mathbf{n} el vector unitario normal a Γ_J , orientado según se indica en la Figura 2.5. La integral de contorno J está dada por la expresión (RICE, 1968):

$$J = \int_{\Gamma_J} \left(W dx_2 - \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma_J \right) = \int_{\Gamma_J} \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathbf{n}_j d\Gamma_J \quad (2.32)$$

en la que W es la energía de deformación por unidad de volumen, $\sigma_{ij} \mathbf{n}_j$ es el vector de tracciones normal al contorno, δ_{1j} es la delta de Kronecker y u es el vector de desplazamientos.

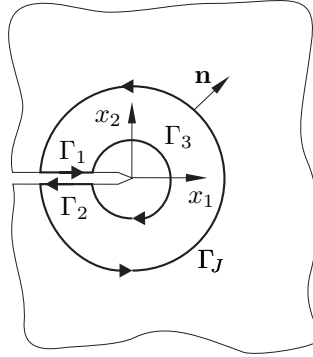


FIGURA 2.5. Grieta en un dominio bidimensional. Contorno Γ_J usado en el cálculo de J .

La energía de deformación W está definida como:

$$W(x_1, x_2) = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.33)$$

donde ε_{ij} es el tensor de deformaciones.

La propiedad de la integral J de ser *independiente del camino* Γ_J es posiblemente la característica más importante en cuanto a su utilidad para evaluar las magnitudes de interés en MFEL. En concreto, es posible evaluar J utilizando caminos Γ_J alejados de la influencia de la singularidad, donde la aproximación de la solución es más suave y suele ser estimada con mayor precisión cuando se utilizan métodos numéricos. Dicha propiedad se verifica aplicando el teorema de Green-Gauss para integrales de línea en caminos cerrados, bajo la condición de que el dominio encerrado por el contorno $\Gamma = \Gamma_J + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, escogido convenientemente, esté libre de singularidades.

Físicamente, la integral J puede interpretarse como la energía que fluye a través del contorno Γ_J por unidad de avance de grieta. En otras palabras, su valor es igual al de

la tasa de liberación de energía G . Reduciendo el contorno Γ_J al extremo de grieta se muestra que J es la energía disponible para el crecimiento de la grieta bajo condiciones elásticas. Se puede demostrar fácilmente que la evaluación de la integral J a lo largo de un contorno alrededor del extremo de grieta representa el cambio en la energía potencial para una extensión virtual de la grieta da :

$$J = -\frac{d\Pi}{da} \quad (2.34)$$

siendo equivalente a la definición de la tasa de liberación de energía para el problema elástico lineal y, por lo tanto, $G = J = -\partial\Pi/\partial a$.

La tasa de liberación de energía para el caso general de problemas en modo mixto en dos dimensiones se puede escribir como (ANDERSON, 1995, KANNINEN Y POPELAR, 1985):

$$G = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.35)$$

donde E' está definida como:

$$E' = \begin{cases} E & \text{para tensión plana} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{para deformación plana} \end{cases} \quad (2.36)$$

siendo E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson. Por lo tanto, la relación entre G y J en dos dimensiones puede expresarse como:

$$G = J = \int_{\Gamma_J} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathbf{n}_j d\Gamma_J = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.37)$$

Fuera del ámbito de la MFEL el concepto de G deja de ser válido. Sin embargo, la Ecuación 2.32 puede también ser utilizada para evaluar la tasa de liberación de energía por unidad de crecimiento de grieta en problemas con comportamiento elástico no lineal. Esta importante característica permite la generalización de G mediante la integral J a la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP). Lo anterior, unido a la facilidad para estimar J experimentalmente, ha contribuido a la extensa aplicación de este método en las últimas décadas.

Integral de Dominio Equivalente, EDI

LI ET AL. (1985) propusieron la Integral de Dominio Equivalente (*Equivalent Domain Integral*, EDI) como una técnica alternativa para la evaluación de la integral J vista en la Ecuación 2.32. De acuerdo a los autores, la integral J se puede expresar como:

$$J = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W\delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.38)$$

donde u_i es el campo de desplazamientos en dirección x_i (sistema coordenado local en el extremo de grieta con x_1 paralelo a las caras de grieta, ver Figura 2.5), δ_{1j} es la delta de Kronecker y q es una función de ponderación arbitraria y continua que debe valer 0 en el contorno exterior del dominio de extracción y 1 en el extremo de grieta.

En la Figura 2.6 se representan dos tipos de funciones q propuestas por SHIH ET AL. (1986) para ser utilizadas en aproximaciones de elementos finitos, una tipo piramidal y una tipo plateau. En ambos casos las funciones son continuas y satisfacen las restricciones anteriormente mencionadas. Para el tipo de problema en consideración, donde las hipótesis de carga son las asociadas a una integral independiente del camino, la integral de la Ecuación 2.38 se evalúa solo en la regiones del dominio Ω donde el valor de q no es constante. Es decir, solo contribuyen al valor de la integral los elementos donde $\partial q / \partial x_j \neq 0$. Por consiguiente, la elección de una función tipo plateau presenta la ventaja de que se puede evaluar la integral en regiones alejadas de las zonas con altos gradientes (zonas dominadas por la singularidad), donde se sabe que el campo solución es más preciso. En contraposición, disminuye el área del dominio que contribuye al computo de la integral.

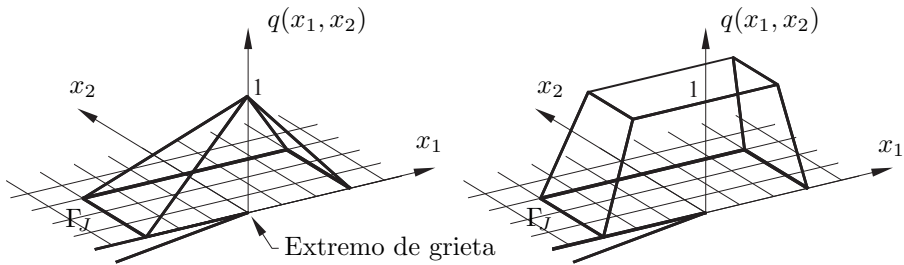


FIGURA 2.6. Funciones q de tipo piramidal (izq.) y plateau (der.) en dos dimensiones.

El valor de q dentro del dominio del elemento puede interpolarse como:

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) q_i \quad (2.39)$$

donde n es el número de nodos del elemento, q_i son los valores nodales de q y N_i son las funciones de forma del elemento. La evaluación de la integral J se puede escribir entonces como:

$$J = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{g=1}^{n_{pg}} \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} |\mathbf{J}| \right]_g H_g \quad (2.40)$$

donde H_g son los correspondientes pesos de los n_{pg} puntos de integración y $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana \mathbf{J} de la transformación de coordenadas.

Así, la integral de contorno de la Ecuación 2.32 ha sido reemplazada por una integral de área equivalente, la cual se adecua más a aproximaciones de elementos finitos.

Integral de Interacción I

En la resolución de problemas en modos combinados de carga es necesario obtener estimaciones independientes para cada uno de los valores del FIT. Esto es, para problemas en modo mixto de apertura de grieta en dos dimensiones se han de obtener estimaciones para K_I y K_{II} . No obstante, la integral J y otros métodos energéticos brindan únicamente una estimación global total. Diversos autores han propuesto diferentes métodos para separar los modos cuando se evalúan integrales de contorno, generalmente restringidos a 2D. Entre estos métodos se destacan:

- Método de la integral de interacción.
- Método de descomposición de campos.
- Método de funciones de extracción.

Por su interés para esta tesis, se resume a continuación la formulación del Método de la Integral de Interacción.

Se consideran dos estados diferentes e independientes para el sólido bajo la suposición de comportamiento elástico lineal. El estado 1 corresponde al estado actual $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_{ij}^{(1)})$, y el estado 2 es un estado auxiliar $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_{ij}^{(2)})$. La integral J para la suma de los dos estados queda:

$$J^{(1,2)} = \int_{\Gamma_J} \left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)})\delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial(u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right) \mathbf{n}_j d\Gamma_J \quad (2.41)$$

Tras expandir y reordenar términos se obtiene la expresión (CHEN Y SHIELD, 1977):

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (2.42)$$

donde $I^{(1,2)}$ representa la integral de interacción para los estados 1 y 2 que contiene los términos cruzados (YAU ET AL., 1980, SHIH Y ASARO, 1988)

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma_J} \left(W^{(1,2)}\delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \mathbf{n}_j d\Gamma_J \quad (2.43)$$

siendo $W^{(1,2)}$ la energía de deformación en términos de los productos escalares:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (2.44)$$

A partir de la Ecuación 2.35 se puede escribir para cada uno de los campos:

$$J^{(1)} = \frac{1}{E'} \left(\left(K_I^{(1)} \right)^2 + \left(K_{II}^{(1)} \right)^2 \right) \quad J^{(2)} = \frac{1}{E'} \left(\left(K_I^{(2)} \right)^2 + \left(K_{II}^{(2)} \right)^2 \right) \quad (2.45)$$

De manera análoga se puede escribir:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(2)} K_{II}^{(1)}) \quad (2.46)$$

Escogiendo convenientemente el estado 2 como el primer término del desarrollo del campo asintótico en Modo I con $K_I^{(2)} = 1$ y $K_{II}^{(2)} = 0$ se obtiene de la Ecuación 2.46 el FIT en Modo I en términos de la integral de interacción:

$$K_I = \frac{E'}{2} I^{(1,aux. Modo I)} \quad (2.47)$$

De manera semejante, se toma $K_{II}^{(2)} = 1$ y $K_I^{(2)} = 0$ para obtener el FIT en Modo II:

$$K_{II} = \frac{E'}{2} I^{(1,aux. Modo II)} \quad (2.48)$$

La evaluación numérica de la integral de contorno en la Ecuación 2.43 resulta siempre más laboriosa y compleja que la evaluación de su integral de área equivalente. Por consiguiente, resulta adecuado expresar el cálculo de la integral de interacción en forma de una Integral de Dominio Equivalente, obtenida a partir de la aplicación del teorema de Gauss o de la divergencia a la formulación de la integral de contorno (LI ET AL., 1985).

La integral de interacción de la Ecuación 2.43 puede reescribirse entonces en su forma de Integral de Dominio Equivalente (EDI) como:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.49)$$

De nuevo, en la Ecuación 2.49 los campos indicados con el superíndice (1) constituyen los campos del problema a resolver, y los indicados con (2) son los campos auxiliares utilizados, que representan los campos asintóticos para los Modos I o II, u_i es el campo de desplazamientos en dirección x_i (sistema coordenado local en el extremo de grieta con x_1 paralelo a las caras de grieta, ver Figura 3.13), δ_{1j} es la delta de Kronecker y q es la función de ponderación arbitraria y continua que debe valer 0 en el contorno exterior del dominio de extracción y 1 en el extremo de grieta.

Es importante remarcar que con el fin de obtener la Ecuación 2.49 se asume que las caras de grieta son rectas y libres de carga. ATLURI Y KOBAYASHI (1986) presentan de manera clara un resumen de las condiciones bajo las cuales es aplicable el uso de la integral de contorno definida por RICE (1968) para el cálculo de los parámetros caracterizantes de la grieta. Para casos más generales, como por ejemplo en problemas con grietas no rectas, estas consideraciones deben ser tenidas en cuenta cuando se evalúe la precisión del FIT. Se han desarrollado otras formas de la integral de dominio para grietas curvas en 2D. Ver por ejemplo el trabajo de LORENTZON Y ERIKSSON (2000) en integrales independientes del camino para grietas en forma de arco circular.

2.5. Métodos numéricos para el modelado de grietas

A lo largo del tiempo se han propuesto diferentes estrategias para abordar el problema del modelado de grietas con el fin de obtener estimaciones de la vida a fatiga de componentes con un diseño crítico para la seguridad, como pueden ser fuselajes de aeronaves, recipientes a presión y estructuras civiles. Para la simulación de problemas que involucran la creación y propagación de grietas se han utilizado técnicas analíticas, semi-analíticas y técnicas numéricas tales como el Método de los Elementos Finitos, el Método de Elementos de Contorno, y recientemente numerosos métodos sin malla. Cada una de estas técnicas presenta diferentes ventajas e inconvenientes en el tratamiento de los distintos aspectos relativos a la simulación. Sin embargo, la obtención de los parámetros que caracterizan la fractura en diseños complejos sigue siendo una tarea que presenta cierta dificultad.

En el ámbito industrial actual, el Método de los Elementos Finitos es sin duda uno de los métodos numéricos más ampliamente utilizados para resolver problemas de MFEL. Siendo una técnica muy robusta, y con virtualmente ninguna limitación para resolver problemas complejos, el MEF constituye la herramienta ideal para analizar criterios de fallo y determinar parámetros fundamentales de la MFEL como es el caso del Factor de Intensidad de Tensiones. En particular, este trabajo se centrará en las técnicas numéricas basadas en el MEF, utilizadas como base para la posterior extensión al Método Extendido de los Elementos Finitos.

El primer problema cuando se desea modelar una grieta está ligado al hecho de que, para evaluar el campo de tensiones en un cuerpo que presenta una grieta, se requiere considerar la discontinuidad que aparece en el campo como consecuencia de la misma, Figura 2.7(a). En las técnicas estándar de elementos finitos dicha discontinuidad es tratada mediante el uso de mallas conformes a la geometría de la grieta, Figura 2.7(b). De esta manera, la discontinuidad se modela automáticamente en el campo de desplazamientos a lo largo de la grieta. Dicho planteamiento resulta extremadamente simple para modelar grietas predefinidas a lo largo de los contornos entre elementos. Sin embargo, se torna más complejo si se desea modelar procesos de propagación más generales ya que requiere remallar la geometría. Para modelar la propagación de grietas, es posible utilizar procesos adaptativos que utilicen algoritmos de remallado local en las zonas del frente de grieta. En todo caso, el uso de mallas conformes a la geometría de la grieta representa un mayor coste computacional en la generación de las mallas, más aún, si se considera el modelado de múltiples configuraciones de grieta o el crecimiento de una grieta a lo largo del tiempo.

Un segundo problema presente en el modelado de grietas reside en la naturaleza singular del campo asintótico de extremo de grieta. A fin de capturar dicha singularidad mediante el uso de técnicas convencionales de elementos finitos, son necesarias mallas con una alta densidad de elementos en cercanías del extremo de grieta. Esto conlleva una labor tediosa en aplicaciones reales, donde se modelan geometrías complejas o en 3D.

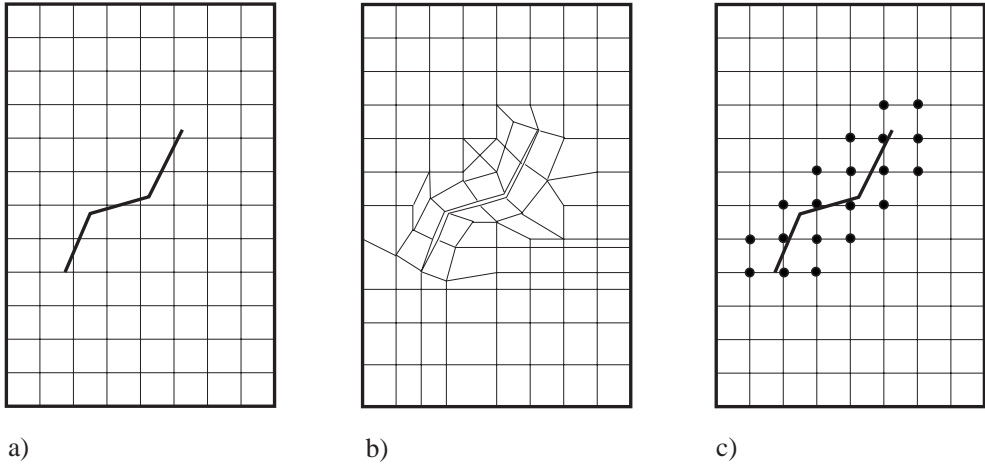


FIGURA 2.7. Mallas con grieta interior: (a) sin modelar la grieta, (b) con elementos que se alinean con la discontinuidad, (c) con nodos enriquecidos que tienen gdl adicionales.

Los elementos singulares (BENZLEY, 1974, HENSHELL Y SHAW, 1975, AKIN, 1976, BARSOUM, 1976, INGRAFFEA Y MANU, 1980) fueron desarrollados con el fin de representar de forma adecuada el comportamiento singular del problema en la zona del extremo de grieta. De esta manera se puede disminuir el alto grado de refinamiento requerido con elementos estándar, logrando a su vez una estimación muy precisa de los parámetros de fractura. Sin embargo, los elementos singulares no son capaces de representar la discontinuidad introducida por la grieta, por lo que resulta necesario utilizarlos con aproximaciones de EF adaptadas a la geometría de la grieta. Antes del desarrollo de la técnica XFEM, el uso de formulaciones de EF incluyendo elementos singulares era el procedimiento más utilizado para el análisis de fallo de estructuras mediante la MFEL.

El modelado del crecimiento de grietas usando ya sea elementos finitos (MEF) o elementos de contorno con técnicas de remallado ha sido estudiado extensamente (GERSTLE ET AL., 1987, 1988, MARTHA ET AL., 1993, CARTER ET AL., 2000). NISHIOKA Y ATLURI (1983), VIJAYAKUMAR Y ATLURI (1981) han aplicado la técnica alternante mediante EF, basada en el método alternante de Schartz-Neumann para problemas de MFEL en 3D, y posteriormente para grietas no planas (NIKISHKOV ET AL., 2001).

El método de las dislocaciones continuas usado por XU Y ORTIZ (1993), supone el cálculo de las tracciones a aplicar sobre caras de grieta para provocar su cierre mediante una ecuación integral singular, y resulta especialmente indicado para el análisis de grietas de pequeña longitud. El método de la ecuación de la integral de contorno (*Boundary Integral Equation Method*, BIEM) (CRUSE, 1988), el método de fuerzas volumétricas (MURAKAMI Y NEMAT-NASSER, 1982), y métodos basados en extensión virtual de la grieta (XU ET AL., 1998) permiten una evaluación precisa de los parámetros que caracterizan la fractura en 3D. Se han desarrollado formulaciones

discontinuas de elementos finitos basadas en el *Strong Discontinuous Approach* (SDA) introducido por SIMO ET AL. (1993), OLIVER (2000), el cual utiliza las ecuaciones constitutivas que relacionan las tensiones con las deformaciones en un medio continuo, y a su vez, considera las relaciones cinemáticas discontinuas inducidas por la aparición de saltos en el campo de desplazamientos. Entre el grupo de los métodos sin malla (*meshless methods*) destaca el denominado *Element-Free Galerkin* (EFG) propuesto por BELYTSCHKO ET AL. (1994), el cual ha sido utilizado con éxito para resolver problemas estáticos con grietas en 2D y 3D (SUKUMAR ET AL., 1997) y problemas dinámicos (KRYSL Y BELYTSCHKO, 1999) con crecimiento de grieta. Dentro del mismo grupo cabe mencionar el método local sin malla Petrov-Galerkin (MLPG) (ATLURI Y ZHU, 2000), el *smoothed particle hydrodynamics* (SPH) (BELYTSCHKO ET AL., 1996), el *finite point method* (FPM) (OÑATE ET AL., 1996), el *reproducing kernel particle method* (RKPM) (LIU ET AL., 1995), los métodos *hp-Clouds* (hpCM) (DUARTE Y ODEN, 1996a,b), y el *equilibrium on line method* (ELM) (SADEGHIRAD Y MOHAMMADI, 2007).

No obstante, los métodos indicados anteriormente pueden diferir considerablemente del MEF, el cual es el estándar en aplicaciones comerciales, o requieren del uso de mallas conformes a la geometría de la grieta. Esto último resulta particularmente complejo en modelos en 3D donde, en general, se tienen grietas representadas como superficies no planas, y los parámetros característicos de la fractura varían a lo largo del frente de grieta.

A finales de la década de los noventa, BELYTSCHKO Y BLACK (1999), MOËS ET AL. (1999) presentan los primeros desarrollos del Método Extendido de los Elementos Finitos. Esta nueva técnica permite resolver problemas con grietas que se encuentran ubicadas de manera arbitraria dentro de una malla de elementos finitos no conforme a la geometría de la grieta. El XFEM resuelve los problemas referentes a la representación de la discontinuidad del campo de desplazamientos a lo largo de las caras de grieta, y a la singularidad del campo de tensiones en el extremo de grieta. Para ello, el método propone el uso de funciones de enriquecimiento que añaden grados de libertad a la aproximación de desplazamientos. Es decir, enriquece la aproximación en los elementos alrededor del extremo de grieta y en los elementos a lo largo de las caras de la grieta, de manera que pueda representar la discontinuidad y la solución singular sin modificar la discretización, Figura 2.7(c). El XFEM se encuentra entre los métodos basados en el Método de Partición de la Unidad (PUM). En este sentido, el método utiliza el concepto de partición de la unidad introducido por MELENK Y BABUŠKA (1996) para enriquecer la aproximación convencional de desplazamientos de elementos finitos con los campos asintóticos de desplazamiento de extremo de grieta, y con una función de salto o discontinua a lo largo de la grieta (MOËS ET AL., 1999).

Otro método muy cercano conceptualmente al XFEM es el denominado Método Generalizado de Elementos Finitos (GFEM), introducido por STROUBOULIS ET AL. (2000c) como otra adaptación del método PUM. En el GFEM, la aproximación se define mediante mallas que no se ajustan necesariamente al contorno del dominio. Adicionalmente, el espacio estándar de elementos finitos es enriquecido con funciones

especiales que reflejan información conocida *a priori* del problema (denominadas funciones *handbook*), como por ejemplo, funciones singulares obtenidas de la expansión asintótica de la solución exacta en los alrededores de una esquina. Estas funciones se combinan para formar una base usando la técnica PU, donde la aproximación resultante no presenta ninguno de los problemas de estabilidad que se obtienen con los métodos híbridos. A causa de posibles dependencias lineales entre las distintas funciones utilizadas para construir la aproximación (las funciones de forma convencionales de EF y las funciones especiales), el GFEM puede conducir a singularidades en la matriz de rigidez. Sin embargo, esta dificultad es resuelta suficientemente bien con el uso de los algoritmos directos ya existentes para la resolución de sistemas de ecuaciones siempre que sean robustos y cumplan ciertas características, y con el uso de algoritmos adaptativos para la integración.

Una de las grandes ventajas del Método Extendido de Elementos Finitos es que las grietas pueden ser directamente introducidas en las mallas de elementos finitos usadas para el cálculo estructural de los modelos. Esto representa un ahorro de tiempo considerable, y la posibilidad de evaluar rápidamente diferentes escenarios de diseño tolerante al daño. Esta flexibilidad resulta fundamental en el ámbito industrial, donde se requiere evaluar la integridad estructural de los modelos de la manera más eficiente.

Otras ventajas son que, al ser implementado usando una base de elementos finitos, se puede aprovechar todo el desarrollo de teorías y algoritmos creados hasta ahora para MEF y, sin embargo, resolver muchos tipos de problemas de ingeniería que eran inviables por este método hasta el momento. De la misma manera, al igual que el MEF, el XFEM es fácilmente aplicable a la resolución de problemas no lineales.

Por otra parte, a diferencia de las técnicas de remallado y refinamiento, el XFEM evita redefinir la discretización y los errores subsecuentes a este proceso. Uno de los inconvenientes de las técnicas basadas en enriquecimiento consiste en que están fundamentadas en algún conocimiento *a priori* de la solución pero, en general, éste puede no estar disponible. Para los problemas de modelado de grietas este conocimiento se reduce a saber que la grieta es discontinua a lo largo de una línea o superficie, y conocer la forma del campo de desplazamientos en su extremo.

A fin de mejorar la representación de la discontinuidad, STOLARSKA ET AL. (2001) utilizaron el *Level Set Method* (LSM) propuesto por OSHER Y SETHIAN (1988), SETHIAN (1999b) para el modelado de curvas abiertas, acoplando esta técnica al XFEM para el cálculo del crecimiento de grietas en 2D. También se ha utilizado el XFEM en conjunto con el *Fast Marching Method* (FMM) de SETHIAN (1999a,b) para el modelado de una grieta (SUKUMAR ET AL., 2003), o múltiples grietas en 3D (CHOPP Y SUKUMAR, 2003). Para el análisis de grietas no planas en 3D se ha utilizado la técnica denominada *narrow-band/LSM* (MOËS ET AL., 2002, GRAVOUIL ET AL., 2002).

El LSM es un método desarrollado para seguir el movimiento de interfases, ya sean curvas cerradas o que se extienden hasta el contorno del dominio. En el LSM y el FMM la interfase o grieta se representa como el nivel cero de una función de una dimensión un grado mayor, y su movimiento se evalúa dentro de una malla fija,

teniendo en cuenta los cambios en la topología de manera natural. Las propiedades geométricas de la interfase también pueden ser obtenidas de la función de *level set*. El uso en XFEM del LSM simplifica de manera importante la selección de los nodos a enriquecer, y los procesos de cálculo en el crecimiento de la grieta.

2.6. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una introducción al problema del modelado de grietas desde el enfoque de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL).

En la primera parte se ha realizado la presentación del problema y se han expuesto los aspectos concernientes a la formulación matemática que gobierna el comportamiento de una grieta en la MFEL. Se han introducido conceptos relativos a la MF como son la definición de la grieta y los modos de carga, así como también, los campos asintóticos que aparecen en el frente de grieta, y que representan el comportamiento singular del problema. Posteriormente, se ha introducido el concepto de Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) como parámetro caracterizante del problema de fractura y se ha realizado una breve revisión de los diferentes métodos existentes para la estimación de K . Se ha prestado especial interés en los métodos energéticos basados en la integral de contorno J ya que, debido a sus características, constituyen el medio idóneo para la evaluación de K en aproximaciones de tipo XFEM, como se verá más adelante. Finalmente, se ha realizado una rápida revisión de los métodos numéricos más utilizados para el modelado computacional de grietas. Se han indicado los dos problemas principales a la hora de representar la grieta: (i) la representación de la discontinuidad y (ii) la representación de la singularidad.

Capítulo 3

Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM)

3.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio del Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM) como técnica para resolver problemas singulares de la MFEL, siendo el objetivo principal describir con detalle las bases teóricas y computacionales del método. Este método permite de manera sencilla la construcción de aproximaciones de elementos finitos capaces de reproducir con precisión la solución de problemas con comportamiento singular. El método propone enriquecer la base de elementos finitos, de manera que, el espacio de la aproximación sea más cercano o contenga al espacio de la solución. En este capítulo se presenta principalmente la formulación del método para dos dimensiones, aunque la mayoría de los planteamientos son directamente aplicables al problema 3D.

En primer lugar, se realiza una revisión detallada del desarrollo cronológico del método. Se introduce la idea de la propiedad de la partición de la unidad y su conexión con el desarrollo de aproximaciones enriquecidas. Se presenta a continuación el planteamiento de la formulación enriquecida de elementos finitos, y se expone de forma detallada el concepto de enriquecimiento en XFEM. Se describen los tipos de enriquecimiento, las funciones utilizadas, y la forma de definir el enriquecimiento para representar la discontinuidad de la grieta dentro de una malla de elementos finitos. Posteriormente, se tratan aspectos relativos a la integración numérica de los elementos extendidos, como también procedimientos para mejorar la convergencia del error de discretización presente en la solución. Asimismo, se indica la técnica utilizada para la evaluación de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) a partir de la solución de XFEM. Finalmente, se estudia la representación geométrica de una grieta en 2D mediante métodos enfocados al seguimiento de interfaces. Dichos métodos se utilizan

como herramientas para ayudar a definir de manera eficaz el enriquecimiento dentro de un entorno XFEM.

3.2. Revisión del desarrollo del método XFEM

En esta sección se presenta una breve revisión del desarrollo del Método Extendido de los Elementos Finitos desde una perspectiva muy general, que considera principalmente las ideas básicas del método. En primer lugar, cabe mencionar que existe un número de artículos de revisión y documentos publicados por KARIHALOO Y XIAO (2003), MOËS Y BELYTSCHKO (2002b), BORDAS Y LEGAY (2005), YAZID ET AL. (2009), MOHAMMADI (2008) que sirven como referencia del estado del arte del XFEM.

Los fundamentos matemáticos del Método de la Partición de la Unidad (PUFEM) fueron estudiados por MELENK Y BABUŠKA (1996). En su momento, indicaron que el PUFEM podía ser empleado para construir métodos numéricos robustos y muy efectivos. El enfoque de la solución de PUFEM constituye la base teórica de una partición local de la unidad que más adelante se denominaría como el método extendido de los elementos finitos.

Los primeros esfuerzos en el desarrollo del Método Extendido de los Elementos Finitos se remontan al trabajo de BELYTSCHKO Y BLACK (1999), en el cual presentan una técnica de elementos finitos especialmente adecuada al modelado del crecimiento de grietas que disminuye la necesidad de remallado de la geometría en cada etapa de crecimiento. En principio, se adicionan funciones de enriquecimiento discontinuas a la aproximación de elementos finitos para considerar la presencia de la grieta. El método permite modelar grietas ubicadas de manera arbitraria dentro de una discretización de EF, aunque para grietas muy curvas requiere cierto remallado de la geometría en zonas alejadas del extremo de grieta.

Poco más tarde, MOËS ET AL. (1999) realizaron mejoras en el método y lo denominaron como el Método Extendido de los Elementos Finitos (*Extended Finite Element Method*, XFEM), nombre con el que se conoce actualmente. Las mejoras en la metodología incluyeron la adición de funciones de salto que, junto con funciones de enriquecimiento de extremo de grieta, permitieron la representación de toda la discontinuidad independientemente de la malla. La aproximación enriquecida se construye entonces a partir de la interacción de la geometría de la grieta con la malla de EF, y se elimina por completo la necesidad de remallado. Posteriormente, DOLBOW (1999), DOLBOW ET AL. (2000a,b, 2001) utilizan la técnica recién desarrollada para dar solución a diferentes problemas de elasticidad en dos dimensiones y placas Mindlin-Reissner.

SUKUMAR ET AL. (2000) realizaron la extensión del método a problemas de grietas planas en tres dimensiones y trabajaron sobre algunos aspectos geométricos asociados a la representación de la grieta y el enriquecimiento de la aproximación de elementos finitos. DAUX ET AL. (2000) estudiaron el problema de grietas arbitrarias que se

intersecaban o se ramificaban, así como también problemas con agujeros de los cuales surgían grietas.

STOLARSKA ET AL. (2001) utilizaron técnicas de *level set* para representar la ubicación de la grieta dentro de la aproximación de EF, y presentaron una técnica que acoplaba el *Level Set Method* (LSM) con el XFEM para optimizar el modelado del crecimiento de la grieta. BELYTSCHKO ET AL. (2001) unificaron y extendieron el modelado de funciones con discontinuidades arbitrarias en elementos finitos propuesto en los trabajos anteriores. La aproximación discontinua se construye en términos de una función de distancia, de manera que se puedan usar funciones de tipo *level set* para actualizar la posición de la discontinuidad. SUKUMAR ET AL. (2001) continúan el estudio del acoplamiento XFEM-LSM para el modelado de agujeros en inclusiones en aproximaciones de EF. Explorando aún más la misma temática, MOËS ET AL. (2002), GRAVOUIL ET AL. (2002) estudiaron el modelo mecánico y el uso de *level sets* para la propagación de grietas no planas en tres dimensiones. En dicho trabajo las funciones de *level sets* son actualizadas usando una ecuación Hamilton-Jacobi que utiliza una extensión del campo de velocidades en el frente de grieta, de manera que se conserve la geometría de la grieta ya generada pero permita una propagación arbitraria del frente.

SUKUMAR ET AL. (2003) desarrollaron una técnica numérica para modelar la propagación de la grieta en problemas tridimensionales de fatiga con grietas planas que utiliza el método de *fast marching* (*Fast Marching Method*, FMM) para actualizar la posición de la grieta. CHOPP Y SUKUMAR (2003) extendieron el método a múltiples grietas coplanares, donde representaron todo el conjunto de grietas mediante una única función *level set*, y la unión de distintas grietas podía ser considerada por el FMM sin necesidad de técnicas de detección de colisiones.

La simulación de la propagación de múltiples grietas fue el objetivo de muchos otros estudios. BUDYN ET AL. (2004) estudiaron la propagación de grietas en materiales elástico lineales homogéneos y no homogéneos mediante una técnica acoplada XFEM/*vector level sets*. ZI ET AL. (2004) abordaron el problema de la unión de dos grietas y presentaron un modelo numérico para analizar el crecimiento y la coalescencia de grietas en materiales cuasi-frágiles.

Un gran número de desarrollos siguieron el éxito inicial del método, incluyendo su extensión al modelado de discontinuidades fuertes y débiles realizada por SUKUMAR Y PRÉVOST (2003), HUANG ET AL. (2003), LEGAY ET AL. (2005), el estudio de la influencia de los elementos de transición en la zona enriquecida por CHESSA ET AL. (2003) y el uso de aproximaciones enriquecidas considerando elementos de orden cuadrático presentado por STAZI ET AL. (2003). TARANCÓN ET AL. (2009) presentaron una mejora de los elementos en la zona de transición mediante el uso de funciones de forma jerárquicas con el fin de compensar los efectos del enriquecimiento parcial. BÉCHET ET AL. (2005) propusieron el uso de un enriquecimiento geométrico alrededor del extremo de grieta en lugar del enriquecimiento topológico utilizado hasta ese momento, con el fin de mejorar la velocidad de convergencia de la norma energética del error de la solución de XFEM.

La precisión, convergencia y estabilidad del método fueron también el objetivo de los trabajos presentados por LABORDE ET AL. (2005), CHAHINE ET AL. (2006), quienes estudiaron el comportamiento de los resultados para distintas configuraciones del XFEM en problemas de mecánica de la fractura. VENTURA (2006) estudio la integración de los elementos divididos por la grieta e indicó que es posible utilizar órdenes de cuadratura estándar sin necesidad de subdividir el dominio de dichos elementos.

XIAO Y KARIHALOO (2006) abordaron el problema de mejorar la precisión de los campos de extremo de grieta en XFEM mediante el uso de cuadraturas de integración de orden mayor y procedimientos de reconstrucción de un campo de tensiones estáticamente admisible (SAR). En dicho trabajo, proponen utilizar un ajuste de *Moving Least Squares* (MLS) para reconstruir las tensiones en los puntos de integración de manera que se busca obtener un campo estáticamente admisible, aunque finalmente el campo obtenido es *casi* estáticamente admisible.

MOËS ET AL. (2006) presentaron una nueva estrategia para imponer condiciones de contorno de tipo Dirichlet sin disminuir la velocidad de convergencia.

En otro trabajo, LIU ET AL. (2004) propusieron una modificación de las funciones de enriquecimiento de XFEM que permitía obtener directamente los Factores de Intensidad de Tensiones en modo mixto sin requerir ningún tipo de postprocesamiento de la solución. La idea consideraba la inclusión de los términos de orden superior del campo asintótico de extremo de grieta en las funciones de enriquecimiento utilizadas alrededor de la singularidad donde, posteriormente, se forzaba que los coeficientes adicionales correspondientes a los nodos enriquecidos con funciones de extremo de grieta fueran iguales mediante un método de *penalty*.

El problema de grietas cohesivas ha sido abordado por distintos autores. Trabajos en este campo se pueden encontrar por MOËS Y BELYTSCHKO (2002a), DE BORST ET AL. (2004), ZI Y BELYTSCHKO (2003), MERGHEIM ET AL. (2005). Por otro lado, DOLBOW Y GOSZ (2002), SUKUMAR ET AL. (2004), NAGASHIMA ET AL. (2003), DOLBOW Y NADEAU (2002), REMMERS ET AL. (2003), ASADPOURE Y MOHAMMADI (2007) han estudiado el modelado de grietas en materiales compuestos.

Los problemas de contacto, plasticidad y grandes deformaciones siempre han sido considerados como cuestiones complejas en lo que respecta el modelado computacional. Los primeros modelos de contacto con aproximaciones del tipo XFEM fueron estudiados por DOLBOW ET AL. (2001) y posteriormente por BELYTSCHKO ET AL. (2002). KHOEI Y NIKBAKHT (2006) aplicaron las formulaciones existentes para modelar problemas de contacto con fricción. En el campo de la plasticidad, la introducción de términos de enriquecimiento de carácter plástico dentro de aproximaciones del tipo XFEM fue llevada a cabo por ELGUEDJ ET AL. (2006), utilizando formulaciones basadas en los campos de Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR) para representar la singularidad en problemas de la MFEP. Diferentes autores han abordado el problema de grandes deformaciones, dentro de este grupo LEGRAIN ET AL. (2005), FAGERSTRÖM Y LARSSON (2006), DOLBOW Y DEVAN (2004) presentaron formulaciones de XFEM para el análisis de fallo en problemas no lineales.

Formulaciones para problemas dinámicos utilizando XFEM fueron presentadas por BELYTSCHKO ET AL. (2003), BELYTSCHKO Y CHEN (2004), ZI ET AL. (2005), basadas en el enriquecimiento singular de la aproximación de EF para la propagación elastodinámica de la grieta. RÉTHORÉ ET AL. (2005) propusieron una generalización del XFEM para modelar procesos de fractura dinámica y problemas dependientes del tiempo. Posteriormente, MENOULLARD ET AL. (2006) presentaron una formulación explícita de XFEM que introduce una matriz de masa concentrada para elementos enriquecidos.

Recientemente, se ha abordado el problema de la estimación del error en aproximaciones del tipo XFEM. BORDAS Y DUFLOT (2007), BORDAS ET AL. (2008) presentaron un estimador del error de discretización para el entorno XFEM basado en la reconstrucción del campo gradiente de la solución mediante una formulación enriquecida de *Moving Least Squares* (MLS). DUFLOT Y BORDAS (2008) desarrollaron una técnica de construcción global de la solución denominada *Extended Global Derivative Recovery* (XGR), en la cual la solución reconstruida se busca en un espacio enriquecido con los campos de deformación de extremo de grieta. PANNACHET ET AL. (2008) estudiaron la estimación del error en XFEM vinculada a refinamientos del tipo p -adaptativos con el fin de mejorar los resultados de la solución de XFEM sin cambiar la topología de la discretización. En otro trabajo, RÓDENAS ET AL. (2008c) presentaron un estimador del error de tipo *recovery* basado en la adaptación de la técnica *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) a los problemas singulares y discontinuos típicos de formulaciones del tipo XFEM. Dicho estimador constituye uno de los trabajos realizados en el desarrollo de esta Tesis.

3.3. Partición de la Unidad

El concepto de la Partición de la Unidad (PU) fue utilizado por MELENK Y BABUŠKA (1996) para desarrollar el *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), y ha sido empleado de forma recurrente en diversas disciplinas computacionales. En particular, la PU constituye la base del desarrollo del Método Extendido de los Elementos Finitos.

La partición de la unidad se define como el conjunto de m funciones $f_k(\mathbf{x})$ dentro de un dominio Ω_{pu} tal que se cumple:

$$\sum_{k=1}^m f_k(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{pu}} \quad (3.1)$$

Se puede demostrar fácilmente que seleccionando una función arbitraria $g(\mathbf{x})$, la siguiente propiedad se satisface de manera inmediata:

$$\sum_{k=1}^m f_k(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

Dicha propiedad es utilizada por nuevas técnicas numéricas como el XFEM o el GFEM para introducir información del problema conocida *a priori* en el espacio de aproximación mediante funciones de enriquecimiento.

El conjunto de funciones de forma isoparamétricas de EF, \mathbf{N} , satisfacen por definición la propiedad de partición de la unidad,

$$\sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.3)$$

donde n es el número de nodos para cada elemento finito.

La idea de la Partición de la Unidad ha provisto los fundamentos matemáticos para el desarrollo de nuevos métodos de modelado comenzando por el Método de la Partición de la Unidad (PUM) de BABUŠKA Y MELENK (1997). Los Métodos *hp-Clouds* (hpCM) desarrollados por DUARTE Y ODEN (1996a,b) como una representación sin malla del PUM, utilizan particiones de la unidad muy generales denominadas *clouds*, las cuales incorporan funciones especiales que reflejan el carácter local de la solución en la construcción de la aproximación. El Método Generalizado de Elementos Finitos (GFEM) presentado por STROUBOULIS ET AL. (2000c, 2001) es una combinación de la formulación clásica del MEF con el PUM, en la cual se enriquece el espacio de EF mediante la adición de funciones especiales que reflejan la información conocida *a priori* del problema (funciones *handbook*). DE Y BATHE (2001) desarrollan el Método de Esferas Finitas como una técnica libre de malla tanto para la interpolación como para la integración. GRIEBEL Y SCHWEITZER (2000) aprovechan las propiedades de la PU para desarrollar un método sin malla basado en el enfoque clásico de métodos de partículas denominado Método de Partículas-Partición de la Unidad. Finalmente, el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM) de BELYTSCHKO Y BLACK (1999) para el modelado de propagación de grietas enriquece mediante la PU el espacio de aproximación del MEF. El XFEM es el método de modelado utilizado en el desarrollo de esta tesis, y por lo tanto, se explica con mayor detalle a continuación.

3.4. Modelado de grietas mediante XFEM

En esta sección se revisan los aspectos fundamentales del Método Extendido de Elementos Finitos aplicado al modelado de grietas en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. En la MFEL los problemas se caracterizan por presentar un comportamiento singular en el extremo de grieta. La resolución de este tipo de problemas mediante la formulación convencional de elementos finitos exige una modelización laboriosa de los mismos, ya que es necesario que la malla reproduzca explícitamente la geometría de la grieta. Adicionalmente, a fin de capturar adecuadamente la solución singular, es necesario adaptar la malla de elementos finitos aumentando convenientemente la densidad de grados de libertad alrededor del extremo de grieta y, por consiguiente, el coste computacional del análisis, o incluyendo elementos especiales en dicha zona que sean capaces de representar la singularidad.

Como se mencionó anteriormente, en los problemas de fractura la presencia de una grieta en un sólido elástico lineal introduce una singularidad de $1/\sqrt{r}$ en el campo de deformaciones y tensiones, y de \sqrt{r} para el campo de desplazamientos en las inmediaciones del extremo de grieta. Por lo tanto, resulta claro pensar que si se enriquece la aproximación de desplazamientos con la función \sqrt{r} , se incrementará la capacidad del método de elementos finitos de aproximar la solución al valor exacto del problema. Asimismo, si se asocia una función discontinua al espacio de aproximación a lo largo de las caras de grieta, el método será capaz de modelar la discontinuidad sin necesidad de ajustar la discretización a la geometría de la grieta.

MOËS ET AL. (1999) fueron los primeros en proponer un desarrollo de este tipo, empleando para ello los conceptos del Método de Partición de la Unidad (PUM) propuesto por MELENK Y BABUŠKA (1996). En este nuevo desarrollo plantearon el modelado de la propagación de una grieta mediante la incorporación de funciones que representarán el campo asintótico de extremo de grieta y funciones de discontinuidad, todo ello dentro de un entorno convencional de elementos finitos. Posteriormente, este método sería denominado como el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM), y sería utilizado para resolver una gran variedad de problemas de la mecánica de la fractura, los cuales incluyen propagación de grietas no planas en tres dimensiones, propagación de grietas cohesivas, crecimiento dinámico de grietas, entre otros.

El XFEM se puede considerar como una versión del PUM que enriquece el espacio de aproximación a nivel local, solamente en la parte del dominio donde se localiza la grieta. Asimismo, el método ha sido influenciado por otros métodos extrínsecos¹ de enriquecimiento tales como el EFG (BELYTSCHKO ET AL., 1994) o el hp-Clouds (DUARTE Y ODEN, 1996a).

3.4.1. Aproximación de elementos finitos enriquecidos

Considérese un punto \mathbf{x} dentro del dominio de un elemento finito e . La aproximación enriquecida de desplazamientos para la función $\mathbf{u}^h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ se define como:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \vartheta(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j \quad (3.4)$$

donde el conjunto nodal I es el conjunto de todos los nodos de la malla, y J es el conjunto de nodos cuyo soporte se interseca con una entidad geométrica, como por ejemplo, un agujero o una grieta. El soporte de un nodo i se define como la unión de todos los elementos conectados al nodo. En la ecuación anterior la función ϑ enriquece de manera extrínseca, y se escoge dependiendo de la entidad geométrica considerada (información conocida *a priori* de la solución).

¹Existen dos formas de plantear el enriquecimiento: i) sustituyendo las funciones base de la aproximación por una base enriquecida (enriquecimiento intrínseco) como se puede ver en BELYTSCHKO Y CHEN (2004), o ii) manteniendo la base original y añadiendo términos que representan las funciones con las que se busca enriquecer la aproximación (enriquecimiento extrínseco).

Es posible desarrollar una formulación alternativa modificando la aproximación de la Ecuación 3.4, de manera que, los coeficientes \mathbf{u}_i representen directamente los valores de desplazamiento nodal. La expresión para la aproximación con el enriquecimiento se desplaza respecto al nodo enriquecido de forma que se puede escribir como:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) (\vartheta(\mathbf{x}) - \vartheta(\mathbf{x}_j)) \mathbf{a}_j \quad (3.5)$$

Así, la interpolación se garantiza de manera automática y el valor \mathbf{u}_i se corresponde con el desplazamiento real. La aproximación modificada, según se indica en la Ecuación 3.5, resulta más eficiente para el postprocesamiento, ya que permite obtener los desplazamientos nodales directamente, sin necesidad de evaluar las contribuciones de las funciones de enriquecimiento en los nodos extendidos. Asimismo, esta formulación resulta útil cuando se desean imponer condiciones esenciales en nodos enriquecidos.

En el planteamiento del XFEM, las incógnitas adicionales \mathbf{a}_j que se introducen al problema, y que están asociadas con las funciones de enriquecimiento, aumentan el tamaño del vector de incógnitas \mathbf{u} . El sistema de ecuaciones a resolver, que incluye los grados de libertad adicionales, se expresa de manera semejante a la formulación convencional de MEF como:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \bar{\mathbf{t}} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_u \\ \bar{\mathbf{t}}_a \end{bmatrix}$$

Donde $\bar{\mathbf{t}}$ es el vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos y \mathbf{K} es la matriz de rigidez, de tamaño igual al número de *dof* estándar del MEF más los *dof* asociados al enriquecimiento. \mathbf{K} es una matriz simétrica, semidefinida positiva y dispersa, semejante a la matriz de rigidez de un problema convencional de MEF. Considerando las expresiones de la forma débil para el problema elástico lineal presentadas en la Sección 2.2.2, se puede expresar la matriz de rigidez como:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.7)$$

Donde para cada elemento la matriz \mathbf{B} resulta de aplicar el operador diferencial \mathbf{L} a la versión enriquecida de la matriz de funciones de forma \mathbf{N} , y relaciona los desplazamientos con las deformaciones. Para un elemento lineal de 4 nodos con enriquecimiento en los dos primeros nodos, la matriz \mathbf{B} se escribe como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial y \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \vartheta(\mathbf{x})N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vartheta(\mathbf{x})N_1 & 0 & N_2 \\ \vartheta(\mathbf{x})N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & \vartheta(\mathbf{x})N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Notar que el tamaño y construcción de la matriz para cada elemento no es constante, y depende del grado de enriquecimiento nodal del elemento ensamblado, agregando tantas columnas a la matriz \mathbf{N} como grados de libertad adicionales tenga en sus nodos. La definición de la matriz \mathbf{B} dada anteriormente se extiende a los casos en los cuales existe más de una función de enriquecimiento. Asimismo, para los elementos sin enriquecimiento la matriz tendrá la misma forma que su homóloga en el MEF estándar.

En la formulación para el modelado de grietas mediante el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM), la discontinuidad de desplazamientos que supone la existencia de una grieta se introduce mediante el enriquecimiento de los nodos de los elementos intersecados usando una función de salto o de discontinuidad. Por otro lado, para representar adecuadamente el campo asintótico alrededor del extremo de grieta, el modelo numérico introduce una base enriquecida con las funciones incluidas en dicho campo. De forma general, considerando la presencia de un extremo de grieta en un modelo bidimensional de elementos finitos, la interpolación de desplazamientos para un punto de coordenadas \mathbf{x} se realiza mediante la expresión (MOËS ET AL., 1999):

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j + \sum_{m \in M} N_m \left(\sum_{\ell=1}^4 F_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{b}_m^\ell \right) \quad (3.9)$$

donde N representa las funciones de forma asociadas al nodo i , los coeficientes \mathbf{u}_i , \mathbf{a}_j , y \mathbf{b}_m representan los grados de libertad nodales correspondientes a los desplazamientos, estando los coeficientes \mathbf{a}_j asociados a las funciones de discontinuidad $H(\mathbf{x})$, y los coeficientes \mathbf{b}_m a las funciones del campo asintótico de extremo de grieta. En la expresión, el primer término del lado derecho representa la aproximación clásica de los desplazamientos en elementos finitos, el segundo término representa la aproximación enriquecida que considera la discontinuidad de la grieta, y por último, el tercer término utiliza funciones de enriquecimiento que buscan representar la singularidad existente en el extremo de grieta.

En la Ecuación 3.9 I es el conjunto de todos los nodos de la malla, M es el subconjunto de nodos cuyo soporte contiene al extremo de grieta y J es el subconjunto cuyo soporte se interseca con la grieta y no están incluidos en M , ver Figura 3.1. Cabe señalar que la definición del subconjunto M no está restringida necesariamente al elemento que contiene el extremo de grieta. El tamaño de M puede aumentar para considerar todos los nodos que se encuentren dentro de un radio característico alrededor de la singularidad, región sobre la cual se considera que la solución está dominada por el campo asintótico en el extremo de grieta. Un ejemplo de esta manera de definir el enriquecimiento se indica más adelante en la Sección 3.6.

Una característica importante asociada a las ecuaciones discretas de la formulación XFEM es que las matrices \mathbf{B} de los elementos enriquecidos contienen funciones discontinuas, por lo que las integrales de la matrices de rigidez en dichos elementos también son discontinuas. Además, las matrices \mathbf{B} son singulares en el frente de grieta. Por lo tanto, el uso de cuadraturas convencionales para la integración resulta inadecuado.

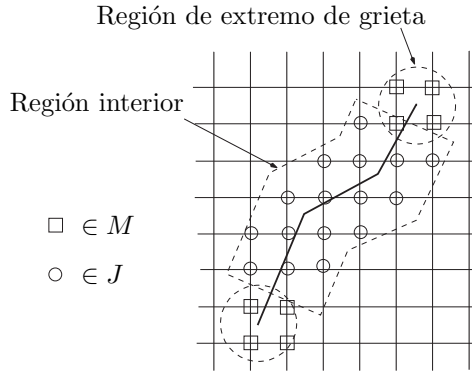


FIGURA 3.1. Clasificación de nodos en XFEM por tipo de enriquecimiento.

Más adelante en la Sección 3.5 se aborda el problema de la integración numérica en formulaciones con elementos finitos enriquecidos.

3.4.2. Funciones de enriquecimiento

El enriquecimiento de la aproximación de EF busca mejorar la precisión de la solución por medio de la inclusión de información conocida *a priori* de la solución analítica del problema. Para el caso de una grieta en problemas de MFEL esta información comprende la discontinuidad del campo a lo largo de las caras de grieta y la singularidad en el frente de grieta.

Funciones de extremo de grieta

Para representar el comportamiento singular que introduce la presencia de una grieta dentro del modelo de elementos finitos, BELYTSCHKO Y BLACK (1999) propusieron enriquecer los elementos alrededor del extremo de grieta con funciones que representaran el campo asintótico en cercanías de la singularidad. La técnica aprovecha la propiedad de partición de la unidad de los elementos finitos para incorporar localmente, y de manera sencilla, funciones de enriquecimiento dentro de una aproximación de elementos finitos.

Las funciones de enriquecimiento $F_\ell(\mathbf{x})$ indicadas en la Ecuación 3.9 forman una base que permite representar el primer término del desarrollo del campo asintótico de desplazamientos en extremo de grieta visto en la Ecuación 2.23. BELYTSCHKO Y BLACK (1999), STOLARSKA ET AL. (2001) utilizan para el caso en 2D las funciones:

$$F_\ell(r, \phi) = \sqrt{r} \left\{ \sin \frac{\phi}{2}, \cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \sin \phi, \cos \frac{\phi}{2} \sin \phi \right\} \quad (3.10)$$

donde r y ϕ son coordenadas polares locales con origen en el extremo de grieta y alineadas con las caras de grieta como se indica en la Figura 3.2. Notar que la primera

función de la base de enriquecimiento $\sqrt{r} \sin \frac{\phi}{2}$ es discontinua en las caras de grieta, lo cual induce la discontinuidad en el campo de desplazamientos de los elementos enriquecidos. Al ser cuatro las funciones que forman la base de enriquecimiento, se introducen cuatro coeficientes adicionales b_m por cada dimensión del problema. Por lo tanto, un nodo enriquecido con funciones de extremo de grieta en 2D tendrá 2 *gdl* convencionales más 8 *gdl* correspondientes a funciones de extremo de grieta, lo que hace un total de 10 *gdl*.

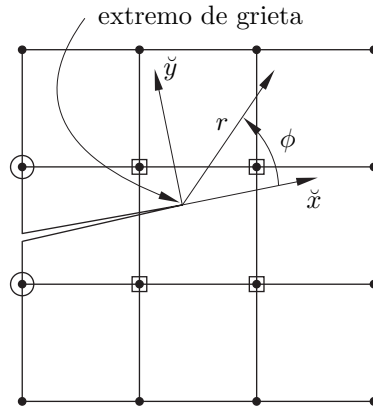


FIGURA 3.2. *Coordenadas polares usadas para evaluar las funciones de enriquecimiento de extremo de grieta*

Las derivadas de las funciones $F_\ell(r, \phi)$ con respecto a las coordenadas polares (r, ϕ) se escriben:

$$F_{1,r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\phi}{2} \quad F_{1,\phi} = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \quad (3.11)$$

$$F_{2,r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\phi}{2} \quad F_{2,\phi} = -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\phi}{2} \quad (3.12)$$

$$F_{3,r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\phi}{2} \sin \phi \quad F_{3,\phi} = \sqrt{r} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} \sin \phi + \sin \frac{\phi}{2} \cos \phi \right) \quad (3.13)$$

$$F_{4,r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\phi}{2} \sin \phi \quad F_{4,\phi} = \sqrt{r} \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\phi}{2} \sin \phi + \cos \frac{\phi}{2} \cos \phi \right) \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

Las derivadas de $F_\ell(r, \phi)$ con respecto al sistema local de coordenadas (\check{x}, \check{y}) son:

$$F_{1,\check{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad F_{1,\check{y}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\phi}{2} \quad (3.16)$$

$$F_{2,\check{x}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\phi}{2} \quad F_{2,\check{y}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad (3.17)$$

$$F_{3,\check{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \operatorname{sen} \phi \quad F_{3,\check{y}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\phi}{2} \cos \phi \right) \quad (3.18)$$

$$F_{4,\check{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{3\phi}{2} \operatorname{sen} \phi \quad F_{4,\check{y}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{3\phi}{2} \cos \phi \right) \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Por último, las derivadas respecto al sistema coordenado global se pueden obtener a partir de:

$$F_{\alpha,x} = F_{\alpha,\check{x}} \cos(\alpha) - F_{\alpha,\check{y}} \operatorname{sen}(\alpha) \quad (3.21)$$

$$F_{\alpha,y} = F_{\alpha,\check{x}} \operatorname{sen}(\alpha) + F_{\alpha,\check{y}} \cos(\alpha) \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

donde α es el ángulo de la grieta con respecto al eje x en el sistema global.

XIAO Y KARIHALOO (2003) plantean el enriquecimiento alrededor del extremo de grieta considerando más términos del desarrollo asintótico. Una formulación de este tipo, junto con una cuadratura de integración específicamente ajustada, permitiría obtener directamente los valores de los FITs con bastante precisión a partir de los coeficientes de los términos retenidos del campo de extremo de grieta, sin necesidad de utilizar técnicas de post-procesamiento. No obstante, este planteamiento resulta inadecuado debido a las dificultades asociadas a retener un alto número de términos del desarrollo asintótico. En particular, con el fin de alcanzar la precisión deseada en la estimación del FIT según XIAO Y KARIHALOO, es necesario retener alrededor de 40 términos del desarrollo del campo asintótico de extremo de grieta. Por consiguiente, aumenta considerablemente la complejidad de las funciones de enriquecimiento y del sistema de ecuaciones a resolver.

Función de discontinuidad

BELYTSCHKO Y BLACK (1999) modelaron grietas cortas rectas y curvas empleando el campo asintótico en el extremo de una grieta recta con el fin de poder representar la discontinuidad de la solución. Sin embargo, esto no es fácilmente aplicable a grietas de mayor longitud, muy curvas, o grietas en tres dimensiones. Este hecho llevó a MOËS ET AL. (1999) a proponer una mejora de la técnica de enriquecimiento, incorporando un campo discontinuo a lo largo de las caras de grieta, lejos del extremo singular. Para ello enriquecieron con las funciones del campo asintótico de extremo de grieta cerca de la singularidad y, adicionalmente, utilizaron una función escalón H o de *Heaviside*, discontinua a lo largo de las caras de grieta.

Considérese el problema unidimensional de cuatro nodos y tres elementos ilustrado en la Figura 3.3. En el modelo se observa que existe una discontinuidad en medio del elemento formado por los nodos 2 y 3, los cuales son influenciados por la discontinuidad y requieren ser enriquecidos. Los nodos 1 y 4 no son influenciados por la discontinuidad. En principio, existen diferentes formas de definir la función de Heaviside. El primer tipo posible de función es la función escalón definida como:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

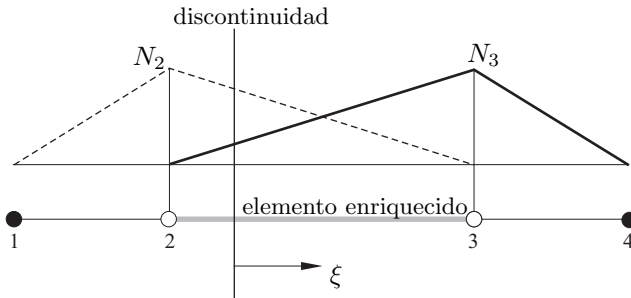


FIGURA 3.3. *Discontinuidad en un problema unidimensional. Se representan las funciones de forma convencionales de elementos finitos.*

Una representación de este tipo de función se aprecia en la Figura 3.4(a) para el caso 1D. Un planteamiento alternativo es utilizar la función signo de Heaviside definida como:

$$H(\xi) = \text{signo}(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

En la Figura 3.4(b) se ilustra la función de Heaviside definida de esta manera y en la Figura 3.5(a) se indica la forma como la función representa la discontinuidad. En la bibliografía de XFEM se suele utilizar la definición de la función signo de Heaviside. En todo caso, la elección del tipo de función no tiene porque afectar la solución final de la aproximación enriquecida. La expresión para la aproximación enriquecida se puede escribir entonces como:

$$\mathbf{u}^h(\xi) = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j H(\xi) \mathbf{a}_j \quad (3.26)$$

Obteniendo de la expresión anterior el valor del desplazamiento para un nodo enriquecido i se tiene:

$$\mathbf{u}^h(\xi_i) = \mathbf{u}_i + H(\xi_i) \mathbf{a}_i \quad (3.27)$$

Según se ha indicado anteriormente, el parámetro nodal \mathbf{u}_i en la Ecuación 3.26 no corresponde al valor real de desplazamiento del nodo i . Retomando la Ecuación 3.5

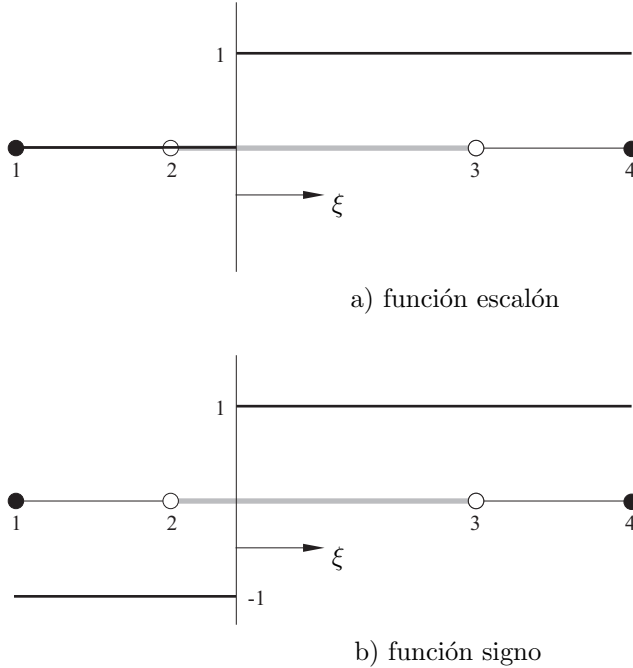


FIGURA 3.4. Diferentes tipos de funciones de Heaviside.

se puede escribir la función de Heaviside desplazada de la Figura 3.5(b) como:

$$\mathbf{u}^h(\xi) = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j [H(\xi) - H(\xi_j)] \mathbf{a}_j \quad (3.28)$$

La utilización de la función de Heaviside garantiza la discontinuidad tanto del campo de desplazamientos como del campo de deformaciones, permitiendo representar discontinuidades de *tipo fuerte*².

Retomando entonces la formulación planteada en la Ecuación 3.9, se considera la función $H(\mathbf{x})$ como la función unitaria de Heaviside o función escalón, de módulo unitario y cambio de signo en la discontinuidad. La función $H(\mathbf{x})$ describe la discontinuidad en el campo de desplazamientos si el elemento finito está dividido por la grieta. El valor de $H(\mathbf{x})$ indica el lado de la grieta en el que se encuentra un punto \mathbf{x} del dominio, evaluando el valor de la función con el signo de la distancia normal desde \mathbf{x} a la grieta:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n(\mathbf{x}^*) \geq 0 \\ -1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.29)$$

²Según se explica en MOHAMMADI (2008) existen otro tipo de funciones (como por ejemplo la función de salto simple) que solo permiten representar discontinuidades de *tipo débil*, es decir, en las que existe continuidad en el campo de desplazamientos y discontinuidad en el campo de deformaciones

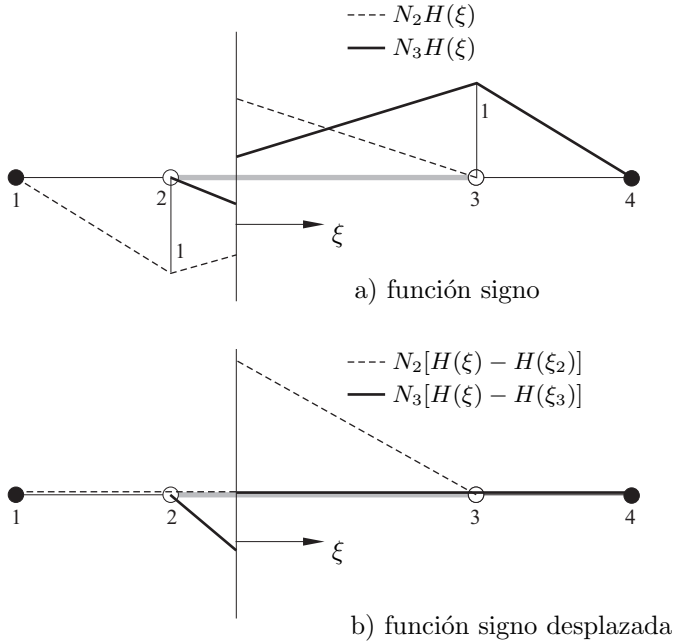


FIGURA 3.5. Efecto de la función signo y la función signo desplazada en la interpolación mediante funciones de forma.

siendo \mathbf{x}^* el punto sobre la grieta más cercano al punto \mathbf{x} , y $\mathbf{e}_n(\mathbf{x}^*)$ es el vector normal a la grieta en dicho punto. El valor de la función H para un punto \mathbf{x} del dominio se puede evaluar usando las funciones de distancia φ que se verán en la Sección 3.8.1, quedando definido entonces mediante la expresión:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -1 & \text{si } \varphi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

donde el valor de $\varphi(\mathbf{x})$ para cualquier punto \mathbf{x} sobre el dominio discretizado se obtiene interpolando los valores nodales de la función de distancia.

3.5. Integración numérica

Los elementos no enriquecidos de la aproximación XFEM, que involucran solo las funciones de forma estándar de elementos finitos, requieren únicamente una regla de bajo orden tipo Gauss-Legendre (STROUBOULIS ET AL., 2000c).

Para los elementos enriquecidos existen dos situaciones particulares en las cuales es necesario implementar un esquema de integración más elaborado. Por un lado, se ha de considerar la necesidad de integrar funciones discontinuas en los elementos

divididos o intersecados con la grieta. Adicionalmente, la integración de funciones singulares alrededor del extremo de grieta requiere más puntos de Gauss que la cuadratura estándar, ya que se demanda mayor precisión para integrar adecuadamente las funciones no polinómicas de la Ecuación 3.10.

Para el caso de elementos intersecados con la grieta, y por lo tanto, enriquecidos con la función discontinua de Heaviside $H(\mathbf{x})$, la integral de la matriz de rigidez (Ecuación 3.7) en el elemento comprende funciones discontinuas que no son integrables con una regla de integración estándar. En estos casos, no considerar la presencia de la discontinuidad puede conllevar malos resultados numéricos, e incluso la obtención de sistemas de ecuaciones singulares. Esta situación se muestra en los elementos divididos por la grieta de la Figura 3.6. Se observa que los puntos de Gauss están mal distribuidos, e incluso existen subdominios a un lado de la grieta que no presentan ningún punto de integración.

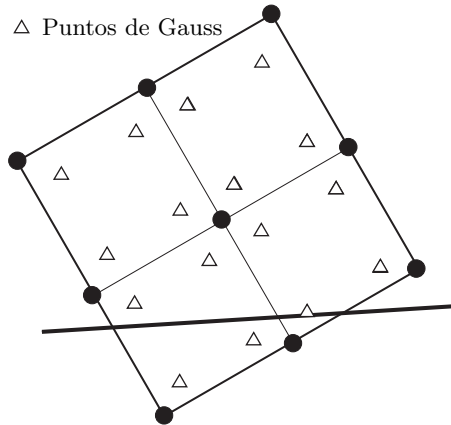


FIGURA 3.6. Cuadratura estándar de 2×2 puntos de Gauss.

Con el fin de integrar adecuadamente la matriz de rigidez a ambos lados de la grieta en los elementos intersecados, MOËS ET AL. (1999) descomponen los elementos divididos por la grieta en subdominios con sus fronteras alineadas con la grieta. De esta manera, se garantiza que en los subdominios de integración no existe ninguna discontinuidad. Los subdominios de integración son necesarios únicamente para la integración numérica y no asocian consigo grados de libertad adicionales.

En general, la definición de los subdominios se realiza mediante la subdivisión en triángulos de los subdominios generados por la intersección de la grieta con el elemento. No obstante, es posible integrar usando cuadraturas para cuadriláteros cuando el resultado de la intersección son polígonos de cuatro lados. En la Figura 3.7 se indican dos posibles casos de subdivisión en elementos intersecados. En el lado izquierdo se observa un elemento con subdominios de cuatro lados integrados con una cuadratura de 2×2 puntos de Gauss, en el lado derecho se muestra un elemento con subdominios triangulares y una cuadratura de 3 puntos de Gauss en cada uno de ellos.

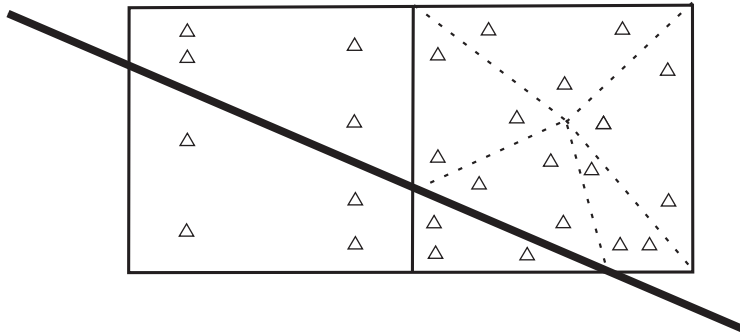


FIGURA 3.7. Subdivisión de elementos intersecados. La interfase se indica en línea gruesa, las divisiones en subdominios en líneas discontinuas, y los puntos de integración con triángulos.

En los elementos de extremo de grieta además de la discontinuidad hay presente una singularidad, lo que exige el uso de un método de integración más preciso que la cuadratura convencional de Gauss. En el MEF estándar las estrategias para resolver este problema son: i) aumentar el número de puntos de Gauss usados en la integración ya sea aumentando el orden de cuadratura de los subdominios triangulares o mediante refinamiento, o ii) utilizar elementos singulares que permitan modelar de forma adecuada el comportamiento en el entorno del extremo de grieta sin necesidad de incrementar el número de puntos de integración. Sin embargo, el aumento de número de puntos de Gauss conlleva un aumento del coste computacional ya que se requerirían cuadraturas de un alto orden de integración para lograr una buena precisión. Además, el uso de elementos singulares resulta inadecuado debido a que, entre otras cosas, la malla debe ajustarse a la geometría de la grieta.

LABORDE ET AL. (2005) comprobaron que al expresar las integrales de los subdominios en coordenadas polares se cancelaba la singularidad de $1/\sqrt{r}$, proponiendo posteriormente la técnica de integración que ellos denominaron *casi-polar*. Esta técnica consiste en utilizar los puntos de integración de una cuadratura estándar de un cuadrilátero transformado en un triángulo, colapsando dos vértices contiguos en el punto singular (ver Figura 3.8). Se han obtenido buenos resultados utilizando una regla de integración de este tipo con 5×5 puntos de Gauss en elementos lineales. Un planteamiento similar fue desarrollado por BÉCHET ET AL. (2005), con alguna diferencia en la forma de realizar la integración de los elementos enriquecidos con funciones singulares que no contienen el extremo de grieta.

STROUBOULIS ET AL. (2000c) recomendaron la utilización de un algoritmo para una cuadratura adaptativa denominado DECUHR (BERNTSEN ET AL., 1991) para los elementos que involucran funciones singulares en problemas de GFEM. La técnica está basada en una subdivisión no uniforme del elemento en subdominios cuadriláteros, los cuales se definen de acuerdo a la posición del punto singular en el elemento. De forma semejante, XIAO Y KARIHALOO (2006) estudiaron la aplicación del DECUHR para la integración de los elementos de extremo de grieta en XFEM obteniendo buenos

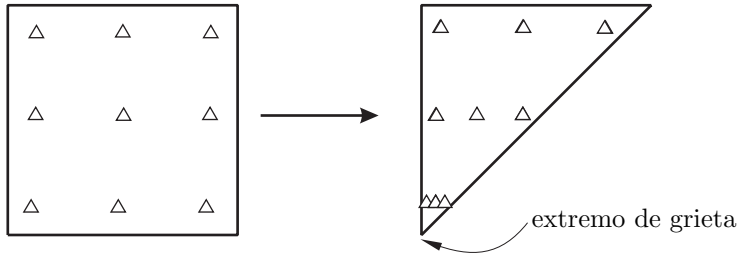


FIGURA 3.8. Transformación realizada en la integración casi-polar para funciones singulares en extremo de grieta.

resultados.

Aunque la técnica de triangulación de los subdominios para evaluar las integrales de la matriz de rigidez de los elementos enriquecidos es ciertamente efectiva, puede no ser la más práctica para problemas donde las leyes para los materiales son no lineales (como por ejemplo en plasticidad) y dependen de la historia de carga, siendo así que la generación de nuevos subdominios a medida que la grieta se propaga representa dificultades adicionales al problema. A saber, la historia de carga debe representarse sobre nuevos puntos de integración, lo cual reduce la precisión de la solución (ver Figura 3.9).

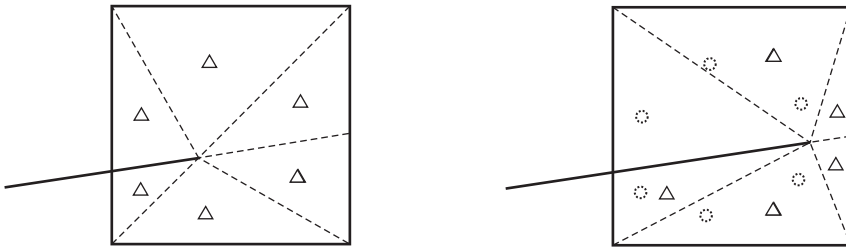


FIGURA 3.9. La posición de los puntos de integración en el elemento de extremo de grieta cambia cuando la grieta se propaga. Este cambio de posición afecta los datos históricos para los problemas plásticos ya que los puntos de evaluación han cambiado.

ELGUEDJ ET AL. (2006) abordan el modelado de problemas no lineales utilizando un esquema de subdivisión que no requiere generar nuevos subdominios en la propagación, donde los elementos intersecados se dividen en cuadriláteros como se observa en la Figura 3.10. Un esquema de integración semejante se plantea en DOLBOW (1999). Aunque esta formulación es más exigente que la definición de triángulos y, en general, requiera un número mayor de puntos de integración para obtener la misma precisión, resulta más flexible para los casos en los cuales la grieta se propaga en materiales no lineales.

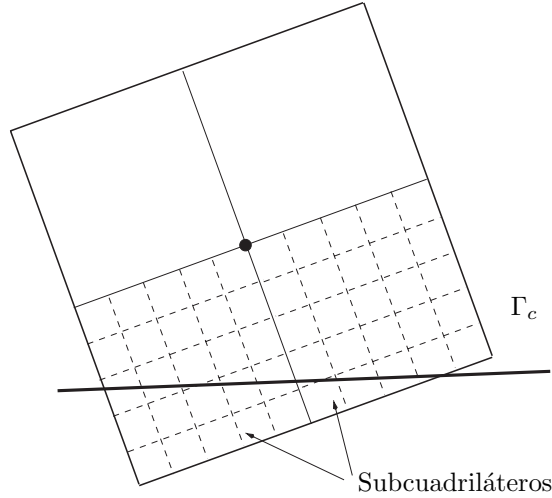


FIGURA 3.10. Soporte nodal intersectado por la grieta y subdividido de manera uniforme mediante cuadriláteros.

3.6. Área de enriquecimiento

Para problemas con solución suave la velocidad de convergencia teórica de la norma energética del error para el caso de refinamiento uniforme es del orden $O(h^p)$, donde p es el grado polinómico de la interpolación usada en los desplazamientos. Cuando la solución es singular, la velocidad de convergencia es menor ya que está afectada por la intensidad de la singularidad λ :

$$O(h^{\min(\lambda,p)}) \quad (3.31)$$

donde en MFEL para el caso de una grieta es conocido que $\lambda = 1/2$, y por consiguiente, la velocidad de convergencia de la norma energética del error disminuye a 0.5. En principio la versión clásica de XFEM no mejora la velocidad de convergencia de una aproximación de elementos finitos convencional. El orden se mantiene en $O(h^{1/2})$ debido a que la solución es singular, aunque el nivel de error en norma energética es mucho menor que en una formulación MEF. Sin embargo, STRANG Y FIX (1973) en su trabajo demuestran que la convergencia de problemas singulares con refinamiento uniforme mejoraba con el uso de elementos singulares, por lo que de alguna forma era posible esperar un mejor comportamiento de la velocidad de convergencia en problemas resueltos mediante XFEM. En el trabajo de BABUŠKA Y MELENK (1997) se hace mención a este mismo comportamiento como una propiedad de los métodos PUM, indicando que el uso de funciones escogidas específicamente para cada tipo de problema proporciona *velocidades de convergencia óptimas* (se considera que la velocidad óptima es la obtenida para problemas suaves).

LABORDE ET AL. (2005), BÉCHET ET AL. (2005) encontraron que, con el fin de lograr

una mayor velocidad de convergencia de la norma energética del error en XFEM, el dominio enriquecido con funciones singulares alrededor del extremo de grieta debe ser independiente del tamaño de elemento h . El esquema de enriquecimiento usado normalmente en la formulación clásica de XFEM, denominado por los autores como *enriquecimiento topológico*, consiste en enriquecer solo los nodos de los elementos que contienen el extremo de grieta (ver Figura 3.11). Consecuentemente, el soporte de las funciones de enriquecimiento disminuye a medida que el tamaño de elemento h tiende a cero. Más aún, el enriquecimiento topológico ha demostrado problemas de precisión ya que la solución en los alrededores de la singularidad se ve influenciada por la posición del extremo de grieta dentro del elemento, o por la proximidad de la *zona de transición* (zona en la que los elementos son enriquecidos de manera parcial), CHessa ET AL. (2003).

Una estrategia alternativa, denominada *enriquecimiento geométrico*, consiste en enriquecer un área fija alrededor del extremo de grieta, independiente del tamaño de elemento h (ver Figura 3.12). LABORDE ET AL. (2005), BÉCHET ET AL. (2005) indican que usando refinamientos h -uniformes junto con un enriquecimiento geométrico en XFEM, se consigue la velocidad de convergencia óptima de MEF con refinamientos h -adaptativos para problemas singulares $O(h^p)$.

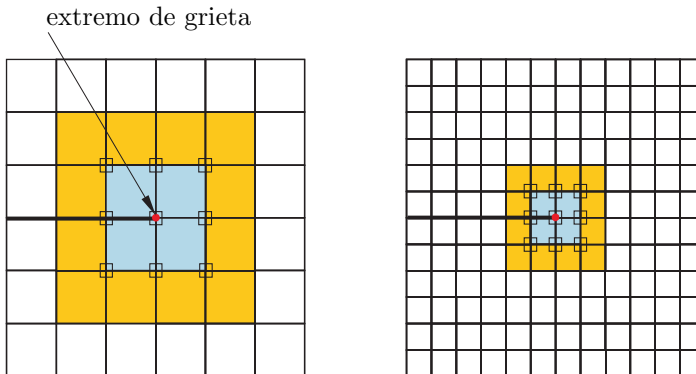


FIGURA 3.11. Elementos seleccionados en el enriquecimiento topológico para dos mallas con diferente tamaño de elemento h . Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición.

La zona de enriquecimiento se especifica, por ejemplo, mediante un área fija circular $B(x_0, r_e)$ de radio r_e con centro en el extremo de grieta x_0 , ver Figura 3.13. El subconjunto de nodos enriquecidos M en la Ecuación 3.9 queda definido entonces como el conjunto de nodos contenidos en $B(x_0, r_e)$. La intersección del conjunto de nodos J con el nuevo conjunto M se enriquece tanto con la función de Heaviside como con las funciones de extremo de grieta.

Sin embargo, aunque el enriquecimiento de un área fija mejora considerablemente los resultados, es necesario resaltar que dicho esquema implica que el número de condicionamiento de las matrices de rigidez aumenta con el número de nodos enriquecidos

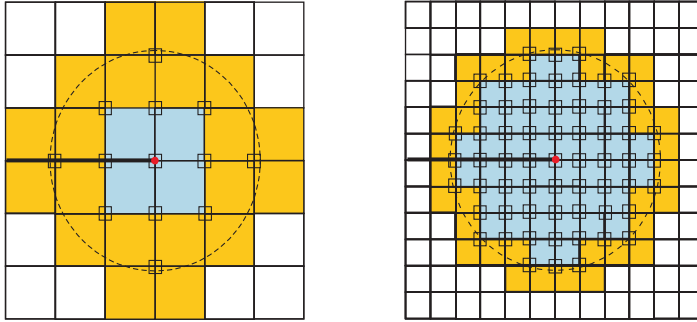


FIGURA 3.12. Elementos seleccionados en el enriquecimiento geométrico para dos mallas con diferente tamaño de elemento h . Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición.

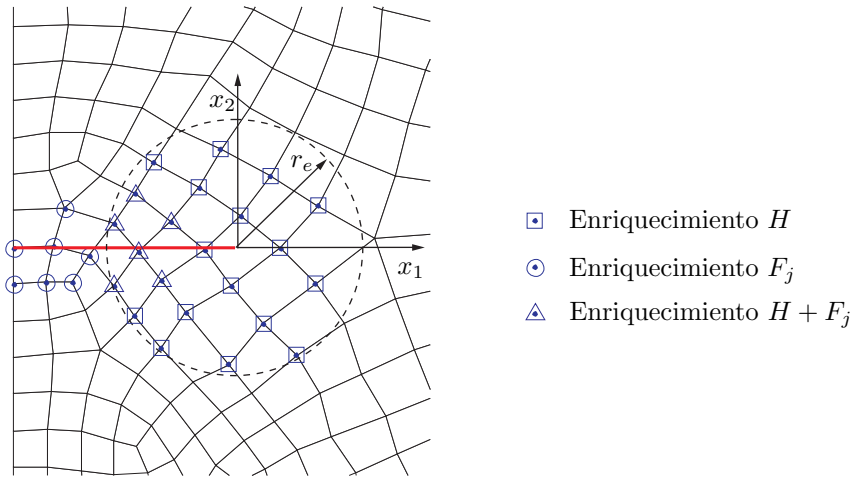


FIGURA 3.13. Enriquecimiento geométrico usando área fija de radio r_e .

con funciones singulares, por lo que el sistema de ecuaciones lineales puede presentar problemas de mal condicionamiento numérico.

Por otra parte, las diferencias entre las velocidades de convergencia teóricas y las obtenidas mediante XFEM presentadas por LABORDE ET AL. (2005) (0.98 en lugar de 1 para elementos lineales, 1.8 en lugar de 2 para elementos cuadráticos) están asociadas a problemas en la zona de transición.

En el mismo trabajo LABORDE ET AL. proponen dos técnicas que buscan mejorar el condicionamiento numérico y la velocidad de convergencia. La primera técnica acopla los grados de libertad de las funciones singulares en la zona enriquecida (XFEM-d.g.) reduciendo drásticamente el mal condicionamiento numérico. De esta manera, mientras que la formulación convencional de XFEM añade ocho grados de libertad por cada nodo enriquecido con funciones de extremo de grieta en un problema bidimensional,

el XFEM-d.g. aumenta el número de grados de libertad solo en ocho para toda el área fija, independientemente del radio de enriquecimiento r_e , con el inconveniente de que también se reduce la velocidad de convergencia óptima por problemas en la zona de transición. Posteriormente, los autores proponen un procedimiento para mejorar aún más la convergencia y corregir los problemas en la zona de transición mediante la utilización de una técnica denominada XFEM-p.m. La técnica consiste en superponer un espacio de aproximación que mejora la convergencia, pero que resulta en una formulación de EF no conforme con el espacio solución en la zona de transición. Las restricciones adicionales entre los espacios no conformes se aplican, por ejemplo, mediante una técnica del tipo *pointwise*.

3.7. Evaluación del Factor de Intensidad de Tensión

Como se ha indicado anteriormente, el Factor de Intensidad de Tensiones K presentado en la Sección 2.4 es una magnitud que resulta de gran interés en los análisis de MFEL por caracterizar el estado tensional en el entorno del extremo de grieta. Entre los distintos métodos disponibles para evaluar el FIT a partir de la solución de EF, la Integral de Interacción en su forma de integral de dominio ha sido la formulación más utilizada desde los primeros desarrollos del método (MOËS ET AL., 1999, SUKUMAR ET AL., 2000) para obtener estimaciones del FIT en XFEM, y es el procedimiento adoptado en el desarrollo de este trabajo. A continuación se recuerda la expresión para la Integral de Interacción vista en la Ecuación 2.49:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega$$

La función q más común en la bibliografía de XFEM para evaluar la Integral de Interacción es una función de tipo plateau. La función utilizada toma valor $q = 1$ para los nodos contenidos en un círculo de radio r_q medido desde el extremo de grieta, y $q = 0$ para el resto de nodos (en el contorno del problema analizado siempre tendrá valor nulo).

3.8. Descripción geométrica de grietas mediante *level sets*

Un aspecto importante en la representación geométrica de interfases es su seguimiento a medida que van cambiando de forma. Un ejemplo de este tipo de interfases lo constituye la propagación de una grieta, la cual divide el continuo a través de un contorno en movimiento.

La mayoría de técnicas numéricas plantean el seguimiento de interfases desde un punto de vista Lagrangiano, en el cual se colocan un conjunto de marcadores en la

geometría en movimiento para seguir la evolución de la interfase desde una perspectiva geométrica. La información en los marcadores se actualiza a medida que la interfase cambia utilizando las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, dicha formulación tiende a ser inestable alrededor de puntos de gran curvatura, frentes que colisionan, *etc.*

Una alternativa que resulta más estable, y en general, más atractiva es usar los métodos basados en *level sets* desarrollados por OSHER Y SETHIAN (1988). A partir de la reformulación del problema aparecen dos técnicas numéricas distintas para modelar el movimiento de interfases o *hipersuperficies* que se mueven de acuerdo a un campo de velocidad que puede depender de la posición, el tiempo, la geometría de la interfase (por ejemplo la curvatura), características físicas del problema, *etc.*:

- El *Level Set Method* (LSM), una técnica más general y flexible pero más lenta.
- El *Fast Marching Method* (FMM), una técnica extremadamente rápida pero limitada a ciertos tipos de problemas.

Las técnicas de *level sets* han sido utilizadas extensamente en problemas de mecánica de fluidos, combustión, procesamiento de imágenes, *etc.* (SETHIAN, 1999b) y, en particular, han sido utilizadas en el modelado de problemas mediante XFEM como una herramienta para definir el enriquecimiento nodal de la aproximación. Aunque su uso no es necesario, muchas formulaciones de XFEM han aprovechado las ventajas de este tipo de técnicas.

3.8.1. Level Set Method

El LSM introducido por OSHER Y SETHIAN (1988) cambia la formulación Lagrangiana del problema usada en los denominados *métodos de seguimiento del frente* por una formulación Euleriana del problema. En el LSM la interfase se representa como el *level set* cero de una función implícita de distancia signada $\varphi(\mathbf{x}(t), t)$, cuya dimensión es un grado mayor que la dimensión de la interfase, es decir, φ es función de la posición y del tiempo. Por lo tanto, la interfase es una hipersuperficie del espacio en el cual toma valores la función φ . A medida que la interfase se desarrolla, esta siempre coincide con el nivel cero de la función φ , cuyos valores son determinados mediante la resolución de una ecuación diferencial parcial en una dimensión de un grado mayor al de la interfase. Esta manera de considerar la evolución de la interfase tiene diversas ventajas. En primer lugar, se controla mejor el tratamiento de las singularidades en el frente, las interferencias cuando dos frentes se unen, y cambios de la topología de la interfase, evitando los problemas de estabilidad presentes en formulaciones Lagrangianas. Además, se pueden desarrollar algoritmos muy eficientes, y con facilidades para el paralelismo.

De forma general, la función *level set* se aproxima sobre una malla fija, lo cual evita el problema adicional de la regeneración de mallas. Esto también permite el acoplamiento del LSM con técnicas de elementos finitos y en especial, con el XFEM, ya que la actualización de los *level sets* puede usar la misma malla que es usada para

los cálculos de elementos finitos de manera directa. Por otro lado, algunas propiedades geométricas intrínsecas de la interfase (vector normal, curvatura) pueden ser determinadas a partir de la función de *level set*.

En XFEM resulta conveniente, pero no esencial, representar la grieta por medio de funciones de distancia del tipo *level set*, con valores evaluados en cada nodo de la malla. El LSM y el XFEM fueron usados por STOLARSKA ET AL. (2001) para modelar el crecimiento de grietas en dos dimensiones, resolviendo el problema de interfaces con extremos libres mediante el uso de dos o más funciones de distancia. De manera más general, el XFEM ha sido utilizado en conjunto con el LSM para resolver con éxito problemas de propagación de grietas quasi-estáticos (MOËS ET AL., 1999, STOLARSKA ET AL., 2001, STAZI ET AL., 2003), problemas dinámicos (BELYTSCHKO Y CHEN, 2004), así como también para evaluar los factores de intensidad de tensiones para problemas en modo I en tres dimensiones (SUKUMAR ET AL., 2003), entre otros casos. Frecuentemente, la función de distancia es definida en los nodos de la malla fija usada en la aproximación XFEM, y sus valores interpolados mediante las funciones de forma convencionales (STOLARSKA ET AL., 2001, SUKUMAR ET AL., 2000). Una de las dificultades al abordar el problema del modelado de grietas mediante *level sets* es restringir las ecuaciones de evolución de las funciones de distancia a medida que la grieta crece, de manera que no se modifique la parte de la grieta que existía previamente. STOLARSKA ET AL. (2001), GRAVOUIL ET AL. (2002) han adoptado técnicas especiales para garantizar que las funciones de distancia permanezcan fijas en zonas detrás del frente de grieta, donde la grieta ya se ha propagado. VENTURA ET AL. (2002) resuelven este mismo problema en lo que denominaron Vector Level Set Method, almacenando no solo la función de distancia sino también su gradiente para simplificar la actualización de los *level sets*.

A continuación, se resumen los principios básicos del LSM para el caso particular de una curva que evoluciona en 2D. Sea $\Gamma(t = 0)$ una curva cerrada en \mathbb{R}^2 que se mueve de acuerdo a un campo de velocidad \mathbf{F} .

Sea φ una función escalar tal que $\Gamma(t = 0)$ es el *level set* cero de φ para todo tiempo positivo t , es decir:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \varphi(\mathbf{x}(t), t) = 0\} \quad (3.32)$$

Para el caso de una curva en 2D, la función φ está definida en el espacio \mathbb{R}^3 , tal que para el tiempo t se interseca con \mathbb{R}^2 en la posición exacta de la interfase $\Gamma(t)$, como se representa en la Figura 3.14

La función de *level set* φ se puede definir entonces para una interfase Γ entre dos dominios Ω_1 y Ω_2 como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ < 0 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.33)$$

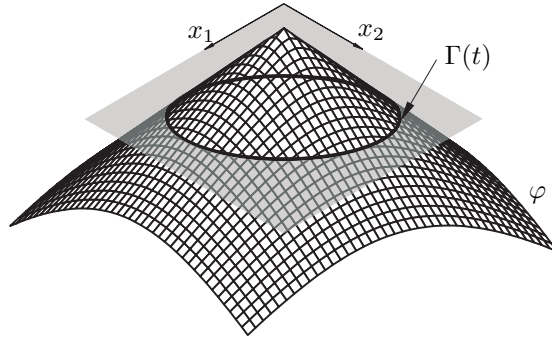


FIGURA 3.14. Representación de la función de level set φ que se interseca con el plano \mathbb{R}^2 en la curva $\Gamma(t)$

La función de *level set* no es conocida *a priori*, siendo una formulación de valor inicial en la que, para el tiempo inicial $t = 0$, se suele definir la función escalar φ como la función de distancia signada a la curva $\Gamma(0)$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} d & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ -d & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.34)$$

donde d es la distancia normal desde un punto \mathbf{x} a la curva Γ . La función de distancia signada así definida cumple la propiedad $\|\nabla\varphi\| = 1$.

Posteriormente, se asume que cada *level set* de φ avanza en la dirección de su gradiente con velocidad \mathbf{F} , permitiendo que la función de *level set* se vaya construyendo a medida que evoluciona la interfase. Para ello, el movimiento de la interfase se modela mediante una ecuación Hamilton–Jacobi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (3.35)$$

En la expresión anterior solo es necesaria la velocidad normal a la curva, por lo que la ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + F_n \|\nabla\varphi\| = 0 \quad (3.36)$$

De lo anterior, la ecuación diferencial parcial de valor inicial que modela la evolución de la función escalar φ se puede definir como:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + F_n \|\nabla\varphi\| = 0 \\ \varphi(\mathbf{x}(0), 0) = \text{signo}(\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma)) \min_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\| \end{cases} \quad (3.37)$$

donde \mathbf{x}_Γ es un punto sobre la curva Γ y \mathbf{e}_n es el vector normal a la curva. La posición de la interfase $\Gamma(t)$ en un tiempo t dado se obtiene resolviendo la ecuación de evolución (Ecuación 3.37) para la función φ .

La formulación general para la evolución de una interfase presentada en la Ecuación 3.37 no resulta apropiada para modelar la propagación de grietas ya que en estos casos la función del campo de velocidades no es conocida *a priori*. En la Sección 3.8.3 se explicará el procedimiento a seguir en este tipo de casos.

Uno de los inconvenientes del LSM es que el coste computacional se incrementa debido al uso de funciones de *level set* un grado mayor que la dimensión de la interfase. Con el propósito de reducir el coste computacional, se han desarrollado técnicas de *level set* con ancho de banda adaptativo (*narrow-band level sets*), y los métodos *fast marching*. Teniendo en cuenta que solo interesa el movimiento en los alrededores de la interfase, las técnicas de *narrow-band*, como su nombre lo indica, definen una pequeña banda de elementos alrededor de la interfase para actualizar el cálculo de las funciones de distancia, de forma que no sea necesario recalcular la función para todo el dominio (ADALSTEINSSON Y SETHIAN, 1995). Los métodos de *fast marching* (SETHIAN, 1996) son un caso particular de los *narrow-band level sets*, en los cuales solamente se considera un ancho de banda de un solo elemento y únicamente se aplica para frentes que avanzan o retroceden monotónicamente.

3.8.2. Fast Marching Method

El *Método de Fast Marching* (FMM) fue desarrollado inicialmente por SETHIAN (1996) y posteriormente mejorado por SETHIAN (1999a), CHOPP Y SETHIAN (1999). Los métodos de *fast marching* están diseñados para seguir el movimiento de una interfase de manera que para un punto \mathbf{x} se detecte una primera y única llegada de la curva. Por esta razón, están limitados a problemas en los cuales la función de velocidad que propaga el frente no cambia de signo, de manera que la interfase se desplace siempre hacia adelante o hacia atrás. Esto permite cambiar el problema a una formulación estacionaria que aumenta considerablemente la velocidad del método comparado con el LSM.

Para ilustrar el procedimiento considérese la curva mostrada en la Figura 3.14. Si se supone una función $t(\mathbf{x})$ que evalúa el tiempo en que la curva pasa por cada punto del plano x_1x_2 , se tiene que $t(\mathbf{x})$ representa una superficie cónica que tiene la propiedad de intersectarse con el plano x_1x_2 en su posición inicial ($t = 0$). Primero, se inicializa la función en un conjunto de nodos *aceptados*. Los nodos contiguos a los nodos de dicho conjunto se consideran nodos *candidatos*. Se calcula el tiempo para llegar a los nodos *candidatos* y el nodo con el menor tiempo pasa a ser nodo *aceptado*, continuando el proceso a medida que la función avanza.

El mismo procedimiento se explica en SUKUMAR ET AL. (2003) para el caso de grietas en XFEM (ver Figura 3.15). Considerando la función de distancia $\varphi(\mathbf{x})$ en lugar de $t(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$ representa el tiempo en el cual el frente que avanza monotónicamente pasa por el punto \mathbf{x} . $\varphi^{-1}(0)$ define la posición inicial de la interfase, y para cualquier instante posterior la curva puede representarse como $\varphi^{-1}(t)$.

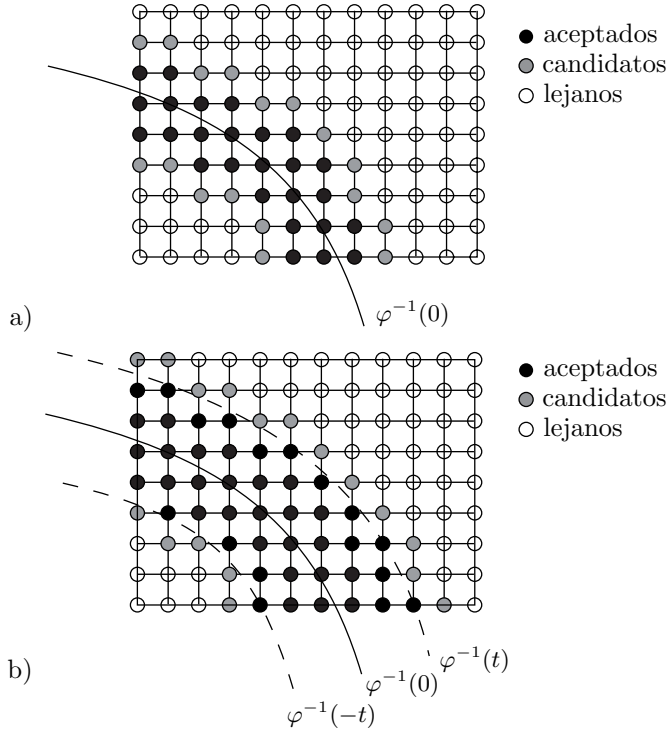


FIGURA 3.15. Clasificación de los nodos en el Fast Marching Method (SUKUMAR ET AL., 2003)

3.8.3. Acoplamiento entre XFEM y LSM

Las técnicas para el modelado del movimiento de interfaces LSM y FMM han sido utilizadas con éxito para definir el enriquecimiento nodal en mallas XFEM. Asimismo, dichas técnicas han simplificado el tratamiento de la información en los problemas de crecimiento de grietas, ya que la definición de los nodos enriquecidos se actualiza de manera sencilla a medida que la grieta se propaga (STOLARSKA ET AL., 2001).

Considérese el dominio Ω que contiene una grieta interior definida por el contorno Γ_c . La grieta presenta en este caso dos extremos \mathbf{x}_i , $i = [1, 2]$. Para representar la grieta mediante *level sets*, en primer lugar, se define para todo el dominio Ω la función de distancia $\varphi(\mathbf{x}, 0)$, que denota la distancia de un punto \mathbf{x} hasta la grieta Γ_c , tal como se indicó en la Sección 3.8.1:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min_{\mathbf{x}_{\Gamma_c} \in \Gamma_c} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\Gamma_c}\| & \text{si } \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\Gamma_c}) \geq 0 \\ - \min_{\mathbf{x}_{\Gamma_c} \in \Gamma_c} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\Gamma_c}\| & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.38)$$

donde el signo de la función φ depende del lado de la interfase sobre el cual se encuen-

tra el punto \mathbf{x} . La función φ definida anteriormente describe muy bien el problema de una curva cerrada en el plano. Sin embargo, para modelar una curva abierta, como por ejemplo la grieta con dos extremos mostrada en la Figura 3.16, es necesario ampliar el modelo de *level set* utilizando más de una función de distancia.

Para grietas que presentan uno o más extremos, la grieta se representa como el *level set* cero de una función $\varphi(\mathbf{x}, t)$, y cada extremo i es descrito como la intersección de φ con otra función *level set* $\psi_i(\mathbf{x}, t)$, ortogonal a φ en el extremo de grieta i , ver STOLARSKA ET AL. (2001), VENTURA ET AL. (2002), MOËS ET AL. (2002), GRAVOUIL ET AL. (2002). La función $\psi_i(\mathbf{x})$ se escribe entonces como:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{e}_s \quad (3.39)$$

siendo \mathbf{e}_s el vector unitario tangente a la grieta en el extremo \mathbf{x}_i . En el caso de una grieta interior con dos extremos son necesarias dos funciones ψ_1 y ψ_2 , una para cada extremo. Para una grieta en el borde del dominio, con solo un extremo, es necesaria una única función ψ_1 .

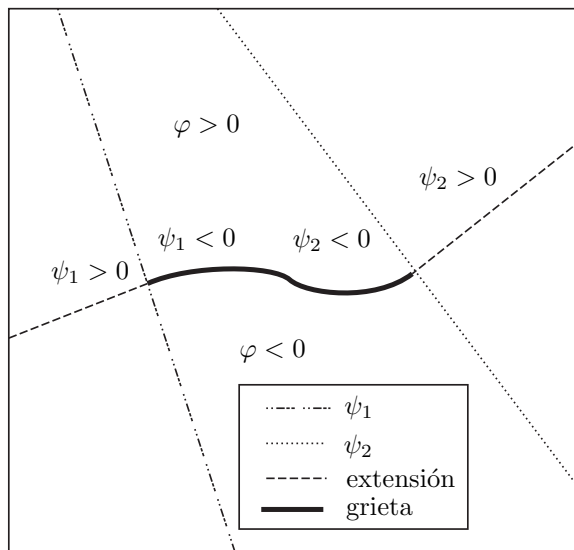


FIGURA 3.16. Representación de las funciones de level set para una grieta en 2D.

En el caso general, no se conoce la forma analítica de las funciones de *level set*. Por consiguiente, las funciones φ y ψ se discretizan mediante una aproximación de elementos finitos, usando la misma malla utilizada para resolver el problema mecánico. De esta manera, las funciones de distancia se evalúan para todo el dominio interpolando desde los valores nodales, empleando para ello las funciones de forma de EF según se indica en la siguiente expresión:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \varphi_j(t); \quad \psi_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) \psi_{ij}(t) \quad (3.40)$$

Una vez se han definido las funciones de *level set* necesarias para representar la discontinuidad, se pueden utilizar dichas funciones para definir el tipo de enriquecimiento nodal. Como se mencionó anteriormente en la Sección 3.4.2, se enriquecen con la función de discontinuidad H los nodos cuyo soporte nodal se interseca completamente con la grieta. Los nodos cuyo soporte contiene alguno de los extremos de la grieta son enriquecidos con las funciones que representan los campos asintóticos bidimensionales en el extremo de la grieta. Para determinar la posición de un punto \mathbf{x} relativo a la grieta, es suficiente con saber el valor de φ en dicho punto. Si $\varphi(\mathbf{x}) < 0$, \mathbf{x} está situado a un lado de la grieta, si $\varphi(\mathbf{x}) > 0$, \mathbf{x} está situado en el lado contrario.

Como resultado, se pueden plantear un conjunto de expresiones en función de las funciones de *level set* que permitan identificar el tipo de enriquecimiento a utilizar en los nodos de un determinado elemento. Para un elemento dado, sean φ_{min} y φ_{max} los valores máximo y mínimo de la función φ en los nodos del elemento. Asimismo, sean ψ_{min} y ψ_{max} los valores máximo y mínimo de la función ψ . Si para el elemento se cumple que la función φ toma valores negativos y positivos, y además, todos los valores de ψ son negativos, el elemento estará dividido por la grieta y sus nodos se han de enriquecer con funciones de Heaviside:

$$\text{Si } (\varphi_{max}\varphi_{min} \leq 0) \wedge (\psi < 0) \Rightarrow \text{Enriquecimiento con Heaviside} \quad (3.41)$$

De manera similar, si para un elemento se cumple que las dos funciones de *level sets* φ y ψ toman cada una valores negativos y positivos, el elemento contiene el extremo de grieta y sus nodos han de ser enriquecidos con funciones de extremo de grieta

$$\text{Si } (\varphi_{max}\varphi_{min} \leq 0) \wedge (\psi_{max}\psi_{min} \leq 0) \Rightarrow \text{Enriq. de Extremo de Grieta} \quad (3.42)$$

Adicionalmente, la ortogonalidad de las dos funciones de *level set* φ y ψ en los extremos de grieta produce sistemas coordenados locales de forma natural, propiedad que permite simplificar el cálculo de las funciones de enriquecimiento alrededor de la singularidad. Los valores del radio r y del ángulo ϕ se pueden obtener a partir de las siguientes expresiones:

$$r(\mathbf{x}) = \sqrt{\varphi^2(\mathbf{x}, t) + \psi^2(\mathbf{x}, t)} \quad , \quad \phi(\mathbf{x}) = \tan^{-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}, t)}{\psi(\mathbf{x}, t)} \quad (3.43)$$

Es posible evaluar los puntos de intersección de la grieta con los elementos usando los valores nodales de las funciones de distancia φ , lo cual resulta útil por ejemplo, para definir los subdominios utilizados en la integración numérica. Considérese un elemento intersecado con la grieta en el lado definido por los nodos i y j . Las coordenadas del punto de intersección \mathbf{x}_p en dicho lado se evalúan mediante la expresión:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i - \frac{\varphi(\mathbf{x}_i)}{\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_i)} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (3.44)$$

A fin de evaluar la dirección y magnitud del crecimiento de grieta en los puntos a lo largo del frente de grieta es suficiente con conocer los valores del FIT. Sin embargo,

para poder actualizar las funciones de *level sets* es necesario conocer la información del campo de velocidades en todas las partes del dominio donde están definidas dichas funciones, y no solo en el frente de grieta. Por lo tanto, para aplicar una técnica de *level sets* a problemas de propagación de grietas es necesario extender el campo de velocidades a todo el dominio de las funciones de *level sets*, y además, es necesario asegurar que la actualización de las funciones no modifique la superficie de grieta ya generada. En la Tabla 3.1 se presenta un resumen del algoritmo propuesto por GRAVOUIL ET AL. (2002) para modelar la propagación de una grieta.

TABLA 3.1. *Algoritmo para la actualización de las funciones de level sets en el modelado de crecimiento de grietas*

1. Extensión ortogonal de la función φ en el subdominio de las funciones level set definido por $\psi \geq 0$.
2. Extensión de las componentes del campo de velocidad en el sistema ortogonal definido por φ y ψ .
3. Ajustar la componente del campo de velocidad en la dirección φ para evitar modificaciones de la grieta generada hasta ese momento.
4. Actualizar y reinicializar la función φ .
5. Actualizar la función ψ .
6. Ortogonalizar y reinicializar la función ψ .

3.9. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM) como herramienta para el modelado de grietas en la MFEL. A lo largo del capítulo se han expuesto sus ventajas frente a otros métodos de modelado, destacando la integración con el MEF y la facilidad para representar funciones discontinuas y funciones singulares.

En primer lugar, se ha realizado una breve revisión del desarrollo del método. Seguidamente, se ha introducido el concepto fundamental de la Partición de la Unidad y su relación directa con las aproximaciones de tipo XFEM. Posteriormente, se ha explicado la idea general de enriquecimiento de una aproximación de EF, y se ha presentado el esquema de enriquecimiento mediante funciones de Heaviside y funciones singulares de extremo de grieta propuesto en la formulación de XFEM. Se han discutido aspectos concernientes a la integración numérica de este tipo de funciones en aproximaciones con elementos extendidos. Se ha comentado sobre la convergencia de la norma energética del error para la solución de problemas singulares, y se ha presentado un esquema de enriquecimiento que permite obtener órdenes de convergencia óptimos usando la técnica XFEM. Se ha indicado la metodología utilizada para la extracción del FIT a partir de la solución de elementos finitos. Para terminar,

se han revisado los métodos de *level sets*, presentándolos como técnicas idóneas para la descripción de la geometría de la grieta dentro de una malla fija, resaltando su interacción con XFEM a fin de mejorar el tratamiento de la información en la malla de EF.

Capítulo 4

Estimación y acotación de la norma energética del error en el MEF

4.1. Introducción

Cuando se aproxima un problema de la mecánica del medio continuo mediante el Método de los Elementos Finitos, la solución obtenida presenta discrepancias con respecto al sistema físico que representa. Por una parte, existe un *error de modelado* debido a la simplificación del problema real y las hipótesis de partida adoptadas para poder abordar el problema. En este trabajo se asumirá que el modelo matemático del problema es correcto, y se considera la solución analítica como la solución exacta.

Por otra parte, entre el modelo de EF y el modelo matemático se introduce el denominado *error de discretización*, debido a la aproximación que se hace de un problema continuo por medio de un dominio discreto. La aproximación de la solución mediante un número finito de *gdl* se acerca a la solución continua del modelo matemático (con infinitos *gdl*) a medida que aumenta el número de variables discretas.

Otra causa de error entre la solución analítica y la solución de EF es el llamado *error numérico o computacional*, inducido por errores de redondeo en la manipulación de valores numéricos introducidos por los algoritmos de cálculo. No obstante, este tipo de error resulta despreciable si se utilizan métodos numéricos adecuados para resolver los sistemas de ecuaciones, evaluar las integrales numéricas, y demás operaciones relativas al MEF.

En general, no es posible conocer el error de discretización exacto, o verdadero, de la solución de EF ya que para la mayoría de problemas no es posible conocer la solución exacta o analítica. Dicho de otra manera, no siempre es posible resolver un

modelo matemático donde se desarrollen las ecuaciones que gobiernan el problema a tratar. Prácticamente desde los inicios del MEF, la evaluación de la precisión de la aproximación de EF y su posible mejora por medio de tratamientos *a posteriori* de la solución aproximada ha sido una cuestión de sumo interés. La estimación del error de discretización a través de técnicas *a posteriori* es importante en sí misma ya que sirve como medida del error cometido en la solución de EF. En la literatura se pueden encontrar numerosas clasificaciones y estudios de los diferentes métodos de evaluación del error de discretización. AINSWORTH Y ODEN (2000) presentan un estudio exhaustivo de los diferentes estimadores del error de discretización *a posteriori*. Se puede afirmar que no existe ningún método óptimo ya que los que son más precisos requieren habitualmente modificaciones importantes de los programas de elementos finitos actuales y realizan un conjunto de operaciones que son computacionalmente costosas.

Este capítulo se centra en revisar diferentes formas de medir el error de discretización inherente al MEF, y estimar el error cuando no se conoce la solución exacta, sirviendo como introducción al Capítulo 5, donde se desarrollan técnicas de estimación del error específicas para XFEM. En particular, se describen dos tipos diferentes de estimadores del error, los *estimadores basado en residuos* y los *estimadores basados en reconstrucción de la solución*. Dentro de este último grupo se indica con especial interés el estimador de error ZZ, utilizado como base para el desarrollo del estimador propuesto para XFEM en el capítulo posterior.

4.2. Medida y estimación del error de discretización

4.2.1. Medida del error de discretización

Antes de continuar, resulta importante definir que se considera error. Conocida la solución exacta del problema en desplazamientos \mathbf{u} y la solución de elementos finitos \mathbf{u}^h para cada punto del dominio Ω , se puede definir el error puntual en desplazamientos como la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada como:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \quad (4.1)$$

De forma similar, se pueden considerar los errores en deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, o en tensiones $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^h \quad (4.2)$$

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h \quad (4.3)$$

No obstante, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000), AINSWORTH Y ODEN (2000) indicaron que la medida del error realizada de este modo puntual no resulta práctica y, en general, es poco conveniente. Incluso en algunas ocasiones puede resultar engañosa, por ejemplo, en el caso de los problemas propios de la MFEL donde el error de

tensiones en la singularidad será localmente infinito. Sin embargo, la solución global en este caso puede llegar a ser aceptable. Otros casos similares se presentan para problemas con cargas puntuales aplicadas, donde los errores en tensión en los puntos de aplicación de la carga son infinitos, aunque en conjunto se puede tener una solución válida.

Por esta razón, se han planteado dos enfoques distintos para evaluar el grado de precisión de la solución de EF. Un primer enfoque, y quizás uno de los más extendidos hasta ahora, es medir el error de discretización mediante normas de la solución, de manera que se exprese en términos de una magnitud escalar que proporcione una idea global del error de la solución. El segundo enfoque es más reciente y consiste en estimar el error en magnitudes de interés (tensiones, desplazamientos, . . .) orientadas al diseño y optimización de un determinado problema (AINSWORTH Y ODEN, 2000).

En el planteamiento global una de las normas más utilizadas para medir el error de discretización es la norma energética. La *norma energética* de la solución exacta $\|\mathbf{u}\|$ y de la solución aproximada de EF $\|\mathbf{u}^h\|$ se definen como:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega} \quad (4.4)$$

$$\|\mathbf{u}^h\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^h)^T \boldsymbol{\varepsilon}^h d\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega} \quad (4.5)$$

De las expresiones anteriores deriva la relación que existe entre la norma energética $\|\mathbf{u}\|$ con la energía de deformación U :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2 \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right)} = \sqrt{2U} \quad (4.6)$$

Desde un punto de vista variacional, hay que recordar que la solución proporcionada por el MEF consiste en la minimización de la energía potencial del sistema, y por lo tanto, la solución de EF se considera energéticamente óptima para una discretización dada. Aunque a nivel ingenieril generalmente interesan ciertas magnitudes como las tensiones, se debe tener en cuenta que la convergencia local de los resultados está sujeta a la convergencia global de los mismos.

Este mismo concepto de la norma energética se puede aplicar sobre la definición del error vista en la Ecuación 4.1, siendo habitual como medida del error de discretización de la solución aproximada. La norma energética del error exacto $\|\mathbf{e}\|$ se escribe entonces como:

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega} \quad (4.7)$$

La expresión anterior constituye la base del estimador ZZ desarrollado por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987) como se verá más adelante. Se puede demostrar por la ortogonalidad de Galerkin que $\|\mathbf{e}\|$ está relacionada con las normas energéticas de la solución

exacta y de EF mediante la expresión:

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}^h\|^2} \quad (4.8)$$

Otra norma que se suele utilizar para medir el error en desplazamientos es la norma L_2 (STRANG Y FIX, 1973, BATHE, 1996). La norma L_2 se define en función de los desplazamientos como:

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{u} d\Omega} \quad (4.9)$$

y, de ahí, la norma L_2 del error en desplazamientos como:

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) d\Omega} \quad (4.10)$$

La norma L_2 permite enfocar el análisis sobre una magnitud de interés en particular. De esta manera, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) proponen evaluar valores cuadráticos medios del error en desplazamientos $\Delta \mathbf{u}$ para un problema de dominio Ω mediante la expresión:

$$\|\Delta \mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{\|\mathbf{e}\|_{L_2}^2}{\Omega}} \quad (4.11)$$

Cada una de las normas vistas anteriormente pueden ser evaluadas para todo el dominio del problema, o evaluadas a nivel de elemento para obtener una medida local del error. Así, para la norma energética se tendrá:

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{n_e} \|\mathbf{e}\|_i^2 \quad (4.12)$$

donde i hace referencia a cada uno de los elementos de dominio Ω_i sobre los cuales se evalúa el error en norma energética, tal que se cumple que $\Omega = \cup_{i=1}^{n_e} \Omega_i$.

4.2.2. Estimación del error de discretización

Todas las formas mencionadas hasta el momento para cuantificar el error de discretización de la solución de EF suponen que la solución exacta \mathbf{u} es conocida. En aplicaciones prácticas, dado que en general no se puede conocer la solución exacta, resulta necesario recurrir a los denominados *estimadores del error de discretización*, los cuales permiten obtener una medida del grado de aproximación de la solución de EF \mathbf{u}^h a la solución exacta \mathbf{u} . De una manera muy amplia, los estimadores del error pueden clasificarse en dos familias principales: (i) *estimadores a priori*, y (ii) *estimadores a posteriori* (STEWART Y HUGHES, 1998).

Los primeros estiman el error antes de que la solución de EF sea conocida (*a priori*), resultando útiles para el diseño del método numérico en sí ya que ofrecen información sobre la velocidad de convergencia del método, así como también para encontrar dependencias entre los diversos parámetros del problema.

Los estimadores del error *a posteriori* permiten evaluar el error estimado luego de haber obtenido la solución aproximada \mathbf{u}^h . Por consiguiente, este tipo de estimadores sí son cuantificables ya que están expresados en términos de la solución conocida de EF. Este tipo de métodos resultan muy útiles en procesos de refinamiento adaptativo y control del error de la solución. Aunque existen diversos tipos de estimadores *a posteriori*, en general, pueden agruparse en tres grupos principales :

1. **Estimadores basados en residuos:** Teniendo en cuenta que la solución de EF es solamente una aproximación de la solución, y que no se cumplen exactamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, estos métodos obtienen una estimación del error por medio de la evaluación del residuo que aparece en la formulación fuerte de EF.
2. **Estimadores basados en técnicas de reconstrucción de la solución:** Obtienen la estimación del error mediante la mejora del campo solución por medio de técnicas de reconstrucción. El campo mejorado reemplaza entonces al campo exacto en la evaluación de la norma energética del error en la Ecuación 4.7.
3. **Estimadores basados en extrapolación:** Considerando que el orden de convergencia es conocido (supuesta ésta monótonica y asintótica) y partiendo de resultados de dos o más discretizaciones diferentes, es posible extrapolar una estimación de la energía de deformación exacta, y por tanto, del error cometido. Un ejemplo de este tipo de estimadores es la técnica de extrapolación de Richardson.

Es posible evaluar la precisión o la calidad del estimador de error tanto a nivel local como a nivel global. Esta evaluación está basada en la efectividad del estimador de error en norma energética, que es cuantificada mediante el índice de efectividad θ , definido como el cociente entre las normas energéticas del error estimado $\|\mathbf{e}_{es}\|$ y el error exacto $\|\mathbf{e}\|$:

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{e}\|} \quad (4.13)$$

El valor ideal para este parámetro es $\theta \approx 1$, SZABÓ Y BABUŠKA (1991) indican que un buen estimador es aquel que proporcione valores entre $0.8 \leq \theta \leq 1.2$. Igualmente, se busca que el estimador sea asintóticamente exacto, es decir, que $\theta \rightarrow 1$ cuando $h \rightarrow 0$. Además, son preferibles los estimadores que sobrestimen el error exacto de manera que $\theta > 1$. La anterior consideración es siempre más conservadora ya que ubica la estimación por el lado de la seguridad.

Para la evaluación de resultados a nivel local se puede utilizar el parámetro denominado efectividad local, D . La definición de dicha magnitud se ha basado en el índice de robustez usado por BABUŠKA ET AL. (1994a). Para cada elemento e , el índice D^e

representa la desviación del índice de efectividad del estimador en ese elemento, θ^e respecto a la unidad (valor ideal), según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} D^e &= \theta^e - 1 & \text{si} & \quad \theta^e \geq 1 \\ D^e &= 1 - \frac{1}{\theta^e} & \text{si} & \quad \theta^e < 1 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \theta^e = \frac{\|\mathbf{e}_{es}^e\|}{\|\mathbf{e}^e\|} \quad (4.14)$$

Obsérvese que θ^e toma valores en el intervalo $(0, 1)$ cuando el error es subestimado y en el intervalo $(1, +\infty)$ cuando es sobrestimado. La definición de efectividad local dada en la Ecuación 4.14 ha sido considerada apropiada ya que da valores dentro del intervalo $(-\infty, 0)$ cuando el error es subestimado y dentro de $(0, +\infty)$ cuando es sobrestimado, lo que permite una mejor comparación. Con la definición propuesta se podrá considerar que el estimador del error es de buena calidad si proporciona valores de D cercanos a cero.

Es evidente que, en general, θ y D solo son calculables cuando se conoce la solución exacta. Por esta razón, dichos parámetros solo pueden ser conocidos para problemas donde existe una solución analítica del modelo matemático, resultando útiles para verificar el comportamiento de los estimadores de error.

Aparte de las características mencionadas hasta el momento, otras propiedades deseables en los estimadores de error son (VERFÜRTH, 1996): i) que estos se puedan definir localmente de manera que puedan guiar procesos adaptativos, ii) que el coste computacional no sea muy elevado, y iii) que proporcionen información sobre el grado de error en tensiones de la solución aproximada.

Por su interés en el desarrollo de este trabajo, y por ser las técnicas donde se han hecho los mayores avances en cuanto a estimación del error de discretización se refiere, se explicarán en las siguientes secciones las técnicas de estimación del error basadas en residuos y, en mayor detalle, las basadas en la reconstrucción de la solución, por ser estas las técnicas en las que se basa el estimador de error propuesto en este trabajo.

4.3. Estimadores de error basados en residuos

Dentro los distintos tipos de estimadores del error *a posteriori* se encuentran los denominados estimadores basados en residuos, los cuales evalúan el residuo de la aproximación de elementos finitos para obtener una estimación de la norma energética del error. Existen dos tipos principales de estimadores basados en residuos. Dependiendo de la manera como se evalúa el residuo de la solución estos pueden ser estimadores de tipo *explícito* o estimadores de tipo *implícito*.

Para el caso de un sólido continuo en equilibrio, el sistema de ecuaciones que gobierna

el problema elastoestático en su denominada *forma fuerte* se define como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.16)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.17)$$

donde \mathbf{n} denota el vector normal unitario hacia el exterior del contorno, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de Cauchy, \mathbf{b} es la función vectorial de fuerzas por unidad de volumen que actúan sobre el cuerpo, $\bar{\mathbf{t}}$ es la función vectorial de tracciones por unidad de superficie impuestas sobre el contorno. \mathbf{u} es el campo de desplazamientos a resolver que satisface la ecuación de equilibrio (Ecuación 4.15) en el dominio Ω del problema, y cumple las condiciones de contorno impuestas en el contorno del dominio Γ (Ecuaciones 4.16 y 4.17). Γ_u es la parte del contorno sobre la cual se aplican las condiciones de contorno esenciales $\bar{\mathbf{u}}$ (tipo Dirichlet), y Γ_t es el contorno con las condiciones de contorno naturales (tipo Neumann). Para que \mathbf{u} sea una solución única se debe cumplir que $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$, $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ y $\Gamma_u \neq \emptyset$.

Es bien conocido que la solución de EF es una aproximación a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales que definen el problema de valor inicial. Por lo tanto, si en la Ecuación 4.15 se reemplaza el campo de la solución exacta \mathbf{u} por la solución aproximada \mathbf{u}^h , aparece un residuo \mathbf{R} llamado residuo interior:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b} = \mathbf{R} \neq 0 \quad (4.18)$$

BABUŠKA Y RHEINOLDT (1978, 1979) demostraron matemáticamente que se puede estimar el error de la solución aproximada evaluando el residuo \mathbf{R} mediante una norma L_2 con términos del tipo:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{R}_{\Omega_e}^2 d\Omega \quad (4.19)$$

Dicho residuo es fácilmente evaluable dentro del dominio de cada elemento Ω_e . Sin embargo, se debe recordar que para el problema elástico lineal, de continuidad C^0 y donde se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, el gradiente de la solución \mathbf{u}^h es discontinuo entre elementos y, por consiguiente, no evaluable en dicha frontera. El efecto del residuo en el contorno cerca de la interfase entre elementos se evalúa, entonces, mediante la integral de los saltos de tracción o discontinuidades \mathbf{J} en el gradiente del campo \mathbf{u}^h , obteniéndose términos del tipo:

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{J}_{\Gamma_e}^2 d\Gamma \quad (4.20)$$

El estimador del error basado en la evaluación de los residuos de la ecuación de equilibrio toma por lo tanto la forma:

$$\|\mathbf{e}_{es}\|^2 = C_1 \int_{\Omega} \mathbf{R}^2 d\Omega + C_2 \int_{\cup \Gamma_e} \mathbf{J}^2 d\Gamma \quad (4.21)$$

Donde $\cup \Gamma_e$ es el total de las interfases entre elementos y C_1, C_2 son parámetros que dependen del tipo de problema. El residuo interior refleja el grado de cumplimiento que tiene la aproximación de elementos finitos respecto a la ecuación diferencial en el interior del dominio, mientras que el residuo en el contorno de Neumann indica la precisión de la aproximación de las condiciones de contorno. Cada uno de los residuos es escalado usando las constantes independientes C_1 y C_2 , que finalmente pueden ser englobadas en una sola constante C , cuyo valor es generalmente desconocido y depende del tipo de problema.

BABUŠKA Y RHEINBOLDT (1978, 1979) definieron la contribución a la estimación de la norma energética del error de un elemento e para un problema en 2D como:

$$\|\mathbf{e}_{es}\|_e^2 = \frac{h^2}{24kp^2} \int_{\Omega_e} \mathbf{R}^2 d\Omega + \frac{h}{24kp} \int_{\Gamma_e} \mathbf{J}^2 d\Gamma \quad (4.22)$$

Donde k es una constante que depende del problema, siendo por ejemplo $k = (E/(1 - \nu))$ en deformación plana, h es el tamaño de elemento, y p es el orden polinómico usado en la aproximación de EF. De las expresiones anteriores se puede razonar que la complejidad del estimador aumenta debido a la necesidad de evaluar las integrales de línea en las fronteras entre elementos. Además, para polinomios de bajo orden, los términos que mayor contribución hacen a la estimación de la Ecuación 4.22 son los que involucran los saltos de tracción¹.

Este tipo de estimadores, que utilizan directamente el residuo en la formulación, son denominados *explícitos* y por lo general tienden a subestimar el error exacto, por lo que es común el uso de factores de corrección (KELLY ET AL., 1983). En SZABÓ Y BABUŠKA (1991) se plantean esta clase de estimadores como medio para obtener directamente cotas superiores del error exacto en norma energética, aprovechando el principio de la mínima energía complementaria. Por otra parte, uno de los principales problemas de los estimadores de tipo explícito es que requieren de la constante C en su formulación, la cual por lo general es desconocida.

Los estimadores del error basados en residuos de tipo *implícito* evitan este inconveniente, aunque con un coste computacional mayor (AINSWORTH Y ODEN, 2000). Para ello, se resuelve localmente un problema de contorno con el fin de evaluar una aproximación del error a partir del residuo. Es decir, mientras que en los estimadores de tipo explícito se calcula directamente la estimación de la norma energética del error, en los estimadores de tipo implícito se aproxima primero la función de error. Esto evita el problema de evaluar y ponderar constantes globales ya que el correcto balance entre los distintos tipos de residuos se realiza durante el proceso de resolución de la función de error, con el inconveniente de tener que resolver un problema de contorno adicional.

¹Considerando el caso del problema elástico sin cargas por unidad de volumen, mallado con elementos triangulares lineales ($p = 1$), se puede observar que el residuo $\mathbf{R}=\mathbf{0}$. Sin embargo, el campo \mathbf{u}^h no es igual a la solución exacta, por lo que el residuo dominante en este caso es el debido a los saltos de tracción entre elementos \mathbf{J}

Considerando el error exacto, $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$, y retomando la formulación débil para el problema de contorno de Neumann vista en la Ecuación 2.8, se puede evaluar una función de error que satisfaga la ecuación residual:

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.23)$$

Para no obtener una solución trivial al resolver el problema de contorno con el mismo espacio de la aproximación de EF es necesario desacoplar el problema global. Se puede entonces plantear el problema a nivel de elemento (*element residual method*) o sobre pequeños conjuntos de elementos (*subdomain residual method*). La estimación global se obtiene posteriormente al sumar las contribuciones de los distintos subdominios. Para el elemento i el problema queda definido como:

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_\sigma + \mathbf{R}_i = 0 \quad \text{en } \Omega_i \quad (4.24)$$

$$\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_t \cap \partial\Omega_i \quad (4.25)$$

$$\mathbf{e} = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \cap \partial\Omega_i \quad (4.26)$$

donde

$$\mathbf{R}_i = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (4.27)$$

se define como el residuo en el elemento, y $\hat{\mathbf{t}}$ como el vector de tracciones normales al contorno del elemento. En la expresión anterior, las tracciones exactas entre los elementos $\bar{\mathbf{t}}$ son en general desconocidas. Sin embargo, es posible remplazarlas utilizando un vector de tracciones reconstruido a partir de la solución de EF, por ejemplo, mediante técnicas de promediado (AINSWORTH Y ODEN, 2000). Observando la formulación del estimador implícito se puede concluir que la parte más importante es la obtención del campo reconstruido $\hat{\mathbf{t}}$. En LADEVÈZE Y LEGUILLON (1983), BANK Y WEISER (1985), ODEN ET AL. (1989) se pueden encontrar distintas técnicas para evaluar dicho campo en el contorno del elemento. En general, interesa obtener un campo reconstruido que este equilibrado, de manera que se pueda garantizar la solución del problema de contorno de Neumann de la Ecuación 4.24.

Los métodos implícitos suelen ser más robustos que los métodos explícitos, en particular el estimador de residuos equilibrados en el elemento (*equilibrated element residual estimator*) explicado con bastante detalle en AINSWORTH Y ODEN (2000), ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000). BABUŠKA ET AL. (1994a,b) presentan un estudio del comportamiento de los estimadores basados en residuos, comparándolos a su vez con estimadores basados en la reconstrucción de la solución.

4.4. Estimadores basados en técnicas de reconstrucción de la solución

En la Ecuación 4.7 se expresaba el error en norma energética en función de la diferencia entre los campos exacto y de EF. Con el fin de obtener una estimación del error de

discretización, las técnicas basadas en la reconstrucción de la solución, o también llamadas técnicas de *recovery*, proponen determinar a partir de la solución de EF ($\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\varepsilon}^h, \boldsymbol{\sigma}^h$) una solución mejorada ($\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*$), obtenida mediante un *procedimiento de reconstrucción de la solución*. Dicha solución mejorada o reconstruida se aproxima más a la solución exacta que la solución derivada del MEF. Una vez obtenida la solución mejorada, se evalúa una estimación del error reemplazando el campo exacto por el campo reconstruido en la Ecuación 4.7. Expresado en términos de varias normas se escribe como:

$$\|\mathbf{e}\| \approx \|\mathbf{e}_{es}\| = \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h\| \quad (4.28)$$

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2} \approx \|\mathbf{e}_{es}\|_{L_2} = \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h\|_{L_2} \quad (4.29)$$

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2, \sigma} \approx \|\mathbf{e}_{es}\|_{L_2, \sigma} = \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{L_2, \sigma} \quad (4.30)$$

4.4.1. Estimador de error ZZ

El primero de los estimadores del error de discretización basados en reconstrucción de la solución fue el denominado estimador ZZ, propuesto por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987). Dicho estimador constituye uno de los métodos más utilizados debido a que su implementación se considera simple dentro de un entorno de EF, y a que en general resulta bastante robusto y ofrece una buena efectividad. En este apartado se presenta una revisión de las características principales de este tipo de estimador. Para una mayor profundidad, consultar la literatura original (ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1987, 1992a,b), así como las extensiones del método presentadas por BOROOMAND Y ZIENKIEWICZ (1997b) y ZHANG Y ZHU (1998). Además, resultan de interés los análisis matemáticos del método presentados por VERFÜRTH (1996) y AINSWORTH Y ODEN (1997).

El estimador está basado en el postprocesamiento del gradiente de la solución de EF para la obtención de un campo reconstruido con el cual se evalúa el error estimado como la norma energética de la diferencia entre el campo reconstruido y la solución de EF. Reemplazando el campo exacto en la Ecuación 4.7 por el campo reconstruido se puede escribir:

$$\|\mathbf{e}_{es}\|^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \quad (4.31)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^*$ representa el denominado *campo de tensiones reconstruido*, que se supone es una aproximación a la solución exacta de mejor calidad que $\boldsymbol{\sigma}^h$. El dominio Ω se puede referir al dominio completo o a un subdominio local (elemento).

Para evaluar el campo de tensiones reconstruidas $\boldsymbol{\sigma}^*$ dentro del dominio de cada elemento se suele usar la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \quad (4.32)$$

siendo \mathbf{N} las funciones de forma usadas en la interpolación de desplazamientos y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ el vector de las tensiones reconstruidas evaluadas en los nodos del elemento. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ se

puede obtener mediante diferentes técnicas de reconstrucción (promediado en nodos, SPR, ...), como se explicará más adelante en la Sección 4.4.2. Aunque se podrían utilizar funciones de mayor grado polinómico para interpolar la solución en los nodos, AINSWORTH ET AL. (1989) demostraron que el uso de las funciones \mathbf{N} proporciona una buena precisión del estimador con un bajo coste de procesamiento, siendo la mejor opción en el caso del estimador ZZ.

Con las técnicas de reconstrucción utilizadas en ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987) para obtener el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$, los autores señalaron que el estimador ZZ tiende a subestimar el error en norma energética, y proponen una serie de factores correctores para distintos tipos de elemento obtenidos experimentalmente. RANK Y ZIENKIEWICZ (1987) demostraron de forma matemática la equivalencia con los estimadores de error basados en residuos para el caso de elementos bilineales.

Según indicaron ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992b) el estimador de error ZZ es considerado asintóticamente exacto si la solución reconstruida usada en la estimación del error es superconvergente, es decir, si $\boldsymbol{\sigma}^*$ converge más rápido a la solución exacta que $\boldsymbol{\sigma}^h$. Adicionalmente, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) indicaron que cualquier técnica de reconstrucción que proporcione una reducción del error del gradiente de la aproximación, puede ser utilizada para estimar razonablemente el error de discretización. Las anteriores propiedades se desprenden del teorema presentado por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992b), donde se definen cotas del índice de efectividad local para los estimadores basados en reconstrucción de la solución:

$$1 - \frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{e}\|} \leq \theta \leq 1 + \frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{e}\|} \quad (4.33)$$

siendo $\|\mathbf{e}\|$ el error exacto y $\|\mathbf{e}^*\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|$ el error de la solución reconstruida. La demostración de este teorema resulta de expresar la norma energética del error estimado de la Ecuación 4.31 como:

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h\| = \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) - (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)\| = \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^*\| \quad (4.34)$$

Donde usando la desigualdad triangular se tiene:

$$\|\mathbf{e}\| - \|\mathbf{e}^*\| \leq \|\mathbf{e}_{es}\| \leq \|\mathbf{e}\| + \|\mathbf{e}^*\| \quad (4.35)$$

Obteniendo posteriormente la expresión de la Ecuación 4.33 si se divide entre $\|\mathbf{e}\|$.

En este sentido, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (1989) subrayan el carácter heurístico de la formulación original. Sin embargo, se puede considerar que el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ es en realidad una mejor estimación del campo exacto que $\boldsymbol{\sigma}^h$ basándose en los siguientes razonamientos (GINER, 2001):

- El campo $\boldsymbol{\sigma}^h$ se obtiene derivando el campo solución de desplazamientos de continuidad C^0 , siendo por lo tanto discontinuo entre elementos. Sin embargo, el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ evaluado en los nodos es continuo, al igual que lo es la solución exacta.

- Discontinuo y con un orden de convergencia del error $O(h^p)$, el campo σ^h solo es óptimo en los puntos de Gauss. Por el contrario, el campo reconstruido σ^* está distribuido en cada elemento con un orden de interpolación mayor ya que se ha construido proyectando las tensiones sobre las funciones de forma de continuidad C^0 . Por lo tanto, la estimación de σ^* en cualquier punto del dominio del elemento tiende a ser igual o mejor que la dada por σ^h y puede alcanzar un orden de convergencia $O(h^{p+1})$ (ZIENKIEWICZ Y TAYLOR, 2000).

En AINSWORTH ET AL. (1989) se puede encontrar un análisis completo del comportamiento del estimador ZZ, así como también justificaciones matemáticas de algunas de sus propiedades, comprobando así la validez del planteamiento un tanto heurístico de la formulación original.

Como se ha señalado anteriormente, el estimador propuesto por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987) posee bastantes características destacables entre las que se distinguen:

- La evaluación del campo reconstruido σ^* no resulta en absoluto un problema, ya que en la mayoría de los casos los programas de EF incorporan el cálculo de una solución mejorada de tensiones en el postprocesamiento.
- Puede ser extrapolado fácilmente a diferentes tipos de problemas, el estimador ZZ fue la primera técnica práctica y efectiva en ofrecer un análisis del error a los usuarios del MEF (DOW, 1999).
- La implementación del método dentro de códigos de EF resulta más sencilla que para los métodos basados en residuos, por lo que resulta idóneo como técnica de estimación *a posteriori*.
- Al igual que los estimadores basados en residuos, el estimador puede ser utilizado para guiar procesos adaptativos diseñados para controlar y minimizar el error, ya que brinda estimaciones de la norma energética del error a nivel de elemento (ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1987).

La técnica presentada originalmente por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987) presenta, sin embargo, dos problemas fundamentales (DOW, 1999). En primer lugar, el campo reconstruido que se obtiene no fuerza de manera explícita el cumplimiento de las condiciones de contorno del problema a resolver. Por esta razón, no es capaz de estimar el error de manera precisa en los elementos sobre el contorno, especialmente en mallas poco refinadas, apareciendo una subestimación del error en dichos elementos. Cabe notar que es precisamente en el contorno donde, por lo general, los resultados obtenidos tienen mayor interés desde el punto de vista ingenieril. Para corregir este problema es necesario modificar la técnica de reconstrucción utilizada para evaluar σ^* , de manera que se garantice el cumplimiento de las condiciones de contorno. Las alternativas para lograr esto se verán más adelante.

En segundo lugar, al seguir un planteamiento global, el estimador del error ZZ no es capaz de evaluar de manera precisa los errores en puntos específicos del modelo. Esto significa, por ejemplo, que pueden existir altos niveles de error en determinados puntos, aún cuando los criterios globales de error en energía de deformación indiquen

lo contrario. Lo anterior perjudica la convergencia de la solución y la confianza en los resultados obtenidos. Esto mismo está relacionado con otro problema del estimador ZZ señalado por AINSWORTH Y ODEN (2000), donde según indica, la estimación obtenida mediante este método puede ser igual a cero cuando en realidad no tiene valor nulo. Para ciertos problemas es posible que exista un efecto de compensación entre las zonas donde se sobrestima el error y las zonas donde se subestima, dando al final una mala estimación del error global en norma energética $\|\mathbf{e}_{es}\|$. En todo caso, es posible realizar una estimación del error a nivel local, evaluando por ejemplo la norma energética del error a nivel de elemento.

Por otra parte, BABUŠKA ET AL. (1997a) indicaron que, en general, la precisión del campo reconstruido a partir del gradiente de la solución no es necesariamente mayor que la precisión del campo derivado directamente de la solución de EF, independientemente de la técnica de reconstrucción utilizada. En particular, observaron que el comportamiento del estimador empeoraba cuando se utilizaban mallados uniformes o casi uniformes en problemas con singularidades debidas, por ejemplo, a entallas en V en la geometría o cambios en el tipo de condiciones de contorno, como es el caso de los problemas propios de la MFEL. En estos casos, el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ tiene prácticamente el mismo nivel de error que el gradiente de la solución de EF $\boldsymbol{\sigma}^h$ y, en consecuencia, el error estimado da erróneamente muy bajo. Este comportamiento se debe primordialmente a que el cálculo del error local no considera el efecto del llamado *error de polución*.

BABUŠKA ET AL. (1995) indicaron que el error en un conjunto de elementos $\omega \subset \Omega$ se puede dividir en dos partes: el *error local*, $\mathbf{e}_\omega^{\text{loc}}$, y el *error de polución*, $\mathbf{e}_\omega^{\text{pol}}$,

$$\mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_\omega^{\text{loc}} + \mathbf{e}_\omega^{\text{pol}} \quad \omega \subset \Omega \quad (4.36)$$

El término *polución* se refiere a que el error asociado a un elemento afecta al error que aparece en otros elementos de la malla, extendiéndose por todo el dominio del problema. Cuando la evaluación global del error, formulada usando toda la malla de elementos, se reemplaza por una serie de estimaciones locales evaluadas en diferentes conjuntos de elementos, la interacción entre los dominios locales desaparece y, por lo tanto, se debe considerar el efecto del denominado *error de polución*. BABUŠKA ET AL. (1997a), SZABÓ Y BABUŠKA (1991) señalaron que si el error de polución es relativamente mayor que el error local en un conjunto de elementos, la precisión del campo reconstruido obtenido en dicha zona disminuye de manera considerable. AINSWORTH Y ODEN (2000) indicaron que cuando se usan reconstrucciones de la solución de carácter local incluso puede ocurrir que el error \mathbf{e}_ω no disminuya cuando se realizan refinamientos adaptativos guiados exclusivamente con el error local $\mathbf{e}_\omega^{\text{loc}}$. BABUŠKA ET AL. (1995) recomiendan controlar el error de polución mediante técnicas de refinamiento adaptativo, de manera que se mantenga la relación entre el error de polución y el error local lo más baja posible.

4.4.2. Técnicas de reconstrucción de la solución

Si se examina la expresión de la Ecuación 4.31 que define el principio fundamental de los estimadores basados en reconstrucción de la solución, resulta indudable que la precisión de este tipo de estimadores depende de la calidad de la solución reconstruida σ^* . Existen numerosas técnicas de reconstrucción que permiten obtener campos mejorados de tensiones a partir de la solución de EF, como por ejemplo:

- Promediado directo en nodos
- Técnicas basadas en Métodos de Mínimos Cuadrados
- Métodos de medias ponderadas
- Superconvergent Patch Recovery (SPR)

Actualmente, la familia de técnicas basadas en el SPR es la más utilizada para la reconstrucción de valores de tensión. En particular, la técnica de estimación de error para XFEM desarrollada más adelante en esta tesis se ha planteado como una modificación de la técnica SPR, de manera que pueda ser utilizada con aproximaciones enriquecidas. En este apartado se describirán de forma breve algunos de los procedimientos mencionados anteriormente, indicando sus limitaciones, mientras que por su importancia, la técnica SPR se expondrá en secciones posteriores con mayor detalle.

Promediado directo en nodos

La técnica de promediado directo en nodos junto con la técnica de proyección L_2 fueron las primeras técnicas de reconstrucción utilizadas en el estimador propuesto por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987). El promediado directo en nodos se presenta como una técnica que simplifica en gran medida la evaluación del campo reconstruido de tensiones σ^* . El campo gradiente de la solución de EF σ^h es discontinuo entre elementos, por lo que en los nodos y en el contorno entre elementos existen diferentes valores para la tensión, dependiendo del elemento que se este considerando. Con el fin de construir un campo reconstruido σ^* que sea continuo, al igual que lo es el campo solución exacto, se realiza el promediando en cada nodo n de los valores de tensión asociados a cada uno de los elementos conectados al nodo n , obteniendo el campo $\bar{\sigma}^*$. Posteriormente, las tensiones dentro del dominio del elemento se evalúan usando las mismas funciones de interpolación de la aproximación de EF. Un análisis matemático de esta técnica se expone en BRAMBLE Y SCHATZ (1977). La técnica de promediado directo en nodos produce resultados muy similares a los obtenidos con el ajuste por mínimos cuadrados, con la diferencia de que es computacionalmente un procedimiento mucho más simple y eficiente. Sin embargo, ambas técnicas presentan problemas de precisión en la estimación del error en los elementos del contorno.

Evaluar las tensiones promediadas en nodos $\bar{\sigma}^*$ en elementos triangulares lineales es inmediato, ya que el campo de tensión σ^h es constante dentro del dominio de este tipo

de elementos. No obstante, para elementos de orden superior o elementos cuadriláteros, en los cuales la tensión no es constante, es necesario realizar una extrapolación a los nodos de los valores de tensión evaluados en los puntos de integración antes de realizar el promediado.

Técnicas basadas en Métodos de Mínimos Cuadrados

También llamadas técnicas de proyección L_2 , fueron desarrolladas por HINTON Y CAMPBELL (1974). La técnica de reconstrucción mediante la proyección L_2 calcula el campo σ^* de manera que minimice la norma del error en tensiones con respecto al campo discontinuo de elementos finitos σ^h mediante el funcional:

$$\chi = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma^h)^2 d\Omega \quad (4.37)$$

Dicho funcional puede interpretarse entonces como una función ponderada de los errores en tensiones. Además, si el campo reconstruido σ^* es interpolado a partir de valores nodales $\bar{\sigma}^*$, Ecuación 4.32, mediante el uso de la función de interpolación de desplazamientos de la formulación inicial de EF, el problema se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones que da como resultado los valores nodales $\bar{\sigma}^*$.

Si se expresa el funcional a nivel de elemento, el funcional para todo el dominio se define como:

$$\chi = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}\bar{\sigma}^* - \sigma^h)^T (\mathbf{N}\bar{\sigma}^* - \sigma^h) d\Omega \quad (4.38)$$

La ecuación a minimizar se expresa como:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\sigma}_i^*} = 0 \quad (4.39)$$

Donde $\partial \bar{\sigma}_i^*$ hace referencia a la i -ésima componente del vector $\bar{\sigma}^*$. Por lo tanto el sistema a resolver tiene la forma:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\bar{\sigma}^* - \sigma^h) d\Omega = 0 \quad (4.40)$$

Expresado en forma matricial como:

$$\mathbf{M}\bar{\sigma}^* = \mathbf{f} \quad (4.41)$$

donde:

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{f} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \sigma^h d\Omega \quad (4.42)$$

Este planteamiento corresponde al denominado *alisado global*, ya que en él se resuelven simultáneamente los valores del campo reconstruido para todos los nodos. HINTON Y CAMPBELL (1974) recomiendan que las funciones de forma utilizadas \mathbf{N} sean del mismo orden que las funciones de forma de la aproximación de desplazamientos, de manera que se pueda garantizar la continuidad del campo reconstruido de tensiones.

En general, este procedimiento de reconstrucción resulta costoso computacionalmente ya que resuelve un sistema de ecuaciones de tamaño similar a la aproximación de desplazamientos de EF. Además, tiene el problema de que tiende a subestimar los errores no solo en elementos sobre el contorno, sino también en el interior del dominio (Dow, 1999).

Por otra parte, cuando el funcional χ se expresa en forma matricial, la expresión para \mathbf{M} de la Ecuación 4.42 toma una forma similar a la matriz de masa consistente utilizada en el análisis dinámico de estructuras. En este sentido, se puede reducir el coste computacional de la inversión de \mathbf{M} mediante la utilización de técnicas ya desarrolladas para los problemas de la dinámica estructural, como por ejemplo, la diagonalización de la matriz \mathbf{M} para obtener matrices de masa concentrada, o el uso de procedimientos iterativos como plantea OLIVER (1991).

Además, es posible disminuir la complejidad del problema si se aplica el método de reconstrucción sobre cada elemento de forma independiente, en lugar de resolverlo simultáneamente para todo el dominio. Este enfoque denominado *alisado local* reduce el tamaño de los sistemas lineales a resolver, aunque tiene el inconveniente de que se obtienen varios valores distintos de tensión en los nodos, dependiendo del número de elementos que compartan cada nodo. Por esta razón, con el fin de garantizar la continuidad del campo reconstruido obtenido, HINTON Y CAMPBELL (1974) proponen realizar un promediado posterior de los valores calculados en cada nodo. Los mismos autores indican que el *alisado local* puede interpretarse como una técnica de extrapolación de los valores en puntos de integración.

Métodos de medias ponderadas

ZHONG (1991) plantea una mejora al método de promediado en nodos visto anteriormente, en la cual se incluyen factores de ponderación que tengan en cuenta las características geométricas de los elementos que rodean cada nodo n . La formulación mediante ponderación se realiza por medio de la expresión:

$$\bar{\sigma}_n^* = \sum_{e=1}^{m_n} w_e \sigma_e^h \quad (4.43)$$

Donde $\bar{\sigma}_n^*$ es el valor de la componente de tensión reconstruida a evaluar en el nodo n , m_n es el número de elementos conectados al nodo n , w_e es el factor de ponderación del elemento e , y σ_e^h es el valor de la componente de tensión calculada mediante EF en e . En general, los factores de ponderación w_e en los elementos conectados a un

nodo n deben ser mayores de cero ($w_e > 0$ para $e = 1 \dots m_n$), y el sumatorio de los mismos debe ser igual a la unidad ($\sum_{e=1}^{m_n} w_e = 1$).

Los factores de ponderación pueden expresarse mediante la expresión:

$$w_e = \frac{C_e}{\sum_{e=1}^{m_n} C_e} \quad e = 1 \dots m_n \quad (4.44)$$

Donde C_e es la contribución del elemento e . De esta forma, se pueden definir diferentes maneras de evaluar los factores de ponderación basándose en el parámetro C_e . Cuando $C_e = 1$ el método corresponde a la media aritmética equivalente al método de promediado en nodos, ya que todos los elementos tienen el mismo peso. Si se quiere ponderar de acuerdo al tamaño de cada elemento se puede utilizar la expresión $C_e = \Omega_e$, donde Ω_e es el volumen de cada elemento. ZHONG (1991) indicó que los mejores resultados se obtienen cuando se define $C_e = \alpha_e/L_e$, donde α_e representa el ángulo de abertura del elemento e en el nodo n y L_e es la distancia del nodo al centro del elemento.

Igual que en las técnicas anteriores, los métodos de medias ponderadas presentan problemas para estimar con precisión el valor de la tensión en los elementos del contorno. En general, el valor obtenido tras la ponderación se encuentra entre los valores mínimo y máximo de tensión en los elementos considerados, mientras que el valor exacto cae fuera de este rango. ZHONG incluye funciones de extrapolación para mejorar la estimación del error en los nodos sobre el contorno cuando se utilizan medias ponderadas.

4.4.3. Técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR)

En 1992, ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a,b) cambiaron por completo la estrategia de reconstrucción del campo reconstruido σ^* , de forma que fuera más eficiente y estimara mejor el error en elementos, especialmente en el contorno. Para ello, propusieron un esquema local de reconstrucción que aprovechara las propiedades de superconvergencia de las tensiones σ^h en los puntos de Gauss. Según se explica en BARLOW (1976), existen determinados puntos en el elemento donde las tensiones son evaluadas con mayor precisión que en el resto del dominio del elemento. Dichos puntos se denominan puntos de *superconvergencia*, y se caracterizan porque la tensión converge a la solución exacta a la misma velocidad que los desplazamientos, siendo el orden del error de discretización un grado mayor $O(h^{p+1})$ (ver ZHU Y LIN, 1989, ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1992a). Para el resto del dominio del elemento el error decrece más lentamente, con un orden de convergencia $O(h^p)$, habitual para elementos de grado p . ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a), ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) indican que los puntos de superconvergencia coinciden con los puntos de integración para elementos unidimensionales o cuadriláteros, tanto de orden lineal como cuadrático².

²Aunque para elementos triangulares no se ha comprobado la existencia de puntos de superconvergencia, existen determinados puntos en este tipo de elementos donde la evaluación de las tensiones se considera lo suficientemente buena para aplicar la técnica SPR (ZHU Y LIN, 1989).

Una vez se entiende que en los puntos de superconvergencia los valores de σ^h se estiman con mayor precisión, resulta interesante plantear un esquema de reconstrucción de tensiones que involucre la reconstrucción de los valores de tensión en dichos puntos. Con este fin, ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) proponen una técnica fundamentalmente heurística para obtener los valores de tensión reconstruida en los nodos $\bar{\sigma}^*$ a partir de una expansión polinómica continua σ_i^* , definida sobre un conjunto de elementos contiguos denominado *patch*, formado con todos los elementos que comparten un mismo *nodo vértice* o *nodo de ensamblado* i (ver Figura 4.1). σ_i^* es una expansión de orden completo igual al de las funciones de forma \mathbf{N} . Para obtener los coeficientes de los términos de la expansión polinómica se realiza un ajuste de mínimos cuadrados con los valores de tensión en los puntos de superconvergencia.

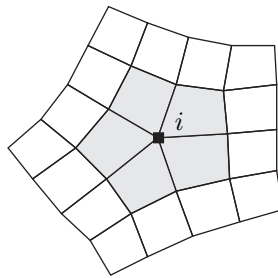


FIGURA 4.1. *Patch de elementos para el nodo i .*

La técnica SPR es una técnica superconvergente de reconstrucción de tensiones que resulta computacionalmente muy eficiente, ya que los sistemas de ecuaciones a resolver en cada patch son relativamente pequeños. Por su simplicidad, y por la calidad del campo reconstruido obtenido, la técnica representa una mejora respecto a técnicas anteriores. ZIENKIEWICZ Y ZHU (1995) exponen la superioridad de la técnica SPR frente a las técnicas de proyección de L_2 . Los mismos autores señalan que la falta de precisión en la reconstrucción del campo de tensiones de las técnicas basadas en mínimos cuadrados, descritas en la Sección 4.4.2, se debe a una inconsistencia de la formulación al minimizar el funcional de la Ecuación 4.37. Asimismo, cabe señalar que la superconvergencia del campo gradiente en las técnicas de proyección L_2 se alcanza solo para elementos de orden par, según detallan ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) para el caso unidimensional. Incluso, bajo ciertas circunstancias puede suceder que el error local de la solución σ^* sea peor que el error de σ^h .

A continuación se describe en detalle la técnica SPR tal como fue propuesta inicialmente por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a). Primero, se debe recordar que las técnicas de reconstrucción de tensiones buscan obtener un campo reconstruido de mayor calidad σ^* , que se evalúa mediante la interpolación de valores de tensión reconstruidas en los nodos como se indicó en la Ecuación 4.32:

$$\sigma^* = \mathbf{N}\bar{\sigma}^*$$

Para obtener $\bar{\sigma}^*$ ZIENKIEWICZ Y ZHU utilizaron una aproximación polinómica de

grado p definida localmente en cada *patch*. La precisión de dicha aproximación se considera superconvergente en todos los puntos del patch siempre que los polinomios se hayan ajustado utilizando los puntos de superconvergencia mediante una técnica de mínimos cuadrados. Para cada una de las componentes de tensión σ_j , la expansión polinómica $\sigma_{i,j}^*$ que ajusta la tensión en el patch del nodo i se escribe como:

$$\sigma_{i,j}^* = \mathbf{p}\mathbf{a} \quad (4.45)$$

donde \mathbf{p} contiene los términos del desarrollo polinómico y \mathbf{a}_j es el vector de coeficientes polinómicos desconocidos correspondientes a la componente de tensión σ_j :

$$\mathbf{p} = \{1, x, y, \dots, y^p\} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}^T \quad (4.47)$$

Por ejemplo, para cada una de las componentes del vector de tensión con elementos lineales en el caso 2D, se tendría el polinomio completo \mathbf{p} y el vector \mathbf{a} :

$$\mathbf{p} = \{1, x, y\} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}^T \quad (4.49)$$

donde x e y son coordenadas locales en el sistema cartesiano de referencia en el cual está expresada $\sigma_{i,j}^*$.

Los valores de tensión de elementos finitos evaluados en los puntos de superconvergencia, o dado el caso en puntos óptimos, son usados para evaluar el vector \mathbf{a} mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Con este fin, para cada patch se minimiza con respecto a los coeficientes desconocidos \mathbf{a} el funcional:

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n_{pg}} (\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\sigma}_i^*(\mathbf{x}_k))^2 \quad (4.50)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_{pg}} (\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)\mathbf{a})^2 \quad (4.51)$$

donde \mathbf{x}_k son las coordenadas de cada uno de los puntos de evaluación de tensiones, y n_{pg} es el número total de puntos de muestreo de tensiones dentro del patch. La condición de minimización de $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ implica que \mathbf{a} satisface el sistema de ecuaciones lineales definido por:

$$\sum_{k=1}^{n_{pg}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)^T \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k) - \sum_{k=1}^{n_{pg}} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) \mathbf{a} = 0 \quad (4.52)$$

De donde se pueden obtener los coeficientes \mathbf{a} resolviendo el sistema de ecuaciones expresado en forma matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (4.53)$$

siendo

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n_{pg}} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) \quad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n_{pg}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)^T \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k) \quad (4.54)$$

Desarrollando las expresiones anteriores para el caso bidimensional lineal se tiene:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n_{pg}} \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ x_k & x_k^2 & x_k y_k \\ y_k & x_k y_k & y_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n_{pg}} [\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k), \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k)x_k, \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_k)y_k]^T \quad (4.56)$$

Como resultado de lo anterior, se puede observar que el sistema de ecuaciones a resolver en cada patch es relativamente pequeño, siendo, por ejemplo, para el caso lineal un sistema lineal de tres ecuaciones. Asimismo, la reconstrucción solo se aplica en nodos vértice y la matriz \mathbf{A} que se invierte es la misma para todas las componentes de tensión. Estas características permiten que la técnica de reconstrucción tenga un costo computacional bajo comparado con otras técnicas como la de proyección global L_2 de HINTON Y CAMPBELL (1974).

Una vez que los parámetros \mathbf{a} han sido calculados para cada componente de tensión, los valores de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ en el nodo de ensamblado del patch son obtenidos por sustitución de las coordenadas nodales en las expresiones polinómicas $\boldsymbol{\sigma}_i^*$, según se indicó en la Ecuación 4.45. ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992b) indican que se puede inferir que los valores de $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ en todo el dominio del patch son superconvergentes, ya que han sido ajustados a partir de un conjunto de puntos de muestreo que son superconvergentes, y comprueban mediante resultados numéricos dicho comportamiento.

Para el caso de elementos cuadráticos, los valores de tensión en los nodos de medio lado son evaluables desde dos patches distintos. Esto es, desde los dos patches correspondientes a los nodos vértices que forman el lado al cual pertenece el nodo de mitad de lado. Como ambos valores son superconvergentes, ZIENKIEWICZ Y ZHU proponen evaluar la tensión reconstruida en el nodo de mitad de lado como el promedio de las estimaciones realizadas desde los dos nodos vértice.

Características de la implementación del SPR

Estudios comparativos BABUŠKA ET AL. (1994a, 1997b) han demostrado la robustez de la técnica SPR y su buen comportamiento cuando se utiliza en el entorno del MEF. Sin embargo, la técnica presenta problemas en los nodos del contorno, especialmente en los nodos esquina, donde es frecuente tener un número insuficiente de puntos de muestreo de tensiones (puntos de superconvergencia) para ajustar el polinomio de grado p requerido. En los nodos del contorno se pueden establecer dos formas distintas de evaluar la tensión reconstruida, dependiendo de la forma de realizar el ensamblado de los patches:

Patch de nodo de contorno. Se forma el patch con los elementos conectados al nodo sobre el contorno, siguiendo el mismo procedimiento que para el resto de nodos interiores. La programación es sencilla ya que utiliza el mismo criterio de ensamblado de patches para todos los nodos de la malla. No obstante, es posible que no se tenga un número suficiente de puntos de evaluación de tensiones para resolver el sistema de ecuaciones, ya que los nodos sobre el contorno están topológicamente conectados a un número inferior de elementos.

Patch de nodo interior. Para evitar obtener sistemas de ecuaciones no resolubles, se plantea evaluar la tensión reconstruida en los nodos del contorno utilizando patches de nodos interiores. Resulta claro que dichos patches deben contener al nodo sobre el contorno. Este planteamiento aumenta la complejidad de la implementación, distinguiendo entre dos tipos de nodos al momento de ensamblar los patches, los nodos interiores y los nodos sobre el contorno.

ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) compararon la precisión del campo reconstruido σ^* obtenido mediante ambos tipos de tratamiento para los nodos sobre el contorno, encontrando resultados semejantes entre los dos procedimientos. Sin embargo, recomiendan el uso de patches de nodos interiores ya que disminuyen el riesgo de obtener sistemas de ecuaciones no resolubles. En todo caso, también es posible utilizar ajustes polinómicos de un orden inferior sobre los patches de nodos del contorno.

Para garantizar la obtención de sistemas de ecuaciones que sean siempre resolubles, LABBE Y GARON (1995) plantean la utilización de un número de puntos de Gauss igual o superior al número de términos polinómicos usados para ajustar las tensiones. En el caso de mallas triangulares ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) propusieron inicialmente utilizar los puntos donde la tensión tiene una precisión óptima³ como puntos de muestreo de tensiones. En los triángulos lineales existe un solo punto óptimo, mientras que para triángulos cuadráticos se utilizan tres puntos, tal como se indica en la Figura 4.2. Por lo tanto, en el caso de triángulos lineales se necesitaría un mínimo de tres elementos en los patches para resolver el sistema de ecuaciones, y dos elementos en el caso de triángulos cuadráticos. No obstante, se pueden encontrar con frecuencia situaciones en las que se tienen patches formados en el contorno solo por uno o dos elementos (ver Figura 4.3), siendo común en los procesos de refinamiento adaptativo.

Una situación particular se presenta en el ensamblado de los patches cuando existe una interfase entre dos materiales. Para el caso de una discontinuidad del material, la continuidad del campo de tensiones no se satisface en la interfase. ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) indican que en estos casos, se consideran los nodos sobre la interfase como nodos de contorno, pudiéndose alisar las tensiones desde patches de nodos interiores a cada lado de la interfase (ver Figura 4.4). También, en STEIN ET AL. (2003) se expone la reconstrucción de tensiones mediante la técnica SPR utilizada en el contexto de problemas de contacto, donde se considera que las tensiones son continuas pero no son suaves a lo largo de la interfase de contacto. Con el fin de mantener el

³Recordar que para elementos triangulares no se garantiza la existencia de puntos de superconvergencia. No obstante, MOAN (1974), ZHU Y LIN (1989) sugieren el uso de ciertos puntos donde la evaluación de la tensión es óptima para este tipo de elementos.

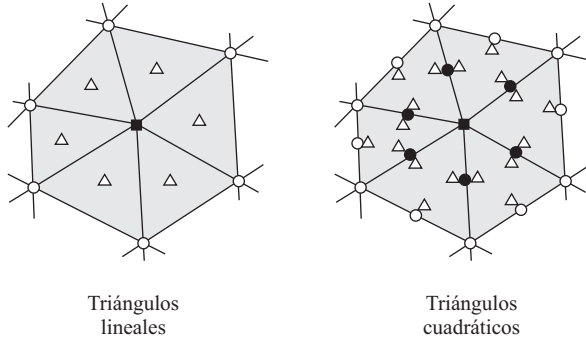


FIGURA 4.2. Cálculo de valores nodales superconvergentes para elementos lineales y cuadráticos: ■ nodo de ensamblado del patch, ○ nodos que pertenecen al patch, ● nodos donde se reconstruyen las tensiones además del nodo de ensamblado, △ puntos de evaluación de tensiones.

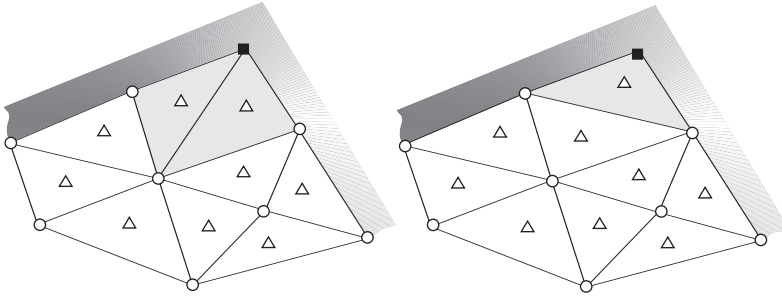


FIGURA 4.3. Patches en la frontera del dominio con 1 ó 2 elementos: ■ nodo de ensamblado del patch, △ puntos de evaluación de tensiones.

equilibrio local, se plantea una extensión del patch a cada lado de la interfase.

Como se ha visto hasta ahora, el planteamiento del método es fundamentalmente heurístico. Criterios como el esquema a seguir para la formación de los patches (por ejemplo en los nodos del contorno) son decisiones a tomar en el momento de la implementación del método. En este sentido, se indican en AKIN (2005) otros posibles criterios de ensamblado de patches además del original:

- Patch basado en nodos: Es el utilizado por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a), en el cual los patches se forman con los elementos conectados a los nodos vértice.
- Patch basado en elementos: El patch se forma con los elementos adyacentes a un elemento particular.
- Patch basado en lados: Se toman los elementos que comparten lados (o caras en el caso 3D) con un elemento en particular.

En ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) aparecen resultados de convergencia para un problema unidimensional, donde se verifica que σ^* es superconvergente con una velocidad

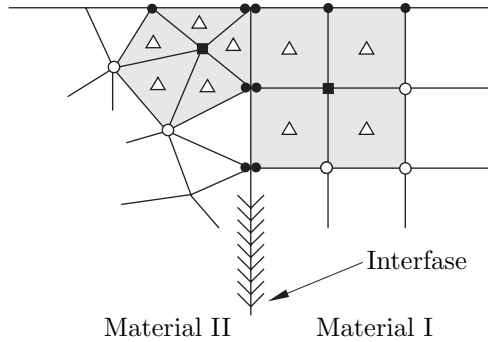


FIGURA 4.4. Patches utilizados para la reconstrucción de tensiones en la interfase entre dos materiales.

de convergencia al menos un orden superior a la velocidad calculada para σ^h . Además, se comprueba que los resultados con técnicas de proyección L_2 son de calidad inferior, mientras que con la técnica SPR se puede alcanzar incluso *ultraconvergencia*⁴. Los mismos autores indican que para mallas irregulares, la superconvergencia completa en los puntos de muestreo se pierde debido a las distorsiones geométricas de los elementos, sin embargo, los valores son lo suficientemente buenos para realizar la reconstrucción. En general, para mallas regulares se obtienen resultados superconvergentes, y para mallas irregulares o con elementos triangulares los resultados son de muy buena calidad (casi superconvergentes).

La técnica propuesta en ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) puede presentar problemas de mal condicionamiento de los sistemas lineales a resolver en cada patch cuando se utilizan coordenadas globales, esto ocurre especialmente cuando se utilizan tamaños de elemento muy pequeños, o elementos de alto grado polinómico. ZIENKIEWICZ ET AL. (1993) proponen el uso de coordenadas locales normalizadas con el fin de mejorar el condicionamiento numérico de las matrices ensambladas en cada patch. Según indican, se recomienda el uso de coordenadas normalizadas (\bar{x}, \bar{y}) dadas por las expresiones:

$$\bar{x} = -1 + 2 \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad \bar{y} = -1 + 2 \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}} \quad (4.57)$$

siendo $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$ los valores mínimos y máximos de las coordenadas (x, y) del patch, quedando normalizadas las coordenadas de los puntos de muestreo entre -1 y 1.

Para concluir, se resumen a continuación las características más relevantes de la técnica SPR:

⁴La convergencia de las tensiones de EF es del orden $O(h^p)$, mientras que la obtenida con técnicas superconvergentes es del orden $O(h^{p+1})$. Según se explica en ZHANG (1996), si se utiliza refinamiento uniforme y funciones de forma de orden par se puede aumentar en dos el orden de convergencia $O(h^{p+2})$. Dicho efecto es lo que se denomina como *ultraconvergencia*.

- **Bajo coste computacional.** Comparada con los métodos de reconstrucción globales, la técnica SPR es más eficiente computacionalmente, recuperando las tensiones localmente en patches de manera rápida y sencilla. Se recomienda su uso en la práctica para el postprocesamiento de los resultados de EF.
- **Velocidad de convergencia.** Las tensiones reconstruidas mediante esta técnica se consideran superconvergentes. En algunos casos se logra incluso ultraconvergencia, aunque nunca en el contorno. Así, la norma energética evaluada en todo el dominio resulta superconvergente de orden $O(h^{p+\alpha})$, donde $\alpha \geq 1$ para elementos unidimensionales y cuadriláteros en dos dimensiones, y $\alpha \geq 0.5$ para triángulos (ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1992a).
- **Precisión de las tensiones reconstruidas.** El campo de tensiones reconstruido σ^* tiene un nivel de error muy bajo comparado con la solución σ^h . Aunque el propósito principal de la técnica SPR es la estimación del error de la solución de EF, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) recomiendan que el SPR *debería ser incluido en los códigos de EF tan solo por el hecho de brindar valores mejorados de tensión*.
- **Evolución del índice de efectividad.** La utilización de la técnica SPR como técnica de reconstrucción de tensiones en el estimador ZZ conlleva que el estimador sea asintóticamente exacto, es decir, que la efectividad converja asintóticamente a la unidad a medida que se refina la malla (ZIENKIEWICZ Y TAYLOR, 2000). Esta propiedad deriva del teorema de ZIENKIEWICZ Y ZHU descrito anteriormente en la Ecuación 4.33. Como se indicó en ese momento, si la solución reconstruida σ^* tiene una velocidad de convergencia superior a la de la solución de EF, el estimador del error será asintóticamente exacto.
- **Extensión a diferentes tipos de problemas.** Aunque en ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) se presentan resultados de la técnica para problemas relativamente simples en una y dos dimensiones, los autores indican que la misma metodología es fácilmente aplicable a problemas en tres dimensiones y problemas con elementos tipo placa. En STEIN ET AL. (2003), RÓDENAS ET AL. (2004) se plantea la reconstrucción para problemas de contacto y en AKIN (2005) se presenta un algoritmo de reconstrucción en patches formados por elementos incluso con distintos grados polinómicos.

4.4.4. Mejoras del SPR. La técnica SPR-C

La técnica SPR introducida por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a,b) representa una mejora importante respecto de las técnicas de promediado en nodos y de proyección de HINTON Y CAMPBELL (1974), sin embargo, siguen presentándose algunos problemas. La diferencia de la precisión del campo reconstruido entre los nodos del interior del dominio con los nodos localizados en el contorno hace que la estimación del error de discretización en norma energética sea menos efectiva para los elementos situados sobre el contorno.

Luego de la aparición de la técnica SPR se han publicado una gran cantidad de trabajos que proponen modificaciones al procedimiento de reconstrucción, con el propósito de mejorar el comportamiento de la técnica original. Dichas modificaciones, generalmente, están basadas en incrementar el funcional de la Ecuación 4.50 para garantizar la satisfacción de ecuaciones de equilibrio o condiciones de contorno. Al considerar los residuos de las ecuaciones de equilibrio en el ajuste por mínimos cuadrados, se pueden aproximar campos reconstruidos σ^* de orden mayor que los obtenidos con el SPR convencional.

A continuación, se realiza una recopilación básica de las técnicas de reconstrucción de la solución que han resultado a partir de modificaciones a la técnica SPR, y que se han considerado más relevantes de entre la abundante bibliografía.

Técnica WA

Presentada por WIBERG Y ABDULWAHAB (1993), fue una de las primeras modificaciones propuestas para la técnica SPR. A diferencia del SPR, todas las componentes del campo gradiente son ajustadas al mismo tiempo, acopladas junto con ecuaciones de equilibrio en los puntos de superconvergencia. La técnica WA, también denominada SPRE (*Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium*) en WIBERG ET AL. (1994), minimiza de esta manera las componentes de tensión y el residuo de la ecuación de equilibrio interno. El uso de una interpolación polinómica de las tensiones un grado mayor, sumado a la utilización de las ecuaciones de equilibrio permite obtener disminuciones considerables del error del campo reconstruido, incluso en el contorno del problema.

El campo de tensiones exacto para el problema elástico es continuo, y cumple la ecuación de equilibrio interno:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (4.58)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de Cauchy, ∇ es el operador gradiente y \mathbf{b} es el vector de fuerzas por unidad de volumen que actúan sobre el cuerpo.

El campo de tensiones σ^* reconstruido mediante la técnica SPR es continuo. No obstante, no cumple la ecuación de equilibrio interno, existiendo por tanto un residuo a minimizar en el funcional definido para la técnica WA:

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{pg}} (\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}_i) - \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}_i))^2 + \beta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{b})^2 d\Omega \right) \quad (4.59)$$

Donde el primer término de la ecuación representa el funcional minimizado en la técnica SPR convencional, β es un factor de ponderación que multiplica al segundo término correspondiente al residuo de la ecuación de equilibrio interno. Dicho factor de ponderación sirve para dar mayor o menor peso al término que minimiza la ecuación de equilibrio, para $\beta = 0$ la técnica WA equivale a la técnica SPR convencional. Según

indican sus autores, los resultados son insensibles a variaciones de β dentro del rango [0.5, 1000].

WIBERG Y ABDULWAHAB (1993) indicaron que con el fin de obtener un buen comportamiento de la técnica de reconstrucción, y aprovechar la información adicional obtenida a partir de las ecuaciones de equilibrio, se necesita ajustar las tensiones en el patch con funciones polinómicas un orden mayor que las funciones de forma utilizadas para los desplazamientos. Es decir, si en el elemento las funciones de forma para el campo de desplazamientos son de orden p , la técnica WA utiliza una expansión polinómica de orden $(p + 1)$ en la Ecuación 4.45.

Nótese sin embargo, que el coste computacional de la técnica WA es mayor que el de la técnica SPR, debido principalmente a dos razones. En primer lugar, al estar acopladas las componentes de tensión, aumenta el tamaño del sistema de ecuaciones lineales a resolver (Ecuación 4.53). En segundo lugar, se debe calcular el residuo del equilibrio interno.

En general, WIBERG Y ABDULWAHAB (1993) concluyeron que la velocidad de convergencia del error global en norma energética utilizando la solución reconstruida mediante la técnica WA es la misma que para la técnica SPR, e incluso en algunos casos, con elementos 1D de orden mayor, la velocidad de convergencia aumenta. Este comportamiento se debe a que la falta de equilibrio es mayor para elementos de orden polinómico más alto. Sin embargo, con la técnica WA se logra minimizar el residuo que aparece en la ecuación de equilibrio interno.

En los procesos de refinamiento adaptativo son muy importantes tanto la velocidad de convergencia como la precisión del campo reconstruido. WIBERG Y ABDULWAHAB demuestran mediante ejemplos numéricos que la técnica WA alcanza niveles de error muy bajos en etapas muy tempranas del refinamiento, antes de lo logrado con la técnica SPR. Por lo tanto, recomiendan su utilización sobre todo con discretizaciones poco refinadas.

Bajo este planteamiento, la técnica WA o SPRE aún no considera las restricciones aplicadas sobre el contorno, ya sean en desplazamientos o en tracciones. En WIBERG ET AL. (1994) se introduce una extensión de la técnica SPRE denominada SPREB (*Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium and Boundary conditions*) que incorpora aparte de la ecuación de equilibrio interno, el cumplimiento de condiciones de equilibrio sobre el contorno. El método considera un ajuste ponderado de mínimos cuadrados de manera que la solución reconstruida satisfaga las condiciones de equilibrio en desplazamientos y/o en tracciones sobre el contorno del problema. Para ello se utilizan además de los puntos de superconvergencia, puntos situados sobre el contorno y funciones de ponderación que controlan la influencia de los diferentes términos del funcional a minimizar. Se plantean entonces los siguientes residuos ponderados para la evaluación de la solución reconstruida:

$$\mathbf{R}_\sigma = [w_\sigma (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h)] \quad \mathbf{R}_{eq} = [w_{eq} (\nabla \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{b})] \quad \mathbf{R}_u = [w_u (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h)] \quad (4.60)$$

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{t}}} = [w_{\bar{\mathbf{t}}} (\nabla_n \boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\mathbf{t}})] \quad \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{u}}} = [w_{\bar{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}^* - \bar{\mathbf{u}})] \quad (4.61)$$

donde los términos w corresponden a funciones de ponderación asociadas a cada uno de los residuos, $\boldsymbol{\sigma}^*$ es el campo de tensiones mejorado, $\boldsymbol{\sigma}^h$ es el campo de tensiones de EF, \mathbf{b} es el vector de fuerzas por unidad de volumen, $\bar{\mathbf{t}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ son los vectores de tracción y desplazamientos impuestos sobre el contorno, \mathbf{u}^h es el campo de desplazamientos de EF y \mathbf{u}^* es un campo de desplazamientos de orden superior, ∇_n es el operador gradiente en el contorno. \mathbf{R}_σ es el residuo en tensiones evaluados en los puntos de superconvergencia de tensiones, \mathbf{R}_{eq} el residuo de la ecuación de equilibrio y \mathbf{R}_u el residuo en desplazamientos evaluado en puntos de superconvergencia de desplazamientos. $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{u}}}$ y $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{t}}}$ son los residuos en el contorno de las condiciones de Dirichlet y Neumann respectivamente para la solución reconstruida.

De esta manera, se define el siguiente funcional de tipo energético a minimizar respecto a los coeficientes \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{a}) = & \sum_s \mathbf{R}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_\sigma + \beta \int \mathbf{R}_{eq}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_{eq} d\Omega + \sum_r \mathbf{R}_u^T \mathbf{D} \mathbf{R}_u \\ & + \sum \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{t}}}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{t}}} + \sum \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{u}}}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Incluyendo los diferentes residuos en la expresión del funcional se pueden obtener diferentes técnicas de reconstrucción del campo de tensiones. Resulta evidente que las técnicas SPR y SPRE son casos especiales del funcional en la Ecuación 4.62. Los resultados numéricos presentados por WIBERG ET AL. (1994) indican una mejora de la estimación del error en el contorno para la técnica SPREB con respecto a los resultados de las técnicas SPR y SPRE.

Técnicas LP y SP

Similar a la técnica WA, LEE ET AL. (1997) introduce la técnica LP como una extensión del funcional del error utilizado en la técnica SPR considerando el residuo de la ecuación de equilibrio, esta vez expresado en forma de trabajos virtuales por medio de un parámetro de *penalty*. Siguiendo principios similares a los vistos en WIBERG Y ABDULWAHAB (1993), la introducción de las restricciones de equilibrio permite obtener un campo de tensiones reconstruidas en el patch de un orden mayor, con lo cual se consigue obtener un campo reconstruido global de mayor precisión. Los autores indican que los resultados obtenidos mediante esta técnica son comparables con los resultados de la técnica WA, señalando asimismo que la técnica LP resulta potencialmente más versátil al poder ser aplicada a problemas de estructuras de placas curvas.

En general, el campo de tensiones reconstruidas en el patch $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ de la Ecuación 4.45 no satisface la ecuación de equilibrio. Para evaluar la falta de equilibrio del campo se considera un sólido en equilibrio, para el cual aplicando trabajos virtuales se escribe

$$\delta \Pi = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV = 0 \quad (4.63)$$

donde $\delta \mathbf{u}$ es el vector de desplazamientos virtuales, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ el vector de deformaciones virtuales, \mathbf{b} es el vector de fuerzas volumétricas por unidad de volumen, $\bar{\mathbf{t}}$ es el vector de tracciones impuestas sobre el contorno, V es el volumen y S es la frontera del sólido.

Reemplazando $\boldsymbol{\sigma}$ en la Ecuación 4.63 por el campo de tensiones a evaluar $\boldsymbol{\sigma}^*$, se puede calcular el residuo del equilibrio en los elementos de un patch como:

$$\delta \Pi_{res} = \int_{V_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^* dV - \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS - \int_{V_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV \quad (4.64)$$

En la ecuación anterior V_p es el volumen del patch, y S_p es su frontera. Por otra parte, los desplazamientos y deformaciones virtuales pueden expresarse en función de los desplazamientos virtuales nodales $\delta \mathbf{q}_p$ como:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q}_p \quad (4.65)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}_p \quad (4.66)$$

A continuación, se evalúan los términos de la expresión para el trabajo virtual sobre el patch de la Ecuación 4.64:

$$\int_{V_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^* dV = \delta \mathbf{q}_p^T \left(\int_{V_p} \mathbf{B}^T \mathbf{p} dV \right) \mathbf{a} = \delta \mathbf{q}_p^T \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (4.67)$$

$$\int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV = \delta \mathbf{q}_p^T \left(\int_{S_p} \tilde{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_p} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \right) = \delta \mathbf{q}_p^T \mathbf{F}_p \quad (4.68)$$

Donde $\tilde{\mathbf{N}}$ es la matriz de funciones de forma definida en la superficie de contorno del patch.

La expresión para $\delta \Pi_{res}$ puede escribirse entonces como:

$$\delta \Pi_{res} = \delta \mathbf{q}_p^T (\mathbf{C} \mathbf{a} - \mathbf{F}_p) = \delta \mathbf{q}_p^T (\mathbf{R}_{eq}) \quad (4.69)$$

De esta manera, el funcional a minimizar que permite obtener los coeficientes \mathbf{a} de la expansión polinómica en el patch está dado por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\sigma}^h - \mathbf{p} \mathbf{a})^T (\boldsymbol{\sigma}^h - \mathbf{p} \mathbf{a}) + \beta \mathbf{R}_{eq}^T \mathbf{R}_{eq} \\ &= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\sigma}^h - \mathbf{p} \mathbf{a})^T (\boldsymbol{\sigma}^h - \mathbf{p} \mathbf{a}) + \beta (\mathbf{C} \mathbf{a} - \mathbf{F}_p)^T (\mathbf{C} \mathbf{a} - \mathbf{F}_p) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Donde n es el número total de puntos de muestreo de tensiones en el patch, y β es el factor de ponderación del residuo de la ecuación de equilibrio. Si $\beta = 0$ se tienen las mismas expresiones que las usadas en la técnica SPR.

Minimizando el funcional de la Ecuación 4.70 respecto a los coeficientes desconocidos \mathbf{a} se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \beta \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}^h + \beta \mathbf{C}^T \mathbf{F}_p \quad (4.71)$$

En la técnica SP presentada por PARK ET AL. (1999) como una variante de la técnica LP, se propone la estimación de $\boldsymbol{\sigma}^*$ en puntos del contorno mediante una minimización de los residuos planteada en cada elemento en lugar de patches. El funcional a minimizar incluye la suma de los errores en tensiones y dos residuos de equilibrio. El primero de los residuos se formula a nivel de elemento de manera similar a lo realizado en la técnica LP, en el segundo residuo se representan las fuerzas de tracción en términos del campo de tensión asumido dentro de cada elemento. Este trabajo es importante porque aborda el problema de la obtención de campos mejorados en 3D, cuestión que presenta dificultades derivadas del mal condicionamiento de las matrices que aparecen en el planteamiento al considerarse las seis componentes de tensión acopladas. En estos casos, la matriz resultante a invertir puede estar sujeta a mal condicionamiento cuando algunas de las seis componentes del campo de tensiones dominan sobre otras.

Técnicas BUI

Las técnicas desarrolladas por WIBERG ET AL. (1994), BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) para incluir las ecuaciones de equilibrio en la reconstrucción de tensiones requieren de un mayor número de ecuaciones a resolver en cada patch, reduciendo así la eficiencia de los métodos. AALTO (1997), AALTO Y ISOHERRANEN (1997), AALTO Y ÅMAN (1999) desarrollaron la denominada técnica BUI para la resolución de problemas elásticos donde, esencialmente, proponen la reconstrucción de un campo de desplazamientos reconstruidos \mathbf{u}_p^* que contenga información implícita (*built-in*) de la ecuación de equilibrio. En esta técnica, el número de ecuaciones locales es menor y, según los autores, es en cierto sentido óptimo. Los campos de tensiones y deformaciones reconstruidos se obtienen a partir de la derivada del campo \mathbf{u}_p^* . Los resultados presentados indican una mejor estimación del error que la obtenida con el SPR, similar al de la técnica WA de WIBERG Y ABDULWAHAB (1993).

Técnica REP

BOROOMAND Y ZIENKIEWICZ (1997b) desarrollaron una técnica con un comportamiento muy similar a la técnica SPR con la ventaja de que no necesita información de los puntos de superconvergencia. La técnica denominada REP (Recovery by Equilibrium in Patches) se basa en equilibrar las tensiones reconstruidas en el patch, de la misma manera que se hace con las tensiones de EF $\boldsymbol{\sigma}^h$. Para ello se obtiene una formulación débil de las ecuaciones de equilibrio para las tensiones reconstruidas en el patch, que satisface las condiciones de equilibrio de manera discreta. Es decir, estudia el equilibrio de las fuerzas equivalentes en nodos del patch a través del principio de

los trabajos virtuales. La formulación es consistente con formulaciones no lineales, las cuales equilibran el problema de forma iterativa. Por lo tanto, se pueden proyectar los valores en puntos de Gauss a los nodos, disminuyendo la perturbación del equilibrio global.

Las ecuaciones de equilibrio para la aproximación de EF en el patch se suelen expresar como:

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (4.72)$$

Donde Ω_p es el dominio del patch, y el último término resulta de las tracciones sobre el contorno del patch Γ_p . En la expresión anterior se representan las acciones del dominio externo sobre el patch y las fuerzas nodales equivalentes resultado de fuerzas volumétricas y de contorno aplicadas sobre el propio patch.

Con el fin de garantizar el equilibrio se debe buscar que el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ satisfaga las mismas condiciones de equilibrio de la solución de EF. De esta manera,

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \quad (4.73)$$

donde el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ representa las componentes acopladas de tensión expresadas de la forma $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{p}\mathbf{a}$.

Así, se puede definir el funcional a minimizar por mínimos cuadrados como:

$$\mathcal{F} = \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega \right)^T \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega \right) \quad (4.74)$$

Rescribiendo la expresión del funcional en función de los coeficientes a evaluar se tiene:

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = (\mathbf{H}\mathbf{a} - \mathbf{F}_p)^T (\mathbf{H}\mathbf{a} - \mathbf{F}_p) \quad (4.75)$$

siendo

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{p} d\Omega \quad \mathbf{F}_p = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega \quad (4.76)$$

La condición de minimización quedaría entonces definida como:

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{F}_p \quad (4.77)$$

BORROOMAND Y ZIENKIEWICZ (1997a) introducen una mejora a la técnica REP con el propósito de corregir ciertas dificultades asociadas a la frecuente aparición de matrices

singulares en el proceso de minimización en cada patch, debido a un elevado número de parámetros a evaluar \mathbf{a} . La técnica modificada tiene un coste computacional significativamente menor que el del REP original, siendo además más robusto ya que se plantean más ecuaciones evitando sistemas lineales singulares. Otro aspecto de interés en el trabajo de BOROOMAND Y ZIENKIEWICZ (1997a) es el uso del procedimiento sistemático para el análisis de la efectividad de los estimadores de error propuesto por BABUŠKA ET AL. (1994a, 1997b). De esta manera, se presentan comparaciones de la robustez y otras características entre los estimadores REP y SPR.

Técnicas de *conjoint polynomials*

BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) consideran que realizar la interpolación mediante funciones de forma de los valores de la tensión en los nodos $\bar{\sigma}^*$ supone una pérdida de precisión, ya que el error en el campo reconstruido obtenido a partir de los valores en los puntos de superconvergencia crece a medida que aumenta la distancia a los puntos superconvergentes. Por lo tanto, la tensión reconstruida en los puntos de Gauss será de peor calidad que la obtenida originalmente mediante EF. Considerando que los cálculos de estimación del error integran el error en el elemento, es importante tener una mejor estimación de los valores de tensión en los puntos de integración que en los nodos del elemento. En este sentido, BLACKER Y BELYTSCHKO proponen una modificación de la técnica SPR que reconstruye el campo σ^* en el interior del elemento, directamente en los puntos de integración.

En la técnica SPR, para el interior de un elemento se pueden definir tantas funciones locales de interpolación de tensiones reconstruidas como nodos vértices n_v tenga el elemento, σ_i^* con $i = 1 \dots n_v$, cada una de estas asociada a un patch. Resulta evidente que para un elemento dado, dichas funciones polinómicas se solapan en el dominio del elemento, siendo necesario algún tipo de ponderación para reconstruir una interpolación polinómica conjunta $\sigma^*(\mathbf{x})$ (*conjoint polynomial*).

A fin de reconstruir las tensiones en el interior del elemento BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) aprovechan el concepto general de la propiedad la Partición de la Unidad explicada anteriormente en la Sección 3.3. Utilizando la propiedad de la PU definida en la Ecuación 3.2, se utilizan las funciones de forma para ponderar dentro del dominio del elemento las contribuciones de tensión, σ_i^* , reconstruidas desde los patches formados en los nodos vértice del elemento, mediante la siguiente expresión:

$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_v} N_i(\mathbf{x})\sigma_i^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_v} N_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}_i \quad (4.78)$$

donde \mathbf{x} son las coordenadas del punto donde se desean evaluar las tensiones, n_v es el número de nodos vértice del elemento que contiene a dicho punto, N_i son las funciones de forma de la versión lineal del elemento (solo se consideran los nodos vértice), y σ_i^* es la función de interpolación de tensiones en el patch correspondientes al nodo vértice i .

Las tensiones σ_i^* obtenidas en el proceso de reconstrucción son usadas sobre todo el dominio del patch. Esto contrasta con la técnica SPR estándar que solo retiene los valores nodales de las tensiones evaluadas desde cada patch. Obsérvese la diferencia entre la Ecuación 4.78 y la expresión utilizada para la interpolación de tensiones con la técnica SPR estándar (Ecuación 4.32) que se reescribe aquí:

$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\mathbf{x}) \sigma_i^*(\mathbf{x}_i)$$

donde \mathbf{x}_i es la coordenada espacial de cada nodo del elemento.

Los valores nodales obtenidos mediante esta técnica son equivalentes a los obtenidos con la técnica SPR. No obstante, BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) indicaron a través de varios ejemplos que las tensiones evaluadas en el interior de cada elemento son evaluadas con mayor precisión.

Técnica SPR-C

RÓDENAS ET AL. (2007) introducen la técnica SPR-C (*Constrained SPR*) como otra mejora de la técnica SPR, con un planteamiento similar al de la técnica SPREB de WIBERG ET AL. (1994). Aunque ambas técnicas involucran el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio, mientras que la técnica SPREB utiliza un enfoque de residuos ponderados en cada patch que solamente minimiza los residuos de dichas ecuaciones, la técnica SPR-C garantiza en cada patch la satisfacción de las ecuaciones de equilibrio de manera exacta. Para mejorar la precisión del campo σ^* esta técnica propone el uso de ecuaciones de restricción, con el fin de obtener polinomios de interpolación de tensiones en el patch que cumplan localmente las ecuaciones que debe satisfacer la solución exacta. Así, se aplican restricciones sobre los coeficientes desconocidos \mathbf{a} que definen los polinomios de interpolación, de manera que estos polinomios satisfagan la ecuación de equilibrio interno, la ecuación de compatibilidad, y ecuaciones de equilibrio en el contorno para los nodos vértice sobre el contorno del dominio⁵, cumpliéndolas tanto como sea posible mediante la representación polinómica de σ^* . Como se verá en capítulos posteriores, el estimador del error para XFEM que se presenta más adelante en este trabajo está basado en la técnica SPR-C, por lo que a continuación se examinan con detalle las características principales de esta modificación de la técnica SPR.

Las ecuaciones de restricción son impuestas en el sistema de ecuaciones lineales a resolver mediante el uso de multiplicadores de Lagrange. Con el propósito de obtener expresiones para las ecuaciones de restricción lo más sencillas posibles, se utiliza un sistema de referencia local Cartesiano (\check{x}, \check{y}) con origen en el nodo de ensamblado del patch, sobre el cual se definen las tres componentes de tensión $\sigma_{\check{x}\check{x}}^*$, $\sigma_{\check{y}\check{y}}^*$ y $\sigma_{\check{x}\check{y}}^*$. Para los nodos situados sobre el contorno del dominio, se orientan los ejes del sistema local respecto a las direcciones normal y tangente al contorno (ver Figura 4.5).

⁵Bajo ciertas circunstancias también es posible satisfacer las ecuaciones de equilibrio en el contorno

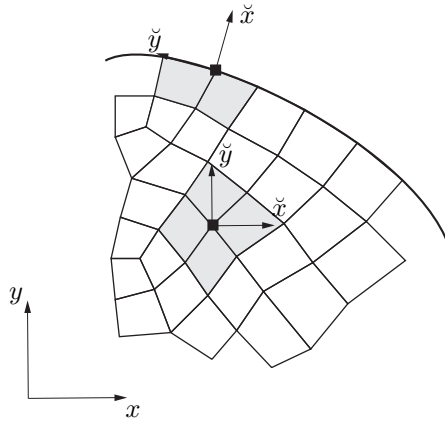


FIGURA 4.5. *Sistemas de referencia locales para patches en el interior y en la frontera del dominio*

Las expresiones polinómicas usadas para describir cada una de las componentes de tensión j ($j = \check{x}\check{x}, \check{y}\check{y}, \check{x}\check{y}$) en el dominio del patch del nodo i , así como también las primeras y segundas derivadas, definidas en el sistema local Cartesiano de referencia se escriben como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^*(\check{x}, \check{y}) &= a_{j1} + a_{j2}\check{x} + a_{j3}\check{y} + a_{j4}\check{x}^2 + a_{j5}\check{x}\check{y} + a_{j6}\check{y}^2 + \dots \\
 \frac{\partial \sigma_j^*(\check{x}, \check{y})}{\partial \check{x}} &= a_{j2} + 2a_{j4}\check{x} + a_{j5}\check{y} + \dots \\
 \frac{\partial \sigma_j^*(\check{x}, \check{y})}{\partial \check{y}} &= a_{j3} + a_{j5}\check{x} + 2a_{j6}\check{y} + \dots \\
 \frac{\partial^2 \sigma_j^*(\check{x}, \check{y})}{\partial \check{x}^2} &= 2a_{j4} + \dots \\
 \frac{\partial^2 \sigma_j^*(\check{x}, \check{y})}{\partial \check{y}^2} &= 2a_{j6} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

A continuación se revisan las ecuaciones de restricción que se aplican sobre los coeficientes desconocidos \mathbf{a} que definen los polinomios de la Ecuación 4.79, con el fin de forzar el cumplimiento de las siguientes ecuaciones:

- Ecuación de equilibrio interno
- Ecuación de compatibilidad
- Equilibrio en el contorno con tracciones impuestas
- Ecuaciones en contornos con condiciones de simetría

a lo largo de todo el contorno del patch que está sobre el contorno del dominio

Ecuación de equilibrio interno. Como se indicó anteriormente, la ecuación de equilibrio interno (Ecuación 4.58) para el caso bidimensional se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{\check{x}\check{x}}}{\partial\check{x}} + \frac{\partial\sigma_{\check{x}\check{y}}}{\partial\check{y}} + b_{\check{x}} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{\check{x}\check{y}}}{\partial\check{x}} + \frac{\partial\sigma_{\check{y}\check{y}}}{\partial\check{y}} + b_{\check{y}} &= 0\end{aligned}\quad (4.80)$$

Expresando cada una de las componentes del vector de fuerzas por unidad de volumen \mathbf{b} mediante una expansión polinómica evaluada en el sistema de referencia local indicado en la Figura 4.5 se obtiene:

$$\begin{aligned}b_{\check{x}}(\check{x}, \check{y}) &= b_{\check{x}1} + b_{\check{x}2}\check{x} + b_{\check{x}3}\check{y} + \dots \\ b_{\check{y}}(\check{x}, \check{y}) &= b_{\check{y}1} + b_{\check{y}2}\check{x} + b_{\check{y}3}\check{y} + \dots\end{aligned}\quad (4.81)$$

Para el caso particular de elementos lineales, si en la Ecuación 4.79 se considera una expansión polinómica cuadrática para las tensiones, y teniendo en cuenta que en la Ecuación 4.80 se evalúan las derivadas parciales de primer orden de las tensiones, se pueden expresar las fuerzas volumétricas \mathbf{b} mediante una expansión polinómica lineal a partir de la Ecuación 4.81.

Sustituyendo las expresiones para las primeras derivadas (Ecuación 4.79), y las expresiones para las fuerzas volumétricas (Ecuación 4.81) en la expresión para el equilibrio interno de la Ecuación 4.80 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}(a_{\check{x}\check{x}2} + 2a_{\check{x}\check{x}4}\check{x} + a_{\check{x}\check{x}5}\check{y}) + (a_{\check{x}\check{y}3} + a_{\check{x}\check{y}5} + 2a_{\check{x}\check{y}6}) + (b_{\check{x}1} + b_{\check{x}2}\check{x} + b_{\check{x}3}\check{y}) &= 0 \\ (a_{\check{x}\check{y}2} + 2a_{\check{x}\check{y}4}\check{x} + a_{\check{x}\check{y}5}\check{y}) + (a_{\check{y}\check{y}3} + a_{\check{y}\check{y}5} + 2a_{\check{y}\check{y}6}) + (b_{\check{y}1} + b_{\check{y}2}\check{x} + b_{\check{y}3}\check{y}) &= 0\end{aligned}\quad (4.82)$$

De la expresión anterior se deriva el conjunto de ecuaciones de restricción de σ_i^* que fuerzan el cumplimiento de la ecuación de equilibrio en el patch para cualquier punto (\check{x}, \check{y}) . Igualando término a término se tiene:

$$\begin{aligned}a_{\check{x}\check{x}2} + a_{\check{x}\check{y}3} &= -b_{\check{x}1} & 2a_{\check{x}\check{x}4} + a_{\check{x}\check{y}5} &= -b_{\check{x}2} & a_{\check{x}\check{x}5} + 2a_{\check{x}\check{y}6} &= -b_{\check{x}3} \\ a_{\check{x}\check{y}2} + a_{\check{y}\check{y}3} &= -b_{\check{y}1} & 2a_{\check{x}\check{y}4} + a_{\check{y}\check{y}5} &= -b_{\check{y}2} & a_{\check{x}\check{y}5} + 2a_{\check{y}\check{y}6} &= -b_{\check{y}3}\end{aligned}\quad (4.83)$$

Ecuación de compatibilidad. La ecuación de compatibilidad para el caso bidimensional esta definida como:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\check{x}\check{y}}}{\partial\check{x}\partial\check{y}} = \frac{\partial^2\varepsilon_{\check{x}\check{x}}}{\partial\check{y}^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{\check{y}\check{y}}}{\partial\check{x}^2}\quad (4.84)$$

Expresando la ecuación anterior en función de las componentes de tensión se obtiene la denominada ecuación de *Beltrami*:

$$\frac{\partial^2\sigma_{\check{x}\check{x}}}{\partial\check{x}^2} + \frac{\partial^2\sigma_{\check{x}\check{x}}}{\partial\check{y}^2} + \frac{\partial^2\sigma_{\check{y}\check{y}}}{\partial\check{x}^2} + \frac{\partial^2\sigma_{\check{y}\check{y}}}{\partial\check{y}^2} = k \left(\frac{\partial b_{\check{x}}}{\partial\check{x}} + \frac{\partial b_{\check{y}}}{\partial\check{y}} \right)\quad (4.85)$$

donde k es función del coeficiente de Poisson ν , y está definido como:

$$\begin{aligned} k &= -(1 + \nu) && \text{Tensión plana} \\ k &= -\frac{1}{1 - \nu} && \text{Deformación plana} \end{aligned} \quad (4.86)$$

De forma semejante a lo realizado para la ecuación de equilibrio interno, si se reemplaza en la ecuación de compatibilidad (Ecuación 4.84) los términos correspondientes a las segundas derivadas de las tensiones de la Ecuación 4.79, y las correspondientes derivadas parciales del vector de fuerzas volumétricas \mathbf{b} indicado en la Ecuación 4.81, se puede obtener la siguiente ecuación de restricción para los coeficientes \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}_{\check{x}\check{x}4} + \mathbf{a}_{\check{x}\check{x}6} + \mathbf{a}_{\check{y}\check{y}4} + \mathbf{a}_{\check{y}\check{y}6} = \frac{k}{2} (b_{\check{x}2} + b_{\check{y}3}) \quad (4.87)$$

Equilibrio en nodos del contorno con tracciones impuestas. Considérese un patch cuyo nodo de ensamblado está sobre el contorno, y para el cual se conoce el valor de las tracciones externas aplicadas normal, $\sigma_{n,ext}$, y tangencial, τ_{ext} , al contorno. Si se particularizan las expresiones de la Ecuación 4.79, las cuales representan la interpolación polinómica de tensiones en el patch, en el nodo de ensamblado del patch usando coordenadas locales ($\check{x} = 0, \check{y} = 0$), se pueden obtener de manera directa las ecuaciones de restricción considerando el cumplimiento de la ecuación de equilibrio en el nodo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\check{x}\check{x}}^*(0, 0) &= a_{\check{x}\check{x}1} = \sigma_{n,ext} \\ \sigma_{\check{x}\check{y}}^*(0, 0) &= a_{\check{x}\check{y}1} = \tau_{ext} \end{aligned} \quad (4.88)$$

En las expresiones anteriores no están acopladas las diferentes componentes de tensión gracias a las características del sistema coordenado local del patch, el cual como se mencionó anteriormente, está orientado respecto al contorno para los patches de nodos sobre la frontera del dominio. Por esta razón, los coeficientes $a_{\check{x}\check{x}1}$ y $a_{\check{x}\check{y}1}$ pueden ser eliminados del sistema lineal de ecuaciones a resolver ya que sus valores son conocidos *a priori*.

Para el caso de nodos de mitad de lado RÓDENAS ET AL. (2007) indicaron que los mejores resultados se obtienen cuando se imponen las condiciones de restricción solamente en los nodos de ensamblado de patches (nodos vértice). Estas observaciones concuerdan con los resultados obtenidos por BOROOMAND Y ZIENKIEWICZ (1997b) para la técnica REP, donde los autores indicaban que con polinomios de interpolación de bajo orden era recomendable utilizar el mínimo número de puntos sobre el contorno con información de cargas externas aplicadas.

Equilibrio sobre contornos rectos con tracciones impuestas. En el caso particular de que el nodo del patch se encuentre sobre un segmento recto sobre el contorno, el eje \check{y} ($\check{x} = 0$) en el sistema coordenado local estará alineado con el contorno del patch. Esto no ocurre en el caso del patch sobre el contorno representado en la Figura 4.5, donde el eje \check{y} solo es tangente al contorno.

Se asumen conocidas las expresiones para las tensiones normal, $\sigma_{n,ext}$, y tangencial, τ_{ext} , aplicadas sobre el contorno, así como también sus derivadas parciales respecto a la dirección paralela al contorno. Por consiguiente, se pueden evaluar las siguientes expresiones particularizadas en el nodo de ensamblado del patch $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,ext}(0,0) & \frac{\partial \sigma_{n,ext}(0,0)}{\partial \check{y}} & \frac{\partial^2 \sigma_{n,ext}(0,0)}{\partial \check{y}^2} & \dots \\ \tau_{ext}(0,0) & \frac{\partial \tau_{ext}(0,0)}{\partial \check{y}} & \frac{\partial^2 \tau_{ext}(0,0)}{\partial \check{y}^2} & \dots \end{aligned} \quad (4.89)$$

Si ahora se consideran de la Ecuación 4.79 las expresiones polinómicas de la tensión y sus derivadas respecto a la dirección \check{y} , evaluadas para las componentes normal y tangencial ($\sigma_{\check{x}\check{x}}^*$ y $\sigma_{\check{x}\check{y}}^*$), así como también los valores conocidos de tensión particularizados en el nodo de ensamblado de la Ecuación 4.89, se pueden obtener las siguientes ecuaciones de restricción:

$$\begin{aligned} \sigma_{\check{x}\check{x}}^*(0,0) &= a_{\check{x}\check{x}1} = \sigma_{n,ext}(0,0) & \sigma_{\check{x}\check{y}}^*(0,0) &= a_{\check{x}\check{y}1} = \tau_{ext}(0,0) \\ \frac{\partial \sigma_{\check{x}\check{x}}^*(0,0)}{\partial \check{y}} &= a_{\check{x}\check{x}3} = \frac{\partial \sigma_{n,ext}(0,0)}{\partial \check{y}} & \frac{\partial \sigma_{\check{x}\check{y}}^*(0,0)}{\partial \check{y}} &= a_{\check{x}\check{y}3} = \frac{\partial \tau_{ext}(0,0)}{\partial \check{y}} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\check{x}\check{x}}^*(0,0)}{\partial \check{y}^2} &= 2a_{\check{x}\check{x}6} = \frac{\partial^2 \sigma_{n,ext}(0,0)}{\partial \check{y}^2} & \frac{\partial^2 \sigma_{\check{x}\check{y}}^*(0,0)}{\partial \check{y}^2} &= 2a_{\check{x}\check{y}6} = \frac{\partial^2 \tau_{ext}(0,0)}{\partial \check{y}^2} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Al estar expresadas en el sistema coordenado local alineado con el contorno, al igual que para el caso anterior, las ecuaciones de restricción no acoplan las componentes de tensión. Por consiguiente, es posible eliminar del sistema de ecuaciones a resolver los coeficientes de \mathbf{a} correspondientes a las restricciones de la Ecuación 4.90.

De las expresiones anteriores se puede deducir una característica importante referente al grado de cumplimiento del equilibrio en este tipo de contornos. Considerando una expansión de grado cuadrática para la interpolación de las tensiones en el patch σ_i^* , si las tensiones externas aplicadas pueden ser también representadas por un polinomio de grado cuadrático, el campo de tensiones recuperado que se obtiene en el patch σ_i^* satisface la ecuación de equilibrio a lo largo de todo el contorno del patch coincidente con el contorno de Neumann. Es decir, para contornos rectos la técnica SPR-C cumple exactamente una aproximación de grado p en serie de Taylor a las tensiones exactas.

Contorno con condiciones de simetría. En un problema simétrico la condición de simetría en el contorno implica que, respecto al contorno, la tensión tangencial $\sigma_{\check{x}\check{y}}$ debe ser antisimétrica, y las tensiones normales al contorno $\sigma_{\check{x}\check{x}}$, $\sigma_{\check{y}\check{y}}$ deben ser simétricas.

Retomando de la Ecuación 4.79 la expresión que representa la expansión polinómica de las tensiones en el patch

$$\sigma_{i,j}^*(\check{x}, \check{y}) = a_{j1} + a_{j2}\check{x} + a_{j3}\check{y} + a_{j4}\check{x}^2 + a_{j5}\check{x}\check{y} + a_{j6}\check{y}^2 + \dots \quad j = \check{x}\check{x}, \check{y}\check{y}, \check{x}\check{y}$$

se tiene que la condición de antisimetría a imponer sobre la componente del campo reconstruido $\sigma_{\check{x}\check{y}}^*$ implica que el polinomio de interpolación sea una función impar respecto de \check{x} . Asimismo, la condición de simetría a imponer sobre las componentes $\sigma_{\check{x}\check{x}}^*$ y $\sigma_{\check{y}\check{y}}^*$ implica funciones pares respecto de \check{x} . De esta manera quedan definidas las siguientes ecuaciones de restricción a satisfacer por los polinomios de interpolación de tensiones:

$$\begin{aligned} \sigma_{\check{x}\check{x}}^* \text{ función par} &\Rightarrow a_{\check{x}\check{x}2} = a_{\check{x}\check{x}5} = 0 \\ \sigma_{\check{y}\check{y}}^* \text{ función par} &\Rightarrow a_{\check{y}\check{y}2} = a_{\check{y}\check{y}5} = 0 \\ \sigma_{\check{x}\check{y}}^* \text{ función impar} &\Rightarrow a_{\check{x}\check{y}1} = a_{\check{x}\check{y}3} = a_{\check{x}\check{y}4} = a_{\check{x}\check{y}6} = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

Las condiciones de restricción de las Ecuaciones 4.83, 4.87 y 4.91 pueden ser combinadas y usadas simultáneamente para evaluar los coeficientes de los polinomios de interpolación en el patch ya que corresponden a expresiones que satisfacen la solución exacta. En general, son ecuaciones linealmente independientes, aunque para el caso del *contorno con condiciones de simetría* algunas de las restricciones de la ecuación de equilibrio (Ecuación 4.83) estarían previamente definidas en las restricciones de contorno con simetría (Ecuación 4.91). Por lo tanto, para patches con condiciones de simetría se consideran solamente las restricciones de las Ecuaciones 4.87 y 4.91

Los resultados presentados por RÓDENAS ET AL. (2007) para la técnica SPR-C indican una mejora con respecto a la técnica SPR convencional, con un comportamiento del estimador similar al de la técnica SPREB presentada por WIBERG ET AL. (1994). Ambas técnicas coinciden en cuanto que ambas consideran la satisfacción de las ecuaciones de equilibrio, aunque para la técnica SPR-C ésta se da de manera exacta en cada patch, mientras que para el SPR-EB solo se minimizan los residuos de dichas ecuaciones. Adicionalmente, la técnica SPR-C asegura el cumplimiento de las tracciones aplicadas sobre el contorno, al menos en nodos, y no requiere el uso de parámetros de ponderación.

Los valores nodales del campo de tensiones recuperado σ^* que se obtienen con la técnica SPR-C son más precisos que los obtenidos por medio de la técnica SPR. Esto conlleva una mejora de la efectividad del estimador de error en norma energética a nivel de elemento. Las mejoras más importantes ocurren en la frontera del dominio, donde el SPR-C permite utilizar información conocida en el contorno del problema.

Otras mejoras

Existen en la literatura otras técnicas con planteamientos muy similares a las técnicas anteriormente expuestas. La mayoría de ellas están orientadas a la obtención de un campo reconstruido σ^* mediante la reconstrucción en patches, basándose en la técnica SPR, que satisfaga las condiciones de la formulación fuerte del problema. Esto es, satisfaciendo las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de Neumann en el contorno.

KVAMSDAL Y OKSTAD (1998) se centraron en encontrar un campo reconstruido de tensiones σ^* que fuera estáticamente admisible con el fin de obtener un estimador del error más conservador. Con este fin, los autores usaron ecuaciones de restricción

para obtener polinomios de interpolación σ_i^* que cumplieran la ecuación de equilibrio interno, pero usaron un procedimiento de evaluación de residuos similar a las técnicas de WIBERG ET AL. (1994), BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) para cumplir de manera aproximada el equilibrio en el contorno. Además, utilizaron los *conjoint polynomials* propuestos por BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) para reconstruir el campo de tensiones global σ^* , lo que conlleva perder en σ^* el equilibrio conseguido en cada patch (como se verá en la Sección 4.6).

RAMSAY Y MAUNDER (1996) propusieron un procedimiento muy simple para incorporar de manera directa los valores de tensión conocidos en nodos del contorno cuando se usan mallas con elementos cuadriláteros. Inicialmente, se evalúan las tensiones reconstruidas en nodos $\bar{\sigma}^*$ usando, por ejemplo, la técnica SPR o el promediado directo en nodos. A continuación, se realiza un postprocesamiento de los valores de tensión $\bar{\sigma}^*$ en los nodos situados sobre el contorno, usando una matriz de transformación para expresar los valores de tensión en un sistema de referencia Cartesiano localizado en el nodo sobre el contorno, y orientado según los vectores normal y tangente al contorno. Los valores de tensión son posteriormente sustituidos por los valores de tensión conocidos (τ y/o σ_n). Finalmente, se utiliza una nueva transformación para expresar el vector modificado $\bar{\sigma}^*$ en coordenadas globales. El procedimiento introducido por RAMSAY Y MAUNDER constituye la base conceptual utilizada para la aplicación de ecuaciones de restricción de equilibrio en el contorno en la técnica SPR-C de RÓDENAS ET AL. (2007).

Más adelante, MAUNDER (2001) utilizó *campos de Trefftz* para obtener polinomios de interpolación que satisficieran tanto la ecuación de equilibrio interno como la ecuación de compatibilidad.

Se pueden encontrar numerosos estudios comparativos de las distintas técnicas de reconstrucción del campo de tensiones. Resulta evidente que la introducción de un nuevo método de reconstrucción de σ^* lleva asociado un análisis que compara dicho método con alguno de los métodos existentes anteriormente, con el fin de justificar su uso.

En LO Y LEE (1998) se puede encontrar un estudio comparativo de las técnicas SPR, REP y LP, el cual incluye como ejemplo numérico un problema singular propio de la MFEL. Cuando el orden del ajuste polinómico en el patch es igual al orden p de la aproximación de EF, los resultados obtenidos con las tres técnicas son similares en términos de la velocidad de convergencia, lográndose sin embargo resultados más precisos con la técnica LP. En principio, los métodos LP y REP permiten utilizar ajustes en el patch de orden superior, mejorando la precisión y la velocidad de convergencia. No obstante, LO Y LEE indicaron que para problemas singulares no se observan mejoras importantes para ajustes de orden mayor a p . Incluso señalaron que la técnica SPR (orden p) proporciona resultados muchas veces mejores que los resultados del método REP con un orden $> p$.

Adicionalmente, LO Y LEE (1998) estudiaron el efecto de utilizar patches de contorno frente a los patches interiores para los nodos sobre el contorno. Señalan que para

elementos lineales es recomendable el uso de patches interiores, mientras que para elementos cuadráticos se tienen leves mejoras con patches de contorno.

YAZDANI ET AL. (1998) presentaron un estudio donde se comparan diferentes técnicas de reconstrucción de σ^* en nodos. Los resultados obtenidos mediante el método de los mínimos cuadrados global se compararon con los resultados logrados mediante técnicas de medias ponderadas α_e/L_e + extrapolación y otras basadas en modificaciones de la técnica SPR. Los autores señalaron, entre otras conclusiones, que la fiabilidad de la reconstrucción mediante medias ponderadas es cuestionable.

En el trabajo de VERGARA ET AL. (2007) se utilizó una formulación que combina los funcionales utilizados en las técnicas SPR-R y REP-R con el fin de aprovechar las ventajas que ofrecen ambos métodos, y reconstruir las tensiones en problemas tridimensionales con solución suave o singular. BOROOMAND ET AL. (2004) estudiaron la aplicación de las técnicas SPR y REP para obtener estimaciones del error en problemas resueltos con elementos tipo placa. Asimismo, propusieron una modificación de la técnica REP que mejora la robustez del método cuando se utilizan mallas de elementos con una relación de aspecto muy alta.

PALANI ET AL. (2006) desarrollaron un estimador de error de tipo híbrido denominado K-S, el cual presenta una formulación específica para problemas de la MF. El estimador K-S utiliza una técnica de estimación del error basada en el factor de intensidad de tensiones K para la región próxima al extremo de grieta, y una técnica basada en el SPR fuera de la zona de influencia de la singularidad. Los autores presentaron una serie de resultados en problemas de refinamiento adaptativo donde comparan el funcionamiento del estimador K-S con el SPR, indicando que el primero ofrece mejores características.

MAISANO ET AL. (2006) trabajaron en el desarrollo de tres estimadores de error basados en técnicas de reconstrucción. El primer estimador está basado en la reconstrucción del campo de tensiones, el cual utiliza un procedimiento de ponderación del campo gradiente evaluado en un conjunto de puntos de muestreo en cada patch. Los dos estimadores restantes calculan la norma energética del error en función del campo de desplazamientos de EF en lugar de su gradiente. El primero utiliza el campo reconstruido de tensiones σ^* para obtener una aproximación de orden cuadrático del campo de desplazamientos \mathbf{u}^* . El segundo ajusta un desplazamiento constante en cada uno de los elementos del patch para, posteriormente, evaluar el desplazamiento en el nodo de ensamblado mediante una técnica de ajuste por mínimos cuadrados.

XIAO Y KARIHALOO (2004) presentaron una técnica de reconstrucción de tensiones denominada SAR (*Statically Admissible Recovery*) que no deriva de la técnica SPR, y que puede ser utilizada en aproximaciones de EF tradicionales, aproximaciones enriquecidas de EF y en problemas resueltos mediante métodos sin malla. La técnica SAR se fundamenta en ajustar mediante MLS los valores de tensión obtenidos con EF en un conjunto de puntos de muestreo. A fin de obtener un campo de tensiones estáticamente admisible, las funciones base de MLS incorporan el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio dentro del dominio y las ecuaciones de equilibrio en el

contorno exterior.

4.5. Técnicas de estimación del error en PUM

En la década pasada se introdujeron numerosos métodos computacionales de tipo generalizado o métodos sin malla, motivados por las dificultades existentes para modelar problemas con geometrías complejas, problemas donde el dominio cambia con la solución, o en los que interesa incluir información conocida *a priori* del problema en el modelado. Dentro de estos nuevos métodos destacan aquellos que derivan del Método de la Partición de la Unidad (PUM) presentado por BABUŠKA Y MELENK (1997), entre los que se incluyen los Métodos *hp-Clouds* de DUARTE Y ODEN (1996a,b), el Método Extendido de los Elementos Finitos (XFEM) de BELYTSCHKO Y BLACK (1999), el Método Generalizado de Elementos Finitos (GFEM) de STROUBOULIS ET AL. (2001), el Método de Esferas Finitas de DE Y BATHE (2001), y el Método de Partículas-Partición de la Unidad de GRIEBEL Y SCHWEITZER (2000).

STROUBOULIS ET AL. (2006) señalan que el desarrollo de técnicas de estimación de error para los métodos basados en el PUM es de especial interés debido a la creciente importancia que tienen estos métodos tanto en el ámbito científico como en el ingenieril. Más aún, si se tiene en cuenta que dichos métodos utilizan niveles de aproximación relativamente bajos en aplicaciones industriales llegando, por tanto, a valores de error relativo considerables (40 % o más de error relativo en norma energética). No obstante, en lo que se refiere a técnicas de estimación del error para métodos basados en la partición de la unidad la bibliografía es aún muy limitada. A continuación, se hace una reseña de los estimadores del error desarrollados para los entornos GFEM y XFEM presentes en la literatura. En el capítulo siguiente se presenta el estimador de error en norma energética denominado SPR-CX, desarrollado en esta tesis para el entorno XFEM.

4.5.1. Estimadores del error para GFEM

En STROUBOULIS ET AL. (2001) se presenta un primer estimador *a posteriori* del error para el GFEM, basado en la obtención de un campo reconstruido de desplazamientos $\mathbf{u}_{\text{GFEM}}^*$. La solución reconstruida de desplazamientos se evalúa en patches formados en el conjunto de los nodos vértice \mathcal{N}_v de la malla, de manera similar a lo que ocurre en otras técnicas de reconstrucción de la solución. Para los patches formados en los nodos $i \in \mathcal{N}_v$ se define el campo reconstruido de desplazamientos en el soporte del patch ω_i como:

$$\mathbf{u}_{\text{GFEM},\omega_i}^* = \sum_{j=1}^{n_i} a_j^i \psi_j^{\omega_i} + \sum_{j=1}^{n_{hb}} b_j^i \varphi_j^{\omega_i} \quad (4.92)$$

donde $\psi_j^{\omega_i}$ y $\varphi_j^{\omega_i}$ son el conjunto de funciones base usadas en la reconstrucción y n_{hb} es el número de funciones handbook características del problema. Para definir $\psi_j^{\omega_i}$

los autores utilizaron n_i monomios armónicos centrados en el nodo vértice i donde, por ejemplo, para los nodos situados en el interior del dominio o sobre el contorno de Neumann se escriben como:

$$\psi_0^{(i)}(x, y) = 1, \quad \psi_{2j-1}^{(i)}(x, y) = \Re((z - z_i)^j), \quad \psi_{2j}^{(i)}(x, y) = \Im((z - z_i)^j) \quad (4.93)$$

con $j = 1, 2, 3, \dots$, siendo $z = x + Iy$ con $I = \sqrt{-1}$.

Para definir $\varphi_j^{\omega_i}$ utilizaron n_{hb} funciones especiales de tipo *handbook* asociadas al soporte ω_i , las cuales son dependientes del problema y permiten reflejar el carácter local de la solución. Las funciones *handbook* se definen como soluciones exactas de problemas tipo, las cuales son formuladas usando información local conocida⁶ de la ecuación diferencial, la geometría del contorno, las condiciones de contorno, las cargas aplicadas, información del material, \dots , y pueden ser determinadas *a priori*, es decir, antes de evaluar la solución de la aproximación al problema de interés (STROUBOULIS ET AL., 2001). Las funciones *handbook* son introducidas en la aproximación de EF usando la propiedad de la Partición de la Unidad.

En la Ecuación 4.92 los coeficientes a_j^i y b_j^i se evalúan para cada nodo vértice minimizando en cada patch ω_i el funcional χ que corresponde a la norma L_2 de la diferencia de los campos \mathbf{u}^* y \mathbf{u}^h :

$$\chi = \|\mathbf{u}_{\text{GFEM}, \omega_i}^* - \mathbf{u}_{\text{GFEM}}^h\|_{L_2(\omega_i)}^2 \quad (4.94)$$

Finalmente, se reconstruye la solución global ponderando las soluciones locales mediante la propiedad de la Partición de la Unidad de la Sección 3.3:

$$\mathbf{u}_{\text{GFEM}}^* = \sum_{i \in \mathcal{N}_v} N_i \left(\sum_{j=1}^{n_i} a_j^i \psi_j^{\omega_i} + \sum_{j=1}^{n_{hb}} b_j^i \varphi_j^{\omega_i} \right) \quad (4.95)$$

Reemplazando el campo exacto de la solución en desplazamientos \mathbf{u} por el campo reconstruido $\mathbf{u}_{\text{GFEM}}^*$ en la expresión para el error en norma energética, se puede escribir el error estimado en norma energética como:

$$\|\mathbf{e}_{es}\|_{\text{GFEM}} = \sqrt{\sum \|\mathbf{u}_{\text{GFEM}}^* - \mathbf{u}_{\text{GFEM}}^h\|^2} \quad (4.96)$$

STROUBOULIS ET AL. (2001) indicaron que para este primer estimador del error desarrollado en el entorno de GFEM se observó que los resultados de efectividad se subestimaban para secuencias de mallas uniformes. Así, señalaron que de acuerdo a las observaciones hechas en los ejemplos analizados, este comportamiento se debe principalmente a que las mayores contribuciones del error se concentran en elementos

⁶(STROUBOULIS ET AL., 2001) señalan que el uso de funciones *handbook* en GFEM conlleva mejoras significativas de la precisión de la solución de EF. Algunas de las posibles funciones *handbook* son: la función definida para entallas en forma de V $\psi(r, \theta) = r^{\lambda_j^{(i)}} f_j^{(i)}(\theta)$, funciones que representan interfaces entre materiales, funciones para utilizar en cercanías de inclusiones, agujeros o grietas.

con nodos en entallas en V , donde justamente el estimador resulta menos preciso. Según los mismos autores, la correlación de los resultados para el error exacto y el error estimado es mayor en el caso de mallas con refinamiento adaptativo, donde se observó convergencia asintótica de la efectividad a su valor teórico de 1. Asimismo, se obtuvieron resultados prácticamente idénticos para las curvas de convergencia del error de los valores exactos y los valores estimados.

Posteriormente, en STROUBOULIS ET AL. (2006) se presentan los resultados para dos estimadores del error para el GFEM. El primero es un estimador de tipo residual, basado en indicadores del error definidos a partir de residuos en patches. El segundo es un estimador del error basado en la reconstrucción del campo de desplazamientos, adaptado para GFEM a partir de los estimadores desarrollados en el entorno del MEF por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a), WIBERG Y ABDULWAHAB (1993).

En la formulación del estimador del error basado en residuos, STROUBOULIS ET AL. (2006) hacen una generalización para el entorno GFEM del indicador del error $\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}$ definido por DÍEZ ET AL. (2004) como la solución de un problema residual planteado en el soporte del nodo i . Es decir, $\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}$ es solución del problema de contorno de Neumann planteado en el subdominio ω_i .

Retomando el problema de contorno de Neumann en su formulación débil visto en la Ecuación 2.8:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

y considerando el error exacto $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{GFEM}}^h$, se puede definir el problema

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{GFEM}}^h, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_{\text{GFEM}}^h, \mathbf{v}) = \mathbf{R}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad (4.97)$$

donde el funcional $\mathbf{R}(\cdot)$ representa el residuo que aparece en la formulación. Usando la Partición de la Unidad (Sección 3.3)

$$\sum_i N_i(\mathbf{x}) = 1$$

se obtiene

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\left(\mathbf{v} \sum_i N_i\right) = \sum_i \mathbf{R}(N_i \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad (4.98)$$

Se define entonces $\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i} \in \mathcal{U}(\omega_i)$ como la solución al problema planteado en el dominio del patch ω_i :

$$a_{\omega_i}(\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}(N_i \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\omega_i) \quad (4.99)$$

$$\int_{\omega_i} \nabla \hat{\mathbf{e}}_{\omega_i} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = l(N_i \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_{\text{GFEM}}^h, N_i \mathbf{v}) \quad (4.100)$$

Si se asume que existe $\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}$ para todo posible ω_i se puede plantear:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|^2 &= a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_i \mathbf{R}(N_i \mathbf{e}) = \sum_i a_{\omega_i}(\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}, \mathbf{e}) \leq \sum_i \sqrt{a_{\omega_i}(\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}, \hat{\mathbf{e}}_{\omega_i})} \sqrt{a_{\omega_i}(\mathbf{e}, \mathbf{e})} \\ &\leq \sqrt{\sum_i a_{\omega_i}(\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}, \hat{\mathbf{e}}_{\omega_i})} \sqrt{\sum_i a_{\omega_i}(\mathbf{e}, \mathbf{e})} \leq \sqrt{\sum_i \|\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}\|^2} \sqrt{Ma(\mathbf{e}, \mathbf{e})} \end{aligned} \quad (4.101)$$

De la expresión anterior deriva una primera estimación teórica de la norma energética del error $\mathcal{E}_{UB,2}$ que se caracteriza por ser cota superior del error, es decir, siempre es mayor o igual al error exacto $\|\mathbf{e}\|$:

$$\mathcal{E}_{UB,1} = \sqrt{M} \sqrt{\sum_i \|\hat{\mathbf{e}}_{\omega_i}\|_{\mathcal{U}(\omega_i)}^2} \geq \|\mathbf{e}\| \quad (4.102)$$

donde M es un índice de superposición dado por la partición de la unidad empleada.

Posteriormente, siguiendo las ideas de DÍEZ ET AL. (2004) se puede demostrar que:

$$\mathcal{E}_{UB,2} = \sqrt{\sum_{\tau \in \Delta_h} \left\| \sum_i \hat{\mathbf{e}}_{\omega_i} \right\|_{\mathcal{U}(\tau)}^2} \geq \|\mathbf{e}\| \quad (4.103)$$

donde $\mathcal{E}_{UB,2}$ representa una segunda estimación teórica $\|\mathbf{e}\|$, y Δ_h representa la malla que define el espacio de aproximación de GFEM. STROUBOULIS ET AL. (2006) indicaron que los estimadores $\mathcal{E}_{UB,1}$ y $\mathcal{E}_{UB,2}$ presentan buenos índices de efectividad para todo el rango de problemas analizados, incluso en aquellos en los cuales el error relativo es considerable (del orden del 50 %).

El estimador basado en la reconstrucción de la solución mostrado en STROUBOULIS ET AL. (2006) está fundamentado en la reconstrucción local de los desplazamientos mediante técnicas de ajuste por mínimos cuadrados en patches, de manera similar al trabajo presentado en STROUBOULIS ET AL. (2001). Los autores indicaron que el estimador basado en la reconstrucción de la solución ofrece buenos índices de efectividad cuando la solución de GFEM es suficientemente precisa. Sin embargo, señalaron nuevamente que dicho estimador puede subestimar considerablemente el error exacto cuando se tienen errores relativos muy altos.

Más adelante, STROUBOULIS ET AL. (2007) utilizan el estimador de tipo residual de las Ecuaciones 4.102, 4.103 para estimar el error en norma energética de la solución en GFEM cuando esta se enriquece con funciones *handbook* inexactas. Es decir, cuando se usan funciones menos precisas de manera que se pueda disminuir el coste computacional sin llegar a comprometer la precisión global del GFEM. Los resultados obtenidos por los autores muestran una buena efectividad del estimador en estos casos, con convergencia al valor teórico de 1.

4.5.2. Técnica XMLS

Recientemente, BORDAS Y DUFLLOT (2007), BORDAS ET AL. (2008) han presentado un estimador del error para el entorno XFEM basado en la reconstrucción del campo gradiente de la solución. Este método propone el enriquecimiento intrínseco de la base de *Moving Least Squares* (MLS), de forma que se incluya información relativa a los campos asintóticos en cercanías del extremo de grieta, y usa el método de la difracción para introducir la discontinuidad en los campos reconstruidos. Así, se obtiene un campo de deformaciones reconstruido que incluye la singularidad en el extremo de grieta con el que, posteriormente, se evalúa una estimación del error expresado como la norma L_2 de la diferencia entre el campo reconstruido y el campo solución de XFEM.

El método de *Moving Least Squares* (MLS) es una técnica que sirve para reconstruir funciones continuas a partir de muestras puntuales, por medio de un ajuste ponderado de mínimos cuadrados localizado en la región alrededor del punto donde se desea reconstruir la función. Fue desarrollado inicialmente por matemáticos (LANCASTER Y SALKAUSKAS, 1981) con el fin de construir y ajustar superficies, y ha sido utilizado en los métodos numéricos sin malla tipo Galerkin (BELYTSCHKO ET AL., 1994) para construir funciones de forma.

En la técnica *Extended Moving Least Squares* (XMLS) la solución es reconstruida mediante el uso de MLS de forma similar al trabajo propuesto por TABBARA ET AL. (1994), con la diferencia de que el XMLS implementa una extensión de dicha técnica para poder utilizarla con métodos basados en la partición de la unidad, como es el caso del XFEM. La idea general de la técnica XMLS es usar la solución nodal en desplazamientos obtenida con XFEM para evaluar un campo reconstruido de deformaciones en cada uno de los puntos de integración.

Sea $\mathcal{N}_{\text{XMLS}}$ el conjunto de puntos formados por los nodos de la aproximación de XFEM más los puntos de intersección de la grieta con la malla XFEM, donde para cada punto se define un *soporte* o *área de influencia* de tamaño d_i .

Las deformaciones son reconstruidas a partir de la derivada del campo de desplazamientos de XFEM, ajustado mediante MLS según se indica en las siguientes expresiones:

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} \Psi_i(\mathbf{x}) u_i^h \quad (4.104)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} \mathcal{D}(\Psi_i)(\mathbf{x}) u_i^h \quad (4.105)$$

Donde u^h representa la solución nodal de desplazamientos de XFEM y Ψ_i son los valores de las funciones de forma de MLS asociadas a un nodo i evaluadas en un punto $\mathbf{x} \in \Omega$. n_x es el número total de puntos que contienen a \mathbf{x} en su soporte, y que

pertencen al conjunto de puntos $\mathcal{N}_{\text{XMLS}}$. \mathbf{u}^* y $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ son los respectivos campos reconstruidos de desplazamientos y deformaciones. \mathcal{D} representa un operador diferencial que transforma los desplazamientos \mathbf{u}^h en las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^h$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T) \otimes \mathbf{u}^h = \mathcal{D} \otimes \mathbf{u}^h \quad (4.106)$$

En la Ecuación 4.105, las funciones de forma de MLS Ψ correspondientes a los n_x puntos con influencia sobre el punto de integración \mathbf{x} se definen como:

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_i(\mathbf{x}) \quad (4.107)$$

con

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (4.108)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (4.109)$$

Las funciones de forma de MLS pueden reproducir cualquier función en su base. En la expresión anterior \mathbf{p} es el vector de m funciones base definidas en la Tabla 4.1 de manera que la aproximación se pueda definir como:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j \mathbf{a}_j = \mathbf{p}^T \mathbf{a} \quad (4.110)$$

TABLA 4.1. Posibles funciones base usadas en la aproximación mediante MLS.

	1D	2D	3D
Constante	[1]	[1]	[1]
Lineal	[1, x]	[1, x, y]	[1, x, y, z]
Cuadrática	[1, x, x^2]	[1, x, y, x^2, y^2, xy]	[1, $x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$]
Lineal+enriquecimiento	[1, $x, H(x)\sqrt{ x }$]	—	—
Lineal+enriq. de E.G.	—	[1, $x, y, [F_\ell(r, \phi)]$]	[1, $x, y, z, [F_\ell(r, \phi)]$]

Para resolver el problema de mecánica de la fractura BORDAS Y DUFLOT (2007) escogen del conjunto de posibles funciones en la Tabla 4.1 la función lineal enriquecida de la última fila. Dicha función está enriquecida con las funciones que reproducen el primer término del desarrollo del campo asintótico en el extremo de grieta revisadas en la Ecuación 3.10 de manera que la base de MLS queda definida como:

$$\mathbf{p} = [1, x, y, [F_1(r, \phi), F_2(r, \phi), F_3(r, \phi), F_4(r, \phi),]] \quad (4.111)$$

La matriz \mathbf{A} es una matriz de tamaño $m \times m$ a invertir siempre que se evalúen las funciones de MLS. Una condición para que \mathbf{A} sea invertible es que $n_x > m$, es decir,

que existan más puntos con influencia sobre \mathbf{x} que funciones base en \mathbf{p} . w_i es la función de peso asociada al punto \mathbf{x}_i que para el caso bidimensional se escribe

$$w_i(\mathbf{x}) = f_4 \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \right) \quad (4.112)$$

donde d_i es el tamaño del soporte del nodo x_i (BORDAS Y DUFLLOT (2007) utilizan para mallas estructuradas un soporte de tres veces el tamaño del elemento), y f_4 es una función *spline* de grado cuatro definida como:

$$f_4(s) = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (4.113)$$

Con el fin de considerar la presencia de la discontinuidad, la función de peso definida para cada punto del soporte es modificada usando el *criterio de difracción*. La idea básica se ilustra en la Figura 4.6. La función de peso es continua excepto a lo largo de la grieta, y cerca del extremo de grieta, el peso de un nodo i sobre un punto \mathbf{x} disminuye a medida que la grieta oculta al punto:

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \quad (4.114)$$

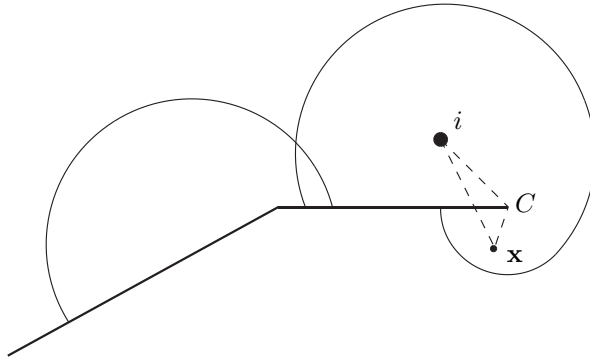


FIGURA 4.6. *Criterio de difracción para introducir discontinuidades en la aproximación mediante XMLS.*

Siguiendo el planteamiento del método, el proceso para reconstruir el campo de deformaciones resulta bastante sencillo. El algoritmo de reconstrucción se resume en la Tabla 4.2.

Tras obtener el campo reconstruido de deformaciones se evalúa el error en el elemento Ω_e como la norma L_2 de la diferencia entre el campo reconstruido y el campo gradiente de la solución de XFEM. La estimación global se calcula a partir de las aportaciones

TABLA 4.2. *Algoritmo para la reconstrucción del campo de deformaciones mediante la técnica XMLS*

OBJETIVO: Evaluar el campo reconstruido $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ en todos los puntos de Gauss de la malla.

1. Utilizar la solución de la aproximación mediante XFEM para evaluar los desplazamientos de todos los puntos en \mathcal{N}_{XMLS} .

2. BUCLE en puntos de Gauss:

a) Evaluar las funciones de forma de MLS. Las funciones se ponderan adecuadamente, de acuerdo a la posición de los puntos en \mathcal{N}_{XMLS} respecto a \mathbf{x} :

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_i(\mathbf{x}) \quad (4.115)$$

b) Evaluar las derivadas de las funciones de forma $\Psi_i(\mathbf{x})$.

c) Evaluar las deformaciones reconstruidas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_x} \mathcal{D}(\Psi_i)(\mathbf{x}) u_i^h \quad (4.116)$$

3. FIN BUCLE en puntos de Gauss.

de los errores en los n_e elementos de la malla.

$$\|\mathbf{e}_{es}\|_{\Omega_e} = \sqrt{\int_{\Omega_e} \|\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x})\|^2 dx} \quad (4.117)$$

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_e} \|\mathbf{e}_{es}\|_{\Omega_i}^2} \quad (4.118)$$

En BORDAS ET AL. (2008) se modelan problemas en 1D y 2D para explicar la metodología del estimador y justificar el enriquecimiento de la base de MLS. En BORDAS Y DUFLOT (2007) se consideran problemas de MFEL en 2D y 3D en diferentes modos de carga resueltos con una formulación de tipo XFEM. Los autores indicaron que de acuerdo a lo observado en los ejemplos numéricos el estimador presenta convergencia al valor teórico de la unidad a medida que disminuye el tamaño de elemento, siempre y cuando se utilice enriquecimiento de tipo geométrico alrededor del extremo de grieta. Asimismo, señalaron que para el tipo de problemas analizados la técnica ofrece mejores resultados que la técnica SPR de ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) con la ventaja adicional que no requiere puntos de superconvergencia. Adicionalmente, la técnica propuesta resulta bastante flexible ya que puede manejar distintos esquemas de enriquecimiento a través del enriquecimiento intrínseco de la base de MLS, incluso con funciones de base no polinómica.

Una de las desventajas de la técnica XMLS es su alto coste computacional, ya que utiliza una base de MLS enriquecida con siete términos en todo el dominio. Los autores sugieren que para disminuir el coste se puede enriquecer la base de MLS de manera local, haciendo una transición entre una aproximación de MLS estándar y una zona enriquecida, de manera semejante a lo realizado en la aproximación de XFEM. De esta manera, se garantiza la continuidad de la solución y aumenta la flexibilidad de la técnica.

4.5.3. Técnica XGR

DUFLOT Y BORDAS (2008) han propuesto la técnica *Extended Global Derivative Recovery* (XGR) como una técnica de construcción global de la solución, en la cual la solución reconstruida se busca en un espacio enriquecido con los campos de deformación de extremo de grieta. Estos campos son obtenidos después de derivar la expansión asintótica de Westergaard.

La metodología es una generalización a la técnica XFEM del trabajo de HINTON Y CAMPBELL (1974), en el cual se introduce una técnica global de reconstrucción denominada *Global Derivative Recovery*. Cuando se utiliza un espacio de soluciones admisibles \mathcal{U} de continuidad C^0 en los métodos de elementos finitos, las tensiones y deformaciones correspondientes son discontinuas en los contornos entre elementos. Como se ha mencionado antes, HINTON Y CAMPBELL (1974) propusieron obtener un campo mejorado de tensiones continuo entre elementos, el cual se interpola usando las mismas funciones utilizadas para los desplazamientos, y que resulta de minimizar para todo el dominio la norma L_2 de la diferencia entre el campo reconstruido y el correspondiente campo de EF.

En la técnica extendida presentada por DUFLOT Y BORDAS (2008), la aproximación utilizada para la construcción del campo gradiente reconstruido se enriquece con el gradiente de las funciones empleadas para enriquecer la aproximación inicial de desplazamientos. Para los problemas de MFEL formulados con XFEM dichas funciones corresponden a las derivadas del campo de desplazamientos en extremo de grieta.

El campo aproximado de deformaciones esta dado por el gradiente simétrico del campo aproximado de desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T) \otimes \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \quad (4.119)$$

Para la solución de Westergaard planteada para un material elástico lineal, las funciones que representan los campos de deformación en cercanías del extremo de grieta se escriben:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\phi}{2}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\phi}{2}\right) \end{array} \right] \quad (4.120)$$

El campo reconstruido de deformaciones formulado por DUFLOT Y BORDAS se divide en tres partes, al igual que el campo aproximado de desplazamientos de la Ecuación 3.9. En primer lugar, una parte estándar de continuidad C^0 dada por las funciones de forma de la aproximación convencional, una parte discontinua que incluye la función $H(\mathbf{x})$, y por último una parte que contiene la información del extremo de grieta, construida usando la función \mathbf{G} . La expresión para el campo reconstruido de deformaciones se escribe entonces como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{d}_i + \sum_{j \in J} N_j H(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j + \sum_{m \in M} N_m \left(\sum_{\ell=1}^4 G_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{f}_m^\ell \right) \quad (4.121)$$

Donde \mathbf{d}_i , \mathbf{e}_j y \mathbf{f}_m^ℓ son coeficientes a evaluar por medio de la minimización de la norma L_2 en todo el dominio Ω de la diferencia entre el campo de deformaciones de XFEM y el campo reconstruido de deformaciones:

$$\int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}^h - \boldsymbol{\varepsilon}^*\|^2 d\Omega \quad (4.122)$$

Derivando respecto a los coeficientes \mathbf{d}_i , \mathbf{e}_j y \mathbf{f}_m^ℓ se obtiene un sistema lineal de ecuaciones a resolver, en el cual la matriz a invertir es idéntica para todas las componentes del vector de deformaciones.

DUFLOT Y BORDAS (2008) comprobaron el comportamiento de la técnica XGR en problemas de MFEL en dos y tres dimensiones, mostrando que el método presenta velocidades de convergencia y efectividades ligeramente menores que las de la técnica XMLS (BORDAS Y DUFLOT, 2007, BORDAS ET AL., 2008). No obstante, señalaron que la técnica XGR tiene un menor coste computacional y mayor flexibilidad que la técnica XMLS, haciéndola más favorable para su aplicación en entornos industriales.

4.5.4. Estimadores residuales del error para XFEM

En PANNACHET ET AL. (2008) se estudia la estimación del error en XFEM vinculada a refinamientos del tipo p -adaptativos con el fin de mejorar los resultados de la solución de XFEM sin cambiar la topología de la discretización. Se desarrollan dos estimadores de tipo residual, el primero basado en la medida energética del error, y el segundo del tipo *goal-oriented* (basado en la medida de una magnitud de interés). La estimación del error se fundamenta en resolver localmente en patches formados alrededor de los nodos el problema prescrito con condiciones de contorno homogéneas.

En los resultados numéricos la efectividad del estimador no es evaluada respecto al valor exacto de la norma energética del error por utilizar un problema sin solución analítica. Los estimadores demostraron ser útiles para controlar los procesos p -adaptativos en diferentes tipos de problemas.

4.5.5. Otros trabajos

Aunque XIAO Y KARIHALOO (2006) no presentan directamente un estimador del error para XFEM, su trabajo incluye la generalización para el entorno XFEM de una técnica de reconstrucción del campo de tensiones estáticamente admisibles denominada SAR (*Statically Admissible Stress Recovery*). La técnica SAR utiliza MLS para ajustar los valores de tensión en los puntos de muestreo (puntos de integración de XFEM), con funciones base que satisfacen las ecuaciones de equilibrio en el interior del dominio y las condiciones locales de tracción en el contorno.

XIAO Y KARIHALOO (2006) indicaron que, de acuerdo a lo observado en los ejemplos numéricos, la técnica SAR ofrece resultados más precisos que una técnica de promediado en nodos convencional en cercanías de la singularidad. Debido a que la técnica SAR utiliza MLS, las tensiones reconstruidas son sensibles al tamaño del área de influencia de las funciones de forma de MLS. Los autores consideraron un tamaño aproximadamente igual al tamaño de elemento. Asimismo, señalaron que los mejores resultados se obtienen cuando se utilizan funciones de enriquecimiento en la base de MLS que puedan representar los campos asintóticos en el extremo de la grieta, siendo mayor la influencia en las dos primeras capas de elementos alrededor de la singularidad.

En otro trabajo, BARROS ET AL. (2004) desarrollan un estimador residual de tipo implícito para GFEM basado en el estimador de residuos equilibrados en el elemento (*Element Residual Method*, ERM)(ver ZIENKIEWICZ Y TAYLOR, 2000). Se plantean diferentes indicadores globales y locales del error, así como también el estimador del error, con el propósito de presentar una estrategia de refinamiento p -adaptativo para GFEM. Dichos indicadores se obtienen después de resolver localmente para cada elemento un problema de contorno de Neumann planteado en función de los residuos de equilibrio. Con el fin de garantizar la solución del problema de contorno se sigue un esquema de equilibrado similar al presentado por LADEVÈZE Y MAUNDER (1996), el cual ha sido adaptado al entorno GFEM.

En la formulación convencional de MEF, el método ERM puede estimar adecuadamente la norma energética del error en el elemento. Sin embargo, para obtener un indicador del error que sirva para guiar el refinamiento p -adaptativo en GFEM es necesario definir una estimación del error en nodos, en coherencia con el esquema de enriquecimiento nodal de GFEM. La estimación nodal es evaluada mediante ponderación de los indicadores locales evaluados en elementos. Los resultados presentados por BARROS ET AL. (2004) indican un buen comportamiento del estimador, aunque los autores señalan que resulta necesario mejorar la técnica de equilibrado con el fin de disminuir el coste computacional, el cual se observa particularmente alto.

4.6. Cotas del error

En secciones anteriores se han discutido las formulaciones de diferentes tipos de estimadores de la norma energética del error para aproximaciones de elementos finitos. Se han expuesto los estimadores de tipo residual tanto implícitos como explícitos, los estimadores de tipo *recovery* como el estimador ZZ-SPR, así como también algunos estimadores específicos para aproximaciones basadas en la partición de la unidad. Asimismo, se han definido algunos indicadores para evaluar la calidad de los estimadores del error, como son el índice de efectividad global θ , o el índice de efectividad local D . En todos estos casos, aunque la estimación del error sea cercana al error exacto puede, independientemente de la técnica escogida, sobrestimar o subestimar el error exacto.

En la práctica existe un interés creciente por construir estimaciones del error que acoten el error exacto en norma energética (AINSWORTH Y ODEN, 2000, BABUŠKA ET AL., 1999, STROUBOULIS ET AL., 2000b, DÍEZ ET AL., 2007). Un avance importante en esta dirección ha sido el desarrollo de métodos que determinen cotas superiores e inferiores del error en la aproximación, de manera que para una simulación determinada, una vez se ha escogido el modelo particular, se puedan calcular cotas que fijen límites superiores e inferiores de las magnitudes de interés. Para el caso de la estimación de la norma energética del error interesa obtener

$$\mathcal{E}_{LB} \leq \|\mathbf{e}\| \leq \mathcal{E}_{UB} \quad (4.123)$$

donde $\|\mathbf{e}\|$ representa el error exacto en norma energética de la solución aproximada, y \mathcal{E}_{UB} , \mathcal{E}_{LB} se definen respectivamente como las cotas superior e inferior de la norma energética del error. De manera similar, se pueden plantear cotas en magnitudes de interés.

La cota superior de la norma energética del error \mathcal{E}_{UB} o, de manera más general, las cotas superiores en magnitudes de interés, resultan útiles en la medida que ofrecen un criterio de seguridad para aceptar los resultados obtenidos. Las cotas inferiores del error \mathcal{E}_{LB} son necesarias para asegurar que la cota superior no es potencialmente demasiado pesimista, y por consiguiente, no conducirá a refinamientos muy elevados si se usa, por ejemplo, como criterio de parada en refinamientos adaptativos.

Es posible obtener una valoración de la fiabilidad de las cotas mediante la evaluación del rango de sus efectividades θ_{LB} y θ_{UB} , de manera que se cumpla:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{LB}}{\mathcal{E}_{UB}} \leq \theta_{LB} = \frac{\mathcal{E}_{LB}}{\|\mathbf{e}\|} \leq 1 \\ 1 \leq \theta_{UB} = \frac{\mathcal{E}_{UB}}{\|\mathbf{e}\|} \leq \frac{\mathcal{E}_{UB}}{\mathcal{E}_{LB}} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Cuando la relación $\mathcal{E}_{UB}/\mathcal{E}_{LB}$ es cercana a 1, las efectividades θ_{UB} y θ_{LB} son también cercanas a 1, y se puede concluir que \mathcal{E}_{UB} , \mathcal{E}_{LB} son buenas estimaciones del error, acotándolo dentro de un rango determinado. Esta misma idea se plasma en el *índice*

de robustez R propuesto por BABUŠKA ET AL. (1994a) como un único parámetro que sirve de indicador de la robustez de los estimadores del error, y que se define como:

$$R = \text{máx} \left(|1 - \theta_{\text{LB}}| + |1 - \theta_{\text{UB}}|, \left| 1 - \frac{1}{\theta_{\text{LB}}} \right| + \left| 1 - \frac{1}{\theta_{\text{UB}}} \right| \right) \quad (4.125)$$

Un valor muy alto del índice de robustez R denota un mal comportamiento del estimador, mientras que para el caso ideal de $\theta_{\text{UB}} = 1$ y $\theta_{\text{LB}} = 1$, el índice de robustez es $R = 0$. De esta manera, las cotas del error resultan útiles para comparar diferentes estimadores del error de discretización en norma energética, y examinar su comportamiento para distintos tipos de mallas y tipos de elementos⁷.

En general, la construcción de cotas inferiores del error \mathcal{E}_{LB} es relativamente fácil, mientras que la obtención de cotas superiores \mathcal{E}_{UB} no es sencilla. Como se indica en STROUBOULIS ET AL. (2006), se puede hablar de la existencia de una cota superior del error teórica, la versión evaluada en un dominio discreto de dicha cota, y una versión *computable* de la cota superior. Es posible obtener una cota superior del error teórica con una efectividad superior a la unidad, mientras que su versión evaluada en un dominio discreto puede subestimar la norma del error exacto, con $\theta_{\text{UB}} < 1$. La cota superior del error *computable* es una versión corregida de la cota evaluada en la aproximación de manera que, más allá de los errores de redondeo, pueda garantizarse que es una cota superior, es decir, que $\|\mathbf{e}\| \leq \mathcal{E}_{\text{UB}}$.

BABUŠKA Y STROUBOULIS (2001) enumeran propiedades deseables en las cotas del error:

1. *Las cotas deben estar garantizadas respecto del error exacto para cualquier nivel de precisión.* Es posible construir cotas superiores de la norma energética del error respecto al campo solución de una malla muy fina \mathbf{u}_f^h

$$\mathbf{e}_f = \mathbf{u}_f^h - \mathbf{u}^h \quad (4.126)$$

No obstante, también es posible que, según se comentó anteriormente, la cota superior respecto de la malla fina $\mathcal{E}_{\text{UB},f}$ sea menor que el error exacto en norma energética

$$\|\mathbf{e}_f\| \leq \mathcal{E}_{\text{UB},f} < \|\mathbf{e}\| \quad (4.127)$$

Por lo tanto, las cotas superiores de la norma energética del error obtenidas mediante el uso de mallas de referencia más finas deben ser usadas con cuidado si se utilizan como criterios de parada para procesos adaptativos, especialmente cuando la aproximación es basta y existen errores muy altos.

2. *Debe ser posible construir las cotas también para el error de soluciones postprocesadas $\tilde{\mathbf{u}}$, es decir,*

$$\mathcal{E}_{\text{LB},\tilde{\mathbf{u}}} \leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| \leq \mathcal{E}_{\text{UB},\tilde{\mathbf{u}}} \quad (4.128)$$

⁷ZIENKIEWICZ Y TAYLOR (2000) dan como valores orientativos índices de robustez de $R = 0.02$ para el estimador ZZ-SPR, y $R = 10.21$ para el estimador residual ERpB en base a los resultados obtenidos en un conjunto de ejemplos numéricos

Según indican BABUŠKA Y STROUBOULIS dicha propiedad es deseable ya que resulta habitual el uso de algún tipo de postproceso para extraer los datos de interés a partir de la solución de elementos finitos.

3. *La construcción de las cotas debe ser tal que su precisión pueda ser controlada y mejorada a un costo relativamente bajo.* Esto es importante ya que en la práctica se requiere que el error en norma energética o en la magnitud de interés sea menor o igual a una tolerancia determinada. Si se disminuye el rango de confiabilidad entre las cotas (\mathcal{E}_{UB} , \mathcal{E}_{LB}) es posible evitar evaluar mallas más refinadas si se ha alcanzado la tolerancia, o en caso contrario, se puede tener la certeza de que se requiera una malla más fina para alcanzar la precisión buscada.
4. *Las cotas no deben depender de constantes no especificadas, o constantes válidas solo para una cierta clase de mallas y/o datos de entrada.* BABUŠKA Y STROUBOULIS señalan que esto ocurre frecuentemente para cotas que se construyen siguiendo los pasos de pruebas matemáticas de equivalencia entre diferentes estimadores y el error.
5. *El coste de las cotas debe ser razonable, dependiendo en todo caso del objetivo del cálculo.* La suma de los costes directos e indirectos del cálculo de la cota debe valorarse desde el punto de vista de las aplicaciones. Resulta obvio que para aplicaciones delicadas, con riesgos de accidentes muy costosos, se justifica la evaluación de cotas del error mucho más costosas computacionalmente. Por supuesto, esto iría unido a la implementación y la arquitectura de las máquinas de cálculo.
6. *Se debe procurar usar las cotas en magnitudes de interés.* En la práctica interesa el control cuantitativo del error en las magnitudes críticas, y los estimadores deben estar relacionados directamente con ellas.

Los estimadores del error de tipo residual, específicamente los de formulación implícita, se caracterizan por proporcionar cotas superiores e inferiores del error. En esta clase de estimadores la propiedad de la cota superior es consecuencia del campo de tensiones equilibrado que resulta de la formulación residual implícita. Esta ha sido una de las ventajas tradicionales de los estimadores residuales sobre los estimadores basados en la reconstrucción de la solución. Sin embargo, BABUŠKA Y STROUBOULIS (2001) comentan que es posible construir cotas del error a partir de cualquier estimador de tipo residual o de tipo *recovery*, a expensas de procesos de cálculo adicionales.

El campo de tensiones que se obtiene en estimadores residuales de tipo implícito es un campo de tensiones *estáticamente admisible* que se caracteriza por ser continuo y localmente equilibrado. En los estimadores basados en la reconstrucción de la solución es posible obtener un campo *estáticamente admisible* que permita evaluar una cota superior del error si se imponen adecuadamente las restricciones de equilibrio.

Como se mencionó en secciones anteriores, la idea de imponer condiciones de equilibrio en el campo reconstruido ha sido implementada por diferentes autores (WIBERG Y ABDULWAHAB, 1993, BLACKER Y BELYTSCHKO, 1994). KVAMSDAL Y OKSTAD (1998)

trabajaron en la idea de obtener un campo de tensiones estáticamente admisible usando una técnica de reconstrucción de la solución. Sin embargo, la técnica que presentaron no cumple rigurosamente las condiciones para obtener cotas superiores del error. En primer lugar, debido al proceso aplicado para garantizar la continuidad, el campo reconstruido de tensiones no satisface las ecuaciones de equilibrio interno. En segundo lugar, KVAMSDAL Y OKSTAD tan solo logran una aproximación de baja calidad de la satisfacción de las condiciones de equilibrio de Neumann en el contorno, ya que solamente consideran una minimización del residuo de la ecuación de equilibrio en el contorno.

PEREIRA ET AL. (1999) presentaron una técnica de evaluación de cotas superiores del error basada en el concepto del análisis dual para problemas elástico lineales. En general, para un espacio de aproximación dado, la solución óptima es tal que las tensiones son discontinuas y las deformaciones incompatibles. La técnica propuesta por PEREIRA ET AL. resuelve dos modelos de elementos finitos, uno compatible en desplazamientos y otro equilibrado en tensiones, que se complementan el uno al otro para proveer cotas en magnitudes de interés.

Para el caso del modelo equilibrado se utiliza una formulación equilibrada de elementos finitos (DE ALMEIDA Y FREITAS, 1991) basada en la utilización de elementos híbridos, la cual permite obtener un campo de tensiones estáticamente admisible. Dicha formulación considera dos aspectos principales:

- La aproximación independiente del campo de tensiones dentro de cada elemento como una combinación lineal de funciones equilibradas.
- La imposición independiente de restricciones que garanticen la continuidad de las tracciones en la interfase entre los elementos, por medio de ecuaciones de residuos ponderados.

Una vez se han resuelto los dos modelos (compatible y equilibrado), se obtienen cotas óptimas del error en norma energética mediante un procedimiento que optimiza la energía dentro de cada espacio de aproximación. La técnica de acotación del error propuesta por PEREIRA ET AL. (1999) tiene el inconveniente del costo adicional asociado a la resolución de un segundo problema global. No obstante, ambos modelos se pueden resolver en paralelo.

Recientemente, DÍEZ ET AL. (2007) presentaron un procedimiento para la evaluación de cotas superiores del error que utiliza la técnica SPR-C de RÓDENAS ET AL. (2007) como técnica de reconstrucción del campo de tensiones, de manera que se garantice un campo de tensiones continuo y localmente equilibrado. Además, en el mismo trabajo introducen una nueva estrategia para evaluar cotas superiores del error que considera los defectos de equilibrio debidos al hecho de forzar la continuidad del campo de tensiones. Dicho procedimiento constituye la primera técnica de acotación del error desarrollada a partir de una estimación basada en la reconstrucción de la solución. Resulta de gran interés debido a la importancia que tienen las técnicas de *recovery*, ya que son muy robustas y en general son más utilizadas. Por su relación con el trabajo realizado en esta Tesis se reproducen a continuación los resultados más importantes

presentados en dicho trabajo.

Retomando las expresiones que generalizan el problema elástico lineal de la Sección 2.2 en su formulación fuerte se escribe:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \quad (4.129)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.130)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.131)$$

El cual se expresa mediante su formulación débil, definida dentro del espacio de posibles funciones admisibles \mathcal{U} como:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.132)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ representa la forma bilineal del problema y $l(\cdot)$ la forma lineal del mismo:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (4.133)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (4.134)$$

Se define la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ en función de las tensiones en lugar de los desplazamientos como

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \quad (4.135)$$

a fin de simplificar la notación.

En la Sección 4.2 se indicó que el error exacto en desplazamientos se denota como $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$ donde, en particular, interesa la medida en norma energética de dicho error definida como $\|\mathbf{e}\|^2 = a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}})$.

Sea $\boldsymbol{\sigma}^*$ el campo de tensiones reconstruido, el cual se asume como una buena aproximación al campo exacto $\boldsymbol{\sigma}$. El error estimado en tensiones se puede escribir entonces como:

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^* = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h \quad (4.136)$$

siendo $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*$ una buena aproximación del error exacto en tensiones $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}$. Consecuentemente, se define la correspondiente norma energética tal que $\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) \approx \|\mathbf{e}\|^2$.

Se considera que $\boldsymbol{\sigma}^*$ es un campo reconstruido de tensiones *estáticamente admisible*, que es por lo tanto continuo y localmente equilibrado:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega_k \quad (4.137)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_t \cap \partial\Omega_k \quad (4.138)$$

donde el dominio Ω_k es el dominio discretizado con $k = 1, \dots, n_e$ elementos. Sustituyendo $\boldsymbol{\sigma}^*$ en la Ecuación 4.135 se puede escribir:

$$\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.139)$$

Si el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ es efectivamente un campo estáticamente admisible, la medida de la norma energética asociada a dicho campo es mayor que la norma energética del campo solución del problema elástico \mathbf{u} , es decir,

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \leq \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \quad (4.140)$$

Lo anterior se verifica al reemplazar $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ en la Ecuación 4.139, usando además la Ecuación 4.132,

$$\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) = l(\mathbf{u}) = \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) = \|\mathbf{u}\|^2 \quad (4.141)$$

Y posteriormente, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz⁸

$$\sqrt{\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)} \|\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{u}\|^2 \quad (4.142)$$

De forma análoga, se puede comprobar que la propiedad de cota superior se mantiene igualmente para el error estimado cuando el campo reconstruido es estáticamente admisible, de manera que

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) = \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\sigma) \leq \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma^*, \mathbf{e}_\sigma^*) \quad (4.143)$$

Cabe recordar que las técnicas de reconstrucción del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ no ofrecen un campo gradiente de la solución que sea, de manera estricta, estáticamente equilibrado. Es decir, que la continuidad o el equilibrio del campo de tensiones no se cumplen completamente. Se habla entonces de un campo que es *casi-estáticamente admisible*.

En el primer caso, cuando la continuidad no se satisface plenamente, el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ verifica el equilibrio en las Ecuaciones 4.137 y 4.138, pero el salto de tracción a lo largo de los contornos internos Γ_{int} no se anula. El salto de tracción se define como

$$(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{int}} = (\boldsymbol{\sigma}^*|_{\Omega_1} - \boldsymbol{\sigma}^*|_{\Omega_2}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.144)$$

donde Ω_1 y Ω_2 son dos elementos separados por el contorno Γ_{int} , y \mathbf{n} es el vector normal externo al contorno de Ω_1 .

El segundo caso hace referencia a un campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ que satisface la condición de continuidad y cumple una versión modificada de la Ecuación 4.137, tal que aparece un término \mathbf{s} que representa los defectos en el equilibrio

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \mathbf{s} \quad (4.145)$$

En ambas situaciones, los defectos en el equilibrio indicados en las Ecuaciones 4.144 y 4.145 se consideran mucho más bajos comparados con las magnitudes correspondientes, a saber $\|\mathbf{s}\| \ll \|\mathbf{b}\|$ para el equilibrio interno, y $(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{int}} \ll \boldsymbol{\sigma}^*$ para la

⁸La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para todo par de vectores x y y de un espacio de producto interno real o complejo se cumple que $\|x\| \cdot \|y\| \geq \|x \cdot y\|$

continuidad. Con el fin de poder evaluar la cota superior del error es necesario entonces incluir los defectos en el equilibrio en la formulación para el cálculo de la cota.

Sea $\boldsymbol{\sigma}^*$ un campo localmente equilibrado, discontinuo a lo largo de los contornos entre elementos Γ_{int} . Sea $(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{int}}$ el salto de tracción a lo largo del contorno Γ_{int} . La forma bilineal del problema expresada en función del campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ queda

$$\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) = l(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{int}} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.146)$$

Además, se puede demostrar que la norma energética para el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ es tal que

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) - 2 \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{int}} d\Gamma \quad (4.147)$$

y la correspondiente norma energética del error estimado, evaluado como $\mathbf{e}_\sigma^* = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h$, cumple

$$\|\mathbf{e}\|^2 \leq \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma^*, \mathbf{e}_\sigma^*) - 2 \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{int}} d\Gamma \quad (4.148)$$

Por otro lado, si el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ es continuo pero no cumple exactamente las ecuaciones de equilibrio, tal como se indicó en la Ecuación 4.145, la forma bilineal del problema se puede escribir como:

$$\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) = l(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.149)$$

De manera análoga al caso anterior, la norma energética del campo reconstruido cumple

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Omega \quad (4.150)$$

y la norma energética del error estimado verifica

$$\|\mathbf{e}\|^2 \leq \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma^*, \mathbf{e}_\sigma^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \quad (4.151)$$

La metodología presentada en DÍEZ ET AL. (2007) sirve para construir una cota superior de la norma energética del error a partir de la Ecuación 4.151, utilizando un campo de tensiones reconstruido que no es exactamente estáticamente admisible. En primer lugar, se utiliza la técnica SPR-C (ver Sección 4.4.4) para imponer las condiciones de equilibrio de las Ecuaciones 4.137 y 4.138 sobre el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ que se reconstruye en el soporte de cada patch ω_i , de manera que se cumple

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^* &= \mathbf{b} & \text{en } \omega_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \Gamma_t \cap \partial\omega_i \end{aligned} \quad (4.152)$$

Posteriormente, con el fin de garantizar la continuidad del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ se utiliza la técnica de *conjoint polynomials* (BLACKER Y BELYTSCHKO, 1994) expuesta en la Sección 4.4.4, la cual aprovecha la propiedad de la Partición de la Unidad para definir un campo continuo. Así, retomando la expresión para el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ de la Ecuación 4.78,

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_v} N_i(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^*(\mathbf{x})$$

se fuerza la continuidad del campo reconstruido. Recordar que a diferencia de las técnicas convencionales SPR que interpolan la información desde valores en los nodos \mathbf{x}_i ,

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^*(\mathbf{x}_i)$$

con la técnica *conjoint polynomials* los valores reconstruidos de tensión se reconstruyen en cualquier punto \mathbf{x} del soporte del patch.

Evaluando la divergencia del campo de tensiones reconstruidas a partir de la expresión para $\boldsymbol{\sigma}^*$ dada en la Ecuación 4.78, y considerando el planteamiento local del equilibrio de la Ecuación 4.152 y que $\sum_{i=1}^{n_v} N_i = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* &= \sum_{i=1}^{n_v} N_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^* - \sum_{i=1}^{n_v} \boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \nabla N_i \\ &= \mathbf{b} - \sum_{i=1}^{n_v} \boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \nabla N_i \end{aligned} \quad (4.153)$$

De la expresión anterior se concluye que el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ no está en equilibrio a causa del último término $\sum_{i=1}^{n_v} \boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \nabla N_i$.

Con el fin de evaluar el defecto del equilibrio se introduce el concepto de tensión reconstruida promedio $\boldsymbol{\sigma}_A^*$. Para cada elemento Ω_k , $k = 1, 2, \dots, n_e$ se pueden aproximar tantos campos de tensiones reconstruidas como nodos vértice n_v tenga el elemento, donde cada uno de los campos se supone es una buena aproximación a $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ en el subdominio Ω_k . Por lo tanto, se puede definir la tensión reconstruida promedio $\boldsymbol{\sigma}_A^*$ como:

$$\boldsymbol{\sigma}_A^*|_{\Omega_k} = \frac{1}{n_v} \sum_{i \in \Omega_k} \boldsymbol{\sigma}_i^*|_{\Omega_k} \quad k = 1, 2, \dots, n_e \quad (4.154)$$

La tensión $\boldsymbol{\sigma}_A^*$ es continua dentro del dominio de cada elemento Ω_k , y discontinua en Ω . Operando en la Ecuación 4.153 se obtiene:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{b} + \sum_{i=1}^{n_v} (\boldsymbol{\sigma}_A^* - \boldsymbol{\sigma}_i^*) \cdot \nabla N_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_v} \boldsymbol{\sigma}_A^* \cdot \nabla N_i}_{=0} \quad (4.155)$$

En la expresión anterior el último término del lado derecho se anula debido a que la tensión σ_A^* no depende de i y $\sum_{i=1}^{n_v} \nabla N_i = 0$. El segundo término representa los defectos en el equilibrio introducidos al forzar la continuidad del campo reconstruido σ^* :

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n_v} (\sigma_A^* - \sigma_i^*) \cdot \nabla N_i \quad (4.156)$$

Si las tensiones reconstruidas evaluadas desde los diferentes patches son similares, el valor de \mathbf{s} tiende a ser pequeño. En el trabajo presentado por KVAMSDAL Y OKSTAD (1998) incluso lo califican como despreciable, y consideran directamente que el campo σ^* es *estáticamente admisible*. Por el contrario, en el procedimiento propuesto por DÍEZ ET AL. (2007) se muestra que \mathbf{s} no es despreciable y se tiene en cuenta la contribución de \mathbf{s} para obtener una cota superior en sentido estricto.

Para ello, se acota el error en norma energética a partir de la expresión indicada en la Ecuación 4.151, considerando el campo reconstruido σ^* adecuadamente ponderado mediante *conjoint polynomials* (ver Ecuación 4.78) y el valor de \mathbf{s} definido en la Ecuación 4.156. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se escribe:

$$\|\mathbf{e}\|^2 \leq \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma^*, \mathbf{e}_\sigma^*) + \left| 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \right| \leq \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma^*, \mathbf{e}_\sigma^*) + 2\|\mathbf{e}\|_{L_2} \|\mathbf{s}\|_{L_2} = \mathcal{E}_{\text{UB},0}^2 \quad (4.157)$$

donde $\|\cdot\|_{L_2}$ representa la norma L_2 definida en el dominio Ω .

Con el fin de poder evaluar la cota superior de la norma energética del error de la expresión anterior, es necesario formular un procedimiento para la evaluación de $\|\mathbf{e}\|_{L_2}$. Sean $\mathbf{u}_{(i)}^h$, $i = 1, \dots, N$, las soluciones para una secuencia de mallas h -refinadas, donde los resultados para la última malla se consideran una aproximación muy precisa del valor exacto, $\mathbf{u}_{(N)}^h \approx \mathbf{u}$. DÍEZ ET AL. plantean la estimación del error en desplazamientos a partir de los resultados obtenidos para la última malla de la secuencia, de manera que, para evaluar el error en las primeras $N - 1$ mallas de la secuencia se considera el error como

$$\mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{(i)}^h \approx \mathbf{u}_{(N)}^h - \mathbf{u}_{(i)}^h \quad (4.158)$$

evaluado mediante la proyección de la solución de la malla i en la malla N , utilizando una técnica de interpolación.

Una vez se han evaluado los errores en desplazamientos para las $i = 1, \dots, N - 1$ mallas de la secuencia, y se han calculado las correspondientes normas $\|\mathbf{e}_{(i)}\|_{L_2}$, se puede calcular la norma para la última malla, $\|\mathbf{e}_{(N)}\|_{L_2}$, mediante la extrapolación de $\|\mathbf{e}_{(N-1)}\|_{L_2}$.

Para realizar la extrapolación se consideran el número de grados de libertad de las mallas y la velocidad de convergencia de la norma L_2 .

Una segunda opción al procedimiento de evaluación de $\|\mathbf{e}_{(i)}\|_{L_2}$, la cual no ha sido desarrollada en este trabajo, sería realizar una reconstrucción de la solución en desplazamientos de la solución \mathbf{u}^h , de manera que se evalúe el valor de la norma L_2 del error en desplazamientos a partir del error respecto a un campo reconstruido \mathbf{u}^* .

En la Tabla 4.3 se resume el procedimiento presentado por DÍEZ ET AL. (2007) para el cálculo de cotas superiores del error usando un estimador del error basado en la reconstrucción de la solución. Los resultados numéricos presentados por los autores indican que la técnica permite obtener una estimación muy precisa de la norma energética del error, y adicionalmente, se obtiene una cota superior del error que muestra un buen comportamiento en problemas con solución suave. La cota superior del error diverge para problemas con singularidades en el campo gradiente de la solución. En capítulos posteriores se plantea una modificación de esta técnica para producir cotas superiores del error muy precisas en problemas de MFEL resueltos mediante XFEM.

TABLA 4.3. *Algoritmo para el cálculo de cotas superiores del error en una secuencia de mallas adaptativas*

1. Evaluar las soluciones para la secuencia de mallas con refinamiento adaptativo $\mathbf{u}_{(j)}^h$, $j = 1, \dots, N$. Para adaptar las mallas se utiliza el error estimado $\|\mathbf{e}_{es}\|$ evaluado en el paso 5.
2. Aplicar la técnica de reconstrucción de tensiones SPR-C a cada una de las soluciones para obtener $\boldsymbol{\sigma}_i^*$, $i = 1, \dots, \mathcal{N}_v$, de manera que se garantice el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio.
3. Forzar la continuidad del campo reconstruido mediante *conjoint polynomials*:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_v} N_i(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^*(\mathbf{x})$$

4. Evaluar los defectos de equilibrio introducidos en el paso 3:

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n_v} (\boldsymbol{\sigma}_A^* - \boldsymbol{\sigma}_i^*) \cdot \nabla N_i$$

5. Evaluar la estimación de la norma energética del error

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \sqrt{\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*)}$$

6. Estimar el valor de $\|\mathbf{e}_{(j)}\|_{L_2}$ usando la secuencia de mallas refinadas.
7. Calcular la cota superior de la norma energética del error como:

$$\mathcal{E}_{UB,0} = \sqrt{\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) + 2\|\mathbf{e}\|_{L_2}\|\mathbf{s}\|_{L_2}}$$

Capítulo 5

Estimación del error en XFEM. Técnica SPR-CX

5.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha abordado el problema de la estimación del error de discretización cometido en problemas resueltos mediante la formulación convencional del Método de los Elementos Finitos. Se presentaron diferentes métodos para estimar el error en norma energética, señalando para cada uno sus principales ventajas e inconvenientes. En particular, se indicó que el estimador del error de tipo *recovery ZZ* introducido por ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987), implementado mediante la técnica SPR (ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1992a) es uno de los que ofrece mejores características dentro del conjunto de métodos para la estimación del error disponibles en la literatura.

Asimismo, se revisaron algunas técnicas presentadas recientemente para estimar el error en formulaciones de EF basadas en el método PUM (XFEM, GFEM, ...). En este sentido, se mencionó la importancia de desarrollar estimadores del error para este tipo de métodos, debido principalmente al creciente interés que han generado tanto en el ámbito científico como en el ingenieril.

En el presente capítulo se introduce un nuevo estimador del error de discretización en norma energética denominado SPR-CX, el cual se desarrolla en esta tesis como una adaptación de la técnica SPR de (ZIENKIEWICZ Y ZHU, 1992a) para tratar problemas de la MFEL resueltos mediante el método XFEM. El capítulo se organiza en dos partes.

En la primera parte, se detalla la problemática de las técnicas convencionales de estimación del error en el tratamiento de los problemas singulares típicos de la MFEL. Se presenta la técnica SPR-CX y se exponen las características que permiten la adecuada adaptación de dicha técnica a aproximaciones enriquecidas del tipo XFEM,

haciendo hincapié en la consideración de la singularidad y la discontinuidad propias de los problemas de Mecánica de la Fractura.

En la segunda parte, se realiza un estudio detallado del estimador del error propuesto, analizando su comportamiento mediante el uso de ejemplos numéricos. En primer lugar, resulta necesario realizar la validación de los resultados obtenidos mediante la aproximación enriquecida de elementos finitos. Se determina la influencia de diferentes parámetros como el radio del área de enriquecimiento con funciones de extremo de grieta r_e , o el radio r_q usado para la extracción del Factor de Intensidad de Tensiones. Se verifica la convergencia de la norma energética de la solución de XFEM al valor teórico, y la convergencia de los FITs obtenidos mediante la Integral de Interacción. Posteriormente, se examina la influencia de distintos parámetros que se han de definir en la implementación de la técnica SPR-CX, y que pueden afectar la calidad del campo reconstruido. A continuación, se revisa la efectividad del estimador, y se verifica la convergencia del error estimado para problemas con y sin solución exacta. Finalmente, se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante la técnica SPR-CX con los resultados de la técnica XMLS presentada recientemente por BORDAS Y DUFLOT (2007) para el entorno XFEM.

5.2. Técnica SPR-CX

Estudios comparativos (BABUŠKA ET AL., 1994a, 1997b) han demostrado la robustez de la técnica SPR de ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992a) y su buen comportamiento cuando se utiliza en el entorno del MEF. Sin embargo, su aplicación directa en una formulación del tipo XFEM para resolver problemas de MFEL presenta algunos inconvenientes:

- Al usar polinomios para representar las tensiones reconstruidas σ^* , la técnica SPR no resulta apropiada para describir el campo de tensiones en las cercanías del extremo de la grieta. De hecho, la solución obtenida mediante polinomios sería suave y probablemente de menor calidad que la representación singular del campo de tensiones que proporciona XFEM alrededor del extremo de grieta. Este comportamiento es mencionado igualmente por BORDAS ET AL. (2008), BORDAS Y DUFLOT (2007), quienes compararon la técnica Extended Moving Least Squares (XMLS) con la técnica estándar SPR, y mostraron que ésta última conducía a índices de efectividad que no convergían a la unidad, con una solución reconstruida muy imprecisa. Relacionado con las técnicas de reconstrucción de tensiones, BORROOMAND Y ZIENKIEWICZ (1997b) indicaron que para superar la dificultad asociada con la representación de singularidades en deformaciones y tensiones, se puede usar una combinación de funciones singulares en dirección radial y funciones periódicas en dirección circunferencial para evaluar valores reconstruidos de las tensiones en coordenadas polares.
- En el caso de que existan nodos situados sobre la grieta, sería necesario que estos pudieran representar dos estados de tensión distintos, asociándose cada uno de ellos a uno de los lados de la discontinuidad. Esta situación supondría

modificar la técnica SPR que, de manera estándar, solamente proporciona un único estado tensional para cada nodo.

- En la técnica SPR se utiliza un único conjunto de polinomios de interpolación de tensiones σ_i^* para todo el patch. Este procedimiento no es adecuado cuando un patch se interseca con una grieta ya que en esta situación sería necesario describir los campos de tensiones en cada uno de los lados de la grieta mediante funciones distintas.

Basándose en los problemas que plantea la utilización de la técnica SPR en el entorno XFEM detallados anteriormente, se ha desarrollado una técnica de reconstrucción de tensiones denominada SPR-CX, que se describirá en esta sección y que puede ser considerada como una adaptación de la técnica SPR para problemas de MFEL resueltos mediante XFEM. La técnica SPR-CX se deriva de los trabajos presentados por RÓDENAS ET AL. (2008c, 2007). Las principales características que diferencian la técnica SPR-CX de la técnica SPR son las siguientes:

- *Evaluación directa de tensiones reconstruidas en puntos de integración*: mejora realizada mediante el uso de *conjoint polynomials* (BLACKER Y BELYTSCHKO, 1994).
- *Tratamiento del campo singular*: descomposición de tensiones en campo singular y campo suave.
- *Formación de patches con elementos intersecados con la grieta*: uso de distintos polinomios de interpolación de tensiones a cada lado de la grieta.
- *Cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad*: utiliza las ideas planteadas en la técnica SPR-C de RÓDENAS ET AL. (2007) (ver Sección 4.4.4) para obtener un campo de tensiones localmente equilibrado.
- *Minimización de la norma L_2 de $(\sigma^* - \sigma^h)$* : modificación de la técnica de minimización por mínimos cuadrados para considerar una formulación continua del ajuste.

A continuación se describen en detalle estas modificaciones.

5.2.1. Evaluación directa de tensiones reconstruidas en puntos de integración

La evaluación numérica de la integral que proporciona el error estimado en norma energética $\|\mathbf{e}_{es}\|$ de la Ecuación 4.31 requiere la determinación de σ^* en los puntos de integración de cada elemento. En la técnica SPR estándar, estos valores se obtienen por interpolación a partir de los valores nodales $\bar{\sigma}^*$ utilizando la Ecuación 4.32. Es decir, una vez obtenida la expresión de los polinomios de interpolación en el patch σ_p^* , los únicos valores retenidos son los valores de estos polinomios en los nodos.

BLACKER Y BELYTSCHKO (1994) propusieron una mejora de la técnica SPR basada en el uso de *conjoint polynomials*, referida anteriormente en la Sección 4.4.4. Por medio

de dicha mejora, las tensiones en los puntos de integración son evaluadas directamente, ponderando de forma adecuada los polinomios de interpolación de tensiones calculados desde diferentes patches. Para obtener el valor de σ^* se utiliza la expresión de la Ecuación 4.78 que se reescribe aquí:

$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_v} N_i(\mathbf{x}) \sigma_i^*(\mathbf{x})$$

La utilización del *conjoint polynomials enhancement* no requiere determinar las tensiones en los nodos de los elementos y, por lo tanto, evita la problemática asociada a la necesidad de determinar dos estados de tensiones distintos si el nodo está situado sobre la grieta, o la de evaluar tensiones en el extremo de grieta en caso de que este coincida con un nodo. Recuérdese además que, tanto los elementos atravesados por la grieta como los que contienen la singularidad son descompuestos en subdominios de integración que no contienen la grieta, ver Figura 3.1. Por tanto, la utilización de la cuadratura de Gauss para la integración numérica (puntos de integración siempre en el interior del dominio de integración) tiene dos ventajas obvias. En primer lugar, se garantiza que los puntos de integración nunca estén sobre la grieta, y en segundo lugar, los puntos de integración nunca coinciden con el extremo de la grieta, con lo que no se evalúan tensiones en el punto singular.

5.2.2. Tratamiento del campo singular

La representación polinomial del campo de tensiones que proporciona la técnica SPR resulta adecuada para describir un campo de tensiones suave, pero, tal y como se comentó anteriormente, no resulta adecuada para describir una solución singular. Con el propósito de corregir este problema, en este trabajo se propone descomponer el campo de tensiones exacto σ correspondiente a un problema singular como la contribución de dos campos de tensiones, uno suave (smooth), σ_{smo} , y otro singular, σ_{sing} :

$$\sigma = \sigma_{\text{smo}} + \sigma_{\text{sing}} \quad (5.1)$$

Considerando la expresión anterior, se puede expresar el campo de tensión reconstruido σ^* requerido para la evaluación del estimador del error dado en la Ecuación 4.31 como la contribución de dos campos de tensiones reconstruidos, uno suave σ_{smo}^* y otro singular σ_{sing}^* :

$$\sigma^* = \sigma_{\text{smo}}^* + \sigma_{\text{sing}}^* \quad (5.2)$$

Para la reconstrucción de la parte singular σ_{sing}^* se propone utilizar el campo de tensiones correspondiente al primer término de la expansión asintótica en las cercanías del punto singular de la Ecuación 2.24. Para poder utilizar esta expresión es necesario determinar valores precisos de los FITs K_I y K_{II} . En este trabajo se han obtenido estos valores utilizando la integral de interacción indicada en la Ecuación 2.49.

Las tensiones σ^h obtenidas directamente mediante XFEM para esta clase de problemas son una aproximación de EF al campo σ . Si se define σ_{sno}^h como la aproximación de EF al campo σ_{sno} de la Ecuación (5.1), se podría obtener σ_{sno}^h utilizando la ecuación:

$$\sigma_{\text{sno}}^h = \sigma^h - \sigma_{\text{sing}} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, si se asume que σ_{sing}^* es una buena aproximación a σ_{sing} , el campo σ_{sno}^h se puede evaluar usando la siguiente expresión:

$$\sigma_{\text{sno}}^h \approx \sigma^h - \sigma_{\text{sing}}^* \quad (5.4)$$

Una vez obtenido el campo σ_{sno}^h se puede aplicar una técnica del tipo SPR para obtener el campo de tensión reconstruido σ_{sno}^* .

El uso de esta técnica de reconstrucción mediante descomposición es particularmente interesante en los alrededores de la singularidad. Sin embargo, no es necesario utilizarla en todo el dominio del problema. Lejos de la singularidad el campo de tensiones puede ser reconstruido adecuadamente con una técnica del tipo SPR. En el procedimiento propuesto, si la distancia entre alguno de los nodos del patch y la singularidad es más pequeña que un radio ρ , se considera la descomposición de tensiones *singular+suave* previamente descrita para la evaluación de σ^* . En caso contrario se usa una técnica SPR convencional. En la Figura 5.1 se muestra un esquema del procedimiento de obtención de las funciones de interpolación de tensiones en el patch, σ_i^* , en las distintas zonas del dominio del problema.

Obsérvese que en el esquema de la Figura 5.1 la tensión σ_i^* no siempre se representa mediante polinomios de interpolación de tensiones en el patch. Fuera del área de descomposición se utilizan funciones de interpolación de tensiones que describen una parte polinomial $\sigma_{\text{sno},i}^*$ y, dentro de la zona de descomposición definida por el radio ρ se considera adicionalmente una parte singular σ_{sing}^* .

Es importante resaltar que el radio ρ que define la zona de descomposición (Figura 5.1) es, en principio, independiente del radio r_e del área de enriquecimiento de extremo de grieta (Figura 3.13). Sin embargo, en la Sección 5.3.7 se mostrará numéricamente que el radio $\rho \geq r_e$ resulta bastante adecuado para definir la zona de descomposición.

La técnica de descomposición del campo de tensiones en sus partes suave y singular descrita en este trabajo ha sido también adaptada para su utilización en un entorno MEF estándar para la resolución de problemas con singularidades. En la implementación para el entorno MEF se ha seguido el procedimiento descrito por RÓDENAS ET AL. (2007) para la reconstrucción del campo suave, garantizando que en cada patch las funciones σ_i^* cumplan las ecuaciones de equilibrio de manera exacta. Resultados preliminares presentados en RÓDENAS ET AL. (2006) muestran una notable mejora del estimador de error, tanto a nivel local como a nivel global, con respecto a los resultados obtenidos mediante la técnica SPR estándar para este tipo de problemas.

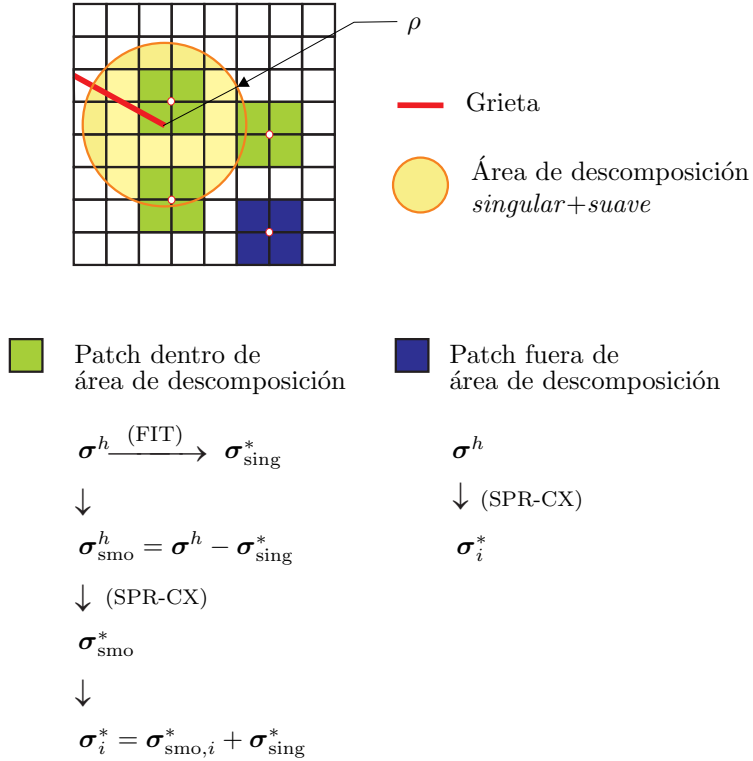


FIGURA 5.1. Evaluación de σ_i^* en diferentes tipos de patches.

5.2.3. Cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad

La técnica SPR-CX propuesta en este trabajo incorpora la técnica SPR-C desarrollada por RÓDENAS ET AL. (2007) con el fin de garantizar localmente el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio en el campo de tensiones reconstruido en patches. La técnica SPR-C, explicada anteriormente en la Sección 4.4.4, aplica ecuaciones de restricción a los sistemas de ecuaciones que definen los coeficientes de los polinomios de interpolación de tensiones por medio de multiplicadores de Lagrange, de manera que se fuerce el cumplimiento de:

- Ecuación de equilibrio interno.
- Equilibrio en el contorno. Se garantiza el cumplimiento de las tracciones impuestas a lo largo del contorno de Neumann, las cuales están aproximadas mediante una expansión de Taylor de segundo orden.
- Ecuaciones en contornos con condiciones de simetría.
- Ecuación de compatibilidad. Se impone con el fin de mejorar aún más la calidad del campo de tensiones reconstruido, aunque no resulta necesaria para garantizar

que el patch este localmente equilibrado.

RÓDENAS ET AL. (2007) indicaron que una de las mejoras más significativas de la técnica SPR-C frente a la técnica SPR estándar ocurre en la frontera del dominio, donde la técnica SPR-C permite utilizar información conocida *a priori* en el contorno del problema para aumentar la calidad del campo reconstruido. En el entorno XFEM esto es particularmente importante para la reconstrucción del campo de tensiones a lo largo de la discontinuidad, ya que es posible incorporar al ajuste la información de tensión en las caras de la grieta. Así, se puede imponer el cumplimiento de tensiones normales y tangenciales nulas en las caras de grieta si se consideran como superficies libres de carga. En los patches intersecados el procedimiento de equilibrado solamente se aplica si el soporte del patch es dividido por la grieta. Es decir, no se equilibran los patches intersecados en los cuales la grieta pasa por el contorno del patch.

5.2.4. Formación de patches

En una aproximación enriquecida, la formación y el tratamiento de los patches mediante la técnica SPR cuando los elementos del patch no contienen a la grieta es similar a la que se realiza dentro de un entorno MEF convencional (ver patch A en la Figura 5.2). Sin embargo, la técnica SPR ha de ser adaptada al entorno XFEM cuando el patch contiene elementos intersecados con la grieta.

En los patches intersecados con la grieta, debido a la discontinuidad de la solución introducida por la propia grieta, no resulta adecuado representar las tensiones σ^* a ambos lados de la grieta mediante un único conjunto de funciones σ_i^* . En este tipo de patches, ver Figura 5.2, para representar cada una de las componentes de la tensión se utilizarán funciones distintas a cada lado de la grieta, tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sigma_i^* &= \mathbf{p}\mathbf{a} = \{1, \check{x}, \check{y}, \dots\} \{a_1, a_2, a_3, \dots\}^T \quad \forall \check{\mathbf{x}} : H(\check{\mathbf{x}}) < 0 \\ \sigma_i^{*'} &= \mathbf{p}\mathbf{a}' = \{1, \check{x}, \check{y}, \dots\} \{a'_1, a'_2, a'_3, \dots\}^T \quad \forall \check{\mathbf{x}} : H(\check{\mathbf{x}}) > 0\end{aligned}\tag{5.5}$$

Puesto que los sub-patches así formados pueden llegar a contener un único subdominio de integración (ver patch C en la Figura 5.2), se ha de garantizar que en cada uno de estos subdominios se disponga siempre de las tensiones evaluadas mediante XFEM en al menos tantos puntos como términos tengan los polinomios utilizados para representar las tensiones reconstruidas. Así, utilizando un número suficiente de puntos de Gauss en los subdominios de integración, el sistema de ecuaciones del ajuste por mínimos cuadrados utilizado para evaluar los vectores de incógnitas \mathbf{a} y \mathbf{a}' será siempre resoluble. LABBE Y GARON (1995) aplicaron previamente este procedimiento en el entorno MEF para evitar las dificultades de la utilización de la técnica SPR en patches formados por pocos elementos.

A fin de realizar el equilibrado de los campos reconstruidos de tensiones en los patches intersecados con la grieta, se traslada el origen del sistema de referencia local del patch a un punto sobre la grieta, orientándolo según se observa en el patch D de la Figura 5.2.

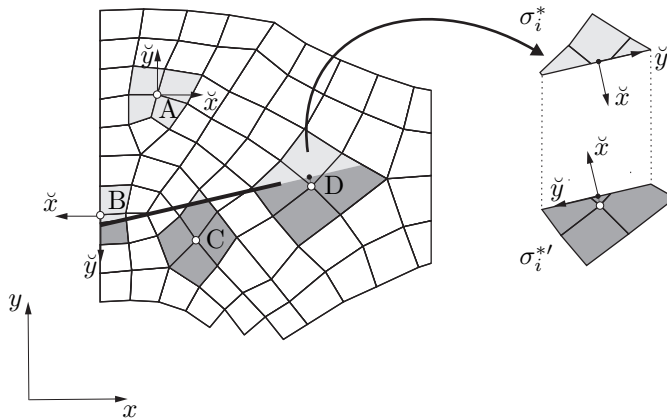


FIGURA 5.2. Formación de patches. Para elementos intersecados con la grieta se forman dos sub-patches, uno a cada lado de la grieta.

5.2.5. Minimización de la norma L_2 de $(\sigma^* - \sigma^h)$

Como se comentó anteriormente, una vez se tiene el campo σ_{smo}^h visto en la Ecuación 5.4 se utiliza una técnica de reconstrucción (como por ejemplo la técnica SPR-C) para obtener el campo σ_{smo}^* . En este punto, es posible utilizar dos enfoques distintos para realizar el ajuste por mínimos cuadrados del campo de tensiones: un enfoque discreto, o un enfoque continuo. El enfoque discreto es el planteamiento convencional de las técnicas de reconstrucción basadas en el SPR, en el cual las tensiones σ^h son evaluadas en los puntos de integración, obteniéndose unas tensiones σ^* al resolver el sistema lineal de la Ecuación 4.52:

$$\sum_{k=1}^{n_{pg}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)^T \sigma^h(\mathbf{x}_k) - \sum_{k=1}^{n_{pg}} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) \mathbf{a} = 0$$

En el enfoque continuo se minimiza la norma L_2 de la diferencia entre las tensiones de XFEM y la expansión polinómica que representa el campo de tensiones reconstruidas σ^* en el dominio del patch. Considérese el funcional de ajuste por mínimos cuadrados que se ha de minimizar en el dominio del patch Ω_p , expresado en forma integral:

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \int_{\Omega_p} (\sigma^h(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a})^2 d\Omega \quad (5.6)$$

Para minimizar $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ se deriva respecto al vector de incógnitas \mathbf{a} , e igualando a cero se plantea el cumplimiento de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega_p} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\sigma^h(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega_p} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\sigma^h(\mathbf{x})) d\Omega &= \int_{\Omega_p} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}) d\Omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las integrales de la expresión anterior se evalúan en los n_{pe} elementos que forman el patch. Por consiguiente, la ecuación se escribe como:

$$\sum_{n_{pe}} \int_{\Omega_e} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\sigma^h(\mathbf{x})) d\Omega = \sum_{n_{pe}} \int_{\Omega_e} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}) d\Omega \quad (5.8)$$

Las integrales en los elementos se evalúan numéricamente multiplicando los términos de tensión, y las bases polinómicas evaluadas en los n_{pg} puntos de Gauss de cada elemento, por el peso correspondiente a cada punto H_k y por el determinante del jacobiano de la transformación de coordenadas $|\mathbf{J}|$:

$$\sum_{n_{pe}} \sum_{k=1}^{n_{pg}} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k)\sigma^h(\mathbf{x}_k)) |\mathbf{J}|H_k = \sum_{n_{pe}} \sum_{k=1}^{n_{pg}} (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{p}(\mathbf{x}_k)\mathbf{a}) |\mathbf{J}|H_k \quad (5.9)$$

Notar el parecido con la Ecuación 4.52, con la diferencia de que en la expresión anterior el producto $|\mathbf{J}|H_k$ se puede interpretar como un factor de ponderación w_k asociado al área de influencia de cada punto de Gauss. El anterior procedimiento permite ajustar de manera adecuada las tensiones en patches formados por elementos con un número muy diferente de puntos de integración. La experiencia numérica en este trabajo ha indicado un mejora del estimador cuando se utiliza el enfoque continuo para ajustar las tensiones en los patches.

5.3. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los análisis numéricos realizados para verificar el comportamiento de la técnica SPR-CX propuesta. En estos análisis se ha utilizado el problema clásico de Westergaard expuesto en GINER ET AL. (2005) por tratarse de uno de los pocos problemas de MFEL en modo mixto con solución analítica exacta. El comportamiento de la técnica se ha verificado además con un problema sin solución analítica. En el Anexo A se muestra la adaptación de la técnica propuesta para problemas singulares resueltos mediante el MEF y su comportamiento numérico.

5.3.1. Ejemplo 1. Problema de Westergaard

Este problema corresponde al de una placa infinita cargada con tensiones biaxiales $\sigma_{x\infty} = \sigma_{y\infty} = \sigma_\infty$ y τ_∞ en el infinito, con una grieta libre de carga de longitud finita $2a$ como se muestra en la Figura 5.3. La utilización del problema de Westergaard supone varias ventajas. En primer lugar, las expresiones analíticas exactas para los campos de tensiones y desplazamientos son conocidas para todos los puntos del dominio. Además, la combinación de la carga externa aplicada permite obtener estados de tensión en los modos I ó II puros, y en modo mixto. Asimismo, resulta interesante que la grieta representada tenga longitud finita y esté libre de cargas aplicadas sobre sus caras,

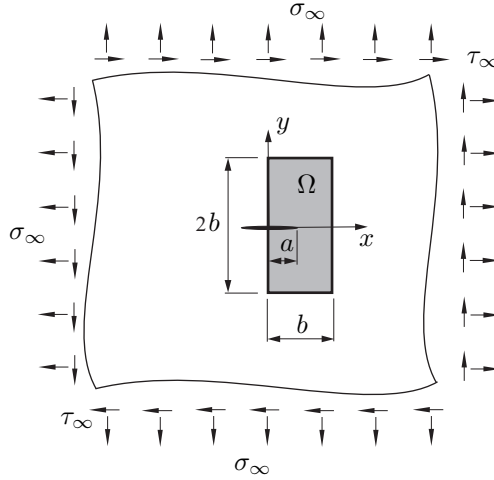


FIGURA 5.3. Problema de Westergaard. Placa infinita con grieta de longitud $2a$ sujeta a tracciones uniformes σ_∞ (biaxiales) y τ_∞ . Porción finita del dominio, Ω , modelada con EF.

así como también que la solución del problema contenga tanto una parte suave como una singular.

Para evitar modelar el dominio infinito del problema, en el modelo numérico se ha considerado una parte finita del dominio, sobre cuyo contorno se ha aplicado la distribución de tensiones correspondiente a la solución analítica de Westergaard de los modos I y II. En GINER (2001) se deducen las expresiones explícitas para los campos de tensiones, donde para estados de carga en modo simétrico (Modo I) se escribe:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^I &= \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{|t|}} \left[\left(x \cos \frac{\phi}{2} - y \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \\
 \sigma_y^I &= \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{|t|}} \left[\left(x \cos \frac{\phi}{2} - y \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \\
 \tau_{xy}^I &= y \frac{a^2 \sigma_\infty}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left(m \cos \frac{\phi}{2} + n \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para estados de carga en el modo antisimétrico (Modo II) los campos de tensiones se definen mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{II} &= \frac{\tau_\infty}{\sqrt{|t|}} \left[2 \left(y \cos \frac{\phi}{2} + x \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \cos \frac{\phi}{2} + n \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \right] \\
 \sigma_y^{II} &= y \frac{a^2 \tau_\infty}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left(m \cos \frac{\phi}{2} + n \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \\
 \tau_{xy}^{II} &= \frac{\tau_\infty}{\sqrt{|t|}} \left[\left(x \cos \frac{\phi}{2} - y \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left(m \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

En las Ecuaciones 5.10 y 5.11, los campos de tensiones están expresados en función de las coordenadas x e y , cuyo origen se encuentra en el centro de la grieta, y donde t , m , n y ϕ se definen como:

$$\begin{aligned} t &= (x + iy)^2 - a^2 = (x^2 - y^2 - a^2) + i(2xy) = m + in \\ m &= \Re(t) = \Re(z^2 - a^2) = x^2 - y^2 - a^2 \\ n &= \Im(t) = (z^2 - a^2) = 2xy \\ \phi &= \arg \bar{t} = \arg(m - in) \quad \text{con } \phi \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (5.12)$$

En GINER (2001) se desarrollan además las expresiones analíticas que representan los campos de desplazamientos exactos. Los campos de desplazamientos asociados al Modo I se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} u^I &= \frac{\kappa - 1}{4\mu} \sigma \sqrt{|t|} \cos \frac{\tilde{\phi}}{2} - y \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left(x \sin \frac{\phi}{2} + y \cos \frac{\phi}{2} \right) \\ v^I &= \frac{\kappa + 1}{4\mu} \sigma \sqrt{|t|} \sin \frac{\tilde{\phi}}{2} - y \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left(x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Y de manera análoga para el Modo II como:

$$\begin{aligned} u^{II} &= \frac{\kappa + 1}{4\mu} \tau \sqrt{|t|} \sin \frac{\tilde{\phi}}{2} + y \frac{1}{2\mu} \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left(x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \\ v^{II} &= -\frac{\kappa - 1}{4\mu} \tau \sqrt{|t|} \cos \frac{\tilde{\phi}}{2} - y \frac{1}{2\mu} \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left(y \cos \frac{\phi}{2} + x \sin \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde μ es el módulo de rigidez a cizalladura y κ la constante de Kolosov descritas en la Ecuación 2.25, y $\tilde{\phi}$ se define como:

$$\tilde{\phi} = \arg(m + in) \quad \text{con } \tilde{\phi} \in [-\pi, \pi] \quad (5.15)$$

Para el problema analizado, el valor exacto del FIT está definido como:

$$K_{I,ex} = \sigma \sqrt{\pi a} \quad K_{II,ex} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (5.16)$$

Se han considerado tres problemas correspondientes a los casos de Modo I, Modo II y Modo Mixto del problema de Westergaard. Los modelos geométricos considerados y las condiciones de contorno aplicadas para los distintos modos de carga se representan en las Figuras 5.4 , 5.5 y 5.6.

Los problemas han sido modelados usando un área de descomposición *singular+suave* de radio $\rho = 0.5$ igual al radio r_e del área fija de enriquecimiento. El radio de la función Plateau para la extracción del FIT es $r_q = 0.9$, tal que aleja lo suficiente la zona de extracción de la zona influenciada por la singularidad. El módulo de elasticidad del material utilizado es $E = 10^7$, y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.333$.

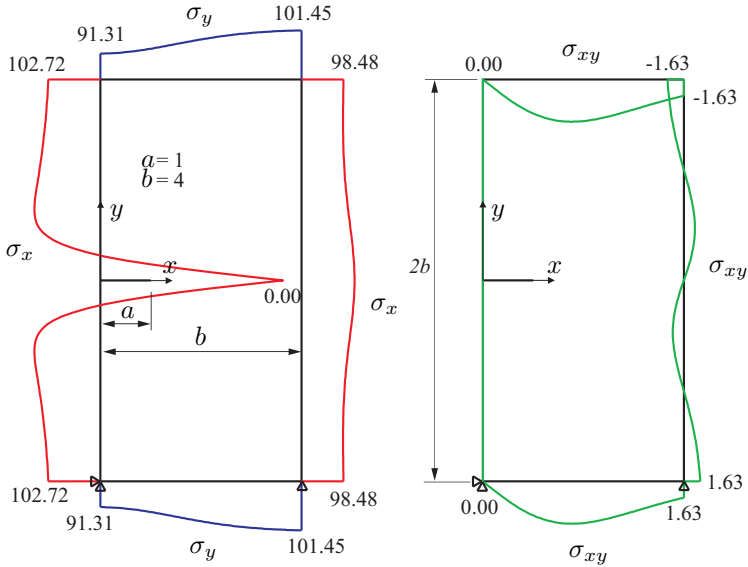


FIGURA 5.4. *Modo I: Modelo para grieta en placa infinita sometida a carga biaxial en el infinito* ($\sigma_\infty = 100$, $\tau_\infty = 0$). $K_{I,ex} = 177.2453850905516$.

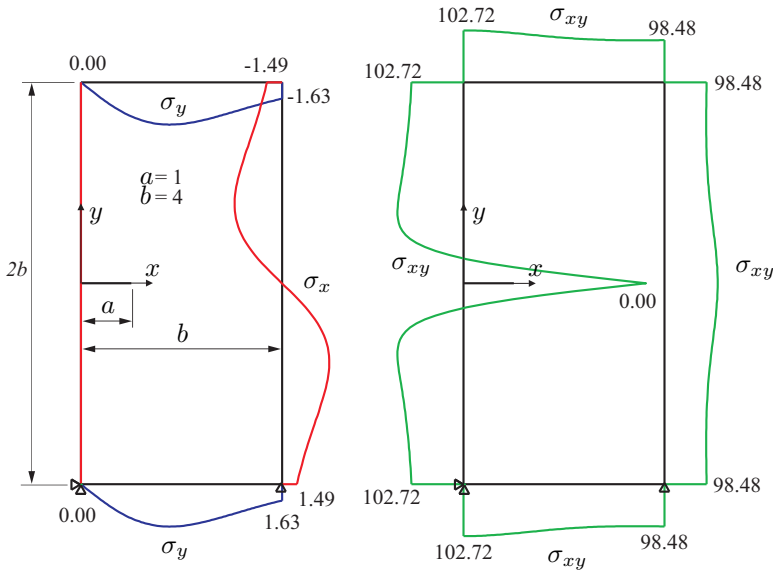


FIGURA 5.5. *Modo II: Modelo para grieta en placa infinita sometida a carga biaxial en el infinito* ($\sigma_\infty = 0$, $\tau_\infty = 100$). $K_{II,ex} = 177.2453850905516$.

En los estudios globales de convergencia de la solución y estimación del error se ha analizado la evolución de los resultados en una secuencia de mallas estructuradas de elementos cuadriláteros lineales (CUAD4) refinadas uniformemente, Figura 5.7, y en

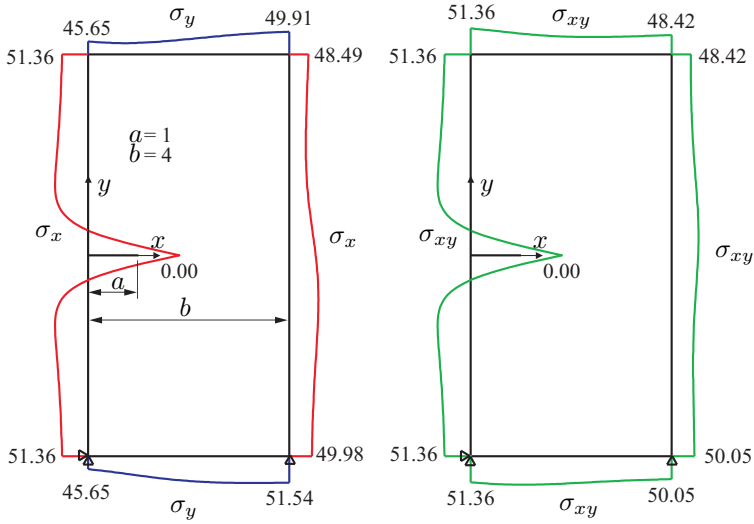


FIGURA 5.6. *Modo Mixto. Modelo para grieta en placa infinita sometida a carga biaxial en el infinito ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$). $K_{I,ex} = K_{II,ex} = 88.6226925452758$.*

una secuencia de mallas no estructuradas, Figura 5.8. En el primer caso, la secuencia de mallas se ha definido de forma que el extremo de grieta siempre se encuentre sobre un nodo. Considerando una situación más general, en el caso de mallas no estructuradas, el extremo de grieta no se localiza en un nodo.

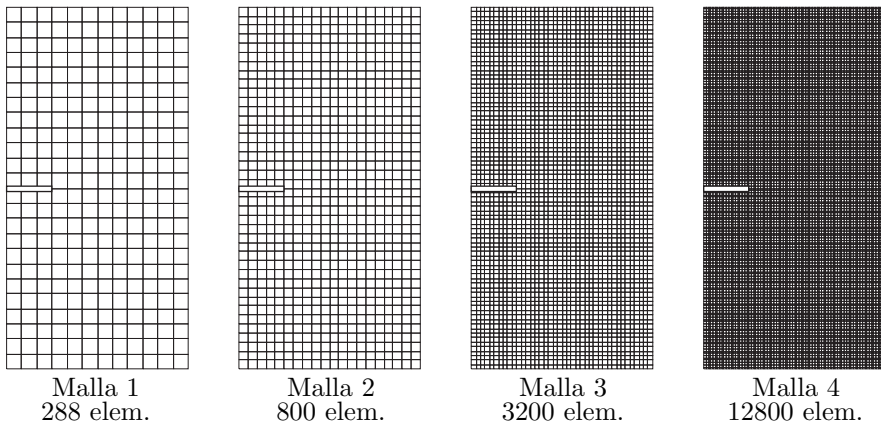


FIGURA 5.7. *Secuencia de mallas estructuradas con elementos cuadriláteros.*

Para el caso de elementos triangulares lineales (TRI3) se han utilizado las mallas estructuradas y no estructuradas de las Figuras 5.9 y 5.10.

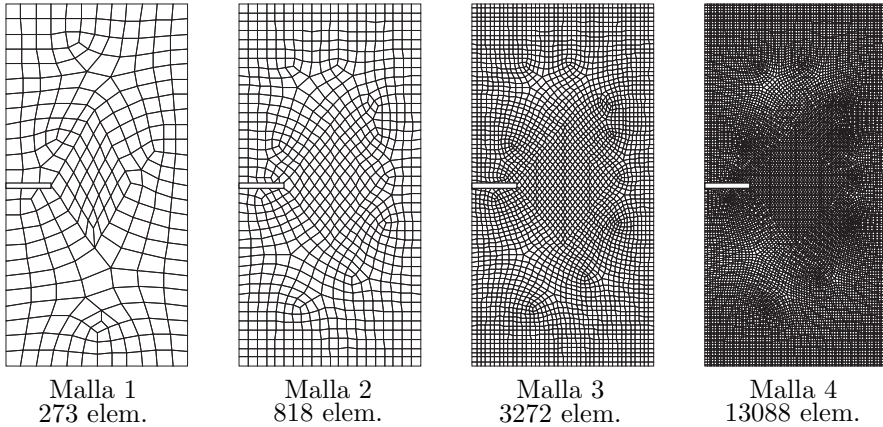


FIGURA 5.8. Secuencia de mallas no estructuradas con elementos cuadriláteros.

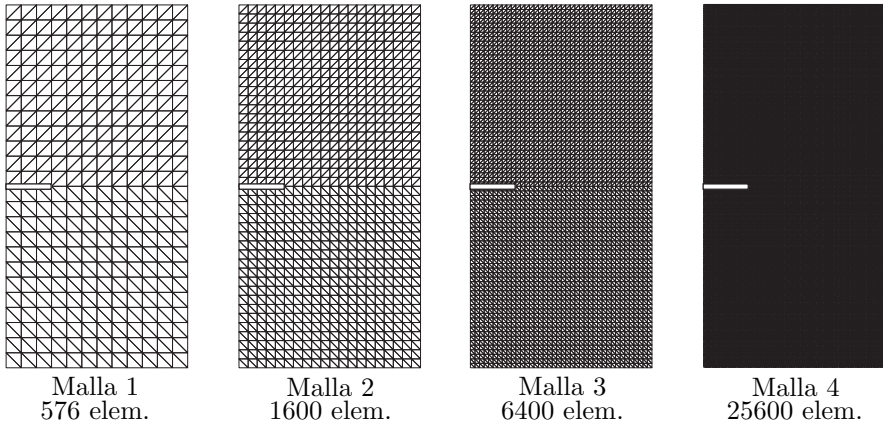


FIGURA 5.9. Secuencia de mallas estructuradas con elementos triangulares.

5.3.2. Validación de la solución de XFEM

Antes de estudiar el comportamiento de la técnica de estimación del error SPR-CX resulta importante verificar la validez de la solución de la aproximación de XFEM, y examinar la influencia de distintos parámetros que afectan la calidad de los resultados de elementos finitos.

Enriquecimiento geométrico y radio r_e

En la Sección 3.6 se comentó la importancia de utilizar un área fija de enriquecimiento alrededor del extremo de grieta que fuera independiente del tamaño de elemento h . LABORDE ET AL. (2005), BÉCHET ET AL. (2005) indicaron que con este esquema de enriquecimiento, denominado *geométrico*, se pueden obtener las velocidades de

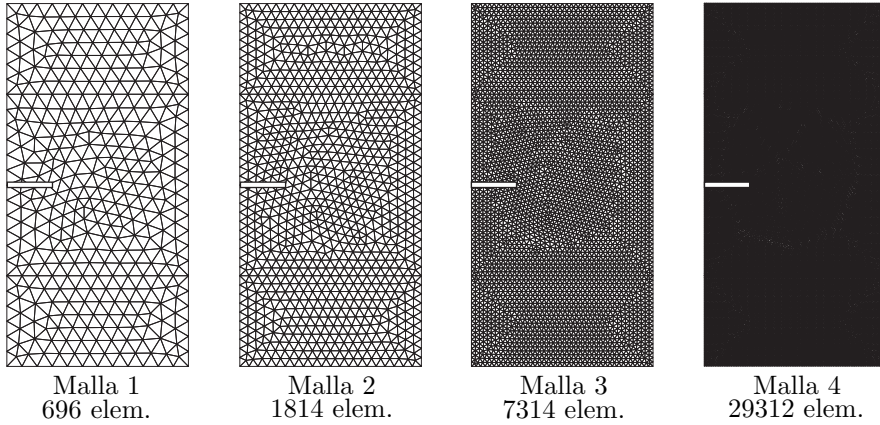


FIGURA 5.10. Secuencia de mallas no estructuradas con elementos triangulares.

convergencia óptimas de la norma energética del error para problemas singulares de EF con refinamientos h -adaptativos, $O(h^p)$ respecto al tamaño de elemento h (para problemas 2D se puede aproximar respecto al número de gdl tal que $O(-n_{gdl}^{p/2})$).

Se considera el problema de Westergaard en Modo I utilizando dos esquemas distintos de enriquecimiento: enriquecimiento topológico, y enriquecimiento geométrico con radio $r_e = 0.5$. En la Figura 5.11 se presentan los resultados de la norma energética del error frente al número de gdl para una secuencia de mallas estructuradas de elementos cuadriláteros lineales. La norma energética del error exacto en desplazamientos $\|\mathbf{e}\|$ se evalúa de acuerdo a lo visto en la Ecuación 4.7 como:

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega}$$

La velocidad de convergencia óptima de $\|\mathbf{e}\|$ para las mallas con elementos lineales respecto al número de gdl es igual a 0.5. Se puede observar que utilizando enriquecimiento topológico se alcanza una velocidad de convergencia de aproximadamente 0.23. En este caso no se logra la velocidad óptima que se obtiene con el MEF ya que la representación de la singularidad no mejora a medida que la malla se refina. Por el contrario, con el esquema de enriquecimiento geométrico se obtienen velocidades de convergencia próximas a la teórica (0.51).

En la Figura 5.12 se muestra la distribución de la norma energética del error exacto en elementos para el problema en Modo I en la tercera malla de la secuencia de la Figura 5.7 con 3200 elementos. Con un círculo se indica el radio de enriquecimiento r_e para el caso de enriquecimiento geométrico. Los resultados muestran como el error es mayor para el esquema de enriquecimiento topológico, siendo considerablemente más elevado en la zona próxima a la singularidad. En este caso, el error se concentra en la zona próxima al extremo de grieta alcanzando un valor máximo de 1.85×10^{-3} . Por el contrario, para el esquema de enriquecimiento geométrico se observa que la

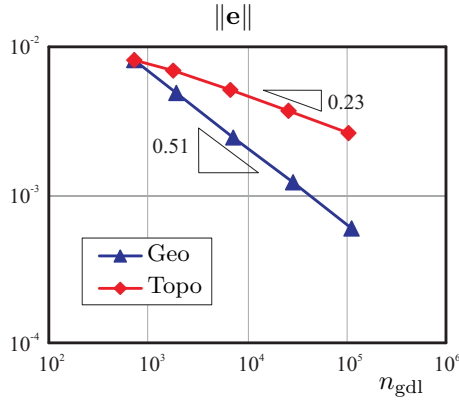


FIGURA 5.11. Convergencia de la norma energética del error para el problema de Westergaard en Modo I y mallas estructuradas de elementos cuadriláteros lineales. Enriquecimiento topológico vs. enriquecimiento geométrico.

norma energética del error exacto calculada en los elementos dentro del área fija de enriquecimiento es muy baja en algunas zonas. A lo largo de las caras de grieta y en el extremo el error es ligeramente más elevado aunque, en general, el error es mucho menor que para el enriquecimiento topológico.

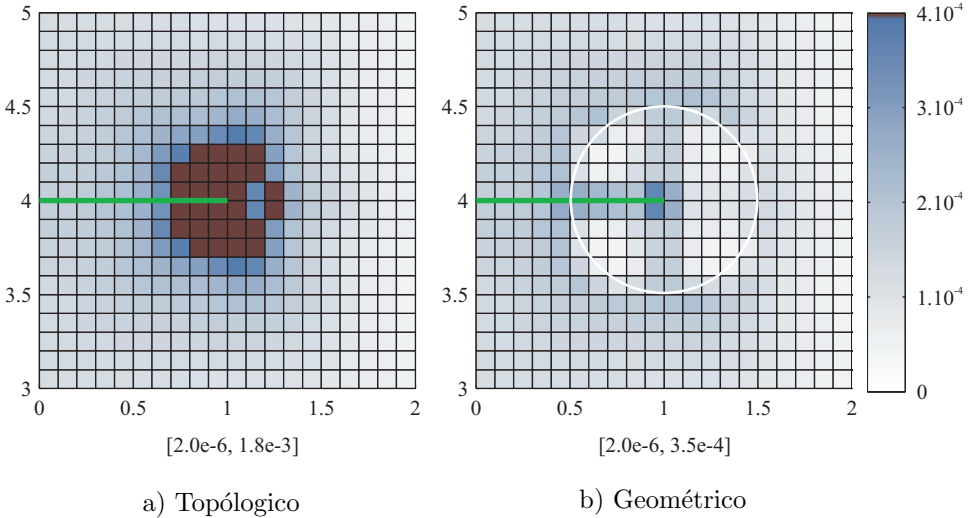


FIGURA 5.12. Distribución de la norma energética del error para el problema de Westergaard en Modo I en una malla de 3200 elementos. Enriquecimiento topológico vs. enriquecimiento geométrico.

Los resultados concuerdan con las observaciones hechas en la Sección 3.6 referentes al uso de un área fija de enriquecimiento en problemas del tipo XFEM. En dicha sección se indicó que, según LABORDE ET AL. (2005), BÉCHET ET AL. (2005), el esquema de

enriquecimiento geométrico en aproximaciones de XFEM permite obtener velocidades óptimas de convergencia de la norma energética del error. En los análisis posteriores se considerará siempre un enriquecimiento geométrico de la aproximación XFEM.

Convergencia del Factor de Intensidad de Tensiones

La Figura 5.13(a) representa la evolución del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) obtenido de la solución de XFEM frente al número de *gdl* para el problema de Westergaard en Modo I usando mallas estructuradas de elementos cuadriláteros lineales (ver Figura 5.7). Se ha utilizado un esquema de enriquecimiento geométrico con $r_e = 0.5$. El valor exacto del FIT para este problema, con $\sigma_\infty = 100$, está dado por la Ecuación 5.16:

$$K_{I,ex} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} = 177.2453850905516 \quad (5.17)$$

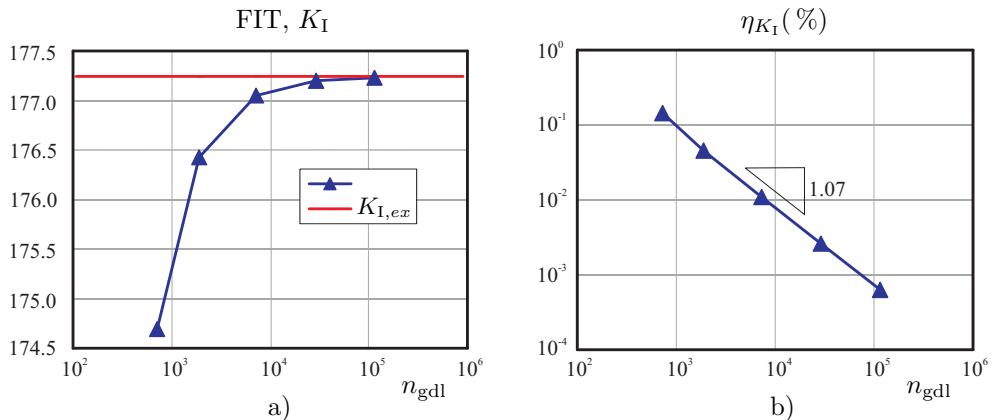


FIGURA 5.13. Convergencia del Factor de Intensidad de Tensiones: a) Convergencia de K_I a $K_{I,ex}$, b) Evolución del error relativo de K_I

Se observa que el FIT converge al valor exacto a medida que aumenta el número de *gdl*. La Figura 5.13(b) muestra el error relativo del FIT frente al número de *gdl*. La velocidad de convergencia óptima en este caso es igual a 1 para elementos lineales. Nuevamente, se puede observar que el uso de un esquema de enriquecimiento geométrico garantiza la velocidad de convergencia óptima para el valor de K_I , con un valor de 1.07, muy próximo al valor teórico de 1.

Convergencia de la norma energética

Como se ha indicado anteriormente, el uso de un esquema de enriquecimiento geométrico garantiza que la norma energética del error en desplazamientos $\|\mathbf{e}\|$ converja con una velocidad próxima a la velocidad teórica (igual a 0.5 para elementos lineales). En la Figura 5.14 se representan las curvas de convergencia del error exacto en

norma energética frente al número de gdl para el problema de Westergaard en modos I, II y modo mixto, usando secuencias de mallas estructuradas (Figura 5.7), y no estructuradas (Figura 5.8) de elementos cuadriláteros lineales.

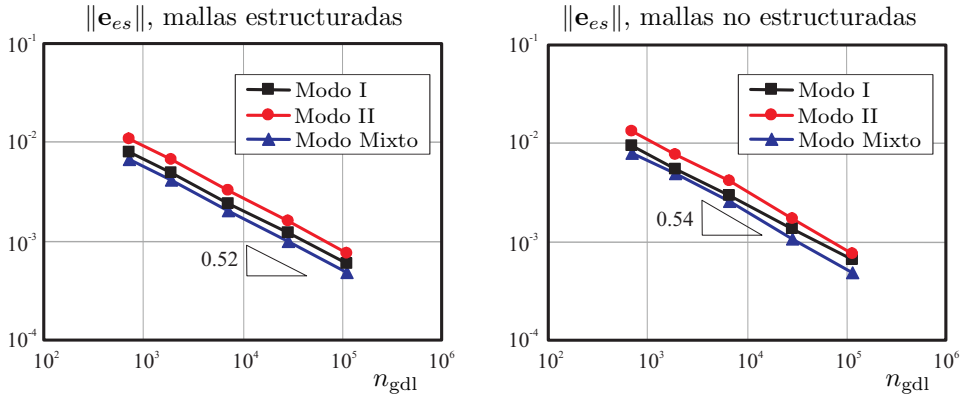


FIGURA 5.14. Error estimado en norma energética $\|e_{es}\|$ para mallas estructuradas y no estructuradas con elementos CUAD4.

Integral de Interacción y radio r_q

Para la evaluación del FIT utilizando la técnica de la Integral de Interacción en su forma de integral de dominio equivalente es necesario definir un función q que determina la zona de extracción (ver Sección 2.4).

Sea q una función de tipo plateau que toma valor $q = 1$ para los nodos contenidos en un círculo de radio r_q medido desde el extremo de grieta, y $q = 0$ para el resto de nodos. Según se ha explicado anteriormente, el número de elementos que contribuyen a la integral de dominio equivalente aumenta a medida que crece el radio r_q . Asimismo, dichos elementos se localizan cada vez más lejos de la singularidad, en zonas predominantemente suaves donde la solución de tensiones es más precisa.

En la Figura 5.15 se aprecian los resultados del error relativo del FIT frente al número de gdl para el problema de Westergaard en modos I y II utilizando diferentes radios r_q y un radio de enriquecimiento $r_e = 0.5$. Los resultados se han evaluado para la secuencia de mallas estructuradas de la Figura 5.7. En las gráficas, la magnitud del error es similar para los diferentes radios r_q , sin embargo, se puede observar que para radios mayores que r_e (más alejados del extremo de grieta) la convergencia presenta un comportamiento más regular. Esto concuerda con las observaciones hechas en la Sección 2.4, donde se ha indicado que los métodos energéticos ofrecen resultados más precisos al poderse evaluar los parámetros energéticos en zonas alejadas del extremo de grieta, donde la aproximación de EF es más suave y se evalúa con mayor exactitud.

De ahora en adelante, para el problema de Westergaard planteado en la Sección 5.3.1 se considerará como parámetro para la extracción del FIT un radio $r_q = 0.9$ (con

$r_q = 1.8r_e$).

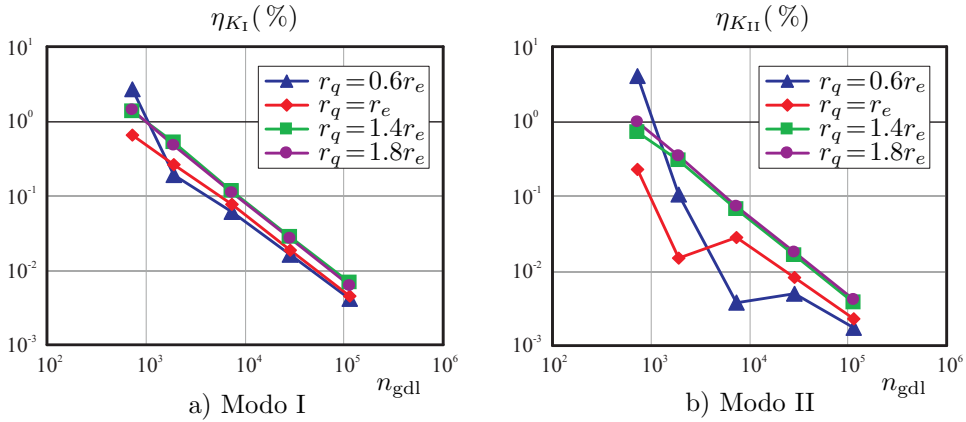


FIGURA 5.15. Error relativo del FIT para modos I y II, mallas estructuradas.

5.3.3. Índice de efectividad del estimador propuesto

La precisión del estimador de error se evaluará tanto a nivel local como a nivel global. Dicha evaluación estará basada en la efectividad del estimador de error en norma energética, que es cuantificada mediante el índice de efectividad θ indicado en la Ecuación 4.13 del Capítulo 4:

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{e}\|}$$

En la evaluación de resultados a nivel local, se utilizará la efectividad local D definida en la Ecuación 4.14 como:

$$D = \begin{cases} \theta^e - 1 & \text{si } \theta^e \geq 1 \\ 1 - \frac{1}{\theta^e} & \text{si } \theta^e < 1 \end{cases} \quad \text{con } \theta^e = \frac{\|\mathbf{e}_{es}^e\|}{\|\mathbf{e}^e\|}$$

Para la evaluación de resultados a nivel global, se ha usado el índice de efectividad global θ . El valor medio, $m(|D|)$, y la desviación estándar de la efectividad local, $\sigma(D)$, también han sido usados para evaluar la calidad del estimador de error a nivel global. En el caso ideal, donde el estimador de error predice exactamente el error verdadero correspondiente a cada elemento en la malla, estos dos valores serían cero. Por lo tanto, se puede considerar que una buena técnica de reconstrucción del campo de tensiones será aquella que simultáneamente produzca resultados cercanos a cero en estos dos parámetros.

En la Figura 5.16 se aprecian los resultados del índice D calculado para los Modos I, II y Mixto. Los resultados mostrados en esta figura se han obtenido con la segunda malla estructurada de la secuencia con elementos CUAD4 de la Figura 5.7. En la Figura

5.17 se muestran los resultados evaluados en mallas no estructuradas (ver Figura 5.8). Obsérvese que en este caso el extremo de grieta no está situado sobre un nodo.

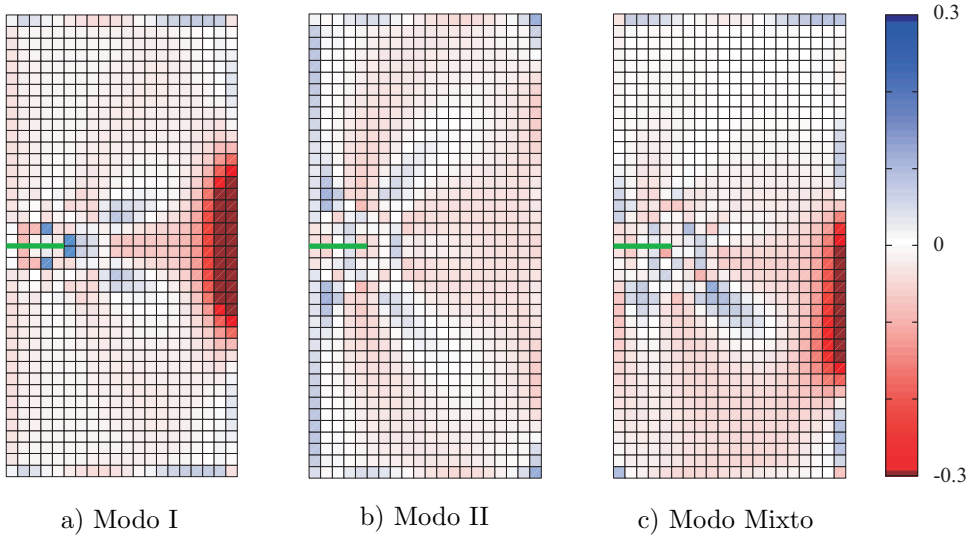


FIGURA 5.16. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas estructuradas con CUAD4. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).

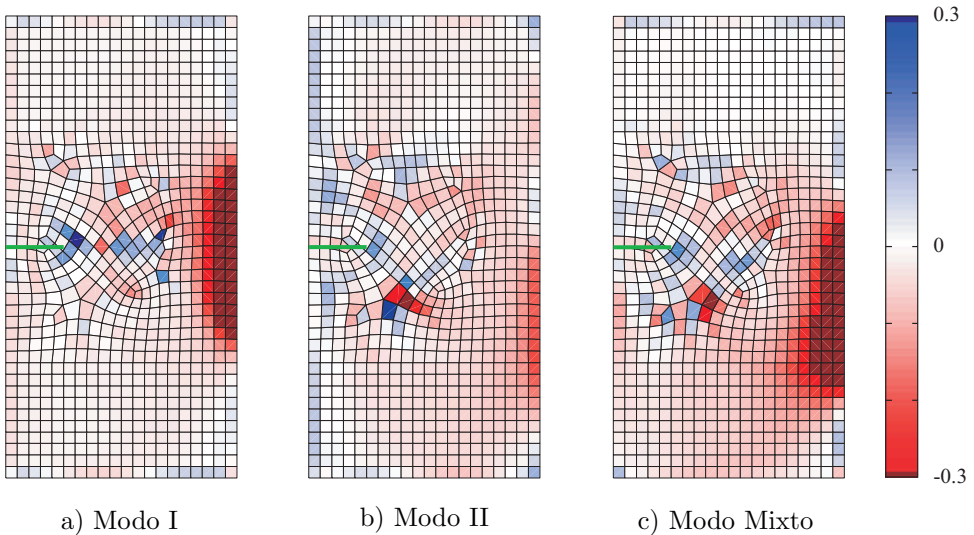


FIGURA 5.17. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas no estructuradas con CUAD4. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).

En ambas figuras se puede apreciar que, en todos los casos, el estimador presenta una buena distribución del error a nivel local, incluso en la zona de influencia de la grieta. Asimismo, el estimador de error resulta bastante preciso, proporcionando valores de D cercanos a cero, y siempre dentro del rango $[-0.6, 0.6]$. En dichas figuras se ha representado el rango de valores de efectividad local $[-0.3, 0.3]$, existiendo zonas donde D está fuera de la escala. Sin embargo, dichas zonas se encuentran lejos de la singularidad y tienen un nivel de error bastante más bajo comparado con las zonas cercanas al extremo de grieta, por lo que no afectan en gran medida al cálculo de la efectividad global. En la Figura 5.18 se representa la distribución del error exacto en norma energética para el problema en modo I en la segunda malla de la secuencia estructurada de la Figura 5.7. Se comprueba que los elementos que más contribuyen al error global se encuentran cerca de la grieta y, por lo tanto, es en esta zona donde la estimación se debe realizar con mayor precisión.

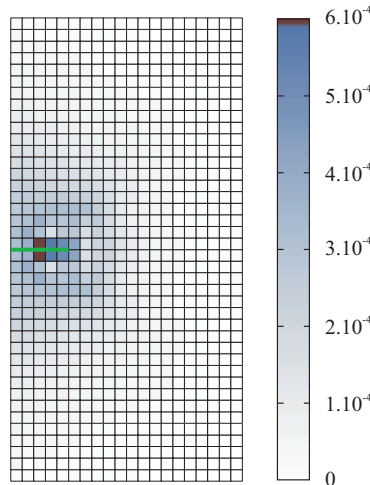


FIGURA 5.18. *Distribución de la norma energética del error para el problema en Modo I.*

En la Figura 5.19 se representa la evolución de θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ con respecto al número de grados de libertad del análisis para las mallas de elementos CUAD4 de la Figura 5.7. La Figura 5.20 muestra la evolución de estos mismos parámetros para el caso de las mallas no estructuradas de elementos CUAD4 mostradas en la Figura 5.8. Se puede observar que en ambos casos los valores de la efectividad global θ obtenidos son muy cercanos a la unidad (Tablas 5.1 y 5.2). Se observa una evolución menos uniforme en el caso de los mallados no estructurados. Esto puede ser debido a que en este caso la posición del extremo de grieta dentro del elemento varía de una malla a otra. Este mismo comportamiento ha sido señalado también en BORDAS Y DUFLOT (2007), donde se indica una dispersión de los resultados para mallas no estructuradas. En todo caso, es necesario resaltar que los valores de la efectividad global están siempre dentro de un estrecho rango para todos los casos, lo que indica una muy buena

precisión del estimador de error. La evolución de los parámetros $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ representados en estas gráficas muestra en todos los casos un comportamiento adecuado del estimador de error, tendiendo a cero a medida que se refinan la mallas.

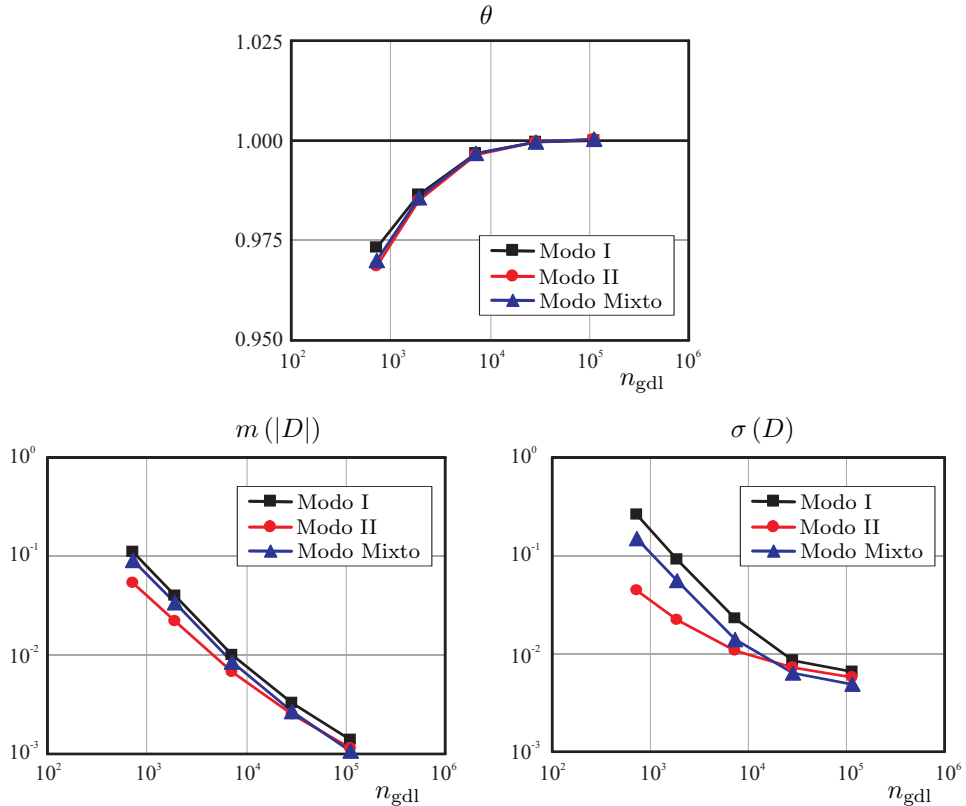


FIGURA 5.19. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para mallas estructuradas de elementos CUAD4.

En las Figuras 5.21 y 5.22 se aprecian los resultados del índice D calculado para los Modos I, II y Mixto en mallas estructuradas y no estructuradas con elementos TRI3. Se puede observar que el comportamiento del estimador a nivel local no es tan bueno como para el caso de elementos CUAD4. Sin embargo, la estimación sigue siendo bastante buena en las zonas próximas a la grieta, donde ciertamente interesa que el estimador sea bastante preciso.

Las Figuras 5.23 y 5.24 muestran la evolución de θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ con respecto al número de grados de libertad para las mallas estructuradas y no estructuradas de elementos TRI3 respectivamente. La efectividad θ converge al valor teórico para las dos secuencias de mallas, aunque se puede observar que el comportamiento del estimador para los triángulos lineales no es tan bueno como para los cuadriláteros lineales (Tablas 5.3 y 5.4). Como era de esperar, los parámetros $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ convergen a cero a medida que se refina la malla.

TABLA 5.1. Índice de efectividad θ para mallas estructuradas de elementos CUAD4.

n_{gdl}	Modo I	Modo II	Modo Mixto
723	0.97329	0.96847	0.97011
1895	0.98631	0.98517	0.98556
7289	0.99689	0.99645	0.99665
28637	0.99951	0.99960	0.99958
113477	1.00017	1.00033	1.00027

TABLA 5.2. Índice de efectividad θ para mallas no estructuradas de elementos CUAD4.

n_{gdl}	Modo I	Modo II	Modo Mixto
689	1.00291	0.98942	0.99622
1907	0.99512	0.99586	0.99110
6779	0.99925	1.00196	1.00435
28767	0.99989	1.00413	1.00257
113991	1.00127	1.00334	1.00278

TABLA 5.3. Índice de efectividad θ para mallas estructuradas de elementos TRI3.

n_{gdl}	Modo I	Modo II	Modo Mixto
723	0.93280	0.93897	0.93655
1895	0.94980	0.96156	0.95678
7289	0.96937	0.98086	0.97618
28637	0.98797	0.98874	0.98842
113477	0.99570	0.99315	0.99421

TABLA 5.4. Índice de efectividad θ para mallas no estructuradas de elementos TRI3.

n_{gdl}	Modo I	Modo II	Modo Mixto
859	0.96203	0.96529	0.96244
2145	0.97506	0.97791	0.97264
8339	0.98976	0.99066	0.99154
32831	0.99526	0.99191	0.99265
130439	0.99745	0.99215	0.99168

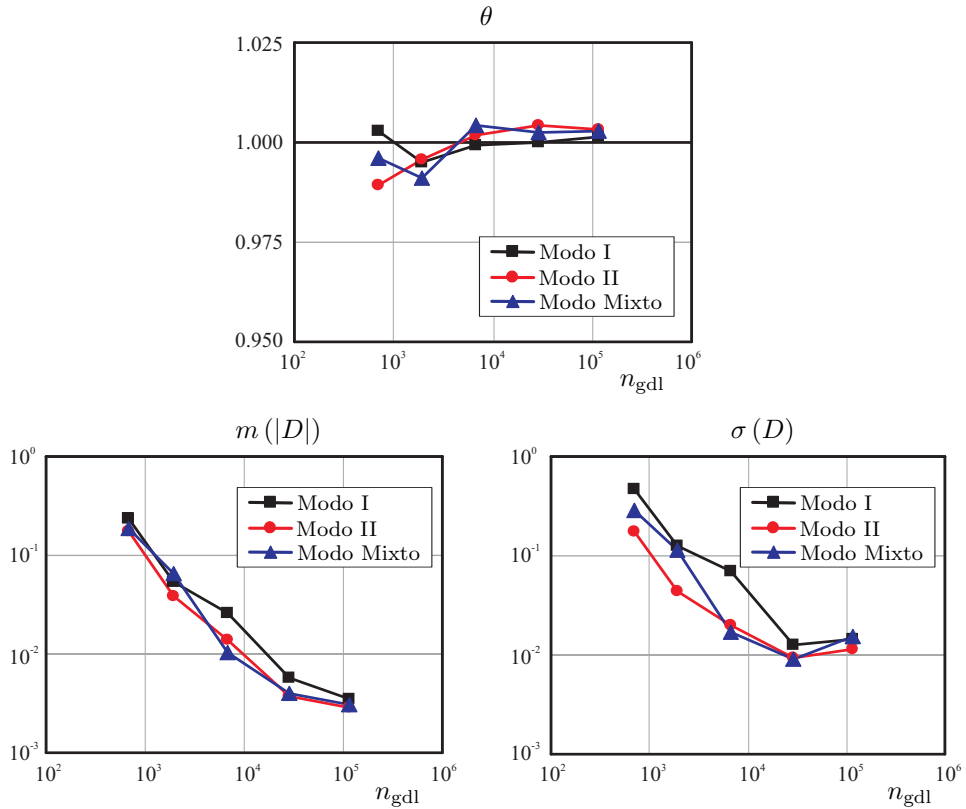


FIGURA 5.20. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para mallas no estructuradas de elementos CUAD4.

5.3.4. Convergencia del error: Estimador de error en norma energética asintóticamente exacto

BORDAS ET AL. (2008), BORDAS Y DUFLLOT (2007), DUFLLOT Y BORDAS (2008) proponen la evaluación de la velocidad de convergencia del error estimado como otro mecanismo para medir la calidad del estimador. Resulta fundamental comprobar no solo que el estimador de error en norma energética converge a cero a medida que el tamaño de la malla disminuye, sino también que el error estimado converge con una velocidad de convergencia semejante a la del error exacto. El uso de este enfoque para medir la calidad del estimador es esencial en problemas donde no es posible obtener una solución exacta, ya que en estos casos resulta imposible evaluar la efectividad del estimador del error. La velocidad de convergencia óptima de la norma energética del error en función del número de grados de libertad es 0.5 para problemas en 2D, considerando elementos lineales y área fija de enriquecimiento.

En la Figura 5.14 se ha mostrado la convergencia del error estimado en norma energética. En la Tabla 5.5 se indican las velocidades de convergencia del error estimado en

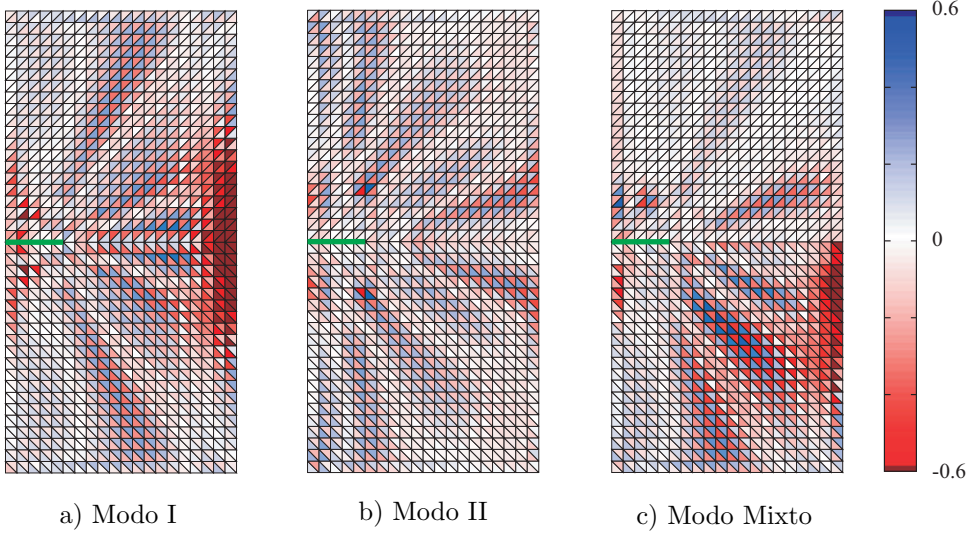


FIGURA 5.21. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas estructuradas con TRI3. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).

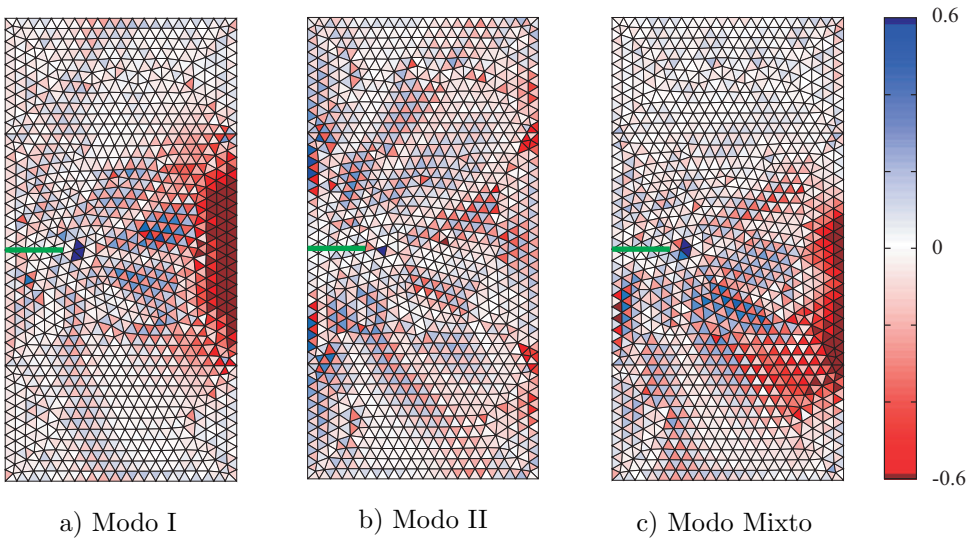


FIGURA 5.22. Índice de efectividad local D mediante la técnica SPR-CX para mallas no estructuradas con TRI3. a) Modo I , b) Modo II , y c) Modo Mixto ($\sigma_\infty = 50$, $\tau_\infty = 50$).

norma energética para los diferentes modos de carga vistos en la figura. Para mallas estructuradas la velocidad de convergencia alcanzada es de aproximadamente 0.52. En mallas no estructuradas se obtienen velocidades de convergencia ligeramente mayores, próximas a 0.54. Ambos valores son cercanos a la velocidad óptima de convergencia de 0.5, probando de esta forma la calidad de la técnica propuesta.

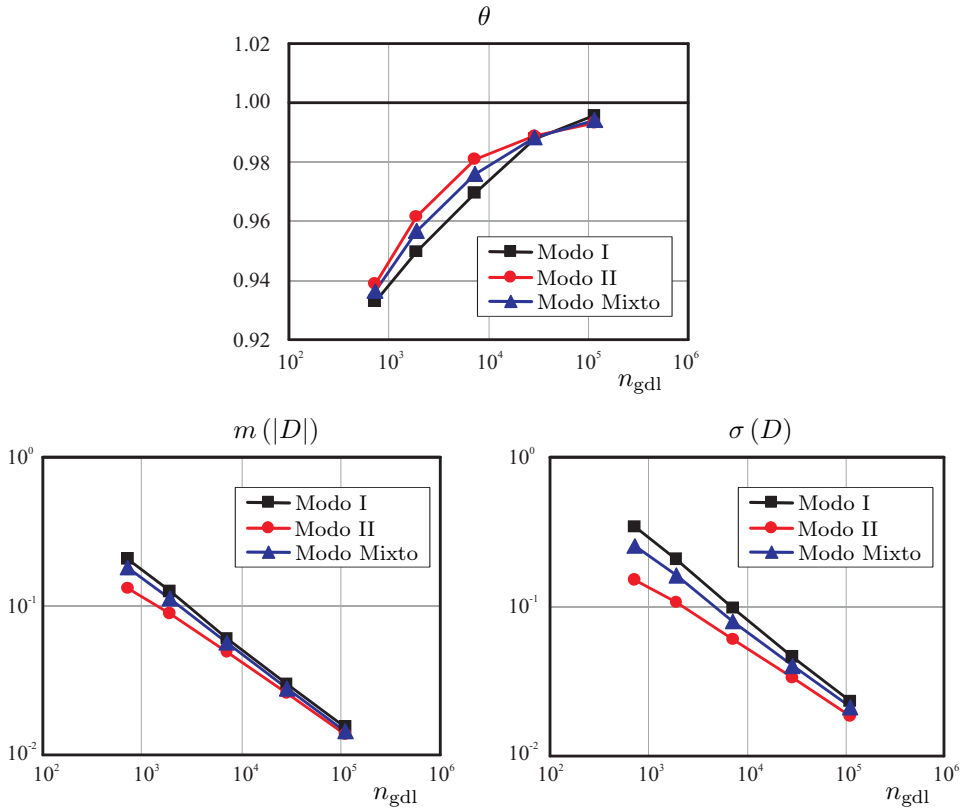


FIGURA 5.23. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para mallas estructuradas de elementos TRI3.

TABLA 5.5. Velocidad de convergencia media de la norma energética del error $\|e_{es}\|$ para mallas estructuradas y no estructuradas con elementos CUAD4.

	Mallas estructuradas	Mallas no estructuradas
Modo I	0.5102	0.5244
Modo II	0.5284	0.5595
Modo Mixto	0.5217	0.5532

Cuando se desarrolla un estimador del error, uno de los objetivos es obtener índices de efectividad que tiendan a la unidad a medida que el número de grados de libertad aumenta, o lo que es lo mismo, se debe tratar de obtener un estimador del error asintóticamente exacto. ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992b) demostraron que si la velocidad de convergencia de la norma energética del error de la solución reconstruida, $\|\mathbf{e}^*\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|$, es mayor que la de la solución de EF, $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|$, entonces el estimador del error será asintóticamente exacto. En la Figura 5.25 se presentan dos gráficas de convergencia en norma energética para $\|\mathbf{e}^*\|$. La primera gráfica indica las

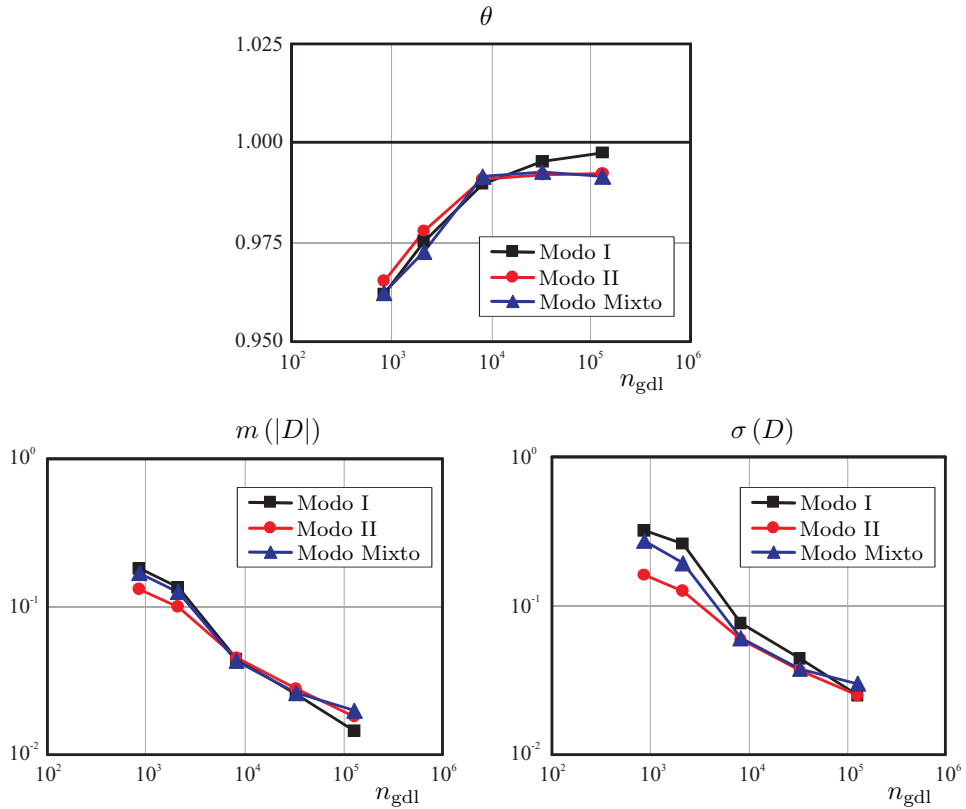


FIGURA 5.24. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para mallas no estructuradas de elementos TRI3.

curvas de convergencia del error considerando todo el dominio. La segunda gráfica indica los resultados obtenidos cuando el área de integración del error está limitada a la zona de descomposición *singular+suave*, de forma que se pueda analizar con detalle el comportamiento del estimador en cercanías de la singularidad presente en el extremo de grieta. Se observa que en ambos casos la velocidad de convergencia para $\|\mathbf{e}^*\|$ es más alta que la velocidad para $\|\mathbf{e}\|$. En el MEF la velocidad de convergencia teórica en norma energética es del orden $O(-n_{gdl}^{p/2})$, $p/2 = 0.5$ para elementos lineales, sin embargo, cuando se evalúa solo el área de descomposición se están considerando funciones polinómicas más funciones de enriquecimiento. Por lo tanto, es de esperar que aumente la velocidad de convergencia (0.64) cuando se evalúa en la zona de influencia de la singularidad.

5.3.5. Influencia de la precisión del FIT

En este trabajo se propone para la evaluación del Factor de Intensidad de Tensiones la utilización de una integral de interacción como la indicada en la Ecuación 2.49 por

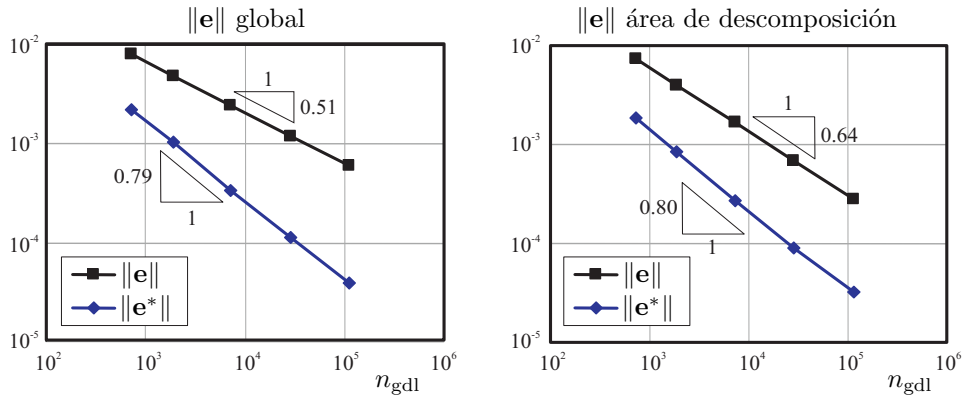


FIGURA 5.25. Modo I con mallas estructuradas. Comparación de las velocidades de convergencia para $\|e^*\|$ y $\|e\|$.

proporcionar valores precisos de los FITs. Se han realizado estudios numéricos a fin de analizar la influencia de la precisión de los FITs utilizados en la reconstrucción de σ^* sobre la precisión del estimador de error. Estos estudios han mostrado que la efectividad global θ es poco sensible a la precisión de estos parámetros. Sin embargo, la precisión de los FITs puede influir notablemente en la precisión del estimador a nivel local. Considérese por ejemplo la malla 4 de la Figura 5.7 sometida al Modo I de carga. En este caso, el valor exacto del FIT es $K_{I,ex} = 177.245385090556$. Para analizar la influencia de la precisión del FIT en la efectividad local D , se ha evaluado este parámetro con el valor $K_I = 177.215$ (valor obtenido al evaluar el FIT con la técnica propuesta en este trabajo) y con los valores $K_I = 170$, $K_I = 160$ y $K_I = 150$, que representarían posibles valores de K_I obtenidos con otras técnicas de extracción del FIT de menor precisión. La Figura 5.26 representa la efectividad local D en los alrededores de la singularidad para los distintos valores de K_I considerados. Se observa claramente que el mayor grado de precisión se obtiene con el valor de K_I evaluado mediante la técnica de extracción del FIT propuesta en este trabajo. Estos resultados indican la necesidad de utilizar técnicas de evaluación del FIT que proporcionen el máximo grado de precisión posible.

5.3.6. Efecto de la técnica de descomposición *singular+suave*

El propósito de este apartado es analizar el efecto del uso de la técnica de descomposición *singular+suave* sobre la precisión del estimador del error. En las Figuras 5.27 y 5.28 se comparan los resultados obtenidos usando la técnica propuesta en este trabajo (curvas SPR-CX) con los resultados obtenidos cuando se toma un valor de FIT $K_I = 0$ para recuperar las tensiones en el campo singular con el fin de anular la descomposición *singular+suave* (curvas SPR-C). Estas figuras muestran que los resultados de la efectividad correspondientes a la curva SPR-C no convergen a la unidad, y que la velocidad de convergencia de la norma energética del error es solo de 0.26, mientras

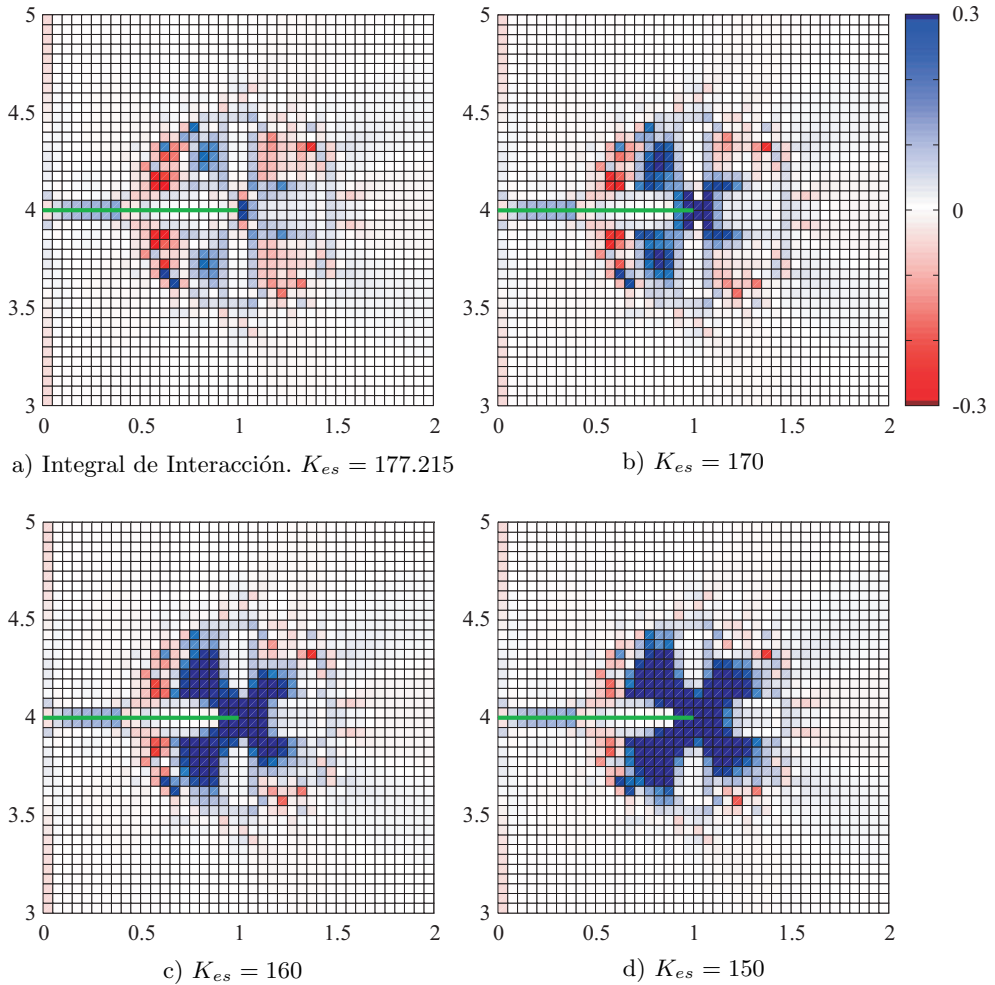


FIGURA 5.26. Modo I. Efectividad local D en los alrededores de la singularidad en una malla de 12800 elementos para distintos grados de precisión de K_I ($K_{I,ex} = 177.245385090556$).

que con el uso de la técnica de descomposición se obtienen valores de 0.51. La pendiente de la curva del valor medio $m(|D|)$ es más baja que la de la técnica propuesta, mientras que el valor de la desviación estándar $\sigma(D)$ no converge a cero para la curva SPR-C. Por consiguiente, se puede concluir que sin la descomposición *singular+suave*, el campo reconstruido de tensiones obtenido no es lo bastante preciso, y no garantiza un estimador del error asintóticamente exacto. La técnica de descomposición es, por tanto, necesaria en la implementación del método propuesto si se desean garantizar índices de efectividad que se aproximen a la unidad a medida que se incrementa el número de grados de libertad.

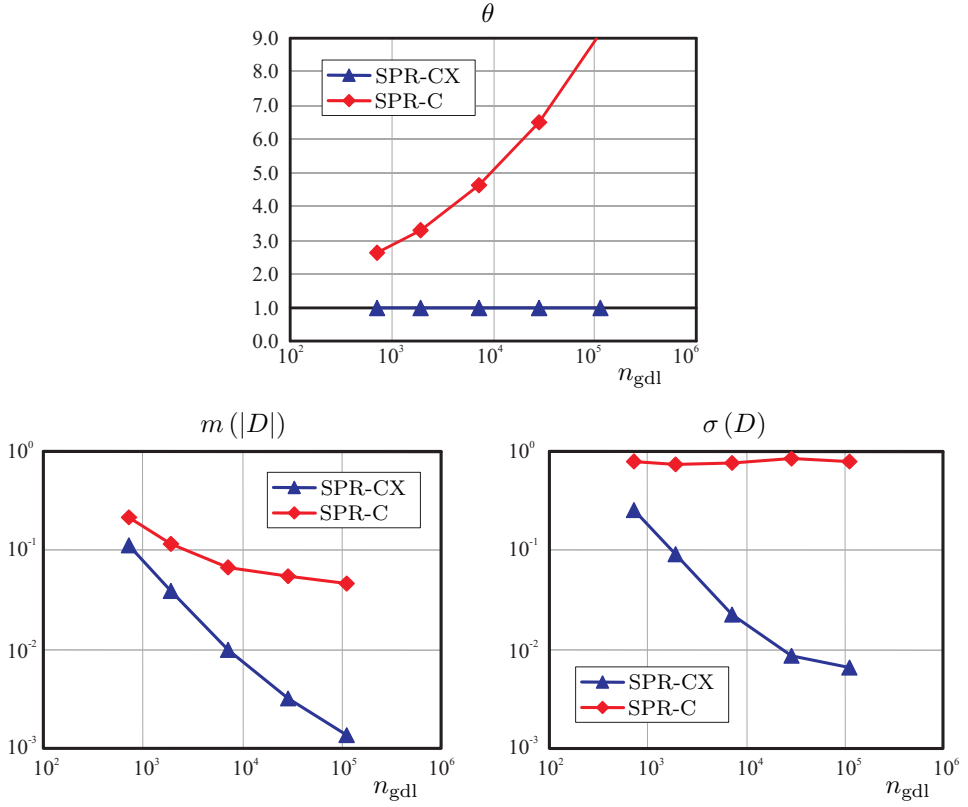


FIGURA 5.27. Modo I y mallas estructuradas. Indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ con descomposición singular+suave (SPR-CX) y sin descomposición (SPR-C).

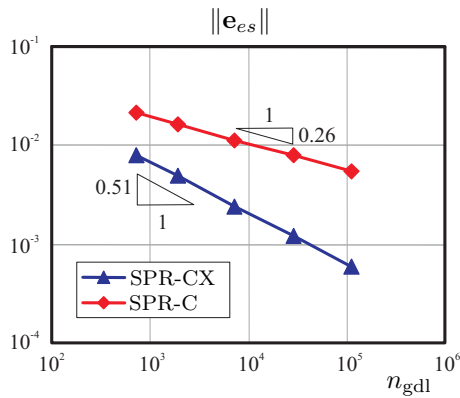


FIGURA 5.28. Modo I y mallas estructuradas. Error estimado en norma energética con descomposición singular+suave (SPR-CX) y sin descomposición (SPR-C).

5.3.7. Influencia del tamaño del área de descomposición

En esta sección se estudia la influencia del radio ρ que define el área de descomposición, considerando en los ejemplos un área fija de enriquecimiento con radio $r_e = 0.5$. Los resultados obtenidos con varios radios ρ dentro y fuera del área de enriquecimiento se indican en las Figuras 5.29 y 5.30 para una secuencia de mallas estructuradas y Modo I de carga.

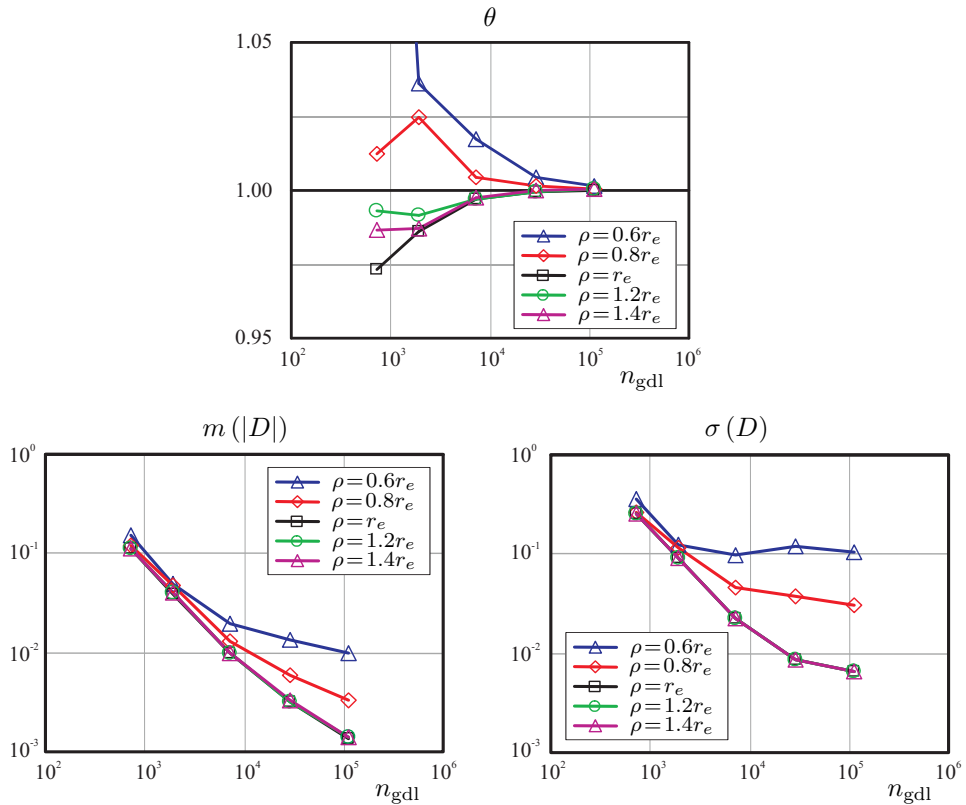


FIGURA 5.29. Modo I y mallas estructuradas de elementos CUAD4. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para diferentes radios ρ con un radio de enriquecimiento de área fija $r_e = 0.5$.

Las gráficas indican resultados más precisos y con una mejor distribución del error a nivel local cuando $\rho \geq r_e$. En la Figura 5.29 se puede observar que la efectividad global del estimador θ mejora a medida que aumenta el radio ρ . Asimismo, los indicadores globales $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ convergen más rápido para valores mayores de ρ , señalando una mejora de la distribución del error a nivel de elemento en las mallas utilizadas. En todo caso, se sugiere el uso de un radio $\rho = r_e$ ya que este ofrece resultados precisos y, al mismo tiempo, restringe el uso de la técnica de descomposición a un área próxima al extremo de grieta. El uso a nivel local de la técnica de descomposición permite la utilización de la técnica propuesta en problemas con múltiples extremos de grieta.

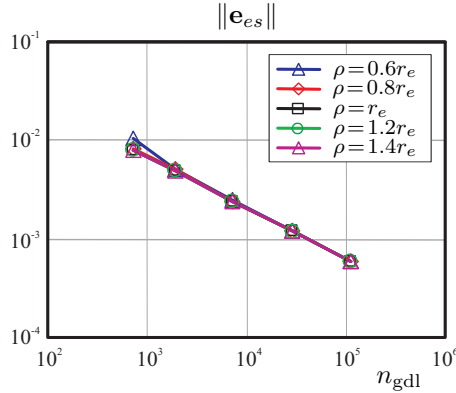


FIGURA 5.30. Modo I y mallas estructuradas de elementos CUAD4. Evolución del error estimado en norma energética $\|e_{es}\|$ para diferentes radios ρ con un radio de enriquecimiento de área fija $r_e = 0.5$.

Las Figuras 5.29 y 5.30 muestran claramente que el error estimado para $\rho < r_e$ no es tan preciso, ni tan uniformemente distribuido como el obtenido para $\rho \geq r_e$, especialmente para las mallas poco refinadas. En la Figura 5.31 se representa el índice de efectividad local D en cercanías del extremo de grieta para diferentes ρ . Como se observa en la figura, la razón del mal comportamiento del estimador con radios $\rho < r_e$ es que la técnica SPR-C, basada en funciones polinomiales, no es capaz de reconstruir adecuadamente el campo de tensiones en el área comprendida entre ρ y r_e , donde la solución XFEM está siendo representada por una interpolación estándar de EF enriquecida con el campo asintótico de extremo de grieta. Es decir, la base de EF es más rica que la base de las funciones utilizadas para la reconstrucción de σ^* .

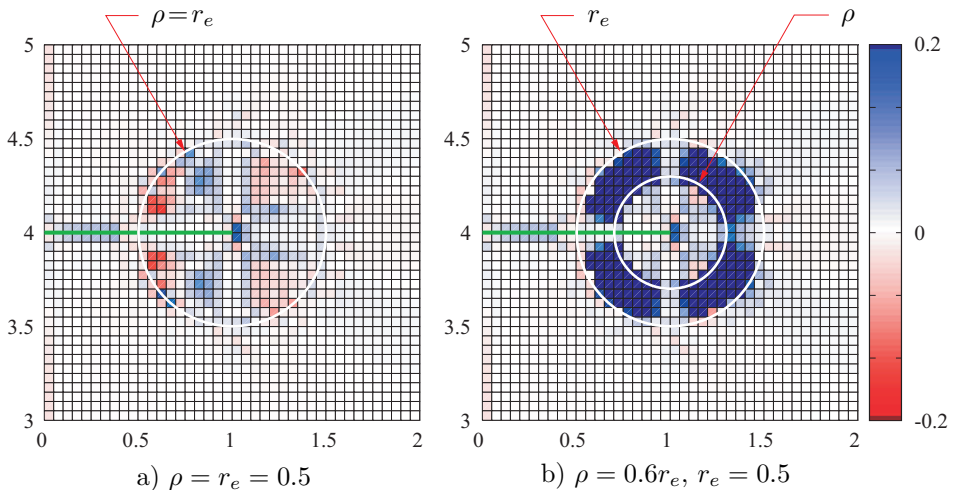


FIGURA 5.31. Índice de efectividad local D en los alrededores de la singularidad en una malla con 12800 elementos para el problema en modo I, con $\rho = r_e$ y $\rho < r_e$.

5.3.8. Precisión del campo reconstruido de tensiones σ^*

La precisión del estimador de ZIENKIEWICZ Y ZHU (1987) depende de la calidad del campo reconstruido de tensiones σ^* . En la Figura 5.32 se representan los errores exactos $(\sigma - \sigma^h)$ y $(\sigma - \sigma^*)$ para cada una de las componentes de tensión y para la tensión de Von Mises. Los valores de las funciones de error se han representado para el problema en Modo I en la malla estructurada número 2 de la Figura 5.7. El círculo representado en las figuras indica el contorno del área de enriquecimiento, el cual coincide en este caso con el contorno del área de descomposición *singular+suave* definida por el radio ρ .

En la Figura 5.32 se puede observar que el campo reconstruido de tensiones σ^* es, aproximadamente, un orden de magnitud más preciso que el campo de tensiones σ^h de XFEM. Por otra parte, se observa que el campo σ^* es menos preciso en el frente de grieta, lo cual es de esperar debido a la proximidad de la singularidad. Además, el procedimiento utilizado para garantizar el equilibrio en las caras de grieta perjudica la precisión del campo reconstruido en el frente de grieta. En cada patch se impone la ecuación de equilibrio en el contorno a lo largo de $\tilde{x} = 0$ según se indicó en la Sección 4.4.4 (ver Figura 5.2 en la página 128). Para los patches que contienen el extremo de grieta esto implica que el equilibrio se impone no solo en las caras de grieta, sino también en la prolongación de la misma, más adelante del frente de grieta, en el interior del material. Aunque dicho procedimiento reduce la precisión del campo reconstruido, imponer el equilibrio en todo el contorno resulta necesario para garantizar la propiedad de cota superior que se estudiará más adelante.

En general, el campo σ^* es notablemente más preciso que el campo σ^h , incluso en las inmediaciones de la discontinuidad. El uso de restricciones para forzar el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio permite obtener muy buenas estimaciones a lo largo de las caras de grieta y en el contorno del dominio. Por esta razón, la técnica de reconstrucción del campo de tensiones SPR-CX, además de poder ser utilizada para evaluar estimaciones precisas del error de discretización en norma energética, también puede ser utilizada para mejorar la precisión de los campos de tensiones obtenidos a través del XFEM para problemas de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal.

Las gráficas de la Figura 5.32 representan los valores de la función de error evaluados en los puntos de integración. Para elaborar dichas gráficas, el valor de la función en cada punto de integración ha sido asignado a un área prescrita alrededor de cada punto de integración.

En las Figuras 5.33 y 5.34 se muestran los resultados para el problema de Westergaard en Modo II y Modo Mixto. Nuevamente, se observa la buena calidad del campo reconstruido σ^* , con una distribución de la función de error similar a la observada para el problema en Modo I.

Los resultados de error en tensiones se representan para un caso más general en la Figura 5.35, donde se muestra la distribución de la función de error para el problema en Modo Mixto utilizando la malla no estructurada número 2 de la secuencia indicada

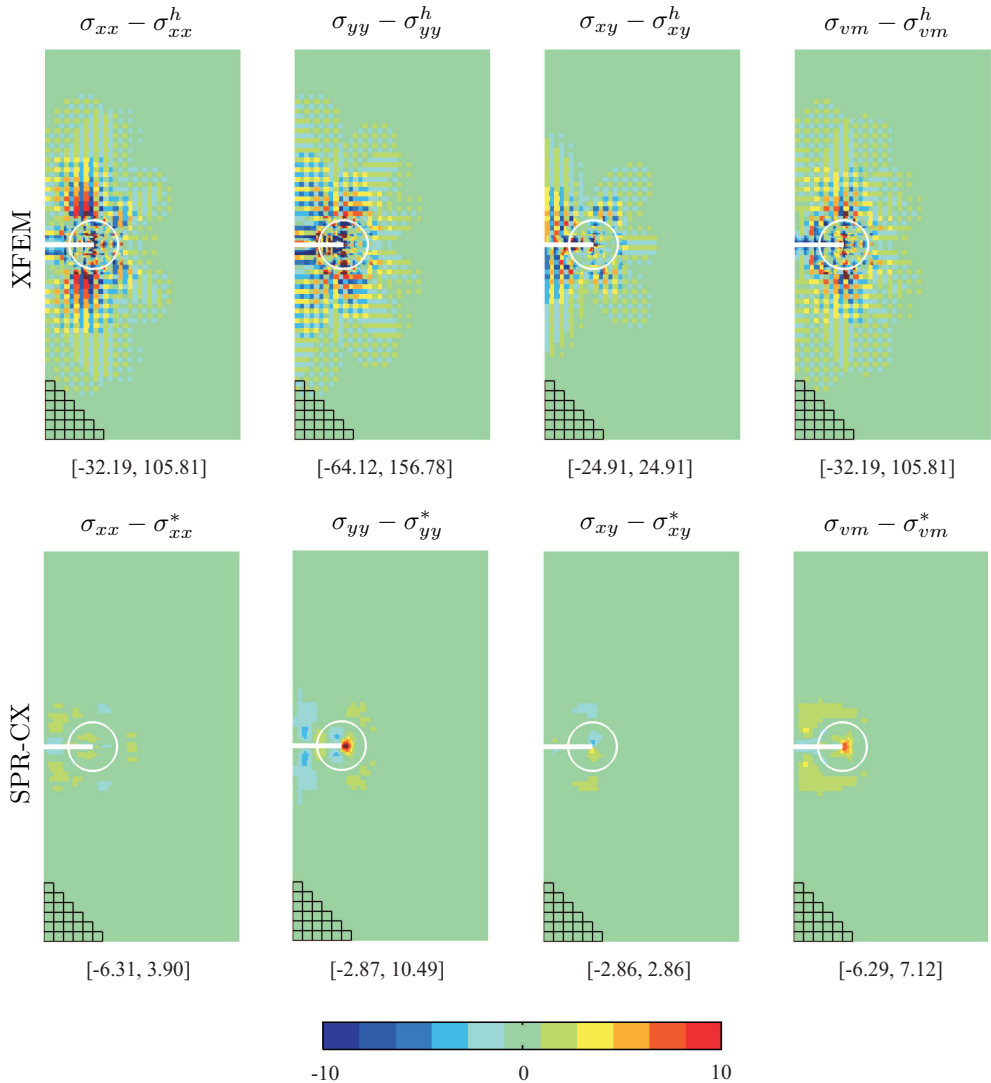


FIGURA 5.32. Modo I, malla estructurada 2. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.

en la Figura 5.8. El comportamiento de la técnica de reconstrucción continúa siendo bastante bueno, lográndose un campo σ^* de alta calidad.

La Figura 5.36 muestra los valores del error exacto de la solución obtenida mediante XFEM $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|$ y de la solución reconstruida $\|\mathbf{e}^*\|$ frente al número de grados de libertad n_{gdL} . Las curvas se obtienen para mallas estructuradas y no estructuradas de elementos cuadriláteros bilineales considerando diferentes modos de carga. De los resultados presentados se concluye que el campo reconstruido σ^* es más preciso

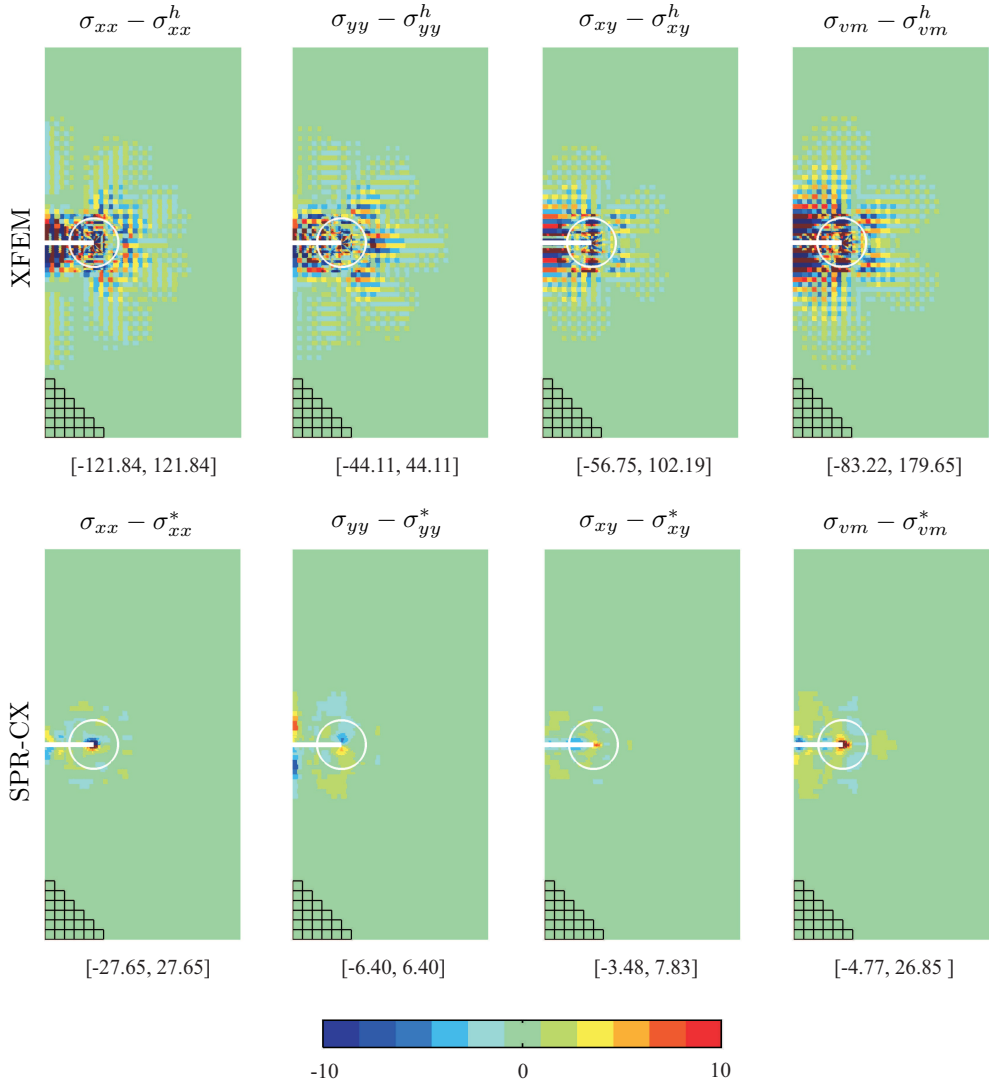


FIGURA 5.33. Modo II, malla estructurada 2. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.

que el campo solución de EF σ^h para los ejemplos analizados. Asimismo, se puede observar que debido a la mayor precisión del campo σ^* , la velocidad de convergencia de la norma $\|\mathbf{e}^*\|$ es mayor que la velocidad de convergencia de $\|\mathbf{e}\|$. De acuerdo a ZIENKIEWICZ Y ZHU (1992b) este comportamiento verifica que el estimador del error SPR-CX es asintóticamente exacto.

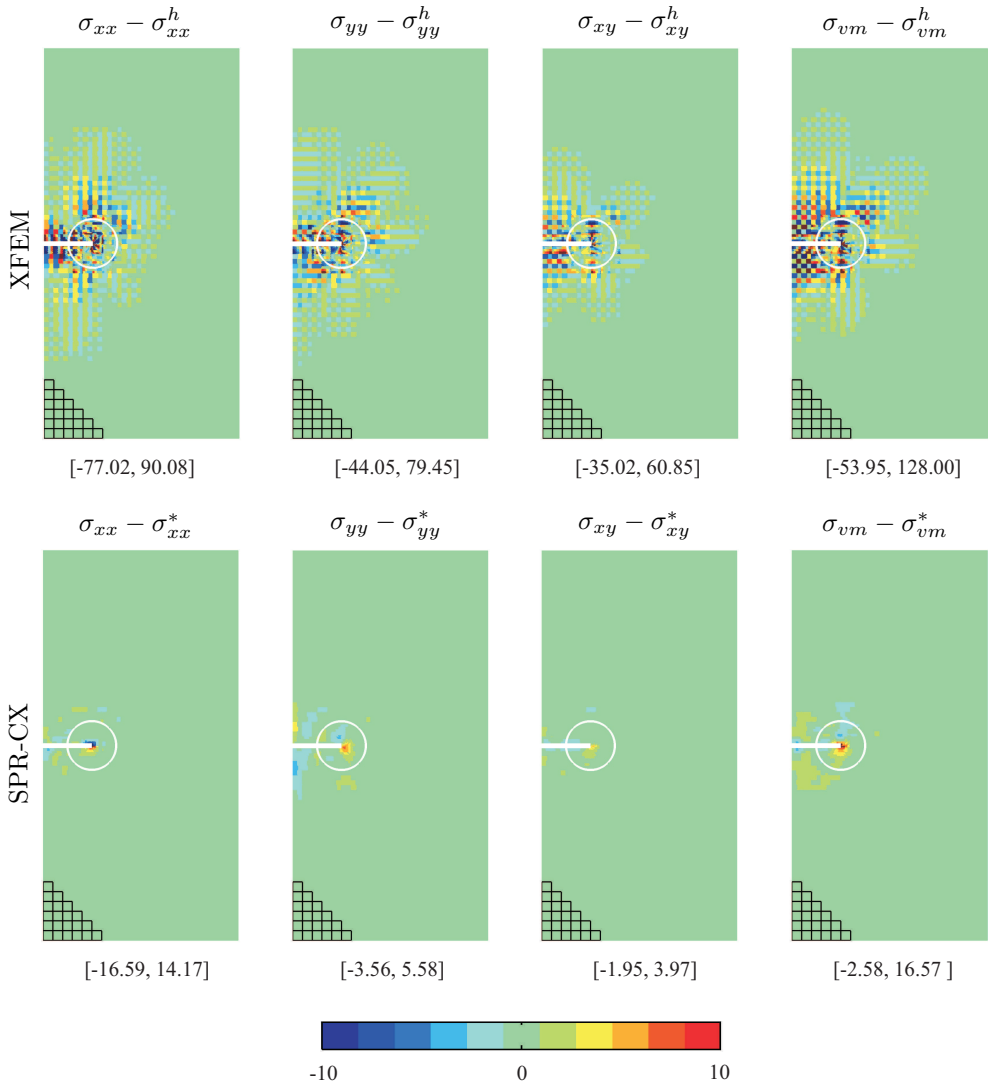


FIGURA 5.34. Modo mixto, malla estructurada 3. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.

5.3.9. Imposición de condiciones de equilibrio

En la técnica SPR-CX se imponen restricciones al campo reconstruido de tensiones de manera que se fuerce el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio interno y equilibrio en el contorno. Este procedimiento mejora la estimación de la norma energética del error evaluada en los elementos sobre el contorno, en los cuales el funcionamiento de las técnicas del tipo SPR ha sido generalmente menos preciso. Asimismo, y como

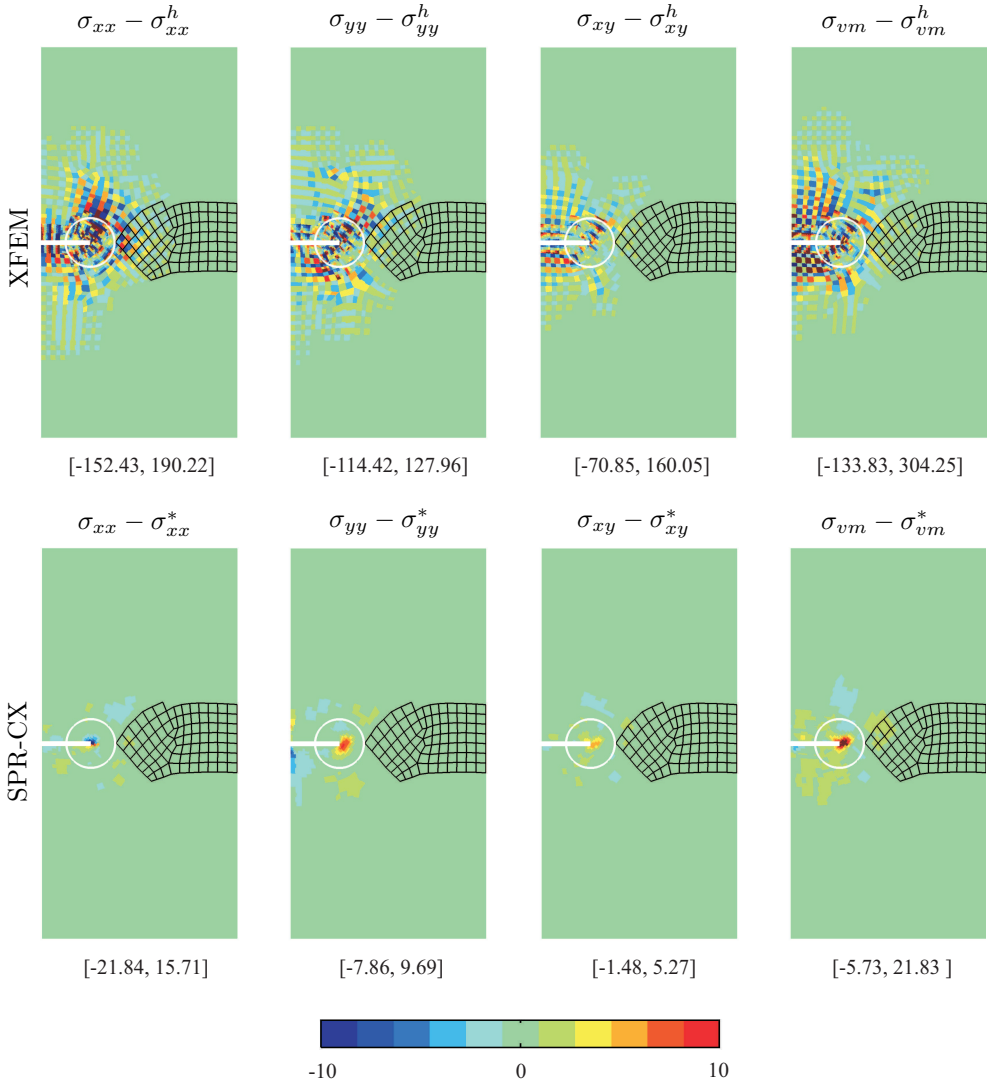


FIGURA 5.35. Modo mixto, malla no estructurada 2. Error exacto en σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} y σ_{vm} para los campos de tensiones obtenidos con XFEM y con la técnica SPR-CX. El intervalo bajo cada gráfica indica el rango del error en tensiones.

característica muy importante, permite obtener un campo reconstruido de tensiones *casi estáticamente admisible*, condición que resulta necesaria para la evaluación de la cota del error que se estudiará en el Capítulo 6.

En la Figura 5.37 se aprecia el índice de efectividad local D para el problema de Westergaard en Modo I representado en la segunda malla de la Figura 5.7. El estimador SPR-X es una versión modificada del estimador SPR-CX que no considera el equilibrio del campo de tensiones en patches (ecuaciones de equilibrio interno, equilibrio

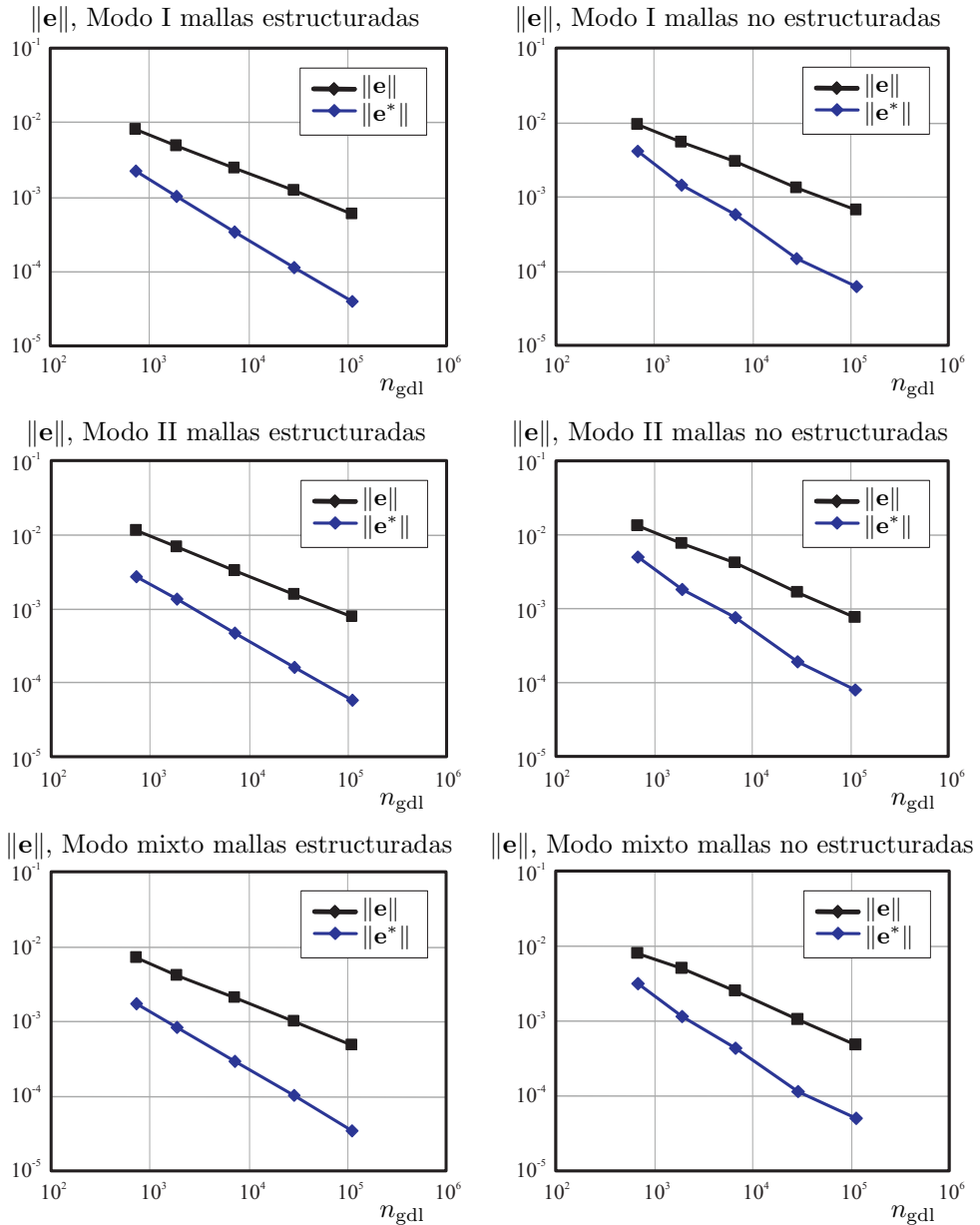


FIGURA 5.36. Evolución de los errores en norma energética $\|e\|$ y $\|e^*\|$ para mallas estructuradas y no estructuradas de elementos CUAD4.

en el contorno y compatibilidad). Comparando con los resultados obtenidos para el estimador SPR-CX vistos en la Figura 5.16 se puede observar que la estimación de la norma energética del error empeora en los elementos del contorno al no considerar las ecuaciones de equilibrio.

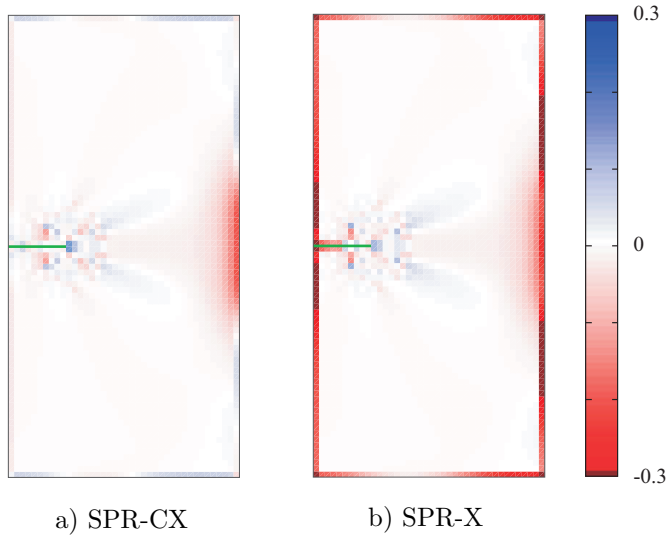


FIGURA 5.37. Índice de efectividad local D aplicando condiciones de equilibrio en patches (SPR-CX), y sin aplicar condiciones de equilibrio (SPR-X).

En la Figura 5.38 se muestra la evolución del índice de efectividad global θ frente al número de gdl del estimador SPR-X comparado con el SPR-CX. Además, se representa la evolución de $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ en ambos casos. Los resultados verifican que con un procedimiento de equilibrado en patches se logra mejorar la efectividad del estimador tanto a nivel global como localmente.

5.3.10. Condiciones tipo Mortar en el frente de grieta

Los patches que contienen el extremo de grieta no siempre están completamente divididos por la discontinuidad. Sin embargo, al forzar el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio en este tipo de patches siguiendo el procedimiento planteado en la técnica SPR-CX, el equilibrio se impone a lo largo de todo el eje \tilde{y} del sistema de referencia local al patch alineado con la grieta. Para ilustrar esta situación considérese el patch C de la Figura 5.2 en la página 128. En efecto, la técnica de equilibrado introduce restricciones al campo reconstruido de tensiones más adelante del frente de grieta, a lo largo de la continuación de la grieta en el patch donde precisamente el campo singular tiene mayor influencia.

A fin de equilibrar solo la parte del patch correspondiente a las caras de grieta, de manera que no se fueren las condiciones de equilibrio más adelante del frente de grieta dentro del patch, se imponen restricciones de forma débil a los polinomios de interpolación de tensiones mediante un procedimiento tipo Mortar. Dicho procedimiento se aplica solo sobre los patches que contienen el frente de grieta, en el segmento comprendido entre el punto de intersección de las caras de grieta con el contorno del soporte

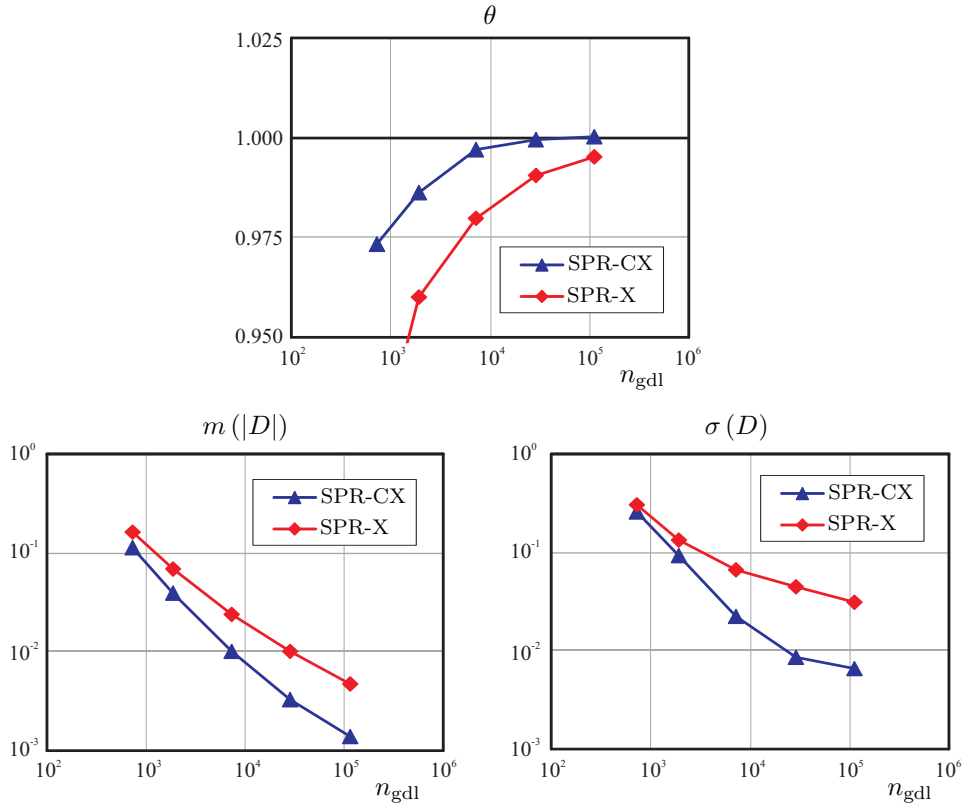


FIGURA 5.38. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para mallas estructuradas de elementos $CUAD_4$.

del patch y el extremo de grieta localizado en el interior del soporte del patch. Sea la ecuación de restricción definida como:

$$\int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}) \delta \lambda d\Gamma = 0 \quad (5.18)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^*$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son las tensiones evaluadas en el segmento sobre las caras de grieta, y el campo de multiplicadores de Lagrange λ y sus variaciones $\delta \lambda$ se definen como:

$$\lambda = \sum_{j \in \mathcal{K}} M_j(\mathbf{x}) \lambda_j \quad (5.19)$$

$$\delta \lambda = \sum_{j \in \mathcal{K}} M_j(\mathbf{x}) \delta \lambda_j \quad (5.20)$$

en la expresión anterior \mathcal{K} representa el conjunto formado por los extremos del segmento, y M_j es la función de interpolación del multiplicador λ_j , ambos asociados al punto j . En este caso la función de interpolación $M_j(\mathbf{x})$ se ha tomado de valor constante igual a 0.5.

Reemplazando el campo de variaciones en la Ecuación 5.18, y evaluando para el segmento definido por dos puntos se escribe:

$$\int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})(M_1(\mathbf{x})\delta\lambda_1 + M_2(\mathbf{x})\delta\lambda_2)d\Gamma = 0 \quad (5.21)$$

$$(\delta\lambda_1 + \delta\lambda_2) \int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})d\Gamma = 0 \quad (5.22)$$

$$\int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})d\Gamma = 0 \quad (5.23)$$

Reemplazando en la expresión anterior el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ en función de los coeficientes \mathbf{a} , y evaluando numéricamente se tiene:

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma})|\mathbf{J}|H_i = 0 \quad (5.24)$$

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a})|\mathbf{J}|H_i = \sum_{i=1}^m (\boldsymbol{\sigma})|\mathbf{J}|H_i \quad (5.25)$$

donde $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz jacobiana y H corresponde al peso de los m puntos de la cuadratura utilizada. Las ecuaciones de restricción se evalúan para las componentes xx y xy de la tensión exacta considerando que sobre las caras de grieta $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$.

En la Figura 5.39 se comparan los resultados del error exacto en la componente σ_{yy} del campo de tensiones en zonas próximas al extremo de grieta para el problema en Modo I. Se muestran los resultados para el campo solución de EF $\boldsymbol{\sigma}^h$, y para los campos de tensiones reconstruidos $\boldsymbol{\sigma}^*$ considerando y sin considerar la técnica mortar para el equilibrado. Se puede observar que imponer las condiciones de equilibrio en caras de grieta utilizando la técnica mortar en el patch que contiene el extremo de grieta mejora la calidad del campo reconstruido.

En la Figura 5.40 se representa el índice de efectividad local D en los alrededores de la grieta para una malla en Modo I, utilizando los dos esquemas de equilibrado en los patches del frente de grieta: a) normal, y b) con mortar. Se puede observar en la figura que el equilibrado tipo mortar mejora ligeramente la estimación del error en los elementos de los patches del frente de grieta.

En la Figura 5.41 se muestran los resultados globales de θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ frente al número de gdl para la técnica SPR-CX con y sin equilibrado tipo mortar en los patches del frente de grieta. Los resultados fueron obtenidos para una secuencia de mallas estructuradas de elementos CUAD4, para el problema de Westergaard en Modo I. Las curvas de convergencia de los distintos parámetros para ambas técnicas son cualitativamente similares, observándose una ligera subestimación de la efectividad global cuando se usa el equilibrado mortar. Este comportamiento se debe a que el equilibrado mortar disminuye la sobrestimación de la norma energética del error de

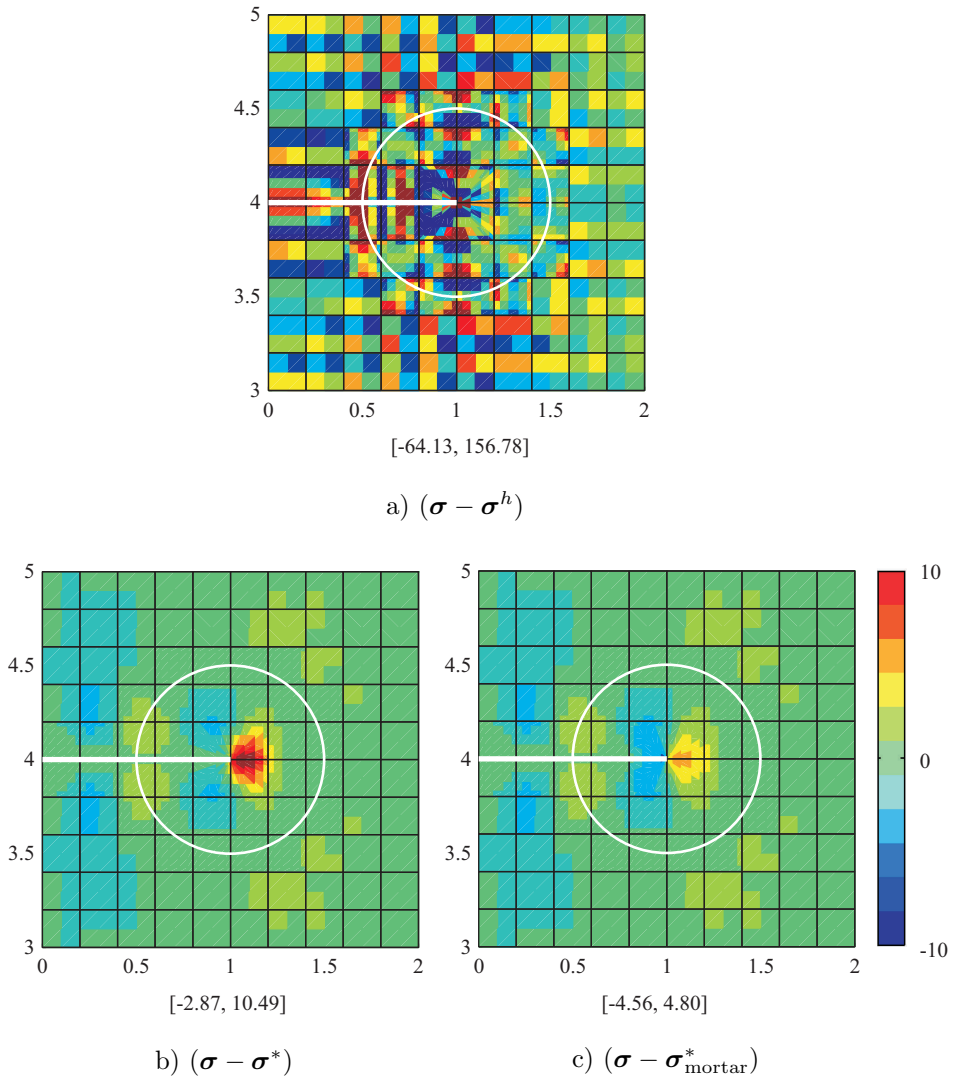


FIGURA 5.39. Error exacto en σ_{yy} para: a) la solución de EF , b) equilibrado normal en el frente de grieta y c) equilibrado con mortero.

los elementos localizados en el frente de grieta como se ha mostrado en la Figura 5.40, lo que se traduce en una disminución de la efectividad global.

Es importante notar que el equilibrado mortero impone las restricciones de equilibrio de manera débil, por lo que resulta menos adecuado para la obtención de un *campo estáticamente admisible* dirigido a la evaluación de cotas superiores del error.

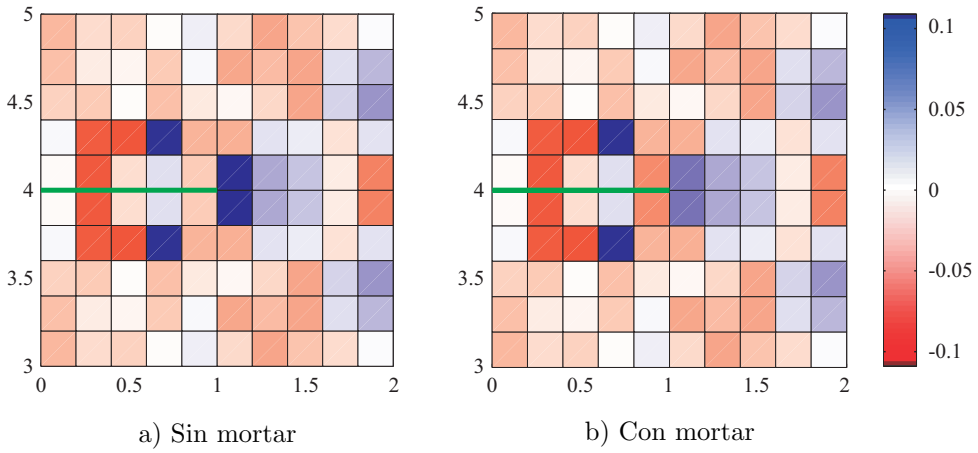


FIGURA 5.40. Índice de efectividad local D utilizando a) equilibrado normal en el frente de grieta, y b) equilibrado tipo mortor.

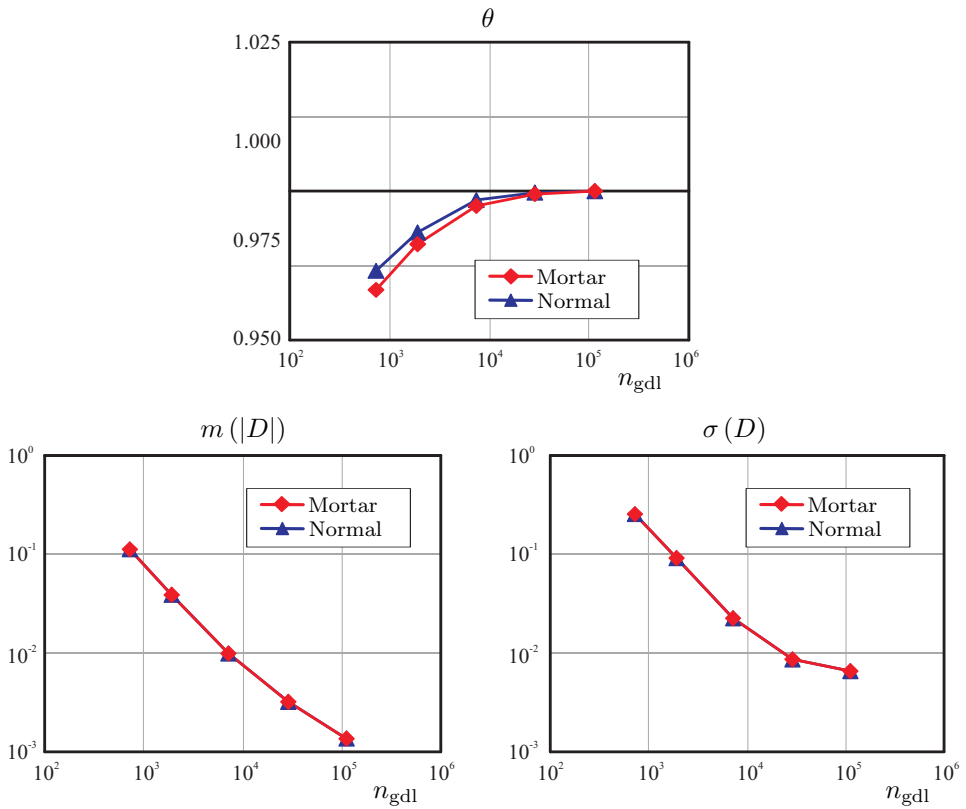


FIGURA 5.41. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ usando el equilibrado tipo mortor en el frente de grieta.

5.3.11. Influencia del grado polinómico en el ajuste

Al realizar la reconstrucción del campo de tensiones en patches se ha de escoger el orden de la expansión polinómica utilizada para el ajuste por mínimos cuadrados, según se ha indicado anteriormente en la Ecuación 4.46.

Hasta el momento, en los ejemplos numéricos presentados se ha utilizado un esquema de ajuste para σ^* que considera polinomios del mismo orden que la aproximación de los desplazamientos de EF para los patches en el interior del dominio, y polinomios de orden un grado mayor para los patches sobre el contorno.

En este apartado se analiza la influencia de usar diferentes esquemas para el ajuste del campo de tensiones en los distintos patches. En particular, para una aproximación de EF con elementos lineales se pueden considerar tres posibles casos:

- LIN: Polinomios lineales para todo el dominio.
- CUAD: Polinomios cuadráticos para todo el dominio.
- LIN+CUAD: Polinomios lineales para patches en el interior del dominio y polinomios cuadráticos para patches sobre el contorno y caras de grieta.

En la Figura 5.42 se muestra la distribución del índice de efectividad local para una malla estructurada de 288 elementos en Modo II, utilizando distintos tipos de ajuste polinómico en patches. Se puede observar que cuando se utilizan polinomios lineales en todo el dominio los resultados son peores en el contorno y en caras de grieta. En el interior del dominio la diferencia entre un ajuste lineal y uno cuadrático no es cualitativamente significativa, aunque la utilización de polinomios cuadráticos para todo el dominio lleva asociado un aumento del coste computacional.

En la Figura 5.43 se representa la evolución de la efectividad global θ frente al número de gdl para los diferentes esquemas de ajuste polinómico en patches, considerando distintos modos de carga. La utilización de polinomios lineales en el interior del dominio y cuadráticos en el contorno ofrece el mejor balance entre el coste computacional y la calidad del estimador del error. Una ventaja importante de usar polinomios de orden un grado mayor en los patches sobre el contorno y las caras de grieta es que la interpolación de tensiones puede representar mejor la información conocida *a priori* del problema en dichas regiones, la cual se ha introducido al ajuste mediante las ecuaciones de restricción siguiendo el planteamiento de la técnica SPR-C (ver Sección 4.4.4).

5.3.12. Ejemplo 2. Placa infinita con una grieta inclinada sujeta a carga uniaxial

Para ilustrar cómo es el comportamiento del método en casos donde no se conoce la solución exacta se ha analizado una placa con una grieta inclinada sujeta a carga uniaxial de tracción, ver Figura 5.44. Se han utilizado mallas estructuradas de elementos cuadriláteros bilineales, garantizando que el extremo de grieta se localice en el centro de un elemento para todas las mallas en la secuencia de refinamiento. En los análisis,

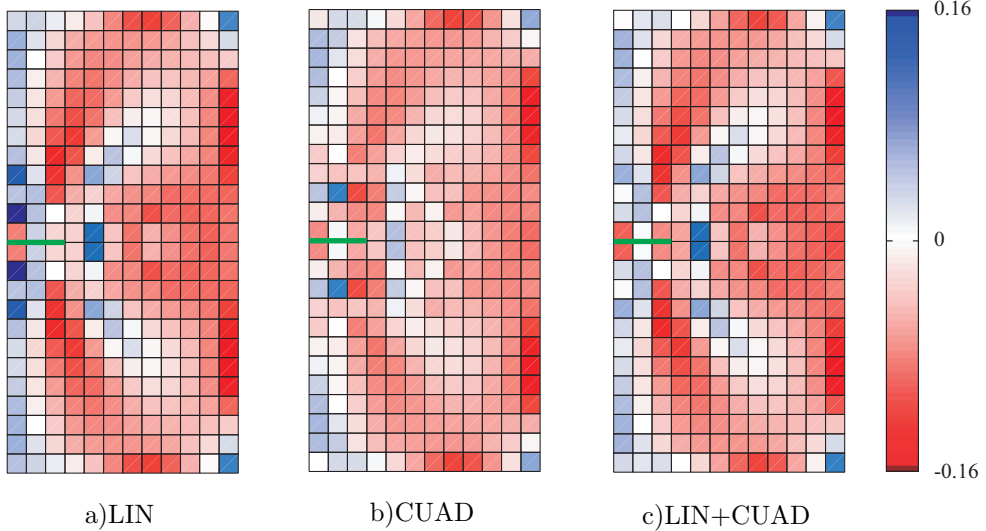


FIGURA 5.42. Índice de efectividad local D para diferentes grados de ajuste polinómico en patches, en una malla con 288 elementos en Modo II.

la carga aplicada es $\sigma = 100$, y los radios de enriquecimiento y de descomposición son $r_e = \rho = 0.5$.

En la Figura 5.45 se representa la distribución de las tensiones de Von Mises en los alrededores de la grieta para una malla con 3528 elementos. El valor de tensión es evaluado en los puntos de Gauss para el campo de tensiones reconstruido σ^* y el campo solución de EF σ^h . Al no disponer de la solución exacta para este problema no es posible representar gráficas del error exacto en tensión.

En la Figura 5.46 se muestra la distribución del error estimado en norma energética para la misma malla. Se observa que, como era de esperar, el error $\|\mathbf{e}_{es}\|$ aumenta en proximidades de la grieta, especialmente cerca del punto singular. En el resto del dominio el valor de $\|\mathbf{e}_{es}\|$ es bastante más bajo.

A fin de verificar la convergencia del error estimado $\|\mathbf{e}_{es}\|$ se representa su evolución en una secuencia de mallas uniformemente refinadas. En la Figura 5.47 se representa el valor de $\|\mathbf{e}_{es}\|$ frente al número de gdl , donde se observa que $\|\mathbf{e}_{es}\|$ presenta una velocidad de convergencia de 0.55. Dicho valor es similar a la velocidad de convergencia obtenida para el problema de Westergaard, y cerca de la velocidad de convergencia óptima de 0.5, verificando de este modo la precisión de la técnica propuesta para este tipo de problemas.

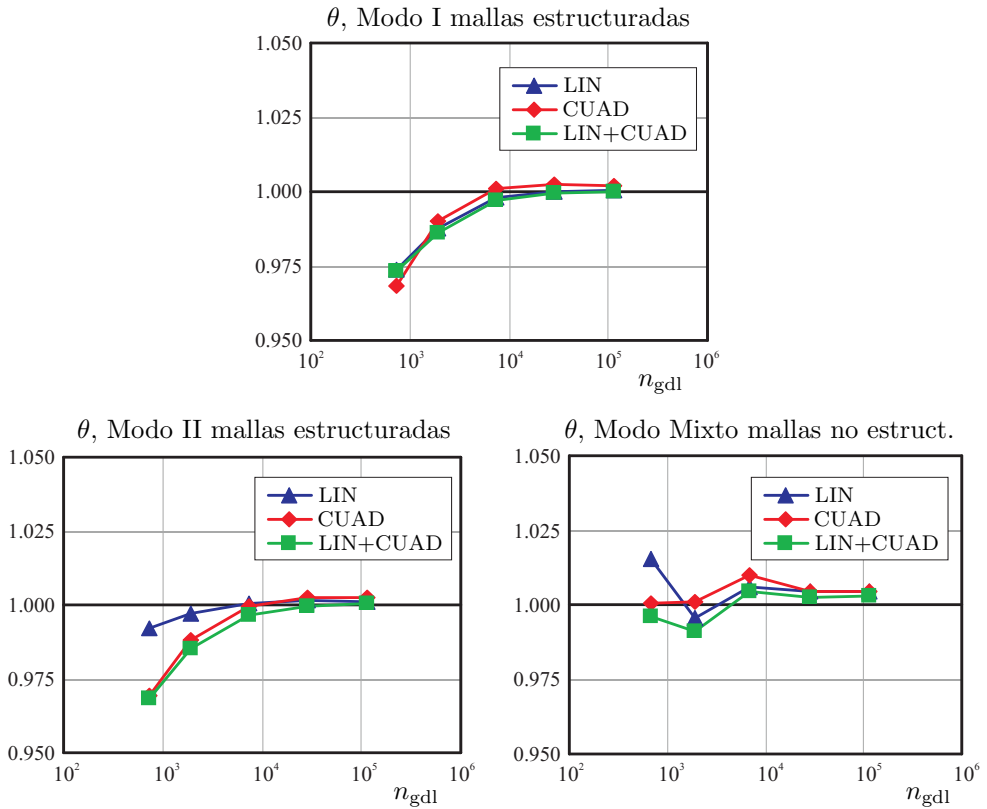


FIGURA 5.43. Evolución de la efectividad global θ para distintos esquemas de ajuste polinómico bajo diferentes modos de carga.

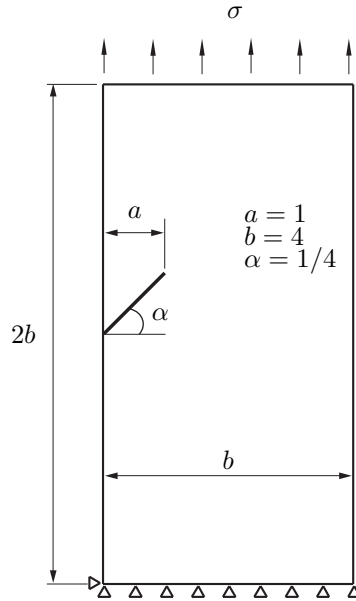


FIGURA 5.44. Problema de una placa con grieta inclinada bajo carga axial.

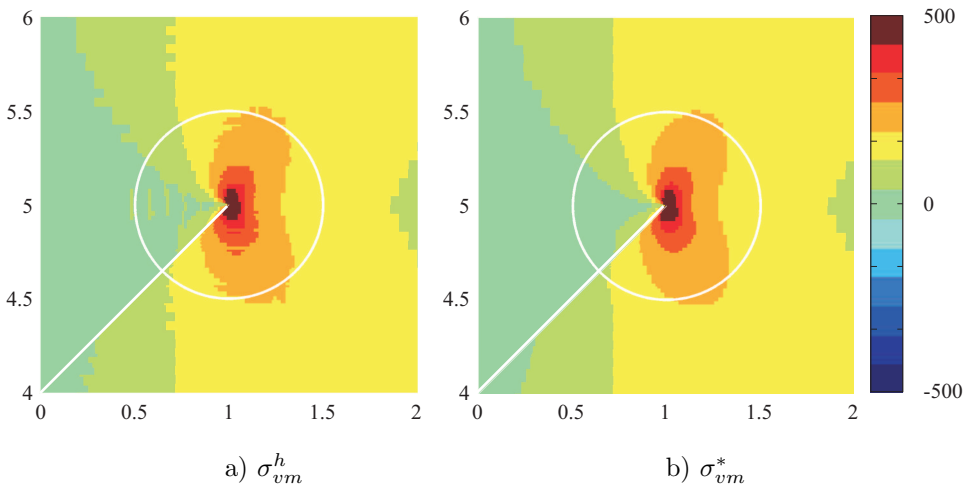


FIGURA 5.45. Distribución de la tensión de Von Mises σ_{vm} para la solución de elementos finitos σ^h y la solución reconstruida σ^* en el problema de una placa con una grieta inclinada.

5.3.13. Comparación con el estimador XMLS

En esta sección se presenta la comparación entre el estimador del error SPR-CX propuesto en este trabajo, y el estimador *Extended Moving Least Squares* (XMLS),

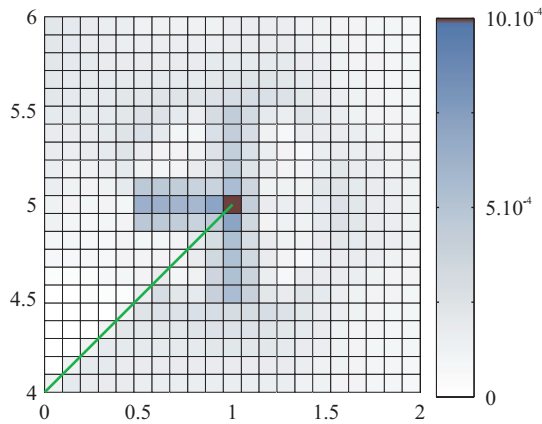


FIGURA 5.46. Distribución en elementos del error estimado en norma energética $\|e_{es}\|$ para el problema de una placa con una grieta inclinada.

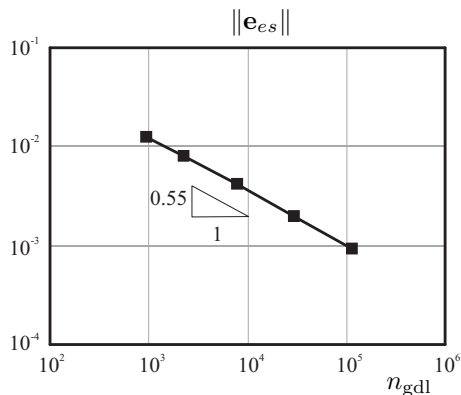


FIGURA 5.47. Error estimado en norma energética $\|e_{es}\|$ para el problema de una placa con una grieta inclinada.

presentado recientemente por BORDAS Y DUFLOT (2007) y el cual ha sido revisado previamente en la Sección 4.5.2. La comparación entre estos dos estimadores ha sido presentada en RÓDENAS ET AL. (2008b).

El problema planteado para realizar la comparación entre ambos estimadores de error es el problema de Westergaard utilizado en la Sección 5.3.1. Para llevar a cabo la comparación, el grupo de investigación de la UPV en Valencia se ha puesto en contacto con los desarrolladores de la técnica XMLS, Bordas y Dufлот. Posteriormente, se ha compartido la información necesaria de la solución del modelo a comparar, de manera que ambas técnicas de reconstrucción se apliquen sobre la misma solución de XFEM. Se ha post-procesado el campo reconstruido obtenido mediante los dos estimadores para diferentes modos de carga y tipos de malla y, posteriormente, se han comparado los resultados. Los resultados correspondientes a la técnica XMLS que se encuentran

en este apartado se han publicado con la autorización de los autores.

En la Figura 5.48 se representan los resultados para el problema en Modo Mixto del índice de efectividad local D en la cuarta malla de una secuencia de mallas no estructuradas. Se representa una región próxima al extremo de grieta, y se indica con un círculo en la figura el tamaño del área de descomposición, que coincide con el tamaño del área de enriquecimiento. Se puede observar que fuera del área de descomposición ambas técnicas presentan resultados semejantes. Sin embargo, la técnica XMLS presenta una mayor sobrestimación del error en la zona cercana a la singularidad. Este mismo comportamiento se repite en todas las mallas de la secuencia.

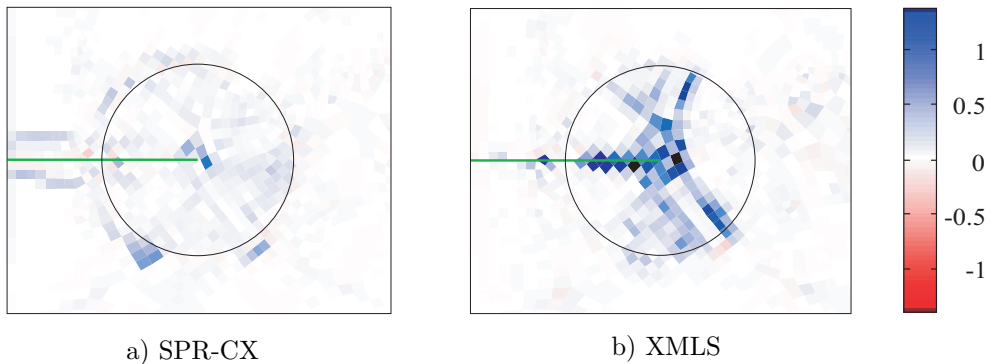


FIGURA 5.48. *Modo mixto, malla no estructurada 4. Índice de efectividad local D .*

En la Figura 5.49(a) se representa la convergencia del error estimado en norma energética obtenido mediante las dos técnicas frente al número de gdl . Se muestra en la misma gráfica el error exacto en norma energética a fin de comparar los resultados. Como se puede apreciar en la figura, la curva del error estimado mediante la técnica SPR-CX es prácticamente coincidente con la curva del error exacto en norma energética $\|\mathbf{e}\|$.

Con el propósito de evaluar la calidad del campo reconstruido σ^* obtenido con los dos estimadores de error, se muestra en la Figura 5.49(b) la convergencia de la norma energética del error de la solución reconstruida $\|\mathbf{e}^*\|$ para ambos estimadores. Se aprecia que tanto la técnica XMLS como la técnica SPR-CX presentan velocidades de convergencia mayores a la del error exacto de la solución $\|\mathbf{e}\|$, lo que según se ha indicado anteriormente, garantiza que se tienen estimadores de error asintóticamente exactos. Sin embargo, la técnica SPR-CX proporciona una solución reconstruida σ^* más precisa.

En la Figura 5.50 se representa la evolución de los parámetros θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ respecto al número de gdl para los dos estimadores de error. Se puede observar que para el estimador SPR-CX, los valores de efectividad global obtenidos son muy cercanos al valor ideal de 1, mientras que para el estimador XMLS los valores de efectividad son bastante más altos de lo esperado. Comprobando la convergencia del valor medio y la desviación estándar del índice D , podemos verificar que aunque ambos convergen a

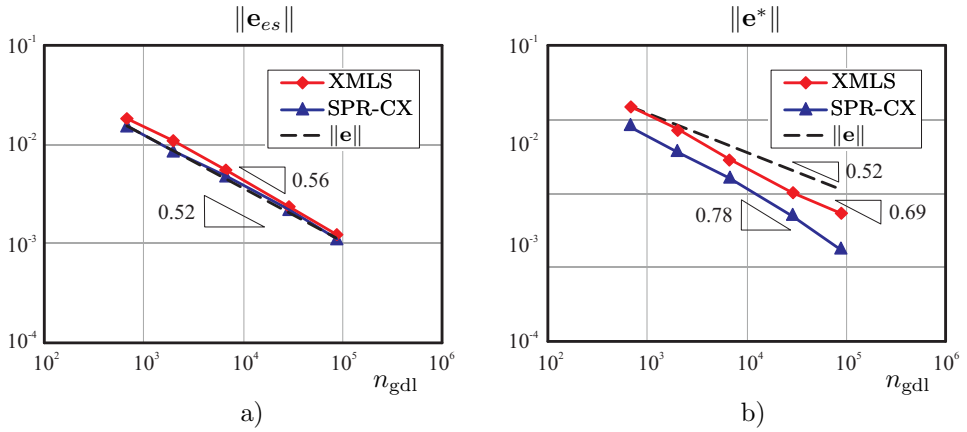


FIGURA 5.49. Modo mixto, mallas no estructuradas: a) Convergencia del error estimado en norma energética. b) Convergencia del error de la solución reconstruida.

ceros, el estimador SPR-CX se encuentra claramente por debajo del estimador XMLS, lo que indica una mayor precisión del estimador propuesto en esta tesis.

En RÓDENAS ET AL. (2008b) se han presentado los resultados para otras secuencias de mallas y modos de carga, exhibiéndose en todos los casos un comportamiento de los estimadores de error similar al observado para modo mixto y mallas no estructuradas. Los resultados muestran la superioridad de la técnica SPR-CX frente a la técnica XMLS, que a su vez es superior a otras técnicas de estimación basadas en la reconstrucción de la solución.

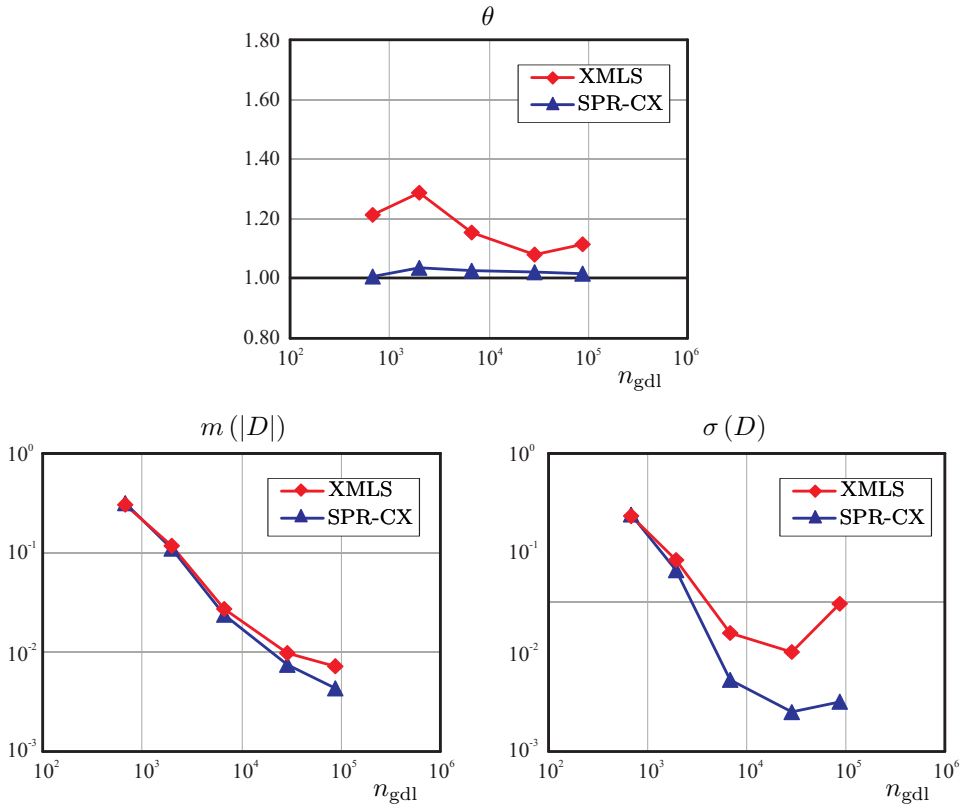


FIGURA 5.50. Evolución de los indicadores globales θ , $m(|D|)$ y $\sigma(D)$ para modo mixto y mallas no estructuradas.

Capítulo 6

Cotas superiores del error en XFEM

6.1. Introducción

En la Sección 4.6 se ha introducido el concepto de acotación del error exacto en norma energética mediante la evaluación de la *cota superior*, \mathcal{E}_{UB} , y la *cota inferior* del error, \mathcal{E}_{LB} , de manera que el error exacto en norma energética quede delimitado según se ha indicado en la Ecuación 4.123:

$$\mathcal{E}_{LB} \leq \|\mathbf{e}\| \leq \mathcal{E}_{UB}$$

También se indicó que hoy en día resulta de gran interés la definición de este tipo de estimaciones, tanto para la norma energética del error como para otras magnitudes de interés. Además, que los estimadores del error basados en residuos pueden proporcionar de manera directa cotas superiores e inferiores del error, si bien que, según BABUŠKA Y STROUBOULIS (2001), es posible construir cotas del error a partir de cualquier estimador basado en residuos o en la reconstrucción de la solución.

En la misma sección, se ha expuesto la técnica propuesta por DÍEZ ET AL. (2007) para la evaluación de cotas superiores del error mediante una estimación basada en la reconstrucción de la solución que garantiza un campo localmente equilibrado y continuo, la cual de ahora en adelante se denominará como técnica de acotación original. Dicho trabajo fue desarrollado para una formulación convencional de elementos finitos, siendo el primer procedimiento de acotación del error que utiliza estimadores del tipo *recovery*. Los resultados presentados por los autores indican un buen comportamiento de la cota cuando se evalúa para problemas con solución suave. Sin embargo, en problemas singulares la cota superior diverge a medida que aumenta el grado de refinamiento de la malla.

En este capítulo se presenta una mejora de dicha técnica de acotación del error, así como también su aplicación al contexto de los elementos finitos extendidos. De esta manera, se busca poder evaluar con precisión cotas del error exacto en norma energética para problemas singulares de MFEL resueltos mediante XFEM.

La técnica propuesta, al igual que para el caso MEF, está basada en la evaluación de un campo reconstruido de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ *casi-estáticamente admisible* y en la corrección de los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio. Para la evaluación de $\boldsymbol{\sigma}^*$, y con el fin de obtener un campo de tensiones equilibrado, se propone el uso de la técnica SPR-CX. En cuanto a la evaluación de los defectos en el equilibrio se propone una técnica que mejora la técnica de acotación original.

6.2. Tensiones estáticamente admisibles para cotas del error

Sea $\boldsymbol{\sigma}^*$ el campo reconstruido de tensiones. Según se ha indicado en la Sección 4.6 para que el estimador de error de ZZ sea una cota superior se requiere que el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ sea estáticamente admisible y continuo:

$$\|\mathbf{e}\|^2 \leq \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}) = \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h, \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) \quad (6.1)$$

En la técnica presentada por DÍEZ ET AL. (2007) el equilibrio se garantiza a nivel local. En cada patch se utiliza la técnica SPR-C para obtener los polinomios de interpolación de tensiones de manera que se cumplan las ecuaciones de equilibrio interno y equilibrio en el contorno. Posteriormente, se fuerza la continuidad del campo de tensiones para todo el dominio por medio de un procedimiento basado en la Partición de la Unidad. Sin embargo, este procedimiento modifica ligeramente el equilibrio. Como resultado, el campo continuo reconstruido no es exactamente un campo de tensiones estáticamente admisible, proponiéndose por lo tanto evaluar los defectos introducidos en el equilibrio para construir una cota superior del error. En la Ecuación 4.157 se indicó la expresión propuesta en la técnica de acotación original para la evaluación de la cota superior del error $\mathcal{E}_{UB,0}$, definida en función del campo reconstruido de tensiones *casi-estáticamente admisible* y una estimación de los defectos introducidos en el equilibrio:

$$\mathcal{E}_{UB,0} = \sqrt{\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}) + 2\|\mathbf{e}\|_{L_2}\|\mathbf{s}\|_{L_2}} \quad (6.2)$$

Con el fin de lograr que el campo reconstruido de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ sea *casi-estáticamente admisible* cuando se trabaja con una formulación de tipo XFEM, en esta tesis se propone utilizar la técnica SPR-CX. Como se explica en el Capítulo 5, dicha técnica se basa en la adaptación de la técnica SPR-C de RÓDENAS ET AL. (2007) a aproximaciones con elementos finitos enriquecidos (RÓDENAS ET AL., 2008c) utilizadas para resolver problemas singulares de la MFEL.

Para forzar la continuidad del campo reconstruido de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$, la técnica SPR-CX utiliza la propiedad de la Partición de la Unidad para ponderar las contribuciones

correspondientes a cada patch σ_i^* en los puntos de integración. Como se explicó anteriormente, este procedimiento introduce defectos en las ecuaciones de equilibrio, los cuales deben ser cuantificados para la evaluación de la cota superior del error.

6.3. Evaluación de los defectos introducidos en el equilibrio

El procedimiento de reconstrucción del campo de tensiones explicado en el apartado anterior provee de un campo *casi-estáticamente admisible* que no cumple de manera exacta la ecuaciones de equilibrio. No obstante, el campo σ^* verifica una versión modificada de la Ecuación 4.129 que incorpora los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio interno y equilibrio en el contorno:

$$-\nabla \cdot \sigma^* = \mathbf{b} + \mathbf{s} \quad \text{en } \Omega \quad (6.3)$$

$$\sigma^* \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} + \mathbf{r} \quad \text{en } \Gamma_t \quad (6.4)$$

Por lo tanto se puede escribir

$$\begin{aligned} \bar{a}(\sigma^*, \sigma(\mathbf{v})) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{s}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot (\bar{\mathbf{t}} + \mathbf{r}) d\Gamma_t \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \\ \bar{a}(\sigma^*, \sigma(\mathbf{v})) &= l(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (6.5)$$

En las Ecuaciones 6.3 y 6.4, \mathbf{s} y \mathbf{r} son respectivamente los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio interno y equilibrio en el contorno.

Por analogía con las Ecuaciones 4.146 – 4.151 y suponiendo un campo *casi-estáticamente admisible* σ^* tal que existan simultáneamente residuos de equilibrio en el contorno externo \mathbf{r} , en vez de residuos de equilibrio entre elementos, y residuos de equilibrio interno \mathbf{s} , se puede expresar la relación con la norma energética del campo solución del problema elástico $\|\mathbf{u}\|$ como:

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \bar{a}(\sigma^*, \sigma^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \quad (6.6)$$

La expresión anterior se puede escribir de forma similar para el error estimado en tensiones definido como $\mathbf{e}_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma^h$:

$$\|\mathbf{e}\|^2 \leq \bar{a}(\mathbf{e}_{\sigma}^*, \mathbf{e}_{\sigma}^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t = \mathcal{E}_{UB}^2 \quad (6.7)$$

Una demostración matemática de las expresiones anteriores fue elaborada por el profesor Pedro Díez del laboratorio LaCaN de la Universidad Politécnica de Cataluña.

Reemplazando \mathbf{v} por \mathbf{u} en la Ecuación 6.5 se escribe:

$$\begin{aligned}\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) &= l(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \\ &= \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t\end{aligned}$$

de donde se puede escribir

$$\begin{aligned}0 \leq \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}^*) &= \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - 2\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \\ &= -\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} d\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \\ &\quad + \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)\end{aligned}$$

verificando la Ecuación 6.6. Si ahora se considera $\mathbf{v} = \mathbf{e}$ en la Ecuación 6.5

$$\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) = l(\mathbf{e}) + \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t$$

y dado que el error $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ cumple

$$\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) = l(\mathbf{v}) - \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \quad (6.8)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) &= \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) + \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) + \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \\ \bar{a}(\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) &= \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) + \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t\end{aligned} \quad (6.9)$$

Considerando que $\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*)$ debe ser positivo, se comprueba finalmente la validez de la expresión para la cota indicada en la Ecuación 6.7:

$$\begin{aligned}0 \leq \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) &= \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) - 2\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) + \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) \\ 0 \leq -\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t + \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*)\end{aligned} \quad (6.10)$$

La estimación \mathcal{E}_{UB} se define como una cota superior del error *teórica*, de la cual resta calcular su versión *computable*¹ $\mathcal{E}_{UB,2}$. En la Ecuación 6.7, el valor del residuo debido a la pérdida de equilibrio interno \mathbf{s} se calcula de forma similar a la utilizada en la técnica de acotación original para aproximaciones convencionales de EF. Para ello se emplea la expresión vista anteriormente en la Ecuación 4.156

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n_v} (\boldsymbol{\sigma}_A^* - \boldsymbol{\sigma}_i^*) \cdot \nabla N_i$$

¹Recordar que, según STROUBOULIS ET AL. (2006), se puede distinguir entre cotas superiores del error *teóricas* y sus correspondientes versiones *computables*. En algunos casos, es posible obtener una cota *teórica* con un índice de efectividad superior a la unidad, mientras que su versión *computable* puede subestimar el error exacto.

El defecto que representa el residuo de la ecuación de equilibrio en el contorno \mathbf{r} es evaluable mediante la expresión:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} = \sum_{i=1}^{n_v} (N_i \boldsymbol{\sigma}_i^*) \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} = \sum_{i=1}^{n_v} N_i (\boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}) \quad (6.11)$$

En la técnica de acotación original se propone la evaluación de una cota superior del error $\mathcal{E}_{UB,0}$ obtenida después de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz (ver Ecuación 4.157), y que aproxima el término que representa el defecto de equilibrio interno mediante el producto de normas L_2 definidas para \mathbf{e} y \mathbf{s} . La técnica presentada en este trabajo propone evaluar directamente la cota superior del error \mathcal{E}_{UB} sin recurrir al uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la cual introduce una aproximación muy pesimista según se muestra en los ejemplos numéricos más adelante.

En la Ecuación 6.7 el error en desplazamientos \mathbf{e} se define para cualquier punto de la malla. Con el fin de evaluar el error \mathbf{e} se asume una secuencia de mallas. Posteriormente, se recurre a un procedimiento que proyecta la solución de la malla más fina, la cual se considera la aproximación más precisa de la solución exacta, sobre cada una de las otras mallas de la secuencia. Dicho procedimiento se corresponde con el planteamiento indicado en la Ecuación 4.158 para el caso de aproximaciones de EF estándar:

$$\mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{(i)}^h \approx \mathbf{u}_{(N)}^h - \mathbf{u}_{(i)}^h$$

El error en desplazamientos \mathbf{e} se calcula en los puntos de integración donde se evalúan las tensiones para evaluar el término que corresponde a la pérdida de equilibrio interno $-2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega$. Además, es necesario proyectar el error \mathbf{e} en puntos sobre el contorno para desarrollar las integrales de línea correspondientes al término que representa la pérdida de equilibrio en el contorno $-2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t$.

Para evaluar el valor de las integrales de los defectos del equilibrio en la última malla de la secuencia N es posible extrapolar el error en desplazamientos $\mathbf{e}_{(N)}$ utilizando los procedimientos indicados en la Sección 4.6. No obstante, un procedimiento que ha probado ser más eficaz es extrapolar directamente el valor de la integral a partir de los valores evaluados para las dos mallas anteriores en la secuencia. Considérese el caso de la integral del defecto debido a la pérdida de equilibrio interno. En este caso la integral para la última malla queda definida como:

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \right)_{(N)} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \right)_{(N-1)} \left(\frac{(n_{\text{gdI}})_{(N)}}{(n_{\text{gdI}})_{(N-1)}} \right)^p \quad (6.12)$$

$$\text{con } p = \frac{\log \left(\left| \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \right|_{(N-1)} / \left| \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \right|_{(N-2)} \right)}{\log \left((n_{\text{gdI}})_{(N-1)} / (n_{\text{gdI}})_{(N-2)} \right)}$$

De forma análoga es posible evaluar la integral $\left(\int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \right)_{(N)}$.

Debido a que la evaluación del error en desplazamientos \mathbf{e} introduce una aproximación, no se puede garantizar la propiedad de cota superior en la versión *computable* de la

cota definida en la Ecuación 6.7. Sin embargo, en los ejemplos numéricos presentados más adelante se comprobará que la técnica de proyección del error es bastante precisa, con lo cual se consiguen evaluar términos para corregir el equilibrio de muy buena calidad, habiéndose obtenido en casi todos los casos valores de la cota superior mayores al error exacto.

En la Tabla 6.1 se resume el procedimiento para el cálculo de la cota superior del error $\mathcal{E}_{UB,2}$ usando el estimador del error basado en la reconstrucción de la solución adaptado para XFEM expuesto en el capítulo anterior, y considerando los defectos que aparecen tanto en la ecuación de equilibrio interno como en la ecuación de equilibrio en el contorno.

6.4. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los análisis numéricos realizados para verificar el comportamiento de la técnica de estimación de cotas superiores del error propuesta para aproximaciones del tipo XFEM. De manera semejante a los resultados presentados en la Sección 5.3, se ha empleado un problema de MFEL con solución analítica exacta en modo mixto. En el Anexo A se muestra la adaptación de la técnica propuesta para problemas singulares resueltos mediante el MEF y su comportamiento numérico.

El problema escogido es el problema de Westergaard de una placa infinita sometida a tensiones biaxiales $\sigma_{x\infty} = \sigma_{y\infty} = \sigma_\infty$ y τ_∞ en el infinito, con una grieta de longitud finita $2a$ como se indica en la Sección 5.3.1.

Para el ajuste polinómico de las tensiones en los patches formados en nodos ubicados en el interior del dominio, se han utilizado polinomios lineales. Para la reconstrucción de las tensiones en los patches sobre el contorno y sobre las caras de grieta se han utilizado polinomios de grado cuadrático.

Los problemas han sido modelados usando un área de descomposición *singular+suave* de radio $\rho = 0.5$ igual al radio r_e del área fija de enriquecimiento. El radio de la función Plateau para la extracción del FIT es $r_q = 0.9$. El módulo de elasticidad del material utilizado es $E = 10^7$, y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.333$.

Con el propósito de analizar el comportamiento de la efectividad de la cota frente a distintas configuraciones de carga se han considerado tres estados de tensión para el problema de Westergaard: modo I puro, modo II puro y modo mixto. Los modelos geométricos y las condiciones de contorno aplicadas se muestran en las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 de la Sección 5.3.

Se han implementado varias técnicas para la evaluación de la cota superior de la norma energética del error. La primera es la técnica de acotación original desarrollada por DÍEZ ET AL. (2007), cuya expresión indicada en la Ecuación 6.2 se retoma a continuación:

$$\mathcal{E}_{UB,0}^2 = \bar{a}(\mathbf{e}_\sigma^*, \mathbf{e}_\sigma^*) + 2\|\mathbf{e}\|_{L_2}\|\mathbf{s}\|_{L_2}$$

TABLA 6.1. Algoritmo para el cálculo de cotas superiores del error en una secuencia de mallas XFEM

1. Aplicar la técnica de reconstrucción de tensiones SPR-CX para obtener un campo reconstruido de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ continuo y *casi-estáticamente admisible*.
 - a) Evaluar el campo reconstruido de tensiones que representa la parte singular $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sing}}^*$ usando los FIT extraídos de la solución de XFEM y la Ecuación 2.24.
 - b) Definir el área de descomposición *singular+suave*.
 - c) SI el patch esta dentro del área de descomposición \Rightarrow
 - 1) Evaluar una representación discreta de la parte suave:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{smo}}^h \approx \boldsymbol{\sigma}^h - \boldsymbol{\sigma}_{\text{sing}}^*$$
 - 2) Utilizar la técnica SPR-C para evaluar $\boldsymbol{\sigma}_{\text{smo},i}^*$.
 - 3) Evaluar el campo localmente equilibrado en el patch como:

$$\boldsymbol{\sigma}_i^* = \boldsymbol{\sigma}_{\text{smo},i}^* + \boldsymbol{\sigma}_{\text{sing}}^*$$
 - d) SI el patch esta fuera del área de descomposición \Rightarrow usar la técnica SPR-C.
 - e) Evaluar el campo reconstruido continuo y *casi-estáticamente admisible*:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_v} N_i(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^*(\mathbf{x})$$

2. Evaluar los defectos introducidos en el equilibrio \mathbf{s} y \mathbf{r} como:

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n_v} (\boldsymbol{\sigma}_A^* - \boldsymbol{\sigma}_i^*) \cdot \nabla N_i, \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n_v} N_i (\boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}})$$

3. Evaluar la estimación de la norma energética del error usando el campo reconstruido del Paso 1: $\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*)$.
4. Evaluar el error en desplazamientos \mathbf{e} proyectando la solución de una malla muy fina.
5. Evaluar la cota superior del error:

$$\mathcal{E}_{\text{UB},2} = \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \text{sd}\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \text{rd}\Gamma_t$$

La segunda técnica es la propuesta en este trabajo en la Ecuación 6.7, y cuya expresión se muestra a continuación por conveniencia:

$$\mathcal{E}_{\text{UB}}^2 = \bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \text{sd}\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \text{rd}\Gamma_t$$

6.4.1. Precisión de la cota superior del error $\mathcal{E}_{UB,0}$

En la Figura 6.1 se muestran los resultados del índice de efectividad global θ , indicado en la Ecuación 4.13, obtenido para el problema de Westergaard en modos I, II y modo mixto en secuencias de mallas estructuradas y no estructuradas de elementos cuadriláteros lineales. Se representan las curvas de efectividad para el error estimado en norma energética \mathcal{E}_{SPR-CX} obtenido usando la técnica de reconstrucción SPRC-X, y para la cota superior del error $\mathcal{E}_{UB,0}$ frente al número de grados de libertad.

Los resultados obtenidos son de un nivel de precisión similar a los resultados mostrados por DÍEZ ET AL. (2007) para cotas superiores del error evaluadas en el entorno del MEF en problemas con solución suave. En particular, se observa que aunque la cota superior del error cumple con $\mathcal{E}_{UB,0} \geq \|e\|$, esta resulta en una estimación demasiado conservadora del error exacto, con efectividades dentro del rango [1.06, 1.80] para mallas estructuradas y [1.05, 2.16] para mallas no estructuradas. Los valores de efectividad de la cota del error para problemas singulares presentados en DÍEZ ET AL. (2007) alcanzaban valores mucho más altos (hasta 339), ya que la efectividad no convergía para este tipo de problemas debido a la intensidad de la singularidad.

6.4.2. Precisión de la cota superior del error \mathcal{E}_{UB}

En la Figura 6.2 se representan la evolución de la efectividad del error estimado mediante la técnica SPR-CX \mathcal{E}_{SPR-CX} , y la evolución de la efectividad de la cota superior del error \mathcal{E}_{UB} obtenida a partir de la Ecuación 6.7, para el problema de Westergaard en modos I, II y modo mixto. Para evaluar \mathcal{E}_{UB} se ha utilizado el valor exacto del error en desplazamientos e , calculado a partir del campo exacto de desplazamientos para el problema de Westergaard indicado en la Ecuaciones 5.13 y 5.14.

En la Figura 6.1 los valores de efectividad para la cota $\mathcal{E}_{UB,0}$ en mallas estructuradas se ubican dentro del rango [1.06, 1.80], mientras que los resultados de efectividad obtenidos para la cota \mathcal{E}_{UB} mostrados en la Figura 6.2 indican unos valores mucho más precisos. Los valores de efectividad para \mathcal{E}_{UB} se ajustan más al valor teórico de 1, encontrándose dentro del rango [1, 1.03] para la misma secuencia de mallas estructuradas. Además, se puede observar que la efectividad de la cota \mathcal{E}_{UB} es del mismo orden de magnitud que la efectividad obtenida para la estimación del error \mathcal{E}_{SPR-CX} .

La pérdida de precisión de los resultados para la cota del error $\mathcal{E}_{UB,0}$, definida en la Ecuación 6.2, se explica sobre todo por el uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la cual resulta demasiado conservadora y penaliza considerablemente la evaluación de la cota superior del error.

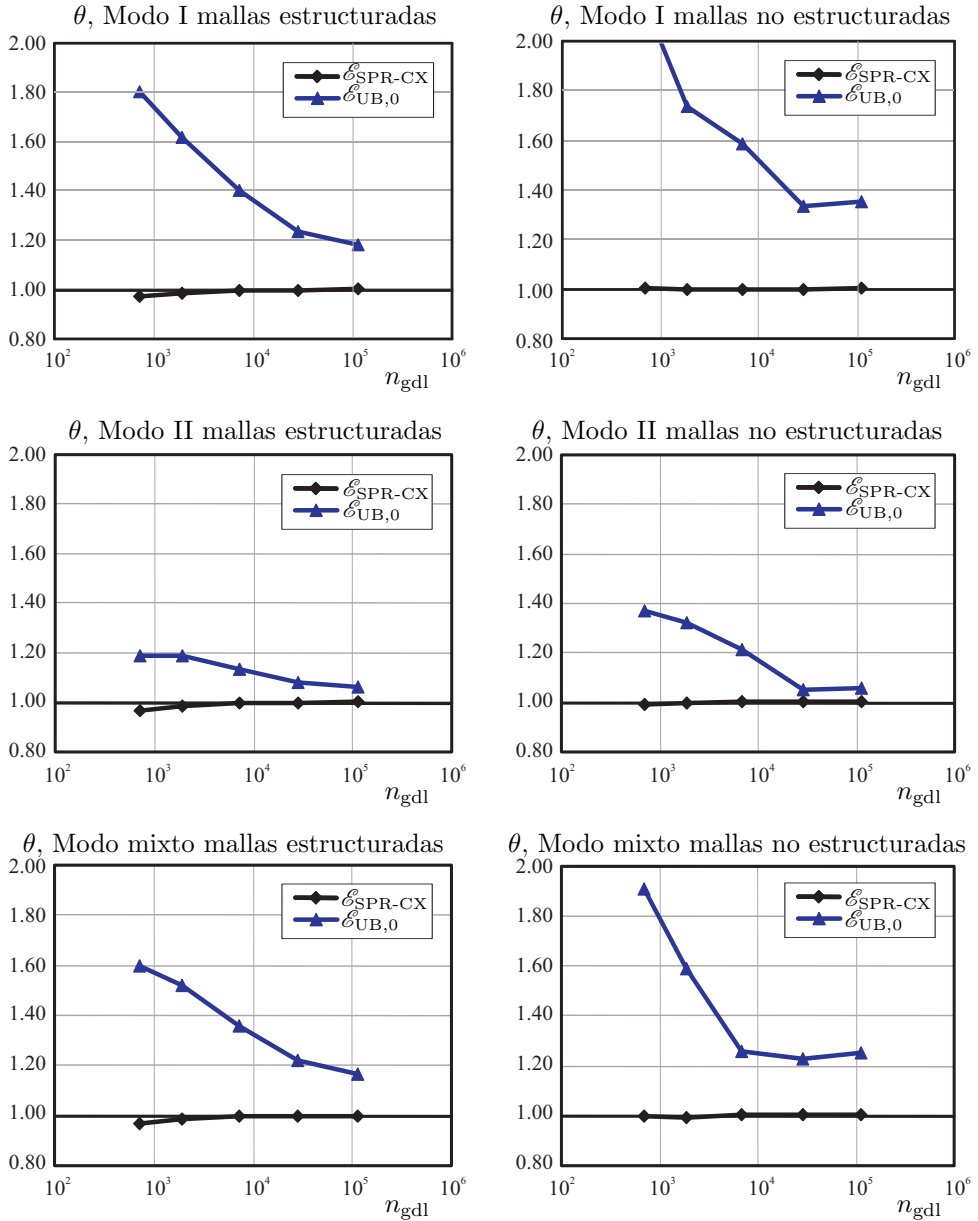


FIGURA 6.1. Evolución del estimador del error y la cota superior $\mathcal{E}_{\text{UB},0}$ para modos I, II y modo mixto. CUAD4 en mallas estructuradas (izq.) y mallas no estructuradas (der.).

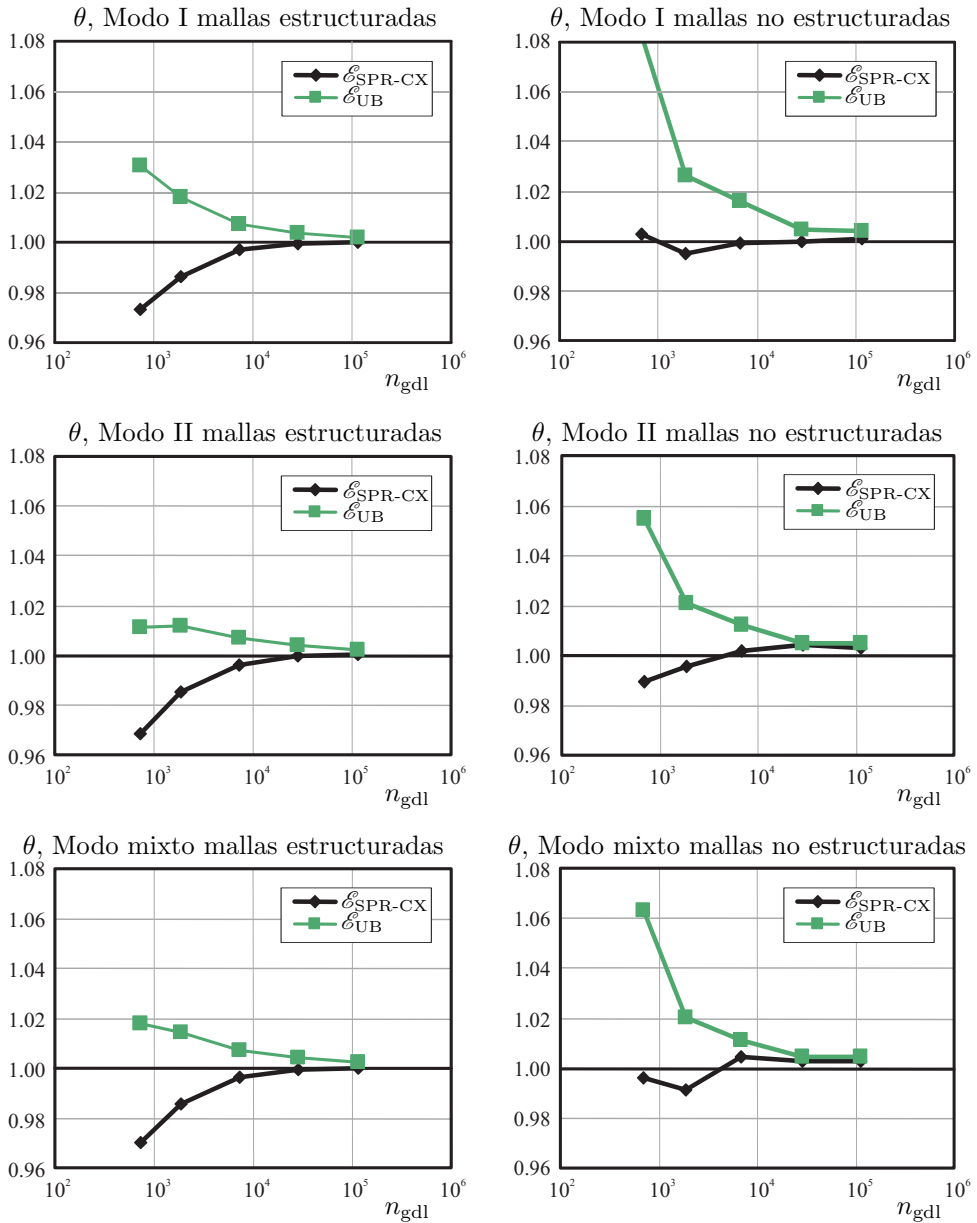


FIGURA 6.2. Evolución de las efectividades para el estimador del error, $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$, y la cota superior \mathcal{E}_{UB} usando el campo exacto del error en desplazamientos, para modos I, II y modo mixto. CUAD4 en mallas estructuradas (izq.) y mallas no estructuradas (der.).

6.4.3. Efecto de los términos correctores de la falta de equilibrio

En este apartado se analiza el efecto de las integrales usadas para evaluar los defectos introducidos en el equilibrio del campo σ^* sobre la estimación de la cota \mathcal{E}_{UB} indicada

en la Ecuación 6.7. En la expresión, los términos $-2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega$ y $-2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t$ corrigen respectivamente la pérdida de equilibrio interno y de equilibrio en el contorno. La Figura 6.3 representa en escala logarítmica la evolución de los valores absolutos de los términos correctores frente al número de grados de libertad para secuencias de mallas estructuradas y no estructuradas en modos I, II y modo mixto. Los términos correctores se calculan utilizando el error exacto en desplazamientos \mathbf{e} y el error estimado mediante una técnica de proyección \mathbf{e}_{es} , según se indicó en la Ecuación 4.158.

En primer lugar, en la Figura 6.3 se puede observar que los resultados conseguidos para los términos correctores evaluados mediante el error estimado \mathbf{e}_{es} reproducen con bastante precisión los resultados obtenidos usando el error exacto \mathbf{e} . Esto valida la técnica de proyección utilizada para evaluar el error estimado \mathbf{e}_{es} a partir de la solución obtenida en una malla muy fina de una secuencia de mallas refinadas. Tanto para el caso de mallas estructuradas, como para las mallas no estructuradas, se observa una ligera diferencia entre el error estimado y el error exacto calculados para la última malla de la secuencia. Esto se debe a que la técnica de extrapolación usada para evaluar el error estimado en desplazamientos para la última malla resulta menos precisa que la técnica de proyección utilizada en el resto de mallas.

Asimismo, en la Figura 6.3 se observa que el término correspondiente a la pérdida de equilibrio en el contorno, el cual está asociado a la integral $\int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t$, es inferior en más de un orden de magnitud al término relacionado con la pérdida de equilibrio interno, asociado a la integral $\int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega$. Por lo tanto, es posible disminuir el coste computacional del cálculo de la cota superior si se considera que la integral en el contorno $\int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t \approx 0$. De esta manera, es posible reescribir la expresión para la cota superior de la Ecuación 6.7 definiendo una nueva cota $\mathcal{E}_{UB,1}$:

$$\mathcal{E}_{UB,1}^2 = \bar{a}(\mathbf{e}_{\sigma}^*, \mathbf{e}_{\sigma}^*) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega \quad (6.13)$$

Notar que el valor de la integral $\int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t$ puede ser considerado despreciable debido a que el residuo del equilibrio que aparece en el contorno, \mathbf{r} , es muy pequeño. Esto se justifica basándose en el hecho de que la aproximación de la técnica SPR-CX en el contorno resulta bastante precisa. La técnica de reconstrucción SPR-CX garantiza que la tensión σ^* representa exactamente una expansión de Taylor de segundo orden para las tensiones aplicadas sobre el contorno. De hecho, para las caras de grieta libres de carga se garantiza de manera exacta el cumplimiento del equilibrio en el contorno, asumiendo que ambas caras no estén en contacto.

Por otro lado, la distribución de tensiones del problema de Westergaard de las Ecuaciones 5.10 y 5.11 no se puede representar exactamente mediante un polinomio de grado dos, existiendo por lo tanto un residuo de equilibrio en el contorno. Sin embargo, cabe destacar que en la mayoría de casos prácticos no suelen utilizarse funciones de carga tan complejas y, en general, la técnica SPR-CX puede aproximar de manera exacta las tensiones aplicadas en el contorno. En caso de utilizarse una técnica de reconstrucción que no impusiese el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio en

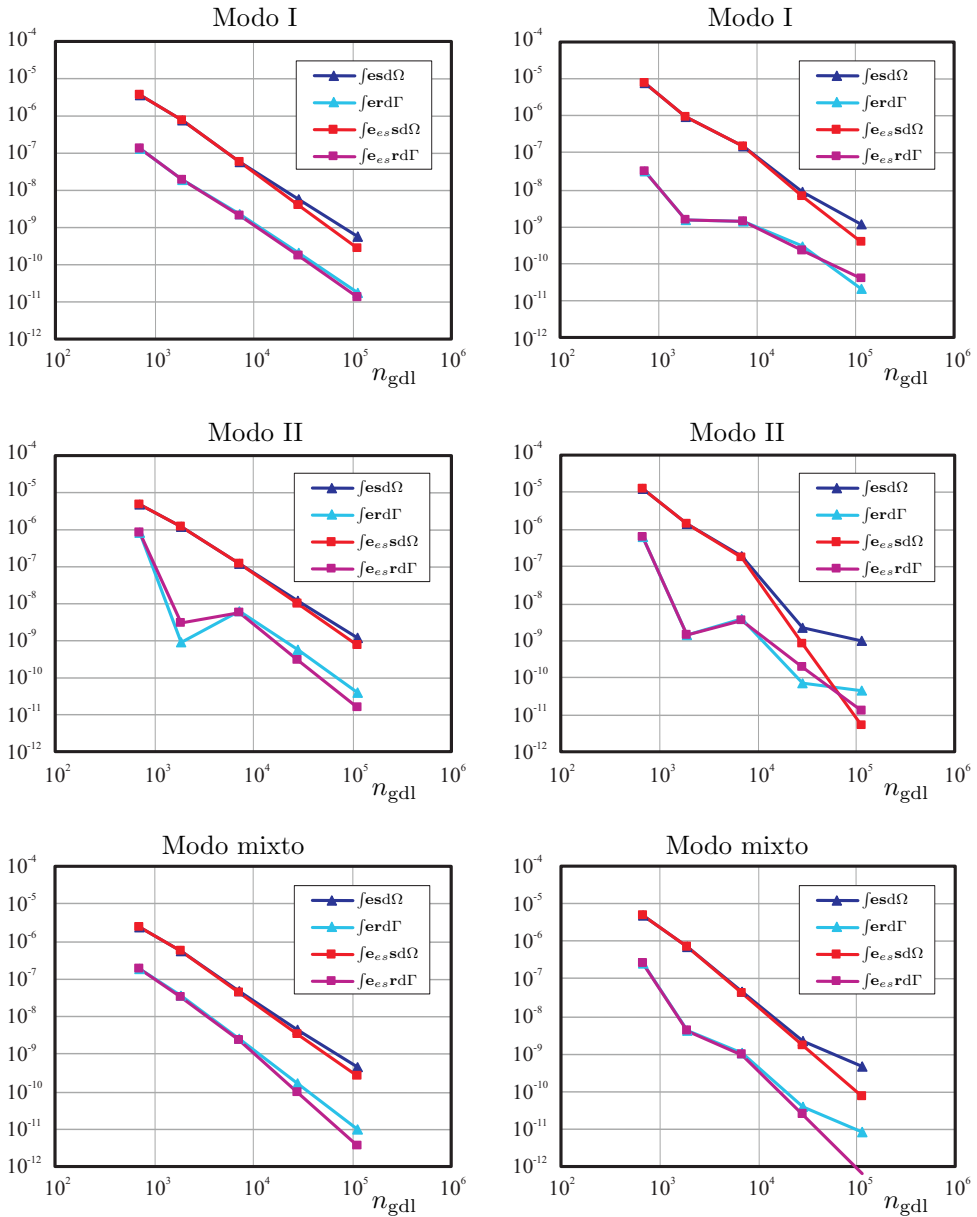


FIGURA 6.3. Evolución del valor absoluto de los términos correctores del equilibrio en modos I, II y modo mixto. CUAD₄ en mallas estructuradas (izq.) y mallas no estructuradas (der.).

el contorno se ha de esperar un aumento del residuo en el contorno y, por lo tanto, resulta necesario evaluar el término $\int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{rd}\Gamma_t$.

6.4.4. Efectividad de la cota superior $\mathcal{E}_{UB,2}$

En este apartado se estudia la precisión de la versión *computable* $\mathcal{E}_{UB,2}$ de la cota superior del error de discretización definida en la Ecuación 6.7. Se evalúa el índice de efectividad global θ para las secuencias de mallas estructuradas y no estructuradas con elementos cuadriláteros lineales de las Figuras 5.7 y 5.8, así como también para las mallas con triángulos lineales de las Figuras 5.9 y 5.10. Se ha considerado el problema de Westergaard bajo distintos modos de carga: modo I, modo II y modo mixto expuesto en la Sección 5.3.1.

En las gráficas de la Figura 6.4 para elementos CUAD4 se han representado tres curvas de efectividad frente al número de grados de libertad. La curva \mathcal{E}_{SPR-CX} representa la efectividad del error estimado obtenido mediante la técnica de reconstrucción SPR-CX. La curva \mathcal{E}_{UB} representa la efectividad de la cota superior definida en la Ecuación 6.7, utilizando el error exacto en el campo de desplazamientos \mathbf{e} . La curva $\mathcal{E}_{UB,2}$ representa la efectividad de la cota superior del error evaluada a partir de la Ecuación 6.7 y el error estimado en desplazamientos \mathbf{e}_{es} , siguiendo el procedimiento indicado anteriormente.

En la Figura 6.4, las curvas para \mathcal{E}_{SPR-CX} muestran el buen comportamiento del estimador del error cuando se emplea la técnica de reconstrucción SPR-CX para evaluar el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$. Se observa que los resultados para todas las mallas denotan una clara convergencia al valor $\theta = 1$. Si bien el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ es bastante preciso, el error estimado \mathcal{E}_{SPR-CX} no puede ser considerado por sí mismo una cota superior al no ser un campo completamente equilibrado.

Las curvas que representan la cota superior \mathcal{E}_{UB} indican que, para los problemas analizados, la Ecuación 6.7 siempre proporciona una cota superior del error de discretización en norma energética.

Los valores de efectividad para la cota superior $\mathcal{E}_{UB,2}$ reproducen de manera precisa los resultados de \mathcal{E}_{UB} . La información representada concuerda con los resultados mostrados en la Figura 6.3, y validan la técnica de proyección utilizada para estimar el error en desplazamientos al obtenerse valores de efectividad para la cota superior muy similares a los de la solución con el error exacto \mathbf{e} .

En la Figura 6.5 se muestran los resultados de efectividad para las secuencias de mallas con elementos triangulares lineales TRI3 de las Figuras 5.9 y 5.10 en los tres modos de carga: modo I, modo II y modo mixto. En primer lugar, se observa que los valores de efectividad para el estimador del error son de peor calidad que para el caso de elementos cuadriláteros lineales. Dicho comportamiento se puede asociar con la pérdida de calidad de la solución de XFEM debida a la menor precisión de los elementos triangulares lineales.

Al igual que para el caso de mallas con elementos CUAD4, la efectividad de la cota superior θ_{UB} verifica que \mathcal{E}_{UB} cumple con la propiedad $\mathcal{E}_{UB} \geq \|\mathbf{e}\|$. Sin embargo, se puede observar que para la cota $\mathcal{E}_{UB,2}$ la efectividad alcanza en algunos casos valores menores que la unidad para la última malla de la secuencia. Además, para las mallas

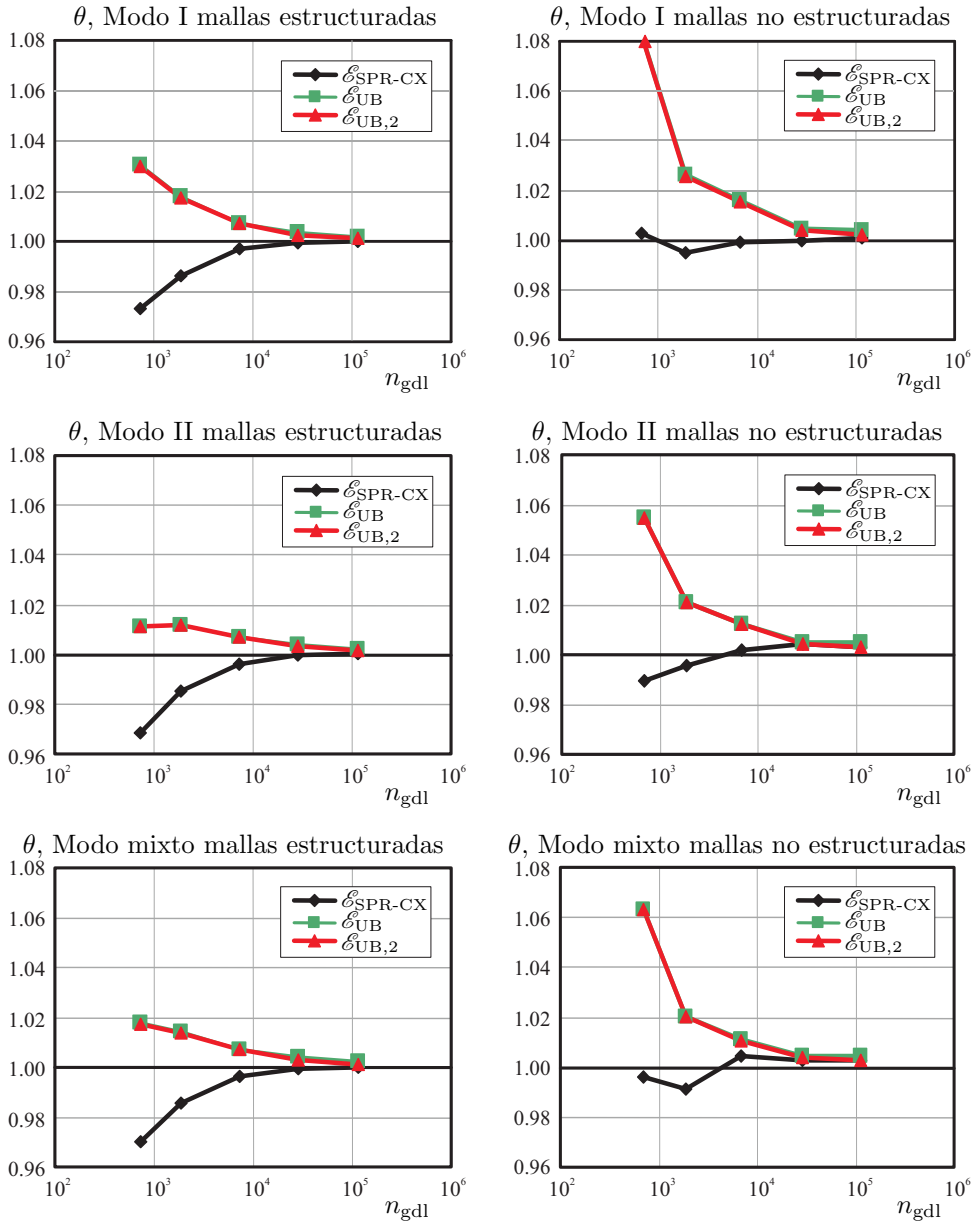


FIGURA 6.4. Modos I, II y mixto para mallas estructuradas y no estructuradas, $CUAD_4$. Evolución del índice de efectividad global para el error estimado \mathcal{E}_{SPR-CX} , y las cotas superiores del error \mathcal{E}_{UB} y $\mathcal{E}_{UB,2}$.

más finas la efectividad de $\mathcal{E}_{UB,2}$ no coincide con la efectividad de la cota \mathcal{E}_{UB} . Como la única diferencia entre las expresiones utilizadas para evaluar \mathcal{E}_{UB} y $\mathcal{E}_{UB,2}$ es el valor del error exacto en desplazamientos, se puede inferir que dicho comportamiento se

debe a una deficiencia de la técnica de proyección, asociada a la calidad de la solución de referencia de la malla más fina.

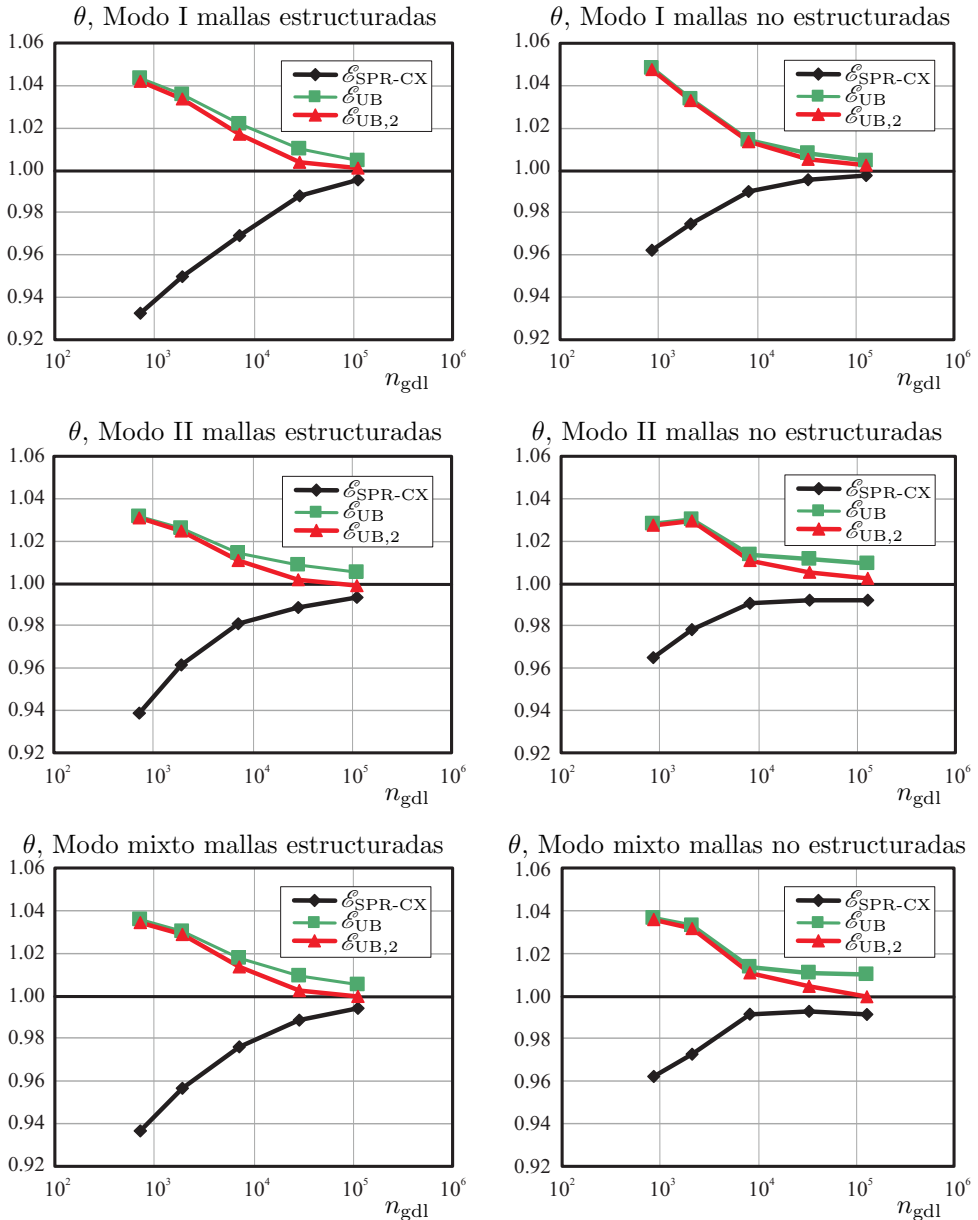


FIGURA 6.5. Modos I, II y mixto para mallas estructuradas y no estructuradas, TRI3. Evolución del índice de efectividad global para el error estimado \mathcal{E}_{SPR-CX} , y las cotas superiores del error \mathcal{E}_{UB} y $\mathcal{E}_{UB,2}$.

En las Tablas 6.2 y 6.3 se resumen los resultados de efectividades para las cotas

superiores del error usando elementos CUAD4. Destaca en las tablas la alta precisión obtenida para las cotas superiores del error propuestas en este capítulo. Además, se puede observar que tanto la cota $\mathcal{E}_{UB,1}$ como la cota $\mathcal{E}_{UB,2}$ se aproximan bastante a la cota \mathcal{E}_{UB} , siendo una opción más favorable desde el punto de vista del costo computacional el cálculo de la cota $\mathcal{E}_{UB,1}$, ya que se evita la evaluación del residuo del equilibrio en el contorno.

TABLA 6.2. *Mallas estructuradas con elementos CUAD4. Efectividades para el estimador del error \mathcal{E}_{SPR-CX} y las cotas superiores $\theta_{UB,0}$, θ_{UB} , $\theta_{UB,1}$ y $\theta_{UB,2}$.*

MODO I					
n_{gdl}	θ_{SPR-CX}	$\theta_{UB,0}$	θ_{UB}	$\theta_{UB,1}$	$\theta_{UB,2}$
723	0.97329	1.80270	1.03015	1.02801	1.03000
1895	0.98631	1.61919	1.01774	1.01662	1.01738
7289	0.99689	1.40253	1.00738	1.00656	1.00691
28637	0.99951	1.23745	1.00353	1.00221	1.00233
113477	1.00017	1.18488	1.00176	1.00091	1.00095
MODO II					
n_{gdl}	θ_{SPR-CX}	$\theta_{UB,0}$	θ_{UB}	$\theta_{UB,1}$	$\theta_{UB,2}$
723	0.96847	1.19101	1.01123	1.00479	1.01108
1895	0.98517	1.18895	1.01213	1.01193	1.01200
7289	0.99645	1.13197	1.00733	1.00736	1.00683
28637	0.99960	1.08069	1.00432	1.00345	1.00333
113477	1.00033	1.06197	1.00239	1.00167	1.00165
MODO MIXTO					
n_{gdl}	θ_{SPR-CX}	$\theta_{UB,0}$	θ_{UB}	$\theta_{UB,1}$	$\theta_{UB,2}$
723	0.97011	1.59822	1.01769	1.02113	1.01753
1895	0.98556	1.52230	1.01407	1.01576	1.01385
7289	0.99665	1.35997	1.00739	1.00748	1.00690
28637	0.99958	1.21952	1.00403	1.00306	1.00297
113477	1.00027	1.16884	1.00215	1.00137	1.00136

En la Tabla 6.4 se muestran los resultados de las efectividades para el estimador del error \mathcal{E}_{SPR-CX} y las cotas superiores del error usando mallas estructuradas de elementos TRI3 para el problema en modo I, modo II y modo mixto. La Tabla 6.5 contiene los resultados para el caso de mallas no estructuradas.

TABLA 6.3. *Mallas no estructuradas con elementos CUAD4. Efectividades para el estimador del error $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$ y las cotas superiores $\theta_{\text{UB},0}$, θ_{UB} , $\theta_{\text{UB},1}$ y $\theta_{\text{UB},2}$.*

MODO I					
n_{gdl}	$\theta_{\text{SPR-CX}}$	$\theta_{\text{UB},0}$	θ_{UB}	$\theta_{\text{UB},1}$	$\theta_{\text{UB},2}$
689	1.00291	2.16882	1.08361	1.08311	1.08344
1907	0.99512	1.73743	1.02618	1.02571	1.02576
6779	0.99925	1.58492	1.01614	1.01557	1.01572
28767	0.99989	1.33451	1.00475	1.00377	1.00390
113991	1.00127	1.35425	1.00415	1.00214	1.00224
MODO II					
n_{gdl}	$\theta_{\text{SPR-CX}}$	$\theta_{\text{UB},0}$	θ_{UB}	$\theta_{\text{UB},1}$	$\theta_{\text{UB},2}$
689	0.98942	1.37230	1.05489	1.05799	1.05480
1907	0.99586	1.32456	1.02100	1.02081	1.02084
6779	1.00196	1.21113	1.01248	1.01246	1.01225
28767	1.00413	1.05319	1.00491	1.00443	1.00450
113991	1.00334	1.05651	1.00506	1.00335	1.00337
MODO MIXTO					
n_{gdl}	$\theta_{\text{SPR-CX}}$	$\theta_{\text{UB},0}$	θ_{UB}	$\theta_{\text{UB},1}$	$\theta_{\text{UB},2}$
689	0.99622	1.91041	1.06305	1.06672	1.06297
1907	0.99110	1.58721	1.02052	1.02048	1.02032
6779	1.00435	1.26065	1.01105	1.01095	1.01080
28767	1.00257	1.22912	1.00452	1.00407	1.00409
113991	1.00278	1.25152	1.00476	1.00310	1.00311

6.4.5. Estimación de error de la solución reconstruida

El error exacto en norma energética de la solución reconstruida $\|\mathbf{e}^*\|$ se puede expresar como:

$$\|\mathbf{e}^*\|^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \, d\Omega \quad (6.14)$$

En este apartado se plantea un procedimiento para estimar el error en norma energética de la solución reconstruida $\boldsymbol{\sigma}^*$ a partir de la evaluación de los defectos introducidos en el equilibrio vistos anteriormente en la Sección 6.3.

En primer lugar, se deber recordar que el defecto de equilibrio en el contorno cuando se utiliza la técnica SPR-CX es muy inferior al defecto de equilibrio interno. Por lo tanto, solo se considerará el defecto introducido en la ecuación de equilibrio interno:

$$\mathcal{E} = - \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{e} \, d\Omega \quad (6.15)$$

TABLA 6.4. *Mallas estructuradas con elementos TRI3. Efectividades para el estimador del error \mathcal{E}_{SPR-CX} y las cotas superiores $\theta_{UB,0}$, θ_{UB} , $\theta_{UB,1}$ y $\theta_{UB,2}$.*

MODO I					
n_{gdl}	θ_{SPR-CX}	$\theta_{UB,0}$	θ_{UB}	$\theta_{UB,1}$	$\theta_{UB,2}$
723	0.93280	1.96807	1.04314	1.04197	1.04175
1893	0.94508	2.00675	1.03748	1.03533	1.03529
7281	0.97127	1.99829	1.02136	1.01681	1.01680
28619	0.98628	1.78056	1.01080	1.00343	1.00343
113439	0.99198	1.71865	1.00640	0.99870	0.99870
MODO II					
n_{gdl}	θ_{SPR-CX}	$\theta_{UB,0}$	θ_{UB}	$\theta_{UB,1}$	$\theta_{UB,2}$
723	0.93897	1.28118	1.03193	1.03078	1.03070
1893	0.96328	1.28950	1.02349	1.02201	1.02201
7281	0.98275	1.27324	1.01199	1.00964	1.00964
28619	0.99016	1.22018	1.00699	1.00462	1.00462
113439	0.99346	1.19442	1.00480	1.00161	1.00161
MODO MIXTO					
n_{gdl}	θ_{SPR-CX}	$\theta_{UB,0}$	θ_{UB}	$\theta_{UB,1}$	$\theta_{UB,2}$
723	0.93655	1.76561	1.03552	1.03428	1.03424
1893	0.95581	1.79253	1.02962	1.02782	1.02783
7281	0.97781	1.80514	1.01636	1.01301	1.01296
28619	0.98847	1.62874	1.00878	1.00431	1.00431
113439	0.99282	1.56747	1.00554	1.00028	1.00028

donde \mathbf{s} representa el defecto introducido en la Ecuación 6.3:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{b} + \mathbf{s} \quad \text{en } \Omega$$

A fin de obtener una estimación válida de la norma $\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\|$ se propone verificar el cumplimiento de la siguiente igualdad:

$$\mathcal{E}^* = - \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}^* d\Omega = \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\|^2 \quad (6.16)$$

siendo $\mathbf{e}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$ el error exacto de un campo de desplazamientos \mathbf{u}^* definido tal que $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*)$. Notar que tanto \mathbf{u}^* como \mathbf{e}^* no se evalúan de manera explícita.

A continuación se presenta la demostración de la Ecuación 6.16, la cual ha sido elaborada por el profesor Pedro Díez del laboratorio LaCaN de la Universidad Politécnica de Cataluña. Dicha demostración ha sido desarrollada dentro del marco de colaboración con el grupo de investigación de la UPV, y presentada en RÓDENAS ET AL.

TABLA 6.5. *Mallas no estructuradas con elementos TRI3. Efectividades para el estimador del error $\mathcal{E}_{\text{SPR-CX}}$ y las cotas superiores $\theta_{\text{UB},0}$, θ_{UB} , $\theta_{\text{UB},1}$ y $\theta_{\text{UB},2}$.*

MODO I					
n_{gdl}	$\theta_{\text{SPR-CX}}$	$\theta_{\text{UB},0}$	θ_{UB}	$\theta_{\text{UB},1}$	$\theta_{\text{UB},2}$
859	0.96203	2.14766	1.04794	1.04754	1.04751
2145	0.97506	2.19754	1.03346	1.03284	1.03284
8339	0.98976	1.77142	1.01457	1.01340	1.01340
32831	0.99526	1.52659	1.00829	1.00538	1.00538
130439	0.99745	1.38771	1.00456	1.00236	1.00236
MODO II					
n_{gdl}	$\theta_{\text{SPR-CX}}$	$\theta_{\text{UB},0}$	θ_{UB}	$\theta_{\text{UB},1}$	$\theta_{\text{UB},2}$
859	0.96529	1.35489	1.02832	1.02756	1.02759
2145	0.97791	1.34829	1.03030	1.02924	1.02925
8339	0.99066	1.19263	1.01323	1.01081	1.01081
32831	0.99191	1.14878	1.01116	1.00549	1.00549
130439	0.99215	1.13315	1.00925	1.00247	1.00247
MODO MIXTO					
n_{gdl}	$\theta_{\text{SPR-CX}}$	$\theta_{\text{UB},0}$	θ_{UB}	$\theta_{\text{UB},1}$	$\theta_{\text{UB},2}$
859	0.96244	1.86554	1.03658	1.03563	1.03577
2145	0.97264	1.91966	1.03275	1.03154	1.03157
8339	0.99154	1.53444	1.01352	1.01087	1.01088
32831	0.99265	1.34945	1.01073	1.00443	1.00443
130439	0.99168	1.31310	1.00991	0.99988	0.99988

(2008a). Se desarrolla la integral de la Ecuación 6.16 tal que:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}^* d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}^* d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}^* d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}^*)) \cdot \mathbf{e}^* d\Omega \\
 &= - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{e}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}^*) \cdot \mathbf{nd}\Gamma}_{\text{se asume igual a cero}} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}^*) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}^*) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}^*) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}^*) d\Omega \\
 &= \|\mathbf{e}^*\|^2
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

En la ecuación anterior el término $-\int_{\partial\Omega} \mathbf{e}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}^*) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$ se ha asumido despreciable dado que la técnica de reconstrucción de tensiones resulta bastante precisa en el contorno, ya que aproxima las tracciones impuestas a lo largo del contorno de Neumann mediante una expansión de Taylor de segundo orden según se ha indicado en la Sección 5.2.3.

En las pruebas numéricas realizadas se ha reemplazado \mathbf{u}^* por \mathbf{u}^h en la Ecuación 6.16, de manera que finalmente se obtiene la expresión que relaciona el defecto en el equilibrio indicado en la Ecuación 6.15. Es factible suponer que \mathbf{u}^h puede reemplazar a \mathbf{u}^* si se considera que el campo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)$ se aproxima al campo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*)$ en los puntos de integración. Se han contemplado diferentes alternativas para evaluar el valor de la integral, obteniéndose dos posibles estimaciones \mathcal{E}_1^* y \mathcal{E}_2^* :

$$\mathcal{E}_1^* = - \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{e} d\Omega \quad (6.18)$$

$$\mathcal{E}_2^* = \sum_{i=1}^{n_e} \left| \int_{\Omega_i} \mathbf{s} \cdot \mathbf{e} d\Omega \right| \quad (6.19)$$

Asimismo, considerando la cota superior del error en norma energética definida en la Ecuación 4.157, es posible definir una cota superior del error para la solución alisada $\mathcal{E}_{\text{UB}}^*$ a partir del producto de las normas L_2 :

$$\mathcal{E}_{\text{UB}}^* = \|\mathbf{e}\|_{L_2} \|\mathbf{s}\|_{L_2} \quad (6.20)$$

En la Figura 6.6 se representa la evolución del índice de efectividad global frente al número de *gdl* para las estimaciones del error \mathcal{E}_1^* , \mathcal{E}_2^* , y la cota superior del error $\mathcal{E}_{\text{UB}}^*$. Los resultados se han obtenido para el problema de Westergaard utilizando mallas de elementos CUAD4 en los diferentes modos de carga. En primer lugar, se puede observar que $\mathcal{E}_{\text{UB}}^*$ es cota superior del error de $\boldsymbol{\sigma}^*$, aunque no converge asintóticamente. Asimismo, aunque las curvas de efectividad para \mathcal{E}_1^* y \mathcal{E}_2^* son cercanas, la efectividad de \mathcal{E}_2^* se acerca más al valor teórico en la mayoría de los casos.

6.5. Conclusiones

Se ha presentado el desarrollo de una cota superior teórica del error de discretización en norma energética, así como también una estrategia para evaluar su correspondiente versión computable, especialmente adaptada para problemas de MFEL resueltos mediante XFEM. La técnica propuesta es una mejora del procedimiento presentado por DÍEZ ET AL. (2007) para aproximaciones MEF, siendo a conocimiento del autor la primera técnica de acotación del error de discretización en norma energética basada en la reconstrucción de la solución para aproximaciones del tipo XFEM.

El procedimiento propuesto se divide en dos partes. En primer lugar, la evaluación de un campo reconstruido de tensiones *casi-estáticamente admisible*, el cual proporciona

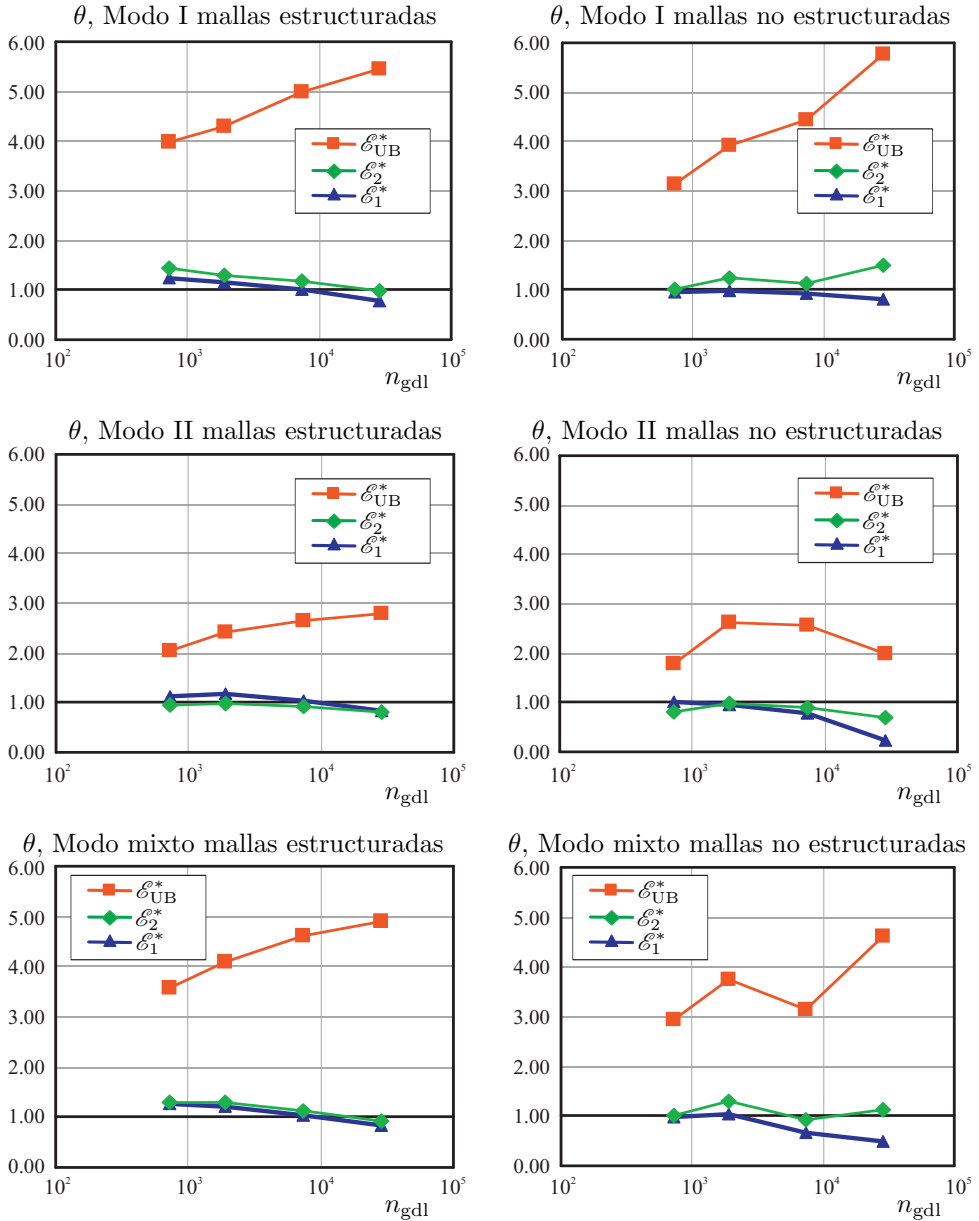


FIGURA 6.6. Evolución del índice de efectividad global para las estimaciones del error en el campo reconstruido \mathcal{E}_1^* , \mathcal{E}_2^* y para la cota superior \mathcal{E}_{UB}^* .

una estimación bastante precisa del error de discretización en norma energética. En segundo lugar, la corrección del error estimado de manera que se cuantifiquen los defectos introducidos en el equilibrio al forzar la continuidad del campo *casí-estáticamente admisible*. De esta manera, se garantiza que el error obtenido es una cota

superior del error exacto.

Para obtener un campo de tensiones que cumpla localmente las ecuaciones de equilibrio se ha utilizado la técnica de reconstrucción SPR-CX explicada en el Capítulo 5. La técnica SPR-CX se caracteriza por estar especialmente adaptada a los problemas singulares modelados mediante XFEM y, además, por forzar el equilibrio a nivel de patches proporcionando localmente un campo estáticamente admisible. La continuidad global del campo de tensiones se logra mediante un procedimiento basado en la Partición de la Unidad, con el cual se introducen ciertos defectos en el equilibrio.

Se ha propuesto un nuevo procedimiento para corregir los residuos que aparecen tanto en la ecuación de equilibrio interno, como en la ecuación de equilibrio en el contorno. La técnica requiere resolver el problema usando una secuencia de mallas refinadas para evaluar una estimación del error exacto en desplazamientos. Se ha observado que al usar la técnica de reconstrucción SPR-CX, los defectos que aparecen en el equilibrio sobre el contorno son despreciables comparados con los defectos introducidos a la ecuación de equilibrio interno. Los resultados numéricos obtenidos para la cota del error corregida mediante el procedimiento propuesto indican una estimación de calidad muy superior respecto al procedimiento de acotación original. Adicionalmente, se ha propuesto una estimación del error cometido en la solución reconstruida a partir de la evaluación del residuo introducido en la ecuación de equilibrio interno.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusión general y aportaciones

En este apartado se recogen las conclusiones generales que derivan del desarrollo de esta Tesis, señalando en particular las aportaciones originales que se han realizado.

En primer lugar, se ha propuesto un nuevo estimador del error de discretización para aproximaciones enriquecidas de elementos finitos. Esta primera aportación se puede describir como una modificación de la técnica SPR, particularmente adaptada para la estimación del error en problemas singulares de la MFEL resueltos mediante el método XFEM. La técnica se fundamenta en las siguientes ideas:

- *Descomposición del campo de tensiones en partes singular y suave*: Este procedimiento permite describir con precisión la parte singular y la parte suave del problema, las cuales son reconstruidas de manera independiente. Para obtener una aproximación de la parte singular se utilizan los valores de los FITs extraídos de la solución de EF. Por su precisión se propone la evaluación del FIT mediante el uso de la Integral de Interacción. Para reconstruir la parte suave se aplica la técnica SPR-C (RÓDENAS ET AL., 2007) sobre una aproximación de la parte suave del problema, garantizando así que σ^* cumpla las ecuaciones de equilibrio en cada patch.
- *Obtención de un campo σ^* continuo mediante el conjoint polynomials enhancement (enfoque PUM)*: Se evalúa directamente en los puntos de integración un campo continuo σ^* mediante el uso del *conjoint polynomials enhancement* propuesto por BLACKER Y BELYTSCHKO (1994). La técnica pondera las funciones de interpolación de tensiones calculados desde diferentes patches, aprovechando la propiedad de la Partición de la Unidad de las funciones de forma de EF.

Así, además de obtener un campo continuo, se evitan los problemas asociados a asignar dos estados de tensión a un único nodo si este está situado sobre la grieta, y los problemas relacionados con la evaluación de tensiones en puntos singulares.

- *Formación de patches con elementos intersecados con la grieta:* A fin de describir la discontinuidad de la solución introducida por la grieta, se utilizan distintos polinomios de interpolación de tensiones para representar el campo σ^* a cada lado de la grieta en los patches que la contienen.
- *Minimización de la norma L_2 de $(\sigma^* - \sigma^h)$:* Se utiliza un enfoque continuo que minimiza un funcional de error para ajustar el campo reconstruido en cada patch, en lugar del enfoque tradicional de la técnica SPR en el que la obtención de σ^* se basa en un ajuste por mínimos cuadrados a los valores de tensión en puntos de integración. Esta técnica permite evaluar σ^* adecuadamente en patches donde la distribución de los puntos de integración no es homogénea.

La técnica propuesta, denominada SPR-CX, constituye uno de los primeros estimadores del error desarrollados para los métodos basados en la Partición de la Unidad que se han introducido en los últimos años (XFEM, GFEM, . . .). Gracias a este nuevo estimador, es posible cuantificar con gran precisión el error de discretización cuando se utiliza el Método Extendido de los Elementos Finitos para resolver problemas de la MFEL.

Como otra aportación de esta Tesis, se ha planteado una mejora del procedimiento para la obtención de cotas superiores del error de discretización propuesto por DÍEZ ET AL. (2007), y su adaptación a problemas de la MFEL resueltos mediante XFEM. Hasta la fecha, dicha adaptación constituye la primera técnica de acotación del error de discretización basada en la reconstrucción de la solución que ha sido desarrollada para aproximaciones del tipo XFEM. La técnica consiste en dos partes fundamentales:

- *Obtención de un campo de tensiones casi estáticamente admisible:* Para ello se recurre a la utilización de la técnica SPR-CX.
- *Evaluación de los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio por la utilización del conjoint polynomials enhancement:* De esta manera se garantiza que la estimación es una cota superior del error exacto.

Con el fin de conseguir los objetivos principales de esta Tesis se han ido abordando diferentes problemas a lo largo del desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2 se ha considerado el modelado de grietas desde el punto de vista de la MFEL. Se han identificado los dos problemas principales que se presentan para obtener una aproximación de la solución: la representación de la discontinuidad y la descripción de la singularidad. Además, en cuanto a la caracterización de la grieta, se ha recomendado el uso de los métodos energéticos basados en integrales de contorno, particularmente la Integral de Interacción, para la evaluación del Factor de Intensidad de Tensiones.

En el Capítulo 3 se ha estudiado el planteamiento del Método Extendido de los Elementos Finitos como técnica para resolver problemas propios de la MFEL. Se ha

comentado la importancia de la utilización de procedimientos de integración específicos (por ejemplo, integración cuasi polar, ...) y de esquemas de enriquecimiento geométrico, para garantizar la precisión y convergencia de la solución.

En el Capítulo 4 se ha realizado una revisión de las técnicas de estimación y acotación del error en aproximaciones convencionales de EF. Se ha prestado especial interés en el estimador de Zienkiewicz–Zhu y la técnica SPR, ya que constituyen parte del fundamento del trabajo realizado en esta Tesis.

Se ha abordado el problema de la estimación del error en problemas resueltos mediante el XFEM, y se ha propuesto el estimador del error SPR-CX. Los resultados numéricos presentados en el Capítulo 5 han demostrado que la técnica SPR-CX proporciona estimaciones precisas de la norma energética del error, tanto a nivel local como a nivel global, consiguiendo un estimador del error asintóticamente exacto. La buena calidad del estimador del error se debe a la precisión del campo σ^* . La precisión de σ^* ha sido cuantificada en base a la evaluación del error exacto de las diferentes componentes de tensión y de la tensión de von Mises en problemas con solución exacta. Se ha comprobado que los valores de tensión σ^* son considerablemente más precisos que los correspondientes a σ^h . Por lo tanto, la técnica SPR-CX puede considerarse como una técnica válida para mejorar la precisión del campo de tensiones que proporciona el XFEM en problemas de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Adicionalmente, el carácter local de la técnica de descomposición del campo de tensiones en sus partes singular y suave permite utilizar el estimador del error en problemas con varios extremos de grieta. Se han comparado los resultados del estimador SPR-CX con los del estimador XMLS (RÓDENAS ET AL., 2008b). El SPR-CX ofrece, gracias a su técnica de descomposición, mejores efectividades y un campo reconstruido de mayor calidad.

Se ha propuesto una técnica de acotación del error para XFEM que proporciona cotas superiores del error de muy alta precisión. La técnica presentada en el Capítulo 6 se basa en la evaluación de un campo de tensiones *casi estáticamente admisible* obtenido mediante la técnica SPR-CX, y la evaluación de los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio. Los resultados numéricos indican una alta precisión de la cota superior del error.

Se ha propuesto un procedimiento para estimar el error cometido en la solución reconstruida a partir de la evaluación del residuo introducido en la ecuación de equilibrio interno. Los resultados numéricos indican que existe una buena correlación entre el residuo del equilibrio y el error en norma energética asociado a σ^* , obteniéndose valores de efectividad próximos a la unidad.

El estimador del error puede ser considerado gracias a su nivel de precisión como una versión *computable* de la cota superior del error de bajo coste computacional. Para los casos en los cuales se requiera acotar el error con mayor precisión es posible sumar los términos correspondientes a los defectos en el equilibrio.

7.2. Trabajos futuros

Entre los posibles desarrollos y trabajos futuros relacionados con la línea de investigación abordada en el desarrollo de esta Tesis cabe mencionar los siguientes:

- Aprovechando la amplia experiencia del grupo de investigación dentro del cual se ha desarrollado esta Tesis en procedimientos de refinamiento h -adaptativo, y que se tiene un estimador del error de alta precisión para XFEM, se plantea el desarrollo de técnicas de refinamiento h -adaptativo para el Método Extendido de los Elementos Finitos.
- Formulación de estimadores del error en magnitudes de interés. Antes de mediados de la década pasada, la mayoría de los estimadores del error estaban orientados hacia la estimación global del error de discretización en norma energética. Sin embargo, en los últimos años ha habido un creciente interés en la formulación de estimadores locales, especialmente estimadores del error en magnitudes de interés, los cuales resultan muy interesantes en aplicaciones prácticas (AINSWORTH Y ODEN, 2000). Una de las aplicaciones más importantes es el planteamiento de estrategias de refinamiento adaptativo enfocadas en la estimación del error en la magnitud que resulte de interés para el analista (*goal oriented adaptivity*). Por lo general, este tipo de estrategias resultan en una reducción considerable del costo computacional, ya que solo se consideran las características de la solución que afectan de manera importante a la magnitud de interés. En dichos procedimientos se requiere solucionar un problema primal y otro dual y, por lo general, se suelen utilizar técnicas basadas en residuos. La idea planteada es utilizar nuestras técnicas de reconstrucción de la solución para realizar la estimación del error.
- Planteamiento de un procedimiento de reconstrucción de la solución en desplazamientos para la evaluación de cotas superiores del error. Aunque los resultados numéricos obtenidos han indicado una altísima precisión de las cotas superiores del error, cabe recordar que para la evaluación de los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio se ha recurrido a una técnica de proyección del error en desplazamientos que no es del todo ideal. En dicha técnica, se aproxima la solución exacta como la solución de la última malla de una secuencia h -refinada, la cual se proyecta posteriormente en las mallas menos refinadas para evaluar una estimación del error en desplazamientos. Para la última malla el error se extrapola a partir de las mallas anteriores en la secuencia. Utilizando un procedimiento de reconstrucción de los desplazamientos es posible obtener directamente una estimación del error en desplazamientos e para cada malla, sin necesidad de considerar una secuencia de mallas. Dicho procedimiento permitiría en principio evaluar la estimación del error y una aproximación de los términos correctores del equilibrio necesarios para obtener la cota, sin necesidad de evaluar las tensiones.
- Extensión de las técnicas de estimación y acotación del error de discretización propuestas a problemas formulados en tres dimensiones. Este es el camino na-

tural de cualquier desarrollo planteado en 2D, ya que finalmente la mayoría de problemas prácticos en ingeniería involucran componentes con geometrías en 3D. Una dificultad añadida a dicho trabajo es el hecho de que el valor del FIT cambia a lo largo del frente de grieta, lo cual se debe considerar al aplicar la técnica de descomposición.

- El estimador SPR-CX tal como está definido no proporciona de manera exacta un campo de tensiones *estáticamente admisible*, lo cual, según se ha visto, exige la evaluación de unos defectos en las ecuaciones de equilibrio para el cálculo de cotas superiores del error. Un posible desarrollo futuro es la implementación de un estimador basado en técnicas MLS que pudiera garantizar directamente la continuidad del campo σ^* , y que además incorporara de manera intrínseca el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio. Así, sería posible obtener un campo de tensiones *estáticamente admisible* de manera directa.

Apéndice A

Estimación y acotación del error en problemas singulares resueltos mediante el MEF

A.1. Introducción

En el Capítulo 5 se ha presentado el planteamiento de una técnica de estimación del error especialmente adaptada para problemas singulares de la Mecánica de la Fractura resueltos mediante el Método Extendido de los Elementos Finitos. Dicha técnica denominada SPR-CX se basa, entre otras cosas, en la descomposición del campo de tensiones en dos partes: una parte suave σ_{smo} , y una parte singular σ_{sing} . Sin embargo, cabe indicar que las mismas ideas consideradas en el desarrollo de la técnica SPR-CX son extensibles a otros tipos de problemas más generales.

A continuación, se presenta una adaptación al MEF de la técnica de descomposición del campo de tensiones para estimar el error en problemas singulares que se han resuelto mediante el Método de los Elementos Finitos denominada SPR-CK (RÓDENAS ET AL., 2006). Asimismo, se presenta un procedimiento para obtener cotas superiores del error en este tipo de problemas, el cual considera la evaluación de los residuos introducidos en el equilibrio, similar a lo estudiado en el Capítulo 6.

A.2. Planteamiento del problema

El problema en consideración es el de una porción de un dominio infinito sujeto a cargas en el contorno y que presenta una entalla según se indica en la Figura A.1. El

modelo presenta un comportamiento singular del campo de tensiones en el vértice de la entalla.

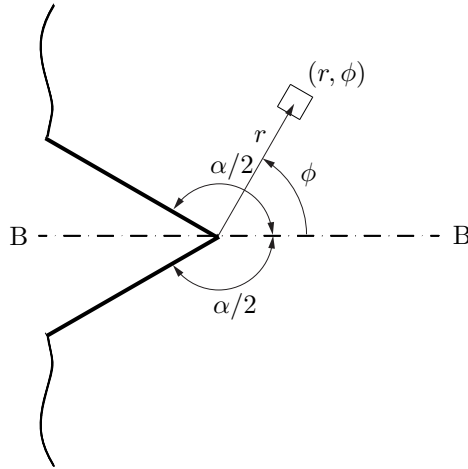


FIGURA A.1. Sólido elástico con una entalla en forma de V

La solución analítica para el problema singular elástico se puede encontrar en SZABÓ Y BABUŠKA (1991), donde para puntos suficientemente cerca del punto singular los campos de desplazamientos y tensiones se pueden expresar de acuerdo al sistema de referencia de la Figura A.1 como:

$$\mathbf{u}(r, \phi) = K_I r^{\lambda_I} \Psi_I(\lambda_I, \phi) + K_{II} r^{\lambda_{II}} \Psi_{II}(\lambda_{II}, \phi) \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \phi) = K_I \lambda_I r^{\lambda_I - 1} \Phi_I(\lambda_I, \phi) + K_{II} \lambda_{II} r^{\lambda_{II} - 1} \Phi_{II}(\lambda_{II}, \phi) \quad (\text{A.2})$$

donde r es la distancia radial al vértice, λ_m (con $m = \text{I, II}$) son los eigenvalores que determinan el orden de la singularidad, Ψ_m , Φ_m representan conjuntos de funciones trigonométricas que dependen del ángulo ϕ , y K_m son los denominados Factores de Intensidad de Tensiones Generalizados (GSIF). De las expresiones anteriores se deduce que el campo singular de tensiones está definido por los valores propios λ y los GSIFs K .

Los valores propios λ dependen exclusivamente del ángulo α de la entalla, y se pueden evaluar como la mínima raíz positiva del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{sen } \lambda_I \alpha + \lambda_I \text{sen } \alpha &= 0 \\ \text{sen } \lambda_{II} \alpha + \lambda_{II} \text{sen } \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Las funciones trigonométricas para los desplazamientos y la tensiones considerando

el problema en Modo I se escriben (SZABÓ Y BABUŠKA, 1991):

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{I}}(\lambda_{\text{I}}, \phi) &= \begin{Bmatrix} \Psi_{\text{I},x}(\lambda_{\text{I}}, \phi) \\ \Psi_{\text{I},y}(\lambda_{\text{I}}, \phi) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mu} \begin{Bmatrix} (\kappa - Q(\lambda_{\text{I}} + 1)) \cos \lambda_{\text{I}}\phi - \lambda_{\text{I}} \cos(\lambda_{\text{I}} - 2)\phi \\ (\kappa + Q(\lambda_{\text{I}} + 1)) \text{sen} \lambda_{\text{I}}\phi + \lambda_{\text{I}} \text{sen}(\lambda_{\text{I}} - 2)\phi \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{I}}(\lambda_{\text{I}}, \phi) &= \begin{Bmatrix} \Phi_{\text{I},xx}(\lambda_{\text{I}}, \phi) \\ \Phi_{\text{I},yy}(\lambda_{\text{I}}, \phi) \\ \Phi_{\text{I},xy}(\lambda_{\text{I}}, \phi) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} (2 - Q(\lambda_{\text{I}} + 1)) \cos(\lambda_{\text{I}} - 1)\phi - (\lambda_{\text{I}} - 1) \cos(\lambda_{\text{I}} - 3)\phi \\ (2 + Q(\lambda_{\text{I}} + 1)) \cos(\lambda_{\text{I}} - 1)\phi + (\lambda_{\text{I}} - 1) \cos(\lambda_{\text{I}} - 3)\phi \\ Q(\lambda_{\text{I}} + 1) \text{sen}(\lambda_{\text{I}} - 1)\phi + (\lambda_{\text{I}} - 1) \text{sen}(\lambda_{\text{I}} - 3)\phi \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

donde κ es la constante de Kolosov, μ es el módulo de rigidez a cizalladura y Q es una constante que depende del ángulo de la entalla tal que:

$$Q = -\frac{\cos\left((\lambda - 1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left((\lambda + 1)\frac{\alpha}{2}\right)}\quad (\text{A.6})$$

En Modo II se tiene:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{II}}(\lambda_{\text{II}}, \phi) &= \begin{Bmatrix} \Psi_{\text{II},x}(\lambda_{\text{II}}, \phi) \\ \Psi_{\text{II},y}(\lambda_{\text{II}}, \phi) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mu} \begin{Bmatrix} (\kappa - Q(\lambda_{\text{II}} + 1)) \text{sen} \lambda_{\text{II}}\phi - \lambda_{\text{II}} \text{sen}(\lambda_{\text{II}} - 2)\phi \\ -(\kappa + Q(\lambda_{\text{II}} + 1)) \cos \lambda_{\text{II}}\phi - \lambda_{\text{II}} \cos(\lambda_{\text{II}} - 2)\phi \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{II}}(\lambda_{\text{II}}, \phi) &= \begin{Bmatrix} \Phi_{\text{II},xx}(\lambda_{\text{II}}, \phi) \\ \Phi_{\text{II},yy}(\lambda_{\text{II}}, \phi) \\ \Phi_{\text{II},xy}(\lambda_{\text{II}}, \phi) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} (2 - Q(\lambda_{\text{II}} + 1)) \text{sen}(\lambda_{\text{II}} - 1)\phi - (\lambda_{\text{II}} - 1) \text{sen}(\lambda_{\text{II}} - 3)\phi \\ (2 + Q(\lambda_{\text{II}} + 1)) \text{sen}(\lambda_{\text{II}} - 1)\phi + (\lambda_{\text{II}} - 1) \text{sen}(\lambda_{\text{II}} - 3)\phi \\ Q(\lambda_{\text{II}} + 1) \cos(\lambda_{\text{II}} - 1)\phi + (\lambda_{\text{II}} - 1) \cos(\lambda_{\text{II}} - 3)\phi \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Para el caso particular en el cual $\alpha/2 = \pi$ el problema corresponde al modelado de una grieta desde el punto de vista de la Mecánica de la Fractura (ver Capítulo 2).

A.3. Extracción del GSIF mediante integrales de dominio

Por lo general, a fin de poder caracterizar el problema singular resulta necesario utilizar una técnica computacional para la evaluación del GSIF. Como se ha indicado en la Sección 2.4, existen una gran variedad de técnicas de postprocesamiento que

permiten obtener una estimación de este tipo de parámetros a partir de la solución de EF, las cuales han sido desarrolladas principalmente en el ámbito de la Mecánica de la Fractura.

Dentro del conjunto de técnicas disponibles, los métodos energéticos basados en integrales de contorno resultan de gran interés ya que por su carácter global, y por ser integrales independientes del camino, permiten evaluar el GSIF lejos de la zona de influencia de la singularidad, donde precisamente la solución de EF es de mejor calidad.

Por otra parte, con el fin de facilitar la evaluación de la integral de contorno cuando se implementa dentro de un entorno MEF, se suele redefinir en forma de una integral de dominio equivalente, ver Sección 2.4.2. Dicho procedimiento es común en la Mecánica de la Fractura, donde la integral EDI se utiliza para evaluar la integral de contorno J . Así, es posible definir una integral de dominio equivalente, independiente del camino, para el problema de la entalla en forma de V . En RÓDENAS ET AL. (2006), el valor del GSIF se evalúa mediante la integral de dominio equivalente a la integral de contorno disponible en SZABÓ Y BABUŠKA (1991) expresada como:

$$K = -\frac{1}{C} \int_{\Omega^*} (\sigma_{jk}^h u_k^{\text{aux}} - \sigma_{jk}^{\text{aux}} u_k^h) \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega \quad (\text{A.9})$$

donde \mathbf{u}^h , $\boldsymbol{\sigma}^h$ son los campos solución de EF, y \mathbf{u}^{aux} , $\boldsymbol{\sigma}^{\text{aux}}$ son campos auxiliares convenientemente escogidos. La función q es la función de ponderación arbitraria que define la parte del dominio de la cual se extrae el valor de K , y que está definida según se explica en la Sección 2.4.2.

En la Ecuación A.9, los campos auxiliares para el problema analizado en Modo I se definen como:

$$\mathbf{u}^{\text{aux}}(r, \phi) = r^{-\lambda_I} \boldsymbol{\Psi}_I(-\lambda_I, \phi) \quad (\text{A.10})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{aux}}(r, \phi) = -\lambda_I r^{-\lambda_I-1} \boldsymbol{\Phi}_I(-\lambda_I, \phi) \quad (\text{A.11})$$

y la constante C como:

$$C = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} [\lambda_I \boldsymbol{\Xi}_I(\lambda_I, \phi) \cdot \boldsymbol{\Psi}_I(-\lambda_I, \phi) - (-\lambda_I) \boldsymbol{\Xi}_I(-\lambda_I, \phi) \cdot \boldsymbol{\Psi}_I(\lambda_I, \phi)] d\phi \quad (\text{A.12})$$

donde $\boldsymbol{\Psi}_I$ son las funciones trigonométricas definidas para los desplazamientos en la Ecuación A.4 y $\boldsymbol{\Xi}_I$ son las funciones trigonométricas asociadas al vector de tracción relacionado con $\boldsymbol{\Phi}_I$:

$$\boldsymbol{\Xi}_I = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Phi}_{I,xx}(\lambda, \phi) \cos \phi + \boldsymbol{\Phi}_{I,xy}(\lambda, \phi) \sin \phi \\ \boldsymbol{\Phi}_{I,xy}(\lambda, \phi) \cos \phi + \boldsymbol{\Phi}_{I,yy}(\lambda, \phi) \sin \phi \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

Eligiendo adecuadamente las expresiones para los campos auxiliares es posible extraer K_I o K_{II} según sea el caso. Así, se ha definido un procedimiento muy preciso para la estimación del GSIF en problemas singulares, de manera que el valor de K pueda ser utilizado para la reconstrucción del campo singular $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sing}}^*$.

A.4. Estimación del error

Independientemente del tipo de aproximación utilizada (XFEM o MEF), el error estimado en norma energética se puede definir de acuerdo a lo indicado en la Ecuación 4.31:

$$\|e_{es}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega}$$

La expresión anterior representa el denominado estimador ZZ, el cual se basa en la evaluación de un campo reconstruido de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ (ver Sección 4.4). Para la evaluación del campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ en problemas singulares de la MFEL resueltos mediante el XFEM se recurre al uso de la técnica de reconstrucción SPR-CX planteada en esta Tesis. De manera semejante, para problemas singulares resueltos mediante el MEF se puede plantear el uso de una técnica de reconstrucción que descomponga el campo de tensiones en una parte suave y una parte singular.

Considérese el problema de la geometría en forma de L representado en la Figura A.2, con tracciones aplicadas sobre el contorno y un punto singular de tensiones. El campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ se representa entonces como la contribución de dos campos de tensiones reconstruidos, uno suave $\boldsymbol{\sigma}_{smo}^*$ y otro singular $\boldsymbol{\sigma}_{sing}^*$:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}_{smo}^* + \boldsymbol{\sigma}_{sing}^* \quad (\text{A.14})$$

Para la reconstrucción de la parte singular $\boldsymbol{\sigma}_{sing}^*$ se propone utilizar el *Factor de Intensidad de Tensiones Generalizado* (GSIF) K , el cual es extraído de la solución de elementos finitos. El parámetro K es un factor caracterizante de la singularidad que al ser sustituido en las expresiones analíticas del campo singular permite obtener una buena estimación del campo $\boldsymbol{\sigma}_{sing}$.

Posteriormente, se obtiene una aproximación de la parte suave del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{smo}$ a partir del campo $\boldsymbol{\sigma}^h$ obtenido mediante elementos finitos. Asumiendo que $\boldsymbol{\sigma}_{sing}^*$ es una buena aproximación a $\boldsymbol{\sigma}_{sing}$ se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma}_{smo}^h = \boldsymbol{\sigma}^h - \boldsymbol{\sigma}_{sing} \quad (\text{A.15})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{smo}^h \approx \boldsymbol{\sigma}^h - \boldsymbol{\sigma}_{sing}^* \quad (\text{A.16})$$

Una vez se ha evaluado el campo $\boldsymbol{\sigma}_{smo}^h$, se aplica la técnica SPR-C (ver Sección 4.4.4) para obtener el campo de tensiones reconstruido $\boldsymbol{\sigma}_{smo}^*$. La técnica SPR-C fuerza el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y la ecuación de compatibilidad en cada patch, mejorando con ello la calidad del proceso de reconstrucción. Asimismo, se utiliza la técnica *conjoint polynomials* explicada en la Sección 4.4.4 para evaluar el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ directamente en los puntos de integración.

De manera análoga a lo realizado en la técnica SPR-CX, se restringe la zona del dominio donde se aplica la técnica de descomposición, de forma que solo se realice en los patches que se encuentren dentro de la zona de influencia del punto singular.

El área de descomposición está definida mediante un parámetro ρ que determina el radio de una circunferencia con centro en el extremo de grieta. Lejos de la singularidad el campo de tensiones se reconstruye utilizando la técnica SPR-C estándar. Así, la técnica de descomposición del campo de tensiones *singular+suave* se aplica solo si la distancia entre alguno de los nodos del patch y la singularidad es más pequeña que el radio ρ . En la Figura A.2 se muestra un esquema del procedimiento de reconstrucción de tensiones en el patch.

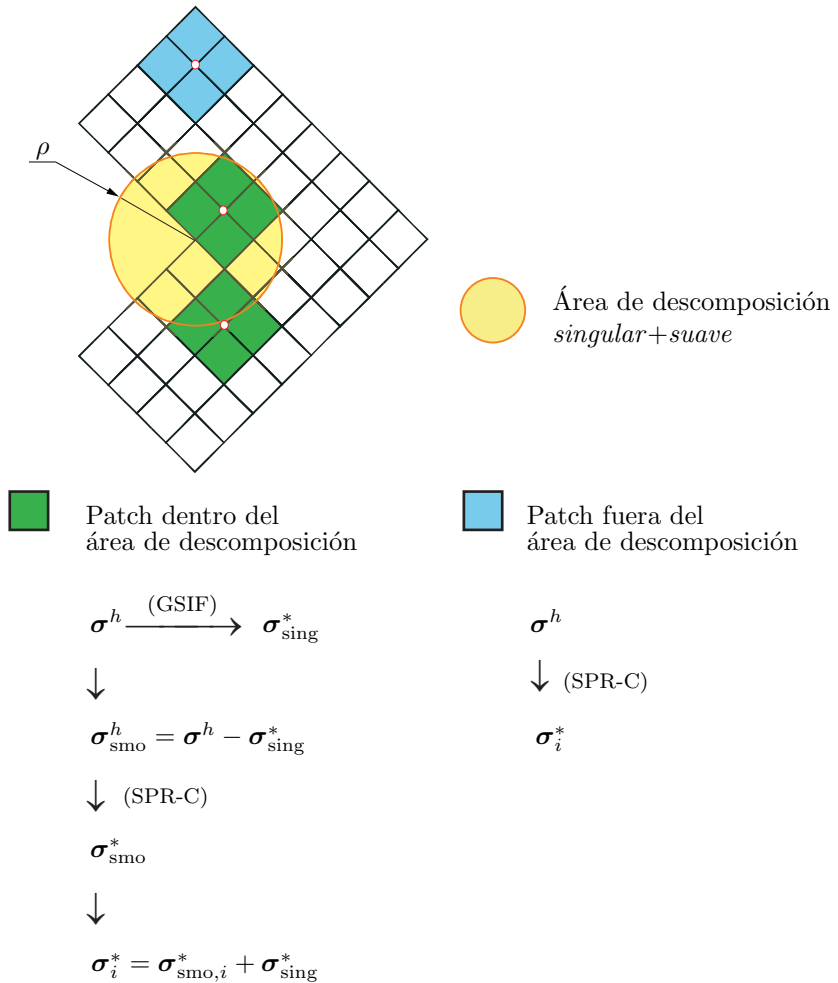


FIGURA A.2. Evaluación de σ^*_i en diferentes tipos de patches.

A.5. Cotas superiores del error

En el siguiente apartado se formula un procedimiento de evaluación de cotas superiores del error para problemas singulares resueltos mediante el MEF siguiendo el planteamiento desarrollado en el Capítulo 6. En primer lugar, se considera el campo reconstruido $\boldsymbol{\sigma}^*$ indicado en el apartado anterior, el cual tiene la propiedad de ser *casi estáticamente admisible*. En dicho campo se ha impuesto el cumplimiento de manera exacta de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad en patches. Posteriormente, se ha forzado la continuidad del campo mediante el *conjoint polynomials enhancement*, introduciendo a su vez un residuo en las ecuaciones de equilibrio.

De manera similar a lo explicado en el Capítulo 6, el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ cumple una versión modificada de las ecuaciones de equilibrio, tal que:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* &= \mathbf{b} + \mathbf{s} && \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} + \mathbf{r} && \text{en } \Gamma_t \end{aligned}$$

donde \mathbf{s} y \mathbf{r} representan los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio interno y equilibrio en el contorno. La evaluación de dichos residuos ha derivado en la definición de la cota superior del error \mathcal{E}_{UB} según se indica en la Ecuación 6.7:

$$\mathcal{E}_{\text{UB}} = \sqrt{\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega - 2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} d\Gamma_t} \geq \|\mathbf{e}\|$$

En la expresión anterior, el término asociado al desequilibrio en el contorno \mathbf{r} se considera despreciable ya que $\boldsymbol{\sigma}^*$ cumple una aproximación polinómica de segundo orden de las tensiones aplicadas sobre el contorno, por lo que la expresión para la cota superior del error se puede reescribir como:

$$\mathcal{E}_{\text{UB}} = \sqrt{\bar{a}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}^*}) - 2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} d\Omega} \quad (\text{A.17})$$

donde el valor del error en desplazamientos \mathbf{e} se evalúa siguiendo el procedimiento de proyección explicado en la Sección 6.3.

En la Ecuación A.17 el defecto introducido en la ecuación de equilibrio interno \mathbf{s} se calcula de acuerdo a lo indicado en la Ecuación 4.156:

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n_v} (\boldsymbol{\sigma}_A^* - \boldsymbol{\sigma}_i^*) \cdot \nabla N_i$$

A.6. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para el estimador del error utilizando la técnica de descomposición del campo de tensiones en un problema

singular resuelto mediante el MEF. Asimismo, se presentan los resultados para la cota superior del error obtenidos luego de evaluar los defectos introducidos en las ecuaciones de equilibrio.

A.6.1. Problema de una entalla en V

En la Figura A.3 se representa la parte del dominio que se ha modelado mediante elementos finitos para representar el problema indicado en la Sección A.2. El modelo está sujeto a cargas en el contorno que representan el primer término simétrico de la expansión asintótica del campo de tensiones alrededor de la singularidad, Ecuación A.1, correspondiente al Modo I de carga. Se ha considerado un material elástico con módulo de Young $E = 1000$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, bajo un estado de deformación plana.

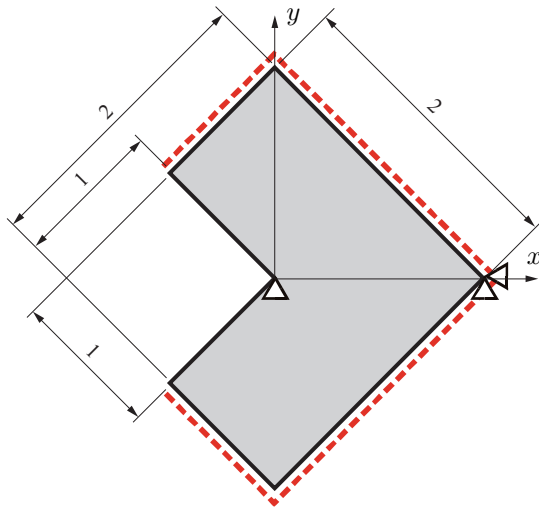


FIGURA A.3. Modelo geométrico para el problema de un entalla en forma de V .

Se han aplicado condiciones de contorno de Neumann sobre los contornos indicados con línea discontinua en la Figura A.3, utilizando el vector de tracción obtenido a partir de la Ecuación A.1. Para evaluar las tracciones impuestas se ha tomado un valor de $K_I = 1$. Además, para un ángulo de entalla $\alpha = 3\pi/2$ se tiene que $\lambda_I = 0.5444837$ y $\lambda_{II} = 0.9085292$.

En la Figura A.4 se muestra la secuencia de mallas de elementos triangulares cuadráticos con refinamiento h -adaptativo utilizadas en los análisis de EF.

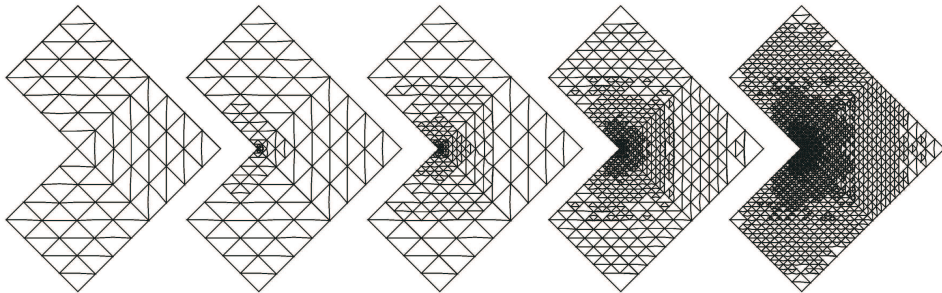


FIGURA A.4. Mallas 1 a 5 de la secuencia de refinamiento h -adaptativo.

A.6.2. Índice de efectividad

En la Figura A.5 se representa la evolución del error estimado en norma energética frente al número de gdl para las secuencias de mallas con refinamiento uniforme y refinamiento h -adaptativo. Para la integración numérica se ha utilizado una cuadratura de 12 puntos de Gauss. Con el propósito de facilitar la valoración de los resultados, en ambos casos se ha representado la evolución del error exacto en norma energética. Además, para el caso de refinamiento uniforme se representan los resultados del estimador sin considerar la descomposición del campo de tensiones (curva SPR-C). Para las dos secuencias de mallas se puede observar una buena convergencia del error estimado en norma energética $\|\mathbf{e}_{es}\|$ cuando se utiliza la técnica SPR-CK, siendo prácticamente coincidente con la curva de $\|\mathbf{e}\|$. Por el contrario, cuando no se utiliza la técnica de descomposición disminuye notablemente la precisión del error estimado. Recordar que la velocidad de convergencia para problemas singulares con refinamiento uniforme está afectada por la intensidad de la singularidad $O(n_{gdl}^{-\min(\lambda,p)/2})$, y para problemas con refinamiento h -adaptativo es del orden $O(-n_{gdl}^{p/2})$. Por lo tanto, para este problema las velocidades de convergencia teóricas son 0.27224 para la secuencia con refinamiento uniforme, y 1 para la secuencia con refinamiento h -adaptativo.

Para evaluar la precisión del estimador del error se utiliza el índice de efectividad global θ , definido como el cociente entre el error estimado y el error exacto en norma energética (Ecuación 4.13):

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{e}\|}$$

En la Figura A.6 se representa la evolución del índice de efectividad global frente al número de gdl para las mallas con refinamiento uniforme y h -adaptativo. Se observa que el estimador converge asintóticamente al valor teórico de la efectividad $\theta = 1$ cuando se utiliza la técnica SPR-CK. Asimismo, se observa que cuando se reconstruye el campo de tensiones con la técnica SPR-C la efectividad no converge al valor teórico para este problema. Además, los resultados indican que la precisión del estimador aumenta cuando se utilizan refinamientos h -adaptativos (ver Tabla A.1).

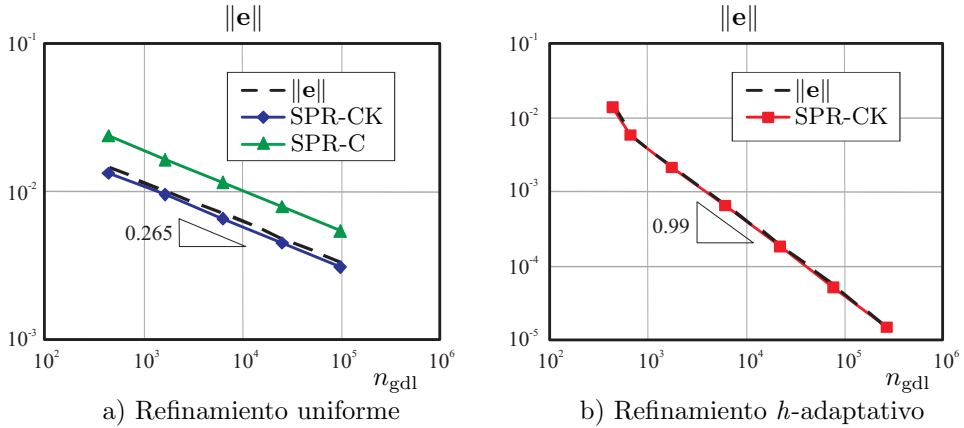


FIGURA A.5. Evolución del error estimado en norma energética.

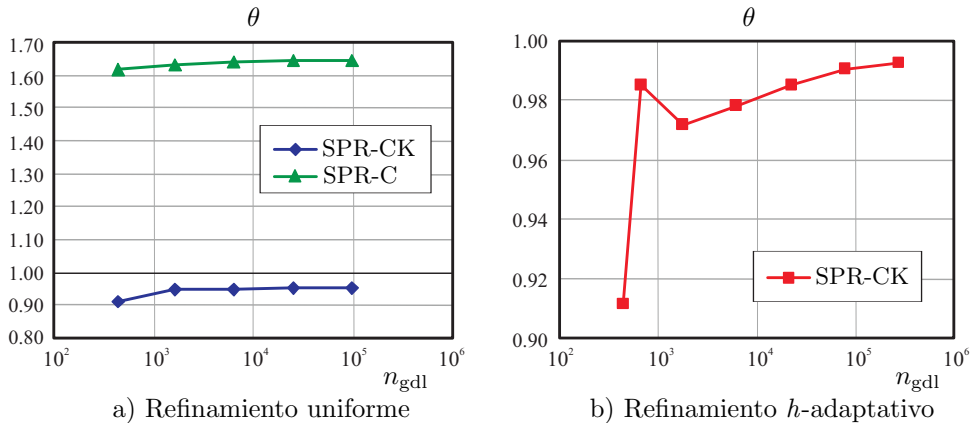


FIGURA A.6. Evolución del índice de efectividad global.

A.6.3. Cotas superiores del error

Se evalúa numéricamente el índice de efectividad global de la cota superior del error θ_{UB} como el cociente entre la estimación en norma energética de la cota \mathcal{E}_{UB} (Ecuación A.17) y $\|e\|$. En la Figura A.7 se representa la evolución del índice de efectividad global θ_{UB} frente al número de gdl para las secuencias de mallas con refinamiento uniforme y refinamiento h -adaptativo.

Los resultados presentados indican una buena precisión de la cota superior para ambas secuencias de mallas, mostrando valores cercanos a la efectividad teórica de 1 (Tabla A.2). Además, para las mallas con refinamiento h -adaptativo se cumple la propiedad $\theta_{UB} \geq 1$. Por otra parte, para las últimas mallas de la secuencia con refinamiento uniforme se pueden apreciar valores de efectividad θ_{UB} por debajo de 1. Dichos resultados estarían asociados a problemas de polución presentes en la solución

TABLA A.1. Índice de efectividad θ para mallas con refinamiento uniforme y refinamiento h -adaptativo.

Refinamiento uniforme			Refinamiento h -adaptativo	
n_{gdI}	θ (SPR-CK)	θ (SPR-C)	n_{gdI}	θ (SPR-CK)
447	0.91117	1.61778	447	0.91117
1663	0.94597	1.63242	687	0.98535
6399	0.94907	1.63991	1819	0.97184
25087	0.95052	1.64355	6285	0.97843
99327	0.95119	1.64527	22367	0.98529
			79175	0.99052
			281195	0.99247

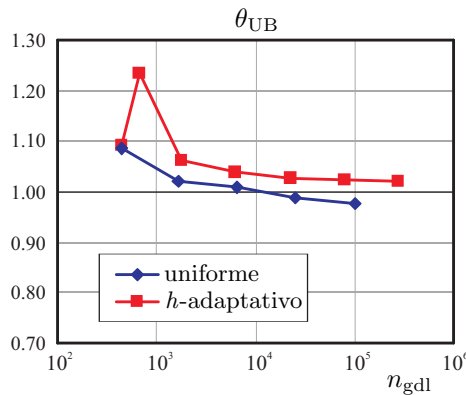


FIGURA A.7. Evolución del índice de efectividad global para la cota superior del error utilizando distintos tipos de refinamiento.

de la aproximación, y a la técnica de proyección del error en desplazamientos según se ha explicado en el Capítulo 6.

A.7. Conclusiones

Se han presentado los resultados de una técnica de estimación del error especialmente indicada para problemas singulares resueltos mediante el MEF denominada SPR-CK. La estimación del error se basa en tres aspectos principales: i) la descomposición del campo de tensiones en partes suave y singular, ii) la utilización de la técnica SPR-C para imponer el cumplimiento de las condiciones de equilibrio en patches, y iii) la evaluación del campo reconstruido de tensiones en los puntos de integración mediante el *conjoint polynomial enhancement*. Los resultados obtenidos indican una buena convergencia del error estimado en norma energética, así como también, convergencia

TABLA A.2. Índice de efectividad de la cota superior θ_{UB} para mallas con refinamiento uniforme y refinamiento h -adaptativo.

Refinamiento uniforme		Refinamiento h -adaptativo	
n_{gdl}	θ_{UB}	n_{gdl}	θ_{UB}
447	1.08568	447	1.09180
1663	1.02003	687	1.23432
6399	1.00987	1819	1.06096
25087	0.98954	6285	1.03743
99327	0.97600	22367	1.02728
		79175	1.02477
		281195	1.01957

asintótica de la efectividad global al valor teórico de 1.

Asimismo, se ha presentado una técnica de evaluación de cotas superiores del error para problemas singulares, que utiliza el campo reconstruido de tensiones *casi estáticamente admisible* obtenido con la técnica de reconstrucción propuesta, y que además considera el residuo introducido en la ecuación de equilibrio interno. Los resultados numéricos indican un buen comportamiento de la cota superior evaluada.

Bibliografía

- Aalto, J. Built-in field equations for recovery procedures. *Computers & Structures*, 64(1-4):157–176 (1997).
- Aalto, J. y Åman, M. Polynomial representations for patch recovery procedures. *Computers & Structures*, 73(1-5):119–146 (1999).
- Aalto, J. y Isoherranen, H. An element by element recovery method with built-in field equations. *Computers & Structures*, 64(1-4):177–196 (1997).
- Adalsteinsson, D. y Sethian, J.A. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2):269–277 (1995).
- Ainsworth, M., Zhu, J.Z., Craig, A.W. y Zienkiewicz, O.C. Analysis of the zienkiewicz-zhu a-posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(9):2161–2174 (1989).
- Ainsworth, M. y Oden, J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1-2):1–88 (1997).
- Ainsworth, M. y Oden, J.T. A posteriori *Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester (2000).
- Akin, J.E. The generation of elements with singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:1249–1259 (1976).
- Akin, J.E. *Finite element analysis with error estimators*. Butterworth-Heinemann, Jordan Hill, Oxford (2005).
- Anderson, T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, volumen 2. CRC Press, Boca Ratón, Florida (1995).
- Asadpoure, A. y Mohammadi, S. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10):2150–2172 (2007).
- Atluri, S.N. y Kobayashi, A.S. *Elastic- Plastic (Quasi-Static)*, volumen 2 de *Computational Methods in the Mechanics of Fracture (Computational Methods in Mechanics)*., capítulo 3, páginas 55–83. Elsevier Science, North Holland, Amsterdam (1986).

- Atluri, S.N. y Zhu, T.L. The meshless local petrov-galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. *Computational Mechanics*, 25(2):169–179 (2000).
- Babuška, I. y Melenk, J.M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4):727–758 (1997).
- Babuška, I. y Rheinboldt, W.C. Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18(Part 3):519–540 (1979).
- Babuška, I., Strouboulis, T. y Gangaraj, S.K. Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution part I: One-dimensional model problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):51–79 (1999).
- Babuška, I., Strouboulis, T., Gangaraj, S.K. y Upadhyay, C.S. Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1-2):1–37 (1997a).
- Babuška, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C.S. y Gangaraj, S.K. A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(24):4207–4235 (1995).
- Babuška, I. y Rheinboldt, W.C. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615 (1978).
- Babuška, I., Strouboulis, T. y Upadhyay, C.S. A model study of the quality of *a posteriori* error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 114(3-4):307–378 (1994a).
- Babuška, I., Strouboulis, T. y Upadhyay, C.S. A model study of the quality of *a posteriori* error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behaviour near the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(14):2521–2577 (1997b).
- Babuška, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C.S., Gangaraj, J. y Copps, K. Validation of *a posteriori* error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(7):1073–1123 (1994b).
- Babuška, I. y Strouboulis, T. *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press (2001).
- Bank, R.E. y Weiser, A. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44:283–301 (1985).
- Banks-Sills, L. Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics. *Applied Mechanics Review*, 44(10):447–461 (1991).

- Barlow, J. Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(2):243–251 (1976).
- Barros, F.B., Proenca, S.P.B. y de Barcellos, C.S. On error estimator and p-adaptivity in the generalized finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(14):2373–2398 (2004).
- Barsoum, R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(1):25–37 (1976).
- Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 2nd edición (1996).
- Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N. y Burgardt, B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM method for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8):1033–1056 (2005).
- Belytschko, T., Daniel, W.J.T. y Ventura, G. A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(1):101–125 (2002).
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. y Krysl, P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):3–47 (1996).
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. y Gu, L. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2):229–256 (1994).
- Belytschko, T. y Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620 (1999).
- Belytschko, T. y Chen, H. Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation. *International Journal of Computational Methods*, 1(1):1–15 (2004).
- Belytschko, T., Chen, H., Xu, J. y Zi, G. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(12):1873–1905 (2003).
- Belytschko, T., Moës, N., Usui, S. y Parimi, C. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4):993–1013 (2001).
- Benzley, S.E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(3):537–545 (1974).
- Berntsen, J., Espelid, T.O. y Genz, A. An adaptive algorithm for the approximate calculation of multiple integrals. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 17(4):437–451 (1991).

- Blacker, T. y Belytschko, T. Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(3):517–536 (1994).
- Bordas, S. y Duflo, M. Derivative recovery and a *posteriori* error estimate for extended finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(35-36):3381–3399 (2007).
- Bordas, S., Duflo, M. y Le, P. A simple error estimator for extended finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):961–971 (2008).
- Bordas, S. y Legay, A. *X-FEM Mini Course*. EPFL, Lausanne, Switzerland (2005).
- Boroomand, B., Ghaffarian, M. y Zienkiewicz, O.C. On application of two superconvergent recovery procedures to plate problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(10):1644–1673 (2004).
- Boroomand, B. y Zienkiewicz, O.C. An improved REP recovery and the effectivity robustness test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(17):3247–3277 (1997a).
- Boroomand, B. y Zienkiewicz, O.C. Recovery by equilibrium in patches (REP). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(1):137–164 (1997b).
- Bramble, J.H. y Schatz, A.H. Higher order local accuracy by averaging in the finite element method. *Mathematics of Computation*, 31(137):94–111 (1977).
- Budyn, E., Zi, G., Moës, N. y Belytschko, T. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(10):1741–1770 (2004).
- Carter, B.J., Wawrzynek, P.A. y Ingraffea, A.R. Automated 3-D crack growth simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):229–253 (2000).
- Chahine, E., Laborde, P. y Renard, Y. A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM. *Comptes Rendus Mathématique*, 342(7):527 (2006).
- Chen, F.H.K. y Shield, R.T. Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 28(1):1–22 (1977).
- Cherepanov, G.P. The propagation of cracks in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3):503–512 (1967).
- Chessa, J., Wang, H. y Belytschko, T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal of Numerical Methods*, 57(7):1015–1038 (2003).
- Chopp, D.L. y Sethian, J.A. Motion by Intrinsic Laplacian of Curvature. *Interfaces and Free Boundaries*, 1:1–18 (1999).

- Chopp, D.L. y Sukumar, N. Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method. *International Journal of Engineering Science*, 41(8):845–869 (2003).
- Cruse, T.A. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Pub, Dordrecht (1988).
- Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N. y Belytschko, T. Arbitrary branched and intersecting method cracks with the extended finite element. *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12):1741–1760 (2000).
- De, S. y Bathe, K.J. The method of finite spheres with improved numerical integration. *Computers & Structures*, 79(22-25):2183–2196 (2001).
- de Almeida, J.P.M. y Freitas, J.A.T. Alternative approach to the formulation of hybrid equilibrium finite elements. *Computers & Structures*, 40(4):1043–1047 (1991).
- de Borst, R., Gutiérrez, M.A., Wells, G.N. y Remmers, J.J. Cohesive-zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1):289–315 (2004).
- Díez, P., Parés, N. y Huerta, A. Accurate upper and lower error bounds by solving flux-free local problems in «stars». *Revue européenne des éléments finis*, 13(5-6-7):497 (2004).
- Díez, P., Ródenas, J.J. y Zienkiewicz, O.C. Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10):2075–2098 (2007).
- Dolbow, J., Moës, N. y Belytschko, T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Element Analysis and Design*, 36(3-4):235–260 (2000a).
- Dolbow, J., Moës, N. y Belytschko, T. Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50):7161–7183 (2000b).
- Dolbow, J. y Nadeau, J.C. On the use of effective properties for the fracture analysis of microstructured materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(14-16):1607–1634 (2002).
- Dolbow, J.E. *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Tesis doctoral, Northwestern University (1999).
- Dolbow, J.E. y Devan, A. Enrichment of enhanced assumed strain approximations for representing strong discontinuities: addressing volumetric incompressibility and the discontinuous patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(1):47–67 (2004).

- Dolbow, J.E. y Gosz, M. On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39(9):2557–2574 (2002).
- Dolbow, J., Moes, N. y Belytschko, T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52):6825–6846 (2001).
- Dow, J.O. *The Zienkiewicz/Zhu Error Estimation Procedure*, páginas 405–425. A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures. Academic Press, San Diego (1999).
- Duarte, C.A. y Oden, J.T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):237–262 (1996a).
- Duarte, C.A. y Oden, J.T. H-p clouds – an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12(6):673–705 (1996b).
- Duflot, M. y Bordas, S. *A posteriori* error estimation for extended finite element by an extended global recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(8):1123–1138 (2008).
- Elguedj, T., Gravouil, A. y Combescure, A. Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(7-8):501–515 (2006).
- Fagerström, M. y Larsson, R. Theory and numerics for finite deformation fracture modelling using strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6):911–948 (2006).
- Gerstle, W.H., Ingraffea, A.R. y Perucchio, R. Three-dimensional fatigue crack propagation analysis using the boundary element method. *International Journal of Fatigue*, 10(3):189–192 (1988).
- Gerstle, W.H., Martha, L.F. y Ingraffea, A.R. Finite and boundary element modeling of crack propagation in two and three dimensions. *Engineering with Computers*, 2(3):167–183 (1987).
- Giner, E. *Estimación del error de discretización en el cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia (2001).
- Giner, E., Fuenmayor, F.J., Baeza, L. y Tarancón, J.E. Error estimation for the finite element evaluation of G_I and G_{II} in mixed-mode linear elastic fracture mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(11-12):1079–1104 (2005).
- Gravouil, A., Belytschko, T. y Moës, N. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11):2569–2586 (2002).

- Griebel, M. y Schweitzer, M.A. A particle-partition of unity method for the solution of elliptic, parabolic and hyperbolic PDE. *SIAM J. Sci. Comp.*, 22:853–890 (2000).
- Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.*, 221:163–197 (1921).
- Henshell, R.D. y Shaw, K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9(3):495–507 (1975).
- Hinton, E. y Campbell, J.S. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(3):461–480 (1974).
- Huang, R., Sukumar, N. y Prévost, J.H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part II: Numerical applications. *International Journal of Solids and Structures*, 40(26):7539–7552 (2003).
- Ingraffea, A.R. y Manu, C. Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1427–1445 (1980).
- Kanninen, M.F. y Popelar, C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, New York (1985).
- Karihaloo, B.L. y Xiao, Q.Z. Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. *Computers & Structures*, 81(3):119–129 (2003).
- Kelly, D.W., Gago, J.P., Zienkiewicz, O.C. y Babuška, I. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - Error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(11):1593–1619 (1983).
- Khoei, A.R. y Nikbakht, M. Contact friction modeling with the extended finite element method (X-FEM). *Journal of Materials Processing Technology*, 177(1-3):58–62 (2006).
- Krysl, P. y Belytschko, T. The Element Free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(6):767–800 (1999).
- Kvamsdal, T. y Okstad, K.M. Error estimation based on superconvergent patch recovery using statically admissible stress fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(3):443–472 (1998).
- Labbe, P. y Garon, A. A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu's local patch recovery method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11(5):427–434 (1995).
- Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. y Salaün, M. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(3):354–381 (2005).

- Ladevèze, P. y Leguillon, D. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509 (1983).
- Ladevèze, P. y Maunder, E.A.W. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137(2):111–151 (1996).
- Lancaster, P. y Salkauskas, K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37(155):141–158 (1981).
- Lee, T., Park, H.C. y Lee, S.W. A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(6):1139–1160 (1997).
- Legay, A., Wang, H.W. y Belytschko, T. Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8):991–1008 (2005).
- Legrain, G., Moës, N. y Verron, E. Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2):290–314 (2005).
- Li, F.Z., Shih, C.F. y Needleman, A. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(2):405–421 (1985).
- Liu, W.K., Jun, S. y Zhang, Y.F. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(8-9):1081–1106 (1995).
- Liu, X.Y., Xiao, Q.Z. y Karihaloo, B.L. XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(8):1103–1118 (2004).
- Lo, S.H. y Lee, C.K. On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(7):1223–1252 (1998).
- Lorentzon, M. y Eriksson, K. A path independent integral for the crack extension force of the circular arc crack. *Engineering Fracture Mechanics*, 66(5):423–439 (2000).
- Maisano, G., Micheletti, S., Perotto, S. y Bottasso, C.L. On some new recovery-based a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40):4794–4815 (2006).
- Martha, L.F., Wawrzynek, P.A. y Ingraffea, A.R. Arbitrary crack representation using solid modeling. *Engineering with computers*, 9(2):63–82 (1993).
- Maunder, E.A.W. A Trefftz patch recovery method for smooth stress resultants and applications to Reissner-Mindlin equilibrium plate models. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 8(2-3):409–424 (2001).

- Melenk, J.M. y Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314 (1996).
- Menouillard, T., Réthoré, J., Combescure, A. y Bung, H. Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(9):911–939 (2006).
- Mergheim, J., Kuhl, E. y Steinmann, P. A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2):276–289 (2005).
- Moan, T. Experiences with orthogonal polynomials and best numerical integration formulas on a triangle; with particular reference to finite element approximations. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 54(7):501–508 (1974).
- Mohammadi, S. *Extended Finite Element Method: for Fracture Analysis of Structures*. Wiley-Blackwell (2008).
- Moës, N., Béchet, E. y Tourbier, M. Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(12):1641–1669 (2006).
- Moës, N. y Belytschko, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833 (2002a).
- Moës, N. y Belytschko, T. X-FEM, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11(2-3-4):305–318 (2002b).
- Moës, N., Dolbow, J. y Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150 (1999).
- Moës, N., Gravouil, A. y Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11):2549–2568 (2002).
- Murakami, Y. y Nemat-Nasser, S. Interacting dissimilar semi-elliptical surface flaws under tension and bending. *Engineering Fracture Mechanics*, 16(3):373–386 (1982).
- Nagashima, T., Omoto, Y. y Tani, S. Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(8):1151–1173 (2003).
- Nikishkov, G.P., Park, J.H. y Atluri, S.N. SGBEM-FEM alternating method for analyzing 3D non-planar cracks and their growth in structural components. *CMES (Computer Modeling in Engineering & Sciences)*, 2(2):401–422 (2001).

- Nishioka, T. y Atluri, S.N. Analytical solution for embedded elliptical cracks, and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loadings. *Engineering Fracture Mechanics*, 17(3):247–268 (1983).
- Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22):3839–3866 (1996).
- Oden, J.T., Demkowicz, L., Rachowicz, W. y Westermann, T.A. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. Part 2: A posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77:113–180 (1989).
- Oliver, J. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50):7207–7229 (2000).
- Oliver, J.L. *Triangulación de Delaunay y métodos adaptativos de elementos finitos*. Tesis doctoral, Dir. F. J. Fuenmayor, Universidad Politécnica de Valencia (1991).
- Osher, S. y Sethian, J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49 (1988).
- Palani, G.S., Iyer, N.R. y Dattaguru, B. New a posteriori error estimator and adaptive mesh refinement strategy for 2-D crack problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(6):802–819 (2006).
- Pannachet, T., Sluys, L.J. y Askes, H. Error estimation and adaptivity for discontinuous failure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(5):528–563 (2008).
- Park, H.C., Shin, S.H. y Lee, S.W. A superconvergent stress recovery technique for accurate boundary stress extraction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(9):1227–1242 (1999).
- Pereira, O.J.B.A., de Almeida, J.P.M. y Maunder, E.A.W. Adaptive methods for hybrid equilibrium finite element models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):19–39 (1999).
- Ramsay, A.C.A. y Maunder, E.A.W. Effective error estimation from continuous, boundary admissible estimated stress fields. *Computers & Structures*, 61(2):331–343 (1996).
- Rank, E. y Zienkiewicz, O.C. A simple error estimator in the finite element method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3(3):243–249 (1987).
- Ródenas, J.J., Díez, P., González-Estrada, O.A. y Fuenmayor, F.J. Accurate upper bound of the discretization error in XFEM through a recovery-based technique and

- error estimation of the recovered solution. En *8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8). 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)*, Schrefler, B.A. y Perego, U., editores. CINME (2008a).
- Ródenas, J.J., Duflo, M., Bordas, S., Giner, E., González-Estrada, O.A. y Fuenmayor, F.J. Comparison of recently developed recovery type discretization error estimators for the extended finite element method. En *8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8). 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)*, Schrefler, B.A. y Perego, U., editores. CINME (2008b).
- Ródenas, J.J., Fuenmayor, F.J. y Vercher, A. Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: the SPR-C technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(6):705–727 (2007).
- Ródenas, J.J., Giner, E., Tarancón, J.E. y González, O.A. A recovery error estimator for singular problems using *singular+smooth* field splitting. En *Fifth International Conference on Engineering Computational Technology*, Topping, B.H.V., Montero, G. y Montenegro, R., editores. Civil-Comp Press, Stirling, Scotland (2006).
- Ródenas, J.J., González-Estrada, O.A., Tarancón, J.E. y Fuenmayor, F.J. A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular+smooth stress field splitting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(4):545–571 (2008c).
- Ródenas, J.J., Tur, M., Pedrosa, A. y Rubio, F. Técnica SPR con restricciones para forzar el cumplimiento de ecuaciones de equilibrio. Aplicación a problemas de contacto. En *Métodos Computacionais em Engenharia*, Soares, C., editor. Laboratório Nacional de Engenharia Civil (2004).
- Remmers, J.J.C., Wells, G.N. y Borst, R.d. A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(13):2013–2040 (2003).
- Rice, J.R. A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379–386 (1968).
- Réthoré, J., Gravouil, A. y Combescure, A. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(5):631–659 (2005).
- Sadeghirad, A. y Mohammadi, S. Equilibrium on line method (ELM) for imposition of Neumann boundary conditions in the finite point method (FPM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(1):60–86 (2007).
- Sethian, J.A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Nat. Acad.*, 93(4):1591–1595 (1996).

- Sethian, J.A. Fast marching methods. *SIAM Review*, 41(2):199–235 (1999a).
- Sethian, J.A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science*. Cambridge University Press (1999b).
- Shih, C. y Asaro, R. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I - small scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 8:537–545 (1988).
- Shih, C.F., Moran, B. y Nakamura, T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of Fracture*, 30(2):79–102 (1986).
- Simo, J.C., Oliver, J. y Armero, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5):277–296 (1993).
- Stazi, F.L., Budyn, E., Chessa, J. y Belytschko, T. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 31(1-2):38–48 (2003).
- Stein, E., Ramm, E. y Rannacher, R. *Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics*. Wiley, Chichester (2003).
- Stewart, J.R. y Hughes, T.J.R. A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(1-2):1–22 (1998).
- Stolarska, M., Chopp, D.L., Moës, N. y Belytschko, T. Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(8):943–960 (2001).
- Strang, G. y Fix, G. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1973).
- Strouboulis, T., Babuska, I., Datta, D.K., Copps, K. y Gangaraj, S.K. A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part I: A posteriori estimation of the error in the von Mises stress and the stress intensity factor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):261–294 (2000a).
- Strouboulis, T., Babuška, I. y Gangaraj, S.K. Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution - Part II: Bounds for the energy norm of the error in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):427–475 (2000b).
- Strouboulis, T., Babuška, I. y Copps, K.L. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69 (2000c).

- Strouboulis, T., Copps, K. y Babuška, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32-33):4081–4193 (2001).
- Strouboulis, T., Zhang, L. y Babuscaronka, I. Assessment of the cost and accuracy of the generalized FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(2):250–283 (2007).
- Strouboulis, T., Zhang, L., Wang, D. y Babuška, I. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(9-12):852–879 (2006).
- Sukumar, N., Chopp, D.L. y Moran, B. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(1):29–48 (2003).
- Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N. y Belytschko, T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47):6183–6200 (2001).
- Sukumar, N., Huang, Z.Y., Prévost, J.H. y Suo, Z. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(8):1075–1102 (2004).
- Sukumar, N., Moran, B., Black, T. y Belytschko, T. An element-free galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 20(1-2):170–175 (1997).
- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. y Belytschko, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11):1549–1570 (2000).
- Sukumar, N. y Prévost, J.H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 40(26):7513–7537 (2003).
- Szabó, B.A. y Babuška, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York (1991).
- Tabbara, M., Blacker, T. y Belytschko, T. Finite element derivative recovery by moving least square interpolants. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 117(1-2):211–223 (1994).
- Tarancón, J.E., Vercher, A., Giner, E. y Fuenmayor, F.J. Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1):126–148 (2009).
- Ventura, G. On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(5):761–795 (2006).

- Ventura, G., Xu, J.X. y Belytschko, T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(6):923–944 (2002).
- Verfürth, R. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, Chichester; New York (1996).
- Vergara, M., Provenzano, S., Bloem, C. y Rivas, F. Combined techniques for 3D stresses smoothing. En *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Automatic Control, Modeling & Simulation*, Demiralp, M. y Mastorskis, N., editores (2007).
- Vijayakumar, K. y Atluri, S.N. An embedded elliptical crack, in an infinite solid, subject to arbitrary crack-face tractions. *ASME Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 48:88–96 (1981).
- Wiberg, N.E. y Abdulwahab, F. Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(16):2703–2724 (1993).
- Wiberg, N.E., Abdulwahab, F. y Ziukas, S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(20):3417–3440 (1994).
- Xiao, Q.Z. y Karihaloo, B.L. Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 26(8):719–729 (2003).
- Xiao, Q.Z. y Karihaloo, B.L. Statically admissible stress recovery using the moving least squares technique. En *Progress in Computational Structures Technology*, Topping, B.H.V. y Soares, C.A.M., editores, páginas 111–138. Saxe-Coburg Publications, Stirling, Scotland (2004).
- Xiao, Q.Z. y Karihaloo, B.L. Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(9):1378–1410 (2006).
- Xu, G. y Ortiz, M.A. A variational boundary integral equation method for the analysis of 3D cracks of arbitrary geometry modeled as continuous distribution of dislocation loops. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(21):3675–3701 (1993).
- Xu, Y., Moran, B. y Belytschko, T. Self-similar crack expansion method for three-dimensional crack analysis under mixed mode loading conditions. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 65(3):557–565 (1998).
- Yau, J., Wang, S. y Corten, H. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2):335–341 (1980).

- Yazdani, A.A., Gakwaya, A. y Dhatt, G. An improved superconvergent patch recovery technique for the axisymmetrical problems. *Computers & Structures*, 66(6):799–821 (1998).
- Yazid, A., Abdelkader, N. y Abdelmadjid, H. A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12):4269–4282 (2009).
- Zhang, Z. Ultraconvergence of the patch recovery technique. *Mathematics of computation*, 65(216):1431–1437 (1996).
- Zhang, Z. y Zhu, J.Z. Analysis of the superconvergent patch recovery technique and a posteriori error estimator in the finite element method (ii). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):159–170 (1998).
- Zhong, H.G. *Estimateurs d'erreur a posteriori et adaptation de maillages dans la méthode des éléments finis*. Tesis doctoral, Dir. P. Beckers, Universidad de Lieja, Bélgica (1991).
- Zhu, Q.D. y Lin, Q. *Superconvergence theory of the finite element method*. Hunan Science Press, Hunan, China (1989).
- Zi, G., Song, J.H., Budyn, E., Lee, S.H. y Belytschko, T. A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(5):901–915 (2004).
- Zi, G. y Belytschko, T. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(15):2221–2240 (2003).
- Zi, G., Chen, H., Xu, J. y Belytschko, T. The extended finite element method for dynamic fractures. *Shock and Vibration*, 12(1):9–23 (2005).
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R. *The Finite Element Method*, volumen 1. McGraw-Hill, UK, 4 edición (1989).
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R. *The Finite Element Method: The Basis*, volumen 1. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 5 edición (2000).
- Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. A simple error estimation and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357 (1987).
- Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364 (1992a).
- Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part II: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365–1382 (1992b).

- Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z. Superconvergence and the superconvergent patch recovery. *Finite Elements in Analysis and Design*, 19(1-2):11–23 (1995).
- Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. y Wu, J. Superconvergent patch recovery techniques - some further tests. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3):251–258 (1993).