



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA

  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño



# ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL E INTRODUCCIÓN A LOS ENSAYOS DE VIBRACIÓN EN TIERRA

Análisis Discreto

Autor

**Adrián Camblor Gómez**

Tutor

**Mario Lázaro Navarro**

Co-Tutor

**José Francisco Roger Verdeguer**

Trabajo de Fin de Grado

Ingeniería Aeroespacial

**Universidad Politécnica de Valencia**

Valencia - Septiembre de 2016

# **ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL E INTRODUCCIÓN A LOS ENSAYOS DE VIBRACIÓN EN TIERRA**

Análisis Discreto

**Adrián Cambor Gómez**  
Ingeniería Aeroespacial,  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño,  
Universidad Politécnica de Valencia

Septiembre de 2016

## **Resumen**

# Agradecimientos

Para empezar, me gustaría dar las gracias a mi tutor en este Trabajo de Fin de Grado, Mario Lázaro Navarro. Su motivación, predisposición y trabajo han sido fundamentales a la hora de dar forma a este proyecto cuando tan solo era una idea. Sin su gran aportación, este trabajo hubiera tenido mucha mas dificultad y requerido mas tiempo.

Por último, quisiera mencionar a toda mi familia que me ha hecho llegar hasta aquí, en especial a mi padre Javier y madre Marina que han sido mi brújula en todo este viaje. Gracias.

## Resumen

El presente Trabajo de Investigación aborda el análisis modal de tres sistemas presentes en el campo de la aeronáutica. Antes del estudio de las estructuras, se realiza una introducción teórica de todos los procedimientos que se aplican en este tipo de ensayos que abarca una gran parte del trabajo. Además, también se describen los procedimientos y herramientas empleadas en los ensayos de vibración en tierra (GVT). Los ensayos GVT tienen lugar en las fases finales del diseño de aeronaves y su compromiso con la seguridad estructural es muy crítico. En lo que se refiere al estudio modal experimental, el objetivo siempre ha sido la obtención de las frecuencias naturales y los modos de vibración. Finalmente, también se han buscado evidencias de dichas estimaciones son correctas y, por tanto, tengan algún fin dentro del mundo de la ingeniería.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>1. Introducción al Análisis Modal</b>	<b>8</b>
1.1. ¿ Qué es el análisis modal? . . . . .	9
1.2. ¿ Qué son los ensayos modales? . . . . .	10
1.3. Aplicaciones del análisis modal . . . . .	11
1.3.1. Corrección de problemas . . . . .	11
1.3.2. Correlación entre elementos finitos y resultados experimentales . . . . .	11
1.3.3. Sensibilidad del análisis . . . . .	12
1.3.4. Reducción de los modelos matemáticos . . . . .	12
1.3.5. Identificación de fuerzas . . . . .	12
1.3.6. Predicción de la respuesta . . . . .	12
1.3.7. Acoplamiento subestructural . . . . .	13
1.3.8. Detección de daños estructurales . . . . .	13
1.4. Aplicaciones prácticas del análisis modal . . . . .	13
<b>2. Matemática empleada en Análisis Modal</b>	<b>15</b>
2.1. Conceptos básicos de matrices . . . . .	15
2.1.1. Traza de una matriz . . . . .	15
2.1.2. Determinante de una matriz . . . . .	16
2.1.3. Norma de una matriz . . . . .	16
2.1.4. Rango de una matriz . . . . .	17
2.1.5. Similitud de matrices . . . . .	18
2.2. Ecuaciones lineales simultaneas . . . . .	18
2.3. Inversión de matrices . . . . .	19
2.3.1. Inversión de matrices no singulares . . . . .	19
2.3.2. Inversión de matrices cuadradas complejas . . . . .	20
2.3.3. Pseudo-inversa de una matriz . . . . .	20
2.4. Descomposición de matrices . . . . .	21
2.4.1. Descomposición LU . . . . .	21
2.4.2. Descomposición QR . . . . .	21
2.4.3. Descomposición submatricial . . . . .	21

2.5. El problema matricial de autovalores . . . . .	22
2.6. Derivadas de matrices . . . . .	24
2.7. Perturbaciones . . . . .	24
2.8. El método de mínimos cuadrados . . . . .	25
2.9. Expansión parcial de fracciones . . . . .	26
2.10. Transformada de Laplace y funciones de transferencia . . . . .	28
2.11. Series de Fourier y transformada de Fourier . . . . .	29
2.12. Polos y ceros en funciones polinómicas . . . . .	30
2.13. Concepto de Espacio-Estado . . . . .	31
2.14. Análisis de series temporales . . . . .	32
2.14.1. Modelo AR . . . . .	33
2.14.2. Modelo ARMA . . . . .	34
2.15. Transformada Z . . . . .	35
<b>3. Teoría básica de vibraciones</b>	<b>37</b>
3.1. Modelización de problemas vibratorios a través de modelos matemáticos . . . . .	37
3.2. Conceptos básicos de vibración . . . . .	37
3.3. Vibraciones libres en un sistema de 1 GDL . . . . .	38
3.4. Vibraciones armónicas en un sistema de 1 GDL . . . . .	39
3.5. Vibración de un sistema de 1 GDL debido a una fuerza arbitraria . . . . .	42
3.6. Vibración libre y forzada de un sistema de varios GDL . . . . .	42
3.7. Aproximación energética . . . . .	44
3.7.1. Principio de trabajos virtuales . . . . .	45
3.7.2. Principio D'Alembert . . . . .	46
3.7.3. Energía cinética . . . . .	46
3.7.4. Energía potencial . . . . .	47
3.7.5. Ecuación de Lagrange . . . . .	49
<b>4. A.M. sistema <math>n</math> GDL amortiguado</b>	<b>51</b>
4.1. Modelos de amortiguamiento proporcional . . . . .	51
4.2. Modelo de amortiguamiento viscoso no proporcional . . . . .	53
4.3. Modelo de amortiguamiento estructural no proporcional . . . . .	55
4.4. Modos con masa normalizada . . . . .	55
4.5. Funciones de respuesta en frecuencia . . . . .	56
4.5.1. Matrices de rigidez y receptancia . . . . .	56
4.5.2. Composición de la receptancia (FRF) . . . . .	56
4.5.3. Diagramas y propiedades de FRF . . . . .	57
4.6. Respuesta en el tiempo . . . . .	62
4.7. Observaciones acerca de los modos complejos . . . . .	63

<b>5. Medida de la respuesta en frecuencia</b>	<b>65</b>
5.1. Introducción . . . . .	65
5.2. Medidas generales de instalación . . . . .	66
5.2.1. Mecanismos de excitación . . . . .	66
5.2.2. Acelerómetros . . . . .	67
5.2.3. Transductores de fuerza . . . . .	68
5.3. Preparación para el ensayo estructural . . . . .	69
5.4. Selección de las fuerzas de excitación . . . . .	70
5.4.1. Excitación sinusoidal . . . . .	71
5.4.2. Excitación aleatoria . . . . .	71
5.4.3. Excitación pseudo-aleatoria . . . . .	72
5.4.4. Excitación de impacto . . . . .	72
5.5. Diferentes estimaciones de FRF y efecto del ruido . . . . .	72
5.6. Dos imperfecciones de la medición de datos . . . . .	74
5.7. Evaluación inicial de las mediciones FRF . . . . .	76
5.7.1. Chequeo de repetitividad . . . . .	76
5.7.2. Chequeo de reciprocidad . . . . .	76
5.7.3. Chequeo de linealidad . . . . .	76
5.7.4. Características especiales de FRF . . . . .	77
<b>6. Dominio de la frecuencia</b>	<b>79</b>
6.1. Introducción . . . . .	79
6.2. Detección de los modos de vibración . . . . .	80
6.3. Obtención de datos modales a partir de FRF . . . . .	82
6.3.1. Fracciones racionales polinómicas . . . . .	82
6.3.2. Estructuras ligeramente amortiguadas . . . . .	84
<b>7. Dominio del tiempo</b>	<b>86</b>
7.1. Breve Resumen . . . . .	86
<b>8. Métodos de análisis MIMO</b>	<b>88</b>
8.1. Introducción . . . . .	88
8.2. Estimación FRF mediante ensayo MIMO . . . . .	89
8.2.1. Sin ruido a la entrada - $[\hat{H}_1(\omega)]$ modelo . . . . .	90
8.2.2. Sin ruido a la salida - $[\hat{H}_2(\omega)]$ modelo . . . . .	93
8.2.3. Con ruido a la entrada y salida - $[\hat{H}_3(\omega), \hat{H}_4(\omega)]$ , modelo . . . . .	93
8.3. Método poli-referencia (frecuencia) . . . . .	94
<b>9. Modificaciones Locales Estructurales</b>	<b>98</b>
9.1. Objetivos . . . . .	98
9.2. Cambios en la masa y rigidez . . . . .	99
9.2.1. Modificación única . . . . .	99

<b>10.Ensayos GVT</b>	<b>101</b>
10.1. Introducción . . . . .	101
10.1.1. Definición y fundamentos . . . . .	102
10.1.2. Historia, retos y tendencias . . . . .	103
10.2. Normativa aplicable . . . . .	104
10.2.1. Normativa europea EASA CS-25 . . . . .	105
10.2.2. Normativa americana FAR Parte 23 . . . . .	106
10.3. Metodología . . . . .	106
10.3.1. Instrumentación y configuración de equipos . . . . .	106
10.3.2. Procedimiento PRM . . . . .	109
10.3.3. Procedimiento PSM . . . . .	111
10.3.4. Determinación de la frecuencia de excitación . . . . .	112
10.3.5. Determinación de la disposición nodal . . . . .	113
10.3.6. Test de la reciprocidad de Maxwell . . . . .	113
<b>11.Ensayo I</b>	<b>115</b>
11.1. Geometría / Planos . . . . .	115
11.2. Discretización nodal . . . . .	116
11.3. Pre-Test Excitadores . . . . .	116
11.4. Set-Up acelerómetros . . . . .	118
11.5. Resultados . . . . .	119
11.6. Solución Analítica . . . . .	122
<b>12.Ensayo II</b>	<b>129</b>
12.1. Geometría / Planos . . . . .	129
12.2. Discretización nodal . . . . .	130
12.3. Resultados . . . . .	130
12.4. Solución Analítica . . . . .	131
<b>13.Ensayo III</b>	<b>139</b>
13.1. Geometría / Planos . . . . .	139
13.2. Discretización nodal . . . . .	140
13.3. Resultados . . . . .	141
<b>14.Pliego de Condiciones</b>	<b>153</b>
14.1. Introducción . . . . .	153
14.2. Recomendaciones durante el ensayo . . . . .	153
<b>15.Presupuesto</b>	<b>155</b>
15.1. Introducción . . . . .	155
15.2. Consideraciones Presupuestos . . . . .	155
15.3. Presupuesto parcial en mano de obra . . . . .	156
15.4. Presupuesto parcial de adquisición y amortización de equipos electrónicos . . . . .	156

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	7
15.5. Presupuesto parcial en licencias de software . . . . .	157
15.6. Presupuesto Total . . . . .	157
<b>Bibliografía</b>	<b>158</b>

# 1

## Introducción al Análisis Modal

Durante los últimos veinte años, el análisis modal se ha convertido en una tecnología de mayor importancia a la hora de determinar, mejorar y optimizar las características dinámicas de las estructuras en el mundo de la ingeniería. Además de tener una vital importancia en los ámbitos del automovilismo y la aeronáutica, el análisis modal también tiene aplicaciones en estructuras civiles, acústica de instrumentos, estructuras espaciales e incluso biotecnología. Los actuales y complejos diseños de las estructuras mecánicas, aeronáuticas o civiles requieren un menor peso con una mayor flexibilidad estructural sin penalizar la resistencia de dicha estructura. Por ejemplo, en el ámbito espacial, las antenas de los satélites deben ser lo más ligeras posibles con el fin de minimizar sus propiedades inerciales durante las operaciones. Estas rigurosas demandas favorecen la aparición de vibraciones no deseadas en la estructura. Otro hecho relevante en la vida moderna es el aumento de demanda en la seguridad y fiabilidad sobre las nuevas estructuras a través de las regulaciones de los gobiernos actuales. Este último tipo de demandas son debidas a la población y consumidores.

Todo esto ha dado lugar a nuevos desafíos científicos que necesitan de un mayor conocimiento del mundo estructural. El reto descansa en una mejor comprensión de las propiedades dinámicas de dichas estructuras a través de los estudios analíticos, numéricos, experimentales o una combinación de los mismos. Estas características dinámicas se han convertido en una de las principales consideraciones en los nuevos diseños y gracias al desarrollo del análisis mediante elementos finitos se ha logrado estimar la dinámica de las estructuras en las fases de diseño. Este análisis numérico necesita un riguroso fundamento teórico para la validación de los resultados obtenidos. Esta

responsabilidad descansa en el análisis modal.

Cabe señalar que el análisis numérico por si solo no es capaz de predecir completamente el comportamiento de las estructuras a causa de ciertas propiedades dinámicas, como el amortiguamiento o la no linealidad, que requieren de un estudio especializado. Por otro lado, es necesario establecer unas condiciones de contorno no conocidas a priori que complementen el modelado estructural. Es en este punto cuando los análisis experimentales son imprescindibles para la obtención completa de las propiedades dinámicas. Los estudios experimentales están alimentados por la teoría de análisis modal que ha sido desarrollada gracias a la transformada de Fourier.

### 1.1. ¿Qué es el análisis modal?

El análisis modal es el conjunto de la determinación de las propiedades dinámicas inherentes de un sistema en forma de: frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y forma de los modos de vibración; y el empleo de ellas para la creación de modelos matemáticos que predigan el comportamiento dinámico de una estructura. El modelo matemático que se formulará está referido al modelo modal del sistema y la información acerca de sus características se denomina como *datos modales*.

El análisis modal está basado en el hecho de que la respuesta vibratoria de un sistema dinámico lineal estacionario puede ser expresada como una combinación lineal de movimientos armónicos simples llamados *modos naturales de vibración*. Este concepto es similar al empleado en la superposición de Fourier (ondas senos y ondas cosenos) para la representación de ondas de forma compleja. Cada modo de vibración se describe de forma modal, es decir, a través de su: frecuencia natural, factor de amortiguamiento y características de su patrón de desplazamiento (forma del modo). La forma modal puede ser real o incluso compleja y está correspondida a una frecuencia natural. El grado de contribución de cada modo a la respuesta vibratoria del sistema viene determinado por el tipo de excitación realizada y la forma que tenga dicho sistema.

El modelo físico de un sistema dinámico viene recogido mediante su masa, su rigidez y su amortiguamiento, previamente fijados por un análisis teórico modal. Estas propiedades pueden venir dadas en forma de ecuaciones diferenciales. Una evidencia de esto es la ecuación de vibración uniforme de una cuerda establecida a partir de su distribución de masa y propiedades elásticas. La solución de dicha ecuación proporciona la frecuencia natural y la forma de los modos de la cuerda, además de su respuesta forzada. Sin embargo, si se deseara tener un modelo mucho más realista se debería tener en

consideración la distribución espacial de la masa, rigidez y amortiguamiento por lo que sería necesario el empleo de matrices. Estas matrices dan lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema. El principio de superposición de sistemas dinámicos lineales permite la transformación de dichas ecuaciones en un problema de autovalores. La resolución de este problema dará lugar a los datos modales del sistema.

La discretización de casi cualquier sistema dinámico lineal vino impulsada por el análisis de elementos finitos moderno. Este hecho produjo una gran mejora en la capacidad y alcance de la teoría de análisis modal. Por el contrario, cabe resaltar que al ámbito de análisis experimental se le denomina *ensayo modal*.

## 1.2. ¿Qué son los ensayos modales?

Los ensayos modales son una técnica experimental usada a partir del modelo modal de un sistema lineal estacionario. Las bases teóricas de esta técnica aseguran establecer una relación entre la respuesta vibratoria en un punto del sistema y la excitación en el mismo o otro punto del sistema como una función de excitación en frecuencia. Dicha relación, que en la mayoría de los casos será una relación matemática compleja, se conoce como *función de respuesta en frecuencia*, o abreviado, *FRF*. Es muy frecuente que dichas funciones se representen en una matriz que englobe todo el sistema. Dicha matriz se caracteriza por ser simétrica, demostrando así el principio de reciprocidad de Maxwell.

La realización de los ensayos modales conlleva la medición de las FRF de una estructura. La forma más sencilla de medir una FRF es a través de la introducción de una excitación determinada en un punto determinado de la estructura y la medición de la respuesta vibratoria en uno o varios puntos. Es muy importante que durante el ensayo exista ausencia de excitaciones externas. La excitación a introducir puede ser a una frecuencia determinada, una función sinusoidal escalonada, una señal aleatoria o ruido blanco. La excitación suele ser cuantificada mediante un transductor de fuerza en el punto de excitación mientras que las respuestas vibratorias son recogidas a través de acelerómetros o sondas. Tanto excitación como respuestas llegan al analizador que se encarga del cálculo de las FRF.

Una consideración práctica es el número de FRF necesarias para poder estimar adecuadamente el modelo modal del sistema dinámico ensayado. Por ejemplo, en el caso de que la excitación sea un impulso (ensayo con martillo) lo más frecuente es medir la respuesta vibratoria del sistema en el mismo punto e ir cambiando los puntos de excitación. El conjunto de FRF medidas

conformara una matriz fila y teóricamente será suficiente para determinar el modelo modal buscado. Con los datos necesarios, el análisis numérico será capaz de hallar los parámetros modales mediante curvas de ajuste.

En resumen, los ensayos modales engloban 3 fases destacables: el test de preparación para ensayo, la medición de las respuestas en frecuencia y la identificación de los parámetros modales. El test preparatorio abarca: la selección del tipo de soporte que tendrá la estructura durante el ensayo, el tipo de fuerza de excitación que se someterá, los puntos de excitación donde se aplicaran las perturbaciones, el hardware a utilizar para medir la excitación y respuestas, establecimiento de los nodos que conformaran el sistema (discretización) e identificación de posibles mecanismos que conduzcan a imprecisiones en las medidas. Al final del ensayo modal, las FRF recogidas nos permitirán realizar la identificación de los parámetros modales del sistema analizado.

### 1.3. Aplicaciones del análisis modal

Antes de abordar las aplicaciones que podría tener un análisis de estas características, es importante recordar los dos caminos de donde procede el análisis modal. El teoría modal se basa en la descripción de las propiedades físicas de donde derivara el modelo modal. Esta descripción del sistema normalmente contendrá las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de tal forma que se conecta el modelo espacial del sistema con el modelo modal. Los análisis experimentales determinan el modelo modal a partir de las FRF medidas como se ha comentado anteriormente. De esta manera, se conectan los datos de respuesta con el modelo modal. A continuación, se revisaran algunas de las aplicaciones del análisis modal.

#### 1.3.1. Corrección de problemas

El análisis experimental modal es muy frecuente utilizar sistemas dinámicos que resultan problemáticos con el fin de obtener una mejor comprensión de los posibles fallos que el sistema pueda poseer. Esta ha sido una de sus aplicaciones más populares desde su comienzo. A través de este análisis se calculan las frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y modos de vibración del sistema y, con ellos, es posible en la mayoría de los casos determinar el factor causante de los problemas que pueda tener dicho sistema.

#### 1.3.2. Correlación entre elementos finitos y resultados experimentales

Una de las aplicaciones más extendidas de este tipo de análisis es la corroboración de un modelo matemático que se aproxime al comportamiento

dinámico de una estructura. La amplia mayoría de modelos matemáticos se estiman mediante el método de los elementos finitos (FEM) basados en las matrices de masa y rigidez. Los elementos finitos son muy utilizados en la etapa de diseño pues permiten realizar variaciones en la masa y rigidez del sistema con el fin de optimizar las propiedades dinámicas de un sistema sin la necesidad de construir un prototipo. Sin embargo, este método necesita de una validación para poder ser empleado por los diseñadores. Para esclarecer que dicho modelo representa fielmente la realidad son necesarios unos ensayos experimentales sobre un modelo que certifiquen la existencia de una correlación entre ambos.

### 1.3.3. Sensibilidad del análisis

El modelo modal de un sistema dinámico puede ser utilizado para predecir la sensibilidad de los parámetros modales frente a cambios en los parámetros físicos. La principal ventaja de este método es la identificación de los cambios físicos más efectivos que producen un desplazamiento (retraso) de la frecuencia natural del sistema. Este tipo de análisis es muy útil en tareas de rediseño de las estructuras con el fin de optimizar, en todo lo posible, sus parámetros modales de la manera más eficiente.

### 1.3.4. Reducción de los modelos matemáticos

En el diseño en elementos finitos (FEM), el tamaño del modelo viene dado por el número de puntos impuestos en la discretización del sistema. Aunque el utilizar un mayor número de puntos no siempre asegura una mayor precisión en la respuesta del modelo, siempre es recomendable usar un número elevado sin comprometer mucho a la carga de cálculo de la CPU. En los casos que se desee estudiar el comportamiento de un sistema en un bajo rango de frecuencias es interesante usar un modelo matemático lo más simplificado posible.

### 1.3.5. Identificación de fuerzas

En la práctica, las fuerzas que inducen vibraciones no son siempre medibles. Sin embargo, mediante la medición de la respuesta del sistema y un modelo modal es posible identificarlas. Por ejemplo, la pérdida de un rodamiento en un turbo reactor puede dar lugar a una fuerza que origine excesivas vibraciones (llegando a comprometer la integridad del motor).

### 1.3.6. Predicción de la respuesta

Una vez estimado adecuadamente el modelo modal de un sistema, es posible estimar la respuesta que tendría dicho sistema ante la combinación de varias fuerzas de excitación. Además, el estudio de los esfuerzos de un

sistema durante sus ciclos de vida puede ser decisivo en la estimación de la vida a fatiga del componente estudiado.

### 1.3.7. Acoplamiento subestructural

Es muy frecuente en el mundo de la ingeniería el estudio del comportamiento de una estructura completa conociendo el comportamiento individual de cada uno de los componentes que la integran. Este fenómeno se conoce como el estudio del *acoplamiento subestructural*. Dada la complejidad de este acoplamiento, normalmente se suelen estudiar los componentes analíticamente de forma aislada lo cual resulta mas sencillo y el conjunto de la estructura se suele ensayar de forma experimental.

### 1.3.8. Detección de daños estructurales

La detección de daños estructurales no visibles siempre ha sido una prioridad de la industria, sobretodo en los sectores aeronáuticos y espaciales. La base teórica de esta aplicación descansa en la variación de la respuesta dinámica de los sistemas cuando se encuentran dañados. Este hecho otorga un margen de error a los usuarios antes de que se produzca un fallo catastrófico. Para que este método funcione es imprescindible tener las "huellas dactilares" de la estructura cuando se encuentra en perfectas condiciones como modelo a tener en cuenta. De esta forma, los técnicos pueden hacer una valoración objetiva de la salud estructural del sistema.

## 1.4. Aplicaciones prácticas del análisis modal

Durante los próximos años se espera una expansión de las aplicaciones del análisis modal a diversos ámbitos. La mayoría de casos han sido vistos en la ingeniería de la automoción, la aeronáutica y la mecánica en particular.

En la ingeniería automovilística, la gran demanda de seguridad en este sector ha obligado al rediseño de muchos vehículos con el fin de optimizar las propiedades dinámicas de éstos. Tiene mucho interés el estudio analítico (FEM) y experimental (análisis modal) sobre los componentes del automóvil. La tendencia de los coches futuros es una reducción de peso (menor consumo) y una mejora en la resistencia de los materiales (mayor seguridad). El análisis modal es empleado como una herramienta para comprender mejor transmisión del sonido y vibraciones a la cabina del vehículo. De esta manera, es posible aislar mejor al pasaje y hacer un automóvil mas confortable.

El estudio de la dinámica de las estructuras de aviones y naves espaciales ha sido un catalizador en el desarrollo del análisis modal. Estas estructuras tienen unos requerimientos muy estrictos y están altamente penalizadas por

el peso, por lo que siempre deben ser lo mas ligeras posibles. El análisis modal ha sido el principal medio de verificación de los modelos matemáticos de estas estructuras con la realidad. Las grandes amplitudes de las fuerzas de excitación y las respuestas vibratorias debido a las grandes dimensiones llevan al limite la teoría modal. Se hace necesario el estudio de la dinámica no lineal y del acoplamiento subestructural. Además, el análisis modal ha hecho posible la comprensión de fenómenos aeroelásticos como la divergencia y el flameo.

El empleo del análisis modal en la ingeniería civil ha sido creciente con los años, un ámbito donde el análisis estructural es critico. La gran preocupación del comportamiento dinámico de las estructuras civiles bajo seísmos y cargas aerodinámicas justifican la introducción del análisis modal en este campo. El análisis modal ha sido utilizado como un efectivo método no destructivo para localizar rápidamente la presencia de fallos críticos. Esta información resulta muy útil a la hora de establecer planes de mantenimiento en puentes y a la hora de realizar presupuestos de reparación.

Cabe destacar el uso de análisis modal en otros campos fuera de la ingeniería. Un buen ejemplo de ello es el estudio de la acústica en instrumentos musicales. Esta técnica ha sido utilizada para el estudio de instrumentos, como la guitarra y el violín. Este estudio arroja luz sobre el tema de calidad de los instrumentos de una manera mas científica frente a la subjetividad de los artesanos que fabricaban los instrumentos. En adición, la industria musical es capaz de establecer un método científico para evaluar los instrumentos fabricados.

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [1], [2], [3], [4] y [5].

# 2

## Matemática empleada en Análisis Modal

El análisis modal depende de las matemáticas para el establecimiento de los modelos modales de los sistemas dinámicos y poder analizar los datos obtenidos. Estas matemáticas engloban un rango amplio dado que se analizan los dominios de tiempo y frecuencia. Este análisis tiene que lidiar con sistemas dinámicos discretos y estructuras continuas. Los análisis analíticos y numéricos abarcan el tratamiento de curvas de ajuste, manipulación de matrices, identificación de parámetro, etc.

La transformada de Fourier es fundamental en el procesamiento de señales. Es habitual pensar que la transformada de Fourier es el punto de referencia del desarrollo de la tecnología de análisis modal. Sin ella, el análisis modal seguiría en un plano académico.

### 2.1. Conceptos básicos de matrices

La teoría matricial resulta fundamental en la teoría de análisis modal. A continuación, se refrescarán algunos conceptos.

#### 2.1.1. Traza de una matriz

La traza de una matriz se trata de una función escalar. Para una matriz  $[A]$  de dimensiones  $n \times n$ , su traza se denota como  $tr[A]$  y es definida:

$$tr[A] = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (2.1)$$

Las siguientes relaciones para la traza de una matriz se pueden verificar fácilmente.

$$\text{tr}([A] + [B]) = \text{tr}[A] + \text{tr}[B] \quad (2.2)$$

$$\text{tr}([A][B]) = \text{tr}([B][A]) \quad (2.3)$$

$$\text{tr}([A]^T) = \text{tr}[A] \quad (2.4)$$

$$\text{tr}(c * [A]) = c(\text{tr}[A]) \quad (2.5)$$

donde  $c$  es una constante.

### 2.1.2. Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada  $[A]$  de dimensiones  $n \times n$  se denota como  $|[A]|$ . Es inmediato mostrar que:

$$|[A][B]| = |[A]||[B]| \quad (2.6)$$

$$|[A]| = |[A]^T| \quad (2.7)$$

Un menor  $[M]_{ij}$  del elemento  $a_{ij}$  en la matriz  $[A]$  es un determinante de la matriz original eliminando la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima. El cofactor  $[C]_{ij}$  del elemento  $a_{ij}$  se define por:

$$[C]_{ij} = (-1)^{i+j} [M]_{ij} \quad (2.8)$$

Por ejemplo

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; |[C]_{21}| = (-1)^{2+1} * |[M]_{21}| = -3$$

De esta forma, el determinante de una matriz  $[A]$  de dimensiones  $n \times n$ , seleccionando la fila  $r$ -ésima, se puede expresar como:

$$|[A]| = \sum_{i=1}^n a_{ir} |[C]_{ir}| \quad (2.9)$$

### 2.1.3. Norma de una matriz

El nombre técnico de la magnitud de una matriz  $[A]$  se llama *norma* y se denota como  $\|[A]\|$ . La estimación de la norma de una matriz puede parecerse a la norma de un vector cuya función asigna al vector un número

real positivo. Normalmente, la p-norma de un vector  $x$  de dimensiones  $n \times 1$  se define como:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

Se pueden definir varias normas a partir de la anterior definición:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{Suma de magnitudes} \quad (2.11)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{Norma euclidea} \quad (2.12)$$

$$\|x\|_3 = \max(|x_i|) \quad \text{Norma de maxima magnitud} \quad (2.13)$$

La norma de  $[A]$  se puede desarrollar tomando como referencia las normas de vectores mencionadas.

$$\|[A]\|_{1c} = \max \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \text{ donde } 1 < j < n \quad (\text{Maxima suma por columna}) \quad (2.14)$$

$$\|[A]\|_{1r} = \max \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \text{ donde } 1 < i < n \quad (\text{Maxima suma por fila}) \quad (2.15)$$

$$\|[A]\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad (\text{Norma euclidea}) \quad (2.16)$$

Por ejemplo, considerando la matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

tendremos las siguientes normas:

$$\|[A]\|_{1c} = 16, \|[A]\|_{1r} = 17, \|[A]\|_e = 15$$

#### 2.1.4. Rango de una matriz

Una matriz no singular es aquella cuyo determinante no es nulo. El rango de una matriz  $[A]$  es igual al orden de la submatriz mas grande de  $[A]$ .



$$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Dependiendo del número de columnas y filas, y la condición de  $[A]$ ; hay 3 tipos de sistemas lineales algebraicos de ecuaciones:

$$\begin{cases} m = n & \text{solucion unica} \\ m > n & \text{sistema indeterminado} \\ m < n & \text{sistema incompatible} \end{cases}$$

El análisis modal se basará primordialmente en el sistemas de solución única.

## 2.3. Inversión de matrices

La inversión de matrices es un problema muy usual en el mundo de la ingeniería. Por ejemplo, en el análisis de elementos finitos estáticos, la inversa de la matriz de rigidez es necesaria para obtener los resultados de los análisis estructurales. Las matrices empleadas pueden ser reales no singulares, complejas cuadradas o singulares.

### 2.3.1. Inversión de matrices no singulares

Si el producto de dos matrices cualquier da lugar a la matriz identidad  $[I]$ , se dice que una matriz es la inversa de la otra y, por tanto, son matrices invertibles. Si  $[A][B] = [I]$ , entonces  $[A]^{-1} = [B]$  y  $[B]^{-1} = [A]$ .

La inversa de una matriz se puede calcular:

$$[A]^{-1} = \frac{[a]}{|[A]|} \quad (2.23)$$

donde  $[a]$  es la adjunta de la matriz  $[A]$ . Sin embargo, esta fórmula solamente es empleada para matrices pequeñas. Cuando se requieran invertir matrices mayores este método se vuelve ineficiente y se suele plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[A][X] = [I] \quad (2.24)$$

donde  $[X]$  es la matriz inversa buscada.

### 2.3.2. Inversión de matrices cuadradas complejas

Una matriz compleja  $[C]$  se puede invertir usando el mismo procedimiento de inversión que para matrices reales. La idea es aplicar el mismo sistema de ecuaciones que iguale a la identidad la matriz real y anule la matriz imaginaria.

$$[C] = [A] + j[B] \quad (2.25)$$

$$[C]^{-1} = [X] + j[Y] \quad (2.26)$$

El sistema de ecuaciones a resolver del producto de las dos matrices es:

$$\begin{cases} [A][X] - [B][Y] = [I] \\ [A][X] + [B][Y] = [0] \end{cases} \quad (2.27)$$

Alternativamente, las matrices  $[X]$  y  $[Y]$  se pueden determinar directamente de la definición de matriz inversa. Si  $[A]$  es no singular, se llegaría a:

$$\begin{cases} [X] = ([A] + [B][A]^{-1}[B])^{-1} \\ [Y] = -[A]^{-1}[B]([A] + [B][A]^{-1}[B])^{-1} \end{cases} \quad (2.28)$$

Si  $[B]$  es matriz no singular, se llegaría a:

$$\begin{cases} [X] = [B]^{-1}[A]([B] + [A][B]^{-1}[A])^{-1} \\ [Y] = -([B] + [A][B]^{-1}[A])^{-1} \end{cases} \quad (2.29)$$

Si  $[A], [B]$  son ambas matrices no singulares, las ecuaciones (2.28,2.29) son ambas válidas también.

### 2.3.3. Pseudo-inversa de una matriz

Cuando una matriz no es cuadrada, de rango máximo o ambas, la inversa de una matriz vista no se puede aplicar. Se requiere el uso de una pseudo-inversa. El caso mas simple de pseudo-inversa ocurre cuando se resuelve un sistema de ecuaciones del tipo:

$$[A]_{m \times n} \{x\}_{n \times 1} = \{b\}_{m \times 1} \quad \text{para } m > n \quad (2.30)$$

Si las columnas de  $[A]$  son independientes, la solución es fácil de obtener. Premultiplicando por  $[A]^T$  a ambos lados de la ecuación.

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{b\} \quad (2.31)$$

Como  $[A]^T [A]$  es invertible, la solución al sistema se simplifica a:

$$\{x\} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \{b\} \quad (2.32)$$

Por lo tanto, la pseudo-inversa de  $[A]$ , denotada como  $[A]^+$ , se puede calcular mediante:

$$[A]^+ = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T \quad (2.33)$$

De la misma forma, la pseudo-inversa de  $[A]$  de dimensiones  $m \times n$ , donde  $m < n$ , y rango  $m$  viene dada por:

$$[A]^+ = [A]^T([A][A]^T)^{-1} \quad (2.34)$$

## 2.4. Descomposición de matrices

### 2.4.1. Descomposición LU

La descomposición LU consiste en la transformación de una matriz cuadrada en un producto de matrices triangulares superior e inferior. Esta descomposición puede obtenerse de la eliminación gaussiana la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

$$[A] = [L][U] \quad (2.35)$$

donde  $[L]$  es una matriz diagonal inferior y  $[U]$  es una matriz diagonal superior.

### 2.4.2. Descomposición QR

La descomposición QR de una matriz cuadrada  $[A]$  de dimensiones  $p \times p$  y rango  $p$  consiste en:

$$[A] = [Q][R] \quad (2.36)$$

donde,  $[Q]$  es una matriz ortogonal  $p \times p$  de rango máximo y  $[R]$  es una matriz diagonal superior de dimensiones  $p \times p$  y rango máximo también.

En el caso de que la matriz  $[A]$  sea no cuadrada o no tenga rango máximo, la descomposición QR sigue siendo posible. Asumiendo que la matriz  $[A]$  sea en este caso de dimensiones  $p \times q$  y rango  $k$ . La descomposición QR dará lugar a una matriz ortogonal  $[Q]$  de dimensiones  $p \times k$  y una matriz diagonal superior  $[R]$  de dimensiones  $k \times q$  y rango  $k$ .

### 2.4.3. Descomposición submatricial

La descomposición submatricial es muy empleada en análisis modal para descubrir o utilizar la conectividad estructural del sistema dinámico. El concepto de aproximación submatricial se puede aplicar a un sistema de 3

masas y 3 muelles (3 grados de libertad).

La matriz de rigidez se puede descomponer usando los 3 valores de las rigideces de cada muelle:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_3 \end{bmatrix} = [K]_1 + [K]_2 + [K]_3 \quad (2.37)$$

donde las 3 submatrices son:

$$[K]_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$[K]_2 = k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$[K]_3 = k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La ventaja de la descomposición matricial es obvia. Desde que se ha factorizado la conectividad estructural, la matriz  $[K]$  viene determinada por 3 rigideces de los muelles ( $k_1, k_2, k_3$ ) mientras que sin conocer la conectividad se tendrían que calcular 7 valores no nulos de la matriz.

## 2.5. El problema matricial de autovalores

Los problemas de autovalores son muy frecuentes encontrarlos en el ámbito de la ingeniería, pero sobretodo son muy comunes en el análisis modal. La solución del problema de autovalores proporciona información importante sobre la dinámica del sistema. Se considerará primero un problema estándar (y el más simple) de autovalores. Una matriz real  $[A]$  de  $n \times n$  de rango máximo posee autovalores  $\lambda_r$  y autovectores  $\{\varphi\}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) distintos de cero, si:

$$([A] - \lambda_r[I])\{\varphi\}_r = \{0\} \quad (2.41)$$

Del álgebra lineal, se conoce que la ecuación (2.41) se cumple si:

$$|[A] - \lambda_r[I]| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

Este determinante puede expandirse hasta formar un polinomio de orden  $n$ -ésimo para  $\lambda$ . Las raíces de este polinomio serán los autovalores de  $[A]$ . La ecuación (2.42) sostiene que  $[A]$  siempre deberá tener  $n$  (no necesariamente distintos de cero) autovalores. Para cada autovalor  $\lambda$  le corresponde un autovector  $\{\varphi\}$  que se puede calcular de la ecuación (2.41). De esta manera,  $[A]$  tiene  $n$  autovectores.

Si  $[A]$  es un sistema matricial de un sistema de varios grados de libertad no amortiguado ( $[M]^{-1}[K]$ ), las raíces cuadradas de los autovalores serán las frecuencias naturales del sistema y los autovectores representaran los modos de vibración de la estructura. Un autovalor nulo indicara que se trata de un modo de vibración del tipo solido rígido. Si algún autovalor se repite habrá modos de vibración idénticos.

Si se añade un termino  $\tau\{\varphi\}$ , donde  $\tau$  es una constante, a ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$([A] + \tau[I])\{\varphi\} = (\lambda + \tau)\{\varphi\} \quad (2.43)$$

Los autovalores de  $[A]$  han cambiado con la adición de  $\tau$ , sin embargo los autovectores se mantienen constantes. Este hecho es una importante característica a tener en cuenta para resolver los problemas de autovalores. Los métodos LR y QR preservan la similitud de la matriz y quizás son los mejores métodos actuales para la resolución de los autovalores. El metodo LR requiere que la matriz se descomponga en un producto de matrices triangulares inferior y superior ( $[L], [R]$ ).

El método LR es notablemente fácil de implementar. Cuando los autovalores no están bien separados, la descomposición de  $[A]$  en matrices triangulares se convierte difícil numéricamente. Para solventar este problema, se modifica el método cambiando la matriz  $[L]$  por una matriz ortogonal  $[Q]$ . Con operaciones similares, el método QR también sera capaz de hallar los autovalores de  $[A]$ .

La obtención de los autovectores es mucho mas sencilla. Mediante la sustitución de los autovalores obtenidos en la ecuación (2.41) se obtienen las soluciones no triviales del vector  $\{\varphi\}_r$ .

Para un sistema de varios grados de libertad sin amortiguamiento con la matriz masa  $[M]$  y rigidez  $[K]$ , el problema de autovalores derivado de la ecuación diferencial es:

$$[K]\{\varphi\} = \lambda[M]\{\varphi\} \quad (2.44)$$

Esto es conocido como el problema de autovalores general. Si  $[M]$  es

positiva definida, se puede descomponer mediante raíces cuadradas como  $[M] = [L][L]^T$ . La ecuación (2.44) se puede remodelar a:

$$([L]^{-1}[K][L]^{-T})([L]^T\{\varphi\}) = \lambda([L]^T\{\varphi\}) \quad (2.45)$$

Ahora, el problema generalizado de autovalores para  $[M]$ ,  $[K]$  se convierte en un problema estándar de autovalores para  $([L]^{-1}[K][L]^{-T})$ .

## 2.6. Derivadas de matrices

Una matriz  $[A]$  de dimensiones  $m \times n$  con elementos  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) dependientes del tiempo  $t$ , su derivada temporal se define como:

$$\frac{d[A]}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Las siguientes propiedades elementales se pueden deducir:

$$\frac{d([A] \pm [B])}{dt} = \frac{d[A]}{dt} \pm \frac{d[B]}{dt} \quad (2.47)$$

$$\frac{d([A][B])}{dt} = \frac{d[A]}{dt}[B] + [A]\frac{d[B]}{dt} \quad (2.48)$$

En particular,

$$\frac{d([A][A]^{-1})}{dt} = \frac{d[A]}{dt}[A]^{-1} + [A]\frac{d[A]^{-1}}{dt} = \frac{[I]}{dt} = 0 \quad (2.49)$$

Basándose en la ecuación (2.49), se puede expresar la derivada de una matriz inversa como:

$$\frac{d[A]^{-1}}{dt} = -[A]^{-1}\frac{d[A]}{dt}[A]^{-1} \quad (2.50)$$

## 2.7. Perturbaciones

Para una variable  $x$ , su perturbación se denota como  $\epsilon x$ . De tal forma,  $\epsilon$  es una constante escalar de valor muy inferior a la unidad y se le conoce como factor de perturbación. La teoría de perturbaciones apunta al estudio del comportamiento de un sistema sometido a pequeñas perturbaciones sin tener que resolver el problema con una nueva variable  $x + \epsilon x$ . De hecho, la teoría trata la desviación de la solución del sistema a medida que la variable se va perturbando más. A partir del sistema (2.19), la nueva solución exacta del sistema perturbado es:

$$([A] + \epsilon[A]_1)\{x\}_{nueva} = \{b\} + \epsilon\{b\}_1 \quad (2.51)$$

La teoría de perturbaciones asume que la nueva solución se puede expresar como una convergencia de la serie de factor  $\epsilon$ . Por lo tanto, se tiene:

$$\{x\}_{nueva} = \{x\} + \epsilon\{x\}_1 + \epsilon^2\{x\}_2 + \dots \quad (2.52)$$

Sustituyendo la ecuación (2.52) en la ecuación (2.51) y agrupando términos, se obtienen las siguientes soluciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x\}_1 = -[A]^{-1}([A]_1\{x\} - \{b\}_1) \\ \{x\}_2 = -[A]^{-1}[A]_1\{x\}_1 \\ \vdots \\ \{x\}_{n+1} = -[A]^{-1}[A]_1\{x\}_n \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Desde que se ha obtenido la solución para  $\{x\}$  y, por tanto, la inversa  $[A]^{-1}$ , la solución dada por la ecuación (2.53) es mucho mas simple y económica que resolver el sistema (2.51). La misma solución se puede aplicar a los problemas de autovalores.

## 2.8. El método de mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados esta detrás de muchas investigaciones numéricas y analíticas de análisis modal. Asumiendo una variable  $y$  que posee una relación lineal con  $n$  variables independientes  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) de manera que:

$$y = \{a\}^T \{x\} \quad \text{donde} \quad (2.54)$$

$$\{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T \quad y \quad \{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$$

$\{a\}$  es un vector de constantes mientras  $\{x\}$  es un vector dependiente del tiempo. Para  $m$  diferentes observaciones, la ecuación anterior puede ser usada  $m$  veces para formar la ecuación matricial:

$$\{y\} = [X]\{a\} \quad \text{donde} \quad [X] = [\{x(1)\}, \{x(2)\}, \dots, \{x(m)\}]^T \quad (2.55)$$

Si el numero de mediciones  $m$  excede el numero de variables en  $\{x\}$ , entonces hay que determinar un conjunto de constantes en  $\{a\}$  del tal forma que el error predecido por los mínimos cuadrados y las observaciones sean el menor posible. El error entre las predicciones y las observaciones se define:

$$\{\epsilon\} = \{y\} - [X]\{a\} \quad (2.56)$$

El error total se calcula como:

$$E = \{\epsilon\}^T \{\epsilon\} \quad (2.57)$$

Para minimizar el error total, se deriva respecto  $\{a\}$  y se iguala a cero.

$$\frac{\partial E}{\partial \{a\}} = -2[X]^T \{y\} + 2[X]^T [X] \{a\} = 0 \quad (2.58)$$

De esta manera se llega a la estimación del vector  $\{a\}$  mediante mínimos cuadrados.

$$\{\hat{a}\} = ([X]^T [X])^{-1} [X]^T \{y\} \quad (2.59)$$

## 2.9. Expansión parcial de fracciones

Cuando se tiene un cociente entre dos funciones polinómicas  $f(s), g(s)$  en el dominio de Laplace y el orden del denominador es mayor que el numerador, se puede expresar el cociente como una suma de 2 o mas cocientes mas simples. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{f(s)}{g(s)} &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{(s + s_1)(s + s_2)^p (s^2 + as + b)(s^2 + cs + d)^q} \dots \quad (n > m) \end{aligned} \quad (2.60)$$

De tal forma que la expansión de fracciones será:

$$\frac{f(s)}{g(s)} = \frac{A_1}{s + s_1} + \frac{B_1}{(s + s_2)} + \frac{B_2}{(s + s_2)^2} + \dots + \frac{B_p}{((s + s_2)^p)} \quad (2.61)$$

$$+ \frac{C_1 s + D_1}{s^2 + as + b} + \frac{E_1 s + F_1}{(s^2 + as + b)^2} + \dots + \frac{E_q s + F_q}{(s^2 + as + b)^q} \quad (2.62)$$

donde  $A_1, B_1, \dots, B_p; C_1, D_1; E_1, F_1 \dots, E_q, F_q$  son constantes cuyos valores habrá que determinar.

Existen 2 metodos para calcular las constantes de las fracciones. El primer metodo esta basado en las ecuaciones (2.60 y 2.61) que son identicas. Dando valores a  $s$  o igualando coeficientes se puede determinar el valor de dichas constantes. El segundo metodo esta basado en los residuos de cada termino y en la mayoria de los casos es mucho mas sencillo de calcular a diferencia del primer metodo. Además, es posible realizar una combinacion

de ambos metodos. Se realizara un ejemplo para mostrar ambas formas de resolver el problema.

Por la primera forma:

$$\begin{aligned} \frac{(s^2 + 2s - 5)}{s(s+1)(s+5)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+5} + \frac{D}{(s+5)^2} \\ &= \frac{A(s+1)(s+5)^2 + Bs(s+5)^2 + Cs(s+1)(s+5) + Ds(s+1)}{s(s+1)(s+5)^2} \end{aligned}$$

Planteando la siguiente igualdad e identificando terminos se hallan los valores de las constantes.

$$s^2 + 2s - 5 = A(s+1)(s+5)^2 + Bs(s+5)^2 + Cs(s+1)(s+5) + Ds(s+1) \quad (2.63)$$

Para la segunda manera:

$$\frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f(s)}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)^k} \quad (2.64)$$

La expansión en fracciones sería:

$$\frac{f(s)}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)^k} = \frac{A}{s+s_1} + \frac{B}{s+s_2} + \frac{C_1}{s+s_3} + \dots + \frac{C_k}{(s+s_3)^k} \quad (2.65)$$

donde  $A, B, C_1, \dots, C_k$  son denominados residuos. Mediante las siguientes operaciones es inmediato hallarlos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{f(s)}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)^k} (s+s_1)|_{s=-s_1} \\ B &= \frac{f(s)}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)^k} (s+s_2)|_{s=-s_2} \\ C_k &= \frac{f(s)}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)^k} (s+s_3)^k|_{s=-s_3} \\ C_{k-1} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{f(s)}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)^k} (s+s_3)^k \right) |_{s=-s_3} \end{aligned}$$

En el caso de que se tengan números complejos, los polinomios como  $s^2 + cs + d$  se pueden factorizar de la forma  $(s+x+jy)(s+x-jy)$ . Así, el polinomio  $g(s)$  se convertirá en un producto de primer orden solamente.

## 2.10. Transformada de Laplace y funciones de transferencia

En análisis modal, la transformada de Laplace es una técnica sistemática muy útil para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales. Para una función en el dominio del tiempo,  $f(t)$ , la transformada se denota por:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(t)e^{-st} dt \quad (2.66)$$

En el contexto de las vibraciones y el análisis modal, este limite *existe*. De hecho, la integración constituye una transformación del dominio del tiempo ( $t$ ) al dominio de Laplace ( $s$ ). Las actuales transformadas de Laplace se realizan mediante las tablas de transformación de Laplace. Algunas de las propiedades de Laplace mas interesante son:

- Linealidad  $\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
- Primer teorema de traslación  $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$
- Escalado  $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
- Derivada  $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - F(0)$
- Integral  $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(h)dh\right) = \frac{F(s)}{s}$

Cabe destacar que las propiedades se pueden emplear también en sentido inverso, con el fin de poder realizar la antitransformada de Laplace.

Un importante uso de la transformada de Laplace en análisis modal es la conversión de una ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Por ejemplo, para un sistema de 1 grado de libertad:

La ecuación del movimiento se puede escribir como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx(t) = P(t) \quad (2.67)$$

Asumiendo condiciones iniciales nulas y aplicando la transformada de Laplace, la respuesta del sistema es:

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} P(s) \quad (2.68)$$

La función de transferencia del sistema, que define la relación entre la fuerza y el desplazamiento del sistema se puede estimar fácilmente.

$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.69)$$

Si la función de transferencia se expresa en el dominio de la frecuencia donde solo se considera la parte imaginaria de  $s$ .

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + cj\omega + k} \quad (2.70)$$

Este es el mismo resultado que se habría obtenido si se resolviese la ecuación diferencial del movimiento. La transformada de Laplace también se puede aplicar a sistemas de varios grados de libertad.

## 2.11. Series de Fourier y transformada de Fourier

Las series de Fourier son una ingeniosa representación de una función periódica. Para una función periódica en el tiempo  $x(t)$  con periodo  $T$ , se tiene:

$$x(t) = x(t + nT) \quad (2.71)$$

Matemáticamente se puede mostrar que  $x(t)$  consiste un numero de sinusoidales con frecuencias múltiples de la frecuencia de fundamental. Esta frecuencia fundamental  $f$  es dictada por un periodo tal  $T = \frac{1}{f}$ . La contribución a  $x(t)$  por un sinusoidal de frecuencia  $f_k$  es  $X(f_k)e^{\frac{j2\pi kt}{T}}$ . La amplitud del sinusoidal k-esimo se puede determinar por:

$$X(f_k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt \quad (2.72)$$

Este componente normalmente es un numero complejo con su amplitud y su fase. El termino  $e^{-\frac{j2\pi kt}{T}}$  representa el vector unitario rotando a una frecuencia  $\frac{-k}{T}$ . Esta integral muestra que el componente en señal  $x(t)$  que tiene una frecuencia  $kf = \frac{k}{T}$  será *congelado* a la frecuencia rotatoria del vector unitario, por lo tanto el valor no será nulo después de la integración.

Una señal periódica consiste en una suma de componentes a todas las frecuencias:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f_k)e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt \right) e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (2.73)$$

Cada componente en frecuencia  $X(f_k)$  es un numero complejo. Sin embargo,  $x(t)$  es un numero real. Esto es porque  $X(f_k)$  y  $X(-f_k)$  son números complejos conjugados respectivamente. El producto de ambos da lugar a la fuerza de la señal que tiene a la frecuencia  $f_k$ .

$$P_X(f_k) = X(f_k)X(-f_k) = X(f_k)X^*(f_k) \quad (2.74)$$

La sumatoria de todas las fuerzas a cada una de las frecuencias da lugar a la fuerza total de la señal. Cada fuerza tendrá solo información de amplitud, la información acerca de la fase desaparece.

Una señal cuyo periodo se aproxima a infinito, se dice que  $x(t)$  se convierte en una señal no periódica. Las series de Fourier definidas en la ecuación (2.72) dan lugar a la transformada de Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.75)$$

Si se separa en parte real e imaginaria:

$$Re(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi f t) dt ; Im(X(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi f t) dt \quad (2.76)$$

La inversa de la transformada de Fourier se define:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t} df \quad (2.77)$$

## 2.12. Polos y ceros en funciones polinómicas

Los polos y los ceros de una función polinómica determinan su comportamiento. Las funciones más frecuentes en los sistemas dinámicos son: la FRF (con  $\omega$  como variable) o la función de transferencia (con la variable de Laplace  $s$ ). Los polos de una FRF son las raíces del numerador de dicha función (las frecuencias naturales). Los ceros son las raíces del denominador de la misma función (FRF) que determinan la proximidad de un nodo del sistema.

Analíticamente se puede mostrar que tras una expansión en fracciones, los polos de una FRF de un sistema dinámico siguen siendo los mismos mientras que los ceros se modifican. Esto es:

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{N_1(\omega)}{D(\omega)} + \frac{N_2(\omega)}{D(\omega)} \quad (2.78)$$

Las raíces de  $N(\omega)$  son diferentes de  $N_1(\omega), N_2(\omega)$ . Solo  $N_1(\omega) + N_2(\omega)$  dará lugar a las raíces de  $N(\omega)$ .

### 2.13. Concepto de Espacio-Estado

El modelo de espacio de estados es una diferente representación de la relación entrada-salida en comparación con las funciones de transferencia o las FRF. Este modelo fue desarrollado en los años 60 para satisfacer los estrictos requisitos necesarios para el estudio computacional de sistemas dinámicos de gran escala.

El estado de un sistema dinámico es el menor conjunto de variables (variables de estado), que ligado a las entradas del nuevo sistema podrán determinar el comportamiento dinámico del sistema. Es decir, el estado en tiempo  $t$  solo vendrá determinado por estado a tiempo  $t_0$  y las entradas a  $t \geq t_0$  y será, por tanto, independiente del estado y las entradas para tiempo anteriores a  $t_0$ . Mediante este sistema se pueden representar las características internas del sistema y resulta sencillo optimizar el propio sistema dinámico.

Resulta conveniente usar como ejemplo un sistema de 1 grado de libertad para ilustrar el establecimiento del espacio de estado. El sistema dinámico es gobernado por:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t) \quad (2.79)$$

Operando

$$m\ddot{y} = f(t) - c\dot{y} - ky \quad (2.80)$$

Usando la transformada de Laplace y considerando condiciones iniciales nulas, se llega a:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.81)$$

Esta es la clásica representación de un sistema dinámico. Sin embargo, tomando 2 nuevas variables como:  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ , la ecuación (2.80) se convierte en:

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{1}{m}f(t) - \frac{c}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) \quad (2.82)$$

Usando las ecuaciones, que solo poseen derivadas de primer orden, se puede representar el sistema dinámico. A estas ecuaciones se les llama *ecuaciones de estado*.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t) \quad (2.83)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Este ejemplo enseña los pasos a seguir para establecer el modelo de espacios de estado. Para un sistema de varias entradas y salidas se puede definir  $n$  variables de estado  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Además, si asumimos que el sistema tiene  $r$  entradas como  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  y  $p$  salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)$ , se puede contruir el siguiente sistema de ecuaciones de estado:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (2.85)$$

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\} + [D]\{u(t)\} \quad (2.86)$$

Donde,  $\{x(t)\}$  es un vector de estado  $n \times 1$ ;  $[A]$  es la matriz del sistema  $n \times n$ ;  $[B]$  es la matriz de entradas del sistema  $n \times r$ ;  $\{u(t)\}$  es el vector de entradas  $r \times 1$ ;  $\{y(t)\}$  es el vector de salidas  $p \times 1$ ;  $[C]$  es la matriz de salida del sistema  $p \times n$ ;  $[D]$  es la matriz de complamiento entre salidas y entradas del sistema  $p \times r$ .

## 2.14. Análisis de series temporales

El análisis de series temporales es una alternativa al análisis espectral. Para algunos estudios de vibraciones, el análisis de espectros podría ser perjudicado por un tiempo corto de observación o por la energía de leakage al implantar ventanas temporales. Se introducirá primeramente el modelo lineal de regresión de datos.

Un modelo de regresión lineal de dos grupos de medidas revela la correlacion que hay entre ellas. El modelo mas simple de correlación entre salidas y entradas es el lineal.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad (2.87)$$

Donde, el residuo ( $\epsilon_i = 1, 2, \dots, N$ ) merece atención especial. Primeramente, son independientes unos de otros. Segundo, son independientes de la variable  $x_i$ . Tercero, se asume que es una variable aleatoria con una distribución normal. Cuando  $\epsilon_i$  se convierte en cero, se ve una relación lineal entre las salidas y las entradas. La solución de mínimos cuadrados para los parámetros del modelo es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})} \quad (2.88)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (2.89)$$

El modelo descrito en la ecuación (2.87) puede extenderse si la variable única  $x_i$  se convierte en multivariable ( $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri}$ )

$$y_i = \beta_0 + \beta_{1i}x_{1i} + \beta_{2i}x_{2i} + \cdots + \beta_{ri}x_{ri} + \epsilon_i \quad (2.90)$$

La salida  $y_i$  también consiste en 2 partes: la parte determinada por  $\beta_{1i}x_{1i} + \beta_{2i}x_{2i} + \cdots + \beta_{ri}x_{ri}$  y la parte aleatoria  $\epsilon_i$ . Cuando  $\epsilon_i$  se vuelve nulo, la solución de los parámetros por el método de mínimos cuadrados es:

$$\{\hat{\beta}\} = ([X]^T[X])^{-1}[X]^T\{Y\} \quad (2.91)$$

donde

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{rN} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$\{\hat{\beta}\} = \begin{Bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \dots \\ \hat{\beta}_N \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

### 2.14.1. Modelo AR

Considerando un proceso aleatorio por una serie en el tiempo  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$  usando solo la correlación de datos en serie, la ecuación (2.87) se puede reescribir como:

$$x_i = \phi_1 x_{i-1} + a_i \quad (2.95)$$

Esta ecuación aunque guarde cierto parecido con la ecuación (2.87) representa un cambio crucial. Esta nueva ecuación describe la correlación dinámica interna de un proceso aleatorio. Es una ecuación típica de diferencias finitas. A este modelo se le conoce como auto-regresión (AR). El coeficiente de autorregresión  $\phi_1$  es una constante. El residuo  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) es independiente adentro de la serie  $\{a_i\}$  y otra serie del tiempo  $\{x_i\}$ . Usando el operador de regresión  $B$  tal que  $x_{i-1} = Bx_i$ , la ecuación (2.95) se convierte en:

$$x_i = \frac{1}{1 - \phi_1 B} a_i \quad (2.96)$$

Este es el equivalente a un sistema de primer orden con ruido blanco de entrada  $a_i$  y salida aleatoria  $x_i$ . La función de transferencia del sistema es

$$\frac{1}{1-\phi_i B}$$

El modelo AR(1) puede ser extendido si  $x_i$  esta correlacionado con grabaciones anteriores a la ultima. Por ejemplo, un modelo AR(2) significa que  $x_i$  esta correlacionado con  $x_{i-1}$  y  $x_{i-2}$ :

$$x_i = \phi_1 x_{i-1} + \phi_2 x_{i-2} + a_i \quad (2.97)$$

### 2.14.2. Modelo ARMA

El modelo AR(1) fue diseñado para distribuciones suaves y normales de series temporales de media nula  $\{x_i\}$ . Asume que un momento dado en la serie temporal,  $x_i$  solo esta correlacionado con el valor anterior ( $x_{i-1}$ ). Si  $x_i$  no esta solo correlacionado con  $x_{i-1}$  o el residuo de la serie  $\{a_i\}$  no es ruido blanco, el modelo AR(1) se vuelve invalido.

Si  $x_i$  esta esta correlacionado con  $x_{i-1}$ , pero también con  $x_{i-2}$ , estará también correlacionado con  $a_{i-1}$ . Por lo tanto, esta vez se puede expresar  $x_i$  como:

$$x_i = \phi_1 x_{i-1} + \phi_2 x_{i-2} - \theta_1 a_{i-1} + a_i \quad (2.98)$$

$$x_i - \phi_1 x_{i-1} - \phi_2 x_{i-2} = -\theta_1 a_{i-1} + a_i \quad (2.99)$$

La ecuación (2.99) muestra que el valor  $x_i$  en la serie temporal depende de 2 valores inmediatamente previos ( $x_{i-1}, x_{i-2}$ ), y de 2 residuos ( $a_{i-1}, a_i$ ). La parte de la izquierda de la igualdad (2.99) es un modelo AR con  $\phi_1, \phi_2$  de coeficientes de regresión. La parte derecha de la ecuación (2.99) se llama modelo *moving average* (MA) con  $\theta_1$  de coeficiente de media móvil. Si  $x_i$  esta correlacionado con 2 valores anteriores y 1 residuo, el modelo ARMA correspondiente será ARMA(2,1).

La inclusión del termino  $-\theta_1 a_{i-1}$  significa un cambio fundamental respecto el modelo AR. Esto significa para el sistema dinámico que en el intervalo  $(i-1, i)$ , el sistema es capaz de memorizar las entradas que han tenido lugar en ' $i-1$ '. Como resultado, la salida ya no depende solo de  $a_i$ , sino también de  $a_{i-1}$ . De esta manera, se puede concluir que el modelo ARMA posee memoria en el pasado.

El modelo ARMA(2,1) puede ser expandido hasta un modelo ARMA  $(n, m)$  caracterizado por la siguiente ecuación:

$$x_i = \sum_{r=1}^n \phi_r x_{i-r} - \sum_{s=1}^m \theta_s a_{i-s} + a_i \quad (2.100)$$

La función de transferencia para el ARMA  $(n, m)$  resulta:

$$x_i = \frac{1 - \sum_{s=1}^m \theta_s B^s}{1 - \sum_{r=1}^n \phi_r B^r} \quad (2.101)$$

Como se menciona anteriormente, el modelo descompone la respuesta  $x_i$  en 2 partes: una parte determinada y dependiente caracterizada por  $\sum_{r=1}^n \phi_r x_{i-r} - \sum_{s=1}^m \theta_s a_{i-s}$  y una parte aleatoria e independiente correspondiente a  $a_i$ .

## 2.15. Transformada Z

La transformada Z toma señales discretas en el dominio del tiempo y las convierte al dominio complejo de la frecuencia. Inicialmente fue propuesta para resolver ecuaciones diferenciales lineales y constantes para señales o secuencias. Con la mejora de la computación, la transformada Z encontró una utilidad en el mundo de la ingeniería. Se define  $z$  como una variable compleja.

La función  $f(t)$  puede ser vista como una serie de impulsos. Por lo tanto, la función discretizada  $f(t)$  puede representarse como:

$$x(t) = f(0)\delta(t) + f(1)\delta(t-1) + f(2)\delta(t-2) + \dots + f(n)\delta(t-n) \quad (2.102)$$

Realizando la transformada de Laplace de dicha función.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-nst} \quad (2.103)$$

Se hace el cambio  $z = e^{-st}$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad (2.104)$$

Esta es la transformación Z de la función  $f(t)$ . Por lo tanto, se define la transformación Z de una serie temporal  $x(n)$  como:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.105)$$

Si la función temporal fuese causal (la mayoría de señales de sistemas dinámicos son causales), la transformada Z se simplificaría a:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.106)$$

*CAPÍTULO 2. MATEMÁTICA EMPLEADA EN ANÁLISIS MODAL 36*

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas:  
[6], [7], [8], [9] y [10].

# 3

## Teoría básica de vibraciones

### 3.1. Modelización de problemas vibratorios a través de modelos matemáticos

Es muy poco frecuente que la teoría de vibraciones se pueda aplicar directamente a una estructura real, a excepción de aquellas estructuras cuya dinámica se pueda describir con precisión mediante un número finito de ecuaciones diferenciales parciales. Este hecho es causado por la aplicación de la teoría analítica a un caso idealizado derivado del caso real a estudiar (idealización). Los modelos ideales que se pueden obtener a partir de una estructura son variados. La necesidad de un modelo ideal, simple y efectivo supone un reto en la comprensión de la dinámica estructural. Normalmente el modelo es representado por un número de ecuaciones diferenciales ordinarias lo que remarca la importancia del álgebra matricial en el análisis modal. La finitud de los modelos matemáticos también explica la dependencia del análisis modal con la teoría de sistemas de varios grados de libertad.

### 3.2. Conceptos básicos de vibración

La vibración es un movimiento que se repite por sí mismo. Dicha repetición puede perdurar o no en el tiempo. Contrariamente a la percepción general, los elementos vitales de las vibraciones no son la presencia de elementos inerciales o elásticos como masas o muelles. La vibración se puede ver como un intercambio de energía cinemática y potencial, por tanto un sistema vibratorio ha de incluir un medio de almacenaje y liberación de dicha energía. El almacenaje normalmente es realizado por las masas del sistema

y la liberación de energía es producida por los muelles.

Un péndulo también es un ejemplo típico de sistema vibratorio. Este sistema no tiene un muelle para la energía potencial del sistema. De hecho, la masa del péndulo tiene un papel con doble función para la energía cinética y potencial.

Para poder realizar un estudio vibratorio de un sistema dinámico, es esencial conocer los grados de libertad del sistema antes de hacer cualquier análisis. El número de grados de libertad de un sistema es definido como el número de coordenadas independientes necesarias para determinar el movimiento de todas las partes del sistema en cualquier instante de tiempo.

Existen diferentes maneras de clasificar los tipos de vibración:

- **Según la excitación:** pueden ser vibraciones libres (solo hay una excitación en el instante  $t = 0$ ) o vibraciones forzadas (las vibraciones se ven afectadas por fuerzas externas continuas en el tiempo).
- **Según el amortiguamiento:** pueden ser amortiguados o no amortiguados.
- **Según la linealidad:** un sistema es lineal (si el principio de superposición es válido) o no lineal en caso contrario.
- **Según la previsibilidad:** los sistemas pueden ser determinados (si se conoce en todo momento el valor de la vibración) o aleatorio (en caso de que solo se conozcan las propiedades estadísticas de la vibración).

### 3.3. Vibraciones libres en un sistema de 1 GDL

Para el estudio de las vibraciones libres en un sistema de 1 GDL se puede comenzar con la ecuación del movimiento. Se analiza el sistema masa-muelle de la figura (3.1).

Con el desplazamiento  $x$ , la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -kx(t) \\ m\ddot{x}(t) + kx(t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

La frecuencia natural del sistema se define:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rad/s]} \tag{3.2}$$

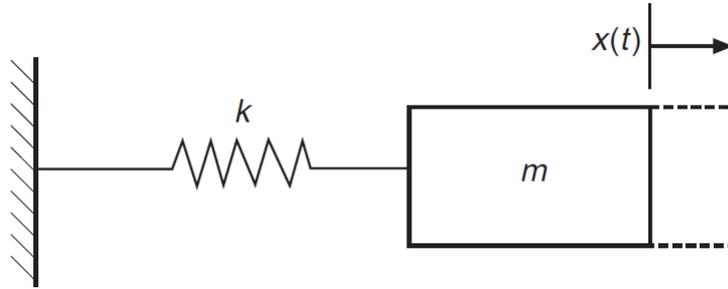


Figura 3.1: Sistema masa-muelle

Aunque pueda parecer correcto, no es preciso decir que la frecuencia natural de un sistema dependa de su masa y su rigidez. En efecto, la frecuencia depende del cociente de ambas. Por lo tanto, dos sistemas que poseen diferentes masas y rigideces pueden llegar a tener la misma frecuencia natural.

La ecuación (3.1) es posible obtenerla mediante energías. Un sistema que no tenga disipación de energía, la cantidad total de energía es constante en todo momento. La energía cinética se aproxima  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  y la energía potencial a  $U = \frac{1}{2}kx^2$ . De esta manera, se llega a:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \quad (3.3)$$

Derivando la ecuación (3.3) respecto del tiempo conduce a la ecuación (3.1). La respuesta libre de un sistema de 1 GDL viene determinada por el desplazamiento ( $x(0)$ ) y velocidad inicial ( $\dot{x}(0)$ ).

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x(0) \cos(\omega_0 t) \quad (3.4)$$

La solución muestra que el sistema de 1 GDL siempre escoge su frecuencia natural para las vibraciones libres.

### 3.4. Vibraciones armónicas en un sistema de 1 GDL

La vibración armónica de un sistema de 1 GDL es el tipo de vibración más fundamental y el componente de vibraciones mucho más sofisticadas. De las series de Fourier se conoce que una vibración periódica consiste en un número finito de armónicos simples cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental. De la transformada de Fourier se puede apreciar que una vibración no periódica, que se puede ver como una vibración cuyo periodo es infinito, consiste en un número infinito de armónicos cubriendo

cada frecuencia dentro del rango.

Antes de profundizar acerca de la vibración armónica de un sistema de 1 GDL puede ser útil refrescar una par de características que poseen las señales armónicas simples. En el dominio del tiempo, una señal armónica  $x(t)$  con un periodo  $T$  y frecuencia  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  puede ser vista como una proyección en el eje del tiempo y longitud del vector  $X$  rotando en sentido anti horario, como se puede ver en la figura (3.2).

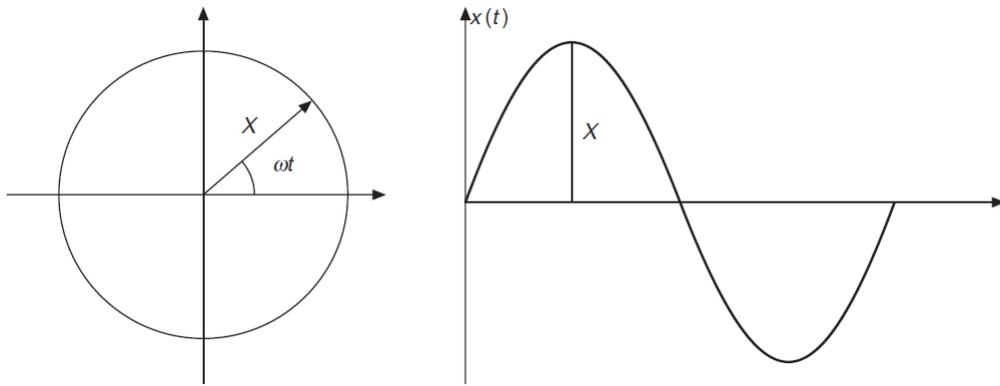


Figura 3.2: Señal armónica generada por un vector rotatorio

Esta señal en el dominio del tiempo puede expresarse como:

$$x(t) = X \sin(\omega t) = X \sin(\omega t + nT) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Si  $x(t)$  representa el desplazamiento vibratorio de la señal, la velocidad y la aceleración pueden obtenerse simplemente derivando una o dos veces el desplazamiento respecto el tiempo.

La vibración armónica pura de un sistema de 1 GDL puede darse en 2 casos. El primero es la vibración libre de un sistema 1 GDL sin amortiguamiento (por lo tanto no hay disipación de energía). Este caso ya ha sido resuelto. El segundo es una vibración cuando el sistema esta sometido a una fuerza externa armónica. Se asumirá para este caso un amortiguador viscoso de constante  $c$ . El sistema se representa en la figura (3.3).

La ecuación del movimiento se puede estimar como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.6)$$

La solución para esta ecuación para el desplazamiento es una función armónica de la forma:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.7)$$

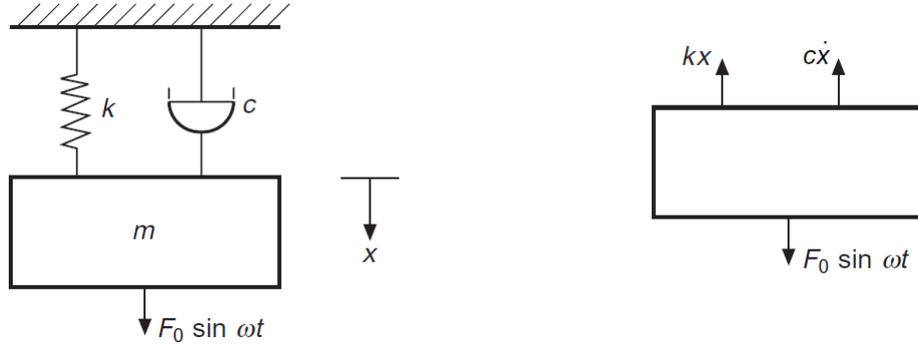


Figura 3.3: Sistema 1 GDL sometido a una fuerza externa armónica

La ecuación (3.6) se puede interpretar como una suma de vectores. En la figura (3.4) se representa dicha suma.

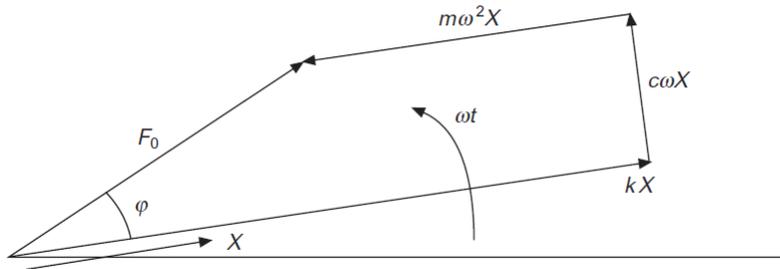


Figura 3.4: Diagrama de vectores de una vibración armónica

La amplitud de desplazamiento  $X$  y el desfase relativo entre la fuerza externa y la respuesta vibratoria  $\varphi$  se puede determinar a partir del diagrama de vectores. El desplazamiento de un sistema 1 GDL con una fuerza externa armónica se convierte en:

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1}(\frac{c\omega}{k - m\omega^2})) \quad (3.8)$$

El amortiguamiento estructural es un modelo alternativo de amortiguamiento usado en el análisis modal. Este amortiguamiento es originario de la histéresis que sufren los materiales al estar sometidos a esfuerzos. La ecuación (3.6) se convierte en:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + jhx(t) = F_0 e^{j\omega t} \quad (3.9)$$

donde  $j$  es la unidad imaginaria. Se puede definir  $(k + jh)$  como la rigidez compleja  $k_c$  del sistema. La ecuación última se simplifica a:

$$m\ddot{x}(t) + k_c x(t) = F_0 e^{j\omega t} \quad (3.10)$$

### 3.5. Vibración de un sistema de 1 GDL debido a una fuerza arbitraria

Los sistemas de 1 GDL podrían estar sometidos a fuerzas de excitación no armónicas. Existen varios métodos matemáticos para determinar la respuesta vibratoria del sistema en ese caso. El más conveniente de ellos es la transformada de Laplace. Para una fuerza arbitraria  $f(t)$ , la ecuación del movimiento se define:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (3.11)$$

Tomando la transformada de Laplace y considerando condiciones iniciales nulas, la solución del desplazamiento vibratorio en el dominio de Laplace se muestra a continuación.

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} = G(s)F(s) \quad (3.12)$$

Esta es la típica ecuación de un sistema dinámico lineal donde  $G(s)$  es la *función de transferencia* del sistema. La vibración del sistema en el dominio del tiempo puede ser hallada mediante la inversa de la transformada de Laplace de  $X(s)$ .

### 3.6. Vibración libre y forzada de un sistema de varios GDL

El estudio de vibraciones libres de un sistema de múltiples GDL comienza con las ecuaciones del movimiento, al igual que pasaba con los sistemas de 1 GDL. Por simplicidad, se analizará un sistema de 2 GDL como se muestra en la figura (3.5).

Cuando seleccionamos las coordenadas  $x_1, x_2$  para describir el desplazamiento de todo el sistema, las ecuaciones del movimiento que se establecen son:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Combinando ambas ecuaciones diferenciales se consigue un sistema matricial tal que:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

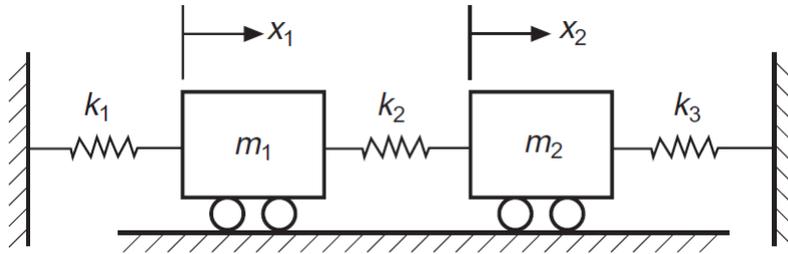


Figura 3.5: sistema de 2 GDL

Esta ecuación matricial tiene la forma general matricial de un sistema de varios GDL:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3.15)$$

La solución de vibraciones libres es la solución no trivial matemática de la ecuación (3.15). Debería tener la siguiente forma:

$$\{x\} = \{X\} \sin(\omega t) \quad (3.16)$$

Este tipo de solución substituido en la ecuación (3.15) cambia dicha ecuación a un problema simple algebraico matricial.

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = 0 \quad (3.17)$$

Para que esta ecuación tenga solución, la matriz  $([K] - \omega^2[M])$  deberá ser singular.

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) es la ecuación característica del sistema. Las soluciones a esta ecuación son las frecuencias naturales. Los autovalores son el cuadrado de las frecuencias naturales del sistema y el autovector es la forma del modo. Continuando con el sistema de 2 GDL usado como ejemplo:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

La forma de los modos pueden ser determinadas como:

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

El sistema de vibraciones libres se convierte en:

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1^{(1)} \sin(\omega_1 t) + X_2^{(1)} \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = X_1^{(2)} \sin(\omega_1 t) + X_2^{(2)} \sin(\omega_2 t) \end{cases} \quad (3.22)$$

Esta vibración libre es una combinación lineal de 2 armónicos de frecuencias  $\omega_1, \omega_2$ . Las amplitudes  $X_i^{(j)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) en la ecuación (3.22) no están totalmente determinadas. Estas amplitudes estarán cuantificadas con las condiciones iniciales. Es posible diseñar unas condiciones iniciales tales que solo uno de los modos sea excitado.

Una vez tratadas las vibraciones libres, se analizarán las vibraciones forzadas de sistemas de varios GDL. Existen varias variaciones en lo que se refiere a vibraciones forzadas. Existe la posibilidad de que las fuerzas excitadoras aplicadas tengan diferentes frecuencias naturales, desfase, amplitudes o incluso una combinación de lo anterior. Para la comprensión de las vibraciones forzadas, se considerará un caso simple donde las funciones fuerza tengan la misma frecuencia y el desfase entre ellas sea nulo. Esto no excluye el caso de que algunas fuerzas puedan tener amplitud cero.

La ecuación del movimiento de un sistema de varios GDL con un conjunto de fuerzas de misma frecuencia  $\omega$  y desfase nulo se escribe:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \sin(\omega t) \quad (3.23)$$

donde  $\{F\}$  contiene las amplitudes de las funciones fuerza. La respuesta forzada del sistema es:

$$\{x(t)\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \{F\} \sin(\omega t) \quad (3.24)$$

### 3.7. Aproximación energética

La aproximación por energías es una alternativa a la aproximación por fuerzas en el estudio de vibraciones de sistemas dinámicos. Mientras la aproximación por fuerza esta basada en la segunda ley de Newton, la aproximación energética se basa en el principio de conservación de la energía. Para poder entender dicha aproximación, se comenzara con la teoría de equilibrio de sistemas dinámicos. El principio de trabajos virtuales es esencialmente una declaración para la definición de equilibrio de un sistema dinámico.

En este análisis es conveniente escribir en **negrita** los vectores para contrastarlos con los escalares. Los desplazamientos virtuales de un sistema son definidos como cambios *infinitesimales* y *arbitrarios* en las coordenadas del sistema. Son infinitesimales porque conservan las restricciones del sistema

y también son arbitrarios al no ser desplazamientos *reales* y no variar en el tiempo.

### 3.7.1. Principio de trabajos virtuales

Para un sistema de  $n$  GDL que se encuentre en equilibrio estático, se pueden dividir las fuerzas que actúan en el grado de libertad  $k$  en dos grupos (fuerzas aplicadas  $\mathbf{F}_k$  y fuerzas de restricción  $\mathbf{f}_k$ ):

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k \quad (3.25)$$

Los desplazamientos reales (no los virtuales) de coordenada  $k$  en términos de coordenadas generalizadas son:

$$\mathbf{r}_k = (q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (3.26)$$

El trabajo realizado por todas las fuerzas en los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) será:

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k \delta \mathbf{r}_k \quad (3.27)$$

Para un sistema conservativo, las fuerzas de restricción no deberían hacer colectivamente ningún trabajo en los desplazamientos virtuales. Por lo tanto, el principio de trabajos virtuales establece que un sistema está en equilibrio si y solo si el trabajo total realizado por todas las fuerzas sobre los desplazamientos virtuales es cero.

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (3.28)$$

El trabajo virtual también puede expresarse en coordenadas generalizadas. El desplazamiento virtual para un desplazamiento  $\mathbf{r}_k$  es:

$$\delta r_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3.29)$$

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3.30)$$

Intercambiando el orden de los sumatorios:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3.31)$$

Definiendo las fuerzas generalizadas como:

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \quad (3.32)$$

El principio de trabajos virtuales se puede escribir de la siguiente forma:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i \delta q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.33)$$

Esto significa que un sistema estando en equilibrio estático es equivalente al trabajo de total virtual realizado por las fuerzas generalizadas y es cero.

### 3.7.2. Principio D'Alembert

El principio de D'Alembert extiende el trabajo virtual para equilibrio estático al reino del *equilibrio dinámico*. Este hecho sugiere que la suma de fuerzas en un  $k$  GDL genera una aceleración  $\ddot{\mathbf{r}}_k$ , la aplicación de una fuerza ficticia ( $-m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ ) produciría un estado de equilibrio. Se trata de una interpretación diferente de la segunda ley de Newton.

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = 0 \quad (3.34)$$

$$\delta W = \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (3.35)$$

Esta ecuación es la expresión analítica del principio de D'Alembert. Este principio forma la base teórica de la ecuación de Lagrange.

### 3.7.3. Energía cinética

Se sabe de la sección anterior que  $n$  coordenadas generalizadas se pueden emplear para describir el movimiento de un sistema de  $n$  GDL. La velocidad generalizada del sistema dinámico es:

$$\dots \mathbf{r}_k = (\dots q_1, \dots q_2, \dots, \dots q_n, t) \quad (3.36)$$

La energía cinética total del sistema dinámico se calcula como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k \quad (3.37)$$

Si las restricciones físicas del sistema son invariantes en el tiempo, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.38)$$

Y por tanto la energía cinética del sistema puede escribirse de la siguiente manera.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.39)$$

Intercambiando el orden de los sumatorios:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.40)$$

Si a la expresión dentro del paréntesis se le denomina *masa generalizada* y se denota como  $m_{ij}$ , por tanto

$$m_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (3.41)$$

La energía cinética puede escribirse finalmente como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.42)$$

Si la matriz de masas y el vector generalizado de velocidades se definen:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

La energía cinética podría escribirse en forma matricial.

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad (3.45)$$

Como la energía cinética es siempre positiva, la matriz de masas sera siempre una matriz definida positiva.

#### 3.7.4. Energía potencial

En un sistema conservativo, la energía potencial  $U$  es una de coordenadas generalizadas  $q_i$ .

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3.46)$$

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas es equivalente a la energía potencial negativa:

$$W = -U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3.47)$$

Cuando una coordenada  $q_i$  varía por  $\partial q_i$ , la correspondiente energía potencial varía:

$$dU = -dW = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \quad (3.48)$$

Si  $\partial q_i$  es escogido como desplazamiento virtual, de la ecuación  $\mathbf{Q}_i = 0$  se tiene:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i \partial q_i \quad (3.49)$$

$$\mathbf{Q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.50)$$

Esto quiere decir que las fuerzas generalizadas correspondientes a las fuerzas conservativas son equivalentes a las derivadas parciales de la energía potencial de un sistema respecto de sus coordenadas generalizadas. Un sistema en equilibrio cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.51)$$

Su energía potencial alcanza un máximo o un mínimo. Para un sistema de  $n$  coordenadas generalizadas, expandiendo  $U$  en una serie de Taylor, su posición de equilibrio conduce a:

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \dots \quad (3.52)$$

Al encontrarse la energía potencial en el punto de equilibrio se sabe que  $U_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0$ . Por tanto:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j \quad (3.53)$$

Se denomina *rigidez generalizada* a  $k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$ . La energía potencial puede escribir en forma matricial de tal forma:

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (3.54)$$

donde la matriz de rigideces y el vector de coordenadas generalizadas son:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

### 3.7.5. Ecuación de Lagrange

La ecuación de Lagrange esta basada en el principio de D'Alembert, ecuación (3.34). Hay dos partes de trabajo virtual en esa ecuación. Una primera parte realizada por las fuerzas aplicadas que se puede estimar con la ecuación (3.31). La segunda parte es el trabajo virtual por las fuerzas inerciales. El trabajo virtual puede ser calculado por:

$$\sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i \quad (3.57)$$

Insertando las ecuaciones (3.34,3.57) en la ecuación (3.36) se llega a:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \mathbf{Q}_i \right] \delta q_i = 0 \quad (3.58)$$

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \mathbf{Q}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.59)$$

Introduciendo el lagrangiano como  $L = T - U$  y suponiendo que la energía cinética no depende la velocidad generalizada, la ecuación de Lagrange se simplifica.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.60)$$

Esta es la forma compacta de la ecuación de Lagrange para sistemas conservativos. Para el uso de la ecuación de Lagrange en la resolución de problema se suele seguir los siguientes pasos:

1. Identificar los GDL del sistema y seleccionar las coordenadas generalizadas

2. Calcular la energía cinética  $T$  en términos de las velocidades generalizadas
3. Calcular la energía potencial  $U$  en términos de las coordenadas generalizadas
4. Substituir  $T$  y  $U$  en la ecuación de Lagrange para estimar la ecuación diferencial del movimiento del sistema dinámico

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [11], [12], [13], [14] y [15].

# 4

## A.M. sistema $n$ GDL amortiguado

El análisis modal para sistemas no amortiguados de varios GDL es solo aplicable a estructuras que posean un amortiguamiento despreciable. Sin embargo, se necesita un mayor tratamiento matemático para el estudio de sistemas amortiguados de varios GDL. Existen dos modelos de amortiguamiento empleados en análisis modal: el modelo de amortiguamiento viscoso y el modelo de amortiguamiento estructural. Son los mismos modelos que se emplean para los sistemas amortiguados de 1 GDL. Ahora, la distribución y magnitud son una propiedad importante a tener en cuenta de dichos sistemas.

### 4.1. Modelos de amortiguamiento proporcional

Un modelo de amortiguamiento proporcional es el primer modelo analítico usado por el estudio de un sistema de varios GDL. A diferencia de la masa y rigidez, el amortiguamiento no siempre se puede modelar. Esto se convierte en un obstáculo en el análisis de sistemas amortiguados de varios GDL. La proposición de un amortiguamiento proporcional permite que el análisis pueda proceder.

En la teoría de análisis modal, la utilidad del amortiguamiento proporcional será evidente. Un sistema con amortiguamiento proporcional tendrá los mismos modos de vibración que un sistema no amortiguado homólogo.

Se comenzara el análisis con el estudio de las vibraciones libres. Si la distribución de amortiguamiento del sistema de  $n$  GDL con amortiguamiento

proporcional se denota como una matriz  $[C]$ , la ecuación de matrices del movimiento se convierte en:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4.1)$$

Donde, la matriz  $[C]$  se define positiva o semipositiva. La excepcional distribución de amortiguamiento permite la diagonalización de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento. Sin necesitar un mayor tratamiento matemático, una estructura con amortiguamiento proporcional se puede analizar utilizando la teoría de sistemas no amortiguados. Rayleigh indicó que si el matriz de amortiguamiento viscoso  $[C]$  es proporcional a la matrices de masa y rigidez, se puede descomponer en:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.2)$$

Donde  $\alpha, \beta$  son constantes positivas. Substituyendo en la ecuación del movimiento (4.1) se obtiene:

$$[M]\{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4.3)$$

Repitiendo el proceso de desacoplamiento para el caso de no amortiguamiento usando los modos de vibración no amortiguados de la matriz  $[\Phi]$  se llega a las ecuaciones desacopladas:

$$[m_r]\{\ddot{x}_p\} + [c_r]\{\dot{x}_p\} + [k_p]\{x_r\} = \{0\} \quad (4.4)$$

La matriz diagonal  $[c_r]$  se llama *matriz de amortiguamiento generalizada* del sistema. Obviamente, la matriz de modos no amortiguados  $[\Phi]$  puede diagonalizar las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento. Por lo tanto,  $[\Phi]$  es la matriz de modos de un sistema con amortiguamiento proporcional. Para el análisis modal, esta es una de las propiedades mas importantes del amortiguamiento proporcional.

La ecuación (4.4) consiste en un conjunto de  $n$  ecuaciones desacopladas. Usando la teoría de un sistema de 1 GDL con amortiguamiento proporcional, las frecuencias naturales amortiguadas del modo  $r$ -esimo,  $\omega_r$ , se pueden estimar mediante:

$$\underline{\omega}_r = \omega_r \sqrt{1 - \chi_r^2} \quad (4.5)$$

$$\chi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) muestra que el amortiguamiento relativo del sistema depende de cada modo.

El amortiguamiento proporcional no es el único modelo que facilita el desacoplamiento de las ecuaciones. Un modelo de amortiguamiento mas general es:

$$[K][M]^{-1}[C] = [C][M]^{-1}[K] \quad (4.7)$$

Esto se puede estimar suponiendo que  $[\Psi]^T[C][\Psi]$  es una matriz diagonal. La ecuacion del movimiento de un sistema de  $n$  GDL con amortiguamiento estructural viene dado:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} + j[H]\{x\} = \{0\} \quad (4.8)$$

Donde  $[H]$  es la matriz de amortiguamiento estructural y  $j$  es la unidad de imaginaria. Si la matriz de amortiguamiento  $[H]$  es proporcional a las matrices de masa y rigidez, se puede descomponer la matriz en:

$$[H] = \mu[M] + \nu[K] \quad (4.9)$$

Donde,  $\mu, \nu$  son constantes positivas. La frecuencia natural del sistema viene dada por:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + j\eta_r) \quad (4.10)$$

$$\eta_r = \nu + \frac{\mu}{\omega_r^2} \quad (4.11)$$

$\eta_r$  se define como el factor de perdida de amortiguamiento para el  $r$ -esimo modo de vibración. La ecuación (4.11) muestra que el factor de perdida de amortiguamiento es diferente para cada modo de vibración. Si la matriz de amortiguamiento es solo proporcional a la rigidez ( $\mu = 0$ ), el factor de amortiguamiento sera igual a  $\nu$ .

## 4.2. Modelo de amortiguamiento viscoso no proporcional

Cuando el modelo de amortiguamiento viscoso de un sistema de  $n$  GDL es no proporcional, la solución de la ecuación (4.1) es de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{st} \quad (4.12)$$

Donde  $\{X\}$  es un vector complejo de amplitudes de desplazamiento. Realizando la transformada de Laplace a la ecuación (4.1) se llega a:

$$(s^2[M] + s[C] + [K])\{X\} = \{0\} \quad (4.13)$$

Esto es un problema de autovalores mas complejo y de mayor orden a los vistos hasta ahora. La solución de este problema descansa en la teoría

de espacios de estados vista en el capítulo (1). Esta aproximación inventa un nuevo vector de desplazamientos definido por:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (4.14)$$

Con este nuevo vector, la ecuación (4.1) se puede transformar en una nueva ecuación matricial del doble de tamaño.

$$[[C] : [M]]\{\dot{y}\} + [[K] : [0]]\{y\} = \{0\} \quad (4.15)$$

Junto con la siguiente identidad:

$$[[M] : [0]]\{\dot{y}\} + [[0] : [-M]]\{y\} = \{0\} \quad (4.16)$$

La ecuación (4.1) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{\dot{y}\} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{y\} = \{0\} \quad (4.17)$$

Simplificando la notación a:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{0\} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) es un problema normal de autovalores y su solución consiste en  $2n$  autovalores complejos  $\lambda_r$  (en parejas conjugadas) y los correspondientes  $2n$  autovectores  $\theta_r$  asociados a cada autovector. Dichos autovectores satisfacen:

$$(\lambda_r[A] + [B])\{\theta_r\} = \{0\} \quad (r = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4.19)$$

Los autovectores pueden ser agrupados en una matriz  $[\theta]$  de forma ascendente en función del autovalor correspondiente. Las propiedades de ortogonalidad aplicadas al problema de autovalores se pueden expresar como:

$$[\theta]^T[A][\theta] = [\cdot a_i \cdot] \quad (4.20)$$

$$[\theta]^T[B][\theta] = [\cdot b_i \cdot] \quad (4.21)$$

$$[\cdot b_i \cdot][\cdot a_i \cdot]^T = [\cdot \lambda_i \cdot] \quad (4.22)$$

Estas soluciones indican que existen modos naturales de amortiguamiento. Sin embargo, estos modos no son los mismos que los modos naturales no amortiguados (cuyos elementos están en fase o desfasados  $180^\circ$  entre si). Para sistemas con amortiguamiento no proporcional, existen diferencias de fase entre distintas partes del sistema dando lugar a modos complejos de vibración. Esta diferencia se manifiesta por el hecho que, en un sistema no amortiguado todos los puntos pasan por su punto de equilibrio simultáneamente, y para los modos complejos esto no es cierto. Por lo tanto, los modos de vibración sin amortiguamiento tienen nodos bien definidos mientras que los modos complejos no tienen líneas nodales estacionarias.

### 4.3. Modelo de amortiguamiento estructural no proporcional

Recordamos del capítulo (4.1) las siguientes ecuaciones:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} + j[H]\{x\} = \{0\} \quad (4.23)$$

$$[K]_c = [K] + j[H] \quad (4.24)$$

La solución de la ecuación (4.23) se puede asumir matemáticamente como:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{j\lambda t} \quad (4.25)$$

Donde  $\lambda$  es la frecuencia compleja y  $\{X\}$  es el vector complejo de amplitudes de desplazamiento. Esta forma de solución conduce al problema complejo de autovalores:

$$([K]_c - \lambda^2[M])\{X\} = \{0\} \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) producirá una matriz diagonal de autovalores  $[\cdot\lambda_r^2\cdot]$  y una matriz de autovectores  $[\Psi]$ . El autovalor  $\lambda_r^2$  está relacionado con la frecuencia natural  $\omega_r$  y al factor de pérdida de amortiguamiento  $\eta_r$  del sistema de la forma:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + j\eta_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.27)$$

Donde  $\lambda_r$  es también conocida como la frecuencia natural compleja del sistema. La matriz  $[\cdot\lambda_r\cdot]$  es la matriz de frecuencias naturales del sistema y  $[\Psi]$  es la matriz de modos del sistema. El modo complejo del modo  $r$ -ésimo  $\{\Psi\}$  no es único, lo serán todos los múltiplos que satisfagan la ecuación (4.26). La ortogonalidad del sistema revela:

$$[\Psi]^T[M][\Psi] = [\cdot m_r \cdot] \quad (4.28)$$

$$[\Psi]^T[M]_c[\Psi] = [\cdot k_r \cdot] \quad (4.29)$$

$$[\cdot k_r \cdot][\cdot m_r \cdot]^{-1} = [\cdot \lambda_r^2 \cdot] \quad (4.30)$$

La masa modal  $m_r$  y la rigidez modal  $k_r$  son ambas complejas. Es evidente del análisis realizado en las secciones (4.2,4.3) que el amortiguamiento estructural requiere un tratamiento analítico mucho más simple que teniendo un modelo viscoso de amortiguamiento. En el análisis modal es mucho más conveniente el uso de modelos de amortiguamiento estructural.

### 4.4. Modos con masa normalizada

Para un sistema con amortiguamiento estructural, el procedimiento de obtención de los modos de vibración es idéntico al procedimiento para sistemas no amortiguados, con la excepción que se están manejando números

imaginarios. La matriz de modos de masa normalizada ( $[\Psi]$ ) se puede definir:

$$[\Phi] = [\cdot m_r \cdot]^{\frac{1}{2}} + [\Psi] \quad (4.31)$$

Si se usa la matriz anterior para la ortogonalidad de un sistema de varios GDL, se tiene:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (4.32)$$

$$[\Phi]^T [K_c] [\Phi] = [\cdot \lambda_r^2 \cdot] \quad (4.33)$$

La ecuación (4.32), la matriz de masas se puede apreciar que se trata de una matriz compleja con parte imaginaria nula.

Con la matriz de masa normalizada, es posible diagonalizar la matriz de FRF de un sistema de varios GDL con amortiguamiento estructural.

$$[\Phi]^T ([K] + j[H] - \lambda^2[M]) [\Phi] = [\cdot (\lambda_r^2 - \omega^2) \cdot] \quad (4.34)$$

Esta descomposición puede ser útil para la adquisición de la composición modal de FRF complejas.

## 4.5. Funciones de respuesta en frecuencia

### 4.5.1. Matrices de rigidez y receptancia

La matriz de rigidez dinámica  $[Z(\omega)]$  y la matriz de receptancia de FRF  $[\alpha(\omega)]$  de un sistema de  $n$  GDL amortiguado se puede definir exactamente de la misma manera que en el caso de un sistema no amortiguado.

$$[Z(\omega)] = [K]_c - \omega^2[M] = [K] - \omega^2[M] + j[H] \quad (4.35)$$

$$[\alpha(\omega)] = ([K]_c - \omega^2[M])^{-1} \quad (4.36)$$

En resumen,  $\alpha(\omega)_{ij}$  representa el cociente de la respuesta de desplazamiento en el GDL  $i$  y solo una fuerza actuando en el GDL  $j$ . Con la existencia del amortiguamiento, la FRF es ahora una función en frecuencia compleja con parte imaginaria no nula. La FRF no tiende a infinito en este caso cuando se encuentra en la frecuencia natural del sistema.

### 4.5.2. Composición de la receptancia (FRF)

La obtención de la matriz de receptancia FRF mediante la inversión de la matriz de rigidez no es un procedimiento práctico en la realidad. Con en el caso sin amortiguamiento, la matriz de receptancia de un sistema de  $n$  GDL con amortiguamiento estructural se puede determinar a partir de los datos modales.

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi][\cdot (\lambda_r^2 - \omega^2) \cdot]^{-1} [\Phi]^T \quad (4.37)$$

Se puede apreciar que la matriz  $[\alpha(\omega)]$  es compleja, simétrica y siempre de rango máximo. El mismo razonamiento se puede tener para cada elemento de la matriz.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{\lambda_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{\lambda_2^2 - \omega^2} + \dots + \frac{\phi_{jn}\phi_{kn}}{\lambda_n^2 - \omega^2} \quad (4.38)$$

Los numeradores de las fracciones (los modos vibración) son números complejos. También son números complejos las frecuencias naturales de los denominadores.

Usando la constante modal, se puede reescribir la ecuación (4.38) como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{r A_{jk}}{\lambda_r^2 - \omega^2} = \{A_{jk}\}^T \left\{ \frac{1}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right\} \quad (4.39)$$

Por lo tanto, la p-esima columna de la matriz  $\{\alpha_{jk}(\omega)\}_p$  se puede definir de la siguiente manera:

$$\{\alpha_{jk}(\omega)\}_p = \begin{Bmatrix} \alpha_{jk}(\omega)_{p1} \\ \alpha_{jk}(\omega)_{p2} \\ \vdots \\ \alpha_{jk}(\omega)_{pn} \end{Bmatrix} = [A_p] \left\{ \frac{1}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right\} \quad (4.40)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} \phi_{p1}\phi_{11} & \phi_{p2}\phi_{12} & \dots & \phi_{pn}\phi_{1n} \\ \phi_{p1}\phi_{21} & \phi_{p2}\phi_{22} & \dots & \phi_{pn}\phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{p1}\phi_{n1} & \phi_{p2}\phi_{n2} & \dots & \phi_{pn}\phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

La matriz  $[A_p]$  es llamada la matriz de constante modal para la columna p-esima de la matriz de receptancia  $[\alpha_{jk}(\omega)]$ . Cada columna de  $[\alpha_{jk}(\omega)]$  tiene su propia constante modal.

### 4.5.3. Diagramas y propiedades de FRF

Al igual que en los sistema de 1 GDL, la FRF de sistemas de  $n$  GDL tiene varias formas de representarse graficamente con el fin de mostrar todas las características. Cabe destacar que en un sistema de 1 GDL no se puede realizar un diagrama de nyquist puesto que la parte imaginaria es siempre nula. Se usara como sistema de ejemplo a representar un sistema de 4 GDL con las siguientes matrices:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad kg \quad [K] = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix} \quad N/m \quad (4.42)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N/m \quad (4.43)$$

### Diagrama Amplitud-Fase

El diagrama de amplitud-fase consiste en un gráfico que representa la amplitud y la fase del sistema frente frecuencia. La figura (4.1) representa la amplitud y la fase de la movilidad  $Y_{11}(\omega)$  de los 4 GDL del sistema en escala lineal. Como se esperaba, el gráfico de la amplitud esta dominado por las resonancias. El diagrama de la fase muestra la existencia de modos de vibración al haber un cambio brusco en la fase a determinadas frecuencias.

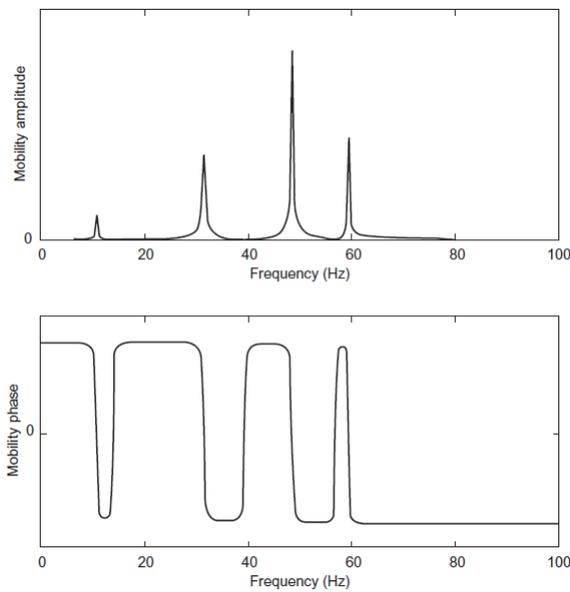


Figura 4.1: Movilidad  $Y_{11}(\omega)$

Como en los casos que no hay amortiguamiento, un mejor uso de la amplitud es utilizar la escala de decibelios ( $dB$ ). La receptancia  $\alpha_{11}(\omega)$  se muestra en escala de decibelios en la figura (4.2).

Claramente se pueden apreciar en ellas las 4 resonancias que posee el sistema, pero también las antiresonancias y la mínima. Estos son unos resultados que no se pueden ver con la escala lineal.

### Diagrama Real-Imaginario

Los gráficos real-imaginario consisten en dos partes: la parte real de la FRF frente a la frecuencia y la parte imaginaria de la FRF frente a

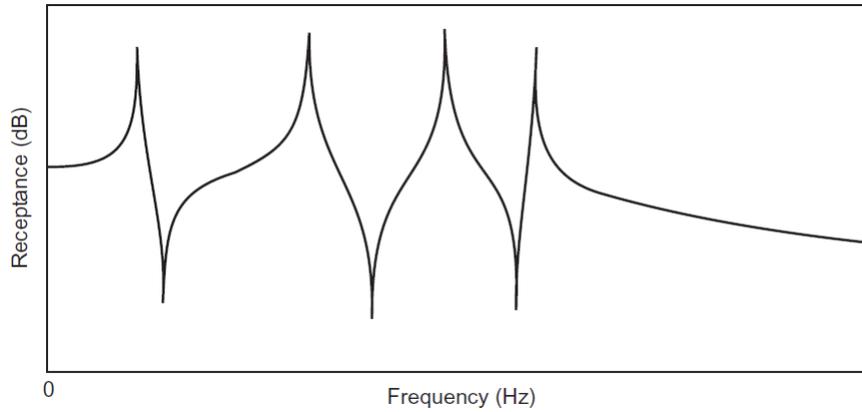


Figura 4.2: Movilidad  $Y_{11}(\omega)$  en escala decibelios

frecuencia también. Para un sistema de varios GDL la parte real e imaginaria de la FRF se pueden estimar analíticamente de la siguiente manera.

$$Re[\alpha_{jk}(\omega)] = Re\left[\sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2}\right] \quad (4.44)$$

$$Im[\alpha_{jk}(\omega)] = Im\left[\sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2}\right] \quad (4.45)$$

Las figuras (4.3,4.4) muestran la parte real e imaginaria de la FRF del sistema de 4 GDL.

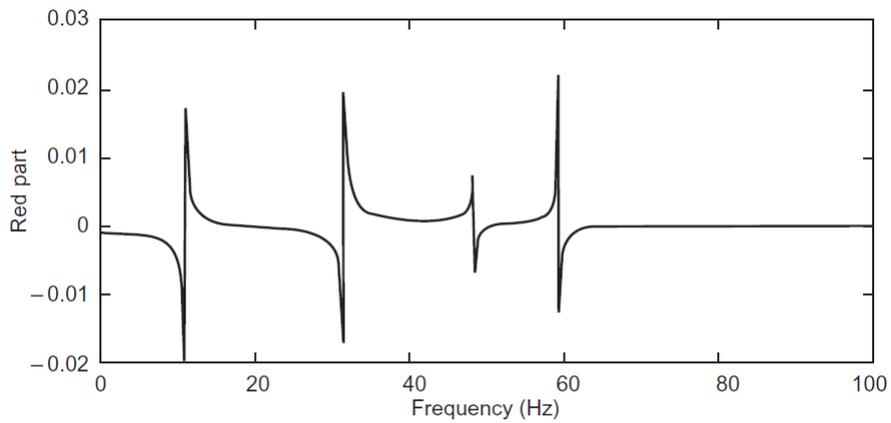


Figura 4.3: Parte real de la FRF

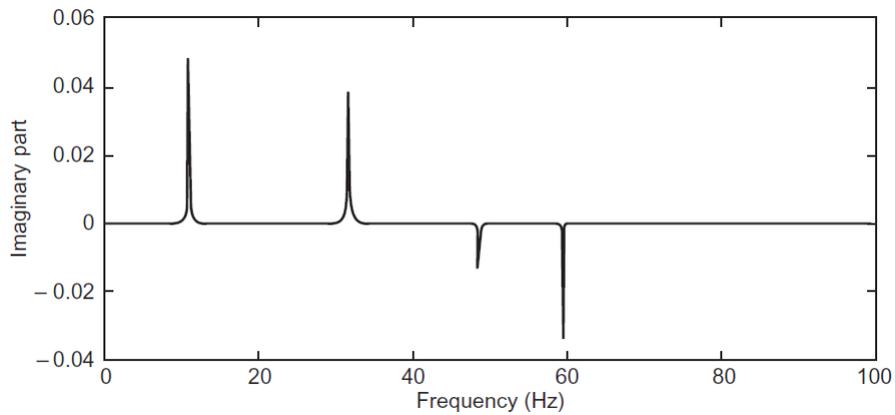


Figura 4.4: Parte imaginaria de la FRF

### Diagrama de Nyquist

El principal beneficio del uso de diagramas de Nyquist para un sistema de 1 GDL proviene de la propiedad de circularidad en el plano complejo. Esta propiedad sigue siendo válida para los sistemas de varios GDL. No se puede aplicar exactamente dado que un modo de vibración se verá influido por los otros modos de vibración del sistema. Sin embargo, en las cercanías de una resonancia (o modo de vibración), se podrá asumir que la FRF está dominada solo por ese modo.

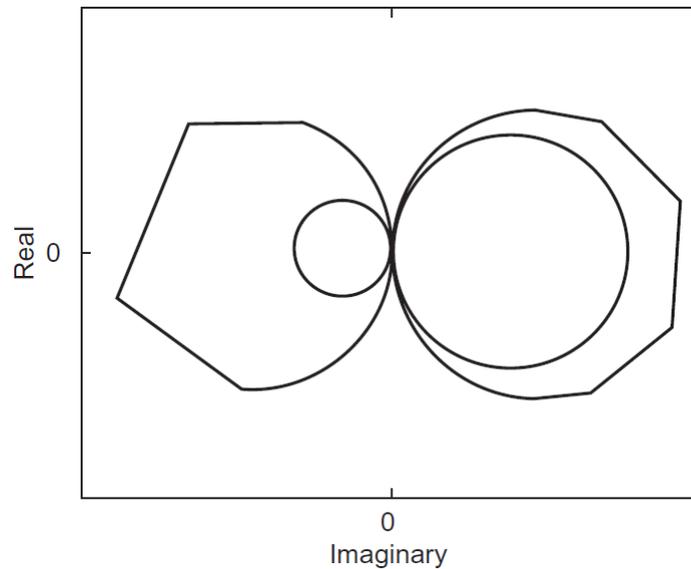


Figura 4.5: Diagrama de Nyquist de la FRF

Los puntos obtenidos no forman un círculo perfecto debido a la resolución de la frecuencia. El dominio local de un modo de vibración y la *casi* circularidad de los diagramas de nyquist permite el uso de la teoría de un 1 GDL en el análisis.

### Diagrama de rigidez

Para sistemas de 1 GDL, este tipo de gráficos se caracteriza por una gran simplicidad y facilidad para expresar los parámetros modales con los parámetros espaciales. Sin embargo, para sistemas de  $n$  GDL las ventajas de este método se ven fuertemente reducidas. La siguiente ecuación indica que la rigidez dinámica de un sistema de  $n$  GDL no se parecerá al sistema de 1 GDL.

$$\frac{1}{\alpha_{ij}(\omega)} \neq \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_r^2 - \omega^2}{\phi_{jr}\phi_{kr}} \quad (4.46)$$

La dificultad de obtener la sencillez para los sistemas 1 GDL reside en la complejidad de los numeradores (constantes modales). Esta complejidad distorsiona los gráficos real-imaginario de las FRF de manera que cuando un modo tenga dominio local no se pueden separar dichas partes. Aunque para la misma FRF, la información debería ser idéntica. Es importante hacer cierta información mas visible y, por lo tanto, más útil para el análisis modal.

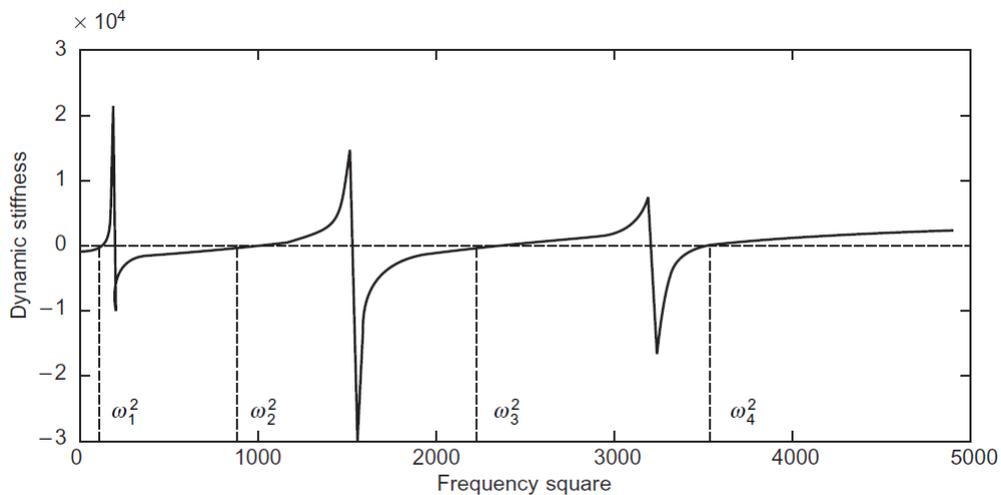


Figura 4.6: Diagrama de rigidez dinámica

## 4.6. Respuesta en el tiempo

Como las FRF de sistemas de 1 GDL, las FRF de sistemas amortiguados de  $n$  GDL se pueden escribir en forma de raíces complejas y residuos.

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_r \left( \frac{{}_r A_{ik}}{j\omega - \lambda_r} + \frac{{}_r A_{ik}^*}{j\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (4.47)$$

Las raíces complejas  $(\lambda_r, \lambda_r^*)$  son pares conjugados. También los son los residuos  $({}_r A_{ik}, {}_r A_{ik}^*)$ . Utilizando la transformada de Laplace se puede llegar a una expresión más general para la función de transferencia entre las coordenadas  $i$  y  $k$ .

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_r \left( \frac{{}_r A_{ik}}{j\omega - s_r} + \frac{{}_r A_{ik}^*}{j\omega - s_r^*} \right) \quad (4.48)$$

$$s_r, s_r^* = -\xi_r \omega_r \pm \sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r j \quad (4.49)$$

En general, la respuesta en vibraciones libres de un sistema de  $n$  GDL en la coordenada  $i$  es una superposición de respuestas temporales de cada modo de vibración. Este fenómeno es muy similar al de la contribución modal de cada uno de los modos de vibración. La respuesta puede ser escrita:

$$x_i(t) = \sum_{r=1}^{2n} \varphi_{ir} e^{\lambda_r t} \quad (4.50)$$

Los elementos  $\varphi_{ir}$  ( $r = 1, 2, \dots, 2n$ ) son los elementos  $i$ -ésimos de la columna  $r$ -ésima de la matriz de modos  $2n \times 2n$ . La ecuación del movimiento de un sistema bajo fuerzas externas arbitrarias es:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (4.51)$$

Aplicando la transformada de Laplace y suponiendo condiciones iniciales nulas se llega a:

$$\{X(s)\} = (s^2[M] + s[C] + [K])^{-1}\{F(s)\} \quad (4.52)$$

La inversa de la transformada de Laplace dará lugar a la respuesta temporal del sistema.

$$\{x(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\{X(s)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{(s^2[M] + s[C] + [K])^{-1}\{F(s)\}\} \quad (4.53)$$

Esta antitransformada requiere información de las condiciones iniciales del sistema.

## 4.7. Observaciones acerca de los modos complejos

Para el análisis modal, quizás el resultado mas importante de tener un sistema con amortiguamiento no proporcional es la obtención de modos complejos de vibración. Cuando un modo de vibración se vuelve complejo, varios puntos de la estructura dejan de moverse en un patrón claro ya estén en fase o no.

Matemáticamente, se es capaz de interpretar el origen de los modos complejos. Si un sistema dinámico es modelado como un sistema de varios GDL con matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, es fácil ver que los autovalores del sistema se volverán complejos cuando: una o varias de las matrices no sea simétrica o la matriz de amortiguamiento no sea diagonalizable según los modelos de amortiguamiento. En el primer caso, aunque no existan términos de amortiguamiento, el problema de autovalores conducirá a modos de vibración complejos. En el segundo caso, si el amortiguamiento no es proporcional, los autovalores automáticamente serán complejos.

Los modos complejos de vibraciones comparten algunas características con los modos reales. Cuando se emplea el amortiguamiento estructural, los modos complejos son ortogonales entre sí respecto de las matrices de masa y rigidez. Por otro lado, cuando se usa el amortiguamiento viscoso, los modos complejos vuelven a ser ortogonales entre sí respecto de las matrices  $[A]$ ,  $[B]$  definidas. Dada estas propiedades de ortogonalidad, los modos complejos desacoplan las ecuaciones del movimiento (amortiguamiento estructural) o reconstruyen dichas ecuaciones (amortiguamiento viscoso).

A diferencia de los modos reales, los elementos de un sistema bajo un modo complejo poseen un desfase entre ellos entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ . Esto significa que los puntos de la estructura no pasan por el punto de equilibrio al mismo tiempo, aunque comparten la frecuencia de oscilación. Como resultado, los nodos del sistema no están bien definidos. Estos puntos se mueven con cierto periodo dictado por la complejidad del modo.

La verdadera dificultad de los modos complejos no reside en el estudio y la simulación de ellos. La tarea mas ardua es la identificación de estos modos y el uso de la teoría modal sobre ellos. Por ejemplo, si 2 modos reales cercanos no son analizados correctamente o precisamente, la solución que se obtiene es un modo complejo.

La cantidad de modos complejos que existen en una estructura no es sencilla por lo que se necesita el uso de un parámetro que permita el análisis de los modos complejos (factor de complejidad). Este factor cuantifica la desviación de fase normalizada de un modo complejo a través del calculo del

valor medio de diferencia de fase de todos los elementos del sistema. El porcentaje del cociente entre este valor medio y el valor máximo de desviación ( $90^\circ$ ) indica el grado de complejidad del sistema.

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [16], [17], [18], [19], [20], [21] y [22].

# 5

## Medida de la respuesta en frecuencia

### 5.1. Introducción

La medición de un análisis modal consiste en adquirir la función de respuesta en frecuencia de una estructura a partir de un test. Existen muchos métodos disponibles para llevar a cabo las mediciones, aunque solo se explicara un método muy simple. Este método trata de excitar la estructura mediante una única fuerza conocida y medir la fuerza y la respuesta en la estructura. Como resultado, se obtienen datos para un grupo de FRF que pueden ser empleadas mas tarde para derivar el modelo modal de la estructura.

El análisis experimental no es mas que un sistema de identificación. La estructura se puede representar como una "caja negra" que necesita ser descifrada. Las aproximaciones tradicionales perturban la caja negra con una entrada conocida, miden la respuesta y proceden con la identificación. La fuerza de excitación puede ser aleatoria, sinusoidal, periódica o impactos. Teóricamente, el tipo de fuerza de excitación no afecta a la FRF pues viene definida como un cociente entre la respuesta y la fuerza. Siempre se quiere emplear una fuerza con la suficiente energía y componentes en frecuencia con el fin de excitar todos los modos de vibración de interés y alcanzar el menor error en el procesamiento de la señal. También hay que tener en cuenta las posibles limitaciones que pueda plantear el hardware utilizado en el ensayo.

La hipótesis de que el test estructural se comporta de forma lineal es esencial para alcanzar medidas precisas de las FRF. La comprobación de la linealidad no es una tarea difícil de hacer. Para una estructura que no

sigue un comportamiento lineal exactamente, se sabe perfectamente que el modelo derivado de las FRF medidas será un modelo matemático lineal de la estructura. Otra hipótesis esencial es la reciprocidad de la estructura. Una vez más, esta hipótesis es sencilla de chequear. En adición, la medición de FRF no estará bien realizada si las propiedades dinámicas de estructura varían durante las mediciones. Por este motivo, la estructura debe ser invariante en el tiempo.

La rápida mejora del hardware de medida y las capacidades de computación durante las últimas décadas permiten la medición de FRF en distintos puntos de la estructura con varias fuerzas de excitación repartidas de forma simultánea. Con varias fuerzas como entrada, es más fácil provocar la vibración de la estructura bajo amplitudes razonables antes que tener que excitar con una única fuerza a una gran amplitud.

Las FRF no son los únicos datos que se buscan obtener en los análisis modales. Como se sabe, una categoría especial de análisis modales necesita el historial temporal de respuestas del sistema ya sean vibraciones libres o impulsos.

## 5.2. Medidas generales de instalación

La medición típica de instalación en un laboratorio debe tener 3 partes bien diferenciadas. El caso más simple de una entrada y una salida se tomará como ejemplo. La primera parte es responsable de generar las fuerzas de excitación y aplicarlas al test estructural. La segunda parte consiste en la medición y adquisición de los datos de la respuesta dinámica del sistema. Finalmente, la última parte realiza el procesamiento de la señal de respuesta y estima las FRF.

### 5.2.1. Mecanismos de excitación

La primera parte de las mediciones de instalación son las fuerzas de excitación que aplican una fuerza con la suficiente amplitud y contenido en frecuencia a la estructura. Hay diversos equipos de excitación a la hora de excitar una estructura. Los 2 más comunes son los martillos y los agitadores.

Un martillo es un aparato que produce una fuerza de excitación de tipo impulso. Sus partes son: la punta del martillo, el transductor de fuerza, el contrapeso y el mango. La cabeza del martillo se puede cambiar con el fin de alterar la dureza. Los materiales más frecuentes empleados son goma, plástico y acero. La dureza de la punta del martillo determina directamente el rango de las frecuencias que se excitan.

Un agitador electromagnético es típico agitador que suele emplear en los análisis modales. Consiste en un imán, una masa móvil y una bobina en el imán. Cuando una corriente eléctrica pasa del generador de señales a la bobina dentro del agitador, una fuerza proporcional a la corriente y al flujo magnético mueven la masa móvil. Un agitador electromagnético posee un amplio rango de frecuencias y amplitudes. Para bajas frecuencias y grandes amplitudes se puede emplear un agitador electrohidráulico.

### 5.2.2. Acelerómetros

Un acelerómetro es el sensor mas común para los ensayos modales. Es capaz de medir la aceleración de la estructura en un punto y da como salida una señal en forma de voltaje. La señal será transformada por un acondicionador de señales antes de ser procesada por el analizador de señales. Los acelerómetros no asumen las propiedades de la estructura como lineales. Un acelerómetro preciso solo graba fielmente la aceleración en un único punto de la estructura.

Hay 2 aspectos fundamentales en la medición de aceleraciones que un sensor necesita tratar. Una es la frecuencia y la otra es la amplitud. Ambas están reflejadas en la relación entrada-salida del sensor. Un acelerómetro ideal debería tener una relación entrada-salida para asegurar que el contenido en amplitud a diferentes frecuencias es verdaderamente grabado.

La mayoría de acelerómetros viene con tablas de relación amplitud-frecuencia y fase-frecuencia para mostrar sus características. En la figura (5.1) se muestra una curva típica de respuesta de un acelerómetro.

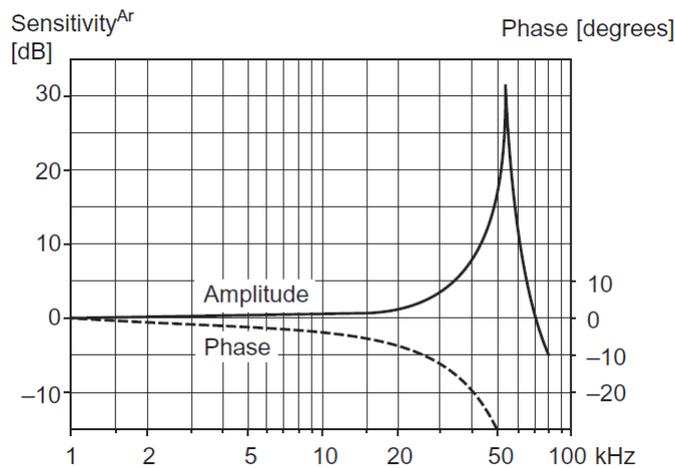


Figura 5.1: Típica tabla de un acelerómetro

Las características de un acelerómetro son su potencial. Pueden medir con total precisión si se encuentran unidos rígidamente al sistema. En la realidad, este no será el caso. Un acelerómetro tiene que ser montado de forma no rígida para medición.

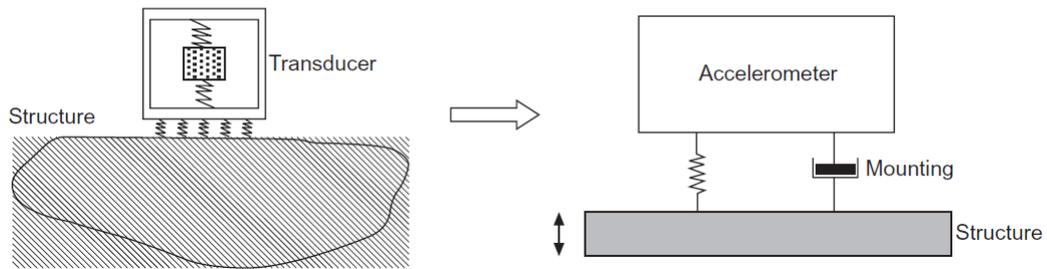


Figura 5.2: Modelo de 1 GDL de un acelerómetro y montaje

La precisión del acelerómetro depende en gran parte al montaje de éste, que es modelado con un muelle y un amortiguador. El acelerómetro es, por supuesto, mas que un bloque de masa. En la figura (5.1) se puede apreciar que tiene su propia frecuencia natural. Sin embargo, esta frecuencia suele ser mucho mayor que la frecuencia natural del sistema dinámico completo.

El modelo mas común de acelerómetro es el piezoeléctrico, ilustrado en la figura (5.3). En este tipo un cambio en las tensiones inducidas provoca un cambio en la forma del cristal, que conlleva un cambio en la carga eléctrica. A la hora de seleccionar el tipo de acelerómetro, varios aspectos deben ser tratados antes de proceder. Los principales parámetros que afectan al acelerómetro piezoeléctrico son: las propiedades de la respuesta en frecuencia; la sensibilidad y la estabilidad frente cambios de temperatura; la sensibilidad axial y los esfuerzos en la base.

Las propiedades de respuesta en frecuencia determinan la linealidad del sensor. La sensibilidad de un acelerómetro dicta el ruido de las señales. Una gran estabilidad significa una gran precisión en las medidas. La sensibilidad axial conlleva errores en las medidas. Los esfuerzos en la base vienen establecidos por la flexibilidad de la base del acelerómetro interactuando con la superficie no rígida del sistema.

### 5.2.3. Transductores de fuerza

El transductor de fuerza es otro tipo de sensores usados en los ensayos modales. Al igual que los acelerómetros, un transductor piezoeléctrico genera una salida en forma de voltaje que es proporcional a la fuerza aplicada. Sin embargo, los transductores no añaden propiedades inerciales al elemento que estan colocados. El transductor tiene que ser comprimido o presionado para generar la señal de salida. Para test de agitación, un transductor de

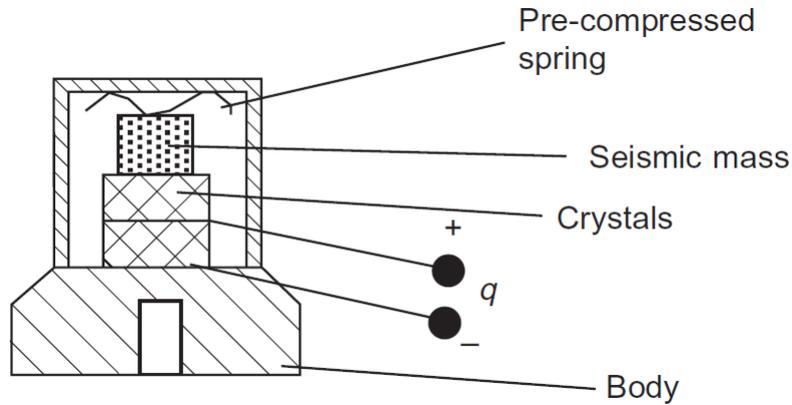


Figura 5.3: Diagrama de un acelerómetro piezoeléctrico

fuerza tiene que colocarse entre la superficie de la estructura y el agitador. Para un test de martillo, el transductor se coloca en la cabeza del martillo y es comprimido al impactar.

La forma en que las características del transductor afecta a las mediciones es muy similar al caso del acelerómetro. Estos incluyen características de respuesta en frecuencia, sensibilidad y sensibilidad axial. La principal consideración a la hora de elegir el tipo de transductor reside en la comprensión de la interacción del sistema y el agitador. Por ejemplo, en el caso de un ensayo de martillo, la variación de la cabeza de martillo o de la masa del mango del martillo pueden causar diferentes fuerzas de calibración para el transductor.

### 5.3. Preparación para el ensayo estructural

Una estructura real la mayoría de veces esta conectada con sus alrededores. Por lo tanto, sus características dinámicas *in situ* son determinadas por las condiciones de contorno al igual que por sí mismo. Cuando se lleva a cabo la medición de FRF, la pregunta que necesita ser contestada son: ¿Bajo qué condiciones queremos analizar la estructura, aislada o *in situ*? La respuesta de esta pregunta depende de 2 consideraciones cuando se prepare la estructura para el ensayo: (1) si se necesita el modelo modal de la estructura aislada o cuando esté en funcionamiento; y (2) si es realista ensayar la estructura *in situ* o en el laboratorio.

Teniendo en consideración (1), la respuesta es que depende que se necesite obtener del modelo modal. Para algunas estructuras, se necesita conocer

su comportamiento dinámico exactamente en sus condiciones de trabajo o con su ambiente. Para la consideración (2), es necesario asesorarse sobre la viabilidad de que la estructura sea analizada bajo las condiciones deseadas. Algunas estructuras no pueden ser ensayadas *in situ* por carencia de tecnología o inaccesibilidad. Es vital el uso de un modelo modal obtenido de las mediciones en laboratorio para simular y analizar como sería el comportamiento *in situ*. Otras estructuras no caben en el ambiente de un laboratorio y no queda mas remedio que analizarlas *in situ*. Para ambos casos, es vital asegurar que las condiciones de ensayo son estables y repetibles de forma que las mediciones de FRF son fiables y representativas.

Es imposible simular las condiciones de contorno libre o empotrado. Estas condiciones solo pueden ser aproximadas en un laboratorio con una precisión razonable. La condición de contorno libre es simulada mediante la sujeción de la estructura con materiales blandos, como por ejemplo muelles. En la figura (5.4), se aprecia una placa sujeta por muelles en cada una de sus esquinas.

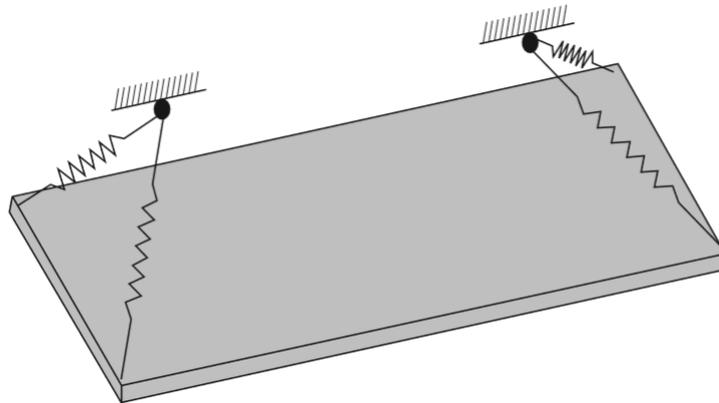


Figura 5.4: Una placa simple soportada por 4 muelles

Las condiciones de empotramiento son mas difíciles de aproximar en el laboratorio. Teóricamente, la condición de contorno de empotramiento restringe los 6 grados de libertad posibles. Esto en realidad casi nunca se puede conseguir. En los ensayos modales, normalmente se suele fijar la estructura a analizar a otra estructura mucho mas pesada.

## 5.4. Selección de las fuerzas de excitación

Aunque teóricamente los datos de FRF no deberían variar con el tipo de excitación (y respuesta), en la práctica la precisión y calidad de los datos depende, entre muchos factores, del tipo de excitación elegida. Las restric-

ciones temporales a menudo suponen un factor paralelo al hardware. Los diferentes objetivos de los ensayos conducen a diferentes cantidades de tiempo requeridas. A continuación, se realizara solo una breve descripción de las fuerzas de excitación mas comunes.

#### 5.4.1. Excitación sinusoidal

La excitación de tipo sinusoidal son el método mas tradicional de los ensayos modales. Hoy en día, sigue siendo uno de los mas populares. La fuerza contiene solo una frecuencia en cada instante de tiempo y la excitación cambia de una frecuencia a otra siguiendo un paso, permitiendo a la estructura comprometerse a una sola vibración armónica a cada instante. Este tipo de excitación resulta efectivo para excitar estructuras con un alto nivel de vibraciones, para caracterizar la no linealidad del sistema, y excitar modos normales de vibración de estructuras con amortiguamiento.

La excitación mediante una única entrada de fuerza puede llegar a consumir mucho tiempo, a pesar de que tiene una efectividad superior. La llegada de los ensayos MIMO (múltiples entradas y salidas) permiten la reducción de tiempo de los ensayos. Con la habilidad de estimar las FRF en tiempo real en muchos canales, las excitaciones sinusoidales se convierten tan rápidas como fiables para los ensayos modales.

Cuando el sistema se encuentra en las cercanías de la frecuencia natural, la respuesta estructural se encuentra dominada por un modo de vibración. Esta segregación natural provee una avenida directa para la identificación de parámetros con un ratio de ruido satisfactorio. Esta es una posibilidad única que ofrecen las excitaciones sinusoidales.

#### 5.4.2. Excitación aleatoria

La señal de la fuerza de una excitación aleatoria es estacionaria aleatoria con una distribución gaussiana. Contiene a todas las frecuencias dentro de un rango de frecuencias. Para una estructura que no se comporta linealmente, las excitaciones aleatorias tienen la tendencia a linealizar el comportamiento de las mediciones. La FRF derivada de las mediciones será lineal y, aunque no contenga mucha información de la no linealidad, es una función muy útil al ser la mejor FRF que se pueda estimar para la estructura. Esta función correctamente modela la disipación de energía de la estructura durante la vibración.

El hecho de que, para excitaciones aleatorias, ni la señal de la fuerza ni la respuesta tengan un periodo infinito hace que se cometa un error llamado *error de leakage*.

### 5.4.3. Excitación pseudo-aleatoria

La señal de fuerza en esta excitación es estacionariamente aleatoria y consiste en unas frecuencias discretizadas formadas por múltiples enteros de la frecuencia de resolución usada por la transformada de Fourier. Es una señal periódica con amplitud y distribución de fase aleatoria. Esta señal tiene la ventaja de que no posee el error de leakage mencionado anteriormente. Sin embargo, las señales pseudo-aleatorias requieren de aparatos especiales para generar tales señales y requieren un mayor tiempo de implementación que una señal aleatoria.

### 5.4.4. Excitación de impacto

El dominio temporal de la señal de fuerza de un impulso tiene un contenido en frecuencia incontrolable. En lo que se refiere al hardware, la excitación por impacto es una técnica mucho más simple que con una excitación a través de un agitador. Debido a que no existe conexión física entre la excitación y la estructura, los ensayos de impacto evitan el problema de interacción entre ellos.

Las grandes desventajas de los ensayos de este tipo son tan notables como las ventajas. Resulta muy difícil controlar el nivel de la fuerza o rango en frecuencia del impacto. Esto puede afectar al ratio de ruido de las medidas, produciendo datos de peor calidad. Además, algunas estructuras son demasiado delicadas como para ser golpeadas por un martillo.

## 5.5. Diferentes estimaciones de FRF y efecto del ruido

Para cualquier medida, existe ruido tanto en las entradas y en las salidas. Para frecuencias cercanas a la resonancia, la respuesta vibratoria es tan significativa que el ruido de la salida se puede despreciar. Para frecuencias cercanas a la antiresonancia, la señal de excitación es tan significativa que el ruido de la entrada se puede despreciar. Para otras frecuencias, es de esperar que exista ruido tanto en las entradas como en las salidas que afecte a la estimación de la FRF. Esto provoca el esfuerzo de buscar estimadores de FRF que deriven la FRF más precisa con la presencia del ruido.

Del análisis espectral de doble canal una FRF es definida como el espectro cruzado de la excitación y respuesta dividido por el auto-espectro de la excitación. Esto conduce al siguiente estimador de FRF:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{FX}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} \quad (5.1)$$

Donde,  $S_{FX}(\omega)$  es el espectro-cruzado de la excitación y respuesta y  $S_{FF}(\omega)$  es el auto-espectro de la excitación. Se ha descubierto en el análisis espectral que se puede estimar la misma FRF del cociente del auto-espectro de la excitación y el cociente del espectro-cruzado de excitación y respuesta.

$$H_2(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)} \quad (5.2)$$

Cuando el test de estructural satisface todas las hipótesis y cuando el ruido y los errores de las medidas no existen, los estimadores de la FRF deben ser iguales.

$$H_1(\omega) = H_2(\omega) = H(\omega) \quad (5.3)$$

En realidad, es imposible que las medidas de FRF estén libres de ruidos. La figura (5.5) muestra que la medida de fuerza  $\hat{F}(\omega)$  es una combinación de la fuerza  $F(\omega)$  y el ruido de la entrada  $M(\omega)$ . Estos dos normalmente son inseparables en el dominio del tiempo, pero no están correlacionados. Por lo tanto, tenemos  $S_{MF}(\omega) = 0$ . Esta propiedad es muy útil en la estimación de FRF. En la salida ocurre un proceso similar. La respuesta medida  $\hat{X}(\omega)$  engloba la respuesta  $X(\omega)$  y el ruido de la salida  $N(\omega)$ . Tampoco están correlacionadas, luego  $S_{NX} = 0$ .

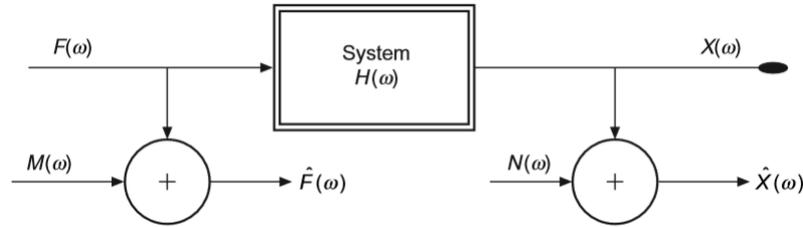


Figura 5.5: Estimación de FRF con ruido en la entrada y salida

La FRF, usando  $\hat{X}(\omega)$  y  $\hat{F}(\omega)$ , se puede estimar de la siguiente manera:

$$\hat{H}_1(\omega) = \frac{S_{FX}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} = H(\omega) \left(1 + \frac{S_{MM}(\omega)}{S_{FF}(\omega)}\right)^{-1} \quad (5.4)$$

$$\hat{H}_2(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)} = H(\omega) \left(1 + \frac{S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega)}\right)^{-1} \quad (5.5)$$

Ninguno estimador calcula exactamente la FRF. En términos de amplitud,  $\hat{H}_1(\omega)$  es un subestimador y  $\hat{H}_2(\omega)$  es un sobreestimador.

En una resonancia, la interacción entre el agitador y la estructura normalmente es una muesca en la señal de la fuerza. Esto permite el dominio del ruido en la entrada resultando significativo  $S_{MM}(\omega)$  comparada con  $S_{FF}(\omega)$ . En consecuencia, el estimador  $\hat{H}_1(\omega)$  subestima la verdadera FRF  $H(\omega)$  y el

estimador  $\hat{H}_2(\omega)$  es muy preciso. En un ensayo modal bajo estas condiciones el estimador  $\hat{H}_2(\omega)$  debería escogerse sobre  $\hat{H}_1(\omega)$ .

$$\hat{H}_1(\omega)|_{resonancia} = \frac{S_{FX}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} = H(\omega)(1 + \frac{S_{MM}(\omega)}{S_{FF}(\omega)})^{-1} < H(\omega) \quad (5.6)$$

$$\hat{H}_2(\omega)|_{resonancia} = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)} = H(\omega)(1 + \frac{S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega)})^{-1} \approx H(\omega) \quad (5.7)$$

En una anti-resonancia, la respuesta de la estructura es usualmente insignificante respecto la entrada de la fuerza. Esto permite que el ruido domine la salida. De esta manera  $S_{NN}(\omega)$  es significativa comparada con  $S_{XX}(\omega)$  y pequeña con  $S_{MM}(\omega)$ . Como resultado, se tienen las siguientes estimaciones:

$$\hat{H}_1(\omega)|_{antiresonancia} = \frac{S_{FX}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} = H(\omega)(1 + \frac{S_{MM}(\omega)}{S_{FF}(\omega)})^{-1} \approx H(\omega) \quad (5.8)$$

$$\hat{H}_2(\omega)|_{antiresonancia} = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)} = H(\omega)(1 + \frac{S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega)})^{-1} > H(\omega) \quad (5.9)$$

Los dos estimadores están relacionados entre sí mediante la función de coherencia  $\gamma^2(\omega)$ . Para la entrada  $f(t)$  y la salida  $x(t)$ , la coherencia se define como:

$$\gamma_{FX}^2(\omega) = \frac{|S_{XF}(\omega)|^2}{S_{FF}(\omega)S_{XX}(\omega)} \quad (5.10)$$

Físicamente, la coherencia refleja la causalidad y la relación lineal entre la salida  $x(t)$  y la entrada  $f(t)$ . Por lo tanto,  $\gamma^2(\omega)$  es igual a 0 cuando la salida no es debida a la entrada y  $\gamma^2(\omega)$  es igual a 1 cuando la salida es solamente debida a la entrada. De las definiciones anteriores de los estimadores, se llega a:

$$\gamma_{FX}^2(\omega) = \frac{\hat{H}_1(\omega)}{\hat{H}_2(\omega)} \quad (5.11)$$

Existe otro tipo de error que se comete en las mediciones de FRF que no es debido al ruido. Se trata del error de leakage en la transformada de Fourier. Leakage ocurre cuando las vibraciones libres de una resonancia se truncan prematuramente. Como resultado, los espectros  $S_{XX}(\omega)$  y  $S_{XF}(\omega)$  contendrán error. Solo el espectro  $S_{FF}(\omega)$  permanecerá inalterado. Finalmente, se llega a la conclusión de que el estimador  $\hat{H}_1(\omega)$  estaría bajo los efectos del error de los espectros, mientras que el estimador  $\hat{H}_2(\omega)$  será preciso al no tener error.

## 5.6. Dos imperfecciones de la medición de datos

Teóricamente, una estructura tiene infinitos grados de libertad, y por lo tanto, modos de vibración. Ninguna medida es capaz de medirlos todos. Desde este punto de vista, la FRF medida del sistema está siempre incompleta.

Cuando se trata con una estructura discretizada por un modelo analítico como el modelo de los elementos finitos, el número de grados de libertad aplicados suele ser mayor que el número de puntos donde se toma medidas. En este caso, la FRF también vuelve a estar incompleta.

Primero, los datos medidos solo pueden cubrir un rango de medida limitado en frecuencia, dando lugar solo a unos modos de vibración determinados. Por lo tanto, de los datos obtenidos solo se puede derivar un número incompleto de modos. El rango de frecuencia cubierto durante el ensayo viene determinado por el interés, por la limitación del hardware como el montaje de acelerómetros o por el rango de frecuencias donde la estructura tiene un comportamiento modal. Esta imperfección se puede llamar *imperfección en frecuencia*.

Segundo, el número de coordenadas empleadas en la medición de FRF es casi siempre menor que el número de grados de libertad del modelo analítico. Esto significa que la descripción espacial de los modos no está completa (*imperfección espacial*). El número de coordenadas empleadas en las mediciones viene determinado por el coste y el tiempo que conllevan, la accesibilidad a los puntos de medición o la habilidad para medir dichos puntos. Para modos de vibración bajos, un número modesto de coordenadas resulta suficiente para la representación de los modos. Para modos de alta frecuencia, el número de coordenadas necesarias es mucho más elevado, pudiendo llegar a causar errores del tipo *aliasing* si no son suficientes.

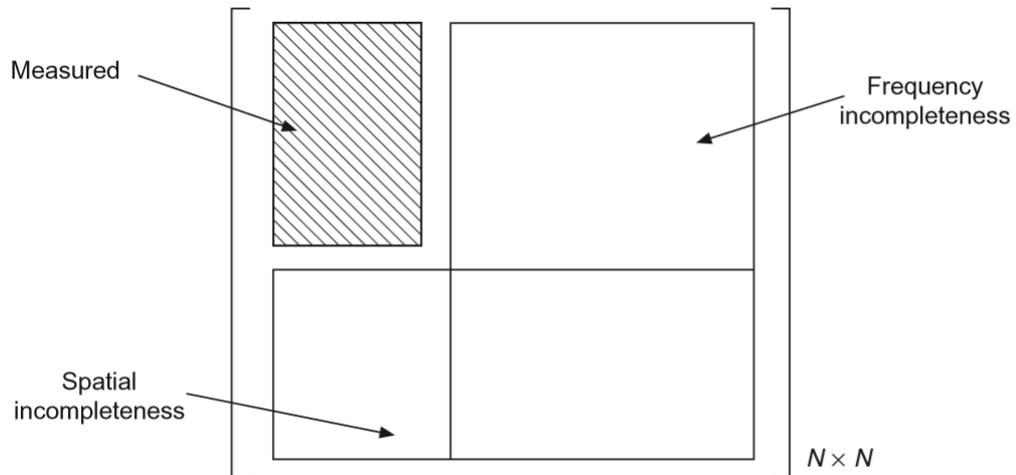


Figura 5.6: Estimación de FRF con ruido en la entrada y salida

## 5.7. Evaluación inicial de las mediciones FRF

La calidad del análisis modal recae críticamente en la calidad de las medidas de las FRF. Aunque el análisis modal puede intentar minimizar la imprecisión que llevan los datos medidos, ningún método es capaz de rectificar los errores fundamentales cometidos en el análisis. Las propiedades modales derivadas de las erróneas mediciones de FRF son susceptibles a errores inaceptables.

La evaluación de las medidas realizadas es básicamente determinada por dos cosas: (1) la estructura satisface las hipótesis que el análisis modal requiere; y (2) los errores humanos y sistemáticos son minimizados o eliminados. Principalmente, la estructura necesita cumplir las propiedades de reciprocidad, invariante en el tiempo y linealidad. Si estas propiedades no son verificadas, la veracidad de los datos medidos se vera reducida.

Aunque hay métodos que ayudan a identificar errores potenciales en las mediciones, algunos de ellos no se pueden identificar. Por ejemplo, si las medidas del sistema no están propiamente calibradas, será imposible detectar este fallo a partir de las observaciones realizadas.

### 5.7.1. Chequeo de repetitividad

La evaluación mas sencilla, pero no la menos útil, de las medidas FRF es la comprobación de la repetitividad de las medidas. Esto se realiza principalmente para asegurar que el comportamiento dinámico de la estructura y la medidas son invariantes en el tiempo. Típicamente, algunas medidas de FRF previamente seleccionadas se ejecutan antes y después del ensayo modal. Este proceso trivial ayuda a la comprobación de la constancia del comportamiento dinámico de la estructura y las condiciones de ensayo.

### 5.7.2. Chequeo de reciprocidad

Una estructura lineal e invariante en el tiempo honra a la propiedad de reciprocidad. Para una única entrada, significa que la FRF medida en un punto  $A$  de la estructura cuando es excitada en un punto  $B$  debe permanecer constante que cuando se mide la respuesta en el punto  $B$  y se excita en el punto  $A$ . Esta propiedad es la responsable de que la matriz FRF deba ser simétrica.

### 5.7.3. Chequeo de linealidad

Quizás la hipótesis mas importante asumida en un análisis modal es el comportamiento lineal del sistema dinámico. Sin esta hipótesis el análisis modal realizado no tendría ningún valor.

### 5.7.4. Características especiales de FRF

De la teoría modal, se pueden derivar ciertas características de las FRF y usarlas para evaluar la fiabilidad de las mismas. Esta evaluación tiene la capacidad de detectar errores en las medidas o en el montaje.

La primera característica es que para un punto de la estructura donde se mide y excita únicamente al mismo tiempo, se espera ver una antiresonancia entre dos resonancias seguidas. Por lo tanto, si en la representación de la FRF frente a la frecuencia no se observa dicho fenómeno, resulta probable que los transductores de fuerza y/o respuesta no estén funcionando correctamente.

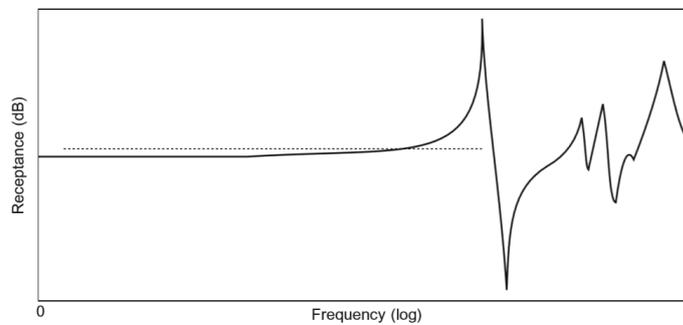


Figura 5.7: FRF medida en un punto, estructura empotrada

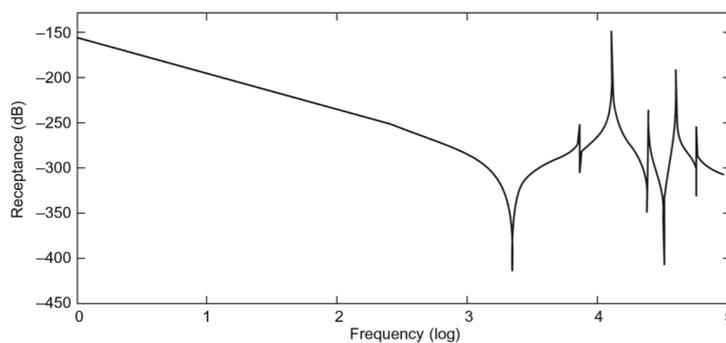


Figura 5.8: FRF medida en un punto, estructura borde libre

Para una estructura empotrada, a una frecuencia muy baja, la característica predominante es la rigidez estática estructural. De esta manera, al comienzo de la FRF se debe de apreciar una línea constante antes de que aparezca la primera resonancia del sistema. Por otro lado, para estructuras de bordes libres, la característica prevalente es la masa e inercia para ba-

jas frecuencias. Esto significa que se debería apreciar una línea de masa al principio de la FRF. Las figuras (5.7,5.8) ilustran estos dos casos.

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30] y [31]

# 6

## Dominio de la frecuencia

### 6.1. Introducción

El análisis modal es un proceso de extracción de parámetros modales (frecuencias naturales, factores de pérdida de amortiguamiento y constantes modales) de las vibraciones observadas. Desde que los datos medidos pueden estar en forma de FRF o en respuesta de impulso, hay análisis modales en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

Las curvas de ajuste empleadas en los análisis están basadas en modelos matemáticos predefinidos. Este modelo asume el número de grados de libertad, el tipo de amortiguamiento y el posible número de modos de vibración de la estructura dentro del rango de frecuencias establecido. En consecuencia, los siguientes trabajos serán una curva de ajuste que intente derivar todos los parámetros modales a través de fórmulas matemáticas.

La precisión del ensayo modal no es una cuestión simple sobre cómo una medida de FRF se ajusta mejor a la curva en un sentido matemático puro. Obviamente, cuanto más precisas sean las mediciones mejor serán las curvas de ajuste obtenidas. En matemáticas, la precisión o éxito del ajuste de una curva se suele valorar definiendo una función de error y minimizándola. Si se usa un modelo matemático incorrecto, las curvas que se obtengan como resultado serán erróneas lógicamente, aunque la función de error este bien minimizada numéricamente.

Asumiendo una estructura discretizada como un sistema de  $N$  grados de

libertad. La expresión analítica de una FRF puede ser:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{rA_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + \omega_r^2\eta_{rj}} \quad (6.1)$$

Si solo se tienen en cuenta los "m" primeros modos de vibración dentro del rango de frecuencias, la expresión sería:

$$\alpha_{ij}(\omega) \approx \sum_{r=1}^m \frac{rA_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + \omega_r^2\eta_{rj}} \quad (6.2)$$

Se están excluyendo los modos mas allá del rango de frecuencias, por eso no es una igualdad. Desde que esos modos no son medidos, no hay datos con los que se puedan analizar. Una solución que se puede escoger es convertir esos modos *invisibles* en un residuo de alta frecuencia  $R_{ij}(\omega)$ .

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^m \frac{rA_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + \omega_r^2\eta_{rj}} + R_{ij}(\omega) \quad (6.3)$$

Este termino residual normalmente es una función lineal así que el sistema la puede tener en cuenta sin muchos problemas adicionales. Sin embargo, esta solución resalta el hecho de que el modelo matemático del sistema posee cierta deficiencia.

Como cualquier curva de ajuste en análisis numérico, la función de error es normalmente definida como una diferencia entre la FRF estimada de la identificación de modos y la FRF medida.

$$e_{ij}(\omega) = \bar{\alpha}_{ij}(\omega) - \alpha_{ij}(\omega) \quad (6.4)$$

Donde  $\bar{\alpha}_{ij}(\omega)$  es la FRF medida. Como se debatirá adelante, la validez y exactitud de los resultados depende no solo en la precisión de los datos medidos, sino también en la validez de la expresión analítica de la FRF  $\alpha_{ij}(\omega)$ .

## 6.2. Detección de los modos de vibración

No importa que método de ensayo modal se este utilizando, una cuestión muy esencial durante el analisis es cuantos modos de vibración dentro del rango de frecuencias seleccionadas se estan considerando, y, si un pico en la FRF representa un modo de vibración. Hay un dilema intrínseco aqui. Con la teoría de capitulos anteriores, se conoce la existencia de diversas maneras de representar una FRF. Algunas de ellas son útiles a la hora de identificar los modos de vibración.

La gráfica de modulo y frecuencia de una FRF a veces es crucial para la identificación de los modos al manifestar picos en las resonancias. Esta falacia no es verdad en dos escenarios: (1) no todos los modos aparecerán en todas las FRF medidas; y (2) no todos los picos de una FRF son modos de vibración. Por ejemplo, la figura (6.1) representa una estructura formada por vigas. Contiene varios picos que son debidos al ruido y otros que son debidos a modos invisibles dentro del rango de frecuencias.

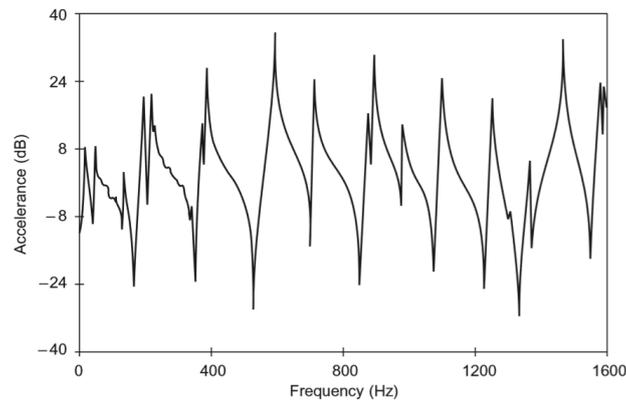


Figura 6.1: Modulo FRF de una estructura de vigas

La identificación de los modos de vibración anterior al análisis necesita ser basada en varias curvas de FRF. Una solución conveniente es superponer todas las curvas FRF en escala de decibelios. Esto asegurará que los modos de vibración se volverán mas notorios. Es simplemente un tratamiento matemático puro. No es una cuestión de si todos los picos notorios corresponden a modos de vibración aunque los picos falsos no prevalecerán en la simulación.

El gráfico de fase puede aportar cierta ayuda con la identificación. Teóricamente se sabe que un modo de vibración causa un cambio de fase de  $180^\circ$ . Con la presencia de amortiguamiento, este cambio ya no se hace de forma tan clara. Para medidas reales, este gráfico es muy sensible al ruido. Por lo tanto, a veces habrá cambios de fase por otros motivos diferentes a la presencia de una resonancia. En estos casos, los gráficos de fase dejan de ser de ayuda.

Hay otros métodos como el basado en SVD. Todos los métodos pueden fallar cuando dos modos se encuentren muy próximos entre sí. Esta situación suele pasar porque muchas estructuras presenta una simetría geométrica. La presencia de esta simetría conducirá analíticamente a una pareja de modos idénticos. Las imperfecciones estructurales o los errores en las medidas son capaces de convertir esta pareja de modos en dos modos muy cercanos. En na curva FRF, cada pareja parece un modo simple.

Los gráficos de Nyquist pueden también ayudar con la identificación de los modos. Un modo genuino debería mostrar el "síntoma" de un círculo en el diagrama de Nyquist. Un pico falso de resonancia será una simple línea recta en el diagrama.

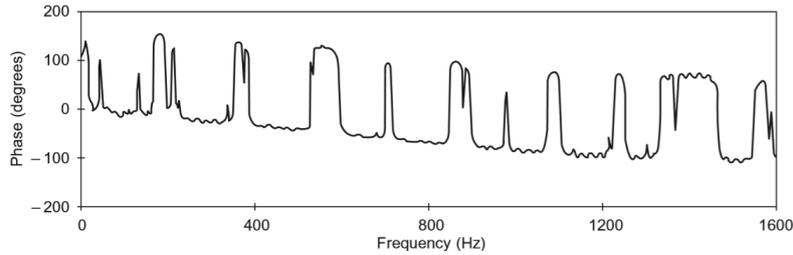


Figura 6.2: Gráfico de fase una FRF

### 6.3. Obtención de datos modales a partir de FRF

En esta introducción solo se abordarán los casos de sistemas con varios grados de libertad.

#### 6.3.1. Fracciones racionales polinómicas

El método de las fracciones racionales polinómicas se utiliza para la medición de las FRF en sistemas de  $n$  grados de libertad, siempre  $n > 1$ . La idea de este procedimiento es expresar las FRF en términos de fracciones polinómicas, y a través de manipulaciones matemáticas, los coeficientes de dichos polinomios se pueden estimar. La relación entre estos coeficientes y los parámetros modales se pueden establecer. Básicamente, podría decirse que se trata de una identificación de estos parámetros.

La descripción de este método comienza con la función de transferencia de un sistema de varios GDL. Al tratarse de una función de transferencia se puede expresar en el dominio de Laplace.

$$\alpha_{ij}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + s^n} \quad (6.5)$$

Aquí el orden del denominador  $n$  es mas alto que el del numerador  $m$  por 2. Por simplicidad, se adopta la siguiente notación:

$$p_0(s) = 1, p_1(s) = s, p_2(s) = s^2, \dots, p_m(s) = s^m \quad (6.6)$$

$$q_0(s) = 1, q_1(s) = s, q_2(s) = s^2, \dots, q_n(s) = s^n \quad (6.7)$$

$$(6.8)$$

Entonces, se llega a:

$$\alpha(s) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k p_k(s)}{\sum_{k=0}^n b_k q_k(s)} \quad \text{donde } b_n = 1 \quad (6.9)$$

Cuando se esta tratando con las funciones de respuesta en frecuencia, la ecuación se convierte en:

$$\alpha(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k p_k(j\omega)}{\sum_{k=0}^n b_k q_k(j\omega)} \quad \text{donde } b_n = 1 \quad (6.10)$$

Para seguir con el análisis asumiremos que hay "p" medidas correspondientes a las frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ . También se asumirá hay "p" medidas de frecuencias negativas  $\omega_p, \omega_{p-1}, \dots, \omega_{-1}$ . La FRF en frecuencias negativas se puede expresar como:

$$\alpha(j\omega_{-i}) = \alpha(-j\omega_i) = \alpha^*(j\omega_i) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6.11)$$

El propósito de usar frecuencias negativas quedará claro a medida que se prosiga con el análisis. Se comenzará con el error definido de la siguiente manera:

$$e_{ij}(\omega) = \alpha_{ij}(\omega) - \overline{\alpha_{ij}}(\omega) \quad (6.12)$$

Substituyendo la ecuación (6.10), se tiene:

$$e_{ij}(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k p_k(j\omega)}{\sum_{k=0}^n b_k q_k(j\omega)} - \overline{\alpha_{ij}}(j\omega) \quad (6.13)$$

Este error no es una función lineal de coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ . Para facilidad y precisión de los resultados, se puede definir una nueva función error.

$$\hat{e}(j\omega) = e(j\omega) \sum_{k=0}^n b_k q_k(j\omega) = \sum_{k=0}^m a_k p_k(j\omega) - \overline{\alpha}(j\omega) \left( \sum_{k=0}^{n-1} b_k q_k(j\omega) + q_n(j\omega) \right) \quad (6.14)$$

El error total con respecto a toda la columna de FRF se convierte en:

$$\{E\} = \{\hat{e}_{ij}(\omega_{-p}), \dots, \hat{e}_{ij}(\omega_{-1}), \hat{e}_{ij}(\omega_1), \dots, \hat{e}_{ij}(\omega_p)\}^T \quad (6.15)$$

$$\{E\} = [U]\{A\} - [V]\{B\} - \{W\} \quad (6.16)$$

donde

$$[U] = \begin{bmatrix} p_0(j\omega_{-p}) & p_1(j\omega_{-p}) & \dots & p_n(j\omega_{-p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(j\omega_{-1}) & p_1(j\omega_{-1}) & \dots & p_n(j\omega_{-1}) \\ p_0(j\omega_1) & p_1(j\omega_1) & \dots & p_n(j\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(j\omega_p) & p_1(j\omega_p) & \dots & p_n(j\omega_p) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-p})q_0(j\omega_{-p}) & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-p})q_1(j\omega_{-p}) & \dots & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-p})q_{n-1}(j\omega_{-p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-1})q_0(j\omega_{-1}) & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-1})q_1(j\omega_{-1}) & \dots & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-1})q_{n-1}(j\omega_{-1}) \\ \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_1)q_0(j\omega_1) & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_1)q_1(j\omega_1) & \dots & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_1)q_{n-1}(j\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_p)q_0(j\omega_p) & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_p)q_1(j\omega_p) & \dots & \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_p)q_{n-1}(j\omega_p) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$\{A\} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}^T \quad (6.19)$$

$$\{B\} = \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}^T \quad (6.20)$$

$$[W] = \{\bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-p})q_n(j\omega_{-p}), \dots, \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_{-1})q_n(j\omega_{-1}), \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_1)q_n(j\omega_1), \dots, \bar{\alpha}_{ij}(j\omega_p)q_n(j\omega_p)\}^T \quad (6.21)$$

La desviación total del error es definida:

$$J = \{E\}^H \{E\} \quad (6.22)$$

Para determinar los coeficientes de los vectores  $\{A\}, \{B\}$  se tendrá que minimizar la desviación, mediante derivadas parciales e igualando a cero.

$$\frac{\partial J}{\partial \{A\}} = \frac{\partial J}{\partial \{B\}} = 0 \quad (6.23)$$

### 6.3.2. Estructuras ligeramente amortiguadas

Cuando una estructura tiene un ligero amortiguamiento, se convierte muy difícil la obtención de FRF precisas en frecuencias cercanas a la resonancia. Los análisis modales que residen su validez en la medición correcta de FRF cercana a la resonancia no son ya válidos. Se propone un método alternativo en el que se emplea solamente FRF medidas lejos de la resonancia (y por tanto, precisas). La obtención de un modelo matemático se realiza a continuación. Usando el modelo estructural del amortiguamiento, la FRF se puede escribir como:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2} \quad (6.24)$$

Debido a la presencia insignificante del amortiguamiento, la expresión se puede simplificar a:

$$\alpha_{ij}(\omega) \approx \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (6.25)$$

Esta aproximación conduce a un camino conveniente para estimar las constantes modales de la FRF. A una frecuencia medida  $\Omega_1$ , la FRF se

puede representar:

$$\alpha_{jk}(\Omega_1) = \left\{ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} \quad \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega_1^2} \right\} \begin{Bmatrix} 1A_{jk} \\ 2A_{jk} \\ \vdots \\ NA_{jk} \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

Usando FRF medidas a diferentes frecuencias, se puede construir la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{jk}(\Omega_1) \\ \alpha_{jk}(\Omega_2) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} & \cdots \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_2^2} & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1A_{jk} \\ 2A_{jk} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

O simplificando

$$\{\alpha_{jk}(\Omega)\} = [R(\Omega)]\{A_{jk}\} \quad (6.28)$$

A partir de esta ecuación las constantes modales pueden calcularse como:

$$\{A_{jk}\} = [R(\Omega)]^{-1}\{\alpha_{jk}(\Omega)\} \quad (6.29)$$

El procedimiento de este método es como sigue:

1. Medir las FRF sobre el rango de frecuencias de interés
2. Localizar las resonancias gráficamente
3. Seleccionar los  $N$  puntos para analizar los  $N$  modos
4. Computar las  $N$  constantes modales
5. Regenerar las FRF para comprobar la precisión de estimación de los datos modales

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39] y [40].

# 7

## Dominio del tiempo

### 7.1. Breve Resumen

Los métodos del dominio del tiempo pertenecen a otra categoría de métodos de análisis modal. Los análisis modales basados en el dominio de la frecuencia se basan en las funciones de respuesta en frecuencia (FRF). Los análisis modales en el dominio del tiempo usan los registros de respuesta temporales. Estos procedimientos fueron desarrollados con las ventajas de la teoría de control moderno y tecnología computacional.

Los datos FRF no son medidas que se obtengan directamente, sino que necesitan un procesamiento matemático. Estas funciones son el resultado de transformaciones de las respuestas temporales medidas al dominio de la frecuencia. Los datos obtenidos directamente de los transductores son las aceleraciones y fuerzas en tiempo real. Se sabe a través de la teoría de análisis espectral que las FRF y las funciones impulso de respuesta (IRF) de una estructura son transformadas de Fourier. Por lo tanto, si se puede deducir la información de respuesta en impulso de las medidas temporales o de las FRF, es posible extraer los parámetros modales.

Los análisis modales en el tiempo usan los datos de respuesta ya sea de fuentes de excitación conocidas o de excitaciones del ambiente. Los datos de las excitaciones procedentes del ambiente se emplean cuando la estructura es imposible de excitar en un laboratorio mediante otras fuentes. Estas excitaciones ambientales, que son casi siempre inmedibles, se convierten en la única fuente de excitación de la estructura. Este tipo de situaciones hace que muchos métodos de dominio en frecuencia no se puedan utilizar. Por

ejemplo: la vibración de un puente es posible medirla usando el tráfico del propio puente como excitación. Las olas del mar serán la excitación que sufre un barco o un edificio alto sufrirá la perturbación de las fuerzas debidas al viento. Todas estas excitaciones mencionadas no se pueden cuantificar. La independencia de algunos métodos, basados en el dominio del tiempo, con las excitaciones permite su uso en casos especiales.

Los análisis modales en el dominio del tiempo poseen ciertas ventajas respecto los análisis homólogos en el dominio de la frecuencia. Ya se ha mencionado que no dependen ni de las excitaciones ni de los equipos excitadores de la estructura, Generalmente, necesitan pocos datos de respuesta. Sin embargo, estos análisis no muestran de forma clara información modal, como las resonancias, a diferencia de las FRF. El ruido experimentado en las mediciones supone un problema mayor ya que no se posee la capacidad de usar las mediciones en resonancias o antiresonancias (donde el ruido es muy pequeño). Modos con poca vibración pueden verse inundados por el ruido y no ser percibidos. Finalmente, estos hechos hacen que se requiera mejoras en los algoritmos con el fin de hacer los resultados mas precisos.

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [41], [42] y [43].

# 8

## Métodos de análisis MIMO

### 8.1. Introducción

Durante el desarrollo de estos capítulos, se han estudiado ensayos modales que consistían en una entrada (fuerza) y una salida (respuesta). Estos tipos de ensayo se pueden aplicar a estructuras pequeñas y medianas. Sin embargo, para muchas estructuras grandes como: aeronaves, barcos, misiles, maquinas de minería o vehículos espaciales; una única excitación no es suficiente para dar la energía vibratoria suficiente como para obtener resultados útiles. Las respuestas obtenidas es puntos lejanos al punto de excitación se desvanecen. En general, las mediciones obtenidas suelen tener un ruido muy alto y si se aumentase la amplitud de la excitación, se podrían llegar a observar fenómenos de no linealidad. Además, cuando la excitación tiene lugar un nodo estructural la vibración se vuelve invisible. Así mismo, los datos usados en el análisis modal solo son 1 columna de la matriz FRF. Por tanto, esto limita la precisión del ensayo y obstaculiza la capacidad de detección de modos de vibración cercanos. Estos motivos son la principal causa del desarrollo de los análisis tipo MIMO (Multi-Inputs & Multi-Outputs).

Los ensayos tipo MIMO se pueden aplicar tanto en el dominio de la frecuencia como en el tiempo. Por un lado, en el dominio de la frecuencia el ensayo MIMO mas típico es el método de la poli-referencia. Por otro lado, en el dominio del tiempo existen varios métodos: la poli-referencia exponencial compleja, identificación directa de parámetros o la realización de un auto-sistema. Todos los métodos MIMO están basados en la identificación global y simultanea. Esto permite obtener parámetros modales mas consistentes y reducir las decisiones humanas.

Las secciones siguientes introducen varios métodos de estimación de FRF.

## 8.2. Estimación FRF mediante ensayo MIMO

Para un sistema de varios GDL con  $P$  fuerzas de entrada y  $L$  respuestas de salida, los espectros de las entradas y salidas se pueden denotar respectivamente como  $F_1(\omega), F_2(\omega), \dots, F_P(\omega)$  y  $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_L(\omega)$ . Estos espectros contienen ruido. Los espectros del ruido a la entrada se denotan  $M_1(\omega), M_2(\omega), \dots, M_P(\omega)$  y los espectros de ruido a la salida  $N_1(\omega), N_2(\omega), \dots, N_L(\omega)$ . Las espectros de entradas y salidas libres de ruido se pueden denotar como  $U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_P(\omega)$  y  $V_1(\omega), V_2(\omega), \dots, V_L(\omega)$  respectivamente. Estas cantidades se pueden agrupar juntas en los siguientes vectores:

$$\{F\} = \{F_1(\omega), F_2(\omega), \dots, F_P(\omega)\}^T \quad (8.1)$$

$$\{X\} = \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_L(\omega)\}^T \quad (8.2)$$

$$\{M\} = \{M_1(\omega), M_2(\omega), \dots, M_P(\omega)\}^T \quad (8.3)$$

$$\{N\} = \{N_1(\omega), N_2(\omega), \dots, N_L(\omega)\}^T \quad (8.4)$$

$$\{U\} = \{U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_P(\omega)\}^T \quad (8.5)$$

$$\{V\} = \{V_1(\omega), V_2(\omega), \dots, V_L(\omega)\}^T \quad (8.6)$$

Un sistema MIMO con estas cantidades se puede mostrar en la figura (8.1).

Cuando no existe ruido, la salida del sistema en la coordenada  $i$ -ésima es:

$$X_i(\omega) = V_i(\omega) = \sum_j^p H_{ij}(\omega) F_j(\omega) \quad (8.7)$$

Sin embargo, en el caso de que el sistema tuviese ruido, la respuesta sería:

$$X_i(\omega) = V_i(\omega) + N_i(\omega) = \sum_j^p H_{ij}(\omega) F_j(\omega) - M_j(\omega) + N_i(\omega) = \sum_j^p H_{ij}(\omega) F_j(\omega) + E_i(\omega) \quad (8.8)$$

Donde  $E_i(\omega)$  es el error total de la medición en la coordenada  $i$ -ésima que contiene los errores de medidas a la entrada y salida causados por el ruido en el ensayo, errores de procesamiento de señal (leakage, truncamientos...) y errores de inducción de linealidad. Cuando se emplean las ecuaciones (8.7,8.8) para la estimación de FRF, la precisión viene determinada por los errores asumidos y como están cuantificados. La mayor precisión se obtendrá al tener en cuenta todos los errores conocidos y minimizarlos, aunque en la realidad nunca se llegue a conseguir.

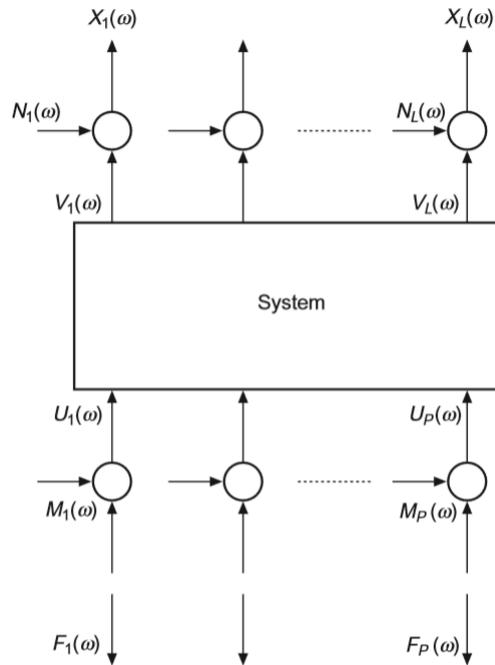


Figura 8.1: Diagrama de un sistema MIMO

**8.2.1. Sin ruido a la entrada -  $[\hat{H}_1(\omega)]$  modelo**

Este tipo de estimación asume que no existe ruido a la entrada ( $\{M\} = \{0\}$ ) y el ruido a la salida no está correlacionado con las entradas del sistema. La respuesta del sistema será el resultado de las fuerzas y el ruido:

$$\{X(\omega)\}_{L \times 1} = [H(\omega)]_{L \times P} \{F(\omega)\}_{P \times 1} + \{N(\omega)\}_{L \times 1} \quad (8.9)$$

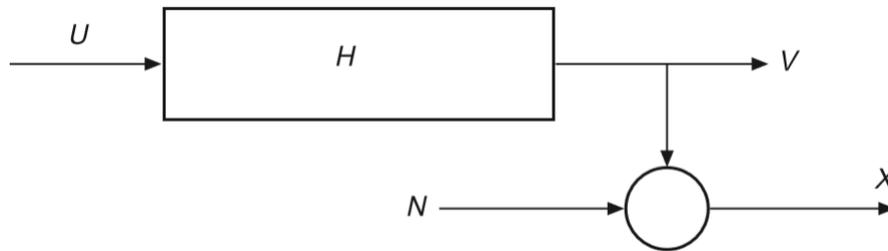


Figura 8.2: Un caso con solo ruido a la salida

Postmultiplicando a ambos lados de la ecuación (8.9) por  $\{F(\omega)\}^H$ , los valores de las respuestas están en la forma de potencia de los espectros.

$$[G_{XF}(\omega)]_{L \times P} = [H(\omega)]_{L \times P} [G_{FF}(\omega)]_{P \times P} + [G_{NF}(\omega)]_{L \times P} \quad (8.10)$$

Donde, las potencias de los espectros son respectivamente:

$[G_{XF}(\omega)]_{L \times P}$  potencia cruzada espectral de la entrada  $F$  y salida  $X$   
 $[G_{FF}(\omega)]_{P \times P}$  potencia espectral de la entrada  $F$   
 $[G_{NF}(\omega)]_{L \times P}$  potencia cruzada espectral de la entrada  $F$  y ruido  $N$

Cuando no existe ninguna correlación entre la entrada  $F$  y el ruido  $N$ ,  $[G_{NF}(\omega)]_{L \times P}$  es nulo. Esto conduce a la estimación de la matriz FRF de la siguiente manera:

$$[H(\omega)]_{L \times P} = [G_{XF}(\omega)]_{L \times P} [G_{FF}(\omega)]_{P \times P}^{-1} \quad (8.11)$$

Esta estimación es conocida como  $[\hat{H}_1(\omega)]$  para la matriz FRF.  $[\hat{H}_1(\omega)]$  es el tradicional subestimador visto con anterioridad. De la ecuación (8.11) es evidente que la matriz  $[G_{FF}(\omega)]_{P \times P}$  necesita ser invertible. Sin embargo, esta matriz no siempre es invertible. Existen diversos motivos por lo que la matriz puede ser singular:

- Cuando una de las fuerzas  $F_j(\omega)$  es cero, la  $j$ -ésima fila y columna de la matriz  $[G_{FF}(\omega)]_{P \times P}$  estarán llenas de ceros. La matriz por tanto será singular
- Cuando 2 o más fuerzas sean dependientes entre ellas, el rango de la matriz  $[G_{FF}(\omega)]_{P \times P}$  no será máximo.

De esta manera, el éxito de la estimación de la FRF depende primordialmente de la invertibilidad de  $[\hat{H}_1(\omega)]$ . Resulta muy importante asegurar que las fuerzas sean independientes entre sí. Para un sistema MIMO, unos pocos tipos de funciones de coherencia pueden ser de ayuda para una mayor seguridad en la estimación de la FRF.

### **Función de coherencia ordinaria**

La función de coherencia ordinaria es definida como la medida de la relación causal entre dos señales con la presencia de otras señales. Para un sistema MIMO, la función de coherencia es idéntica al caso de un sistema con un grado de libertad. Para la salida  $i$ -ésima y la entrada  $j$ -ésima, la función ordinaria de coherencia es:

$$\gamma_{ij}^2 = \frac{|G_{XF}(i, j)|^2}{G_{FF}(i, j) G_{XX}(i, j)} \quad (8.12)$$

Cuando la función de coherencia es igual a 1, las dos señales están completamente relacionadas. En ese caso, esto obstaculizaría la estimación de la FRF.

### Función de coherencia múltiple

La función de coherencia múltiple describe la linealidad y causalidad entre una señal de la salida y todas las señales de entrada conocidas. Se emplea para conocer la influencia de entradas no conocidas (como ruido) en una salida. Si la función es igual a 1, la salida esta correlacionada con todas las entradas. Si la función es 0, la salida es debida a entradas no conocidas como el ruido.

La coherencia múltiple es definida como el cociente entre la potencia de dos espectros. Estos espectros son la potencia del espectro cruzado entre la salida y las entradas conocidas y la potencia del espectro de la salida. Físicamente, este cociente representa la proporción de salida debida a las entradas.

$$\gamma_{X_i,F}^2 = \frac{\sum_{j=1}^P H_{ij} G_{X_i,F_j}}{G_{X_i X_i}} = 1 - \frac{(G_{N_i N_i})_{min}}{G_{X_i X_i}} \quad (8.13)$$

Para el calculo de la función de coherencia, se define una matriz de potencia de espectros cruzados.

$$[G_{X_i FF}] = \begin{bmatrix} G_{X_i X_i} & G_{X_i F_1} & G_{X_i F_2} & \dots & G_{X_i F_P} \\ G_{F_1 X_i} & G_{F_1 F_1} & G_{F_1 F_2} & \dots & G_{F_1 F_P} \\ G_{F_2 X_i} & G_{F_2 F_1} & G_{F_2 F_2} & \dots & G_{F_2 F_P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{F_P X_i} & G_{F_P F_1} & G_{F_P F_2} & \dots & G_{F_P F_P} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

La parte inferior derecha de la matriz es la matriz de fuerza de los espectros cruzados, se denota como:

$$[G_{FF}] = \begin{bmatrix} G_{F_1 F_1} & G_{F_1 F_2} & \dots & G_{F_1 F_P} \\ G_{F_2 F_1} & G_{F_2 F_2} & \dots & G_{F_2 F_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{F_P F_1} & G_{F_P F_2} & \dots & G_{F_P F_P} \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

De la ecuación (8.13) se obtiene:

$$G_{X_i X_i} = \sum_{j=1}^P H_{ij} G_{X_i F_j} + G_{N_i N_i} \quad (8.16)$$

$$|[G_{X_i FF}]| = G_{N_i N_i} |[G_{FF}]| \quad (8.17)$$

De esta forma, finalmente la función de coherencia queda:

$$\gamma_{X_i,F}^2 = 1 - \frac{|[G_{X_i FF}]|}{G_{X_i X_i} |[G_{FF}]|} \quad (8.18)$$

### 8.2.2. Sin ruido a la salida - $[\hat{H}_2(\omega)]$ modelo

Cuando se emplea este modelo para estimar la matriz FRF, se asume que no existe ruido alguno en la salida, como se muestra en la figura (). El ruido de la entrada no esta correlacionado con la salida.

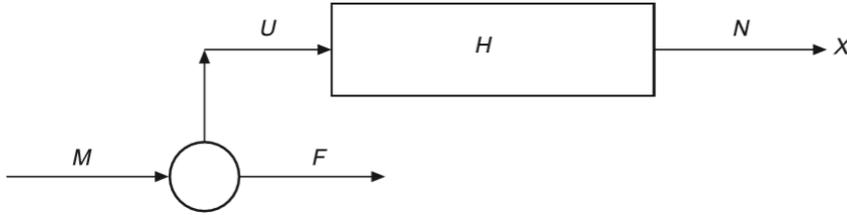


Figura 8.3: Un caso con solo ruido a la entrada

El espectro de salida se calcula como:

$$[X(\omega)] = [H(\omega)]([F(\omega)] - [M(\omega)]) \quad (8.19)$$

Postmultiplicando ambos lados de la igualdad por  $[X(\omega)]^H$  se obtiene:

$$[G_{XX}(\omega)] = [H(\omega)] [G_{FX}(\omega)] \quad (8.20)$$

Despejando  $[H(\omega)]$  se consigue un nuevo estimador.

$$[\hat{H}_2(\omega)] = [G_{XX}(\omega)] [G_{FX}(\omega)]^{-1} \quad (8.21)$$

Esta solución es valida cuando la matriz  $[G_{FX}(\omega)]$  es invertible. Cuando el numero de excitaciones  $P$  es menor que los puntos de respuesta  $L$ ,  $[G_{FX}(\omega)]$  no se puede invertir. En este caso se tendría que emplear una pseudo-inversa.  $[\hat{H}_2(\omega)]$  es el sobreestimador visto anteriormente.

La estimación  $[\hat{H}_2(\omega)]$  es muy sensible al ruido en la salida. Particularmente, es muy impreciso en frecuencias próximas a las antiresonancias. Sin embargo, es el estimador mas preciso cuando se analizan las resonancias. Si existe ruido a la entrada y la salida, los estimadores  $[\hat{H}_1(\omega)], [\hat{H}_2(\omega)]$  son parciales. Su exactitud depende en las proporciones de ruido en la salida y entrada. De tal forma que:

$$[\hat{H}_2(\omega)] \geq [H(\omega)] \geq [\hat{H}_1(\omega)] \quad (8.22)$$

### 8.2.3. Con ruido a la entrada y salida - $[\hat{H}_3(\omega), \hat{H}_4(\omega)]$ , modelo

En las situaciones que exista ruido tanto a la salida como la entrada, parece lógico estimar  $[H(\omega)]$  mediante una media los estimadores anteriores ( $[\hat{H}_1(\omega)], [\hat{H}_2(\omega)]$ ). Dependiendo de la media, habrá diferentes estimaciones. Todas ellas para sistemas MIMO.

**Media aritmética**

$$\hat{H}_3(\omega) = \frac{1}{2}(\hat{H}_1(\omega) + \hat{H}_2(\omega)) \quad (8.23)$$

**Media geométrica**

$$\hat{H}_4(\omega) = \sqrt{\hat{H}_1(\omega) + \hat{H}_2(\omega)} \quad (8.24)$$

Es fácil mostrar que:

$$|\hat{H}_2(\omega)| \geq |\hat{H}_3(\omega)| \geq |\hat{H}_4(\omega)| \geq |\hat{H}_1(\omega)| \quad (8.25)$$

**8.3. Método poli-referencia (frecuencia)**

El método poli-referencia en el dominio de la frecuencia utiliza datos FRF de un ensayo MIMO para identificar los parámetros modales de una estructura. Desde que el método procesa todas las entradas y salidas simultáneamente, la identificación puede llegar a ser mas precisa y consistente a la hora de obtener los parámetros modales. Hay varios métodos basados en la poli-referencia. A continuación, se introducirá uno de ellos.

La ecuación del movimiento de un sistema de  $n$  GDL sujeto a fuerzas externas es:

$$[M]_{N \times N} \{\ddot{X}\}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \{\dot{X}\}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \{X\}_{N \times 1} = \{F\}_{N \times 1} \quad (8.26)$$

Para  $P$  fuerzas de excitación, la matriz de impulso respuesta del sistema es:

$$[\bar{h}(t)] = [\Psi]e^{[\Lambda]t} [L] \quad (8.27)$$

Donde,  $[\Psi]_{N \times 2N}$  es la matriz de modos complejos.  $[\Lambda]_{2N \times 2N}$  es la matriz compleja de autovalores.  $[L]_{2N \times P}$  es la matriz de participación de los modos, mientras que  $N$  son los GDL del sistema.

La transformada de Laplace de la parte izquierda de la ecuación (8.27) es la matriz FRF  $[\alpha(s)]$ . Lo que conduce a:

$$[\alpha(s)] = [\Psi](s[I] - [\Lambda])^{-1}[L] \quad (8.28)$$

Denotando la nueva matriz:

$$[T(s)] = (s[I] - [\Lambda])^{-1}[L] \quad (8.29)$$

La correspondiente matriz de movilidad se puede escribir como:

$$\begin{aligned} [Y(s)] &= [\alpha(s)] - [\bar{h}(t)]|_{t=0} = s[\alpha(s)] - [\Psi][L] \\ &= s[\Psi][T(s)] - [\Psi](s[I] - [\Lambda])[T(s)] = [\Psi][\Lambda][T(s)] \end{aligned} \quad (8.30)$$

Por lo tanto, se puede construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} [\alpha(s)] \\ s[\alpha(s)] \end{bmatrix}_{2N \times P} - \begin{Bmatrix} [0] \\ [\Psi][L] \end{Bmatrix}_{2N \times P} = \begin{Bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][\Lambda] \end{Bmatrix}_{2N \times P} [T(s)] \quad (8.31)$$

Esta ecuación se puede simplificar a:

$$\begin{bmatrix} [\alpha(s)] \\ [Y(s)] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][\Lambda] \end{Bmatrix} [T(s)] \quad (8.32)$$

Donde,  $[Y(s)]$  es la función de transferencia de la movilidad. Ahora, se deriva una solución para la matriz de autovalores  $[\Lambda]$  y autovectores  $[\Psi]$  del sistema. El problema de autovalores es:

$$[A][\Psi] - [\Psi][\Lambda] = 0 \quad (8.33)$$

Donde, la matriz  $[A]$  no es conocida, pero puede construirse con los datos de FRF medidos. Primero se convierte la ecuación (8.33) en:

$$\{[A] - [I]\}_{N \times 2N} \begin{Bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][\Lambda] \end{Bmatrix}_{2N \times N} = [0] \quad (8.34)$$

Postmultiplicando la ecuación por la matriz  $[T(s)]$  se llega a:

$$\{[A] - [I]\} \begin{Bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][\Lambda] \end{Bmatrix}_{2N \times N} [T(s)] = \{[A] - [I]\} \begin{bmatrix} [\alpha(s)] \\ s[\alpha(s)] - [\Psi][L] \end{bmatrix} = [0] \quad (8.35)$$

Denotando  $[B] = [\Psi][L]$ , la ecuación (8.35) se convierte en:

$$[A][\alpha(s)] = s[\alpha(s)] - [B] \quad (8.36)$$

Realizando el cambio  $s = -j\omega$ , se obtiene:

$$[A][\alpha(j\omega)] = -j\omega[\alpha(j\omega)] - [B] \quad (8.37)$$

Esta ecuación usada  $m$  veces para  $m$  medidas en frecuencia tal que:

$$\begin{cases} [A][\alpha(j\omega_1)] = -j\omega_1[\alpha(j\omega_1)] - [B] \\ [A][\alpha(j\omega_2)] = -j\omega_2[\alpha(j\omega_2)] - [B] \\ \dots \\ [A][\alpha(j\omega_m)] = -j\omega_m[\alpha(j\omega_m)] - [B] \end{cases} \quad (8.38)$$

Estas últimas ecuaciones se pueden combinar para formar la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{aligned} & [[A] + [B]]_{N \times (N+P)} \begin{bmatrix} [\alpha(j\omega_1)] & [\alpha(j\omega_2)] & \dots & [\alpha(j\omega_m)] \\ [I] & [I] & \dots & [I] \end{bmatrix}_{(N+P) \times mP} \\ & = [j\omega_1[\alpha(j\omega_1)] \quad j\omega_2[\alpha(j\omega_2)] \quad \dots \quad j\omega_m[\alpha(j\omega_m)]]_{N \times mP} \end{aligned} \quad (8.39)$$

Llegados a este punto, es posible estimar las matrices  $[A]$ ,  $[B]$  usando la pseudo-inversa. Las matrices  $[A]$ ,  $[B]$  se pueden substituir en la ecuación (8.39) de tal forma que se pueden calcular los autovalores y autovectores.

Para una estructura real, dentro del rango de frecuencias medidas, el numero de modos  $n_e$  es normalmente menor que el numero de modos derivados del modelo analítico. Cuando el numero de localizaciones  $n$  es mayor que  $2n_e$ , las matrices  $[A]$ ,  $[B]$  obtenidas de la ecuación (8.39) producirán modos computacionales. Para evitar este problema, se requiere una descomposición matricial para reducir la matriz FRF  $[\alpha(j\omega)]_{n \times P}$  a  $[\bar{\alpha}(j\omega)]_{n_e \times P}$ . Asumiendo que existe la transformación:

$$[\bar{\alpha}(j\omega)]_{n_e \times P} = [Q]_{n_e \times n} [\alpha(j\omega)]_{n \times P} \quad (8.40)$$

Se puede definir la desviación como:

$$[SP] = \sum_{i=1}^m Re[[\alpha(j\omega_i)][\alpha(j\omega_i)]^H]_{n \times n} \quad (8.41)$$

La descomposición singular conduce a:

$$[SP] = [U]^T [\Sigma] [U] \quad (8.42)$$

Donde la matriz singular será una matriz diagonal con valores singulares descendientes

$$[\Sigma] = \text{diag} [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_e \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (8.43)$$

El primer  $n_e$  vector en la matriz  $[U]$ , que se corresponde con el primer  $n_e$  autovalor, formará la matriz  $[Q]$ . La ecuación se convierte en:

$$[\bar{\alpha}(j\omega)] = [Q][\alpha(j\omega)] = [Q][\Psi]e^{[\Lambda]t}[L] = [\bar{\Psi}]e^{[\Lambda]t}[L] \quad (8.44)$$

La matriz  $[\bar{\Psi}]_{n_e \times n_e}$  es una matriz que contiene  $n_e$  modos efectivos.

Para finalizar, el procedimiento del método poli-referencia en el dominio de la frecuencia es como sigue:

1. Seleccionar el modelo de estimación de FRF y a partir de los datos medidos construir la matriz  $[\alpha(j\omega)]$ .
2. Usar la ecuación (8.42) para estimar la matriz  $[SP]$ , encontrar su descomposición en valor simple (SVD) para obtener la matriz  $[Q]$ .
3. Usar  $[\bar{\alpha}(j\omega)]$  para reemplazar a  $[\alpha(j\omega)]$  en la ecuación (8.39) y obtener las matrices  $[A]$ ,  $[B]$ .
4. Obtener la matriz autovalores  $[\bar{\Lambda}]$  y la matriz autovectores  $[\bar{\Psi}]$

5. De la transformación, hallar la matriz autovectores  $[\Psi]_{n \times n_e}$ .
6. Computar la frecuencia natural y el amortiguamiento de la diagonal de la matriz  $[\bar{\Lambda}]$  como:

$$\omega_r = \sqrt{(Re[\lambda_r])^2 + (Im[\lambda_r])^2} \quad y \quad \zeta_r = -\frac{Re[\lambda_r]}{\omega_r} \quad (8.45)$$

7. Estimar la matriz de participación de los modos  $[L] = [B][\Psi]^{-1}$ .

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50] y [51].

# 9

## Modificaciones Locales Estructurales

### 9.1. Objetivos

Las modificaciones estructurales como aplicación del análisis modal es una técnica que estudia el efecto de cambios en parámetros físicos de una estructura y como afecta a su comportamiento dinámico (frecuencias naturales y modos de vibración). Estas modificaciones son desarrolladas usando las matrices de masa y rigidez del sistema, por lo que los parámetros físicos que se suelen alterar son la propia masa y rigidez del sistema. Para un sistema masa-muelle, los parámetros físicos son de hecho la propia masa y el muelle. Para un sistema continuo, por ejemplo: un voladizo, los parámetros físicos son el espesor y la longitud de la viga. No son estrictamente una masa y un muelle, pero un cambio en ellos afecta la masa y rigidez de la viga. En una estructura real, como el chasis de un coche, los parámetros pueden ser la área de la sección transversal del chasis o la soldadura de un refuerzo entre dos puntos.

El objetivo de la modificación estructural es mejorar las propiedades dinámicas de un sistema. Cambiar la frecuencia natural es quizás el propósito más común. Una frecuencia natural, que coincida o se encuentre en los alrededores, de la frecuencia de vibración ambiente es una fuente muy probable para que se produzca un fallo estructural. Asumiendo que no se puede realizar ningún cambio en la vibración ambiente, una solución obvia al problema sería el desplazamiento de la frecuencia natural mediante modificaciones estructurales. Alternativamente, una modificación local es capaz de mover la anti-resonancia a la frecuencia de excitación ambiente, creando así un punto nodal en la estructura en la localización deseada.

## 9.2. Cambios en la masa y rigidez

Acorde a su complejidad, es posible clasificar la modificación estructural como una *modificación única* (de masa o rigidez). La complejidad se ve reflejada en la formulación analítica. La modificación única permite una solución explícita algebraica para el problema de modificación estructural. Los cambios de masa y rigidez se pueden formular como un problema de autovalores o ecuaciones lineales simultáneas. Para ambos casos, existen soluciones matemáticas al problema. La modificación de parámetros físicos es mas realista para las estructuras. Casi cualquier modificación conduce a un cambio en la masa o rigidez del sistema. La formulación matemática de las modificaciones requiere de un riguroso tratamiento analítico y, aun así, no esta garantizada la exactitud de la solución.

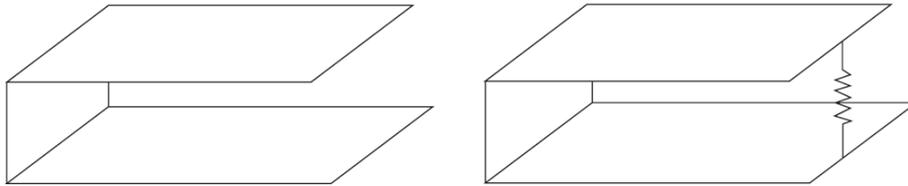


Figura 9.1: Estructura con modificación de la rigidez

A continuación, se explicará en consiste la *modificación única*

### 9.2.1. Modificación única

La modificación única consiste en el cambio de la masa o rigidez de un solo elemento de toda la estructura. Esto normalmente se consigue añadiendo una masa puntual a un grado de libertad o uniendo con un muelle 2 grados de libertad. Teóricamente, una modificación de la masa o rigidez cambiaría las matrices de la siguiente manera:

$$[\Delta M] = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \Delta m & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$



# 10

## Ensayos GVT

### 10.1. Introducción

A lo largo del desarrollo de cualquier aeronave moderna se llevan a cabo múltiples ensayos vital importancia cuyo objetivo consiste en la validez de los modelos teóricos supuestos, durante el diseño, para dicha aeronave. Dentro del ámbito de la dinámica estructural, los mas importantes son:

- Ensayo de vibración en tierra o GVT (*Ground Vibration Test*): se comprueba la validez del modelo estructural de la aeronave realizado con elementos finitos. Tiene lugar en un hangar y el avión se encuentra suspendido en el aire para simular las condiciones de vuelo.
- Ensayos de vibración en vuelo o FVT (*Flight Vibration Test*): este ensayo es posterior al GVT y se realiza en los primeros vuelos de la aeronave. El objetivo es validar el modelo aeroelástico supuesto durante el diseño del avión.

Ambos ensayos se llevan a cabo en etapas muy avanzadas de la fabricación de la aeronave pues es necesario que el modelo se encuentre en condición de "*listo para volar*". Es decir, todos los equipos deben encontrarse ya instalados y la configuración de la aeronave debe ser la que tendría el avión de serie. De esta forma se asegura que los resultados obtenidos sean lo mas próximos a la realidad. En el caso de que el avión tuviese múltiples configuraciones habría que realizar ensayos con todas y cada una de ellas.

El estudio se centrara a continuación en los ensayos GVT por su gran relevancia con el objetivo de este trabajo.

### 10.1.1. Definición y fundamentos

El ensayo GVT tiene una vital importancia en la etapa de certificación de las nuevas aeronaves. Como se ha mencionado anteriormente, su principal función es corroborar que el comportamiento del modelo ensayado se corresponde con el modelo estructural teórico. Para ello, se realiza un mallado general de toda la estructura refinándolo en las superficies de sustentadoras y de control (alas, estabilizador horizontal y vertical y alerones). En los nodos de dicha malla se colocan acelerómetros que medirán los desplazamientos en dichos puntos a partir de una fuerza excitadora. También se colocan acelerómetros en los motores para determinar el comportamiento de la unión motor-ala o motor-fuselaje (dependiendo de la configuración de la aeronave).



Figura 10.1: *Setup* típico de un A380

A partir de los datos obtenidos por los acelerómetros se construyen las funciones de transferencia del sistema y se obtienen las frecuencias naturales. Mediante el tratamiento de datos es posible representar la forma modal de los modos de vibración y estimar un cálculo del amortiguamiento modal. Los modos de vibración de mas baja frecuencia son los mas interesantes de visualizar, pues serian los primeros que alcanzaría la aeronave en vuelo. Hay que tener en cuenta que cualquier estructura posee un numero infinito de modos de vibración y frecuencias naturales. Sin embargo, no todos los modos tienen la misma participación en la respuesta vibratoria del sistema por ello se define un coeficiente de peso de cada modo que determinará la importancia de cada modo. Al final, por simplificación, se acaban solo teniendo en cuenta los modos mas importantes (coeficiente de peso mas grande).

Los parámetros mas importantes de cualquier estructura son:

- La masa: representa la resistencia de la estructura a un cambio.
- La rigidez: simboliza la resistencia de la estructura a la deformación.
- El amortiguamiento: tendencia por parte de la estructura a regresar a su estado de equilibrio tras una perturbación.

Cabe mencionar que para el calculo de todos los parámetros anteriores se aplicara el análisis modal que conlleva las siguientes hipótesis establecidas:

1. El sistema es lineal, es decir, la vibración total de la estructura sera una superposición de los modos de vibración estimados anteriormente.
2. La frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración no dependen del tiempo.
3. El sistema es observable, dicho de otra forma, las medidas de entrada y salida poseen la información suficiente para caracterizar el comportamiento de la estructura.

Finalmente, con el fin de que los resultados del ensayo se asemejen lo mas posible a la realidad es necesario recrear las condiciones de vuelo de la aeronave. De esta forma, se suspende el tren del avión unos centímetros del suelo sobre unas cámaras de aire, cumpliendo la condición de contorno "libre-libre".

### 10.1.2. Historia, retos y tendencias

En los primeros ensayos GVT se buscaba una optimizan del tiempo mediante el desarrollo de nuevos hardwares y estrategias mas eficaces que redujesen el tiempo de la aeronave en tierra. El sistema de validez de los modelos aeroelásticos seguido durante los años y en la actualidad es el mostrado en la figura (10.2):

Hoy en día, cada vez mas se están empleando los materiales compuestos en la industria aeronáutica llegando a representar aproximadamente un 40 % del material total empleado en las nuevas aeronaves. Sin embargo, se dispone de muy poca información sobre la respuesta del material compuesto en las estructuras por que se necesitan un mayor numero de ensayos adicionales.

Por otro lado, la reducción de la duración de los ensayos en la actualidad tiene las siguientes tendencias:

- Aplicación de sensores inalámbricos. Para la realización de un ensayo GVT se utilizan alrededor de 900 sensores (25Km de cableado) que lógicamente requiere una organización extra en la fase de instalación.

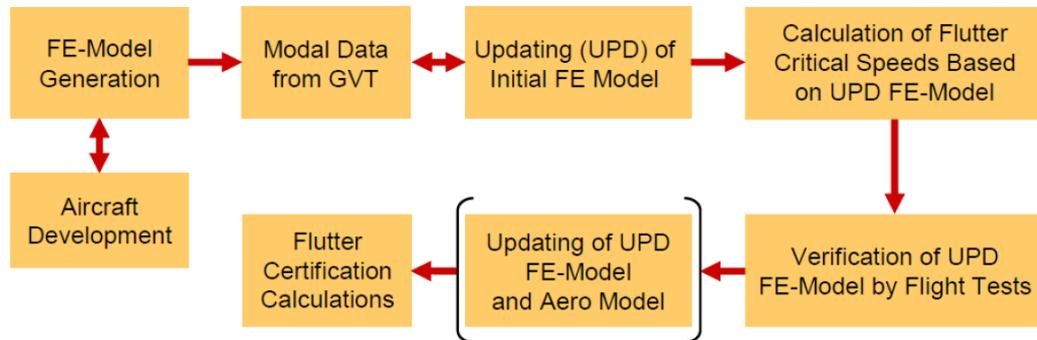


Figura 10.2: Procedimiento de los ensayos GVT

- Empleo de sistemas o procedimientos de medida ópticos. El uso de estas técnicas podría reducir el número de sensores necesarios para el ensayo.
- Conversión de la información analógica-digital en los propios sensores. Esta mejora reduciría los cálculos que tendrían que usar las unidades de tratamiento de dato, ahorrando tiempo.
- Empleo de plataformas móviles en vez de andamios. Se evitarían todas las tareas de montaje y desmontaje que conlleva el uso de andamios.
- Uso de sensores TEDS (*Transducer Electronic Data Sheet*). Estos sensores poseen un dispositivo de memoria en el cual se almacena información relativa al fabricante, datos de calibración y datos de corrección. De esta manera posibilitan el ahorro de tiempo que conllevaría la calibración de todos los sensores empleados en el ensayo.
- Reducción del número de sensores en el ensayo. En el caso de que se requiera un estudio de los primeros modos (y más importantes) de vibración de la estructura, se podría hacer una reducción de los sensores dando lugar a una malla menos refinada. Todo esto sería posible siempre y cuando los modos que queramos observar tenga frecuencias relativamente bajas ( $< 10Hz$ ).

## 10.2. Normativa aplicable

Dependiendo de la zona donde se lleve a cabo el ensayo habrá que cumplir una normativa u otra. En el ámbito europeo, los ensayos GVT se rigen por la normativa EASA CS-25, mientras que en los EEUU la normativa a seguir es la dictada por la FAR Parte 23.

### 10.2.1. Normativa europea EASA CS-25

En el ámbito europeo, EASA (*European Aviation Safety Agency*) determina la necesidad de corroborar la validez de los modelos estructurales para las aeronaves de grandes dimensiones. Sin embargo, no establece el GVT como un proceso obligatorio para validar dicho modelo. La normativa que aborda este tema es la CS-25, concretamente en los AMC (*Acceptable Means of Compliance*) donde se tratan los requisitos a cumplir. A continuación se muestran traducidos algunos párrafos interesantes de la normativa traducidos:

#### 5.2.3 Ensayos de vibración en tierra (GVT)

- 5.2.3.1 Los ensayos GVT o ensayos de respuesta modal normalmente serán llevados a cabo sobre la aeronave completa. Un ensayo GVT podrá ser usado para comprobar el modelo matemático estructural del avión. Se permite el uso de información modal de ensayos aeroelásticos en lugar de información modal analítica, siempre cuando esta fijada la precisión de dichos datos. No será obligatorio un ensayo GVT tras una modificación estructural o de la inercia de una aeronave si se observa que los cambios no afectan a la estabilidad aeroelástica del avión.
- 5.2.3.2 La mejor manera de apoyar el avión es aquella en la cual se desacoplen los modos vibración de sólido rígido de los modos de vibración elásticos (suspendido en el aire). Alternativamente, se puede utilizar un apoyo en que dichos modos se encuentren acoplados siempre cuando dichos modos puedan desacoplarse analíticamente. Se prefiere el uso de este último método sobre los GVT en general y será obligatorio en caso de que haya ausencia de análisis de vibraciones.
- 5.2.3.3 Los métodos de excitación de la aeronave deben tener la suficiente potencia y rango de frecuencias para excitar todas las resonancias significativas. La masa efectiva, rigidez y hardware adjunto al excitador no deben distorsionar la respuesta modal del avión. Podrá ser necesario la colocación de varios excitadores a lo largo de la aeronave con el fin de excitar todos los modos de vibración representativos. El empleo de varios excitadores también será necesario en estructuras con amortiguamiento interno significativo para evitar niveles de respuesta bajos y cambios de fase en puntos de la estructura distantes al punto de excitación. Las señales de excitación podrán ser sinusoidales, aleatorias, pseudo-aleatorias, transitorias o cualquiera no estacionaria de corta duración. Para superficies de ensayo pequeñas se deberá tener en consideración la masa del sensor en el análisis de respuesta en frecuencia.

- 5.2.3.4 La mínima medida de respuesta modal deberá consistir en una medida de aceleración (o velocidad) y fase relativa en un numero suficiente de puntos de la estructura de la aeronave que precisamente describa la respuesta o forma de los modos mas significativos estructuralmente. Además, se deberá estimar el amortiguamiento de cada modo.

### 10.2.2. Normativa americana FAR Parte 23

Las FAR (*Federal Aviation Regulations*) son las normas dictadas con la autoridad americana FAA (*Federal Aviation Agency*). Dentro de la parte 23 de estas regulaciones se trata en la subparte D la normativa de diseño y construcción referente al fenómeno de flameo (sección 23,629). Sin embargo, no existe normativa que regule los ensayos GVT.

La única restricción que se impone son unos criterios de estabilidad aero-elástica en cuanto al flameo expresado en un rango de velocidades y alturas.

## 10.3. Metodología

### 10.3.1. Instrumentación y configuración de equipos

A continuación se abordaran todos los equipos/instrumentos necesarios para la realización de un correcto ensayo GVT. Se trataran los sistemas de amortiguación de la aeronave, los acelerómetros empleados y los excitadores posibles que se pueden utilizar. Además, también se detallaran otros aspectos relacionados con la calibración de los sensores y procesamiento de datos obtenidos por ellos.

### Suspensión de la aeronave

Como se ha explicado con anterioridad, es muy importante recrear la condición de contorno *libre-libre* con el fin de obtener resultados que se asemejen a la realidad en vuelo. Además, también es interesante la búsqueda del desacoplamiento de los modos de vibración sólido rígido y modos de vibración elásticos. Idealmente se trata de conseguir que la frecuencia de los modos sólido rígido sean un 15 % menor que la frecuencia del primer modo elástico.

Los sistemas de suspensión mas empleados son:

1. Sistema neumático: El tren de aterrizaje sin ruedas y con los amortiguadores bloqueados se apoya sobre un sistema neumático. Con este sistema se tiene la capacidad de regular el peso que soporta cada pata del tren.

2. Sistema de gomas elásticas: se sujeta el tren (en el caso de querer ensayar el avión al completo) o el componente a analizar con unas gomas elásticas enganchadas a un andamiaje. Existe un compromiso entre la rigidez de la suspensión y el número de gomas. Un gran número de gomas puede crear una rigidez muy alta produciendo un aumento de las frecuencias de los modos sólido rígido. Por otro lado, un bajo número de gomas pueden producir que el tren toque el suelo y las medidas no sean válidas.
3. Desinflar parcialmente los neumáticos del tren
4. Suspender el avión sobre "jack points"

Los métodos 1 y 2 son los más efectivos y utilizados.

### **Acelerómetros**

Su principal función es detectar y cuantificar las aceleraciones que sufre la estructura en el punto que están colocados. Gracias a ellos, es posible determinar los desplazamientos que tienen lugar y poder hacer una estimación de las frecuencias naturales y los modos de vibración. Estos sensores suelen ser triaxiales, es decir, detectan aceleraciones en las 3 direcciones del espacio. La colocación de los acelerómetros a lo largo de la estructura es una de las tareas más complejas y largas del GVT. Una buena colocación es fundamental para obtener una buena transformación de los modos de vibración.

Para determinar la colocación de los acelerómetros se presta atención comúnmente a la distribución de la malla realizada para el análisis de elementos finitos. Además, también se tienen en cuenta aspectos como los planos estructurales de la aeronave o datos 3D.

A causa de la alta carga de trabajo que supone esta parte del ensayo, se proponen los siguientes consejos:

- Predeterminar la ubicación de los sensores con generosa tolerancia.
- Medir con la precisión adecuada la ubicación y la orientación de los sensores mediante fotogrametría

Para obtener datos útiles de los acelerómetros es necesaria su calibración. Lo más recomendable es la calibración de relación, que permite ajustar 2 sensores simultáneamente. El único inconveniente es el requerimiento de una masa conocida colgada con el acelerómetro en un extremo. La calibración individual no se suele emplear pues se introducen errores acumulativos entre sensores y, como ya se ha mencionado con anterioridad, en estos ensayos el número de acelerómetros es muy elevado.

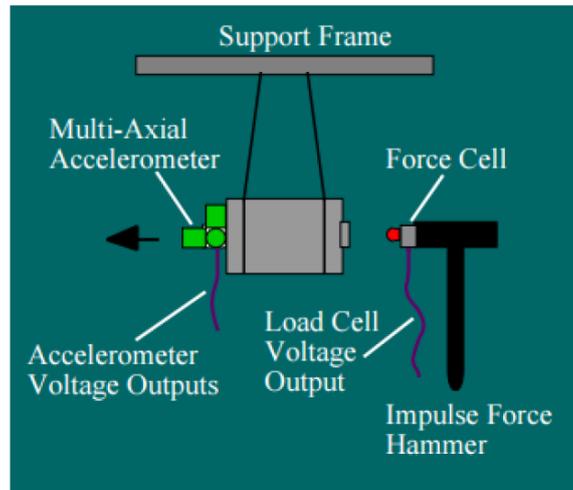


Figura 10.3: Configuración para una calibración de relación

Para la calibración de relación de los acelerómetros es necesario un martillo que posea una célula de carga que mida la fuerza de impulso que otorga. Conociendo la masa del cuerpo colgante ( $m$ ), la relación de ganancias de los amplificadores del par acelerómetro-célula de carga ( $k_f/k_a$ ) y la relación de los voltajes de salida del acelerómetro-célula de carga ( $E_a/E_f$ ) es posible conocer la relación de calibración ( $R$ ) mediante la siguiente ecuación:

$$R = \left(\frac{E_a}{E_f}\right) * \left(\frac{k_f}{k_a}\right) * m \quad (10.1)$$

Una vez estimada la relación de calibración ( $R$ ), es posible calcular la inercia ( $a/F$ ) y con ella las aceleraciones.

$$\frac{a}{F} = R^{-1} * \left(\frac{E_a}{E_f}\right)_{medida} * \left(\frac{k_f}{k_a}\right) \quad (10.2)$$

De esta manera, la calibración del acelerómetro permite las medidas de respuesta en frecuencia de la célula de carga y acelerómetro en una relación física de la inercia.

Finalmente, como referencia se muestran algunos de los valores estándar de los acelerómetros.

Frecuencia de medida	0,02 Hz a 3 kHz
Rango de medida	50 – 100g ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )
Masa	5 – 50 gramos

Cuadro 10.1: Propiedades generales de los acelerómetros

### Excitadores

Son los encargados de producir las perturbaciones que medirán los acelerómetros. Sus principales componentes son: vástago, alargador, fusible mecánico, transductor de fuerzas (sensor de medición de fuerza) y rotula. La rotula se encuentra en contacto con la estructura del avión y se recomienda situarla en una zona con rigidez suficiente para evitar modos locales de pandeo de paneles.



Figura 10.4: Excitador electrodinámico Brüel & Kjaer

Los excitadores pueden ser de varios tipos:

- Mecánicos: producen las excitaciones mediante la rotación de una masa no contrapesada. La fuerza de excitación está relacionada con la frecuencia y se encuentra limitada por la masa rotativa. Son poco efectivos a bajas frecuencias.
- Electrodinámicos: se basan en el movimiento de una masa por campos electromagnéticos. La frecuencia y amplitud tienen un control independientes. Son los más utilizados.
- Electrohidráulicos: la excitación es realizada mediante un actuador hidráulico. Se emplean sobretodo en estructuras muy flexibles en las que es necesario que el excitador tenga mucho recorrido. Están limitados para altas frecuencias.

#### 10.3.2. Procedimiento PRM

El método de resonancia de fase ("*Phase Resonance Method*") ha sido el procedimiento más utilizado durante los primeros ensayos GVT. Hoy en día, su uso sigue siendo muy interesante al permitir separar modos de vibración muy próximos entre sí. Se caracteriza por emplear varias fuerzas sinusoidales coherentes a la estructura y de la misma frecuencia que la resonancia.

Al seleccionar la posición de los excitadores y la relación de fase entre las señales de excitación sinusoidal, la respuesta vibratoria de la aeronave solo contiene información de modo vibratorio de interés. Por lo tanto, es posible lograr una separación física de los modos de vibración y poder observarlos en su forma mas pura posible sin recurrir a separaciones matemáticas.

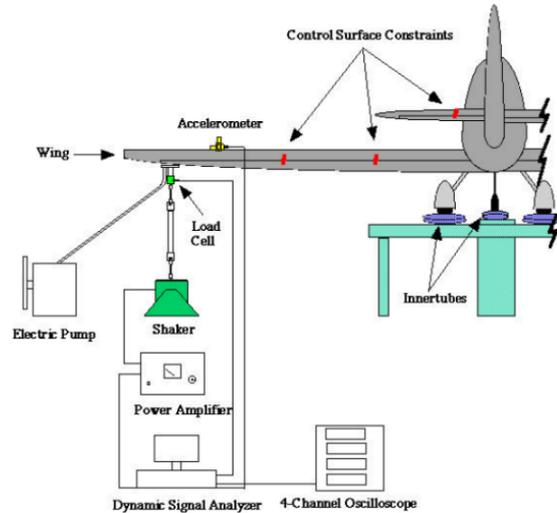


Figura 10.5: Configuración inicial para el GVT

Por otro lado, la aplicación de este método conlleva una configuración de excitación específica para cada modo vibratorio con el fin de que compense los fenómenos de amortiguación interna y permita la visualización de los modos.

Generalmente, la ecuación de movimiento para un sistema de  $N$  grados de libertad es la siguiente:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (10.3)$$

donde:  $M$  es la matriz de masas,  $C$  es la matriz de amortiguamiento,  $K$  es la matriz de rigidez y  $u$  es el vector de grados de libertad.

Para simplificar el análisis se puede considerar un comportamiento de amortiguación proporcional y la matriz de amortiguamiento se vuelve una matriz diagonal. Normalmente, estas matrices no serán matrices diagonales produciendo por tanto el acoplamiento de las  $N$  ecuaciones. El objetivo del método de resonancia de fase consiste en desacoplar las  $N$  ecuaciones mencionadas, permitiendo la identificación de los modos. El test de resonancia de fase asume que las formas de los modos  $\{\phi_n\}$  son valores reales, de manera que cualquier movimiento arbitrario  $\{u\}$  es una combinación lineal de  $N$

formas de modos, donde los coeficientes de ponderación de esta suma vienen dados por el vector de participación modal  $\{q\}$ .

$$\{u\} = [\phi]\{q\} \quad (10.4)$$

Se pueden diagonalizar las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento teniendo en cuenta que son ortogonales. De esta forma, la ecuación del movimiento queda:

$$[\phi]^T M [\phi] \ddot{q} + [\phi]^T C [\phi] \dot{q} + [\phi]^T K [\phi] q = [\phi]^T F = Q \quad (10.5)$$

donde  $q$  es el vector de fuerzas generalizadas.

En este punto, el único acoplamiento existente entre las  $N$  ecuaciones se encuentra en el lado derecho de la ecuación (10.5). El propósito de la prueba de separación de fase es hallar de forma iterativa la distribución de fuerzas que consiga que el vector de fuerzas generalizadas sea nulo para todos los modos excepto el buscado.

$$F = \alpha M \{\phi_n\} \quad (10.6)$$

Si la estructura esta excitada con una serie de fuerzas sinusoidales todas de la misma frecuencia y con distribuciones de amplitud proporcionales a una de las formas de modo ponderadas por la matriz de masas, resulta un vector de fuerzas generalizadas  $Q$  con valores nulos para todos los elementos excepto el correspondiente a la forma del modo seleccionado. Las ventajas que este método confiere son:

1. Los modos reales de la estructura no amortiguada correspondientes se miden directamente
2. Todos los vectores propios se excitan a un nivel de energía elevado
3. La linealidad de los ensayos se puede conseguir fácilmente

Sin embargo, el gran inconveniente de este método es gran coste y tiempo que requiere. Por este motivo, se han desarrollado técnicas de separación de fase matemáticamente.

### 10.3.3. Procedimiento PSM

El método de separación de fases ("*Phase Separation Method*") consiste en la excitación simultanea de todos los modos de la estructura y mediante algoritmos matemáticos obtener las funciones de transferencia (FRF). A

través de las FRF es posible estimar el amortiguamiento y frecuencia natural de los modos de vibración.

Cabe destacar que los modos críticos se identifican mediante el "Normal Mode Testing". Un modo se considera crítico:

- cuando difieren significativamente las predicciones
- cuando muestran un comportamiento no lineal
- cuando son influyentes en el comportamiento en alabeo

En este tipo de ensayos se usan señales de excitación de tipo aleatorio o sinusoidal. Las mediciones de las FRF resultantes permiten extraer los datos modales necesarios a través de curvas de ajuste. A diferencia del método de resonancia de fase en el cual los modos se separaban físicamente, en el método de separación de fases los modos se separan matemáticamente mediante curvas de ajuste.

Existen 2 técnicas fundamentales para la extracción de datos modales: el SDoF ("Single Degree of Freedom") y el MDoF ("Multiple Degree of Freedom"), siendo el último es más empleado.

Para el cálculo de las FRF en un sistema lineal de N grados de libertad y con amortiguamiento estructural, se utiliza la siguiente ecuación:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + i\omega B_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega^2} = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega)^k} \quad (10.7)$$

donde:  $A_r$  y  $B_r$  son constantes,  $\eta_r$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $a, b$  son los coeficientes de la fracción racional.

#### 10.3.4. Determinación de la frecuencia de excitación

A priori como no se conocen las frecuencias naturales de la estructura, se establece un rango inicial de frecuencias de excitaciones muy amplio y de pequeña resolución. A medida que se vayan detectando las posibles resonancias, se va reduciendo el rango de excitación lo que produce también un aumento de resolución de los modos. Una vez estimado el rango de frecuencias para el cual aparecen las frecuencias naturales más significativas, se determina el rango final de frecuencias que obtenga la mayor parte de los modos.

Además, las frecuencias naturales son independientes de la localización de los excitadores. Esto convierte en una tarea muy sencilla la determinación

de un rango de frecuencias para un ensayo GVT. Sin embargo, la posición de los excitadores influye en la frecuencia de excitación alcanzada en la estructura por ello resulta necesario calcular las FR en varias configuraciones de las estructuras antes de determinar el rango de frecuencias que se va a excitar. También se debe de asegurar que las medidas no fueron tomadas en los nodos estructurales.

Normalmente, el agitador se coloca en un nodo de la estructura, pues la forma del modo correspondiente a ese nodo tendrá excitación nula, y si se pusiera un acelerómetro en dicho punto no habría vibración en dicho punto.

En conclusión, el mejor método para estimar las frecuencias modales de una estructura es tomar varias medidas tanto para los acelerómetros como los excitadores. De esta forma se identifica la frecuencia modal de manera mas efectiva. Finalmente, el excitador se posiciona en el lugar para el cual produce una excitación para todas la frecuencias modales.

### 10.3.5. Determinación de la disposición nodal

Para determinar las formas de los modos de vibración es necesario conocer el movimiento de números puntos de la estructura a partir de acelerómetros. Es evidente que a mayor numero de acelerómetros, mejor resolución de los modos obtendremos. Sin embargo, la colocación, calibración y empleo de muchos acelerómetros es costosa en tiempo y dinero. Por ello, la determinación de los puntos en los que se colocaran dichos acelerómetros es de gran importancia y se conoce comúnmente como disposición nodal.

Una buena selección de puntos permite la obtención de datos FR de cada punto discreto y, a la vez, la información necesaria de los modos y parámetros modales de la estructura. Una configuración inadecuada puede conducir a estimaciones erróneas de las formas modales y de sus parámetros. Por tanto, la experiencia de los ingenieros con este tipo de ensayos resulta un aspecto fundamental a tener en cuenta.

En la siguiente figura se muestran dos disposiciones nodales diferentes, una adecuada y otra no. Se visualizan la conexión entre los puntos discretos con el fin de apreciar el aliasing espacial derivado de una mala disposición nodal. Por tanto, hay que seleccionar una solución entre el compromiso de la exactitud de la representación de los modos y el tiempo necesario para el calculo.

### 10.3.6. Test de la reciprocidad de Maxwell

Ya con anterioridad se ha hecho referencia a que las frecuencias naturales de una estructura lineal son independientes de la ubicación de los excitado-

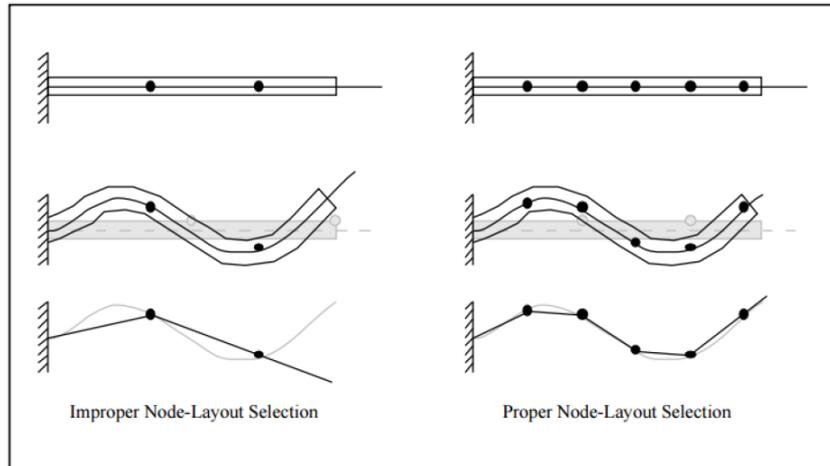


Figura 10.6: Ejemplos de elección de disposición nodal

res. Asumiendo esta hipótesis de linealidad, un único punto de excitación sería suficiente para la excitación de toda la estructura y la obtención de las frecuencias naturales, amortiguación y los modos de vibración.

El teorema de reciprocidad de Maxwell establece que una excitación en un punto  $x$  genera una respuesta en un punto  $y$  que es igual a la obtenida en el punto  $x$  cuando la excitación tiene lugar en el punto  $y$ . Este teorema permite validar la hipótesis de linealidad en los ensayos GVT y hará que la matriz de funciones de transferencia sea una matriz simétrica.

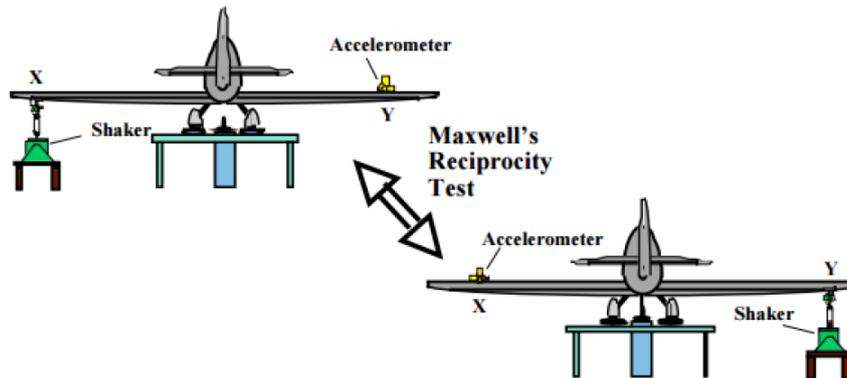


Figura 10.7: Reciprocidad de Maxwell

Para este capítulo se han usado las siguientes referencias bibliográficas: [63], [64], [65], [66], [67] y [68].

# 11

## Ensayo I

Tras haber realizado satisfactoriamente la introducción teórica del presente trabajo de fin grado, se comenzará la narración de varios ensayos realizados en el laboratorio basados en la teoría del análisis modal. En total, se han llevado a cabo tres experiencias: una viga unidimensional, una placa rectangular y el estabilizador horizontal del Mirage F1 (situado en el Hangar Pedro Duque de la universidad). La primera experiencia que se explicará será la viga unidimensional. No se debe perder nunca de vista que el objetivo principal de todos estos ensayos es la estimación de las frecuencias naturales y obtención de los modos de vibración. Para este ensayo se han utilizado tres acelerómetros y un martillo como fuente de excitación.

### 11.1. Geometría / Planos

La viga a ensayar en este experimento destaca por ser un cuerpo esbelto (una de sus medidas es mucho mayor que las otras). Este hecho permite considerar que los nodos del cuerpo tendrán nada más que un grado de libertad. Cabe mencionar que la viga es de acero. La viga se ha ensayado en condiciones de contorno libre-libre. Para conseguirlo, se ha construido un cajón metálico de soporte y la viga se encuentra suspendida a través de unas cuerdas elásticas que imitan dichas condiciones de contorno. La viga se ha colocado en posición horizontal. Las medidas de la viga ensayada son  $1000 \times 35 \times 6 \text{ mm}$  (Largo  $\times$  Ancho  $\times$  Espesor).

## 11.2. Discretización nodal

Para el estudio modal de la viga, ésta se ha descompuesto en nueve nodos a lo largo de su longitud. Para una mayor comodidad se han colocado los acelerómetros en la parte inferior de la viga, de forma que se excite solamente la parte superior de la viga. En la figura (11.1) se puede apreciar como quedaría el experimento una vez montado.

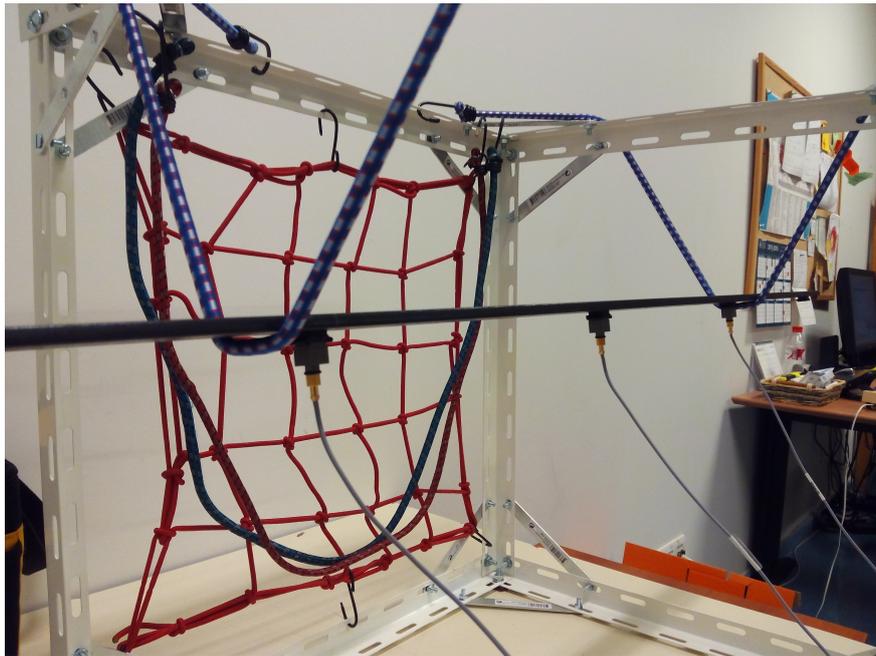


Figura 11.1: Montaje del equipo en la viga

Los acelerómetros y el martillo se conectan a una hardware de adquisición de datos (*módulo LAN-XI*) y éste al ordenador. Mediante el programa *Pulse Reflex* se construye la malla discretizada con el número de nodos y sus correspondientes grados de libertad. En la figura (11.2) se muestra como quedaría la viga discretizada en el programa y donde se encuentran los acelerómetros ubicados con sus direcciones de medida.

## 11.3. Pre-Test Excitadores

Antes de comenzar a tomar medidas, es necesario configurar el excitador que se va a utilizar (un martillo). La excitación provocada por un golpe de martillo se caracteriza por tener contenido en frecuencia en un rango muy amplio. Sin embargo, se realiza una calibración previa del martillo mediante golpes de prueba con el fin de determinar unos criterios para un *golpe*

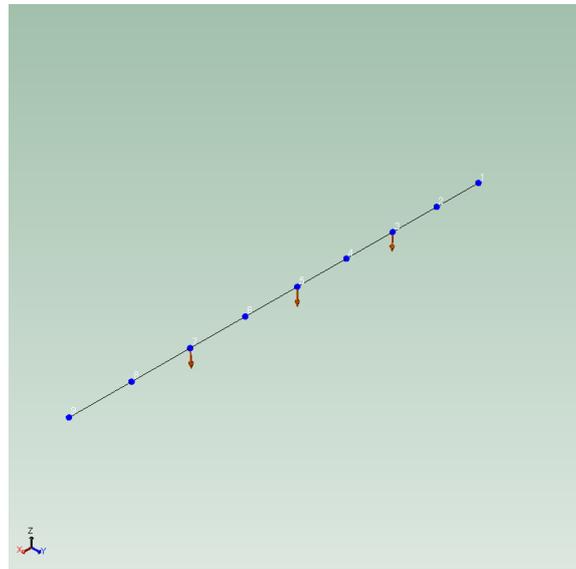


Figura 11.2: Discretización y ubicación de acelerómetros de la viga

*apropiado*. En función de las frecuencias que se quiera excitar se tendrá una referencia de la fuerza a la que se tiene que golpear la estructura, gracias al programa de análisis; y mas importante aún, se seleccionará el material de la punta del martillo. Dependiendo del material, se tendrá un rango de excitación diferente. En la figura (11.3) se muestra el rango de frecuencias de excitación del martillo (*Impact Hammer 8206 – 002*) con las 3 cabezas diferentes que se pueden colocar.

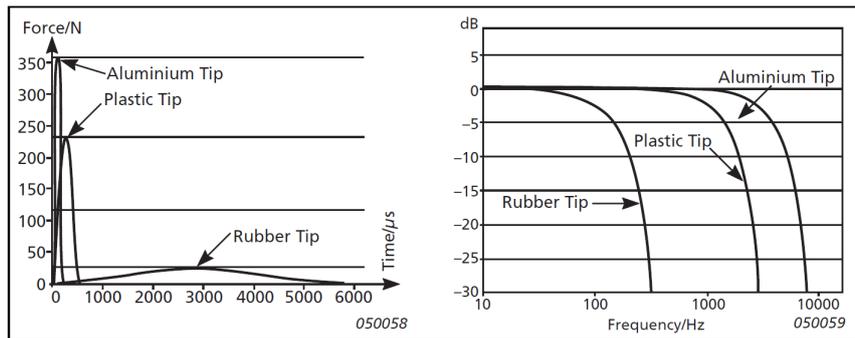


Figura 11.3: Funciones de coherencia

También, el programa *Pulse Reflex* nos permite sacar las medidas de la coherencia de los golpes de martillo. Se recuerda que la coherencia era la medición de  $[0, 1]$  de la cantidad de respuesta debido a la excitación introducida. Esto significaba que un valor de 1 indica que toda la respuesta se

debía al golpe de martillo y al contrario si fuese de valor 0. Por lo tanto, al observar las gráficas de coherencia lo ideal es que se situasen en el valor 1 para todas las frecuencias. En la figura (11.4) se muestran las coherencias para 3 golpes durante el ensayo.

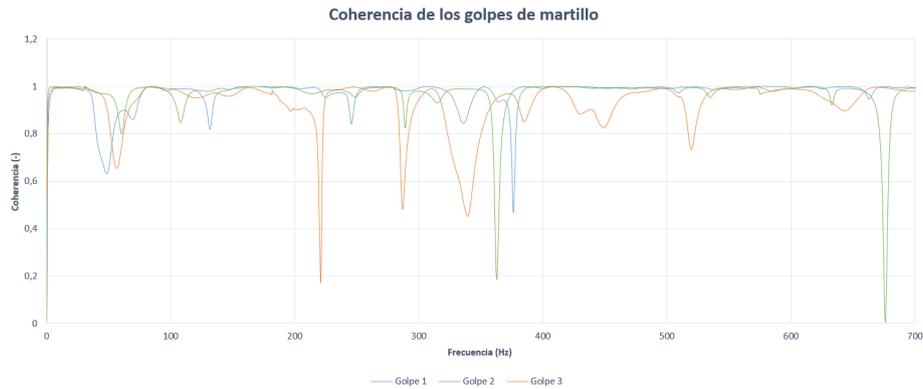


Figura 11.4: Funciones de coherencia

Al analizar las gráficas se puede apreciar que prácticamente en la totalidad del rango de frecuencias, el valor de la coherencia es 1. Claramente, habrá zonas donde no valga la unidad debido a la presencia del ruido en las medidas. Sin embargo, este hecho no compromete gravemente a la precisión de las medidas. Normalmente, las zonas de baja coherencia suelen ser las frecuencias donde tienen lugar las anti-resonancias del sistema. La respuesta del sistema en una anti-resonancia es muy pequeña, por lo que una pequeña variación de la respuesta puede dar lugar a un error grande. Este hecho explica las *caídas* que puede tener la coherencia a lo largo del rango de frecuencias.

#### 11.4. Set-Up acelerómetros

Una vez calibrado el martillo, el siguiente paso será indicar al programa en que puertos se encuentran conectados los acelerómetros y el martillo en el hardware de adquisición de datos. También es importante especificar en que nodos se encuentran ubicados los acelerómetros. Con todo esto ya realizado, se podría comenzar ya a tomar las medidas.

Además, el programa posee la capacidad de seleccionar el número de golpes que se desee a la hora de estimar la FRF en un punto. La FRF final será siempre una media de todas las medidas adquiridas teniendo en cuenta los impactos medidos por el martillo. Para todos los ensayos el número de repeticiones ha sido 3.

## 11.5. Resultados

Finalmente, el último paso de esta experiencia es el análisis de los resultados obtenidos. Las características más importantes del sistema son las frecuencias naturales y los modos de vibración. Además, las gráficas de las FRF y AutoMAC (ortogonalidad de los modos) son de gran ayuda a la hora de fundamentar los resultados. Para el rango de frecuencias estudiado, [0, 700]Hz, se han encontrado seis modos de vibración. En el cuadro (11.1) se muestran las características de cada uno de ellos.

Modos	Frecuencia[Hz], $\omega$	Amortiguamiento[%], $\xi$	Complejidad
1	30.99	0.186	0.005
2	84.64	1.261	0.009
3	165.49	0.523	0.022
4	276.12	0.280	0.050
5	411.21	0.071	0.005
6	574.21	0.330	0.038

Cuadro 11.1: Características de los modos

Para la representación de los modos se han tomado capturas gracias al programa *Pulse Reflex*. En las siguientes figuras (11.5,11.6,11.7,11.8,11.9 y 11.10) se visualizan los seis modos de la viga. En caso de que se desearan ver más modos se tendría que aumentar el número de nodos de la discretización nodal y el rango de frecuencias estudiado.

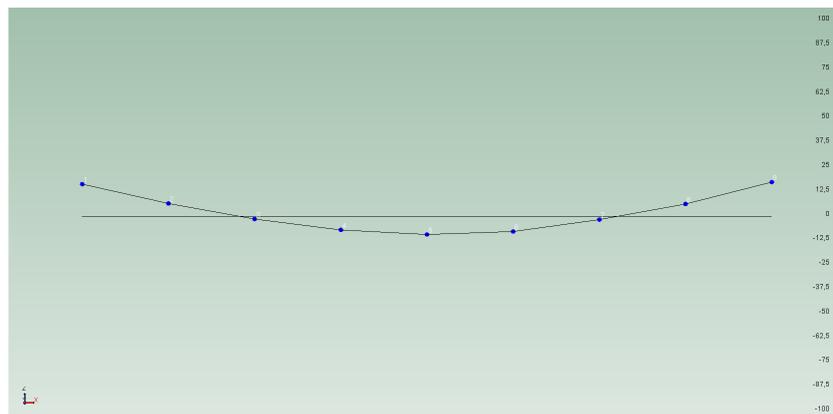


Figura 11.5: Primer modo de la viga

Aparte de visualizar los modos de vibración, las gráficas más importantes para la validación de resultados son las FRF. Las FRF extraídas del programa *Pulse Reflex* son sintetizadas, esto quiere decir que son las FRF experimentales ponderadas con funciones de ajuste para hacer más *limpias*

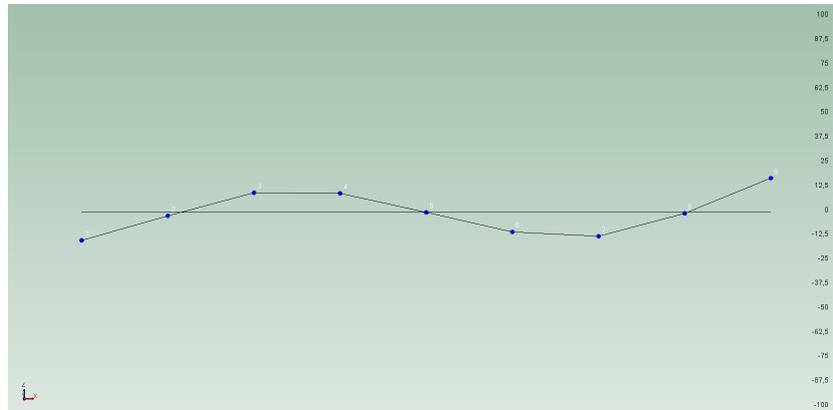


Figura 11.6: Segundo modo de la viga

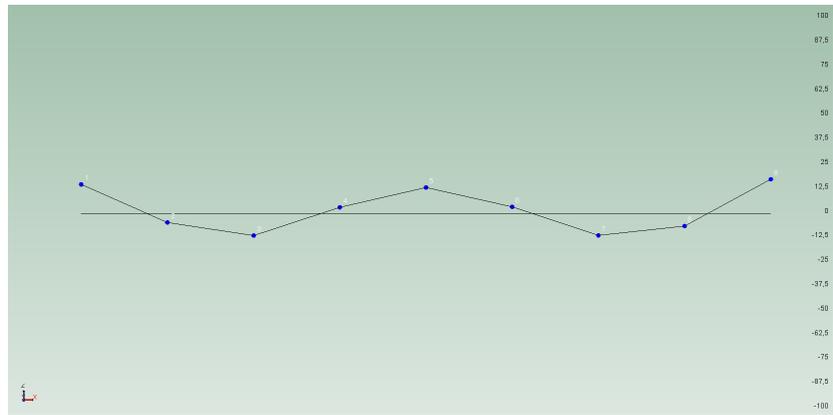


Figura 11.7: Tercer modo de la viga

las mediciones. El eje de amplitudes (*eje y*) se encuentra en escala logarítmica. Por ello, cuando la frecuencia es 0 Hz, el valor que se obtiene es la rigidez estática del sistema. Además, debido al ajuste de las FRF sintetizadas en el límite del rango de frecuencias estudiado, la función tiende a  $-\infty$  (al estar en escala logarítmica en realidad tiende a 0) y pierden validez las medidas.

Se recuerda que la numeración de los puntos es creciente de izquierda a derecha, siendo el punto 1 el extremo izquierdo de la viga. Lo primero que llama la atención es que los modos de vibración impares son modos simétricos, mientras que los modos pares son anti-simétricos. Por lo tanto, el punto 5 (centro de la viga) solo vibrará en los modos impares. Para los modos anti-simétricos (o pares) será un nodo del modo y no estará perturbado. De esta manera, la FRF del punto 5 solo debería tener tres *picos*, figura (11.11).

Por otro lado, las FRF medidas en los puntos 3 y 7 deberían contener

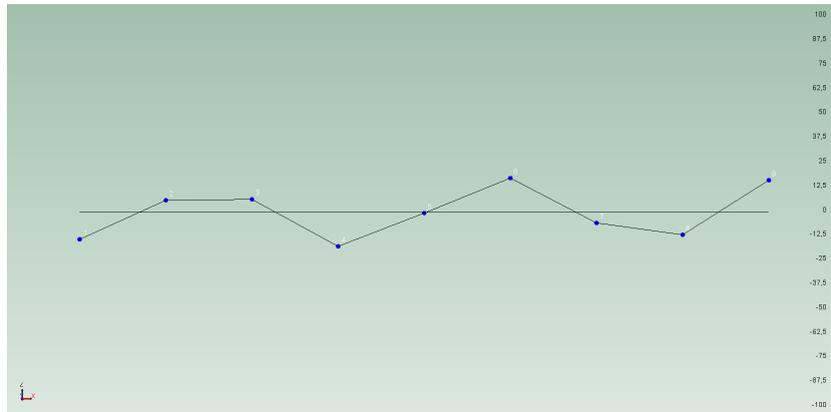


Figura 11.8: Cuarto modo de la viga

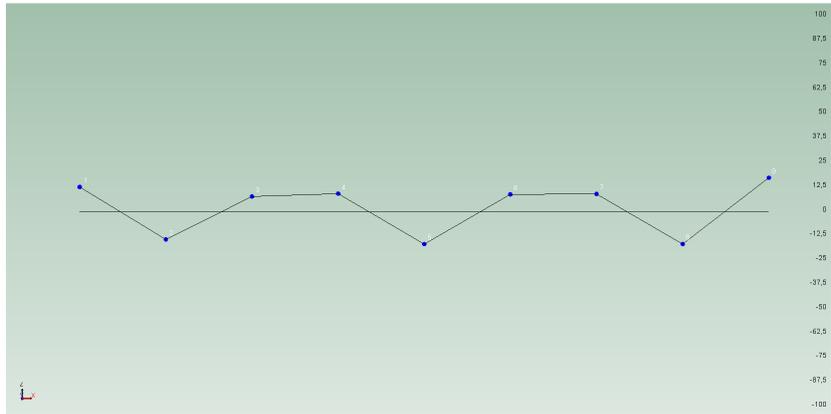


Figura 11.9: Quinto modo de la viga

todos los modos de vibración. Sin embargo, en el primer modo de vibración, estos puntos no poseen la máxima amplitud. Este es el motivo por el cual no es tan visible el *pico* del primer modo, pero si presta atención si que aparece. En las figuras (11.12 y 11.13) se puede ver las FRF anteriormente mencionadas.

Al representar todas las FRF en una misma gráfica, figura (11.14), se ven con total claridad los seis modos de vibración de la viga a las frecuencias naturales ya mencionadas en el cuadro (11.1).

Otra forma de validar los modos de vibración es a través de la matriz AutoMAC. Esta matriz representa la ortogonalidad de los modos en un intervalo  $[0, 1]$ , siendo 0 el valor correspondiente a dos modos totalmente ortogonales y 1 el valor para dos modos idénticos. En la figura (11.15) se representa la matriz AutoMAC en un gráfico 3D.

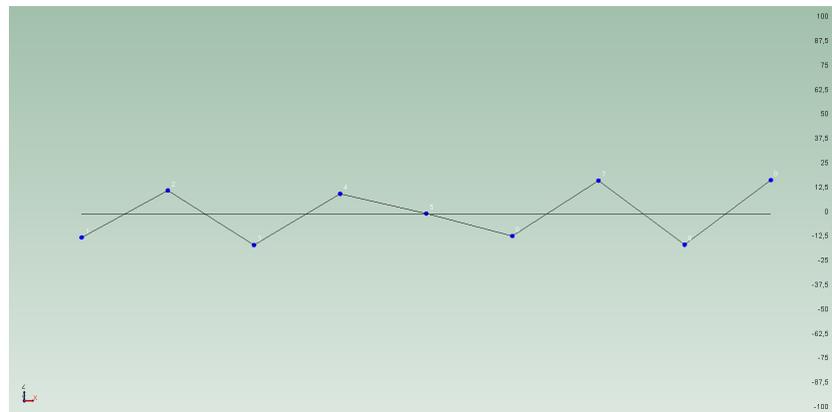


Figura 11.10: Sexto modo de la viga

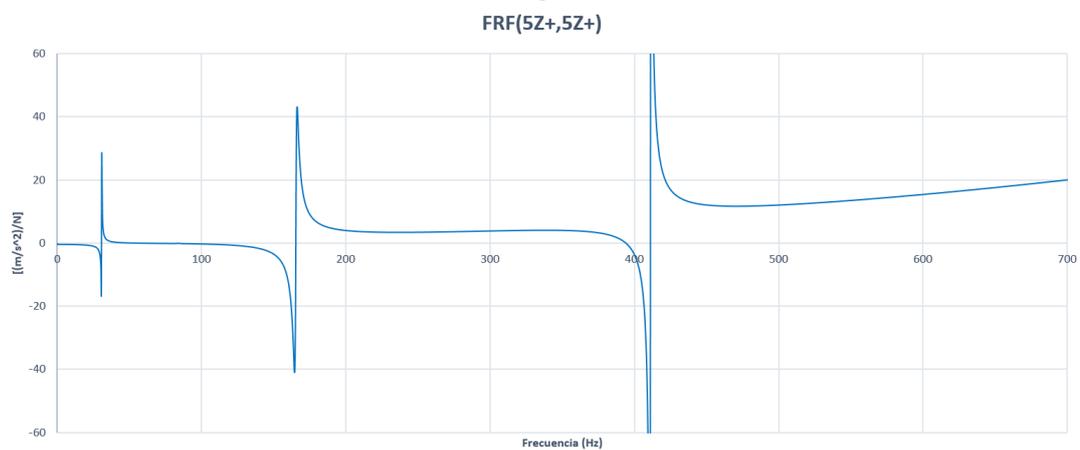


Figura 11.11: FRF medida en punto 5

Analizando el gráfico se puede corroborar que los modos obtenidos son *bastante limpios*, en el sentido que son prácticamente ortogonales todos ellos entre sí. Los modos más similares serían el primero y tercero con una ortogonalidad de 0,13 la cual indica una similitud despreciable.

## 11.6. Solución Analítica

Al tratarse de un problema de relativa sencillez, es posible calcular la solución de forma analítica sin requerir un gran esfuerzo matemático. La solución se ha encontrado en la referencia bibliográfica [69] y consta de las frecuencias naturales y representación de los modos. No ha sido posible el cálculo del factor de amortiguamiento.

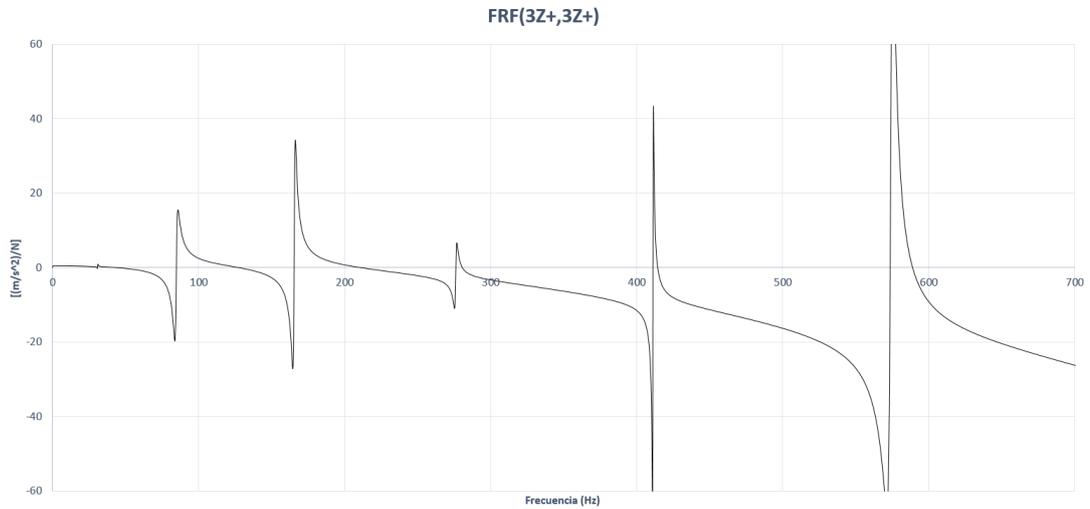


Figura 11.12: FRF medida en punto 3

Para la estimación de las frecuencias naturales se ha definido la siguiente función:

$$f_i(Hz) = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2} ; i = 1, 2, 3, \dots \quad (11.1)$$

donde:  $x$  es la coordenada longitudinal de la viga,  $L$  es la longitud de la viga,  $m$  es la masa,  $E$  es el modulo de Young,  $I$  es el momento de inercia en el eje  $y$  y  $\lambda_i$  depende del modo de vibración.

$$\lambda_i = \begin{cases} 4,73004074 \\ 7,85320462 \\ 10,9956078 \\ 14,1371655 \\ 17,2787597 \\ (2i + 1)\frac{\pi}{2} ; i > 5 \end{cases} \quad (11.2)$$

Mediante el uso del programa *Mathematica* se ha construido la tabla (11.2) comparatoria de las frecuencias naturales tanto analíticas como experimentales.

Observando la tabla, el error entre el modelo analítico y experimental es muy pequeño ( $\pm 3Hz$ ). De esta forma se pueden validar los datos experimentales quedando pendiente verificar los modos de vibración. Para dibujar los modos de viibración se tiene la siguiente función de forma:

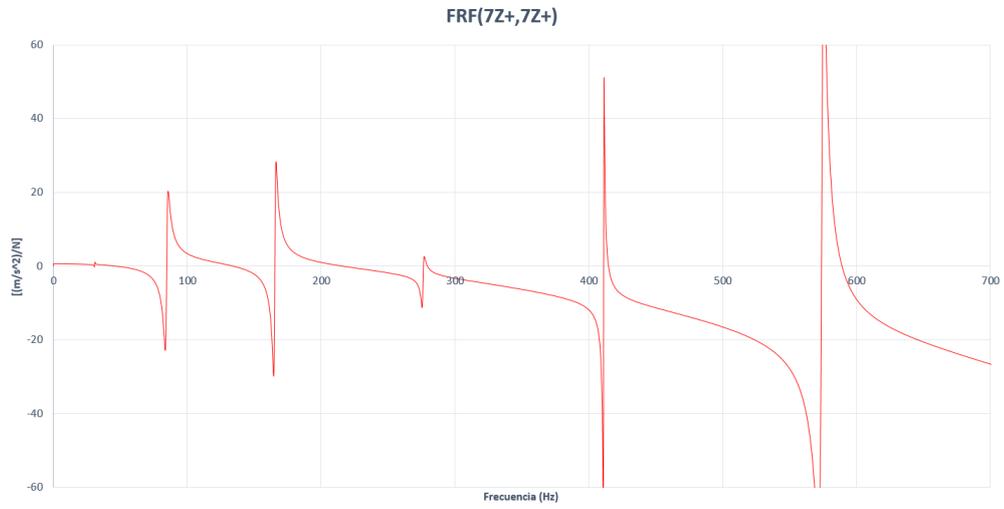


Figura 11.13: FRF medida en punto 7

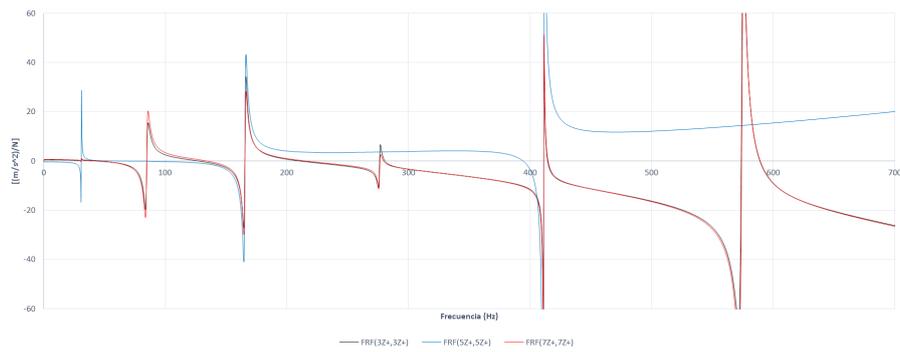


Figura 11.14: FRF en puntos 3, 5, 7

$$w_i(x/L) = \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \sigma_i \left( \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) \right) \quad (11.3)$$

donde  $\sigma_i$  es un factor de corrección dependiente del modo tal que

$$\sigma_i = \begin{cases} 0,982502215 \\ 1,000777312 \\ 0,999966450 \\ 1,000001450 \\ 0,999999937 \\ \approx 1 ; i > 5 \end{cases} \quad (11.4)$$

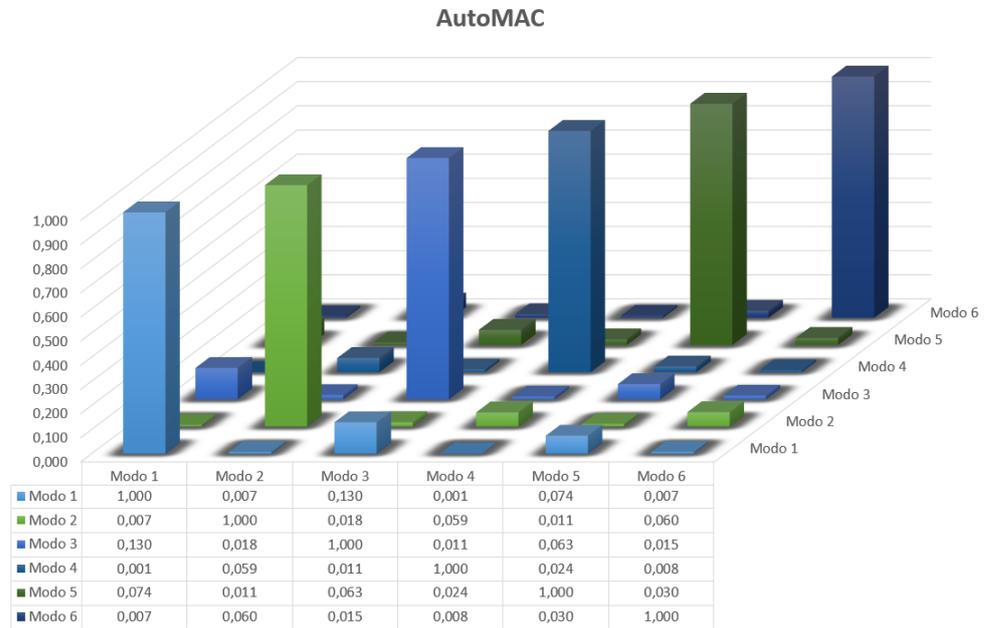


Figura 11.15: Matriz AutoMAC

Modos	$\omega$ analítica[Hz]	$\omega$ experimental [Hz]
1	31.90	30.99
2	87.93	84.64
3	166.30	165.49
4	279.46	276.12
5	414.48	411.21
6	576.39	574.21

Cuadro 11.2: Comparativa de las frecuencias naturales

Finalmente, representando los modos de vibración con la ayuda de *Mathematica* se obtienen los siguientes gráficos de los modos.

Comparando los modos de vibración analíticos y experimentales se puede apreciar una gran similitud entre ellos, de tal forma que se validan los resultados obtenidos en el ensayo. Por tanto, se puede concluir que el ensayo ha sido un éxito.

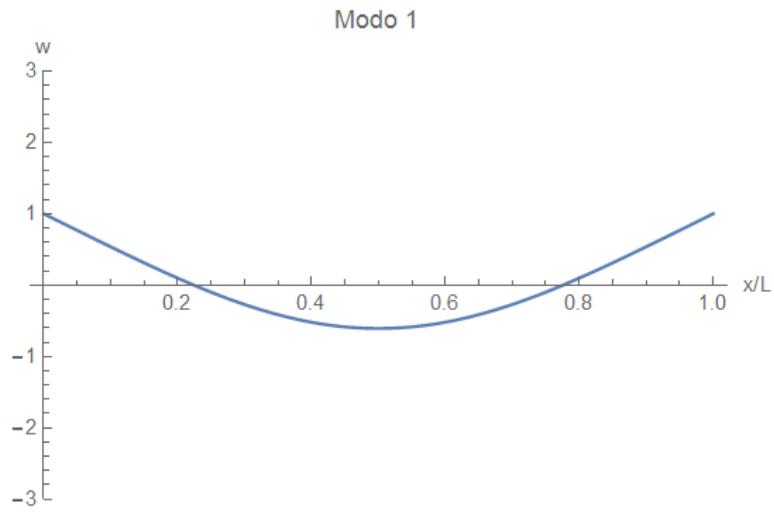


Figura 11.16: Modo 1 analítico

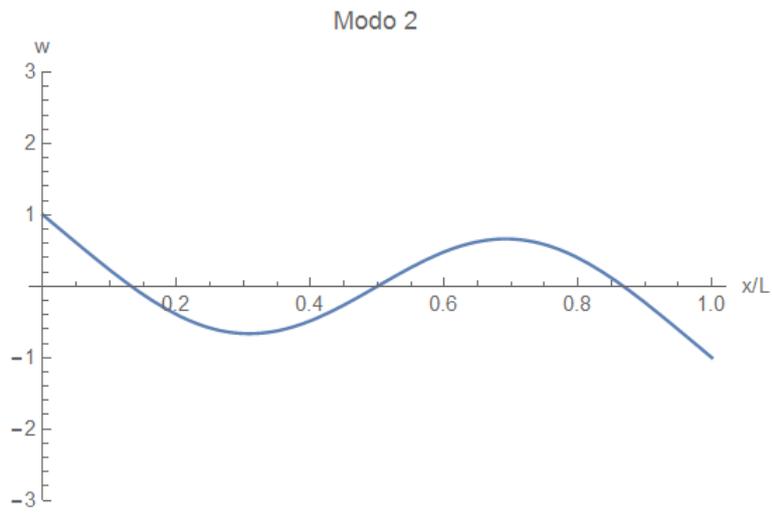


Figura 11.17: Modo 2 analítico

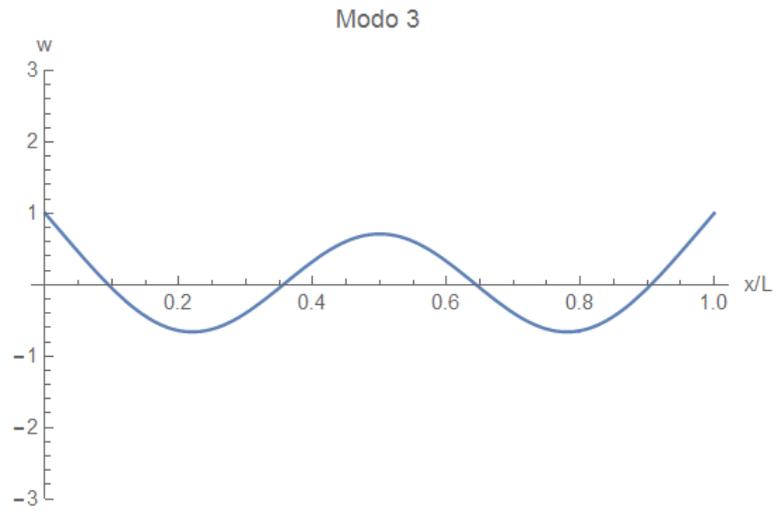


Figura 11.18: Modo 3 analítico

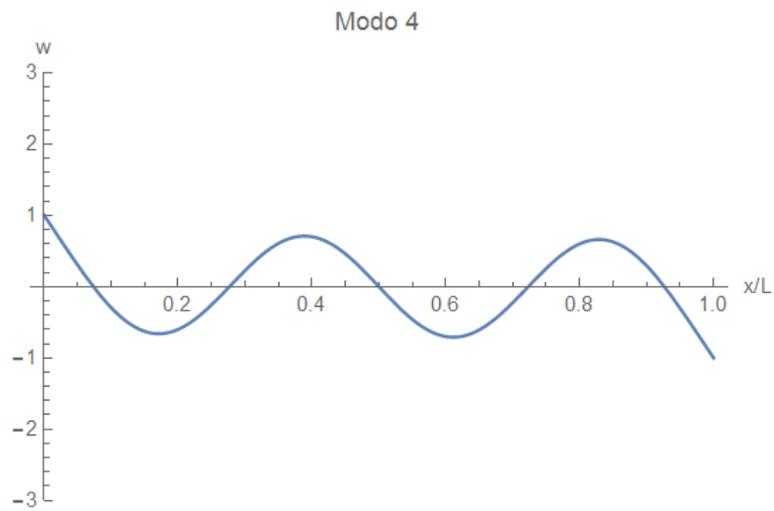


Figura 11.19: Modo 4 analítico

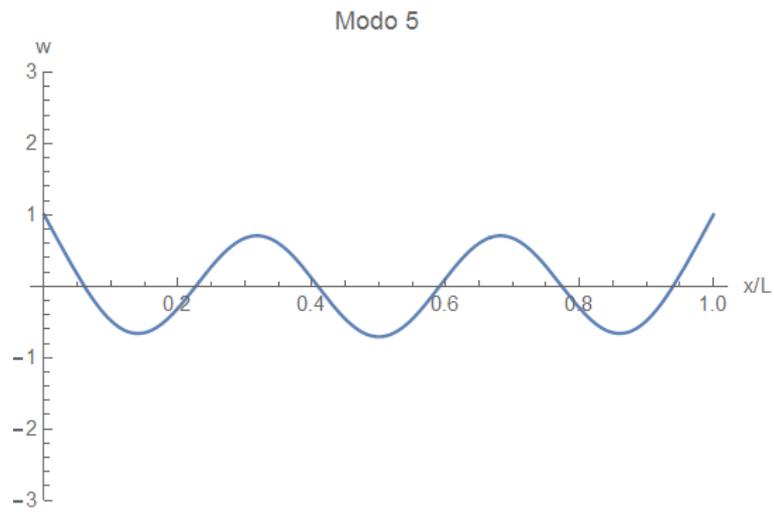


Figura 11.20: Modo 5 analítico

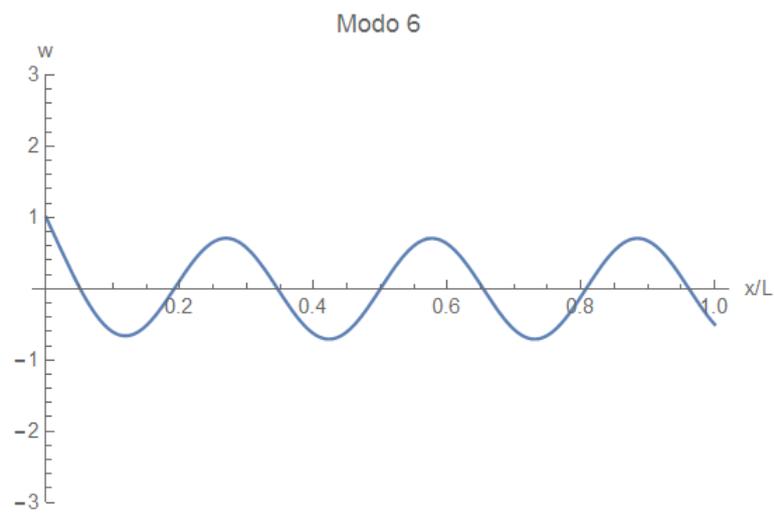


Figura 11.21: Modo 6 analítico

# 12

## Ensayo II

El segundo ensayo llevado a cabo en el presente trabajo de fin de grado es el análisis modal de una placa metálica. La placa estudiada esta hecha de acero y la meta principal de esta experiencia vuelve a ser la obtención de las frecuencias naturales y modos de vibración de la misma. Para este ensayo se han utilizado un acelerómetro y un martillo como fuente de excitación.

### 12.1. Geometría / Planos

La placa empleada se caracteriza principalmente por no ser cuadrada. Sus dimensiones son  $25 \times 34 \times 0,35 \text{ cm}$  (Ancho  $\times$  Largo  $\times$  Espesor). Para este caso, solo se considerará que los nodos de la estructura tendrán un único grado de libertad, perpendicular a la superficie mas grande de la placa. Las condiciones de contorno de la placa son bordes libres y se recrean de la misma forma realizada que en el ensayo de la viga anterior. En la figura (12.1) se aprecia lo mencionado con anterioridad.

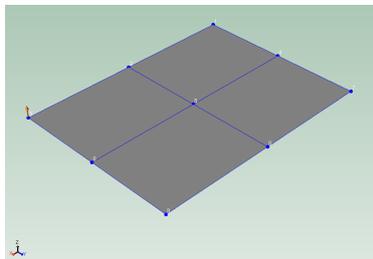


Figura 12.1: Orientación y Ubicación del acelerómetro en la placa

## 12.2. Discretización nodal

El modelo discreto que se ha planteado para el análisis de placa consiste en nueve puntos repartidos en forma de cuadrícula. Cabe mencionar el empleo de un único acelerómetro en todo el ensayo colocado en el punto 3 de la placa. Al igual que en el ensayo de la viga, el acelerómetro se ha colocado en la cara inferior de la placa con el fin de tener una mayor comodidad a la hora de excitar la placa con el martillo.

En la siguiente figura se puede apreciar la discretización tomada:

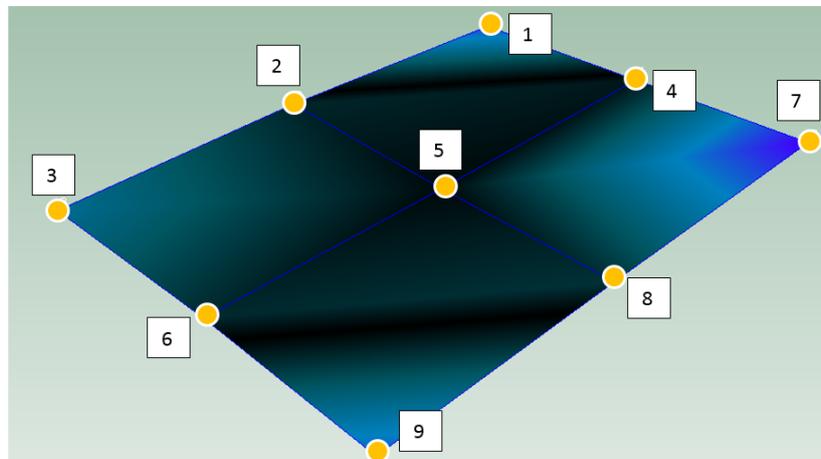


Figura 12.2: Discretización nodal de la placa

Los apartados de Pre-Test de excitadores y *set-up* de acelerómetros se han realizado de la misma forma que se detalla en las secciones (11.3 y 11.4) del ensayo I. En la figura (12.3) se muestra una imagen de como quedaría el montaje final, se recuerda que las condiciones de contorno de la placa vuelven a ser *libre-libre*.

## 12.3. Resultados

Con todas las medidas obtenidas, se puede comenzar con el análisis de resultados del ensayo. Para el rango de frecuencias seleccionado,  $[0, 600]$  Hz, se aprecian cuatro modos de vibración. En el cuadro (12.1) se muestran sus características.

Para la visualización de los modos se han hecho varias capturas de las animaciones de cada uno de ellos. En las figuras (12.4,12.5,12.6 y 12.7) se muestran las secuencias:

Modos	Frecuencia[Hz], $\omega$	Amortiguamiento[%], $\xi$	Complejidad
1	156.87	1.209	0.031
2	183.97	0.365	0.004
3	346.95	0.669	0.023
4	367.90	0.151	0.011

Cuadro 12.1: Características de los modos

Los modos representados son los cuatro modos de menor frecuencia que posee la placa. Con el fin de corroborar la validez de los modos enseñados, se procederá con un análisis de las FRF obtenidas por el programa *Pulse Reflex*. Teóricamente, las FRF de los vértices de la placa deben mostrar las cuatro resonancias de los modos. Concretamente, la FRF(3Z+, 3Z+) mostrará una antiresonancia después de cada resonancia al excitar y medir en el mismo punto.

En la figura (12.8) se ven claramente cuatro *picos* en las frecuencias correspondientes a cada uno de los modos de la estructura. Sin embargo, si se representase la FRF medida en el punto 5 (centro de la placa), no se verían todos los modos de vibración. Esto se debe a que el punto 5 es un nodo del primer y tercer modo de vibración, y por tanto no vibra.

Como se puede ver en la figura (12.9), solo hay dos picos en lugar de cuatro. Además, estos picos están en las frecuencias de los modos segundo y cuarto. El mismo fenómeno es visible para puntos colocados en las aristas. En los puntos 4 y 6 sólo deberían manifestarse el segundo y tercer modo, mientras que en los puntos 2 y 8 el único modo que no podrá verse sería el primer modo. Todo lo mencionado anteriormente se justifica en las figuras (12.10,12.11).

Finalmente, también se ha representado la matriz AutoMAC de la ortogonalidad de los modos de vibración. Analizándola rápidamente es evidente que todos los modos son prácticamente ortogonales entre sí viendo los bajos valores de los elementos fuera de la diagonal. De esta manera, se puede confirmar que las medidas han sido tomadas correctamente. En la figura (12.12) se ve representada la matriz AutoMAC.

## 12.4. Solución Analítica

Al igual que pasaba con el primer ensayo, por la sencillez del problema a tratar también se ha podido calcular la solución analítica gracias a la referencia bibliográfica [69]. Las frecuencias naturales se han hallado mediante el uso de la siguiente función:

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left[ \frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{1/2} ; i = 1, 2, 3, \dots \quad (12.1)$$

donde  $a$  es la longitud de la placa,  $b$  es el ancho,  $E$  es el modulo de Young,  $\gamma$  es la densidad por el espesor de la placa y  $\nu$  es coeficiente de Poisson. Cabe señalar que los valores de  $\lambda_{ij}$  depende de la relación de los lados de la placa ( $a/b$ ). Como en el anterior ensayo se ha construido una tabla similar comparativa de las frecuencias naturales.

Modos	$\omega$ analítica[Hz]	$\omega$ experimental [Hz]
1	153.41	156.87
2	181.77	183.97
3	344.22	346.95
4	365.50	367.90

Cuadro 12.2: Comparativa de las frecuencias naturales

La diferencia entre el modelo analítico y experimental es de  $\pm 3Hz$ . Por lo tanto, los resultados en lo que se refiere a las frecuencias naturales se pueden considerar válidos. Por último también se han representado los modos de vibración obtenidos de forma analítica, mostrados en las figuras (12.13,12.14,12.15 y 12.16)

Observando detenidamente los modos tanto analíticos como experimentales se puede apreciar una clara similitud entre ellos. Se ha de tener en cuenta que en por el bajo numero de puntos tomado a la hora de discretizar, hay muchos detalles de los modos analíticos que no se pueden apreciar en los modos experimentales. Es por este motivo que resulta tan fundamental una buena discretización de la estructura a la hora de ejecutar ensayos modales.

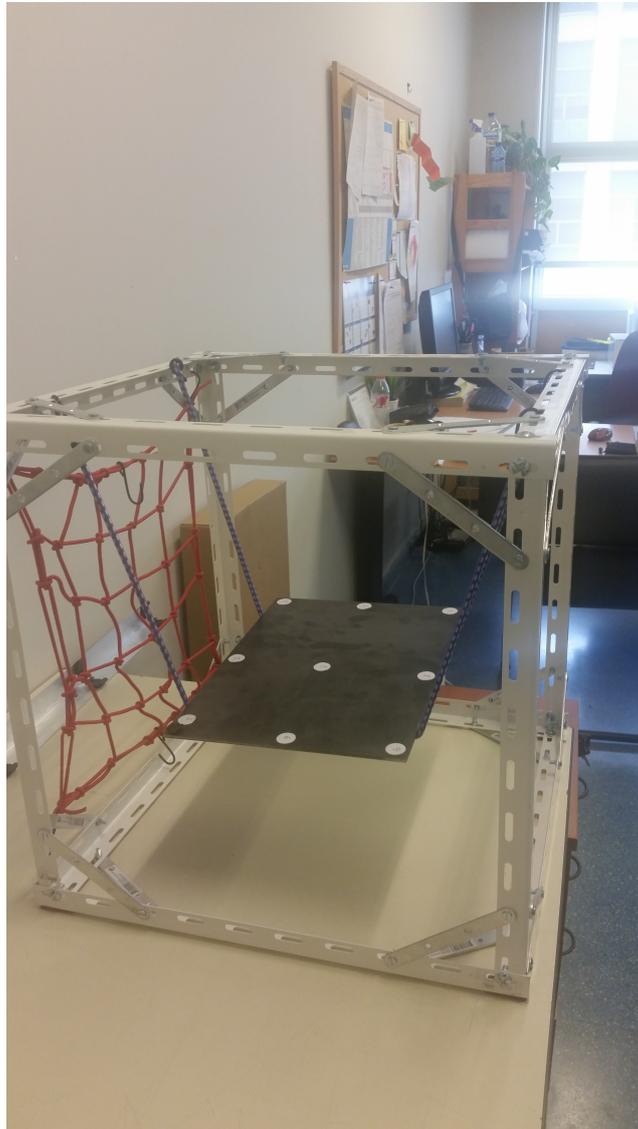


Figura 12.3: Montaje del equipo en la placa

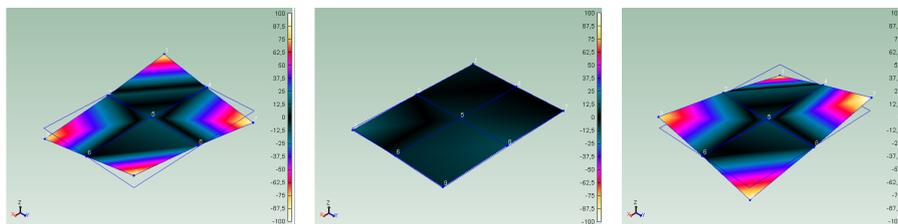


Figura 12.4: Primero Modo de la Placa

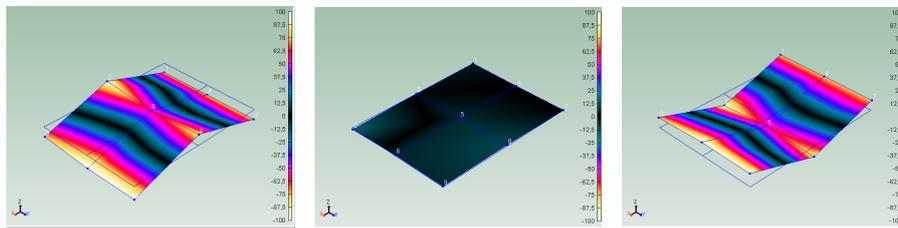


Figura 12.5: Segundo Modo de la Placa

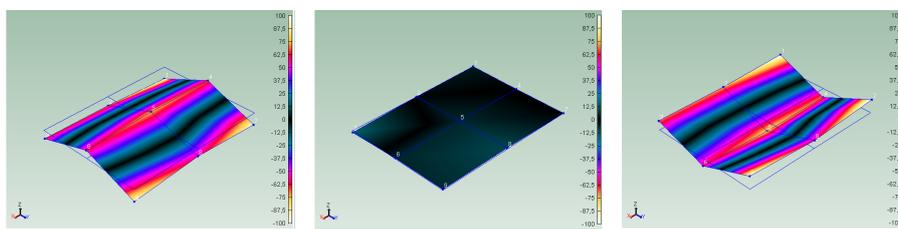


Figura 12.6: Tercero Modo de la Placa

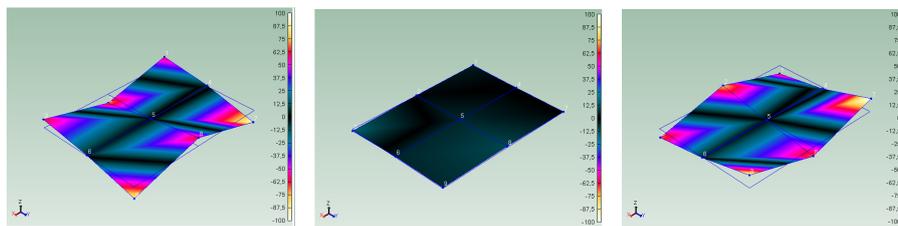


Figura 12.7: Cuarto Modo de la Placa

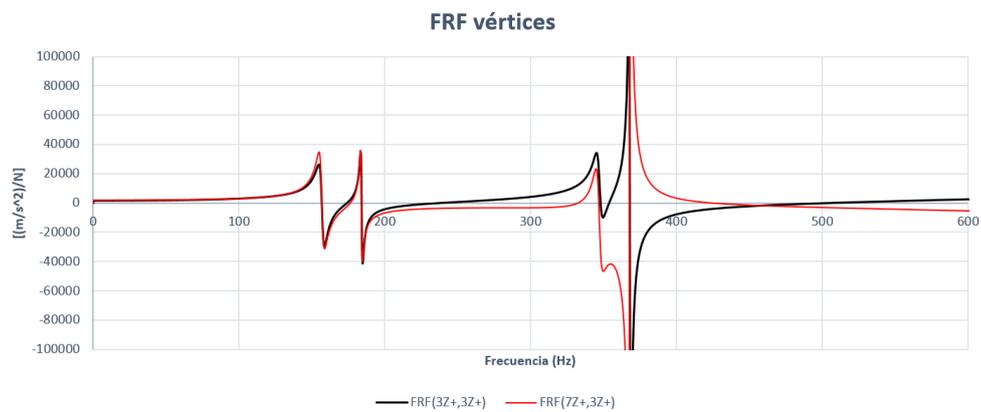


Figura 12.8: FRF medida en los vertices 3 y 7

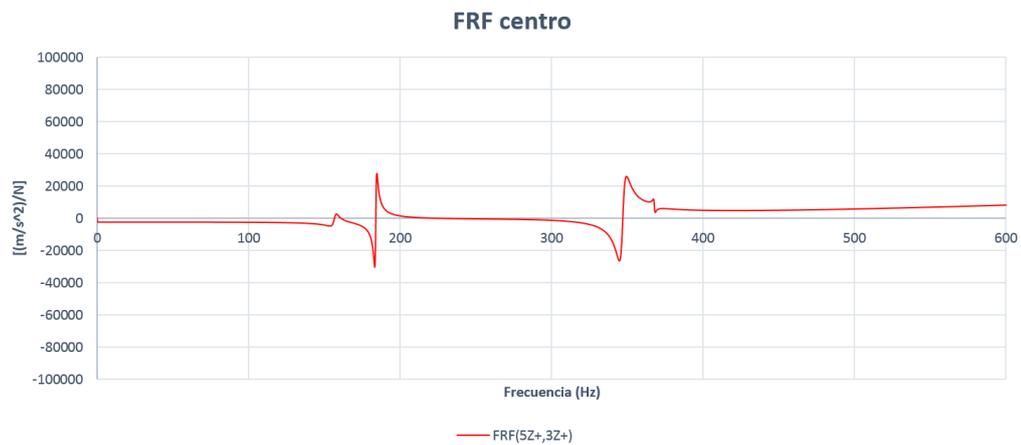


Figura 12.9: FRF medida en el centro de la placa

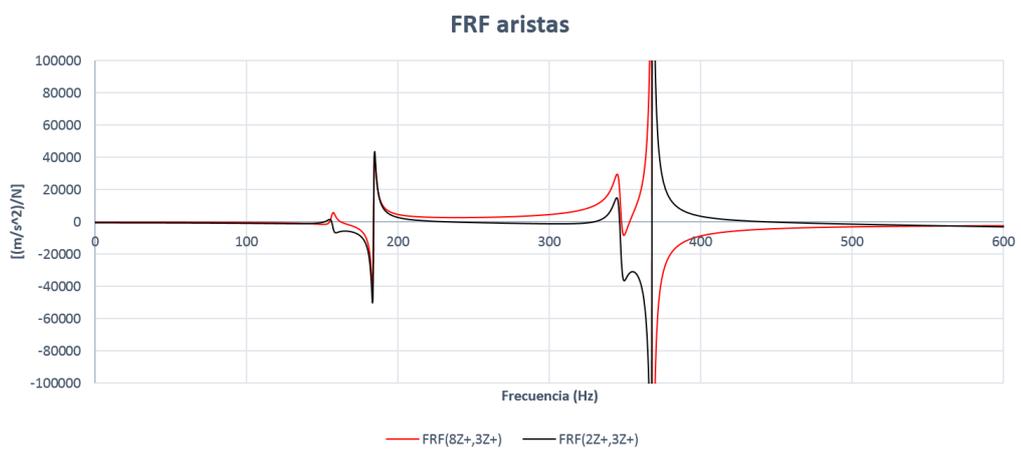


Figura 12.10: FRF medida en los aristas 2 y 8

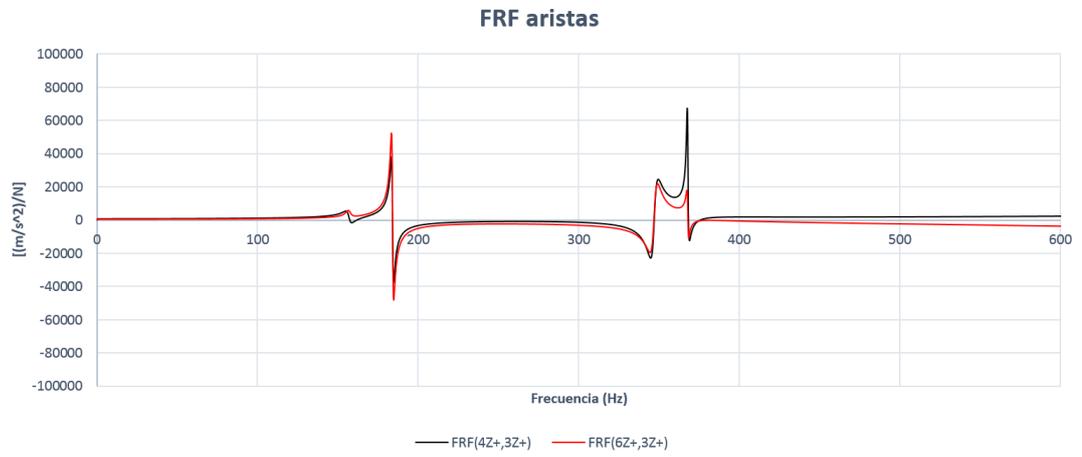


Figura 12.11: FRF medida en los aristas 4 y 6

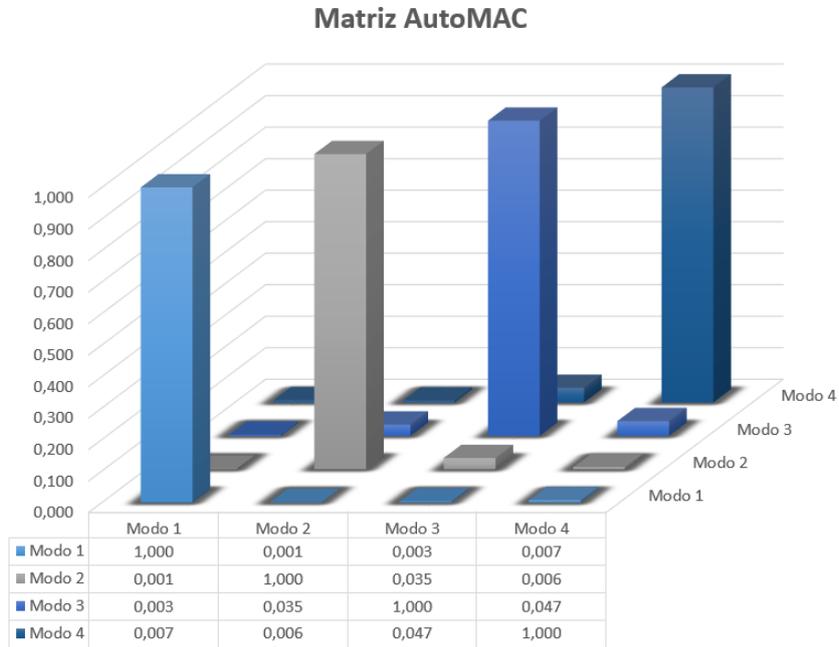


Figura 12.12: Matriz AutoMAC en 3D

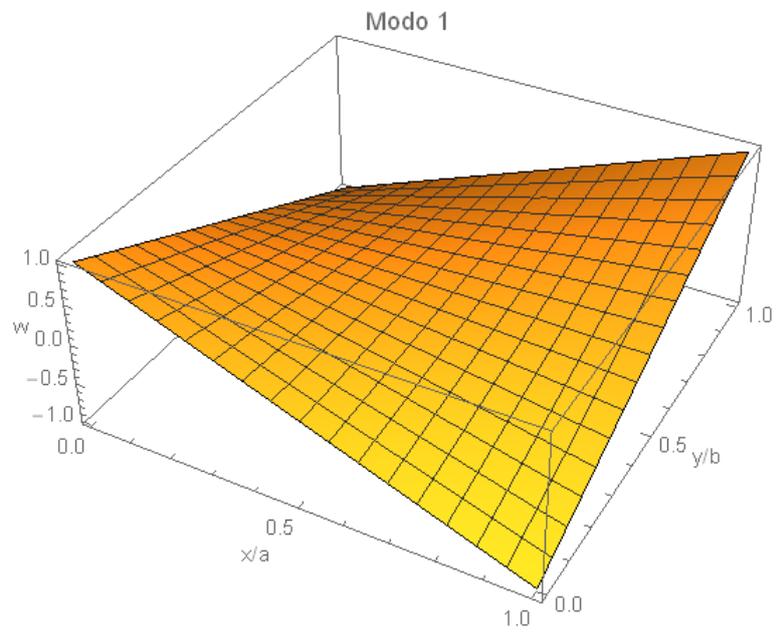


Figura 12.13: Modo 1 analítico

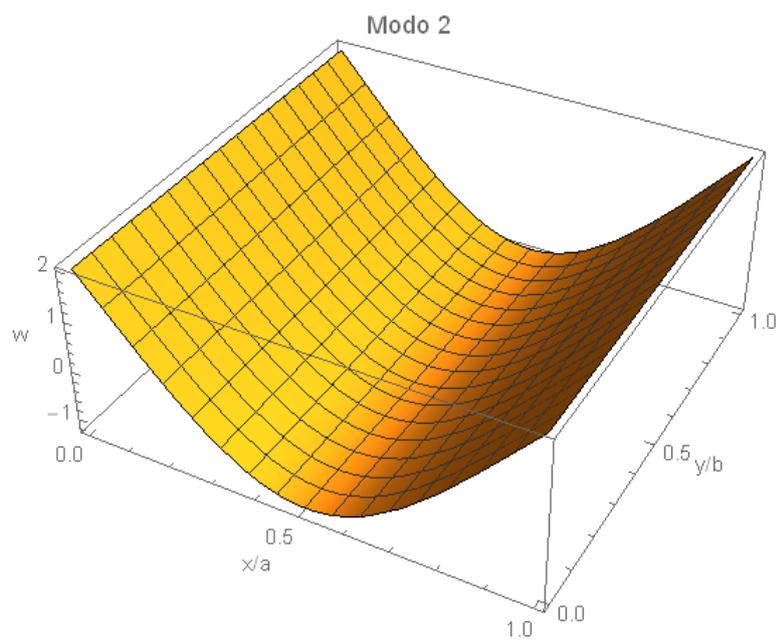


Figura 12.14: Modo 2 analítico

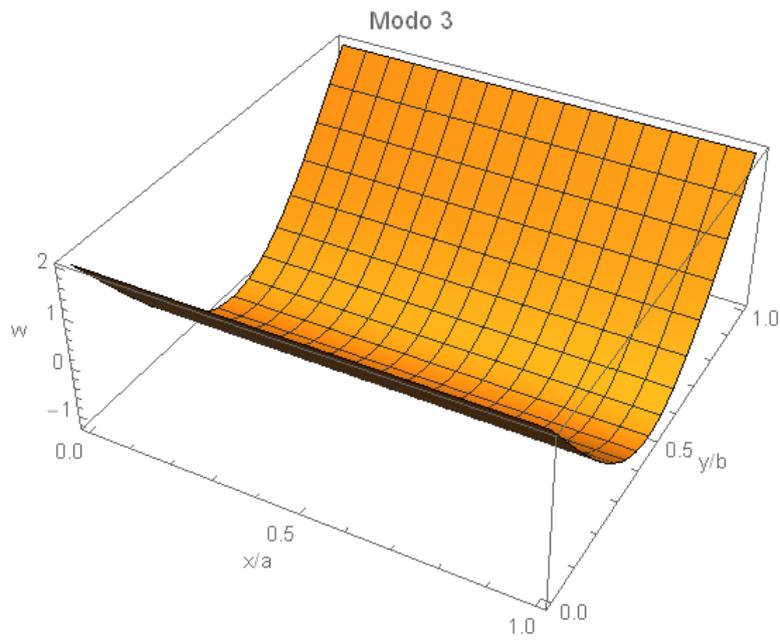


Figura 12.15: Modo 3 analítico

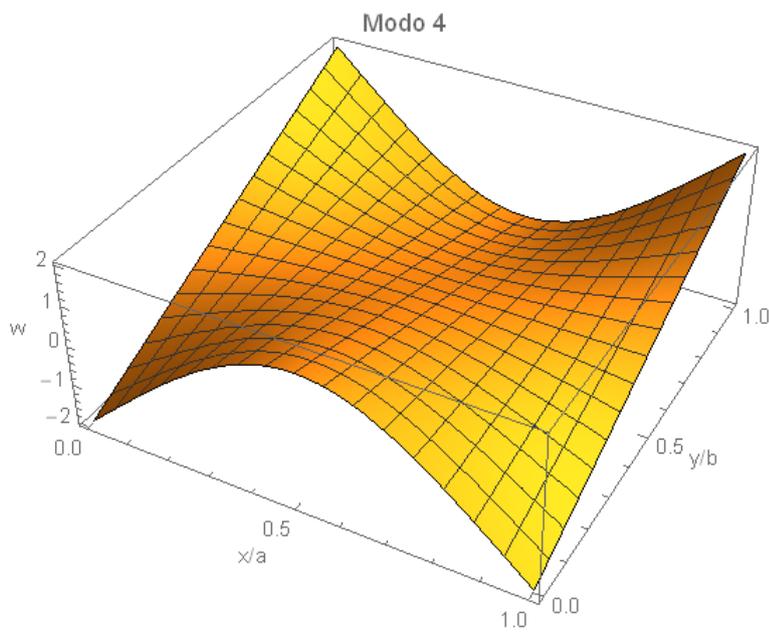


Figura 12.16: Modo 4 analítico

# 13

## Ensayo III

El tercer ensayo y último ensayo realizado en el presente trabajo de fin de grado es el análisis modal del estabilizador horizontal de la aeronave Dassault Mirage F1, situado en el hangar Pedro Duque de la Universidad Politécnica de Valencia. El Mirage F1 es un caza de superioridad aérea fabricado por la empresa francesa Dassault Aviation. Se caracteriza por tener un ala flecha y con diedro negativo que mejora notablemente sus actuaciones en despegues y aterrizajes de pequeña distancia. Actualmente se encuentra en servicio en los países: Gabón, Irán, Libia y Marruecos.

### 13.1. Geometría / Planos

El estabilizador horizontal del Mirage F1 se caracteriza por ser una placa móvil con forma trapezoidal. Por motivos de operatividad actual, no ha sido posible conseguir los planos de la estructura del estabilizador horizontal en detalle (distribución de costillas, larguerillos, cajón de torsión, . . . , etc.) En la figura (13.1) se muestran las vistas generales de la aeronave y se señala el estabilizador que se analizará en el ensayo.

Las medidas del estabilizador se muestran en el plano de la siguiente figura (13.2):

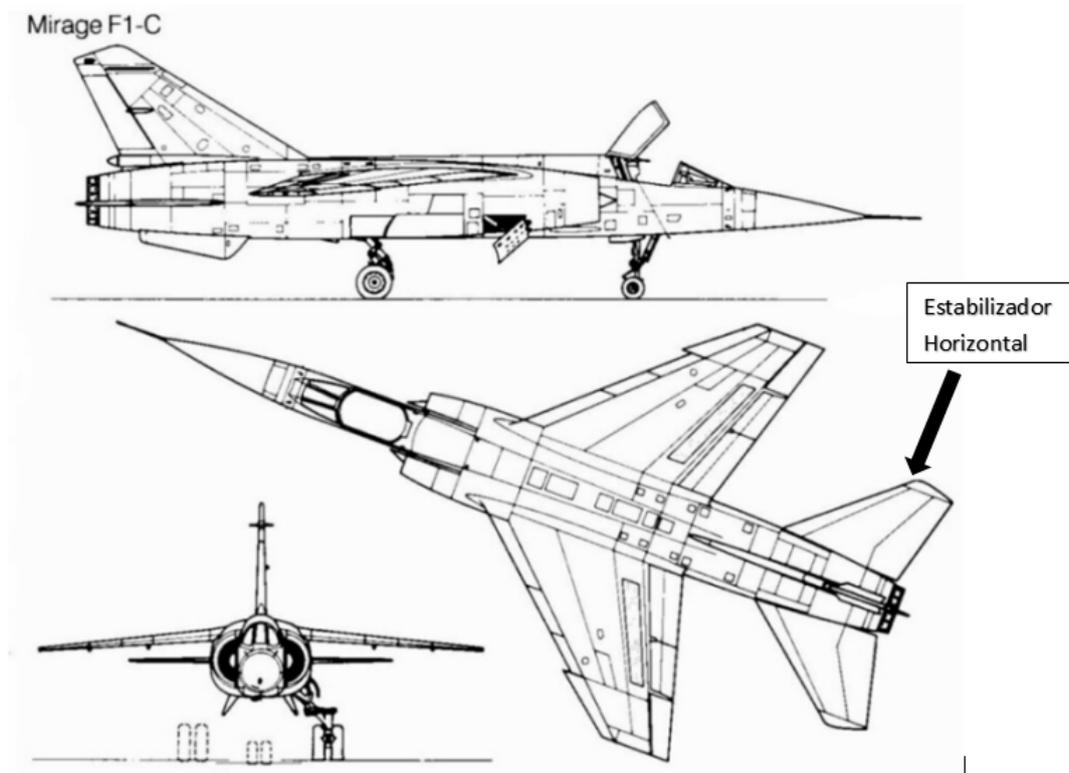


Figura 13.1: Vistas del Mirage F1

## 13.2. Discretización nodal

El estabilizador horizontal del Mirage F1 se ha descompuesto en veinticinco nodos distribuidos en forma de cuadrícula según se muestra en la figura (13.3). Para las mediciones se han empleado tres acelerómetros colocados en el borde marginal del estabilizador. Concretamente, en los nodos 21, 23 y 25.

Para una mayor comodidad a la hora de tomar las medidas, los acelerómetros se han colocado sobre el extradós del estabilizador. De tal forma que las excitaciones se han realizado con el martillo golpeando la parte del intradós del estabilizador. Para saber exactamente los puntos donde se tenía que golpear con ayuda de una tiza y un flexómetro se ha dibujado la malla sobre el propio estabilizador. En la figura (13.4) se muestra la malla dibujada sobre el estabilizador.

Cabe mencionar que para este análisis se han empleado, al igual que en los otros ensayos, unos acelerómetros uniaxiales. Este tipo de acelerómetros solo mide las aceleraciones en una de las direcciones del espacio y, en este caso,

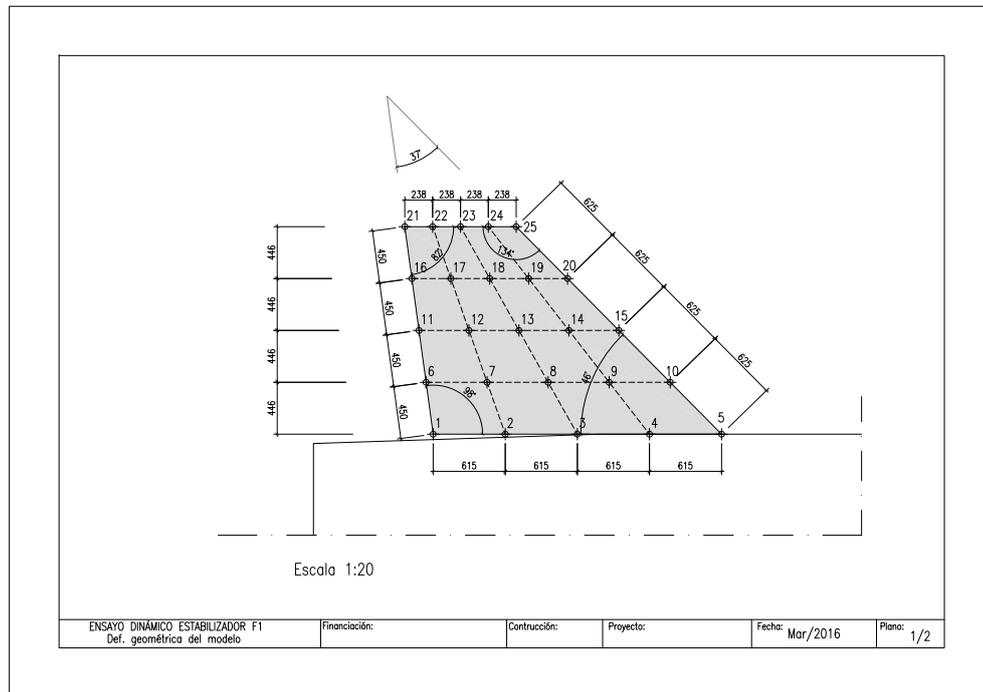


Figura 13.2: Plano del estabilizador Mirage F1, cotas en milímetros

se ha elegido medir las aceleraciones verticales que sufre el estabilizador. Para el estudio modal de la estructura se han colocado tres acelerómetros en los puntos 21, 23 y 25. Los apartados de Pre-Test de excitadores y *set-up* de acelerómetros se han realizado de la misma forma que se detalla en las secciones (11.3 y 11.4) del ensayo I.

### 13.3. Resultados

Llegados a este punto, todos los aparatos del sistema deberían estar ya montados y calibrados. En el momento del ensayo se ha tomado una foto que muestra la disposición del equipo antes de comenzar la toma de medidas, figura (13.5).

Una vez finalizado el ensayo, habiendo excitado todos los puntos del modelo discretizado, se obtienen las frecuencias naturales y modos de vibración del estabilizador horizontal del Mirage F1. En el cuadro (13.1) se muestran las características más importantes de los modos. El rango de frecuencias que se ha elegido para el estudio es  $[0, 800]$  Hz y se han encontrado ocho modos de vibración diferentes.

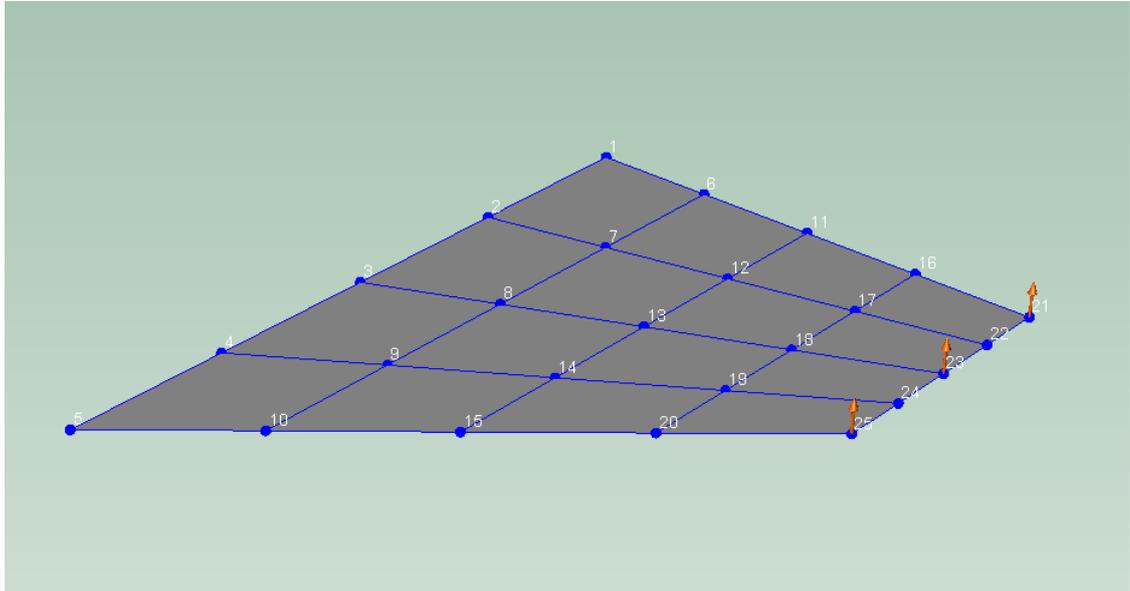


Figura 13.3: Discretización nodal del estabilizador

Modos	Frecuencia[Hz], $\omega$	Amortiguamiento[%], $\xi$	Complejidad
1	115.58	3.083	0.216
2	147.54	2.883	0.035
3	189.90	0.564	0.009
4	254.19	0.574	0.016
5	323.70	1.092	0.226
6	376.15	1.567	0.834
7	486.76	0.455	0.105
8	743.10	0.272	0.296

Cuadro 13.1: Características de los modos

Observando el cuadro (13.1) se puede apreciar que todos los modos tienen un porcentaje bajo de amortiguamiento. Sin embargo, llama la atención la elevada complejidad del modo 6 (0,834). Se recuerda que un modo complejo los puntos de la estructura pueden llegar a tener un desfase entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ . Una de las causas de la aparición de modos complejos es la proximidad entre dos modos de vibración normales que no son detectados apropiadamente. Esta puede ser una de las razones de la existencia de este modo. A continuación, se muestran en las figuras (13.6, 13.7, 13.8, 13.9, 13.10, 13.11, 13.12 y 13.13) los ocho modos detectados del estabilizador horizontal del Mirage F1.

Para este caso, debido a la forma de los modos de vibración, la matriz AutoMAC resulta fundamental a la hora de elegir los modos del estabili-

zador. A priori se han llegado a encontrar catorce modos diferentes. Para descartar los posibles modos parecidos se ha usado la matriz AutoMAC y se ha tomado como valor máximo aceptable 0,3 de ortogonalidad. De esta manera, se han descartado seis de los catorce modos iniciales. En la figura (13.14) se muestra la matriz AutoMAC en 3D de los ocho modos restantes.

Una vez analizada la matriz AutoMAC y comprobada la ortogonalidad de los modos de vibración, se comienza el análisis de las FRF obtenidas. Dado el número elevado de puntos del sistema, se ha simplificado el estudio del estabilizador a los puntos que componen el borde de fuga (1, 6, 11, 16 y 21), que la parte más excitada con diferencia de todo el estabilizador; y el borde marginal (21, 22, 23, 24 y 25), que empieza a tener relevancia a partir del quinto modo. En la figura(13.15) se representa la FRF obtenida en el borde de fuga tomando las medidas obtenidas del acelerómetro colocado en el punto 21. Para tener una mejor claridad se han señalado los *picos* de cada modo de vibración en la gráfica

Observando detenidamente la figura (13.15) se visualizan diferentes detalles. El primer modo de la estructura es el de menor amplitud con respecto los otros modos. Los modos tercero, cuarto, séptimo y octavo están claramente representados en la gráfica al tener al menos tres de los cinco puntos del borde de fuga la máxima deformación del modo, lo que provoca un *pico* bien definido. En cambio, el segundo, quinto y sexto modo pueden identificarse por la gran amplitud de un punto respecto los otros. Guiándose por la leyenda del gráfico y las capturas de los modos tomados es inmediato que los modos y las FRF se corresponde adecuadamente.

Por otro lado, también se ha estudiado la FRF obtenida de los puntos que conforman el borde marginal del estabilizador. Para el análisis modal se han tomado las señales que ha captado el acelerómetro ubicado en el punto 23 (justo en el centro del borde marginal). En la figura (13.16) se muestra la FRF mencionada.

Como se había comentado anteriormente, el borde marginal apenas se encuentra excitado en los cuatro primeros modos del estabilizador. Aunque al tener en cuenta el punto 21, que pertenece tanto al borde marginal como de fuga, es posible visualizar la posición de dichos modos. En el ámbito general, los modos que excitan al borde marginal son el quinto y octavo modo. Es fácil ver que guardan cierta similitud con los modos obtenidos en el borde de fuga. En un ensayo real, los modos que poseen mayor importancia son los modos de menor frecuencia ya que son los primeros en aparecer. Por tanto, la zona interesante de estudio y donde debería haberse colocado los acelerómetros es el borde de fuga. Para finalizar, llama la atención la casi nula perturbación que sufre el borde de ataque y el encastrado del estabilizador.

Al no poseer los planos, la deducción mas lógica es pensar en la existencia de una elevada rigidez en dichas zonas. En el encastre, al ser punto de unión del estabilizador al fuselaje, habrá un gran numero de refuerzos que eviten las vibraciones. En el borde de ataque, por otro lado, lo más seguro que es exista la presencia de un cajón de torsión que proteja la estructura y evita la máxima deformación posible de ella.



Figura 13.4: Malla dibujada en el estabilizador



Figura 13.5: Montaje del equipo en el estabilizador

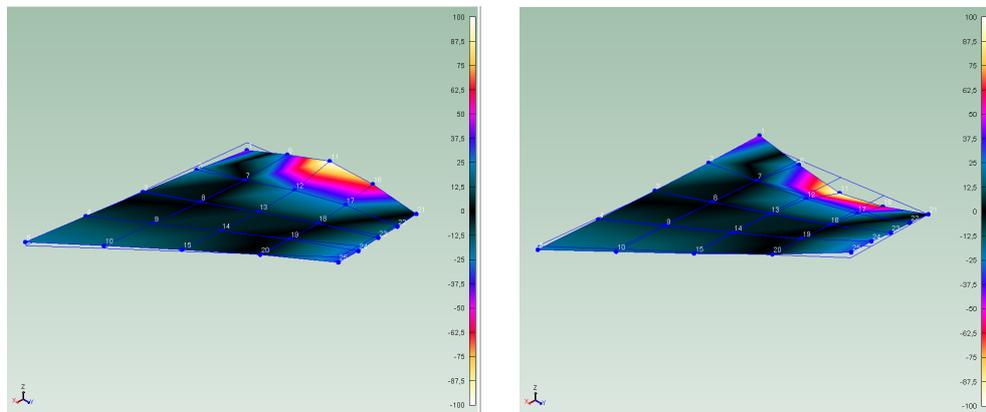


Figura 13.6: Primer Modo del Estabilizador

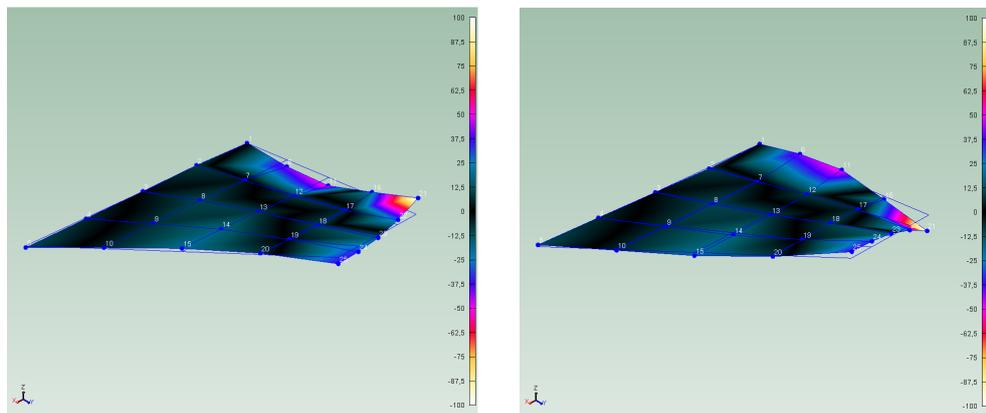


Figura 13.7: Segundo Modo del Estabilizador

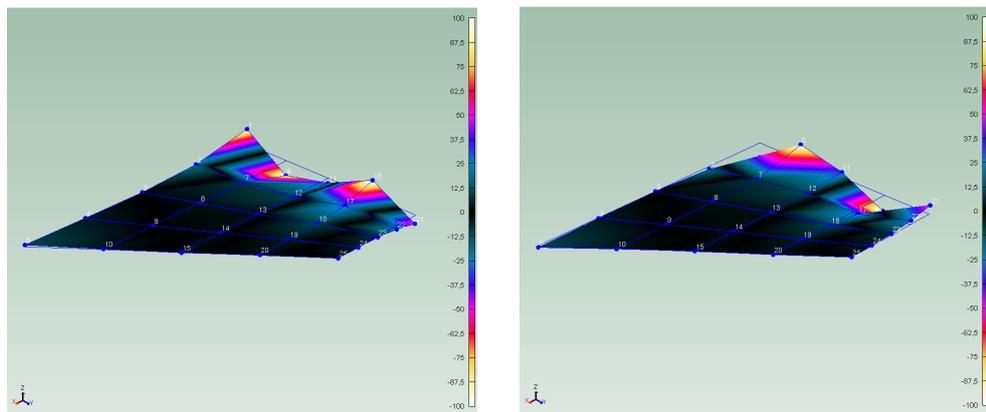


Figura 13.8: Tercer Modo del Estabilizador

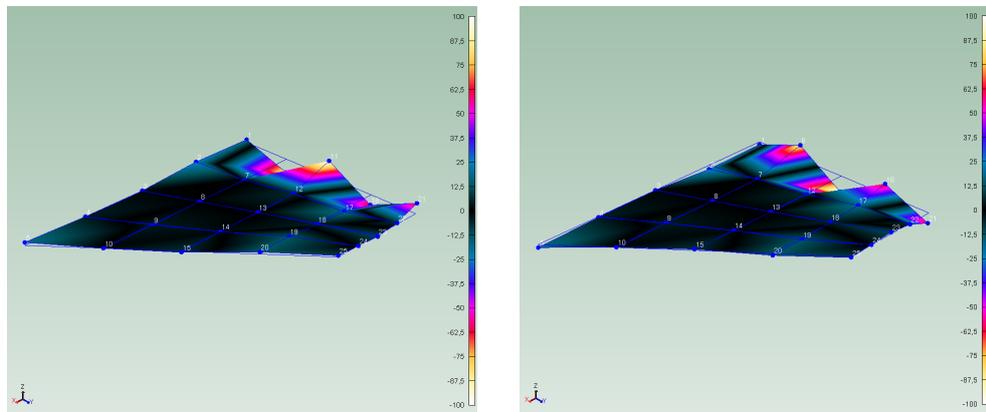


Figura 13.9: Cuarto Modo del Estabilizador

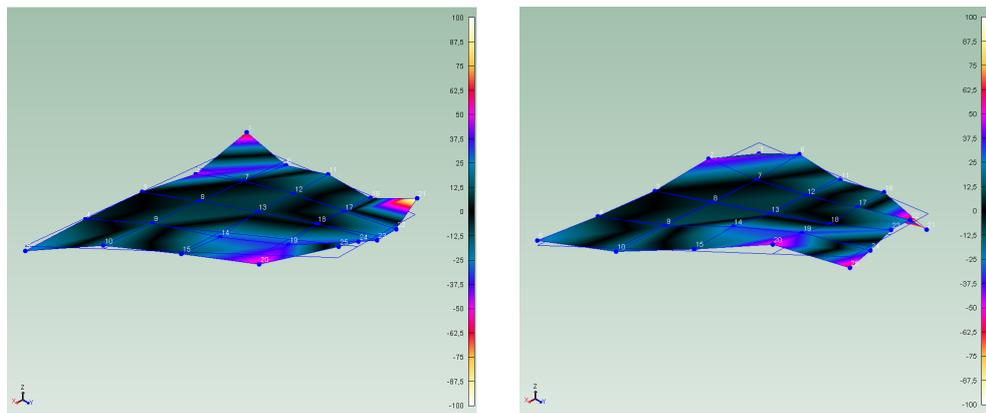


Figura 13.10: Quinto Modo del Estabilizador

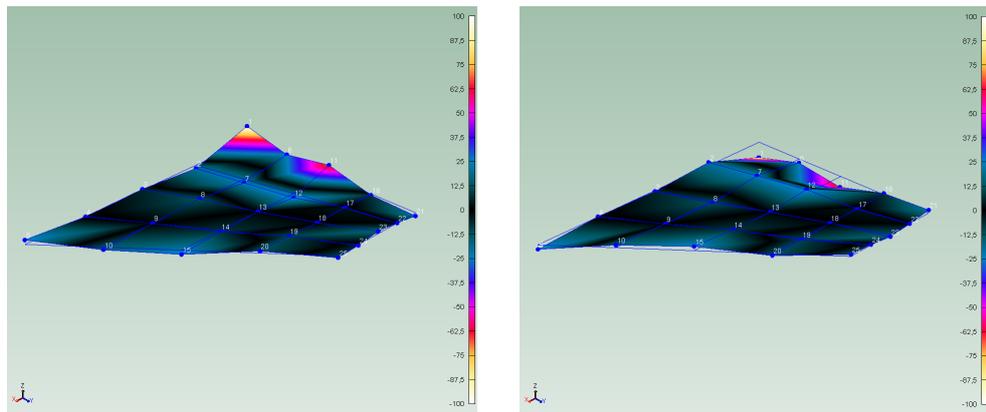


Figura 13.11: Sexto Modo del Estabilizador

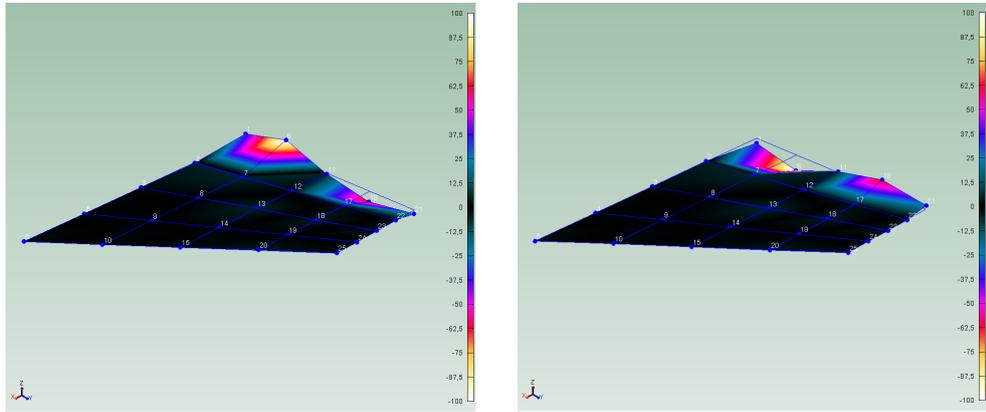


Figura 13.12: Séptimo Modo del Estabilizador

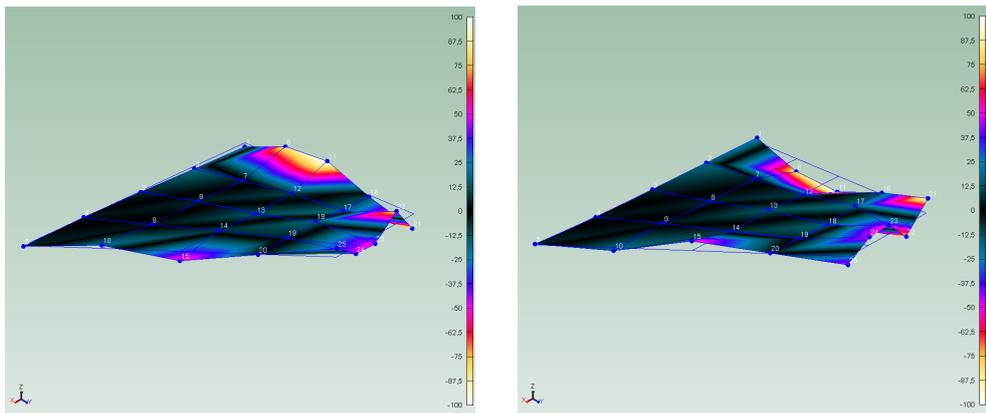


Figura 13.13: Octavo Modo del Estabilizador

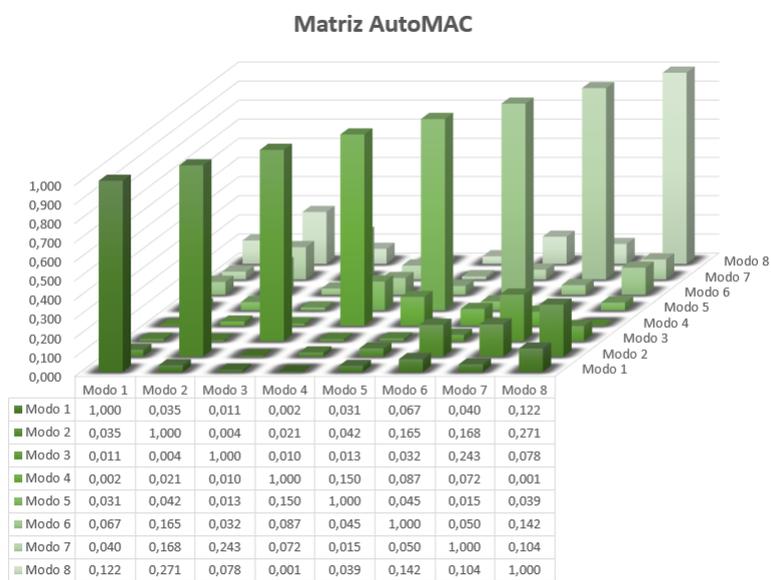


Figura 13.14: Matriz AutoMAC del Estabilizador Mirage F1

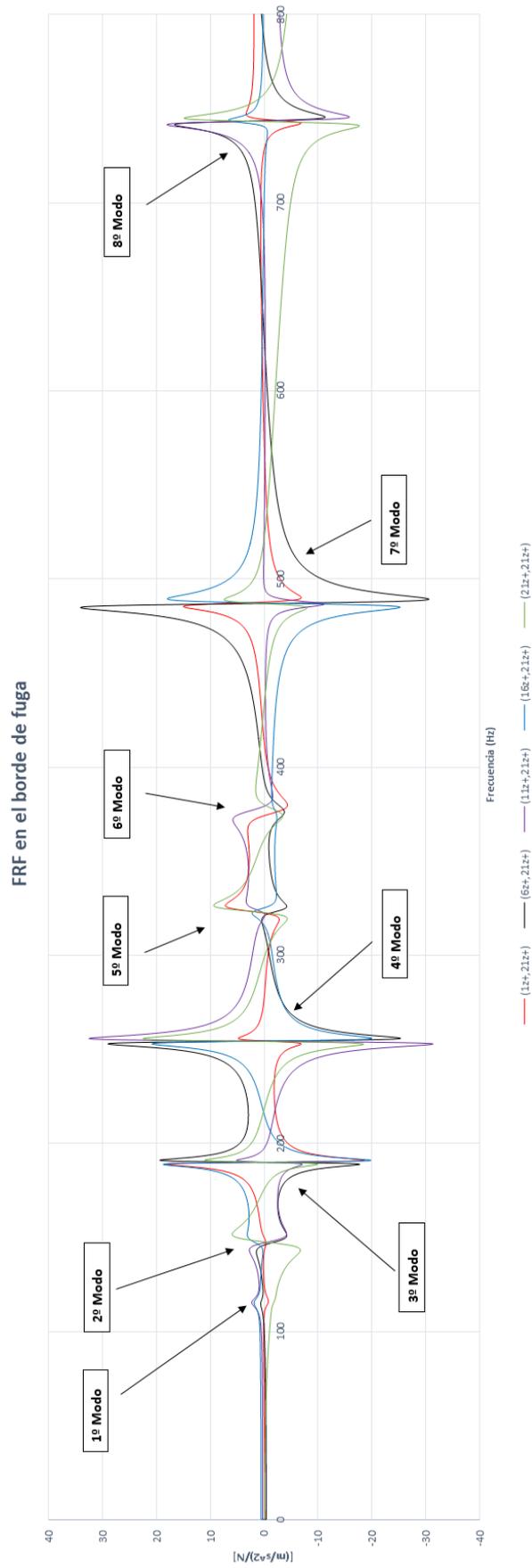


Figura 13.15: FRF en el borde de fuga del Estabilizador

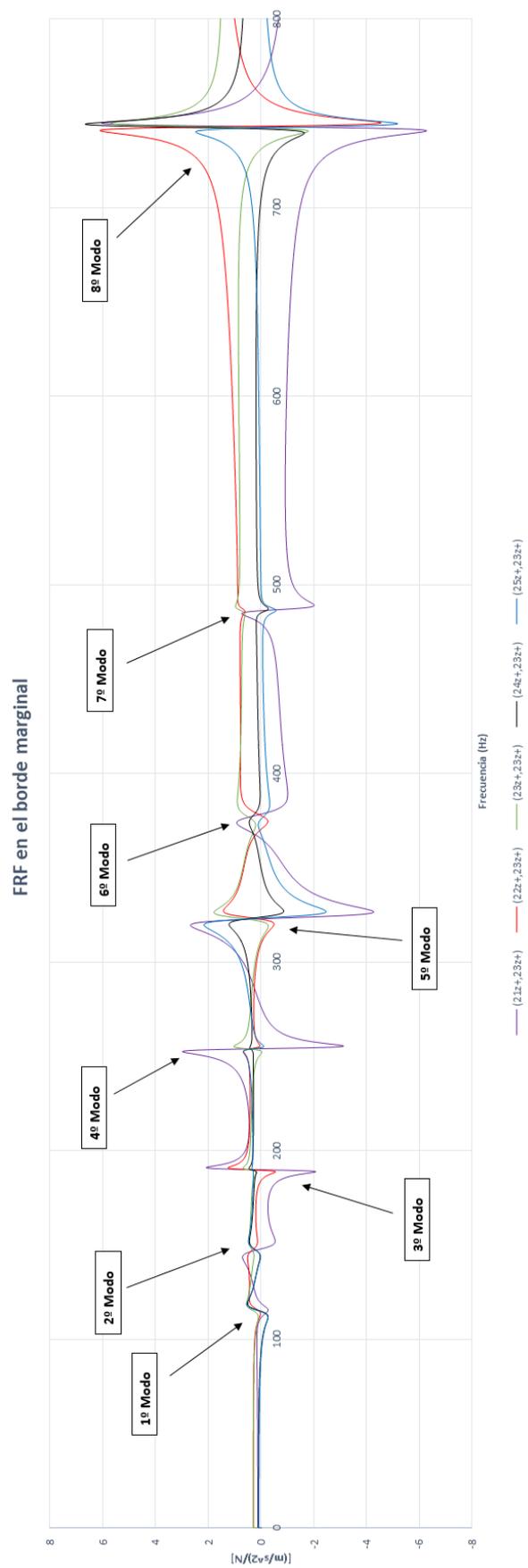


Figura 13.16: FRF en el borde marginal del Estabilizador

# 14

## Pliego de Condiciones

### 14.1. Introducción

El pliego de condiciones es un documento de una gran relevancia en la fase de ejecución de los ensayos modales llevados a cabo en el presente trabajo de fin de grado. Su contenido abarca la metodología a seguir en las experiencias modales con el fin de que los resultados obtenidos pueden considerarse válidos.

A causa de las características de este proyecto, se describirá brevemente una serie de apartados a tener en cuenta suficientes para validar los resultados. Sin embargo, en un ensayo de vibración en tierra de una aeronave se tendría que acatar toda la normativa (europea o americana) mencionada en el apartado (10.2).

### 14.2. Recomendaciones durante el ensayo

En la sala de experimentación es de vital importancia comprobar el correcto funcionamiento de la misma. De lo contrario, no se están eliminando ciertas incertidumbres (ruidos) que pueden llegar a falsear los resultados de la prueba. Sobretudo, cabe destacar el gran papel de aislante que tiene la sala de experimentación. A la hora de realizar un ensayo modal es muy importante la inexistencia de perturbaciones externas que influyan en las respuestas vibratorias del sistema.

Para tener una buena precisión en estos ensayos es fundamental tener los

equipos de medida correctamente calibrados. Por ello, antes de cada experiencia se realizan los pre-test ya mencionados. Además, siempre hay que estar vigilando que todos los acelerómetros estén fijados a la estructura, puede darse el caso que algunos de ellos se despeguen por las vibraciones inducidas.

En el ámbito de la seguridad, es muy importante preservar la integridad física de los operarios y ser capaces de anticipar posibles accidentes. En los ensayos llevados a cabo en el presente trabajo de fin de grado, el único ensayo que podría ocasionar lesiones es el ensayo III (GVT). Uno de los principales riesgos son la colocación de los acelerómetros en el extradós del estabilizador. Estos deben colocarse mediante la ayuda de una escalera y otro operario o bien el uso de un arnés de seguridad. Por otro lado, se debe tener precaución a la hora de moverse en los alrededores y debajo del caza Mirage F1. Hay un montón de salientes (antenas, tomas de tierra, compuertas, etc.) con las que se podría uno golpear y llegar a lesionarse incluso.

La repetitividad es un factor muy a tener en cuenta a la hora de realizar un ensayo. A la hora de interpretar los resultados se tiene que asegurar la repetición de los mismos bajo las mismas condiciones. Por tanto se debe tener un riguroso control de las condiciones en la sala de experimentación.

Atendiendo a la accesibilidad, se debe procurar colocar todos los elementos en lugares accesibles que faciliten una rápida actuación y sustitución de los mismos.

Dejando a un lado los aspectos relacionados con la mediciones e instalación de la sala, se debe tener en mente todas las tareas relativas al mantenimiento de la sala. Las operaciones de mantenimiento se procura que sean sencillas y eficaces. Un descuido en estas tareas conlleva un deterioro rápido de la sala y de la precisión de las mediciones.

# 15

## Presupuesto

### 15.1. Introducción

En el siguiente apartado se abordará un estudio simplificado acerca de los costes económicos tenidos durante la ejecución del presente proyecto. Por un lado se llevarán los gastos asociados a la mano de obra, que consiste en un director del proyecto (Mario Lázaro Navarro) y un graduado en ingeniería aeroespacial. De forma separada también se calculará los costes de amortización de los equipos electrónicos utilizados.

Sumnado estos *presupuestos parciales* y contabilizando el 21 % de incremento debido al Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA). El proyecto se ha realizado durante un periodo de 2 meses. Considerando 20 días laborales al mes con una jornada laboral de 7h; da lugar a un total de 280 horas de trabajo para finalizar el proyecto. Cabe mencionar que cada ensayo experimental propiamente se realiza en una sesión diaria; incluyendo el montaje, mediciones y desmontaje.

### 15.2. Consideraciones Presupuestos

A continuación se tendrá en cuenta cuáles son los costes por hora de trabajo de los trabajadores, con sus tareas y responsabilidades particulares en el proyecto. Además, también se detallarán los modelos y periodos de amortización que se han empleado para este Documento. No olvidar tampoco el coste de las licencias del software de análisis que se ha empleado durante todo el trabajo.

La mano de obra comprende el coste de los operarios que trabajan en el proyecto, 47 €/h para el director del proyecto y 21 €/h para el graduado en ingeniería aeroespacial. Tampoco se debe olvidar la amortización y los costes de los equipos electrónicos.

### 15.3. Presupuesto parcial en mano de obra

Se ha supuesto que el directo ha trabajado un total de 20h en el proyecto. A continuación se muestra en detalle el presupuesto parcial de la mano de obra.

Cantidad	Categoría	Coste (€/h)	Tiempo dedicado (horas)	Coste Total (€)
1	Director de Proyecto	47	20	940
1	Ingeniero	21	280	5880
Subtotal (€)				6820

Cuadro 15.1: Presupuesto parcial en mano de obra

### 15.4. Presupuesto parcial de adquisición y amortización de equipos electrónicos

Para este presupuesto se asumirá una amortización de los equipos electrónicos en un periodo de 3 años por la que se dividirá el precio total del conjunto electrónico. Dentro del conjunto de los equipos electrónicos empleados se ha incluido: 3 acelerómetros uniaxiales Bruel Kjaer, 1 martillo excitador Bruel Kjaer y un módulo de adquisición de datos Bruel Kjaer LAN XI. Todos los equipos traen su cableado propio y soportes de colocación en la estructura. Los precios de cada elemento se recojen en el cuadro (15.2).

Cantidad	Categoría	Coste unidad (€)	Coste Total (€)
3	Acelerómetros	900	2700
1	Martillo Excitador	900	900
1	Modulo LAN XI	1800	1800
Coste del conjunto (€)			5400
Años de amortización			3
Subtotal (€)			1800

Cuadro 15.2: Presupuesto parcial en equipos electrónicos

### 15.5. Presupuesto parcial en licencias de software

Para la ejecución del presente trabajo fin de grado han sido necesarios un software de análisis modal (*Pulse Reflex 20*) y otro software de procesamiento matemático (*Wolfram Mathematica 10*). A continuación en el cuadro (15.3).

Cantidad	Licencia	Coste/año (€)
1	Pulse Reflex 20	1490
1	Wolfram Mathematica 10	1270
Subtotal (€)		2760

Cuadro 15.3: Presupuesto parcial licencias de software

### 15.6. Presupuesto Total

Sumando todos los presupuestos parciales y añadiendo el Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA) se obtiene el presupuesto total del presente trabajo fin de grado. Todos los detalles están recojidos en el cuadro (15.4).

Presupuesto Parcial	Subtotal (€)
Mano de Obra	6820
Equipos Electrónicos	1800
Licencias	2760
Subtotal (€)	11380
IVA 21 % (€)	2389.8
<b>PRESUPUESTO TOTAL (€)</b>	<b>13769.80</b>

Cuadro 15.4: Presupuesto total del proyecto

El **coste total** del presente Trabajo Fin de Grado: *Análisis Modal Experimental e Introducción a los Ensayos de Vibración en Tierra* asciende a la cantidad de: **13,769.80 € (Trece mil setecientos sesenta y nueve euros con ochenta céntimos)**

## Bibliografía

- [1] Larry D Mitchell. A perspective view of modal analysis. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 3(2):45–48, 1988.
- [2] Charles C Kennedy. Use of vectors in vibration measurement and analysis. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 2012.
- [3] George Dovel. A dynamic tool for design and troubleshooting. *Mechanical Engineering*, page 83, 1989.
- [4] Ole Dossing. Going beyond modal analysis or imac in a new key. In *PROCEEDINGS-SPIE THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING*, pages XXIV–XXIV. SPIE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL, 1995.
- [5] David L Brown. Passing the torch-structural dynamics/modal analysis-from here to...-. *Sound and Vibration*, 34(1):6–7, 2000.
- [6] Randolph B Randall. *Frequency analysis*. Brül & Kjør, 1987.
- [7] James Hardy Wilkinson and James Hardy Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*, volume 87. Clarendon Press Oxford, 1965.
- [8] Nuno MM Maia. Fundamentals of singular value decomposition. In *Proceedings of the 9th IMAC Conference*, pages 1515–1521, 1991.
- [9] JA Brandon and CF Cremona. Singular value decomposition: Sufficient, but not necessary. In *IMAC*, volume 90, pages 1376–1380, 1990.
- [10] Ron Bracewell. The fourier transform and iis applications. *New York*, 5, 1965.
- [11] William Weaver Jr, Stephen P Timoshenko, and Donovan Harold Young. *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, 1990.
- [12] Singiresu S Rao and Fook Fah Yap. *Mechanical vibrations*, volume 4. Addison-Wesley New York, 1995.
- [13] Michael Peter Norton and Denis G Karczub. *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge university press, 2003.

- [14] Daniel J Inman and Ramesh Chandra Singh. *Engineering vibration*, volume 3. Prentice Hall Upper Saddle River, 2001.
- [15] Andrew D Dimarogonas. *Vibration for engineers*. Prentice Hall, 1996.
- [16] HG Natke and D Rotert. Determination of normal modes from identified complex modes. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, 9(2):82–88, 1985.
- [17] NMM Maia, JMM Silva, AMR Ribeiro, et al. A new concept in modal analysis: the characteristic response function (crf). *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 9(3):191–202, 1994.
- [18] Rayleigh Lord et al. *The theory of sound*, 1945.
- [19] M Imregun and DJ Ewins. Complex modes-origins and limits. In *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference*, volume 2460, page 496, 1995.
- [20] Anil K Chopra. Modal analysis of linear dynamic systems: physical interpretation. *Journal of structural engineering*, 122(5):517–527, 1996.
- [21] John E Brock. Optimal matrices describing linear systems. *AIAA Journal*, 6(7):1292–1296, 1968.
- [22] Gifford W Asher. A method of normal mode excitation utilizing admittance measurements. *Dynamics of Aeroelasticity, Proceedings, Institute of the Aeronautical Sciences*, pages 69–76, 1958.
- [23] Norm Olsen. Excitation functions for structural frequency response measurements. In *Proceedings of the Second International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida*, pages 894–902, 1984.
- [24] Robert C Lewis. A system for the excitation of pure natural modes of complex structure. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 2012.
- [25] JL Johnson. *Demystifying frequency response*. 2., 1996.
- [26] Gwilym M Jenkins and Donald G Watts. *Spectral analysis*. 1968.
- [27] Dave Corelli and David L Brown. Impact testing considerations. In *Pro-BROWN, DL ceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference*, volume 2, page 735, 1984.
- [28] TR Comstock. Improving exciter performance in modal testing. In *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, pages 1770–1775, 1999.

- [29] ND Cogger and RV Webb. Frequency response analysis. *Solartron Analytical, Hampshire, UK, Tech. Rep*, 10, 1997.
- [30] JT Broch, Mechanical Vibration, and Shok Measurements. Brüel & kjaer. *Technical Review*, 1999.
- [31] RJ Allemang, RW Rost, and DL Brown. Multiple input estimation of frequency response functions excitation considerations. In *American Society of Mechanical Engineers, Design and Production Engineering Technical Conference, Dearborn, MI*, 1983.
- [32] Y Rolain, R Pintelon, KQ Xu, and H Vold. Best conditioned parametric identification of transfer function models in the frequency domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11):1954–1960, 1995.
- [33] CY Shih, YG Tsuei, RJ Allemang, and DL Brown. A frequency domain global parameter estimation method for multiple reference frequency response measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2(4):349–365, 1988.
- [34] U Füllekrug. Survey of parameter estimation methods in experimental modal analysis. *Society of Environmental Engineers, Journal*, 27:31–36, 1988.
- [35] DJ Ewins and PT Gleeson. A method for modal identification of lightly damped structures. *Journal of Sound and Vibration*, 84(1):57–79, 1982.
- [36] D Ewins and J Sidhu. Modal testing and the linearity of structures. *Mecanique Materiaux Electricite*, (389-390):391, 1982.
- [37] RN Coppolino. A simultaneous frequency domain technique for estimation of modal parameters from measured data. Technical report, SAE Technical Paper, 1981.
- [38] DL Brown, RJ Allemang, Ray Zimmerman, and Mq Mergeay. Parameter estimation techniques for modal analysis. Technical report, SAE Technical paper, 1979.
- [39] Richard Evelyn Donohue Bishop and Graham Maurice Leslie Gladwell. An investigation into the theory of resonance testing. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 255(1055):241–280, 1963.
- [40] Jim Adcock and Ron Potter. A frequency domain curve fitting algorithm with improved accuracy. In *Proceedings 3rd International Modal Analysis Conference*, volume 1, pages 541–547, 1985.

- [41] J HOLLKAMP and SM Batill. Automated parameter identification and order reduction for discrete time series models. *AIAA journal*, 29(1):96–103, 1991.
- [42] B Budwantord and L Jezequel. Comparison of time domain modal identification methods. In *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, pages 540–546, 1990.
- [43] SR Ibrahim. Fundamentals of time domain modal identification. In *Modal Analysis and Testing*, pages 241–250. Springer, 1999.
- [44] Herman Van Der Auweraer and J Leuridan. Multiple input orthogonal polynomial parameter estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1(3):259–272, 1987.
- [45] Lester W Schmerr. A new complex exponential frequency domain technique for analysing dynamic response data. In *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC I), Orlando, FL*, 1982.
- [46] J Leuridan and H Vold. A time domain linear model estimation technique for multiple input modal analysis. *Modal testing and model refinement*, pages 51–62, 1983.
- [47] J-N Juang and Hideto Suzuki. An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 110(1):24–29, 1988.
- [48] W Gersch. On the achievable accuracy of structural system parameter estimates. *Journal of Sound and Vibration*, 34(1):63–79, 1974.
- [49] Filip Deblauwe, David L Brown, and Randall J Allemang. The polyreference time domain technique. In *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, pages 832–845, 1987.
- [50] Roy R Craig and Mark A Blair. A generalized multiple-input, multiple-output modal parameter estimation algorithm. *AIAA journal*, 23(6):931–937, 1985.
- [51] JS Bendat. Modern analysis procedures for multiple input/output problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(2):498–503, 1980.
- [52] Eric KL Yee and YG Tsuei. Method for shifting natural frequencies of damped mechanical systems. *AIAA journal*, 29(11):1973–1977, 1991.
- [53] JT Weissenburger. Effect of local modifications on the vibration characteristics of linear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):327–332, 1968.

- [54] Patrick Vanhonacker. Differential and difference sensitivities of natural frequencies and mode shapes of mechanical structures. *AIAA Journal*, 18(12):1511–1514, 1980.
- [55] GW Skingle and DJ Ewins. Sensitivity analysis using resonance and anti-resonance frequencies—a guide to structural modification. In *European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 1988.
- [56] HH Rosenbrock. Sensitivity of an eigenvalue to changes in the matrix. *Electronics Letters*, 1(10):278–279, 1965.
- [57] YM Ram and JJ Blech. The dynamic behavior of a vibratory system after modification. *Journal of sound and vibration*, 150(3):357–370, 1991.
- [58] RJ Pomazal and VW Snyder. Local modifications of damped linear systems. *AIAA Journal*, 9(11):2216–2221, 1971.
- [59] JO Hallquist. An efficient method for determining the effects of mass modifications in damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 44(3):449–459, 1976.
- [60] J He and YQ Li. Relocation of anti-resonances of a vibratory system by local structural changes. 1995.
- [61] RL Fox and MP Kapoor. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA journal*, 6(12):2426–2429, 1968.
- [62] I Bucher and S Braun. The structural modification inverse problem: an exact solution. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(3):217–238, 1993.
- [63] P García-Fogeda and A Sanz-Andres. Introducción a las vibraciones. *Garceta Grupo Editorial*, 2014.
- [64] Dennis Göge, Marc Böswald, Ulrich Füllekrug, and Pascal Lubrina. Ground vibration testing of large aircraft—state-of-the-art and future perspectives. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference, Orlando*, volume 1, page 1, 2007.
- [65] MAHDI Salehi and S Ziaei-Rad. Ground vibration test (gvt) and correlation analysis of an aircraft structure model. *Iranian Journal of Science and Technology*, 31(B1):65, 2007.
- [66] Charles R Pickrel, Gary C Foss, Allyn Phillips, Randall J Allemang, and David L Brown. New concepts in aircraft ground vibration testing. *Sound and Vibration*, 40(10):12, 2006.

- [67] Bart Peeters, Wim Hendricx, Jan Debille, and Hector Climent. Modern solutions for ground vibration testing of large aircraft. *Sound and vibration*, 43(1):8, 2009.
- [68] Wenso Lo, Cyrus Shih, and Glenn Hinote. Ground vibration test of a commercial aircraft. In *IMAC-XIX: A Conference on Structural Dynamics*, volume 1, pages 92–97. Citeseer, 2001.
- [69] Robert D Blevins and R Plunkett. Formulas for natural frequency and mode shape. *Journal of Applied Mechanics*, 47:461, 1980.