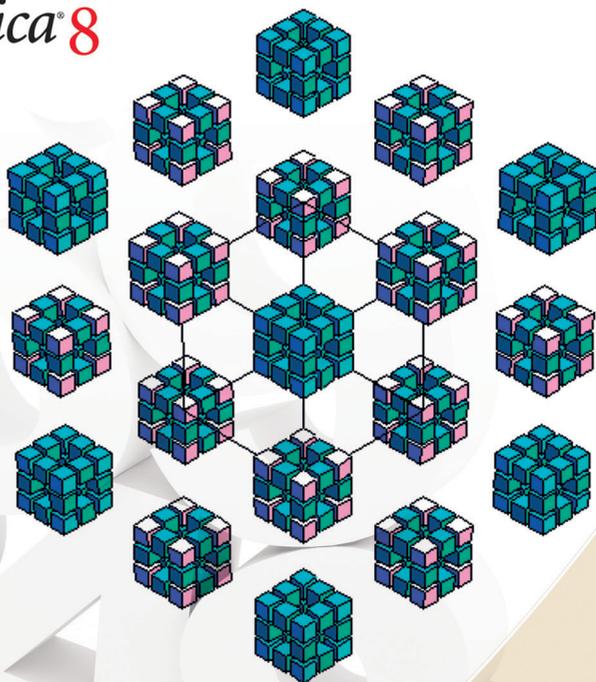


Un curso práctico de cálculo con Mathematica 8

Elena Alemany Martínez
Emilio Checa Martínez

Wolfram *Mathematica* 8



$$2 \times \pi \times R \times \frac{\sqrt{100}}{\pi R^2}$$
$$+ \pi R^2$$
$$= \sqrt[3]{\frac{100}{3,14}} = 3,17$$
$$(a+b)x + (4a)^3$$
$$+ 10a$$

Elena Alemany Martínez
Emilio Checa Martínez

UN CURSO PRÁCTICO DE CÁLCULO CON MATHEMATICA 8

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para citar esta publicación utilice la siguiente cita: Alemany-Martínez, E., Checa-Martínez, E. (2012). *Un curso práctico de cálculo con Mathematica*. Valencia : Editorial Universitat Politècnica

Primera edición, 2012

© de la presente edición:
Editorial Universitat Politècnica de València
www.editorial.upv.es

Distribución: pedidos@editorial.upv.es
Tel. 96 387 70 12

© Elena Alemany-Martínez
Emilio Checa-Martínez

© imagen de la portada: Wolfram Demonstrations Project
<http://www.demonstrations.wolfram.com>
(consultada julio 2012)

Imprime: by print percom sl.

ISBN: 978-84-8363-896-5
Impreso bajo demanda
Ref. editorial: 762

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

Introducción

Este libro recogen los contenidos teórico-prácticos que se pueden desarrollar en el laboratorio de informática de la asignatura de Cálculo, en un 1^{er} curso de Ingeniería. En particular, ha sido elaborado como material de apoyo para los alumnos de la titulación de Grado en Geomática, matriculados en la asignatura de Cálculo de 1^o. Es la 2^a parte de una obra de dos volúmenes en la que se desarrollan los contenidos de la asignatura.

Con el fin de ajustar nuestra docencia a las directrices que marcan los nuevos planes de estudio hemos adaptado la metodología docente en el aula utilizando, entre otras herramientas, el laboratorio virtual y la modelización. Estas herramientas son elementos de visualización y cálculo que facilitan la comprensión de los conceptos matemáticos y los métodos de aplicación. Nuestro objetivo es optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje y aumentar el rendimiento en el aula.

Actualmente los contenidos de la asignatura se imparten indistintamente en el aula de teoría y en el laboratorio de informática. En los laboratorios se trabajan conceptos teóricos por experimentación, utilizando las capacidades gráficas y computacionales que ofrece el programa de cálculo simbólico utilizado, en este caso Mathematica 8.

El documento recoge los contenidos que se explican en el aula de informática divididos en 9 bloques o capítulos. Al inicio de cada capítulo se incluye un guión de contenidos del mismo, la lista de objetivos que se persiguen y se enumeran los comandos de Mathematica que se introducen. Los temas que se tratan en cada bloque son los siguientes:

- 1.- Introducción al uso de Mathematica como programa de cálculo simbólico diseñado para el entorno Windows.
- 2.- Función real de variable real: dominios, rangos, límites y continuidad.
- 3.- Cálculo diferencial de funciones de una variable I: derivada, derivada implícita, recta tangente, desarrollos de Taylor.
- 4.- Cálculo diferencial de funciones de una variable II: crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad y convexidad.
- 5.- Integración de funciones de una variable: métodos de integración, concepto de integral de Riemann, aplicaciones de la integral definida.
- 6.- Función real de dos variables: dominios, rangos, límites y continuidad.
- 7.- Cálculo diferencial para funciones reales de dos variables: derivadas parciales, derivadas direccionales, diferenciabilidad, plano tangente y recta normal.
- 8.- Máximos y mínimos de funciones de dos variables: extremos relativos y absolutos, extremos condicionados.
- 9.- Integración de funciones de varias variables. Aplicaciones.

Valencia, Junio de 2012

LOS AUTORES

Índice

1. Introducción al software Mathematica 8

1.1. Objetivos	3
1.2. Descripción del programa	3
1.3. Notebooks	7
1.4. Obtención de ayuda	8
1.5. Sintaxis general de las órdenes	10
1.6. Operaciones aritméticas básicas	16
1.7. Otros comandos y funciones de uso frecuente	19
1.8. Entradas con formato libre (Free-form input)	21
1.9. Formato CDF (Computable Document Format)	22
1.10. Ejercicios de autoevaluación	24

2. Funciones de una variable

2.1. Objetivos	29
2.2. Nuevos comandos de Mathematica	29
2.3. Función real de variable real	29
2.4. Determinación de dominios y rangos	32
2.5. Límites y Continuidad	36
2.6. Ejercicios de autoevaluación	45



3. Cálculo diferencial de funciones de una variable I

3.1. Objetivos	49
3.2. Nuevos comandos de Mathematica	49
3.3. La derivada. Definición e interpretación geométrica	49
3.4. Cálculo de derivadas con el comando D	57
3.5. Derivación implícita y recta tangente	59
3.6. Aproximación local de una función. Polinomio de Taylor	62
3.7. Ejercicios de autoevaluación	68

4. Cálculo diferencial de funciones de una variable II

4.1. Objetivos	71
4.2. Nuevos comandos de Mathematica	71
4.3. Crecimiento y decrecimiento. Concavidad y convexidad	71
4.4. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Puntos de inflexión	76
4.5. Asíntotas	83
4.6. Aplicaciones	89
4.7. Ejercicios de autoevaluación	94

5. Cálculo integral de funciones de una variable

5.1. Objetivos	99
5.2. Nuevos comandos de Mathematica	99
5.3. Búsqueda de primitivas	99
5.4. La integral definida	104
5.5. Aplicaciones de la integral definida	112
5.6. Ejercicios de autoevaluación	121



6. Funciones de dos variables. Dominios, límites y continuidad

6.1. Objetivos	125
6.2. Nuevos comandos de Mathematica	125
6.3. Funciones de dos variables. Determinación de dominios	126
6.4. Curvas de nivel y gráficas interactivas	135
6.5. Límites y continuidad	138
6.6. Ejercicios de autoevaluación	148

7. Cálculo diferencial de funciones de dos variables

7.1. Objetivos	153
7.2. Nuevos comandos de Mathematica	153
7.3. Concepto de derivada parcial y derivada direccional	153
7.4. Matriz jacobina y vector gradiente	160
7.5. Diferenciabilidad	162
7.6. Plano tangente y recta normal	165
7.7. Fórmula de Taylor	167
7.8. Ejercicios de autoevaluación	169



8. Máximos y mínimos de funciones de dos variables

8.1. Objetivos	173
8.2. Nuevos comandos de Mathematica	173
8.3. Definiciones básicas	173
8.4. Estudio y análisis de los puntos críticos por medio de la matriz Hessiana	175
8.5. Determinación de los extremos absolutos	178
8.6. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange	186
8.7. Ejercicios de autoevaluación	188

9. Cálculo integral de funciones de varias variables

9.1. Objetivos	191
9.2. Nuevos comandos de Mathematica	191
9.3. La integral para funciones de varias variables	191
9.4. Algunas aplicaciones de las integrales múltiples	200
9.5. Cambio de coordenadas. Transformación a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas	204
9.6. Ejercicios de autoevaluación	209

Bibliografía



1 Introducción al software Mathematica 8

*En esta práctica realizamos una breve introducción al programa **Mathematica 8**, aunque existe un porcentaje amplio de coincidencias con versiones anteriores. Igualmente estudiamos el entorno de trabajo de Mathematica, la introducción de comandos a través del teclado, los menús o paletas, la sintaxis general del programa, el sistema de ayuda on-line, el formato de los archivos o documentos electrónicos, así como la novedosa entrada de comandos que contiene esta versión con formato libre (Free_Form_Linguistic Input) y el nuevo formato CDF (Computable document format) parecido al formato estandar y muy conocido PDF pero dinámico y capaz de realizar acciones y cálculos en tiempo real.*

Contenidos:

- 1.1 Objetivos
- 1.2 Descripción del programa.
- 1.3 Notebooks
- 1.4 Obtención de ayuda
- 1.5 Sintaxis general de las órdenes
- 1.6 Operaciones aritméticas básicas
- 1.7 Otros comandos y funciones de uso frecuente
- 1.8 Entradas con formato libre (Free-form input)
- 1.9 Formato CDF(Computable Document Format)
- 1.10 Ejercicios de autoevaluación

1.1 Objetivos

Tras haber completado la práctica el alumno deberá:

- 1) Ser capaz de iniciar una sesión de trabajo en Mathematica.
- 2) Saber moverse con cierta soltura en la ventana del programa, desplegando menús y seleccionando algunos comandos.
- 3) Saber realizar operaciones de aritmética básica y cálculo sencillo.
- 4) Conocer la sintaxis y utilización de algunos comandos de uso frecuente y como alternativa saber introducir expresiones simples con formato libre.
- 5) Saber utilizar la ayuda on-line que ofrece el programa y la pantalla de entrada de Mathematica8 en relación a nuevas características de esta versión.
- 6) Saber introducir comandos en formato libre, así como conocer el formato de documentos CDF.

1.2 Descripción del programa

El programa Mathematica está formado por dos módulos independientes: el **kernel**, o módulo encargado de realizar cálculos, y el **front end** o **interfaz**, que controla la interacción del programa con el usuario.

Esta interacción puede realizarse en un entorno gráfico o a través de la línea de comando. La interfaz gráfica consta de documentos electrónicos (notebooks) en los que se trabaja haciendo uso del teclado, menús y ventanas (palettes). En la interfaz basada en texto la comunicación entre el programa y el usuario se realiza introduciendo instrucciones en la línea de comando.



Figura 1.- Interfaz gráfica de Mathematica

Para cargar Mathematica e iniciar la sesión de trabajo, se debe seleccionar el icono del programa en el Desktop, o bien elegir **Mathematica** del grupo correspondiente, en la lista de programas instalados. Se inicia la interfaz gráfica de Mathematica que consta de una ventana con un menú principal situado en la parte superior de la misma, y una segunda ventana independiente que contiene un documento electrónico en blanco con nombre Untitled-1. Anteriormente al abrir el programa aparece la pantalla siguiente



Figura 2.- Menú de inicialización de Mathematica

En la que figura en la parte inferior izquierda los últimos ficheros abiertos y en la parte superior distintas elecciones como crear nuevos notebook. En la parte derecha podemos hacer un recorrido básico por el programa sirviendo de información general para conocer algunas de los problemas que resuelve este software.

El menú principal

La pantalla inicial de Mathematica corresponde a una ventana de Windows que muestra el nombre del programa en una barra azul situada en la parte superior de la ventana y un menú principal en el que se leen las opciones **File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window** y **Help**. Todo esto es común a versiones anteriores.

Para seleccionar cualquiera de estas opciones hay que situar el ratón sobre ella y pulsar el botón izquierdo, o bien pulsar la tecla **Alt** y la letra que aparece subrayada en el nombre de la opción. Seleccionada una opción, aparece un submenú con varias alternativas.

Menú File

En este menú se agrupan los comandos relacionados con el manejo de los archivos electrónicos (crear, abrir, guardar, imprimir, etc.) y con la finalización de la sesión de trabajo (exit). Cabe destacar el comando **Send to** (enviar a) que permite

enviar archivos de trabajo de Mathematica, como fichero adjunto en un correo electrónico. Igualmente señalar la importancia del comando **Save as** que permite salvar el fichero en distintos formatos como ficheros con extensión pdf, ps, latex y otros muchos.

Menú Edit

En este menú se agrupan operaciones relacionadas con la edición de texto en el área de trabajo (copiar, cortar, pegar), y con la selección y búsqueda de expresiones.

Menú Insert

El menú **Insert** contiene opciones que permiten introducir en un documento ciertos elementos especiales (símbolos, caracteres especiales, matrices, tablas, objetos gráficos, etc.).

Menú Format

El menú **Format** contiene opciones que permiten configurar el documento electrónico que se está generando en la sesión de trabajo. Permite crear estilos diferentes para distintos documentos, manipular colores, tamaños y tipos de fuentes, alineación del texto, etc.

Menú Cell

En este menú se agrupan las operaciones relacionadas con las celdas de un documento (conversión de tipo, visualización, formato, propiedades, agrupamiento, supresión de celdas de resultados, etc.).

Menú Graphics

Las opciones de este menú permiten modificar y generar resultados gráficos bidimensionales, a partir de primitivas (línea, polígono, rectángulo, óvalo, texto, etc.), especificando sus propiedades (color, grosor, tipo de letra, etc.).

Dentro de este menú la opción **Drawing Tools** despliega una ventana o asistente de gráficos que nos permite añadir múltiples complementos en las gráficas que se representan como por ejemplo añadir texto, añadir flechas aclaratorias que destaquen elementos concretos. Así en la gráfica de la *Figura 3*, generada previamente con el programa, hemos añadido una flecha para resaltar el hecho de que la gráfica de la función pasa por el origen.

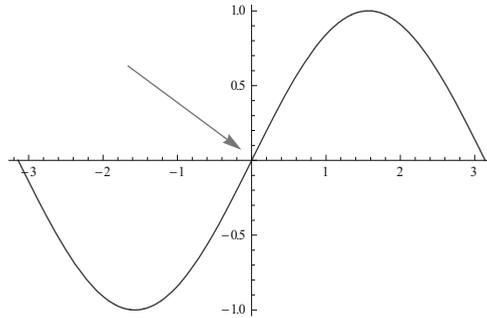


Figura 3.- Elementos del soporte gráfico de Mathematica

Menú Evaluation

En este menú se encuentran las opciones que permiten al usuario controlar la ejecución del kernel del programa. Contiene opciones para evaluar archivos o celdas, interrumpir el proceso de evaluación (con **Interrupt Evaluation** o **Abort Evaluation**), definir ciclos de evaluación, depurar programas escritos en el lenguaje de programación de Mathematica, etc.

Menú Palettes

Este menú contiene un listado de **Palettes**. Un **Palette** de Mathematica es un conjunto de herramientas destinadas a facilitar la introducción de instrucciones, la construcción de fórmulas o expresiones matemáticas, la generación de plantillas de trabajo, etc. Por ejemplo dentro de este menú con la opción **Stylesheets** se muestra distintas opciones a elegir en el documento en cuanto a su formato bien como libro, como artículo, monografía, etc.

Menú Window

Contiene opciones que permiten organizar las distintas ventanas que se van abriendo en pantalla durante la ejecución del programa. Es similar al menú de ventanas de cualquier programa de Windows.

Menú Help

A través de la opción **Help** se accede a las distintas ayudas On-line que ofrece el programa (guía de usuario, tutoriales, demostraciones, índice de comandos, archivos complementarios, etc.). Destacamos aquí la opción **Wolfram Website**, que nos abre un mundo de conocimientos sobre este programa y sus múltiples aplicaciones.

1.3 Notebooks

En un documento electrónico o notebook de Mathematica la información introducida y procesada se recoge en celdas. Cada celda contiene una unidad de información y está delimitada por un corchete situado en el margen derecho del documento. Las celdas pueden contener comentarios, gráficos, expresiones matemáticas, comandos, etc.

Las expresiones matemáticas y los comandos se introducen en el documento a través del teclado y/o con ayuda de los palettes. Mathematica refleja dicha información en pantalla, sin evaluarla. Para que Mathematica ejecute una instrucción o evalúe una expresión introducida es necesario transferirla al **kernel** presionando simultáneamente las teclas **Shift + Enter** (o **Intro** del teclado numérico). Mathematica entonces enumera la expresión introducida (**In[n]=**), ejecuta la instrucción y muestra el resultado en pantalla, enumerándolo también (**Out[n]=**), donde n es un número entero que sirve para enumerar las expresiones evaluadas.

En la pantalla siguiente mostramos un ejemplo del proceso de introducción y ejecución de datos:

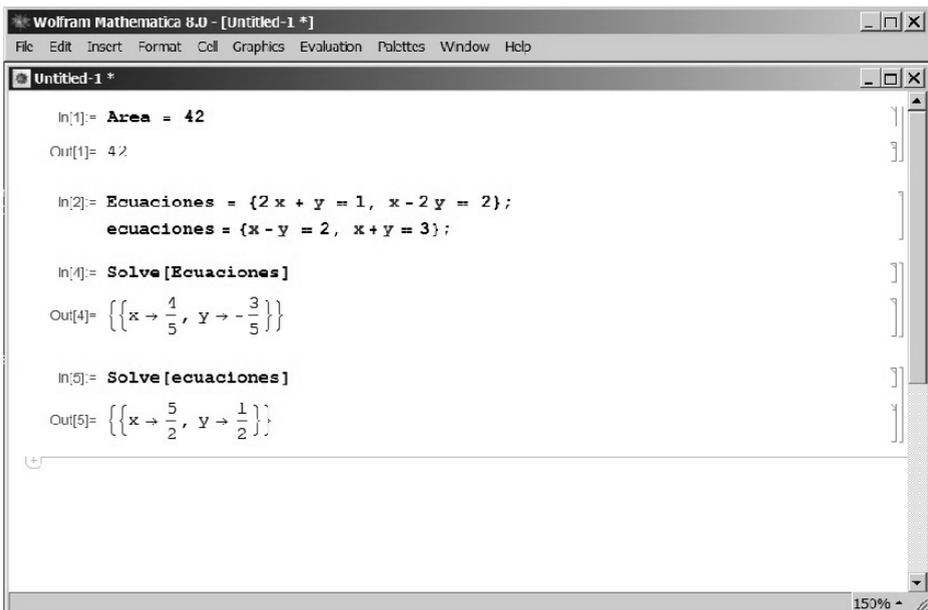


Figura 4.- Celdas en Mathematica

Los palettes

Para facilitar la introducción de fórmulas y expresiones en una celda, el programa incluye unas ventanas gráficas denominadas palettes. Mathematica dispone de varios palettes que pueden ser seleccionados desde la opción **Palettes** del menú principal.

Por ejemplo, el palette **Algebraic Manipulation**, dentro de la opción **Other**, facilita una lista de comandos de Mathematica que permiten manipular algebraicamente expresiones matemáticas, mientras que la palette **Basic Math Input** ,también dentro de la opción comentada, facilita los operadores, constantes y símbolos matemáticos que se requieren para la construcción de fórmulas. Lo observamos a continuación

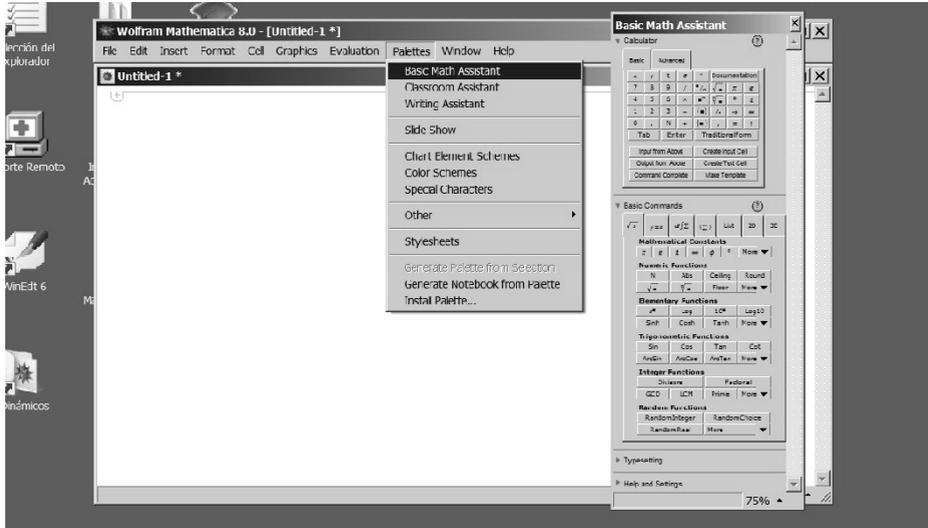


Figura 5.- Palettes de Mathematica

1.4 Obtención de ayuda

Mathematica cuenta con un sistema de ayuda On-line, estructurado a través de la opción **Help** del menú principal. Esta opción permite: acceder a un manual de usuario(libro virtual) con información organizada en bloques temáticos, obtener información sobre el uso de un comando seleccionándolo en pantalla, obtener información sobre el uso de un comando tecleado en la ventana de diálogo que despliega la página principal del manual de usuario, contactar directamente con la pagina Web oficial de Mathematica, etc. El mismo efecto se obtiene colocando el cursor sobre un comando y presionando la tecla F1.

También se puede obtener información sobre un comando o función desde la línea de comando utilizando el interrogante **?**, o dos interrogantes **??** o el comando **Options** :

? comando

?? comando

Options[comando]

donde **comando** es el nombre del comando o función del cual se desea obtener información. El siguiente ejemplo muestra la información que ofrece el programa al ejecutar estos comandos:

In[1]:= ? Integrate

Integrate[f, x] gives the indefinite integral $\int f \, dx$.

Integrate[f, {x, xmin, xmax}] gives the definite integral $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f \, dx$.

Integrate[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, ...]
 gives the multiple integral $\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \dots f$.

In[2]:= ?? Integrate

Integrate[f, x] gives the indefinite integral $\int f \, dx$.

Integrate[f, {x, xmin, xmax}] gives the definite integral $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f \, dx$.

Integrate[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, ...]
 gives the multiple integral $\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \dots f$.

Attributes [Integrate] = {Protected, ReadProtected }

Options [Integrate] :=
 {Assumptions -> \$Assumptions, GenerateConditions ->
 Automatic, PrincipalValue -> False }

In[3]:= Options[Integrate]

Out[3]= {Assumptions -> \$Assumptions ,
 GenerateConditions -> Automatic ,
 PrincipalValue -> False }

Para buscar ayuda sobre un tema determinado se selecciona “Documentation center” del menú Help. Mathematica carga en pantalla la “guía del usuario” del programa, la cual está dividida en ocho bloques temáticos, que permiten acceder a información sobre un tema específico (programación, algoritmos matemáticos, visualización y gráficos, etc). También contiene un índice alfabético de funciones, un tutorial de iniciación (que recomendamos al lector ejecutar para su iniciación), un capítulo sobre Demos y otros dos sobre librerías integradas y librerías externas, todo ello en la parte inferior como complemento.

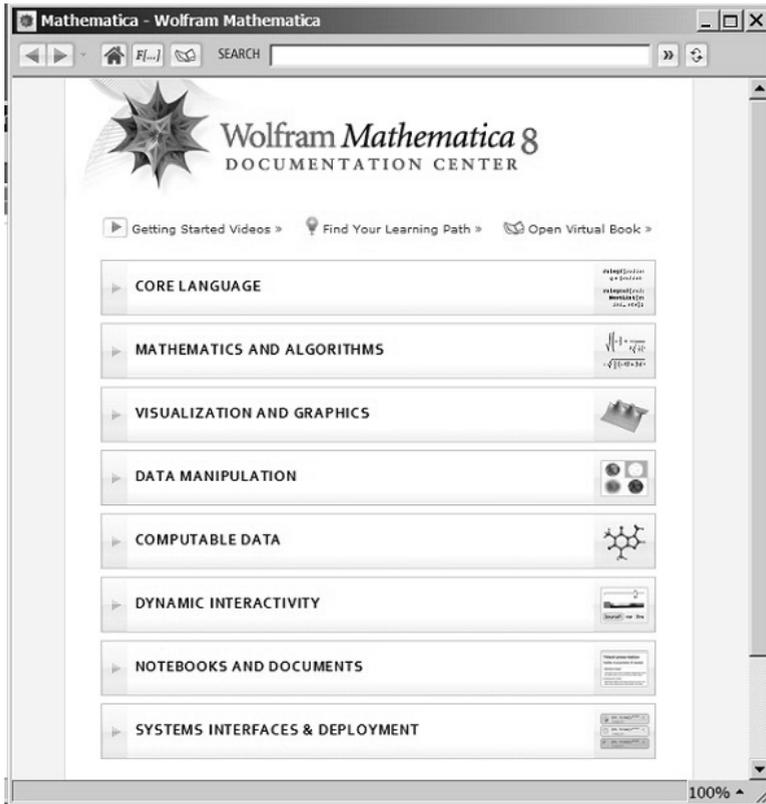


Figura 6.- Documentation Center

1.5 Sintaxis general de las órdenes

El compilador de Mathematica establece las siguientes normas para la introducción de comandos e instrucciones:

1. Mathematica **distingue el uso de letras mayúsculas y minúsculas**. **Radio** y **radio** son dos variables distintas ya que empiezan por letras diferentes:

Ejemplo:

```
In[4]:= Altura = 2; Radio = 3;
```

```
In[5]:= Volumen = altura * Pi * radio2
```

```
Out[5]= altura  $\pi$  radio2
```

```
In[6]:= Volumen = Altura * Pi * Radio2
```

```
Out[6]= 18  $\pi$ 
```

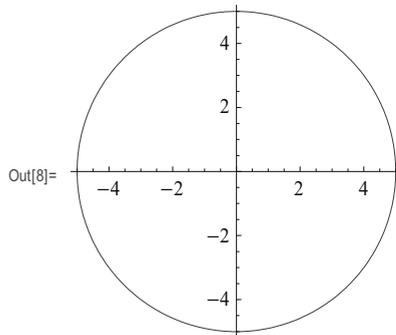
- Los nombres de comandos y funciones son palabras inglesas con la primera letra siempre en mayúscula. Si el nombre del comando es una palabra compuesta, la primera letra de cada una de las palabras que componen dicho nombre empieza con mayúscula.

Ejemplos:

In[7]:= **ReplaceAll** [$x^3 + x^2$, $x \rightarrow 5$]

Out[7]= 150

In[8]:= **ParametricPlot** [{5 Cos[t], 5 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}]



Otra opción es introducir el texto en formato libre, como veremos más adelante, aunque aquí mostramos cómo hacerlo. Con un doble-click en el símbolo + que aparece en pantalla se abre el menú que permite seleccionar el formato de entrada de expresiones. Eligiendo Free-form input podemos introducir comandos con sintaxis relajada (mayúsculas y minúsculas, lista de argumentos incompleta, etc.).

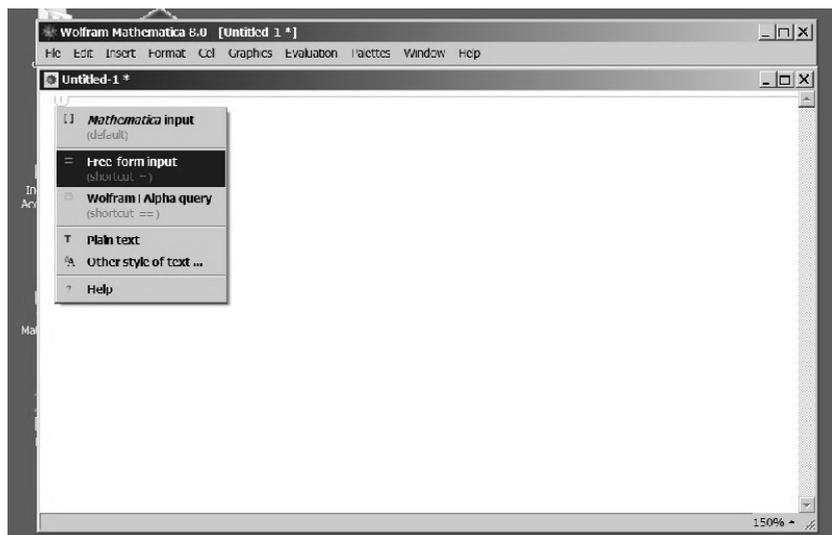


Figura 7.- Free Format Input

Para seguir leyendo haga click aquí