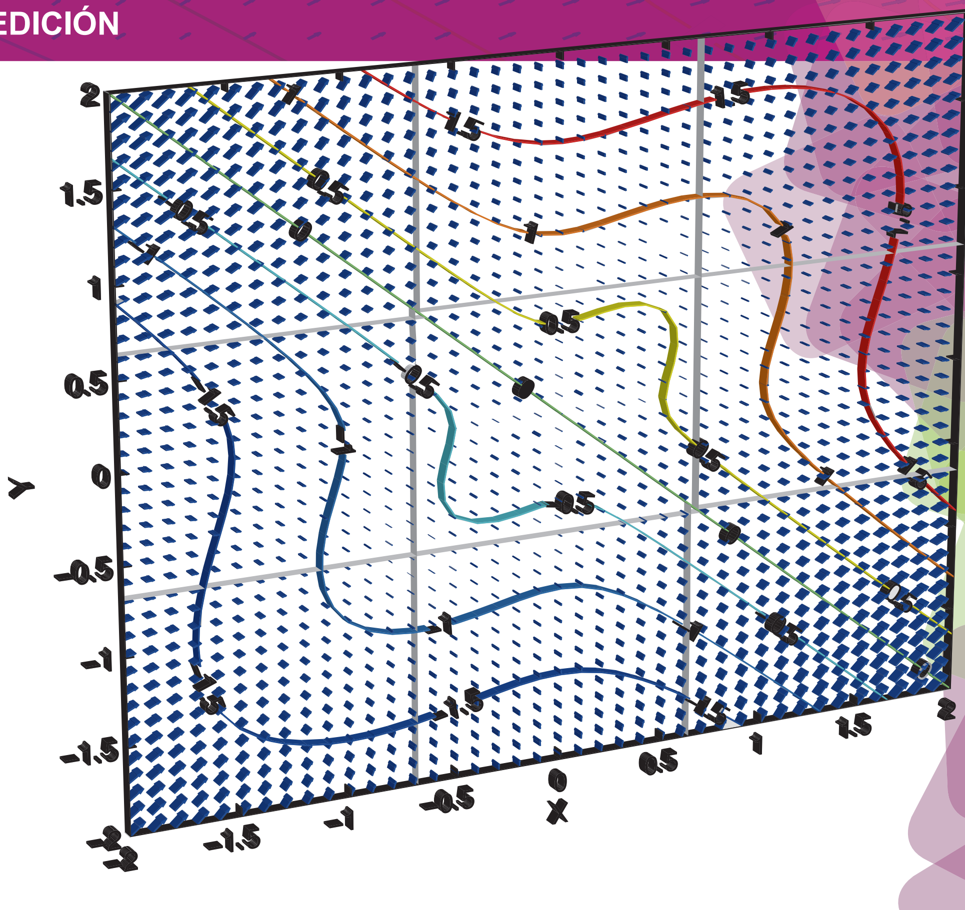
TEORÍA Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS I

Néstor Thome Coppo

2ª EDICIÓN



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

TEORIA Y PROBLEMAS
DE
MATEMÁTICAS I

Néstor Thome Coppo
Departamento de Matemática Aplicada

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:
THOME COPPO, N.(2012). Teoría y problemas de matemáticas I. Valencia: Editorial Universitat Politècnica, 2ª ed.

Primera edición 2011
Segunda edición 2012

Distribución: pedidos@editorial.upv.es
Tel. 96 387 70 12 Ref. editorial: 771

Imprime: By print Percom sl.

ISBN: 978-84-8363-928-3
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Prólogo

Este libro ha sido planteado para los alumnos que deban cursar la asignatura Matemáticas I para el Grado de Ingeniería en Telecomunicación. El objetivo es recoger y presentar de manera organizada todo el material que los alumnos necesitan para poder seguir la asignatura de forma autocontenida.

El libro contiene la teoría necesaria y una lista de problemas en cada uno de los temas de modo que el alumno pueda practicar al finalizar cada uno de los capítulos. Los ejercicios marcados con asterisco se consideran optativos. Puesto que la asignatura cuenta con 7'5 créditos ECTS, incluyendo 1'5 créditos de las prácticas de laboratorio, no hay tiempo suficiente para desarrollar los temas con profundidad por lo que se ha optado por no incluir las demostraciones de los resultados aunque sí se los ha intentado organizar de la manera que resulte lo más intuitiva posible.

Consta de cuatro bloques temáticos. En ellos se repasan ciertos conceptos introducidos en secundaria y se amplían algunos de ellos; luego se introducen y desarrollan otros que resultarán nuevos para los alumnos. Específicamente, los bloques temáticos que se desarrollan en este libro los siguientes:

- Números complejos.
- Funciones reales de una variable.
- Sucesiones y series numéricas.
- Funciones reales de dos variables.

En el bloque de funciones reales de una variable se desarrollan los temas de continuidad, derivación (con sus aplicaciones) e integración; mientras que en el bloque correspondiente a funciones reales de dos variables se trata la continuidad, la derivación parcial y direccional y la diferenciación.

Se han incluido una gran cantidad de figuras que el alumno podrá reproducir con el software MATLAB con los conocimientos que adquiera en las prácticas de laboratorio.

Para realizar cualquier comentario o sugerencia pueden escribir al correo electrónico `njthome@mat.upv.es`. Todos ellos serán bien recibidos.

El autor

Índice general

PARTE I

NÚMEROS COMPLEJOS

Capítulo 1

Números complejos

1.1 Conjuntos numéricos

A lo largo de todo el libro será necesario tratar con los diferentes conjuntos numéricos.

1.1.1 De los números naturales a los números reales

A continuación se indicará la notación utilizada para cada uno de los conjuntos numéricos.

- *Números naturales*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$.
  En $\mathbb{N}$ no tiene solución la ecuación
  $$n + x = m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad \text{si } m \leq n$$
  pues $x = m - n \notin \mathbb{N}$.
- *Números enteros negativos*: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$.
- *Números enteros*: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.
  En $\mathbb{Z}$ no tiene solución la ecuación
  $$nx = m, \quad n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ n \neq 1, \quad m \neq \dot{n}$$
  pues $x = \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$ ($m \neq \dot{n}$ se lee: m no es un múltiplo de n).
- *Números racionales*: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} :\ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$.
  En $\mathbb{Q}$ no tiene solución la ecuación $x^2 = 2$, ya que se puede probar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- *Números irracionales*: $\mathbb{I}$. Ejemplos: $\sqrt{2}$, e, $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- *Números reales*: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  En $\mathbb{R}$ no tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$ ya que $x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Por tanto, será necesario ampliar al conjunto de los números complejos.

1.2 Definición y propiedades de los números complejos

De teoría de conjuntos es conocido que el *producto cartesiano* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se define como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) de números reales, es decir:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.1 Definición de número complejo

Definición 1.1 *El conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ junto con las operaciones binarias definidas en $\mathbb{C}$ como sigue:*

- *Suma:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- *Multiplicación:* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

se llama sistema de los números complejos.

Escrito de manera compacta, el sistema de los números complejos consta de un conjunto y dos operaciones binarias, es decir:

$$(\{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$$

Algunas observaciones que se pueden realizar sobre los números complejos son las siguientes:

(a) Si se representa por $i = (0, 1)$ entonces

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

(b) Los números complejos de la forma $(a, 0)$ se identificarán con el número real a. Por tanto se llama *unidad imaginaria* a i satisfaciendo $i^2 = -1$.

(c) Todo número complejo de la forma $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se puede escribir como

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

A $a + bi$ se la llama la *forma binómica* de $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Se llama *parte real* de z a a y se denota por $\mathrm{Re}(z)$ y *parte imaginaria* de z a b y se denota por $\mathrm{Im}(z)$. Se debe observar que se llama parte imaginaria de z sólo a b (y no a bi).

La forma binómica junto a la propiedad de la unidad imaginaria permiten recordar fácilmente la regla de la multiplicación pues

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Definición 1.2 *Se dice que los números complejos en forma binómica $z = a + bi$ y $w = c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$.*

1.2.2 Propiedades de los números complejos

En el siguiente resultado se presentan alguna propiedades básicas de los números complejos.

Teorema 1.1 *El sistema de los números complejos satisface las siguientes propiedades:*

(a) $z + w = w + z, \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$

(b) $(z + v) + w = z + (v + w), \quad \forall\, z, v, w \in \mathbb{C}.$

(c) Existe $n \in \mathbb{C}$ tal que $z + n = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Además, $n = (0, 0)$ y se llama elemento neutro.

(d) Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = n = (0, 0)$. Se denota: $w = -z$ y se llama simétrico *u* opuesto *de z.*

(e) $zw = wz, \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$

(f) $(zv)w = z(vw), \quad \forall\, z, v, w \in \mathbb{C}.$

(g) Existe $u \in \mathbb{C}$ tal que $zu = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Además, $u = (1, 0)$ y se llama elemento unitario.

(h) Para todo $z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = u = (1, 0)$. Se denota por $w = z^{-1}$ y se llama inverso *de z.*

(i) $z(v + w) = zv + zw, \quad \forall\, z, v, w \in \mathbb{C}.$

Se puede comprobar (hacerlo como ejercicio) que a partir de la forma binómica de un número complejo no nulo $z = a + bi$ se puede obtener su inverso como

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \tag{1.1}$$

A partir del simétrico y del inverso de un número complejo se pueden definir la *resta* y la *división* de los números complejos z y w como sigue:

- *Resta*: $z - w = z + (-w)$.
- *División*: $\dfrac{z}{w} = z.w^{-1}$ siempre que $w \neq (0, 0)$.

1.3 Conjugado y módulo de un número complejo

1.3.1 Conjugado de un número complejo

Definición 1.3 *Se llama conjugado de un número complejo $z = a + bi$ al número complejo*

$$\overline{z} = a - bi$$

Se llama *imaginario puro* a todo número complejo z tal que $\mathrm{Re}(z) = 0$ que a veces se denota por $z \in i\mathbb{R}$.

Teorema 1.2 *Las propiedades del conjugado de un número complejo son:*

(a) $\overline{\overline{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$. *En consecuencia,* $\overline{-z} = -\overline{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

(d) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ *tales que* $w \neq (0, 0)$.

(e) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(f) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) i, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(g) $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(h) $\overline{z} = -z \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ *(es decir, z es imaginario puro).*

Geométricamente, como $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, las partes real e imaginaria de un número complejo son las *coordenadas cartesianas* del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado al número complejo. Los números complejos se representan en el *plano complejo* o también llamado *plano de Argand*. Al punto del plano que representa a un número complejo se lo llama *afijo* de dicho número. Se llama *eje real* al eje de las X y *eje imaginario* al eje de las Y.

Como ejercicio interpretar en el plano complejo las propiedades enumeradas en el teorema anterior (excepto (c) y (d)) considerando números complejos arbitrarios.

1.3.2 Módulo de un número complejo

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de los números complejos aparece de manera natural otro elemento que será su distancia al origen de coordenadas.

Definición 1.4 *Se llama módulo de un número complejo $z = a + bi$ al número real positivo o nulo*

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema 1.3 *Las propiedades del módulo de un número complejo son las siguientes:*

(a) $|\overline{z}| = |-z| = |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

(b) $z\overline{z} = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

(c) $|z| \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

(d) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$

(e) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

(f) $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

(g) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

(h) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \ z_2 \neq 0.$

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

(j) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

Con las nociones de conjugado y módulo de un número complejo se puede reescribir la definición de división de la siguiente manera.

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $v = a + bi \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$. De (1.1) se tiene que

$$v^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{\overline{v}}{|v|^2} = \frac{\overline{v}}{v \cdot \overline{v}}$$

entonces la división entre z y v se puede calcular como

$$\frac{z}{v} = z.v^{-1} = \frac{z \cdot \overline{v}}{v \cdot \overline{v}}$$

De aquí, que una regla para dividir un número complejo por otro (no nulo) puede ser la de multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

1.4 Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Siguiendo con la geometría de un número complejo, así como se ha definido su distancia al origen de coordenadas, también se puede definir el ángulo que forma dicho número con el eje real (positivo).

1.4.1 Argumento de un número complejo

Por el teorema de Pitágoras es fácil ver que $[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = |z|^2$. Ahora bien, si $z \neq 0$ se tiene que

$$\left[\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right]^2 = 1$$

Luego, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Definición 1.5 *Al ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$, único en las condiciones anteriores, se lo llama argumento (principal) de z y se lo denota por $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.*

El número complejo $z = 0 = 0 + 0i$ se representa por $|z| = 0$ (no está definido su argumento).

1.4.2 Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Si en la expresión binómica de un número complejo no nulo $z = a+bi$ se reemplazan a y b por sus valores en función del módulo y del argumento se obtiene

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|\mathrm{sen}(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$$

Definición 1.6 *La expresión* $z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ *se llama forma trigonométrica o polar de* z *y se la denota por* $z = |z|_\theta$.

1.5 Operaciones con números complejos en forma polar

Es posible realizar la *multiplicación* y la *división* de números complejos dados en forma polar.

Sean

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) = |z|_\theta$$

y

$$w = |w|(\cos(\varphi) + i\text{sen}(\varphi)) = |w|_\varphi$$

donde θ y φ representan sus argumentos (principales). Entonces:

- Multiplicación: $zw = (|z||w|)_{\theta+\varphi}$
- División: $\dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{|z|}{|w|}\right)_{\theta-\varphi}$ si $w \neq 0$

También es posible definir la *potenciación* de números complejos.

Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$\begin{aligned} z^1 &:= z \\ z^{n+1} &:= z^n z \end{aligned}$$

y se extiende a un exponente entero negativo como sigue:

$$\begin{aligned} z^0 &:= 1 \\ z^n &:= (z^{-1})^{-n}, \text{ si } z \neq 0, n \in \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

El siguiente resultado se conoce con el nombre de Fórmula de DeMoivre.

Teorema 1.4 *Si* $z \in \mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$ *entonces*

$$z^n = (|z|_\theta)^n = (|z|^n)_{n\theta}$$

Al realizar la multiplicación, división y potenciación de números complejos se han obtenido los argumentos $\theta + \varphi$, $\theta - \varphi$ y $n\theta$, respectivamente. Para que todos ellos correspondan a argumentos principales se deberán representar en el intervalo $[0, 2\pi[$.

Por otra parte, la *radicación* de números complejos presentará novedades respecto a la radicación estudiada de números reales.

Para seguir leyendo haga click aquí