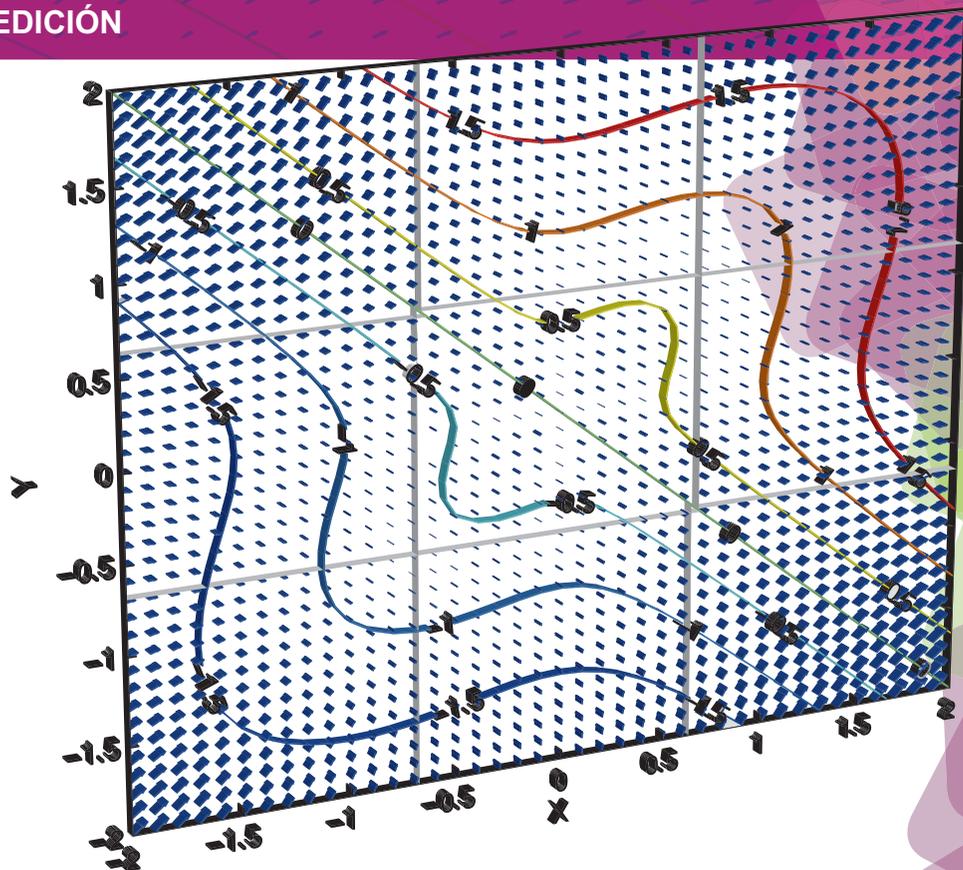


TEORÍA Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS I

Néstor Thome Coppo

2ª EDICIÓN



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

TEORIA Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS I

NÉSTOR THOME COPPO
Departamento de Matemática Aplicada

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:
THOME COPPO, N. (2012). Teoría y problemas de matemáticas I. Valencia:
Editorial Universitat Politècnica, 2ª ed.

Primera edición 2011
Segunda edición 2012

© Néstor Thome Coppo

© Editorial Universitat Politècnica de València
www.editorial.upv.es

Distribución: pedidos@editorial.upv.es
Tel. 96 387 70 12 Ref. editorial: 771

Imprime: By print Percom sl.

ISBN: 978-84-8363-928-3
Impreso bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización,
transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por
cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra
sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

Prólogo

Este libro ha sido planteado para los alumnos que deban cursar la asignatura Matemáticas I para el Grado de Ingeniería en Telecomunicación. El objetivo es recoger y presentar de manera organizada todo el material que los alumnos necesitan para poder seguir la asignatura de forma autocontenida.

El libro contiene la teoría necesaria y una lista de problemas en cada uno de los temas de modo que el alumno pueda practicar al finalizar cada uno de los capítulos. Los ejercicios marcados con asterisco se consideran optativos. Puesto que la asignatura cuenta con 7'5 créditos ECTS, incluyendo 1'5 créditos de las prácticas de laboratorio, no hay tiempo suficiente para desarrollar los temas con profundidad por lo que se ha optado por no incluir las demostraciones de los resultados aunque sí se los ha intentado organizar de la manera que resulte lo más intuitiva posible.

Consta de cuatro bloques temáticos. En ellos se repasan ciertos conceptos introducidos en secundaria y se amplían algunos de ellos; luego se introducen y desarrollan otros que resultarán nuevos para los alumnos. Específicamente, los bloques temáticos que se desarrollan en este libro los siguientes:

- Números complejos.
- Funciones reales de una variable.
- Sucesiones y series numéricas.
- Funciones reales de dos variables.

En el bloque de funciones reales de una variable se desarrollan los temas de continuidad, derivación (con sus aplicaciones) e integración; mientras que en el bloque correspondiente a funciones reales de dos variables se trata la continuidad, la derivación parcial y direccional y la diferenciación.

Se han incluido una gran cantidad de figuras que el alumno podrá reproducir con el software MATLAB con los conocimientos que adquiriera en las prácticas de laboratorio.

Para realizar cualquier comentario o sugerencia pueden escribir al correo electrónico njthome@mat.upv.es. Todos ellos serán bien recibidos.

Índice general

I	NÚMEROS COMPLEJOS	1
1	Números complejos	3
1.1	Conjuntos numéricos	3
1.1.1	De los números naturales a los números reales	3
1.2	Definición y propiedades de los números complejos	4
1.2.1	Definición de número complejo	4
1.2.2	Propiedades de los números complejos	5
1.3	Conjugado y módulo de un número complejo	6
1.3.1	Conjugado de un número complejo	6
1.3.2	Módulo de un número complejo	7
1.4	Forma trigonométrica o polar de un número complejo	8
1.4.1	Argumento de un número complejo	8
1.4.2	Forma trigonométrica o polar de un número complejo	8
1.5	Operaciones con números complejos en forma polar	9
1.6	Exponencial compleja	10
1.7	Ejercicios propuestos	13

II	FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE	19
2	Funciones	21
2.1	Funciones reales de una variable	21
2.1.1	Definición, igualdad y gráfica de funciones reales.	21
2.1.2	Funciones elementales	22
2.1.3	Álgebra de funciones.	23
2.1.4	Valor absoluto.	25
2.2	Ejercicios propuestos.	26
3	Límites	31
3.1	Límites de funciones de una variable	31
3.1.1	Definiciones	31
3.1.2	Límites infinitos.	32
3.1.3	Límites en el infinito.	32
3.1.4	Límites laterales	32
3.2	Propiedades de límites.	33
3.3	Ejercicios propuestos.	35
4	Continuidad	39
4.1	Continuidad de funciones de una variable	39
4.1.1	Definición y propiedades	39
4.1.2	Teorema de Bolzano-Weierstrass.	40
4.2	Teoremas de Bolzano y de los valores intermedios	40
4.3	Ejercicios propuestos.	42
5	Derivación	45
5.1	Derivación de funciones de una variable	45
5.1.1	Definición e interpretación geométrica	45
5.1.2	Relación entre derivabilidad y continuidad	46
5.1.3	Derivadas de funciones elementales	46
5.1.4	Operaciones con derivadas	47
5.1.5	Regla de la cadena, derivación logarítmica e implícita	47
5.2	Algunos resultados importantes.	48

5.3 Ejercicios propuestos	50
6 Aplicaciones de la derivación	57
6.1 Máximos y mínimos de una función	57
6.1.1 Extremos relativos	57
6.1.2 Teorema de Fermat	58
6.1.3 Clasificación de puntos críticos	58
6.2 Crecimiento y decrecimiento de funciones	59
6.2.1 Función creciente y decreciente	60
6.2.2 Relación entre derivación y monotonía	61
6.3 Concavidad e inflexión de funciones	62
6.3.1 Análisis de la concavidad y la inflexión	63
6.4 Asíntotas	64
6.5 Extremos absolutos	64
6.6 Ejercicios propuestos	66
7 Regla de L'Hôpital, diferenciales y polinomio de Taylor	71
7.1 Regla de L'Hôpital	71
7.2 Diferenciales	73
7.2.1 Relación entre la gráfica de una función y la de su recta tangente	73
7.2.2 Diferenciación y su relación con la derivación	73
7.3 Polinomio de Taylor	74
7.4 Ejercicios propuestos	76
8 Integración	81
8.1 Integral indefinida	81
8.1.1 Definición y problema de la unicidad	81
8.1.2 Integrales de funciones elementales	82
8.1.3 Propiedades y métodos de integración	83
8.2 Integral definida	87
8.2.1 Definición de integral definida	87
8.2.2 Interpretación geométrica	89
8.3 Integral impropia	90
8.3.1 Integrales impropias de primera especie	90
8.3.2 Integrales impropias de segunda especie	91

8.3.3	Integrales impropias mixtas.	92
8.4	Algunas aplicaciones de la integración	92
8.4.1	Valor medio de una función en un intervalo	92
8.4.2	Longitud de arco	93
8.4.3	Volumen de un sólido de revolución.	93
8.4.4	Área de una superficie de revolución	94
8.4.5	Centro de gravedad (centroide) de arcos	94
8.4.6	Momentos de inercia de arcos	94
8.4.7	Trabajo	95
8.4.8	Área y longitud de arco en coordenadas polares	95
8.5	Ejercicios propuestos	97
III	SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS	107
9	Sucesiones numéricas	109
9.1	Definición y convergencia	109
9.2	Propiedades del límite de una sucesión	111
9.3	Ejercicios propuestos	113
10	Series numéricas	115
10.1	Concepto de serie numérica	115
10.2	Propiedades de las series convergentes	117
10.3	Condición necesaria de convergencia de una serie	117
10.4	Criterios de convergencia para series de términos no negativos	117
10.5	Ejercicios propuestos	120
IV	FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES	127
11	Topología del plano y funciones	129
11.1	Topología de \mathbb{R}^2	129
11.1.1	Definiciones.	129

11.2	Funciones reales de dos variables	131
11.2.1	Concepto de función real de dos variables	131
11.2.2	Gráfica de una función de dos variables reales.	132
11.2.3	Superficies cilíndricas.	135
11.2.4	Álgebra de funciones	137
11.3	Coordenadas cilíndricas y esféricas.	137
11.4	Ejercicios propuestos	139
12	Límite y continuidad	143
12.1	Límite de funciones de dos variables.	143
12.1.1	Definición de límite	143
12.1.2	Definición de límite direccional (restringido a S)	144
12.1.3	Cálculo de límites usando coordenadas polares	147
12.1.4	Propiedades de límites	149
12.1.5	Límites reiterados o sucesivos.	150
12.2	Continuidad de funciones de dos variables.	150
12.2.1	Definición de continuidad de funciones	150
12.2.2	Propiedades de la continuidad	150
12.3	Ejercicios propuestos	152
13	Derivación parcial y direccional	155
13.1	Derivación parcial	155
13.1.1	Definición de derivadas parciales.	155
13.1.2	Interpretación geométrica de las derivadas parciales	156
13.1.3	Relación entre derivación parcial y continuidad.	157
13.2	Derivación direccional	158
13.2.1	Definiciones de derivada direccional	158
13.2.2	Interpretación geométrica	160
13.2.3	Relación entre derivación direccional, continuidad y derivación parcial. . .	161
13.3	Una introducción a curvas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	162
13.3.1	Curvas planas y espaciales.	162
13.3.2	Regularidad de una curva	162
13.4	Ejercicios propuestos	164

14	Diferenciación	167
14.1	Diferenciación de funciones de dos variables.	167
14.1.1	Definición e interpretación geométrica	168
14.1.2	Relación entre diferenciabilidad, continuidad y derivación direccional . . .	169
14.1.3	Propiedades de la diferenciabilidad	172
14.2	Funciones reales de tres variables.	174
14.3	Funciones vectoriales	176
14.3.1	Continuidad y diferenciabilidad de funciones vectoriales	176
14.3.2	Matriz jacobiana	177
14.3.3	Regla de la cadena	178
14.4	Ejercicios propuestos	180
15	Polinomio de Taylor	187
15.1	Definición de derivadas parciales sucesivas.	187
15.1.1	Igualdad de las derivadas parciales cruzadas.	188
15.2	Polinomio de Taylor para funciones reales de dos variables.	189
15.3	Ejercicios propuestos	193
16	Extremos libres	195
16.1	Extremos relativos de una función real de dos variables	195
16.1.1	Máximos y mínimos relativos	195
16.1.2	Condición necesaria de existencia de extremos relativos.	196
16.1.3	Extremos relativos y puntos de silla	200
16.1.4	Clasificación de los puntos estacionarios	202
16.1.5	Extremos absolutos en conjuntos cerrados y acotados	207
16.2	Ejercicios propuestos	213
17	Extremos condicionados	215
17.1	Multiplicadores de Lagrange	217
17.1.1	Una función de 2 variables con 1 restricción	218
17.1.2	Una función de 3 variables con 1 restricción	218
17.1.3	Una función de 3 variables con 2 restricciones.	219
17.2	Ejercicios propuestos	220
A	Soluciones a los ejercicios propuestos	221

PARTE I

NÚMEROS COMPLEJOS

Capítulo 1

Números complejos

1.1 Conjuntos numéricos

A lo largo de todo el libro será necesario tratar con los diferentes conjuntos numéricos.

1.1.1 De los números naturales a los números reales

A continuación se indicará la notación utilizada para cada uno de los conjuntos numéricos.

- *Números naturales*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$.

En \mathbb{N} no tiene solución la ecuación

$$n + x = m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad \text{si } m \leq n$$

pues $x = m - n \notin \mathbb{N}$.

- *Números enteros negativos*: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$.
- *Números enteros*: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

En \mathbb{Z} no tiene solución la ecuación

$$nx = m, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1, \quad m \neq n$$

pues $x = \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$ ($m \neq n$ se lee: m no es un múltiplo de n).

- *Números racionales*: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

En \mathbb{Q} no tiene solución la ecuación $x^2 = 2$, ya que se puede probar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- Números irracionales: I. Ejemplos: $\sqrt{2}$, e , $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- Números reales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

En \mathbb{R} no tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$ ya que $x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Por tanto, será necesario ampliar al conjunto de los números complejos.

1.2 Definición y propiedades de los números complejos

De teoría de conjuntos es conocido que el *producto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) de números reales, es decir:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.1 Definición de número complejo

Definición 1.1 *El conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ junto con las operaciones binarias definidas en \mathbb{C} como sigue:*

- *Suma:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- *Multipliación:* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

se llama sistema de los números complejos.

Escrito de manera compacta, el sistema de los números complejos consta de un conjunto y dos operaciones binarias, es decir:

$$(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$$

Algunas observaciones que se pueden realizar sobre los números complejos son las siguientes:

(a) Si se representa por $i = (0, 1)$ entonces

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

(b) Los números complejos de la forma $(a, 0)$ se identificarán con el número real a . Por tanto se llama *unidad imaginaria* a i satisfaciendo $i^2 = -1$.

(c) Todo número complejo de la forma $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se puede escribir como

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

A $a + bi$ se la llama la *forma binómica* de $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Se llama *parte real* de z a a y se denota por $\operatorname{Re}(z)$ y *parte imaginaria* de z a b y se denota por $\operatorname{Im}(z)$. Se debe observar que se llama parte imaginaria de z sólo a b (y no a bi).

La forma binómica junto a la propiedad de la unidad imaginaria permiten recordar fácilmente la regla de la multiplicación pues

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Definición 1.2 *Se dice que los números complejos en forma binómica $z = a + bi$ y $w = c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$.*

1.2.2 Propiedades de los números complejos

En el siguiente resultado se presentan alguna propiedades básicas de los números complejos.

Teorema 1.1 *El sistema de los números complejos satisface las siguientes propiedades:*

- (a) $z + w = w + z, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
- (b) $(z + v) + w = z + (v + w), \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$.
- (c) *Existe $n \in \mathbb{C}$ tal que $z + n = z, \forall z \in \mathbb{C}$. Además, $n = (0, 0)$ y se llama elemento neutro.*
- (d) *Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = n = (0, 0)$. Se denota: $w = -z$ y se llama simétrico u opuesto de z .*
- (e) $zw = wz, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
- (f) $(zv)w = z(vw), \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$.
- (g) *Existe $u \in \mathbb{C}$ tal que $zu = z, \forall z \in \mathbb{C}$. Además, $u = (1, 0)$ y se llama elemento unitario.*
- (h) *Para todo $z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = u = (1, 0)$. Se denota por $w = z^{-1}$ y se llama inverso de z .*
- (i) $z(v + w) = zv + zw, \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$.

Se puede comprobar (hacerlo como ejercicio) que a partir de la forma binómica de un número complejo no nulo $z = a + bi$ se puede obtener su inverso como

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \quad (1.1)$$

A partir del simétrico y del inverso de un número complejo se pueden definir la resta y la división de los números complejos z y w como sigue:

- Restar: $z - w = z + (-w)$.
- División: $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ siempre que $w \neq (0, 0)$.

1.3 Conjugado y módulo de un número complejo

1.3.1 Conjugado de un número complejo

Definición 1.3 Se llama conjugado de un número complejo $z = a + bi$ al número complejo

$$\bar{z} = a - bi$$

Se llama *imaginario puro* a todo número complejo z tal que $\text{Re}(z) = 0$ que a veces se denota por $z \in i\mathbb{R}$.

Teorema 1.2 Las propiedades del conjugado de un número complejo son:

- (a) $\overline{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- (b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $\overline{-z} = -\bar{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- (c) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
- (d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \text{ tales que } w \neq (0, 0)$.
- (e) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- (f) $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)i, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- (g) $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.
- (h) $\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$ (es decir, z es imaginario puro).

Geoméricamente, como $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, las partes real e imaginaria de un número complejo son las *coordenadas cartesianas* del vector de \mathbb{R}^2 asociado al número complejo. Los números complejos se representan en el *plano complejo* o también llamado *plano de Argand*. Al punto del plano que representa a un número complejo se lo llama *afijo* de dicho número. Se llama *eje real* al eje de las X y *eje imaginario* al eje de las Y .

Como ejercicio interpretar en el plano complejo las propiedades enumeradas en el teorema anterior (excepto (c) y (d)) considerando números complejos arbitrarios.

1.3.2 Módulo de un número complejo

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de los números complejos aparece de manera natural otro elemento que será su distancia al origen de coordenadas.

Definición 1.4 Se llama *módulo de un número complejo* $z = a + bi$ al número real positivo o nulo

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema 1.3 Las propiedades del módulo de un número complejo son las siguientes:

- (a) $|\bar{z}| = |-z| = |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
- (b) $z\bar{z} = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
- (c) $|z| \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
- (d) $|z| = 0 \iff z = 0.$
- (e) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
- (f) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
- (g) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$
- (h) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0.$
- (i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$
- (j) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

Con las nociones de conjugado y módulo de un número complejo se puede reescribir la definición de división de la siguiente manera.

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $v = a + bi \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$. De (1.1) se tiene que

$$v^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{\bar{v}}{|v|^2} = \frac{\bar{v}}{v \cdot \bar{v}}$$

entonces la división entre z y v se puede calcular como

$$\frac{z}{v} = z \cdot v^{-1} = \frac{z \cdot \bar{v}}{v \cdot \bar{v}}$$

De aquí, que una regla para dividir un número complejo por otro (no nulo) puede ser la de multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

1.4 Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Siguiendo con la geometría de un número complejo, así como se ha definido su distancia al origen de coordenadas, también se puede definir el ángulo que forma dicho número con el eje real (positivo).

1.4.1 Argumento de un número complejo

Por el teorema de Pitágoras es fácil ver que $[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 = |z|^2$. Ahora bien, si $z \neq 0$ se tiene que

$$\left[\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \right]^2 + \left[\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \right]^2 = 1$$

Luego, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

Definición 1.5 Al ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$, único en las condiciones anteriores, se lo llama argumento (principal) de z y se lo denota por $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

El número complejo $z = 0 = 0 + 0i$ se representa por $|z| = 0$ (no está definido su argumento).

1.4.2 Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Si en la expresión binómica de un número complejo no nulo $z = a + bi$ se reemplazan a y b por sus valores en función del módulo y del argumento se obtiene

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|\operatorname{sen}(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$$

Definición 1.6 La expresión $z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ se llama forma trigonométrica o polar de z y se la denota por $z = |z|_\theta$.

1.5 Operaciones con números complejos en forma polar

Es posible realizar la *multiplicación* y la *división* de números complejos dados en forma polar.

Sean

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) = |z|_\theta$$

y

$$w = |w|(\cos(\varphi) + i\text{sen}(\varphi)) = |w|_\varphi$$

donde θ y φ representan sus argumentos (principales). Entonces:

- Multiplicación: $zw = (|z||w|)_{\theta+\varphi}$
- División: $\frac{z}{w} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)_{\theta-\varphi}$ si $w \neq 0$

También es posible definir la *potenciación* de números complejos.

Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$\begin{aligned} z^1 &:= z \\ z^{n+1} &:= z^n z \end{aligned}$$

y se extiende a un exponente entero negativo como sigue:

$$\begin{aligned} z^0 &:= 1 \\ z^n &:= (z^{-1})^{-n}, \text{ si } z \neq 0, n \in \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

El siguiente resultado se conoce con el nombre de Fórmula de DeMoivre.

Teorema 1.4 Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$z^n = (|z|_\theta)^n = (|z|^n)_{n\theta}$$

Al realizar la multiplicación, división y potenciación de números complejos se han obtenido los argumentos $\theta + \varphi$, $\theta - \varphi$ y $n\theta$, respectivamente. Para que todos ellos correspondan a argumentos principales se deberán representar en el intervalo $[0, 2\pi[$.

Por otra parte, la *radicación* de números complejos presentará novedades respecto a la radicación estudiada de números reales.

Para seguir leyendo haga click aquí