acadèmica

Matemáticas II para ingenieros

Carmen Coll Aliaga
Damián Ginestar Peiró
Elena Sánchez Juan

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Carmen Coll Aliaga
Damián Ginestar Peiró
Elena Sánchez Juan

MATEMÁTICAS II PARA INGENIEROS

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.

Primera edición, 2012

Distribución: pedidos@editorial.upv.es
Tel. 96 387 70 12

Imprime: By print percom sl.

ISBN: 978-84-8363-902-3
Impreso bajo demanda
Ref. editorial: 864

Impreso en España

Índice

Capítulo 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

Capítulo 4. Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Capítulo 5. Métodos numéricos

Capítulo 6. Transformada de Laplace

Capítulo 7. Representación de números y lógica

Capítulo 8. Series trigonométricas y series de Fourier

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1 Introducción

Con frecuencia el estudio de un proceso físico, químico o técnico nos conduce a relacionar las variables que en él intervienen con las razones de cambio que se producen entre ellas. El modelo matemático que representa estas relaciones está formado por ecuaciones donde aparecen las variables y las derivadas de algunas de ellas respecto a las otras. A este tipo de ecuaciones se les denomina *ecuaciones diferenciales.*

Veamos algunos ejemplos prácticos donde aparecen ecuaciones diferenciales, el primero corresponde a una reacción química, el segundo a un circuito eléctrico y el tercero a una partícula en movimiento. Cada uno de estos ejemplos son sistemas dinámicos, es decir aquellos que cambian o evolucionan con el tiempo.

Ejemplo 1.1 *Dada una reacción química del tipo $A + B \longrightarrow C$, es decir, una mol de A y una mol de B que reaccionan proporcionando una de C. Según la Ley de acción de masas, se sabe que,* "la velocidad de la reacción, la sustancia obtenida en ella por unidad de tiempo, es directamente proporcional a las concentraciones de las sustancias reaccionantes".

Si A y B tienen concentraciones iniciales $[A]_0 = m_a$ y $[B]_0 = m_b$, donde m_a y m_b se miden en moles por litro, el aumento de la concentración de la sustancia C,

$c(t)$, por unidad de tiempo, viene dado por la ecuación:

$$\frac{dc(t)}{dt} = Ka(t)b(t)$$

donde, $a(t) = m_a - c(t)$, $b(t) = m_b - c(t)$, son las concentraciones de las sustancias A y B, respectivamente, en el instante t. Entonces, se obtiene la ecuación,

$$\frac{dc}{dt} = K(m_a - c)(m_b - c)$$

que es una ecuación del tipo,

$$F\left(t, c, \frac{dc}{dt}\right) = 0$$

que denominaremos ecuación diferencial de primer orden, con variable independiente t, y variable dependiente, $c(t)$.

Ejemplo 1.2 *La intensidad de corriente, $I(t)$, de un circuito puede determinarse utilizando la segunda Ley de Kirchhoff:* "El voltaje en un punto de un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito".

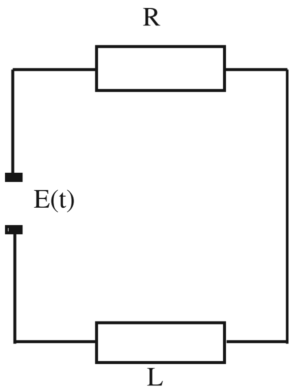

Figura 1.1: Circuito RL.

Para el circuito RL de la Figura 1.1, tendremos que la fuerza electromotriz, $E(t)$, es igual a la suma de la caída de voltaje, E_R, a través de la resistencia, y de la caída de voltaje, E_L, a través de la autoinducción,

$$E(t) = E_R + E_L \tag{1.1}$$

Por la Ley de Ohm, E_R es proporcional a la intensidad de corriente en cada instante t, $E_R(t) = RI(t)$, donde R es el valor de la resistencia; y además E_L

es proporcional a la rapidez de cambio respecto al tiempo de la intensidad $I(t)$, $E_L = L\dfrac{dI}{dt}$. *La ecuación (1.1) quedará*

$$E(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt}$$

Hemos obtenido una ecuación que nos da una relación entre la variable independiente, t*-tiempo, la variable dependiente,* $I(t)$*-intensidad de corriente, y su derivada* $\dfrac{dI}{dt}$*. Es una ecuación del tipo*

$$F\left(t, I, \frac{dI}{dt}\right) = 0$$

que también es una ecuación diferencial de primer orden.

Ejemplo 1.3 *Consideramos un cuerpo que cae debido a la acción de la gravedad, empezando en el instante* $t = 0$ *con una velocidad inicial nula. Si, sobre el cuerpo, actúa una fuerza de rozamiento del aire,* F_R*, por la segunda Ley de Newton, podemos formalizar este problema como*

$$my''(t) = P - F_R$$

donde $P = mg$ *es el peso del cuerpo e* $y(t)$ *es el espacio recorrido en el instante* t*.*

En el caso particular en que F_R *es proporcional a la velocidad del cuerpo en cada instante,* $F_R = \alpha y'(t)$*, obtenemos la ecuación*

$$my'' = mg - \alpha y'$$

que es una ecuación diferencial del tipo

$$F(t, y, y', y'') = 0$$

que denominaremos ecuación diferencial de segundo orden, ya que establece una relación entre la variable independiente, t*-tiempo, la variable dependiente,* $y(t)$*-espacio recorrido, y sus derivadas hasta segundo orden.*

2 Nociones generales

2.1 Definiciones básicas.

Definición 1.1 *Se llama* **ecuación diferencial ordinaria** *a toda relación de la forma*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.2}$$

donde x es una variable independiente, y es función de x, y $\dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n y}{dx^n}$, son las derivadas de y respecto a x hasta orden n.

Se llama **orden** *de la ecuación diferencial al mayor orden de las derivadas que aparecen en la ecuación.*

Definición 1.2 *Si una ecuación diferencial de orden n se expresa en la forma*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

se dice que está en forma **normal**.

En el caso en que aparecen en la ecuación dos o más variables independientes se tiene la siguiente definición.

Definición 1.3 *Se llama* **ecuación diferencial en derivadas parciales** *a toda relación donde aparecen más de una variable independiente, una variable dependiente y las derivadas parciales de ésta respecto a las variables independientes. En el caso de dos variables independientes, x e y, y una variable dependiente z, la relación es de la forma*

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

donde $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}$, son las derivadas parciales de z respecto a x e y.

Definición 1.4 *Se llama* **sistema de ecuaciones diferenciales** *a un conjunto de relaciones de la forma*

$$\begin{aligned}
F_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}, \ldots, \frac{d^n y_m}{dx^n}\right) &= 0 \\
&\vdots \\
F_m\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}, \ldots, \frac{d^n y_m}{dx^n}\right) &= 0
\end{aligned}$$

De forma análoga se definirá un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

En este curso vamos a estudiar ecuaciones, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias e introduciremos las ecuaciones en derivadas parciales. En concreto, estudiaremos ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de orden superior, sistemas lineales de primer orden y algunos tipos de ecuaciones en derivadas parciales de coeficientes constantes de segundo orden.

Resolver la ecuación diferencial (1.2) consiste en encontrar una función, $y(x)$, que, junto con sus derivadas, satisfagan la ecuación. Por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^2 + C}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria, es solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y}$$

La siguiente definición recoge los conceptos usuales relativos a las soluciones de una ecuación diferencial de orden n.

Definición 1.5

- *Una función $y(x)$ es* **solución o integral** *de la ecuación diferencial (1.2) si $y(x)$ y sus derivadas $\dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n y}{dx^n}$ satisfacen la ecuación.*
- *Se llama* **solución o integral general** *de la ecuación diferencial de orden n a una solución de la ecuación de la forma $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.*
- *Se llama* **solución o integral particular** *de la ecuación diferencial a una solución obtenida al dar valores a una o más de las constantes C_i de la solución general.*
- *Se llama* **solución o integral singular** *a una solución de la ecuación diferencial que no se obtiene al dar valores concretos a las constantes de la solución general.*

2.2 Observaciones generales sobre las soluciones

Dada una ecuación diferencial ordinaria, el primer problema que podemos plantearnos es la existencia y unicidad de su solución. Para ello, definiremos lo que se conoce como problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial de orden n.

Definición 1.6 *Dada una ecuación diferencial de orden n en su forma normal*

$$y^{n)} = G\left(x, y, \ldots, y^{n-1)}\right)$$

el problema de valores iniciales asociado a esta ecuación diferencial consiste en hallar la solución de la misma, $y(x)$, que satisface las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{n-1)}(x_0) = y_0^{n-1)}$.

Consideremos el caso del problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= G(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

bajo ciertas condiciones de continuidad sobre $G(x,y)$ y $\dfrac{\partial G}{\partial y}$, se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución del problema de valores iniciales. Este resultado queda recogido en el siguiente Teorema que damos sin demostración.

Teorema 1.1 (Picard) *Si $G(x,y)$ y $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ son funciones continuas en un rectángulo cerrado $D = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces, el problema de* valor inicial*:*

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = G(x,y)\ , \\ &y(x_0) = y_0,\ (x_0, y_0) \text{ en el interior de } D \end{aligned}$$

tiene una única solución.

Además, la solución general de esta ecuación es una familia de curvas planas dadas por una ecuación de la forma $y = f(x,C)$, donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.4 *Sabemos que toda solución de la ecuación diferencial*

$$y' = \cos(x)$$

es de la forma $y = \operatorname{sen}(x) + C$.

En general, si consideramos una ecuación diferencial de orden n, bajo ciertas condiciones generales de continuidad, se puede establecer la existencia y unicidad de un problema de *valor inicial.* Además, la solución general vendrá dada por una familia de curvas planas de ecuación $y = f(x, C_1, \ldots, C_n)$, con $C_1, \ldots, C_n$ constantes arbitrarias (este tipo de ecuaciones las trataremos en el siguiente capítulo).

2.3 Formación de ecuaciones diferenciales

Planteamos ahora el proceso inverso. Dada una familia de curvas de ecuación $y = f(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$, con $C_1, \ldots, C_n$ constantes arbitrarias, tratamos de encontrar la ecuación diferencial asociada a ellas, es decir, la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas dada.

Para obtener esta ecuación diferencial, partimos de la familia de curvas $y = f(x, C_1, \ldots, C_n)$ y derivamos n veces respecto de la variable independiente

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(x, C_1, \ldots, C_n) \\ y' & = & f'(x, C_1, \ldots, C_n) \\ & \vdots & \\ y^{n)} & = & f^{n)}(x, C_1, \ldots, C_n) \end{array}$$

Eliminando las n constantes en este sistema de $(n+1)$ ecuaciones, obtenemos una relación de la forma

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{n)}\right) = 0$$

que es una ecuación diferencial de orden n.

En el caso particular en que tengamos un haz de curvas planas, $y = f(x, C)$, la ecuación diferencial asociada será de la forma $F(x, y, y') = 0$.

Ejemplo 1.5 *Obtener la ecuación diferencial asociada a una familia de circunferencias de centro sobre el eje OX y de radio 2.*

Solución:

Esta familia de cónicas viene dada por la ecuación

$$(x - a)^2 + y^2 = 4$$

La ecuación diferencial se obtendrá eliminando la constante a en las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} (x - a)^2 + y^2 = 4 \\ 2(x - a) + 2yy' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2a = 2x + 2yy' \Longrightarrow a = x + yy'$$

$$(yy')^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow y'^2 + 1 = \frac{4}{y^2}$$

3 Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales en la derivada

Definición 1.7 *Una ecuación diferencial de primer orden con x variable independiente e y variable dependiente, es* ***lineal en la derivada*** *si se puede escribir en la forma*

$$y' = G(x, y) \quad \text{o equivalentemente } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Notar que usando $dy = y'dx$ pasamos de una forma a otra. Por ejemplo,

A partir de la ecuación $y' = (2x-3y)\text{sen}(x)$ multiplicando por dx obtenemos

$$y'dx = (2x-3y)\text{sen}(x)dx \quad \hookrightarrow \quad dy = (2x-3y)\text{sen}(x)dx$$

y de aquí

$$\underbrace{(2x-3y)\text{sen}(x)}_{P(x,y)}dx \underbrace{-}_{Q(x,y)} dy = 0$$

Recíprocamente, si tenemos la ecuación $(x-y)dx+\ln(x)dy = 0$, sustituyendo $dy = y'dx$, obtenemos

$$(x-y)dx + \text{sen}(x)y'dx = 0$$

y despejando

$$y' = \underbrace{\frac{y-x}{\ln(x)}}_{G(x,y)}$$

A continuación, pasaremos a estudiar algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales en la derivada.

3.1 Ecuaciones de variables separables

Definición 1.8 *Una ecuación diferencial de primer orden, es* **una ecuación de variables separables** *si se puede escribir de la forma*

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$$

que formalmente se puede reescribir como

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy$$

Su integral general se obtiene integrando cada miembro de la igualdad

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$$

Ejemplo 1.6 *Resolver la ecuación diferencial*

$$\text{sen}(x) + ye^y y' = 0$$

Solución:

Podemos expresar la ecuación de la siguiente forma

$$ye^y dy = -\text{sen}(x)dx$$

Obtenemos la integral general, $\displaystyle\int ye^y dy = -\int \text{sen}(x)dx + C$. *Quedará*

$$ye^y - e^y = \cos(x) + C$$

Ejemplo 1.7 *Resolver la ecuación*

$$(2 - y^2)dx - 6xydy = 0$$

Escribimos

$$\frac{dx}{x} = \frac{6y}{2 - y^2}dy$$

e integramos

$$\ln(|x|) = -3\ln(|2 - y^2|) + C$$

Sin pérdida de generalidad, podemos escribir $C = \ln(\hat{K})$, *donde* $\hat{K}$ *es otra constante arbitraria. Queda pues,*

$$\begin{aligned} \ln(|x|) &= \ln(\hat{K}|2 - y^2|^{-3}) \\ x^2 &= \frac{\hat{K}^2}{(2 - y^2)^6} \end{aligned}$$

siendo la integral general $x^2(2 - y^2)^6 = K$.

3.2 Ecuaciones diferenciales exactas. Factor integrante

Definición 1.9 *Diremos que una ecuación diferencial de la forma*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.3}$$

es **diferencial exacta**, *si existe una función,* $U(x, y)$, *tal que*

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{1.4}$$

A la función $U(x, y)$ *se le llama* **función potencial**.

Por lo tanto, si la ecuación (1.3) es diferencial exacta se puede expresar como

$$dU = 0$$

y para resolverla es suficiente obtener la función potencial $U(x, y)$, ya que la solución general será $U(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Para calcular la función potencial hemos de tener en cuenta la siguiente caracterización de ecuación diferencial exacta.

Teorema 1.2 *La ecuación diferencial (1.3), con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas, es diferencial exacta, si y sólo si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.5}$$

Obtención de la función potencial $U(x, y)$:

Por (1.4), se tiene que cumplir

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \ , \qquad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Integrando respecto a x la ecuación $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, tenemos que

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \Phi(y)$$

Derivando parcialmente respecto a y la expresión de $U(x, y)$ obtenida y teniendo en cuenta la expresión (1.5),

$$\begin{aligned}
Q(x, y) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y)dx + \Phi'(y) \\
Q(x, y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)dx + \Phi'(y) \\
Q(x, y) &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \Phi'(y)
\end{aligned}$$

entonces

$$\Phi'(y) = Q(x_0, y)$$

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + K$$

y obtenemos

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.8 *Integrar la ecuación diferencial*

$$\underbrace{2xy}_{P(x,y)}\, dx + \underbrace{(x^2+3y^2)}_{Q(x,y)}\, dy = 0$$

Solución:

En este caso $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$*. Es, por tanto, una ecuación diferencial exacta y una función potencial la obtendremos por un método alternativo al expuesto anteriormente. Como* $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$*, integrando respecto de* x*, obtenemos*

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + \Phi(y) = \int 2xy\ dx + \Phi(y) = x^2y + \Phi(y)$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \Phi'(y)$$

$$x^2 + 3y^2 = x^2 + \Phi'(y)$$

$$\Phi(y) = y^3 + C \quad \Longrightarrow \qquad U(x,y) = x^2y + y^3 + C$$

La solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x^2y + y^3 = K$$

Obsérvese que la función potencial se puede obtener directamente utilizando la fórmula dada en la expresión (1.6), eligiendo para ello un punto (x_0, y_0) donde las integrales tengan sentido. En el caso del ejemplo anterior, un punto (x_0, y_0) apropiado sería, por ejemplo, el $(0,0)$.

Factores integrantes

A veces, la ecuación diferencial (1.3) no es diferencial exacta, pero puede transformarse en una de este tipo multiplicándola por una función adecuada $\mu(x, y)$. Esta función se denomina **factor integrante**.

Es difícil resolver, en general, el problema de encontrar factores integrantes, ya que para que la ecuación diferencial

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta se tiene que cumplir:

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

es decir,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Esta ecuación, en definitiva, es una ecuación en derivadas parciales para el factor integrante cuya resolución será, en general, difícil. Por esto, nos vamos a limitar a casos particulares: Estudiaremos bajo qué condiciones podemos obtener factores integrantes que dependan sólo de una de las dos variables, es decir, de la forma $\mu(x)$ ó $\mu(y)$.

Teorema 1.3 *Dada la ecuación diferencial (1.3):*

a) Si $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ *es una función sólo de* x*,* $F(x)$*, entonces*

$$\mu(x) = e^{\int F(x)\,dx}$$

es una factor integrante de la ecuación diferencial.

b) Si $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$ *es una función sólo de* y*,* $G(y)$*, entonces*

$$\mu(y) = e^{\int G(y)dy}$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Demostración.

a) Para que $\mu(x)$ sea un factor integrante de (1.3), la ecuación

$$\mu(x)P(x,y)dx + \mu(x)Q(x,y)dy = 0$$

tiene que ser diferencial exacta, es decir, teniendo en cuenta la caracterización para ser diferencial exacta, se tendrá que cumplir

$$\frac{\partial \mu(x)P}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x)Q}{\partial x}$$

es decir,

$$\mu(x)\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx}Q + \mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

Como por hipótesis, la expresión de la derecha es una función de x, $F(x)$, el factor integrante $\mu(x)$ se obtendrá resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables,

$$\frac{1}{\mu}d\mu = F(x)dx$$

Un factor integrante será

$$\mu(x) = e^{\int F(x)dx}$$

b) La demostración de este caso es análoga a la del apartado anterior. □

Ejemplo 1.9 *Integrar la ecuación diferencial*

$$\underbrace{(4x^2 - 14y)}_{P(x,y)}\,dx\ \underbrace{-7x}_{Q(x,y)}\ dy = 0$$

Solución:

En este caso $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -14 \neq -7 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. *La ecuación diferencial no es exacta pero*

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{x}$$

Por tanto, tenemos el factores integrante dependiente sólo de x siguiente

$$\mu(x) = e^{\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln(x)} = x$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor integrante, ésta se transforma en diferencial exacta y queda de la forma

$$\underbrace{(4x^3 - 14xy)}_{P_1}\,dx\,\underbrace{-7x^2}_{Q_1}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -14x = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int (4x^3 - 14xy)dx + \Phi(y \\
U(x,y) &= x^4 - 7x^2y + \Phi(y \\
\frac{\partial U}{\partial y} = -7x^2 + \Phi'(y) &= Q_1 = -7x^2 \\
\Phi'(y) = 0 &\implies \Phi(y) = C
\end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x^4 - 7x^2y = C$$

3.3 Ecuaciones lineales

Definición 1.10 *Las ecuaciones lineales de primer orden son las ecuaciones lineales en la función y en la derivada, o sea, ecuaciones de la forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1.7}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x.

Para resolver la ecuación (1.7) la reescribimos de la siguiente forma

$$(P(x)y - Q(x))\,dx + dy = 0$$

Si llamamos $M(x,y) = P(x)y - Q(x)$, y $N(x,y) = 1$, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Se observa que

$$\frac{1}{N}\left((\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = P(x)$$

sólo depende de x. Por tanto, existe un factor integrante, $\mu = \mu(x)$, dado por

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Al multiplicar por el factor integrante, la ecuación se convierte en diferencial exacta:

$$e^{\int P(x)dx} \left(P(x)y - Q(x) \right) dx + e^{\int P(x)dx} dy = 0$$

La integral general, ya sabemos que viene dada por $U(x,y) = C$.

Obtención de la función potencial $U(x,y)$:

$U(x,y)$ tiene que cumplir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{\int P(x)dx} \left(P(x)y - Q(x) \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\int P(x)dx}$$

De la primera ecuación, se deduce que

$$U(x,y) = \int e^{\int P(x)dx} \left(P(x)y - Q(x) \right) dx \ + \phi(y) \tag{1.8}$$

y derivando respecto a y, se tiene

$$\begin{aligned}
e^{\int P(x)dx} &= \int \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\int P(x)dx} \left(P(x)y - Q(x) \right) \right) dx \ + \phi'(y) \\
e^{\int P(x)dx} &= \int e^{\int P(x)dx} P(x)dx \ + \phi'(y) \\
\phi(y) &= \int \left(e^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} P(x)dx \right) dy + C \\
\phi(y) &= y \left(e^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} P(x)dx \right) + C
\end{aligned}$$

Para seguir leyendo haga click aquí