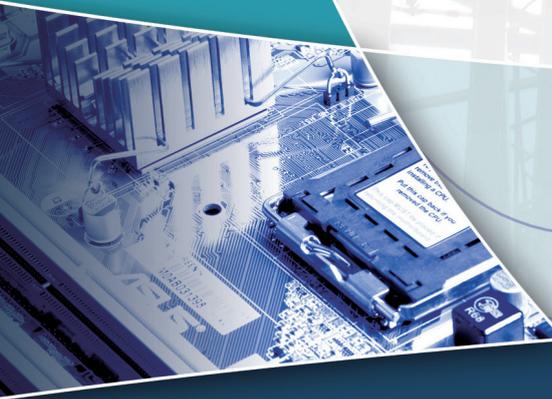


Matemàtiques II para ingenieros

Carmen Coll Aliaga
Damián Ginestar Peiró
Elena Sánchez Juan

RUNGE-KUTTA
RICATI NEWTON
EULER FOURIER TAYLOR
BOOLE ADAMS DE MORGAN
LAGRANGE BERNOULLI
LAPLACE



Carmen Coll Aliaga
Damián Ginestar Peiró
Elena Sánchez Juan

MATEMÁTICAS II PARA INGENIEROS

**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**



Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.

Primera edición, 2012

© de la presente edición:
Editorial Universitat Politècnica de València
www.editorial.upv.es

Distribución: pedidos@editorial.upv.es
Tel. 96 387 70 12

©Carmen Coll-Aliaga
Damián Ginestar-Peiró
Elena Sánchez-Juan

Imprime: By print percom sl.

ISBN: 978-84-8363-902-3
Impreso bajo demanda
Ref. editorial: 864

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

Índice

Capítulo 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Introducción	1
2. Nociones generales	3
2.1. Definiciones básicas	3
2.2. Observaciones generales sobre las soluciones	5
2.3. Formación de ecuaciones diferenciales	6
3. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales en la derivada	7
3.1. Ecuaciones de variables separables	8
3.2. Ecuaciones diferenciales exactas. Factor integrante	9
3.3. Ecuaciones lineales	14
3.4. Ecuación de Bernoulli	18
3.5. Ecuación de Ricatti	19
4. Problemas	20
4.1. Problemas resueltos	20
4.2. Problemas propuestos	26
5. Ecuaciones diferenciales de primer orden con el Mathematica	27
5.1. Introducción	27
5.2. El comando <code>DSolve[]</code>	29
5.3. Dibujo de la gráfica	32
5.4. Ecuaciones con parámetros	33

Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales de orden n

1. Nociones generales	37
2. Ecuaciones de segundo orden cuyo orden puede rebajarse	38
3. Ecuaciones lineales de segundo orden	42
3.1. Construcción de la solución general	42
3.2. Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes	45
3.3. Método de Lagrange o de valoración de las constantes	49



4. Ecuaciones lineales de orden n	51
5. Ecuación de Euler	55
6. Oscilaciones	58
6.1. Oscilaciones libres	58
6.2. Oscilaciones forzadas	62
7. Problemas	64
7.1. Problemas resueltos	64
7.2. Problemas propuestos	73
8. Ecuaciones diferenciales de orden superior	74
8.1. Resolución de ecuaciones diferenciales de orden $n \geq 2$	75
8.2. Problemas de valores iniciales. Gráficas	78
8.3. Problemas pendientes de parámetros	82
8.4. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden	84
8.5. Ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales de orden $n > 2$	88

Capítulo 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

1. Introducción	91
2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes usando el operador derivada	92
3. Sistema en forma normal homogéneo	97
4. Sistema en forma normal no homogéneo	101
5. Estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes	103
5.1. Sistema definido por una ecuación diferencial de orden n	105
6. Problemas	107
6.1. Problemas resueltos	107
6.2. Problemas propuestos	112



7. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con el Mathematica	114
7.1. Resolución analítica de sistemas de ecuaciones diferenciales	114
7.2. Sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes en forma normal	116
7.3. Equivalencia de ecuaciones y sistemas de ecuaciones	118
7.4. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones	120

Capítulo 4. Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1. Introducción	125
2. Nociones generales	127
2.1. Definiciones básicas	127
3. Ecuaciones cuasilineales de primer orden	128
3.1. Obtención de la solución	129
3.2. Determinación de una superficie particular de la familia solución de la ecuación diferencial	129
3.3. Resumen	131
3.4. Aplicación geométrica de una EDP de primer orden: superficies ortogonales	132
4. Generalización a más de dos variables independientes	135
5. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden	137
5.1. El operador derivada parcial	138
6. Ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales. Propiedades	139
7. EDPs lineales de coeficientes constantes homogéneas	140
7.1. Soluciones de EDPs de coeficientes constantes homogéneas reducibles	140
7.2. Solución de EDPs de la forma $a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$	142



8. Clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de dos variables independientes	144
8.1. EDP lineal de segundo orden homogénea de coeficientes constantes	146
9. Problemas	148
9.1. Problemas resueltos	148
9.2. Problemas propuestos	154
10. Ecuaciones en derivadas parciales con el Mathematica	154
10.1. Soluciones de EDPs de coeficientes constantes reducibles	154

Capítulo 5. Métodos numéricos

1. Introducción	161
2. Método del desarrollo en serie de Taylor	162
3. Método de Euler	164
4. Métodos de Runge-Kutta	165
4.1. Algoritmo de Runge	166
4.2. Algoritmo de Runge-Kutta de dos pasos	167
4.3. Algoritmo de Runge-Kutta de cuatro pasos	169
5. Método de Adams	171
6. Problemas	173
6.1. Problemas resueltos	173
6.2. Problemas propuestos	176
7. Métodos numéricos con el Mathematica	177
7.1. Resolución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden	177
7.2. Resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales	180
7.3. Ecuaciones no lineales	181

Capítulo 6. Transformada de Laplace

1. Introducción	185
2. Nociones generales	186
3. Transformada de Laplace	188
3.1. Propiedades de la transformada de Laplace	188
3.2. Transformada de Laplace de funciones elementales	190
3.3. Teoremas sobre la transformada de Laplace	194
4. Transformada inversa de Laplace	199
4.1. Propiedades de la transformada inversa de Laplace	200
4.2. Inversión por descomposición en fracciones simples	203
5. Tablas de transformadas	206
6. Aplicaciones de la transformada de Laplace	207
6.1. Transformada de Laplace aplicada a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales	207
6.2. Transformada de Laplace de funciones especiales	209
7. Sistemas lineales de control	218
7.1. Función de transferencia	218
7.2. Situación de los polos y estabilidad	219
7.3. Aplicaciones	221
8. Problemas	228
8.1. Problemas resueltos	228
8.2. Problemas propuestos	240
9. Transformada de Laplace con el Mathematica	244
9.1. Transformada de Laplace	244
9.2. Transformada inversa de Laplace	246
9.3. Resolución de ecuaciones diferenciales. Sistemas lineales de control	247
9.4. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales	249



Capítulo 7. Representación de números y lógica

1. Representación de números	251
1.1. Números decimales	252
1.2. Números binarios	252
1.3. Cambio de sistema de representación	253
1.4. Complementos primero y segundo de un número binario	255
2. Lógica	255
2.1. Tablas de verdad	256
2.2. Álgebra de Boole	257
2.3. Teoremas de De Morgan	259
2.4. Obtención de una expresión a partir de su tabla de verdad	259
2.5. Puertas lógicas	261
3. Problemas	266
3.1. Problemas resueltos	266
3.2. Problemas propuestos	268

Capítulo 8. Series trigonométricas y series de Fourier

1. Introducción	269
1.1. Propiedades de las funciones periódicas	270
2. Serie trigonométrica	271
3. Series trigonométricas de Fourier	273
3.1. Condiciones de convergencia de una serie de Fourier	274
3.2. Cambio de período de una función	276
3.3. Casos especiales	277
3.4. Representación compleja de la serie de Fourier	281
4. Problemas	282
4.1. Problemas resueltos	282
4.2. Problemas propuestos	285

5. Series de Fourier con el Mathematica	286
5.1. Introducción	286
5.2. Obtención de los coeficientes de Fourier	287
5.3. Desarrollo de Fourier de una función T - periódica	293

Capítulo 9. Introducción a la optimización no lineal

1. Introducción	297
2. Optimización no lineal para dimensión 1	298
2.1. Separación de raíces	299
2.2. Método de Newton	300
2.3. Aplicación del método de Newton para optimizar $f(x)$	301
3. Optimización no lineal para dimensión 2	302
3.1. Método del gradiente o de máximo descenso	303
4. Optimización no lineal con el Mathematica	307
4.1. Optimización para dimensión 1	307
4.2. Optimización para dimensión 2	309



Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1 Introducción

Con frecuencia el estudio de un proceso físico, químico o técnico nos conduce a relacionar las variables que en él intervienen con las razones de cambio que se producen entre ellas. El modelo matemático que representa estas relaciones está formado por ecuaciones donde aparecen las variables y las derivadas de algunas de ellas respecto a las otras. A este tipo de ecuaciones se les denomina *ecuaciones diferenciales*.

Veamos algunos ejemplos prácticos donde aparecen ecuaciones diferenciales, el primero corresponde a una reacción química, el segundo a un circuito eléctrico y el tercero a una partícula en movimiento. Cada uno de estos ejemplos son sistemas dinámicos, es decir aquellos que cambian o evolucionan con el tiempo.

Ejemplo 1.1 *Dada una reacción química del tipo $A + B \rightarrow C$, es decir, una mol de A y una mol de B que reaccionan proporcionando una de C. Según la Ley de acción de masas, se sabe que, “la velocidad de la reacción, la sustancia obtenida en ella por unidad de tiempo, es directamente proporcional a las concentraciones de las sustancias reaccionantes”.*

Si A y B tienen concentraciones iniciales $[A]_0 = m_a$ y $[B]_0 = m_b$, donde m_a y m_b se miden en moles por litro, el aumento de la concentración de la sustancia C,

$c(t)$, por unidad de tiempo, viene dado por la ecuación:

$$\frac{dc(t)}{dt} = Ka(t)b(t)$$

donde, $a(t) = m_a - c(t)$, $b(t) = m_b - c(t)$, son las concentraciones de las sustancias A y B, respectivamente, en el instante t . Entonces, se obtiene la ecuación,

$$\frac{dc}{dt} = K(m_a - c)(m_b - c)$$

que es una ecuación del tipo,

$$F\left(t, c, \frac{dc}{dt}\right) = 0$$

que denominaremos ecuación diferencial de primer orden, con variable independiente t , y variable dependiente, $c(t)$.

Ejemplo 1.2 La intensidad de corriente, $I(t)$, de un circuito puede determinarse utilizando la segunda Ley de Kirchhoff: “El voltaje en un punto de un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito”.

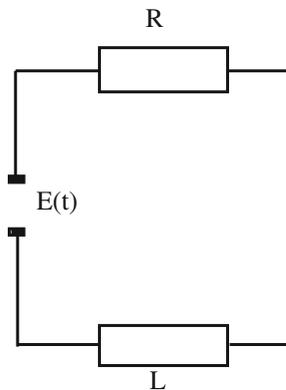


Figura 1.1: Circuito RL.

Para el circuito RL de la Figura 1.1, tendremos que la fuerza electromotriz, $E(t)$, es igual a la suma de la caída de voltaje, E_R , a través de la resistencia, y de la caída de voltaje, E_L , a través de la autoinducción,

$$E(t) = E_R + E_L \tag{1.1}$$

Por la Ley de Ohm, E_R es proporcional a la intensidad de corriente en cada instante t , $E_R(t) = RI(t)$, donde R es el valor de la resistencia; y además E_L

es proporcional a la rapidez de cambio respecto al tiempo de la intensidad $I(t)$, $E_L = L \frac{dI}{dt}$. La ecuación (1.1) quedará

$$E(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt}$$

Hemos obtenido una ecuación que nos da una relación entre la variable independiente, t -tiempo, la variable dependiente, $I(t)$ -intensidad de corriente, y su derivada $\frac{dI}{dt}$. Es una ecuación del tipo

$$F\left(t, I, \frac{dI}{dt}\right) = 0$$

que también es una ecuación diferencial de primer orden.

Ejemplo 1.3 Consideramos un cuerpo que cae debido a la acción de la gravedad, empezando en el instante $t = 0$ con una velocidad inicial nula. Si, sobre el cuerpo, actúa una fuerza de rozamiento del aire, F_R , por la segunda Ley de Newton, podemos formalizar este problema como

$$my''(t) = P - F_R$$

donde $P = mg$ es el peso del cuerpo e $y(t)$ es el espacio recorrido en el instante t .

En el caso particular en que F_R es proporcional a la velocidad del cuerpo en cada instante, $F_R = \alpha y'(t)$, obtenemos la ecuación

$$my'' = mg - \alpha y'$$

que es una ecuación diferencial del tipo

$$F(t, y, y', y'') = 0$$

que denominaremos ecuación diferencial de segundo orden, ya que establece una relación entre la variable independiente, t -tiempo, la variable dependiente, $y(t)$ -espacio recorrido, y sus derivadas hasta segundo orden.

2 Nociones generales

2.1 Definiciones básicas.

Definición 1.1 Se llama **ecuación diferencial ordinaria** a toda relación de la forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1.2)$$

donde x es una variable independiente, y es función de x , $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$, son las derivadas de y respecto a x hasta orden n .

Se llama **orden** de la ecuación diferencial al mayor orden de las derivadas que aparecen en la ecuación.

Definición 1.2 Si una ecuación diferencial de orden n se expresa en la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

se dice que está en forma **normal**.

En el caso en que aparecen en la ecuación dos o más variables independientes se tiene la siguiente definición.

Definición 1.3 Se llama **ecuación diferencial en derivadas parciales** a toda relación donde aparecen más de una variable independiente, una variable dependiente y las derivadas parciales de ésta respecto a las variables independientes. En el caso de dos variables independientes, x e y , y una variable dependiente z , la relación es de la forma

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

donde $\frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$, son las derivadas parciales de z respecto a x e y .

Definición 1.4 Se llama **sistema de ecuaciones diferenciales** a un conjunto de relaciones de la forma

$$\begin{aligned} F_1\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}, \dots, \frac{d^n y_m}{dx^n}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m\left(x, y_1, y_2, \dots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}, \dots, \frac{d^n y_m}{dx^n}\right) &= 0 \end{aligned}$$

De forma análoga se definirá un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

En este curso vamos a estudiar ecuaciones, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias e introduciremos las ecuaciones en derivadas parciales. En concreto, estudiaremos ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de orden superior, sistemas lineales de primer orden y algunos tipos de ecuaciones en derivadas parciales de coeficientes constantes de segundo orden.

Resolver la ecuación diferencial (1.2) consiste en encontrar una función, $y(x)$, que, junto con sus derivadas, satisfagan la ecuación. Por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^2 + C}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria, es solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y}$$

La siguiente definición recoge los conceptos usuales relativos a las soluciones de una ecuación diferencial de orden n .

Definición 1.5

- Una función $y(x)$ es **solución o integral** de la ecuación diferencial (1.2) si $y(x)$ y sus derivadas $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ satisfacen la ecuación.
- Se llama **solución o integral general** de la ecuación diferencial de orden n a una solución de la ecuación de la forma $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, donde C_1, C_2, \dots, C_n son constantes arbitrarias.
- Se llama **solución o integral particular** de la ecuación diferencial a una solución obtenida al dar valores a una o más de las constantes C_i de la solución general.
- Se llama **solución o integral singular** a una solución de la ecuación diferencial que no se obtiene al dar valores concretos a las constantes de la solución general.

2.2 Observaciones generales sobre las soluciones

Dada una ecuación diferencial ordinaria, el primer problema que podemos plantearnos es la existencia y unicidad de su solución. Para ello, definiremos lo que se conoce como problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial de orden n .

Definición 1.6 Dada una ecuación diferencial de orden n en su forma normal

$$y^{(n)} = G(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

el problema de valores iniciales asociado a esta ecuación diferencial consiste en hallar la solución de la misma, $y(x)$, que satisface las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Consideremos el caso del problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= G(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

bajo ciertas condiciones de continuidad sobre $G(x, y)$ y $\frac{\partial G}{\partial y}$, se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución del problema de valores iniciales. Este resultado queda recogido en el siguiente Teorema que damos sin demostración.

Teorema 1.1 (Picard) *Si $G(x, y)$ y $\frac{\partial G}{\partial y}$ son funciones continuas en un rectángulo cerrado $D = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces, el problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= G(x, y) , \\ y(x_0) &= y_0, \quad (x_0, y_0) \text{ en el interior de } D\end{aligned}$$

tiene una única solución.

Además, la solución general de esta ecuación es una familia de curvas planas dadas por una ecuación de la forma $y = f(x, C)$, donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.4 *Sabemos que toda solución de la ecuación diferencial*

$$y' = \cos(x)$$

es de la forma $y = \sin(x) + C$.

En general, si consideramos una ecuación diferencial de orden n , bajo ciertas condiciones generales de continuidad, se puede establecer la existencia y unicidad de un problema de *valor inicial*. Además, la solución general vendrá dada por una familia de curvas planas de ecuación $y = f(x, C_1, \dots, C_n)$, con C_1, \dots, C_n constantes arbitrarias (este tipo de ecuaciones las trataremos en el siguiente capítulo).

2.3 Formación de ecuaciones diferenciales

Planteamos ahora el proceso inverso. Dada una familia de curvas de ecuación $y = f(x, C_1, \dots, C_n)$, con C_1, \dots, C_n constantes arbitrarias, tratamos de encontrar la ecuación diferencial asociada a ellas, es decir, la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas dada.

Para obtener esta ecuación diferencial, partimos de la familia de curvas $y = f(x, C_1, \dots, C_n)$ y derivamos n veces respecto de la variable independiente

$$\begin{aligned} y &= f(x, C_1, \dots, C_n) \\ y' &= f'(x, C_1, \dots, C_n) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x, C_1, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Eliminando las n constantes en este sistema de $(n + 1)$ ecuaciones, obtenemos una relación de la forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

que es una ecuación diferencial de orden n .

En el caso particular en que tengamos un haz de curvas planas, $y = f(x, C)$, la ecuación diferencial asociada será de la forma $F(x, y, y') = 0$.

Ejemplo 1.5 *Obtener la ecuación diferencial asociada a una familia de circunferencias de centro sobre el eje OX y de radio 2.*

Solución:

Esta familia de cónicas viene dada por la ecuación

$$(x - a)^2 + y^2 = 4$$

La ecuación diferencial se obtendrá eliminando la constante a en las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} (x - a)^2 + y^2 &= 4 \\ 2(x - a) + 2yy' &= 0 \end{aligned} \right\} \implies 2a = 2x + 2yy' \implies a = x + yy'$$

$$(yy')^2 + y^2 = 4 \implies y'^2 + 1 = \frac{4}{y^2}$$

3 Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales en la derivada

Definición 1.7 *Una ecuación diferencial de primer orden con x variable independiente e y variable dependiente, es **lineal en la derivada** si se puede escribir en la forma*

$$y' = G(x, y) \text{ o equivalentemente } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Notar que usando $dy = y'dx$ pasamos de una forma a otra. Por ejemplo,

A partir de la ecuación $y' = (2x - 3y)\text{sen}(x)$ multiplicando por dx obtenemos

$$y'dx = (2x - 3y)\text{sen}(x)dx \quad \leftrightarrow \quad dy = (2x - 3y)\text{sen}(x)dx$$

y de aquí

$$\underbrace{(2x - 3y)\text{sen}(x)}_{P(x,y)} dx - \underbrace{dy}_{Q(x,y)} = 0$$

Recíprocamente, si tenemos la ecuación $(x - y)dx + \ln(x)dy = 0$, sustituyendo $dy = y'dx$, obtenemos

$$(x - y)dx + \text{sen}(x)y'dx = 0$$

y despejando

$$y' = \underbrace{\frac{y - x}{\ln(x)}}_{G(x,y)}$$

A continuación, pasaremos a estudiar algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales en la derivada.

3.1 Ecuaciones de variables separables

Definición 1.8 Una ecuación diferencial de primer orden, es una ecuación de variables separables si se puede escribir de la forma

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$$

que formalmente se puede reescribir como

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy$$

Su integral general se obtiene integrando cada miembro de la igualdad

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$$

Ejemplo 1.6 Resolver la ecuación diferencial

$$\text{sen}(x) + ye^y y' = 0$$

Solución:

Podemos expresar la ecuación de la siguiente forma

$$ye^y dy = -\operatorname{sen}(x)dx$$

Obtenemos la integral general, $\int ye^y dy = -\int \operatorname{sen}(x)dx + C$. Quedará

$$ye^y - e^y = \cos(x) + C$$

Ejemplo 1.7 Resolver la ecuación

$$(2 - y^2)dx - 6xydy = 0$$

Escribimos

$$\frac{dx}{x} = \frac{6y}{2 - y^2} dy$$

e integramos

$$\ln(|x|) = -3 \ln(|2 - y^2|) + C$$

Sin pérdida de generalidad, podemos escribir $C = \ln(\hat{K})$, donde \hat{K} es otra constante arbitraria. Queda pues,

$$\ln(|x|) = \ln(\hat{K}|2 - y^2|^{-3})$$

$$x^2 = \frac{\hat{K}^2}{(2 - y^2)^6}$$

siendo la integral general $x^2(2 - y^2)^6 = K$.

3.2 Ecuaciones diferenciales exactas. Factor integrante

Definición 1.9 Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.3}$$

es **diferencial exacta**, si existe una función, $U(x, y)$, tal que

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{1.4}$$

A la función $U(x, y)$ se le llama **función potencial**.

Por lo tanto, si la ecuación (1.3) es diferencial exacta se puede expresar como

$$dU = 0$$

y para resolverla es suficiente obtener la función potencial $U(x, y)$, ya que la solución general será $U(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Para calcular la función potencial hemos de tener en cuenta la siguiente caracterización de ecuación diferencial exacta.

Teorema 1.2 *La ecuación diferencial (1.3), con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas, es diferencial exacta, si y sólo si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.5}$$

Obtención de la función potencial $U(x, y)$:

Por (1.4), se tiene que cumplir

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Integrando respecto a x la ecuación $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, tenemos que

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \Phi(y)$$

Derivando parcialmente respecto a y la expresión de $U(x, y)$ obtenida y teniendo en cuenta la expresión (1.5),

$$Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx + \Phi'(y)$$

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dx + \Phi'(y)$$

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \Phi'(y)$$

entonces

$$\Phi'(y) = Q(x_0, y)$$

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + K$$

y obtenemos

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + K \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.8 Integrar la ecuación diferencial

$$\underbrace{2xy}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(x^2 + 3y^2)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

Solución:

En este caso $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Es, por tanto, una ecuación diferencial exacta y una función potencial la obtendremos por un método alternativo al expuesto anteriormente. Como $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, integrando respecto de x , obtenemos

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + \Phi(y) = \int 2xy dx + \Phi(y) = x^2y + \Phi(y)$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \Phi'(y)$$

$$x^2 + 3y^2 = x^2 + \Phi'(y)$$

$$\Phi(y) = y^3 + C \implies U(x, y) = x^2y + y^3 + C$$

La solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x^2y + y^3 = K$$

Obsérvese que la función potencial se puede obtener directamente utilizando la fórmula dada en la expresión (1.6), eligiendo para ello un punto (x_0, y_0) donde las integrales tengan sentido. En el caso del ejemplo anterior, un punto (x_0, y_0) apropiado sería, por ejemplo, el $(0, 0)$.

Factores integrantes

A veces, la ecuación diferencial (1.3) no es diferencial exacta, pero puede transformarse en una de este tipo multiplicándola por una función adecuada $\mu(x, y)$. Esta función se denomina **factor integrante**.

Es difícil resolver, en general, el problema de encontrar factores integrantes, ya que para que la ecuación diferencial

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta se tiene que cumplir:

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

es decir,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Esta ecuación, en definitiva, es una ecuación en derivadas parciales para el factor integrante cuya resolución será, en general, difícil. Por esto, nos vamos a limitar a casos particulares: Estudiaremos bajo qué condiciones podemos obtener factores integrantes que dependan sólo de una de las dos variables, es decir, de la forma $\mu(x)$ ó $\mu(y)$.

Teorema 1.3 *Dada la ecuación diferencial (1.3):*

a) Si $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ es una función sólo de x , $F(x)$, entonces

$$\mu(x) = e^{\int F(x) dx}$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial.

b) Si $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ es una función sólo de y , $G(y)$, entonces

$$\mu(y) = e^{\int G(y) dy}$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Demostración.

a) Para que $\mu(x)$ sea un factor integrante de (1.3), la ecuación

$$\mu(x)P(x, y)dx + \mu(x)Q(x, y)dy = 0$$

tiene que ser diferencial exacta, es decir, teniendo en cuenta la caracterización para ser diferencial exacta, se tendrá que cumplir

$$\frac{\partial \mu(x)P}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x)Q}{\partial x}$$

es decir,

$$\mu(x) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx} Q + \mu(x) \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

Como por hipótesis, la expresión de la derecha es una función de x , $F(x)$, el factor integrante $\mu(x)$ se obtendrá resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables,

$$\frac{1}{\mu} d\mu = F(x) dx$$

Un factor integrante será

$$\mu(x) = e^{\int F(x) dx}$$

b) La demostración de este caso es análoga a la del apartado anterior. □

Ejemplo 1.9 Integrar la ecuación diferencial

$$\underbrace{(4x^2 - 14y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{-7x}_{Q(x,y)} dy = 0$$

Solución:

En este caso $\frac{\partial P}{\partial y} = -14 \neq -7 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. La ecuación diferencial no es exacta pero

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{x}$$

Por tanto, tenemos el factores integrante dependiente sólo de x siguiente

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln(x)} = x$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor integrante, ésta se transforma en diferencial exacta y queda de la forma

$$\underbrace{(4x^3 - 14xy) dx}_{P_1} \underbrace{- 7x^2 dy}_{Q_1} = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -14x = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

$$U(x, y) = \int (4x^3 - 14xy) dx + \Phi(y)$$

$$U(x, y) = x^4 - 7x^2y + \Phi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -7x^2 + \Phi'(y) = Q_1 = -7x^2$$

$$\Phi'(y) = 0 \implies \Phi(y) = C$$

La solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x^4 - 7x^2y = C$$

3.3 Ecuaciones lineales

Definición 1.10 Las ecuaciones lineales de primer orden son las ecuaciones lineales en la función y en la derivada, o sea, ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1.7}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x .

Para resolver la ecuación (1.7) la reescribimos de la siguiente forma

$$(P(x)y - Q(x)) dx + dy = 0$$

Si llamamos $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$, y $N(x, y) = 1$, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Se observa que

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = P(x)$$

sólo depende de x . Por tanto, existe un factor integrante, $\mu = \mu(x)$, dado por

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Al multiplicar por el factor integrante, la ecuación se convierte en diferencial exacta:

$$e^{\int P(x)dx} (P(x)y - Q(x)) dx + e^{\int P(x)dx} dy = 0$$

La integral general, ya sabemos que viene dada por $U(x, y) = C$.

Obtención de la función potencial $U(x, y)$:

$U(x, y)$ tiene que cumplir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{\int P(x)dx} (P(x)y - Q(x))$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{\int P(x)dx}$$

De la primera ecuación, se deduce que

$$U(x, y) = \int e^{\int P(x)dx} (P(x)y - Q(x)) dx + \phi(y) \quad (1.8)$$

y derivando respecto a y , se tiene

$$e^{\int P(x)dx} = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\int P(x)dx} (P(x)y - Q(x)) \right) dy + \phi'(y)$$

$$e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} P(x) dx + \phi'(y)$$

$$\phi(y) = \int \left(e^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} P(x) dx \right) dy + C$$

$$\phi(y) = y \left(e^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} P(x) dx \right) + C$$

Para seguir leyendo haga click aquí