



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

ANÁLISIS DE CRITERIOS DE FALLO PARA MATERIALES COMPUESTOS

Autora

Esmeralda Castillo Sebastián

Tutor

José Luis Pérez Aparicio

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Universidad Politécnica de Valencia

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Valencia - Septiembre de 2016

**ANÁLISIS DE CRITERIOS DE FALLO PARA MATERIALES
COMPUESTOS.**

Esmeralda Castillo Sebastián

Grado en Ingeniería Aeroespacial
Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Septiembre de 2016

*“La satisfacción radica en el esfuerzo, no en el logro.
El esfuerzo total es una victoria completa.”*

Mahatma Gandhi.

Resumen

En este proyecto se ha llevado a cabo el estudio de 5 criterios de fallo para materiales compuestos; Tsai-Wu, Hoffman, Christensen, Hashin y Puck. Como requisito inicial es necesario la comprensión de la Teoría Clásica de Laminación de Placas la cual permite obtener las tensiones en un laminado.

La comparativa entre los diferentes criterios permite un conocimiento exhaustivo de éstos, mejorando su entendimiento y diferencias presentes lo cual resulta necesario en este trabajo. Como método de aplicación práctica se aplican los 5 criterios sobre diversos puntos de un volante de inercia de fibra de vidrio cuyo vector tensión es conocido debido al uso de un *software* de elementos finitos. Se obtiene como principal resultado, la validación del volante para los 5 criterios.

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer este Trabajo de Fin de Grado a mi tutor, Dr. José Luis Pérez Aparicio, por su dedicación, exigencia, paciencia y tiempo invertido en este proyecto. Por mostrarme un poco más del gran mundo de los *composites*.

A mi familia, con mención especial a mi madre Manoli y mi hermano Rubén por apoyarme durante estos 4 años fuera de casa, por vuestros ánimos en los malos momentos.

Agradecer también a aquellas personas que me impulsaron hace años a luchar por lo que quería y que finaliza con este trabajo, gracias IES San Pascual. También al profesorado universitario que durante esta etapa nos han mostrado su apoyo e interés en aprender no sólo del mundo aeronáutico sino de la vida.

Y por último pero no menos importante a mis compañeros y compañeras de carrera que durante estos 4 años hemos compartido tantas experiencias, risas, llantos, donde muchos de vosotros se habéis convertido no sólo en compañeros sino en amigos.

Pero en especial a ti, Francisco Sebastián por creer siempre en mí, gracias abuelo.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	III
Índice general	IV
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	XI
Lista de símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación y estado actual	1
1.1.1. Generalización de los materiales compuestos	2
1.1.2. Materiales compuestos en el sector aeronáutico	5
1.2. Objetivos	6
1.3. Organización de la memoria	7
2. Fundamentos teóricos	9
2.1. Teoría Clásica de Laminación de Placas	9
2.1.1. Introducción	9
2.1.2. Rigidez plana de laminados simétricos	9
2.1.3. Rigidez a flexión de laminados simétricos	11
2.1.4. Rigidez a flexión de laminados no simétricos	14
2.1.5. Transformación de las tensiones y deformaciones	16
2.1.6. Nomenclatura de laminados	16
2.2. Casos especiales de laminados	17
2.2.1. Laminados de una sola capa	17
2.2.2. Laminados compuestos de diversas capas	19
2.3. Verificación CLPT	20
2.3.1. Laminado de secuencia $[0^{\circ}_4]_T$	20
2.3.2. Laminado de secuencia $[0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$	22
2.4. Deformaciones y tensiones obtenidas analíticamente vs ElamX2 [®]	25
2.4.1. Representación de la deformada en el plano $x-y$ de una lámina para diversos θ	26
2.4.2. Deformaciones y tensiones en un laminado simétrico	27
2.4.3. Deformaciones y tensiones en un laminado no simétrico	31
3. Criterios de fallo interactivos	33
3.1. Introducción a los criterios de fallo	33
3.1.1. Nomenclatura usada	35
3.2. Criterio de Tsai-Wu	35
3.2.1. Efecto del parámetro F_{12}^* de Tsai Wu	39
3.2.2. Resumen Criterio de Tsai-Wu	42

3.3. Criterio de Hoffman	42
3.3.1. Resumen Criterio Hoffman	44
4. Criterios asociados con modos de fallo	45
4.1. Criterio de Christensen	45
4.1.1. Simetría transversal	45
4.1.2. Modos de fallo	45
4.1.3. Resumen del criterio de Christensen	46
4.1.4. Aplicación del criterio	46
4.1.5. Restricciones del criterio	47
4.2. Criterio de Hashin	47
4.2.1. Introducción	47
4.2.2. Consideraciones cuadráticas	48
4.2.3. Invariantes bajo rotaciones	48
4.2.4. Modos de fallo	49
4.2.5. Resumen del criterio de Hashin	50
4.2.6. Aplicación del criterio	51
4.2.7. Restricciones del criterio	51
4.3. Criterio de Puck	52
4.3.1. Introducción	52
4.3.2. Símbolos	53
4.3.3. Fundamentos del método	54
4.3.4. FF. Fractura de fibra	55
4.3.5. Consideraciones micromecánicas	58
4.3.6. IFF. Fallo de interfibra	58
4.3.7. Determinación de los parámetros del criterio de Puck	64
4.3.8. Coeficiente de seguridad R	66
4.3.9. Influencia de σ_1 en IFF	67
4.3.10. Resumen del criterio de Puck	68
5. Comparativa de los diversos criterios	71
5.1. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Hoffman	71
5.1.1. Criterio de Hoffman en la forma de Tsai-Wu	71
5.1.2. Comparación de los coeficientes de los criterios	71
5.1.3. Comparación en subespacios de esfuerzos	73
5.1.4. Conclusiones	75
5.2. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Christensen	75
5.2.1. Descripción criterio Christensen en forma Tsai-Wu	75
5.2.2. Comparación de ecuaciones de criterio de fallo	76
5.2.3. Comparación de los coeficientes de los criterios	76
5.2.4. Comparación en subespacios de esfuerzos	78
5.2.5. Conclusiones	81
5.3. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Hashin	81
5.3.1. Criterio de Hashin en la forma de Tsai-Wu	81
5.3.2. Comparación de los coeficientes de los criterios	83

ÍNDICE GENERAL

5.3.3. Comparación en subespacios de esfuerzos	84
5.3.4. Conclusiones	87
5.4. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Puck.	88
5.4.1. Conclusiones	90
5.5. Comparativa de los criterios de Tsai-Wu, Hashin, Hoffman y Christensen en tensión uniaxial límite	91
5.6. Conclusiones Generales	93
6. Análisis MEF de un volante de inercia	95
6.1. Introducción	95
6.1.1. Aplicaciones del volante de inercia	95
6.1.2. Desventajas del volante de inercia	96
6.2. Características del rotor analizado	96
6.3. Análisis MEF	98
7. Conclusiones y trabajos futuros	105
7.1. Conclusiones	105
7.2. Proyectos futuros	107
Apéndices	109
A. Presupuesto	109
B. Pliego de condiciones	111
B.1. Condiciones del puesto de trabajo	111
B.1.1. Introducción	111
B.1.2. Lugares de trabajo	112
B.2. Condiciones de los recursos informáticos	114
B.2.1. Condiciones del <i>hardware</i>	114
B.2.2. Condiciones del <i>software</i>	115
Bibliografía	117

Índice de figuras

1.1. Diversos impactos en aeronaves, a la izquierda durante un aterrizaje y a la derecha en pleno vuelo por un ave.	1
1.2. Lámina reforzada unidireccional con ejes locales $x - y - z$ y ejes globales 1 - 2 - 6.	2
1.3. Cabeza de palo de Golf XR16 fabricado con fibra de carbono.	3
1.4. Esquema de la composición de un laminado.	5
1.5. Evolución del uso de los materiales compuestos en las aeronaves civiles de Boeing y Airbus. Datos extraídos de Boeing [5] y Airbus [6].	6
2.1. Esquema de una placa laminada.	9
2.2. Deformación y tensión en un laminado simétrico.	10
2.3. Definición de los esfuerzos y sus signos que actúan sobre el laminado.	10
2.4. Desplazamientos de un punto genérico en el espesor del laminado.	12
2.5. Distribución de deformaciones y tensiones en un laminado simétrico sometido a momentos.	13
2.6. Definición de los momentos que actúan sobre el laminado.	13
2.7. Geometría de un laminado compuesto de n láminas.	14
2.8. Distribución de deformaciones y tensiones en un laminado no simétrico sometido a flexión.	15
2.9. Secuencia del laminado de estudio $[0^{\circ}_4]_T$	21
2.10. Secuencia del laminado de estudio $[0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$	22
2.11. Diagrama de flujo de la CLPT.	25
2.12. Representación esquemática de las deformaciones en una lámina en el plano $x-y$	26
2.13. Deformación de una lámina sometida a $N_x = 10^6$ N/m, línea discontinua (roja) representa la deformada, línea continua (negra) lámina sin deformación. Ángulo de fibra insertado en el elemento diferencial.	27
2.14. Deformación del laminado $[90/45/0]_s$ en 2 vistas para una fuerza externa $N_x = 10^6$ N/m con un factor de escala 10.	28
2.15. Deformación del laminado $[90/45/0]_s$ para una fuerza externa $N_x = 10^6$ N/m con un factor de escala 10 obtenido mediante el programa de MATLAB [®]	29
2.16. Deformación del laminado $[90/45/0]_s$ para una fuerza externa $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m con un factor de escala 10.	29
2.17. Deformación del laminado $[90/45/0]$ para una fuerza externa $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.	31
3.1. A la izquierda, fractura de un laminado F155/PW a tracción y a la derecha de F155/8HS tras un ensayo a compresión [11].	33
3.2. Equivalencia de estados de tensión entre tensión-compresión y cortante puro.	39
3.3. Efecto del coeficiente F_{12}^* en la envolvente de fallo de Tsai-Wu para el material T300/5208 con sus centros.	39
3.4. Esquema de los parámetros de la superficie de fallo de Tsai-Wu.	40
3.5. Efecto del coeficiente F_{12}^* sobre la inclinación de la envolvente de fallo de Tsai-Wu para el material T300/5208.	41

ÍNDICE DE FIGURAS

3.6.	Variación del centro de la elipse de fallo en función del coeficiente F_{12}^* del criterio de Tsai-Wu para el material T300/5208.	42
4.1.	Distintas aproximaciones para criterios de fallo que se pueden realizar: esfuerzos constantes (rojo), aproximación lineal (negro) y cuadrática (azul).	48
4.2.	Mecanismos de fallo. Ambos son totalmente distintos ya que FF afecta a fibra mientras que IFF afecta a matriz.	53
4.3.	Plano de fractura genérico en composite UD y ejes asociados.	54
4.4.	Fallo por compresión transversal con plano de fractura inclinado.	55
4.5.	Envolvente de fractura Möhr. El material puede romper por tracción (círculo d) o compresión simple a , por un estado de cortante puro c , o por una combinación de ambos b	55
4.6.	Imágenes representativas del efecto “fiber kinking”.	56
4.7.	Envolvente de fractura para FF en el espacio σ_1, σ_2	58
4.8.	Envolvente de fallo para IFF a tracción (tensión plana).	59
4.9.	Envolvente de fallo para IFF en compresión para tensión plana.	59
4.10.	Representación del modo de fallo A, válido sólo en zona interior a línea gruesa.	60
4.11.	Representación del modo de fallo B.	61
4.12.	Representación del modo de fallo C.	62
4.13.	Envolvente de fallo para IFF, definida por 2 elipses y 1 parábola. Incluyendo 3 modos diferentes: A, B, C.	62
4.14.	Envolvente de fractura para el caso particular de T300/5208.	63
4.15.	Representación de los modos de fallo A y C para una pieza sometida a torsión [15] (cortante puro, únicamente modos A y C).	63
4.16.	Significado físico de los parámetros p	65
4.17.	Visualización del coeficiente de seguridad R	66
4.18.	Envolvente en el plano σ_1 - σ_2 con influencia de σ_1 en IFF en función de los parámetros m y s	68
5.1.	Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . A la izquierda Tsai-Wu y a la derecha Hoffman. Se observa que con ambos criterios se obtiene la misma envolvente.	73
5.2.	Subespacio formado por σ_2 y σ_3 de los criterios Tsai-Wu y Hoffman.	74
5.3.	Subespacio formado por los σ_2 y σ_1 donde ambos criterios describen 2 elipses.	74
5.4.	Espacio formado por σ_6 , σ_2 y σ_1 donde ambos criterios describen 2 elipsoides. Tsai-Wu se representa en azul y Hoffman en naranja.	75
5.5.	Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . A la izquierda Tsai-Wu y a la derecha el modo I de Christensen. Se observa que con ambos criterios (Christensen y Tsai-Wu) se obtiene la misma envolvente.	79
5.6.	Subespacio formado por σ_2 y σ_3 . Sólo se aplica el modo I de Christensen. La diferencia entre criterios es debida al valor del coeficiente F_{13}^*	80
5.7.	Subespacio formado por los σ_2 y σ_1 . Se usan los 2 modos del criterio de Christensen. La envolvente del criterio de Christensen está compuesta por 2 curvas (no cerradas), correspondientes a los 2 modos.	81

5.8.	Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . Construcción de la envolvente del criterio de Hashin, a partir de los modos FMT (izquierda) y FMC (derecha), siendo la zona válida la de mayor grosor.	85
5.9.	Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . En línea continua se representa el criterio de Hashin y en discontinua el de Tsai-Wu. En este subespacio de esfuerzos, los criterios de Tsai-Wu y Christensen eran iguales.	85
5.10.	Subespacio formado por σ_2 y σ_3 . Se comparan los criterios de Hashin (línea continua) y Tsai-Wu (discontinua). Se observa que la envolvente de Hashin está compuesta por 1 elipse cerrada y otra no cerrada.	86
5.11.	Subespacio formado por σ_2 y σ_1 . Hashin se representa por 4 líneas discontinuas correspondientes a 4 modos que forman la envolvente rectangular para $\tau_T = 0$. El criterio de Tsai-Wu aparece representado por puntos dando lugar a una envolvente elipsoidal.	87
5.12.	Subespacio formado por σ_1 y σ_2 . Puck usa una aproximación lineal (línea continua) ya que se basa en tensión máxima, Tsai-Wu (discontinua) lo hace en Von Mises.	89
5.13.	Subespacio formado por σ_1 y σ_2 . A diferencia de la Fig. 5.12 se incluye la influencia de σ_1 sobre el mecanismo IFF en la envolvente de Puck.	89
5.14.	Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . Puck utiliza únicamente el modo IFF (línea continua).	90
5.15.	Comparativa para ensayo uniaxial de los criterios cuadráticos con material boron-epoxy, datos experimentales extraídos de [25].	91
5.16.	Comparativa de diversos criterios de fallo no cuadráticos para un material de boron-epoxy, datos experimentales extraídos de [25].	92
6.1.	Estructura de un acumulador cinético [26].	95
6.2.	Dimensiones del volante de inercia a analizar cuyas unidades están presentadas en mm.	97
6.3.	Volante de inercia en 3D. A la izquierda una vista frontal del diseño, donde los anillos negros representan a los formados por material compuesto y a la derecha una perspectiva cortada que permite observar la disposición interior de los discos.	98
6.4.	Representación del mallado obtenido en ANSYS [®] del volante de inercia.	99
6.5.	Representación MEF de la tensión σ_x que se corresponde con la radial del anillo 2 de fibra de vidrio.	99
6.6.	Representación MEF de la tensión σ_y que se corresponde con la circunferencial del anillo 2 de fibra de vidrio.	100
6.7.	Situación de los nodos de los puntos 1 y 2 sobre el anillo 1 de fibra de vidrio.	101
6.8.	Situación de los nodos de los puntos 1 y 2 sobre el anillo 1 de fibra de vidrio.	102
6.9.	Situación de los nodos de los puntos 1 y 2 sobre el anillo 1 de fibra de vidrio.	102

Índice de tablas

1.1. Propiedades de las fibras de refuerzo, resinas, así como de las aleaciones más comúnmente usadas, extraída de [4].	4
2.1. Propiedades y características del material T300/5208 extraído de [1].	26
2.2. Deformaciones y tensiones globales del laminado $[90/45/0]_s$ en borde superior de placa para una fuerza externa aplicada $N_x = 10^6$ N/m.	28
2.3. Deformaciones y tensiones globales del laminado $[90/45/0]_s$ en borde superior de lámina para unos momentos externos aplicados $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.	30
2.4. Deformaciones y tensiones globales del laminado $[90/45/0]$ en borde superior de lámina para unos momentos externos aplicados $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.	32
3.1. Notación de los esfuerzos, según los distintos autores.	35
3.2. Notación de los parámetros de fallo según los distintos autores.	35
3.3. Relación entre los coeficientes de Tsai-Wu y las resistencias a fallo.	42
3.4. Relación entre los coeficientes de Hoffman y las resistencias a fallo para material transversalmente isotrópico con plano basal 2-3.	44
4.1. Valores de parámetros de Christensen.	47
4.2. Valores del parámetro de inclinación $p_{\perp\parallel}$ y de resistencias $R_{\perp}, R_{\perp\parallel}$ tanto para el dominio de tracción como compresión [15].	66
4.3. Valores del parámetro de inclinación $p_{\perp\perp}$ tanto para el dominio de tracción como compresión [13].	66
5.1. Relación entre los coeficientes de Tsai-Wu y Hoffman.	71
5.2. Comparación cualitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Hoffman.	72
5.3. Comparación cuantitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Hoffman así como la notación distintiva entre ambos.	72
5.4. Coeficientes de Christensen para modo matriz, según la notación de Tsai-Wu.	76
5.5. Coeficientes de Christensen para modo fibra, según la notación de Tsai-Wu.	76
5.6. Comparación cualitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Christensen.	77
5.7. Comparación cuantitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Christensen y notación de los distintos coeficientes.	78
5.8. Coeficientes de Hashin para modo FFT, según la notación de Tsai-Wu.	82
5.9. Coeficientes de Hashin para modo FMT, según la notación de Tsai-Wu.	82
5.10. Coeficientes de Hashin para modo FMC, según la notación de Tsai-Wu.	83
5.11. Comparación cualitativa entre los coeficientes de Tsai-Wu y Hashin.	83
5.12. Comparación cuantitativa entre los coeficientes de Tsai-Wu y Hashin, para el material T300/5208 grafito/epoxy y la notación de los distintos coeficientes.	84
5.13. Propiedades y características del material B4/N5055 extraído de [1] y [25].	91
5.14. Parámetros de fallo de cada criterio, así como aquellos que son costosos de obtener experimentalmente.	93
6.1. Propiedades y características de la fibra de vidrio empleada extraída de [27].	98

6.2. Componentes de tensión de los 5 puntos a estudiar de los diferentes anillos de fibra de vidrio expresadas en Pa. 101

6.3. Coeficientes de seguridad R con un error de precisión de $\pm 0,001$ para los 5 puntos de la Tabla 6.2. 103

6.4. Dispersión entre los valores de los criterios para los 5 puntos estudiados. . . 103

Lista de Símbolos

Mayúsculas

A	—	Área (m^2).
A_f	—	Coeficiente que acompaña al término lineal en el modo FF de Hashin (-).
A_m	—	Coeficiente que acompaña al término lineal en el modo FM de Hashin (-).
\mathbf{A}	—	Matriz rigidez extensional (N/m).
$\tilde{\mathbf{A}}$	—	Inversa de la matriz rigidez extensional ($\text{N/m})^{-1}$.
B_f	—	Coeficiente que acompaña al término cuadrático en el modo FF de Hashin (-).
B_m	—	Coeficiente que acompaña al término cuadrático en el modo FM de Hashin (-).
\mathbf{B}	—	Matriz rigidez acoplamiento (N).
C_i	—	Coeficientes del criterio de Hoffman (-).
\mathbf{D}	—	Matriz rigidez a flexión ($\text{N}\cdot\text{m}$).
E	—	Módulo de Young (N/m^2).
E_{f1}	—	Módulo de Young de la fibra (N/m^2).
F_i	—	Coeficiente del criterio de Tsai-Wu (-).
F_{ij}	—	Coeficiente de acoplamiento del criterio de Tsai-Wu (-).
F_{ij}^*	—	Término experimental del coeficiente de acoplamiento del criterio de Tsai-Wu (-).
G	—	Módulo de cizalladura (N/m^2).
I_i	—	Tensor de tensión.
\mathbf{M}	—	Vector momento flector (N).
\mathbf{N}	—	Vector fuerzas externas (N/m).
\mathbf{Q}	—	Matriz de rigidez reducida (N/m^2).
$\tilde{\mathbf{Q}}$	—	Matriz de rigidez reducida transformada (N/m^2).
R	—	Factor / coeficiente de seguridad (-).
R_{FF}	—	Factor / coeficiente de seguridad del modo de fallo de fibras (-).
$R_{\perp}^{(+)\text{A}}$	—	Resistencia a tracción en un plano de fractura (Pa).
$R_{\perp}^{(-)\text{A}}$	—	Resistencia a compresión en un plano de fractura (Pa).
$R_{\perp\perp}^{\text{A}}$	—	Resistencia a cortante en un plano de fractura en dirección perpendicular fibra (Pa).
$R_{\perp\parallel}^{\text{A}}$	—	Resistencia a cortante en un plano de fractura en dirección paralela fibra (Pa).
S	—	Resistencia del composite a cortante en el plano anisótropo en dirección fibras (Pa).
\mathbf{T}	—	Tensor de Transformación (-).
X_o	—	Posición x del centro de la elipse de Tsai-Wu en el plano σ_1 - σ_2 (m).
X_T	—	Resistencia a tracción de fibra en su dirección (Pa).
X_C	—	Resistencia a compresión de fibra en su dirección (Pa).
Y_o	—	Posición y del centro de la elipse de Tsai-Wu en el plano σ_1 - σ_2 (m).
Y_T	—	Resistencia a tracción del composite en dirección transversal (Pa).

Y_C — Resistencia a compresión del composite en dirección transversal (Pa).

Minúsculas

a — Dimensión total en la dirección x para una placa (m).
 b — Dimensión total en la dirección y para una placa (m).
 e — Coeficiente que acompaña al término cuadrático en la ecuación de Tsai-Wu (-).
 f — Coeficiente que acompaña al término lineal en la ecuación de Tsai-Wu (-).
 g — Coeficiente que acompaña al término independiente en la ecuación de Tsai-Wu (-).
 h — Dimensión total en la dirección z para una placa (m).
 i — Contador para los sumatorios (-).
 k_1 — Coeficiente del modo de FM de Christensen (-).
 k_2 — Coeficiente del modo de FF de Christensen (-).
 $m_{\sigma f}$ — Factor de magnificación de Puck (-).
 n — Número de láminas (-).
 n — Relativo a la dirección x o y (-).
 $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ — Pendiente envolvente ejes (σ_n, τ_{nl}) en Puck para $\tau_{nl} < 0$ (-).
 $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ — Pendiente envolvente ejes (σ_n, τ_{nl}) en Puck para $\tau_{nl} > 0$ (-).
 $p_{\perp\perp}^{(-)}$ — Pendiente envolvente ejes (σ_n, τ_{nt}) en Puck para $\tau_{nt} > 0$ (-).
 $p_{\perp\perp}^{(+)}$ — Pendiente envolvente ejes (σ_n, τ_{nt}) en Puck para $\tau_{nt} > 0$ (-).
 t — Dimensión total del laminado (m).
 u — Desplazamiento en dirección x (m).
 v — Desplazamiento en dirección y (m).
 w — Desplazamiento en dirección z (m).
 x, y, z — Componentes de los ejes globales (-).

Letras griegas

α_1 — Coeficiente del modo de FM de Christensen (-).
 α_2 — Coeficiente del modo de FF de Christensen (-).
 β_1 — Coeficiente del modo de FM de Christensen (-).
 β_2 — Coeficiente del modo de FF de Christensen (-).
 γ_{xy} — Deformación tangencial (-).
 γ_1 — Coeficiente del modo de FM de Christensen (-).
 γ_2 — Coeficiente del modo de FF de Christensen (-).
 Δ — Coeficiente del modo de FM de Christensen (-).
 ε — Vector deformación (-).
 ε_{1T} — Deformación longitudinal de fallo a tracción (-).

LISTA DE SÍMBOLOS

ε_{1C}	—	Deformación longitudinal de fallo a compresión (-).
η_{w1}	—	Factor de reducción de Puck. (-)
κ	—	Curvatura (-).
λ_1	—	Coefficiente del modo de FM de Christensen (-).
λ_2	—	Coefficiente del modo de FF de Christensen (-).
ν	—	Coefficiente de Poisson (-).
ν_{f12}	—	Coefficiente de Poisson de la fibra en su plano (-).
σ	—	Tensión (Pa).
σ_{6c}	—	Tensión de cortante en el punto de cambio entre los modos B y C de Puck (Pa).
θ	—	Ángulo entre eje global y eje local ($^\circ$).
θ_{pf}	—	Ángulo del plano de fractura ($^\circ$).
ρ	—	Densidad (kg/m^3).
τ	—	Tensión tangencial o cortante (Pa).
τ_T^A	—	Resistencia del composite a cortante en el plano anisótropo en dirección perpendicular fibras (Pa).
ϕ	—	Ángulo de inclinación del semieje mayor en la elipse de Tsai-Wu en el plano σ_1 - σ_2 ($^\circ$).

Subíndices

C	—	Referido a compresión.
T	—	Indicación de totalidad referido a un laminado.
T	—	Referido a tracción.
fC	—	Relativo a las fibras y a compresión.
fT	—	Relativo a las fibras y a tracción.
ad	—	admisible.
nt	—	Contenido en el plano de acción en dirección perpendicular a las fibras.
$n1$	—	Contenido en el plano de acción en dirección paralela a las fibras.
o	—	Relativo al plano medio.
p	—	Relativo al punto P.
r	—	Indicación de rotado.
s	—	Indicación de simetría.
x	—	Referido a la dirección longitudinal en eje global.
y	—	Referido a la dirección transversal en eje global.
xy	—	Referido a la dirección transversal al plano x - y en eje global.
1	—	Referido a la dirección longitudinal en eje local.
2	—	Referido a la dirección transversal en eje local.
6	—	Referido a la dirección transversal al plano 1-2 en eje local.

Superíndices

0	—	Referido al plano medio.
<i>Ch</i>	—	Referido a Christensen.
<i>H</i>	—	Referido a Hashin.
<i>Hf</i>	—	Referido a Hoffman.
<i>R</i>	—	Referido a rotura.
<i>TW</i>	—	Referido a Tsai-Wu.
T	—	Indicación de traspuesta.

Acrónimos y siglas

CFRP	—	<i>Carbon Fiber Reinforced Polymer.</i>
CLPT	—	<i>Classical Laminated Plate Theory.</i>
FF	—	Fallo de Fibras.
FFC	—	Fallo de Fibras a Compresión.
FFT	—	Fallo de Fibras a Tracción.
FM	—	Fallo de Matriz.
FMT	—	Fallo de Matriz a Compresión.
FMT	—	Fallo de Matriz a Tracción.
FS	—	Factor de Seguridad.
GFRP	—	<i>Glass Fiber Reinforced Polymer.</i>
IFF	—	<i>Inter Fiber Failure.</i>
MEF	—	Método de los Elementos Finitos.
PRF	—	Polímero Reforzado con Fibras.
UD	—	Unidireccional.
WWFE	—	<i>World Wide Failure Exercises.</i>

1.1. Motivación y estado actual

El uso de los materiales compuestos ha crecido en las últimas décadas, desde que empezara su comercialización a mediados del siglo XX. La aplicación de éstos abarca diversos sectores como el aeronáutico, la automoción, la defensa, el naval, el transporte, la energía eólica y los deportes de alta competición entre otros. Desde un punto de vista estructural son muchas las ventajas que ofrecen respecto a los materiales usados tradicionalmente, como el aluminio o el acero. Sus propiedades dan lugar a un material liviano, y sus módulos de rigidez y resistencia son un gran atractivo en aplicaciones estructurales donde la relación resistencia/peso sea crucial.

Los materiales compuestos también presentan una serie de desventajas relacionadas con el servicio. Particularizando, una de las desventajas más significativas es la susceptibilidad al daño por impacto. Los fenómenos de impacto sobre las estructuras constituyen sollicitaciones dinámicas de interés especial, ya que aunque por lo general su probabilidad es más baja que otros tipos de acciones, su efecto es potencialmente catastrófico. El impacto de objetos a lo largo de la vida de una aeronave puede sobrevenir desde su comienzo con el montaje de la estructura, pasando por pequeños impactos de objetos en las maniobras de despegue y aterrizaje, hasta en pleno vuelo por aves como se aprecia en la Fig. 1.1. Esto resulta crítico cuando un impacto que tiene lugar a baja velocidad no penetra de forma completa el laminado (sucesión de capas de material compuesto), pero induce un daño interno causando así una reducción de su rigidez, estabilidad estructural y resistencia. Este tipo de daño resulta complicado de detectar en una inspección visual.



Figura 1.1: Diversos impactos en aeronaves, a la izquierda durante un aterrizaje y a la derecha en pleno vuelo por un ave.

El uso de los materiales compuestos en el sector aeronáutico ha causado la atención en aspectos tales como la integridad de las estructuras. Se han planteado serias cuestiones sobre la tolerancia al daño que presentan dichos materiales, un gran requisito en las

aeronaves. Por esto se exige un profundo conocimiento de la respuesta de los materiales compuestos, así como la detección, el control y evolución del daño.

1.1.1. Generalización de los materiales compuestos

Se entiende por material compuesto aquel formado por 2 o más componentes no solubles, de forma que las propiedades obtenidas en el material final sean superiores que las que tendrían dichos materiales utilizados de manera aislada. Algunas de estas cualidades son: dureza, rigidez, resistencia, resistencia a la corrosión, peso, vida a fatiga, conductividad térmica, entre otras. Al componente que proporciona la mayor parte de las propiedades mecánicas se le denomina refuerzo mientras que al material continuo que embebe matriz, siendo la función de éste último la protección y la transferencia de esfuerzos principalmente.

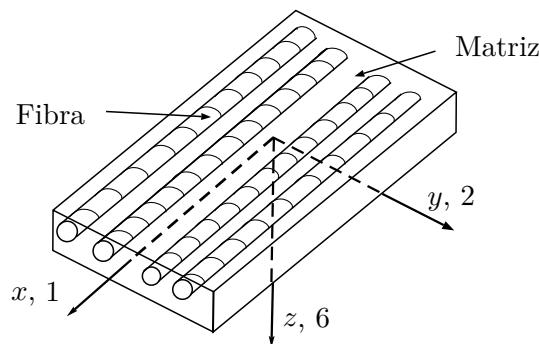


Figura 1.2: Lámina reforzada unidireccional con ejes locales $x-y-z$ y ejes globales 1-2-6.

Los materiales compuestos se pueden clasificar según la forma de los constituyentes en 4 tipos:

- Materiales compuestos de fibra que consisten en fibras continuas incrustadas en una matriz.
- Materiales compuestos de láminas que consisten en láminas de varios materiales.
- Materiales compuestos de partículas que se componen de partículas en un matriz.
- La combinación de algunos o todos de los primeros tipos.

Centrándonos en los de primer tipo, los polímeros reforzados con fibras (PRF), son una familia de materiales compuestos que presentan una gran rigidez y resistencia con un extraordinario bajo peso. Estas cualidades los hace idóneos para aquellas aplicaciones en las que la relación resistencia/peso sea crucial y el coste no sea un impedimento, como por ejemplo el transporte aéreo y el material deportivo de alta competición.

Las propiedades mecánicas del material no solo dependerán de la matriz y refuerzo usados, sino que también de la longitud del refuerzo y de la distribución de las fibras

dentro de la matriz. Generalizando, los materiales compuestos con fibras cortas tendrán propiedades inferiores debido a la incapacidad de transferir eficientemente los esfuerzos cuando las fibras son menores de una longitud crítica.



Figura 1.3: Cabeza de palo de Golf XR16 fabricado con fibra de carbono.

En la Tabla 1.1 se presentan las propiedades más características de las fibras de refuerzo usadas así como de las matrices (resinas). También se incluyen las aleaciones más comunes. A simple vista, no se aprecia una gran diferencia entre las propiedades mecánicas del material compuesto y de las aleaciones, pero si se analizan dichas propiedades con respecto a la densidad, los materiales compuestos ofrecen una gran y principal ventaja, la obtención de una misma resistencia con un menor peso. Esta ventaja que ha producido el gran auge de su uso.

Otra ventaja que presentan los materiales compuestos es la anisotropía, especialmente si los comparamos con los metales, que son isótropos. El material compuesto puede diseñarse y fabricarse de tal forma que se optimice el uso de éste y se aproveche toda su capacidad mecánica.

En cambio, los materiales compuestos presentan 2 problemas principales, el primero surge de la complejidad de las piezas y tamaño (en el sector aeronáutico suelen ser grandes) ya que dificulta su fabricación. Los equipos necesarios son muy específicos encareciendo el coste.

El segundo problema está dado por la anisotropía del material compuesto ya que resulta complejo el cálculo exacto de la rotura de la pieza. Como se observa en la Tabla 1.1, la resistencia mecánica de las fibras es del orden de 30 a 50 veces mayor que la resistencia de la matriz, esto conduce a un comportamiento anisótropo si se trabaja con material compuesto con fibras largas orientadas en una única dirección. Para reducir dicha anisotropía en el plano, se recurre al proceso de laminación. Este proceso constituye el apilamiento de sucesivas capas con distintas orientaciones del material compuesto de fibras largas con una perfecta adherencia entre sí.

Material	Diámetro fibra \varnothing (μm)	Densidad ρ (kg/m^3)	Módulo Young E (MPa)	Resistencia tracción X_T (MPa)	Deformación ε (%)	Módulo Young específico E/ρ	Resistencia tracción específica X_T/ρ
Aluminio 2024	-	2800	75	450	10	26,79	0,16
Titanio TA 6V	-	4400	105	1200	14	23,86	0,27
Acero	-	7800	205	400-1600	1,8-10	26,28	0,05-0,205
Fibra vidrio S	10	2500	86	3200	4	34,40	1,28
Fibra vidrio E	16	2600	74	2500	3,5	28,46	0,96
Fibra Kevlar ® 49	12	1450	130	2900	2,3	89,66	2,00
Fibra Carbono HT	7	1750	230	3200	1,3	131,43	1,83
Fibra Carbono HM	6,5	1800	390	2500	0,6	216,67	1,39
Fibra boro	100	2600	400	3400	0,8	153,85	1,31
Resina Epoxi	-	1200	4500	130	2 (100°C)	3,75	0,11
Resina Poliéster	-	1200	4000	80	2,5	3,33	0,07
Resina Poliamida	-	1400	4000-19000	70	1	2,86-13,57	0,05

Tabla 1.1: Propiedades de las fibras de refuerzo, resinas, así como de las aleaciones más comúnmente usadas, extraída de [4].

El objetivo de este proceso es obtener, tras la aplicación de sucesivas láminas orientadas de manera óptima, unas características preestablecidas por el fabricante. Hay que destacar que la rigidez específica en una de las direcciones se reduce a medida que se añaden láminas de material en otras direcciones.

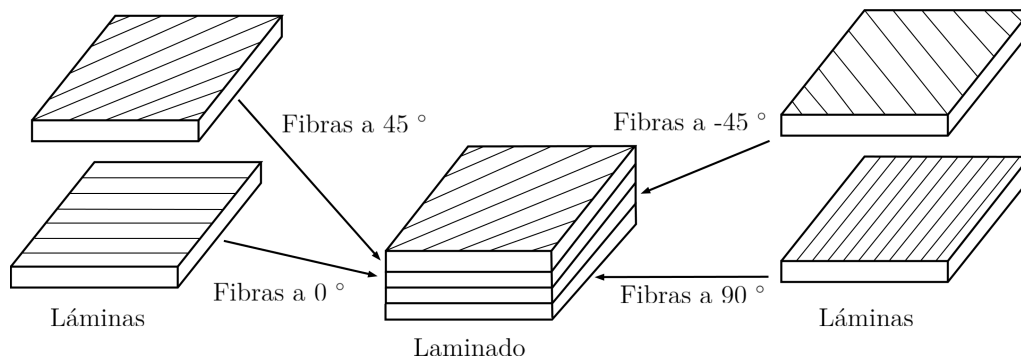


Figura 1.4: Esquema de la composición de un laminado.

Los laminados son caracterizados por sus excelentes propiedades en el plano, destacando su comportamiento a tracción y a compresión (aunque ésta última en menor medida) en la dirección de las fibras. No obstante, debido a la falta de refuerzo en la dirección normal, la resistencia transversal de un laminado es muy reducida.

1.1.2. Materiales compuestos en el sector aeronáutico

El sector aeronáutico puede ser considerado como el precursor del uso de materiales compuestos y es en buena parte el responsable del crecimiento de éstos en las últimas décadas. Sus primeros inicios tuvieron lugar en la aviación militar, el cazabombardero General Dynamics F-111 sustituyó el pivote de carga principal del ala que en su inicio era de acero por material compuesto de boro y epoxi debido a su rotura por fatiga. Gradualmente se tomó consciencia de la ventajas que ofrecían este tipo de material y su uso se extendió a otras zonas de las aeronaves como el estabilizador horizontal del caza Grumman F-14, seguida por el estabilizador horizontal y timón de profundidad del F-15 y F-16, este último en fibra de carbono y epoxi. Sin embargo, el porcentaje que representaba este material no superaba el 5%. En la última década del siglo XX, el uso de materiales compuestos en el sector militar se vio incrementado de manera abrupta llegando a ser la totalidad del fuselaje del bombardero Northrop Grumman B-2 Spirit.

Por otro lado, el uso de materiales compuestos en el sector civil ha sido más conservador, debido principalmente a problemas relacionados con la seguridad. En su inicio, los materiales compuestos se limitaron al timón de profundidad, y ciertas superficies de control como en el avión Boeing 767. Pero al igual que ocurrió con el sector militar, su uso ha experimentado una evolución exponencial que se refleja en la Fig. 1.5. En ella se encuentran representados los porcentajes de material compuesto usados en diversos modelos de Boeing y Airbus frente al año del primer vuelo.

En la actualidad los materiales compuestos de fibra de carbono en matriz polimérica se encuentran en pleno auge dentro de la industria aeronáutica, así como la aeroespacial y militar. Entre los más recientes avances en la utilización de los materiales compuestos se encuentra el avión comercial Boeing 787, que tiene un 50% de su peso estructural fabricado en materiales compuestos, repartidos entre el fuselaje, los estabilizadores y las alas.

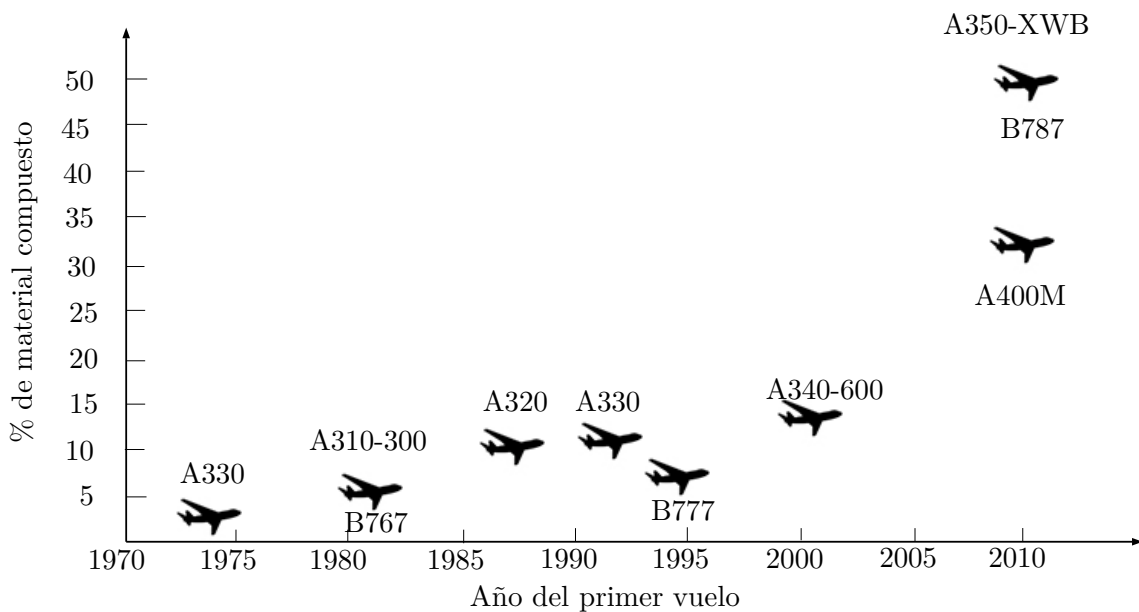


Figura 1.5: Evolución del uso de los materiales compuestos en las aeronaves civiles de Boeing y Airbus. Datos extraídos de Boeing [5] y Airbus [6].

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es adquirir los conocimientos que permitan predecir el fallo en materiales compuestos sometidos a fuerzas externas. Para ello, y tal y como indica el título del trabajo, se realiza un análisis de 5 criterios de fallo. Como propósito a alcanzar en el estudio se encuentra el conocimiento de las discrepancias existentes entre los diversos criterios, así como las ventajas y desventajas de la aplicación de unos u otros.

Será necesario conocer la teoría clásica de placas laminadas la cual permitirá obtener el estado de tensión y de deformaciones tras someterlo a fuerzas externas.

Como meta final se obtiene la evaluación de una pieza real analizada mediante un programa de elementos finitos que permita conocer su estado de tensión y así evaluar los diversos criterios de fallo estudiados.

1.3. Organización de la memoria

La Memoria se estructura de la siguiente forma:

- En el Capítulo 1 se lleva a cabo una breve introducción a los materiales compuestos, así como de su evolución durante los últimos años en el sector aeronáutico. Se exponen además la importancia de conocer sus mecanismos de fallo.
- En el Capítulo 2 se desarrolla la teoría clásica de placas laminadas. Se exponen además la importancia de conocer sus mecanismos de fallo y se evalúan 2 casos de laminados simétricos con dicha teoría. Además se representa la deformación de una lámina en función del ángulo de las fibras. Finalmente se comparan los valores de la deformación y la tensión obtenidas en la teoría con un *software*.
- En el Capítulo 3 se expone una breve introducción a los criterios de fallo y su subdivisión. Se estudian los criterios de fallo interactivos: Tsai-Wu y Hoffman.
- En el Capítulo 4 se estudian los criterios asociados a modos de fallo de Christensen, Hashin y Puck.
- En el Capítulo 5 se lleva a cabo una comparativa de los diversos criterios. En esta comparativa se estudian las diferencias entre coeficientes usados y las ecuaciones así como las diferencias presentes en las envolventes para diversos subespacios de tensión.
- En el Capítulo 6 se lleva a cabo un estudio mecánico sobre un volante de inercia mediante un programa informático. Éste nos permite extraer las tensiones y comparar así los diversos criterios en una pieza real.
- En el Capítulo 7 se exponen las conclusiones que se han ido extrayendo a lo largo del documento así como el trabajo futuro para completar el estudio.
- En el Anexo A se adjunta el presupuesto que conlleva el trabajo realizado.
- En el Anexo B se muestra el pliego de condiciones donde se exponen las condiciones técnicas, administrativas y legales para que el objeto del TFG pueda materializarse en las condiciones especificadas.

2

Fundamentos teóricos

2.1. Teoría Clásica de Laminación de Placas

2.1.1. Introducción

La Teoría Clásica de Laminación de Placas (sus siglas en inglés, CLPT) se empezó a desarrollar en los años 60, especialmente para el diseño de piezas hechas de material compuesto. Está basada en trabajos de Elasticidad teórica y de análisis de placas publicados a principios del siglo pasado [7]. Por su sencillez es la más usada hasta el momento, por lo menos en aplicaciones en las que estos materiales se conforman como placas o láminas de espesor pequeño (comparada con el resto de dimensiones).

Se trata pues de estudiar el comportamiento de una placa de espesor h ; las otras dimensiones, el equilibrio y las condiciones de contorno no intervienen en esta teoría [1] y [2]. Una placa es una estructura bidimensional en la que su espesor es menor al resto de las dimensiones. Para el caso de estudio de una placa laminada, poseerá láminas cuyas fibras que se encuentran orientadas en una dirección específica e inmersas en una matriz polimérica. Las propiedades dependerán del material utilizado tanto en la matriz como en las fibras, así como la orientación de éstas. Para desarrollos futuros la longitud de la placa será a en la dirección x , b en la dirección y , como se puede apreciar en la Fig. 2.1.

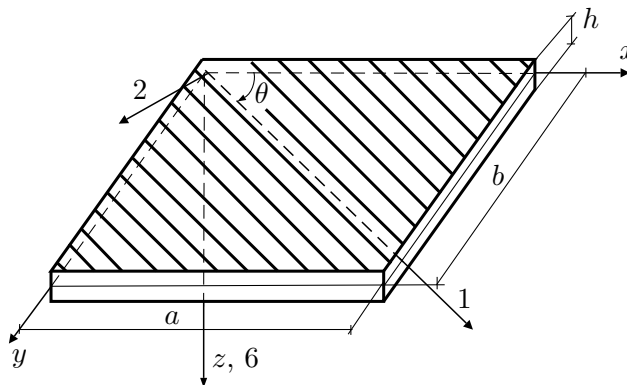


Figura 2.1: Esquema de una placa laminada.

2.1.2. Rigidez plana de laminados simétricos

El estudio de esta subsección se centra en el comportamiento de laminados simétricos que se encuentran sometidos a estados de sollicitación en su plano. La hipótesis para su desarrollo son:

- El material compuesto presenta un comportamiento elástico-lineal hasta rotura.
- El laminado presenta un espesor pequeño (placa laminada delgada).

- La deformación de cualquier lámina es igual a la del laminado (comportamiento solidario de todas las láminas).

Los símbolos utilizados comúnmente se encuentran recogidos en la Lista de Símbolos inicial. Como se observa en la Fig. 2.2 para tracción en dirección n que puede ser x o y , la deformación en todas las láminas es la misma ε^0 , mientras que las tensiones actuantes en cada lámina, son distintas si bien la distribución de tensiones es simétrica respecto al plano medio.

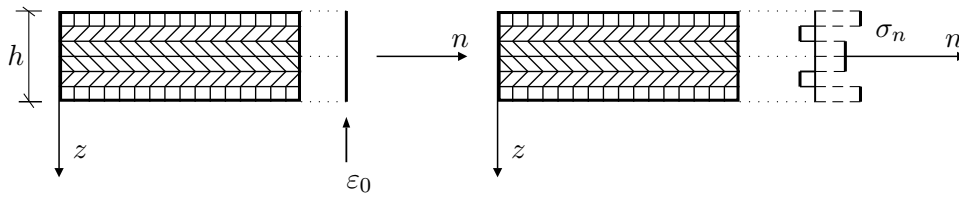


Figura 2.2: Deformación y tensión en un laminado simétrico.

Llamando a los vectores de tensiones y deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^\top \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^\top \quad (2.1)$$

$$\mathbf{N} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^\top \quad (2.2)$$

al de esfuerzos o cargas, en el que sus componentes están dadas por unidad de longitud del laminado y cuyo signo positivo es indicado en la Fig. 2.3:

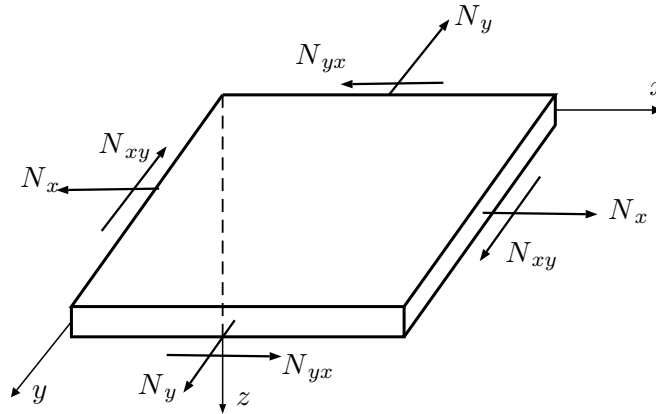


Figura 2.3: Definición de los esfuerzos y sus signos que actúan sobre el laminado.

se puede establecer la relación entre esfuerzos aplicados sobre el laminado y deformaciones si se integran las tensiones en cada lámina a lo largo del espesor, expresada en los mismos ejes.

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} dz = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

donde \mathbf{Q} representa la matriz de rigidez reducida de cada lámina, referida a un mismo sistema de ejes.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} E_y & 0 \\ \nu_{xy} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \Delta \quad (2.4)$$

donde $\Delta = (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})^{-1}$. Por consideraciones de equilibrio se ha de verificar que las matrices constitutivas sean simétricas, por tanto, $\nu_{yx} = \nu_{xy} E_y/E_x$.

Teniendo en cuenta que, el estado de deformación en todas las láminas ϵ^0 es el mismo, la Ec. (2.3) se puede expresar como:

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz \equiv \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon}^0 \quad (2.5)$$

ó

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{N}; \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1} \quad (2.6)$$

Cabe destacar, que para el cálculo de la matriz de rigidez plana del laminado \mathbf{A} , el orden de secuencia de las láminas no tiene ninguna influencia. Si este laminado tuviera n grupos de láminas (entendiendo que, en cada grupo, todas las láminas tienen la misma orientación de fibras respecto de los ejes del laminado), la matriz \mathbf{A} podría obtenerse como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_i h_i \quad (2.7)$$

donde:

- \mathbf{A} : Matriz de rigidez a extensión del laminado, definida en la Sección 2.1.4.
- $\bar{\mathbf{Q}}_i$: Matriz de rigidez reducida de una lámina cuya orientación es θ_i respecto de los ejes del laminado.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}^{\top^{-1}} \quad (2.8)$$

siendo \mathbf{T} el tensor de transformación, definido en la Sección 2.1.5.

- h_i : Espesor total del grupo de láminas que se puede obtener multiplicando el número de láminas por el espesor de una sola de ellas.

2.1.3. Rigidez a flexión de laminados simétricos

La CLPT no es más que una extensión de la teoría clásica de placas que se basa en las hipótesis de Kirchhoff:

- El laminado es delgado: tanto su ancho como su espesor son despreciables frente a su largo $w \ll h$.

- Los puntos del laminado que definen una línea recta, y perpendicular al plano medio, siguen definiendo otra línea recta, también perpendicular al plano medio una vez que éste se ha deformado. Esta hipótesis se traduce en ausencia de deformaciones por cortante γ_{xy} , γ_{yz} .
- El plano medio permanece inextensible tras la flexión: $u_0 = v_0 \approx 0$.
- No existen tensiones fuera del plano de cada lámina $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Llamando u , v , w a los movimientos de cualquier punto del laminado según los ejes x , y , z , para el punto P de la Fig. 2.4 se puede plantear en virtud de las hipótesis anteriores:

$$\alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.9)$$

los desplazamientos en el plano resultan pues:

$$u_p = u_0 - z_p \alpha = u_0 - z_p \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad v_p = v_0 - z_p \beta = v_0 - z_p \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.10)$$

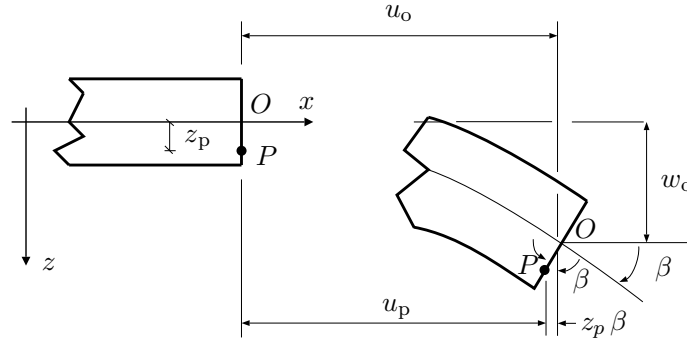


Figura 2.4: Desplazamientos de un punto genérico en el espesor del laminado.

Obtenidos los desplazamientos es posible calcular las deformaciones a través de las ecuaciones cinemáticas siguientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_p}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_p}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_p}{\partial y} + \frac{\partial v_p}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 z_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.11)$$

junto con, de las hipótesis de Kirchhoff:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.12)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden generalizar y escribirse en forma vectorial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^\top + z \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^\top \quad (2.13)$$

donde el superíndice se refiere a las deformaciones en el plano medio del laminado y el segundo vector a la curvatura:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^\top = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\}^\top \\ \boldsymbol{\kappa} &= \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^\top = - \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right\}^\top\end{aligned}\quad (2.14)$$

en el caso en que nos encontremos ante flexión pura, no habrá deformaciones en plano medio, por lo que el campo de deformaciones se reducirá a:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = z \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\} \quad (2.15)$$

En la Fig. 2.5 se representan los estados de deformación y tensión del laminado pudiéndose apreciar que las deformaciones varían linealmente con la altura respecto al plano medio mientras que, la variación de las tensiones en cada lámina no corresponde a una ley prefijada no continua.

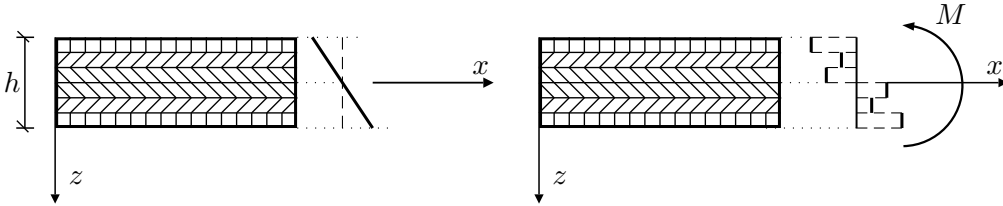


Figura 2.5: Distribución de deformaciones y tensiones en un laminado simétrico sometido a momentos.

Si se supone que sobre el laminado actúan unos momentos por unidad de longitud representados en la Fig. 2.6:

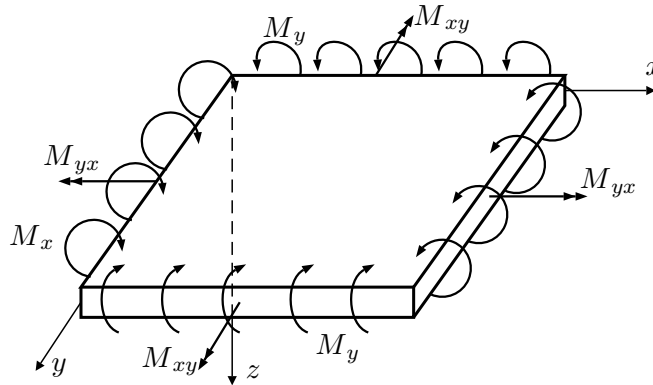


Figura 2.6: Definición de los momentos que actúan sobre el laminado.

denominando \mathbf{M} al vector de los momentos aplicados:

$$\mathbf{M} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^\top \quad (2.16)$$

se puede establecer el equilibrio entre estos momentos y las tensiones producidas, obteniéndose:

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z \, dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} z \, dz \quad (2.17)$$

Introduciendo ahora la expresión del vector de deformaciones indicada en la Ec. (2.15) se deduce que:

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} z^2 \, dz \boldsymbol{\kappa} \equiv \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \quad (2.18)$$

la matriz \mathbf{D} expresada en [Nm] se conoce como la matriz de rigidez a flexión pura. Para un laminado compuesto de n láminas se puede obtener de la forma siguiente (ver Fig. 2.7):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_i [z_i^3 - z_{i-1}^3] \quad (2.19)$$

donde $\bar{\mathbf{Q}}_i$ es la matriz de rigidez de la lámina de índice i cuyas fibras forman un ángulo θ dado con el eje principal del laminado. Dicho índice se inicia desde la superficie libre de z negativo. Para laminados simétricos la expresión anterior puede reducirse a:

$$\mathbf{D} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n/2} \bar{\mathbf{Q}}_j [z_j^3 - z_{j-1}^3] \quad (2.20)$$

donde el índice j comienza a contar desde la cara inferior del laminado hasta su plano medio.

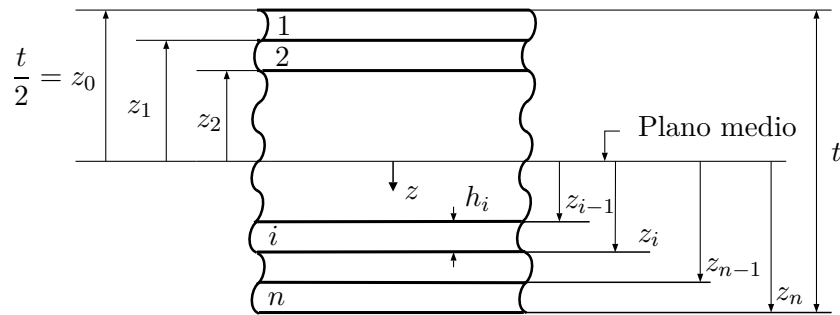


Figura 2.7: Geometría de un laminado compuesto de n láminas.

2.1.4. Rigidez a flexión de laminados no simétricos

La situación en laminados no simétricos es más compleja que la anterior. En este caso, la flexión del laminado viene acompañada con la aparición de deformaciones en su plano medio (ver Fig. 2.8):

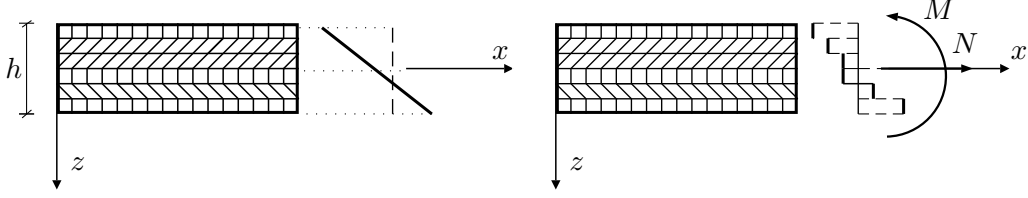


Figura 2.8: Distribución de deformaciones y tensiones en un laminado no simétrico sometido a flexión.

Las deformaciones en un punto del laminado vienen dadas por la primera ecuación de Ec. (2.14). Estableciendo el equilibrio entre las acciones externas y las tensiones se obtienen dos ecuaciones, la resultante del equilibrio de esfuerzos es:

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^0 dz + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\kappa} z dz \quad (2.21)$$

donde en la primera integral aparece la matriz de rigidez a extensión \mathbf{A} y el vector de deformación en el plano medio $\boldsymbol{\varepsilon}^0$. Por otro lado se tiene un nuevo término con respecto al laminado simétrico, la matriz de acoplamiento flexión-extensión \mathbf{B} y el vector de curvatura $\boldsymbol{\kappa}$.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} \quad (2.22)$$

Respecto al equilibrio de momentos:

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^0 z dz + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{Q} \boldsymbol{\kappa} z^2 dz \quad (2.23)$$

análogamente a la identificación llevada a cabo en la ecuación de esfuerzos se obtiene:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \quad (2.24)$$

Las matrices de las Ec. (2.22) y Ec. (2.24) se pueden discretizar en las láminas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i [z_i - z_{i-1}] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i [z_i^2 - z_{i-1}^2] \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i [z_i^3 - z_{i-1}^3] \end{aligned} \quad (2.25)$$

expresadas en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ -s- & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Resulta interesante expresar la deformación en función de las acciones exteriores y las matrices mencionadas:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 &= \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{N} + \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{M} \\ \kappa &= \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{N} + \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{M}\end{aligned}\quad (2.27)$$

Se ha de tener en cuenta que las matrices $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{d}}$ no son las inversas de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{D} , sino que se encuentran relacionadas a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}^M \cdot \mathbf{D}^{M-1} \cdot \mathbf{C}^M \\ \hat{\mathbf{b}} &= \mathbf{B}^M \cdot \mathbf{D}^{M-1} \\ \hat{\mathbf{d}} &= \mathbf{D}^{M-1}\end{aligned}\quad (2.28)$$

siendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^M &= -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{C}^M &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{D}^M &= \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}\end{aligned}\quad (2.29)$$

2.1.5. Transformación de las tensiones y deformaciones

Tal y como se puede apreciar en la Fig 1.4, cada lámina que compone el laminado puede poseer una orientación distinta, existe por tanto la necesidad de definir un sistema de coordenadas global de laminado x - y - z . Para ello, el sistema de ejes local de cada lámina 1-2-6 debe rotarse al sistema global mediante una matriz denominada tensor de transformación \mathbf{T} , que depende del ángulo de orientación de las fibras θ .

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix}\quad (2.30)$$

El vector tensiones quedará definido en el sistema de ejes local como el producto del tensor de transformación por el vector de tensiones en el sistema de ejes global.

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6\}^\top = \mathbf{T} \cdot \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^\top\quad (2.31)$$

Por analogía, la conversión de las deformaciones es la que se muestra en la Ec. (2.32):

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6\}^\top = \mathbf{T} \cdot \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^\top\quad (2.32)$$

2.1.6. Nomenclatura de laminados

Los criterios que se utilizan para la definición de la secuencia en un laminado son:

- Las láminas se definirán desde el exterior arriba hacia el interior abajo del laminado.
- Se indicará con 1 ó 2 dígitos, el ángulo que forman las fibras con la dirección de referencia y, mediante un subíndice, el número de láminas seguidas con esta orientación.

- Cuando se defina la secuencia de apilamiento de todas las láminas del laminado se empleará el subíndice T para indicar que el laminado ha sido definido en su totalidad.
- Cuando se trate de un laminado simétrico, sólo se expresará la secuencia de apilado de uno de los lados y se utilizará el subíndice s para indicar que el laminado es simétrico.

A continuación se presentan una serie de ejemplos:

Un laminado simétrico compuesto por 3 láminas a 90° , 2 a 0° , 1 a -45° y otra a $+45^\circ$ puede nombrarse de las siguientes maneras alternativas:

- $[90_3/0_2/ - 45/ + 45/ + 45/ - 45/0_2/90_3]_T$
- $[90_3/0_2/ - 45]_s$
- $[90_3/0_2/ - 45/ + 45_2/ - 45/0_2/90_3]_T$

si al laminado anterior se le añade una lámina justo en el plano de simetría a 80° , se pueden definir como:

- $[90_3/0_2/ - 45/ + 45/80/ + 45/ - 45/0_2/90_3]_T$
- $[90_3/0_2/ - 45/\overline{80}]_s$

2.2. Casos especiales de laminados

En esta sección se analizan diversas estructuras de laminados las cuales nos permiten simplificar la matriz de la Ec. (2.26). La comprensión de la relación entre deformaciones y curvaturas es compleja, por lo que se analizan diversos casos, que varían desde los más sencillos hasta los más complejos. Aunque algunos son triviales, otros son más especializados e incluso algunos que no se dan en la práctica sirven para el entendimiento del concepto de rigidez del laminado. Muchos de ellos son el resultado de la práctica común en construcción del uso de laminados con láminas del mismo material y espesor pero diferentes orientaciones de las fibras.

En primer lugar se analizan configuraciones de una sola lámina que proporcionará una base para la discusión posterior de laminados.

2.2.1. Laminados de una sola capa

Lámina isotrópica

La Ec. (2.26) puede reducirse a la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde se observa que la resultante de las fuerzas sólo depende de las deformaciones del plano medio y la resultante de momentos de las curvaturas en este plano medio. No existe acoplamiento entre flexión y extensión $\mathbf{B} = 0$.

En este tipo de láminas, tan sólo tenemos 2 propiedades del material, E y ν que junto al espesor de la lámina h definen las características del material. Las Ec. (2.33) se pueden expresar en función de estas propiedades:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Lámina especialmente ortotrópica

La estructura de las resultantes de fuerza y momento es la misma que para láminas isotrópicas (ver Ec. (2.33)). Pero existe una diferencia en una lámina ortotrópica, las propiedades del material necesarias para definir sus características de éste son; E_x , E_y , ν_{xy} ó ν_{yx} , G_{xy} .

Lámina generalmente ortotrópica

Para una lámina generalmente ortotrópica se pueden definir las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{D} como:

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij} h, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = \frac{\bar{Q}_{ij} h^3}{12} \quad (2.35)$$

Por tanto, las resultantes de fuerzas y momentos presentan la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

La diferencia que presenta con respecto a una lámina isotrópica o especialmente ortotrópica es que la resultante de fuerzas depende de las deformaciones a extensión así como de la deformación por cortante. Lo mismo ocurre entre la resultante de momentos y las curvaturas.

Lámina anisotrópica

La diferencia con una lámina generalmente ortotrópica es el uso de la matriz de rigidez \mathbf{Q} en lugar de $\bar{\mathbf{Q}}$. Las ecuaciones que definen las resultantes de fuerzas y momentos es la Ec. (2.36).

2.2.2. Laminados compuestos de diversas capas

Laminado simétrico

El laminado simétrico ha sido estudiado con profundidad en las Secciones 2.1.2 y 2.1.3 dada su importancia. Como resultado característico se destaca la desaparición del término de acoplamiento entre flexión y extensión, $\mathbf{B} = 0$. Esto se debe a que a la misma distancia al plano medio encontramos que las láminas tiene la misma orientación de fibras y por tanto, misma matriz \mathbf{Q} . Si se analiza la ecuación del medio de Ec. (2.25) se encuentra que sus términos se anulan.

Laminado simétrico con múltiples láminas isotrópicas

Al ser simétrico, ya es conocido que $\mathbf{B} = 0$, pero en este caso además también son nulos A_{16} , A_{26} , D_{16} , D_{26} . Los 2 últimos implican que no hay acoplamiento entre flexión y extensión. Aunque un caso como éste es poco habitual, sí existen casos en que el acoplamiento flexión-extensión es despreciable.

Laminado antisimétrico

Un laminado antisimétrico es aquel en el que las láminas que ocupan posiciones simétricas tienen orientaciones del mismo ángulo pero con signo contrario, del mismo material y espesor. Por ejemplo: $[45/60/-60/-45]$, $[0/90]_2 \equiv [0/90/0/90]$.

Esto implica que $\bar{\mathbf{Q}}_{ij}(z) = \bar{\mathbf{Q}}_{ij}(-z)$ y los términos B_{11} , B_{12} , B_{22} , B_{66} sean nulos. Existe una excepción y es que $\bar{\mathbf{Q}}_{16}(z) = -\bar{\mathbf{Q}}_{16}(-z)$ y $\bar{\mathbf{Q}}_{26}(z) = -\bar{\mathbf{Q}}_{26}(-z)$ dando lugar a

que también se anulen los términos de acoplamiento de la matriz de rigidez extensional, A_{16} , A_{26} y los términos de acoplamiento de la matriz de rigidez a flexión D_{16} , D_{26} .

Laminado cuasi-isótropo

La matriz de rigidez \mathbf{A} es la mencionada para el caso de una lámina isótropa (ver Ec. (2.33)), que no depende del ángulo de rotación con respecto al sistema global. La denominación de cuasi-isótropo y no isótropo del laminado es que las matrices \mathbf{B} y \mathbf{D} pueden no comportarse como materiales isótropos.

La orientación de las fibras se debe definir en π/n grados respecto a la anterior. Siendo n el número total de láminas. Por ejemplo: $[-60/0/60]$.

Laminado cruzado (*cross ply*)

Se considera que un laminado es cruzado cuando está formado por láminas alternas a 0° y 90° solamente. Se caracteriza porque \bar{Q}_{16} y \bar{Q}_{26} son nulos, y por tanto lo serán: A_{16} , A_{26} , D_{16} , D_{26} , B_{16} , B_{26} .

Láminas a $\pm\theta$ (*angle ply*)

Esta denominación se da cuando el laminado está compuesto por láminas orientadas a $+\theta$ y $-\theta$. Por ejemplo; $[45/-45/-30/30]$. En este tipo de laminados los términos \bar{Q}_{16} y \bar{Q}_{26} tienen signo opuesto para $+\theta$ y $-\theta$, produciendo que se anulen A_{16} y A_{26} . Otras relaciones importantes para las matrices de rigidez son:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}(+\theta) &= \bar{Q}_{11}(-\theta), & \bar{Q}_{22}(+\theta) &= \bar{Q}_{22}(-\theta) \\ \bar{Q}_{12}(+\theta) &= \bar{Q}_{12}(-\theta), & \bar{Q}_{66}(+\theta) &= \bar{Q}_{66}(-\theta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.3. Verificación CLPT

A modo de comprobación se realizan 2 casos de rigidez plana en 2 laminados simétricos. Por un lado, un laminado de 4 capas a 0° cada una y por otro, un laminado del mismo número de capas pero con una secuencia $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$. El objetivo es verificar que ante un esfuerzo N_x la tensión promedio que se origina, independientemente de la orientación de las capas, viene dada por la expresión:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{A} \quad (2.38)$$

siendo el área A , el número de capas n multiplicadas por el espesor h de éstas.

2.3.1. Laminado de secuencia $[0^\circ_4]_T$

En primer lugar, es necesario definir la matriz de rigidez reducida (ver Ec. (2.4)), que está dada en función de las propiedades del material. Dado que todas las láminas están orientadas con el eje global del laminado, \mathbf{Q}_n es igual a la matriz de rigidez reducida $\bar{\mathbf{Q}}_n$,

el subíndice n indicando el número de láminas. Siendo las láminas del mismo material, todas éstas tendrán el mismo valor \bar{Q}_n .

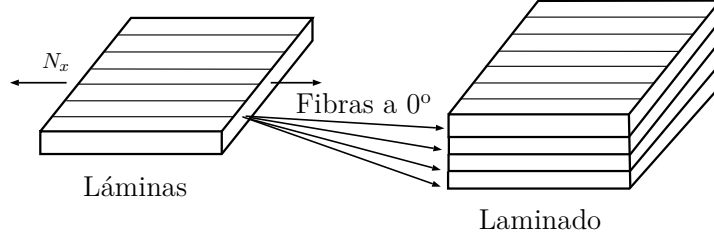


Figura 2.9: Secuencia del laminado de estudio $[0^0_4]_T$.

La tensión puede obtenerse como el producto entre la matriz de rigidez y el vector deformación, basta con observar la Ec. (2.3), en donde será necesario obtener el vector deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.39)$$

La relación entre esfuerzos y deformaciones en un material compuesto está establecida de manera general en las Ec. (2.22) y Ec. (2.24). Por otro lado, dado que el de estudio es un laminado simétrico, la matriz de rigidez de acople flexión-extensión \mathbf{B} es nula. Esto permite simplificar la Ec. (2.22) y obtener la Ec. (2.5).

El vector deformaciones se obtiene de despejar $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ de la Ec. (2.5):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{N} \quad (2.40)$$

donde \mathbf{N} , se corresponde según la Fig. 2.10 con:

$$\mathbf{N} = \{N_x, 0, 0\}^\top \quad (2.41)$$

La matriz \mathbf{A} se puede calcular aplicando la definición dada en la ecuación superior de Ec. (2.25). Dado que el espesor de las láminas es uniforme $z_i - z_{i-1} = h$, resultando:

$$\mathbf{A} = 4h \mathbf{Q} \quad (2.42)$$

y como \mathbf{N} sólo tiene componente en x , tan sólo es necesario hallar el valor de \hat{A}_{11} y \hat{A}_{21} .

$$\hat{A}_{11} = \frac{1}{4\Delta h [E_x - E_y \nu_{xy}^2]} \quad \hat{A}_{21} = -\nu_{xy} \hat{A}_{11} \quad (2.43)$$

obteniendo así:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \left\{ \hat{A}_{11} N_x, \hat{A}_{21} N_x, 0 \right\}^\top \quad (2.44)$$

sustituyendo en la Ec. (2.39) es posible hallar la tensión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Delta \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} E_y & 0 \\ \nu_{xy} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} N_x \\ \frac{E_x - E_y \nu_{xy}^2}{E_x - E_y \nu_{xy}^2} \\ -N_x \nu_{xy} \\ \frac{E_x - E_y \nu_{xy}^2}{E_x - E_y \nu_{xy}^2} \\ 0 \end{array} \right\} \frac{1}{4\Delta h} \quad (2.45)$$

consecuentemente:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{N_x \Delta E_x}{4 \Delta h [E_x - E_y \nu_{xy}^2]} - \frac{N_x \nu_{xy}^2 \Delta E_y}{4 \Delta h [E_x - E_y \nu_{xy}^2]} = \frac{1}{4 h} \left[\frac{N_x (E_x - E_y \nu_{xy}^2)}{E_x - E_y \nu_{xy}^2} \right] = \frac{N_x}{4 h} \\ \sigma_y &= \frac{N_x \Delta E_y \nu_{xy}}{4 \Delta h [E_x - E_y \nu_{xy}^2]} - \frac{N_x \nu_{xy} \Delta E_y}{4 \Delta h [E_x - E_y \nu_{xy}^2]} = 0 \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{2.46}$$

2.3.2. Laminado de secuencia $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

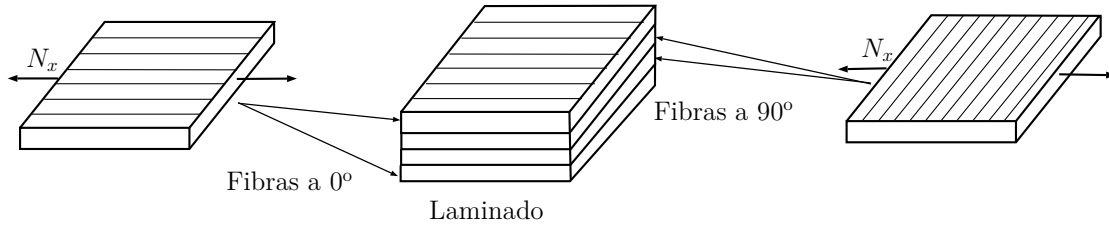


Figura 2.10: Secuencia del laminado de estudio $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

Dado que en este laminado existen capas con orientación distinta a la de los ejes globales, es necesario obtener la matriz de rigidez reducida transformada. Para ello se calcula la matriz de la Ec. (2.30) para 90° :

$$\mathbf{T}(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\tag{2.47}$$

La matriz de rigidez reducida se obtiene aplicando la Ec. (2.8). Para 0° , $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}$ y tiene la expresión dada en la Ec. (2.4). Para 90° , es necesario aplicar la Ec. (2.29), resultando:

$$\bar{\mathbf{Q}}(90^\circ) = \Delta \begin{bmatrix} E_y & \nu_{xy} & 0 \\ \nu_{xy} E_y & E_x & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix}\tag{2.48}$$

Para el cálculo de la matriz de rigidez a extensión \mathbf{A} , se utiliza la ecuación superior de Ec. (2.25). Para visualizar mejor cómo afecta la orientación de las capas, se divide esta ecuación entre la suma de las 2 capas a 0° y de las 2 capas restantes a 90° .

2 Láminas a 0°:

$$\mathbf{A}(0^\circ) = 2h \mathbf{Q} = 2h \Delta \begin{bmatrix} E_x & E_y \nu_{xy} & 0 \\ E_y \nu_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

2 Láminas a 90°:

$$\mathbf{A}(90^\circ) = 2h \bar{\mathbf{Q}}(90^\circ) = 2h \Delta \begin{bmatrix} E_y & E_y \nu_{xy} & 0 \\ E_y \nu_{xy} & E_x & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

por tanto, la matriz \mathbf{A} vendrá dada como la suma de estas dos matrices:

$$\mathbf{A} = 2h \Delta \begin{bmatrix} E_x + E_y & 2E_y \nu_{xy} & 0 \\ 2E_y \nu_{xy} & E_x + E_y & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Para poder aplicar la Ec. (2.40) es necesario hallar la matriz inversa de \mathbf{A} . Al igual que ocurría en el laminado anterior, al sólo tener aplicado N_x sólo es necesario calcular:

$$\hat{A}_{11} = \frac{E_x + E_y}{2\Delta h [(E_x + E_y)^2 - 4E_y^2 \nu_{xy}^2]}, \quad \hat{A}_{21} = \frac{-\nu_{xy} E_y}{\Delta h [(E_x + E_y)^2 - 4E_y^2 \nu_{xy}^2]} \quad (2.52)$$

obteniendo así:

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 = \left\{ \hat{A}_{11} N_x, \hat{A}_{21} N_x, 0 \right\}^\top \quad (2.53)$$

Para la obtención de la tensión se aplica la Ec. (2.39) que al igual que con la matriz \mathbf{A} se dividirá en dos partes.

2 Láminas a 0°:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\Delta \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} E_y & 0 \\ \nu_{xy} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{N_x [E_x + E_y]}{2\Delta h [(E_x + E_y)^2 - 4E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ \frac{-\nu_{xy} E_y N_x}{\Delta h [(E_x + E_y)^2 - 4E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

consecuentemente:

$$\begin{aligned}\sigma_x(0^\circ) &= \frac{E_x N_x [E_x + E_y] - 2 \nu_{xy}^2 E_y^2 N_x}{h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ \sigma_y(0^\circ) &= \frac{\nu_{xy}^2 E_y N_x [E_x - E_y] - 2 E_y^2 \nu_{xy} N_x}{h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} = \frac{\nu_{xy} N_x E_y [E_x - E_y]}{h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ \tau_{xy}(0^\circ) &= 0\end{aligned}\tag{2.55}$$

2 Láminas a 90°:

$$\boldsymbol{\sigma}(90^\circ) = 2 \bar{\mathbf{Q}}(90^\circ) \boldsymbol{\varepsilon}^0\tag{2.56}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \Delta \begin{bmatrix} E_y & \nu_{xy} E_y & 0 \\ \nu_{xy} E_y & E_x & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}/\Delta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{N_x [E_x + E_y]}{2 \Delta h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ -\nu_{xy} E_y N_x \\ \frac{\Delta h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]}{0} \end{array} \right\}\tag{2.57}$$

consecuentemente:

$$\begin{aligned}\sigma_x(90^\circ) &= \frac{E_y N_x [E_x + E_y] - 2 \nu_{xy}^2 E_y^2 N_x}{h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ \sigma_y(90^\circ) &= \frac{\nu_{xy} N_x E_y [-E_x + E_y]}{h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} \\ \tau_{xy}(90^\circ) &= 0\end{aligned}\tag{2.58}$$

El promedio de tensión $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ del laminado se obtiene como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{k=1}^n \frac{\boldsymbol{\sigma}_k}{n}\tag{2.59}$$

que en el caso de estudio se corresponde con:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}(0^\circ) + \boldsymbol{\sigma}(90^\circ)}{4}\tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{E_x N_x [E_x + E_y] - 2 \nu_{xy}^2 E_y^2 N_x + E_y N_x [E_x + E_y] - 2 \nu_{xy}^2 E_y^2 N_x}{4 h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} = \\ &= \frac{N_x [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]}{4 h [(E_x + E_y)^2 - 4 E_y^2 \nu_{xy}^2]} = \frac{N_x}{4 h}\end{aligned}\tag{2.61}$$

La componente $\bar{\sigma}_y$ es nula ya que se observa que las expresiones de las segundas Ecs. (2.55) y (2.58) son de signo contrario. Por otro lado $\bar{\tau}_{xy}$ es nula directamente en ambas láminas.

Queda verificado pues, que para un laminado sometido a N_x la orientación de las láminas no influye en la tensión. Además cabe destacar, que el material tampoco tiene influencia, pues la Ec. (2.46) no depende de las propiedades de éste.

2.4. Deformaciones y tensiones obtenidas analíticamente vs ElamX2 [®]

En esta sección se ha implementado mediante el *software* MATLAB[®] la CLPT cuyo esquema se encuentra en la Fig. 2.11. Como método para validar la implementación se utiliza el programa informático desarrollado por la Universidad Técnica de Dresde ElamX2 [®]. El material de estudio utilizado es el T300/5208 grafito-epoxi cuyas propiedades se recogen en la Tabla 2.1.

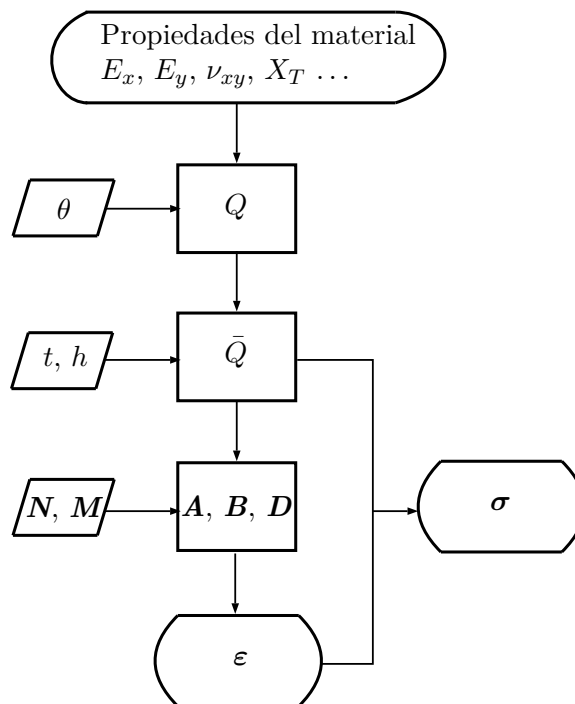


Figura 2.11: Diagrama de flujo de la CLPT.

T300/5208					
E_x	181	GPa	X_T	1.5	GPa
E_y	10.3	"	X_C	1.5	"
G_{xy}	7.17	"	Y_T	40	MPa
G_{yz}	3.585	"	Y_C	264	"
ν_{xy}	0.28	-	S	68	"
ρ	1.6	kg/m ³	t	0.125	mm

Tabla 2.1: Propiedades y características del material T300/5208 extraído de [1].

2.4.1. Representación de la deformada en el plano x - y de una lámina para diversos θ

Además de la obtención de las deformaciones y tensiones, el programa creado en MATLAB[®] permite la obtención gráfica de la deformada de la lámina en el plano x - y . Es necesario recordar la Ec. (2.11) donde se establece una relación entre las deformaciones y los desplazamientos u , v y w de un punto cualquiera.

La representación de estas deformadas en dicho plano se encuentran esquematizadas en la Fig. 2.12:

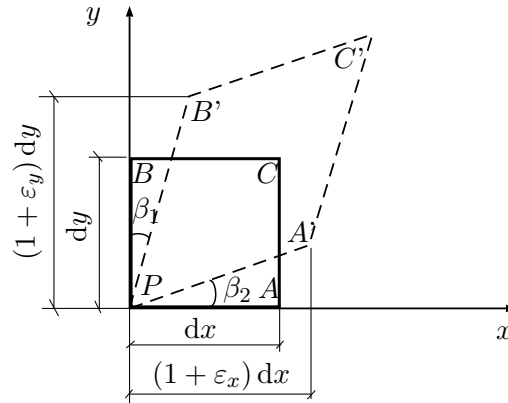


Figura 2.12: Representación esquemática de las deformaciones en una lámina en el plano x - y .

Donde $\beta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ y $\beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} dy$ y por tanto $\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2$. Si se asume que la lámina es cuadrada se tiene que $\beta_1 = \beta_2$ y por tanto:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2.62)$$

Conocidos estos ángulos, haciendo uso de la geometría es posible establecer las posiciones de los vértices A' , C' y B' .

Para una visualización óptima, se hacen coincidir los centros del cuadrado que forma la lámina sin deformar y del rombo que forma la deformada (ver Fig. 2.13).

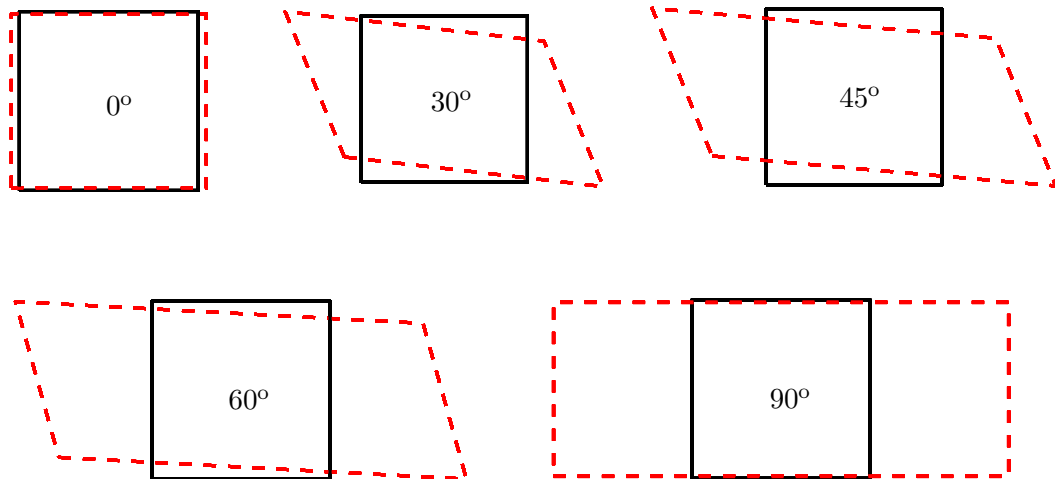


Figura 2.13: Deformación de una lámina sometida a $N_x = 10^6$ N/m, línea discontinua (roja) representa la deformada, línea continua (negra) lámina sin deformación. Ángulo de fibra insertado en el elemento diferencial.

Como cabía de esperar, tanto para 0° como para 90° no hay distorsión en la lámina, pues γ_{xy} es nulo y su deformada presenta la forma de un rectángulo. Otro aspecto destacable es el tamaño de este rectángulo: a 0° las fibras están orientadas en la dirección de la aplicación del axil N_x y la rigidez que ofrecen es grande comparada con la de la matriz. A 90° las fibras ofrecen poca resistencia y es la matriz quien la aporta. Es obvio que visualizando las deformadas, para una única lámina orientada un ángulo θ con carga suficientemente alta la lámina romperá. Este aspecto será tratado con mayor profundidad en los siguientes capítulos.

2.4.2. Deformaciones y tensiones en un laminado simétrico

En un laminado simétrico sometido a una fuerza externa en el plano se produce una deformación en ejes globales igual en todas las láminas. Si el axil aplicado es \mathbf{N} , la deformación coincide con la del plano medio $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, si es el momento \mathbf{M} con la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$. En esta subsección se analizan 2 casos, correspondiéndose el primero con la Sección 2.1.2 y el segundo con la Sección 2.1.3.

Laminado $[90/45/0]_s$ sometido a $N_x = 10^6$ N/m

En la Tabla 2.2 se recogen los valores de la deformación y tensión global de las láminas. Se observa que ε_x es positivo, lo que implica que la placa se alarga en el eje x , por el contrario ε_y es negativa, dando lugar a que se contraiga en el eje y . Un valor de τ_{xy} provoca una distorsión en los extremos dando lugar a una forma característica de la deformada que recuerda a un rombo. Esto puede apreciarse en la imagen izquierda de Fig. 2.14; en la de la derecha se aprecia que no hay desplazamiento en el eje z .

Teoría CLPT y ElamX2 [®]		
Ángulo (°)	Deform. $\times 10^{-3}$ (-)	Tensión (MPa)
90	$\varepsilon_x = 18,42$	$\sigma_x = 186,2$
	$\varepsilon_y = -1,51$	$\sigma_y = -221,6$
	$\gamma_{xy} = -11,9$	$\tau_{xy} = -85,3$
45	$\varepsilon_x = 18,42$	$\sigma_x = 469,7$
	$\varepsilon_y = -1,51$	$\sigma_y = 183,9$
	$\gamma_{xy} = -11,9$	$\tau_{xy} = 170,55$
0	$\varepsilon_x = 18,42$	$\sigma_x = 3344,1$
	$\varepsilon_y = -1,51$	$\sigma_y = 37,7$
	$\gamma_{xy} = -11,9$	$\tau_{xy} = -85,3$

Tabla 2.2: Deformaciones y tensiones globales del laminado $[90/45/0]_s$ en borde superior de placa para una fuerza externa aplicada $N_x = 10^6$ N/m.

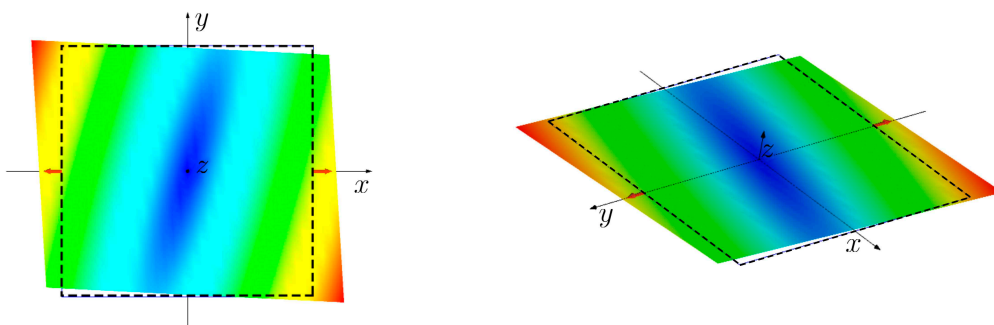


Figura 2.14: Deformación del laminado $[90/45/0]_s$ en 2 vistas para una fuerza externa $N_x = 10^6$ N/m con un factor de escala 10.

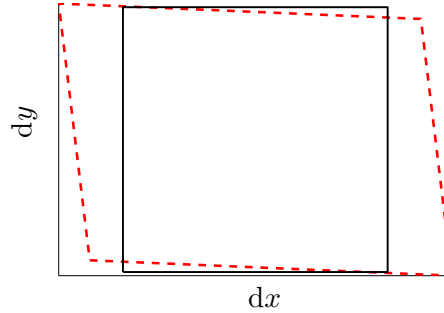


Figura 2.15: Deformación del laminado $[90/45/0]_s$ para una fuerza externa $N_x = 10^6$ N/m con un factor de escala 10 obtenido mediante el programa de MATLAB®.

A modo de comprobación se aplica lo establecido en la Sección 2.3:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{2 [186,2 + 469,68 + 3344,1]}{6} \times 10^6 = 1,333 \times 10^9 \text{ Pa} \quad (2.63)$$

aplicando la Ec. (2.38) se obtiene:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{A} = \frac{10^6}{6 \cdot 1,25 \times 10^{-4}} = 1,333 \times 10^9 \text{ Pa} \quad (2.64)$$

Laminado $[90/45/0]_s$ sometido a $M_x = 100$ N·m y $M_y = 100$ N·m

Este ensayo se corresponde con flexión pura, para la cual la deformación de la placa vendrá dada por la Ec. (2.15) ya que en el plano medio será nula. Los valores de las deformaciones y tensiones en ejes globales se recogen en la Tabla 2.3. No hay deformación en el plano medio (ver imagen izquierda de Fig. 2.16); por el contrario, la aplicación de momentos M_x y M_y implica que el laminado se curve hacia abajo, debido a la definición de su signo de momentos (ver Fig. 2.6).

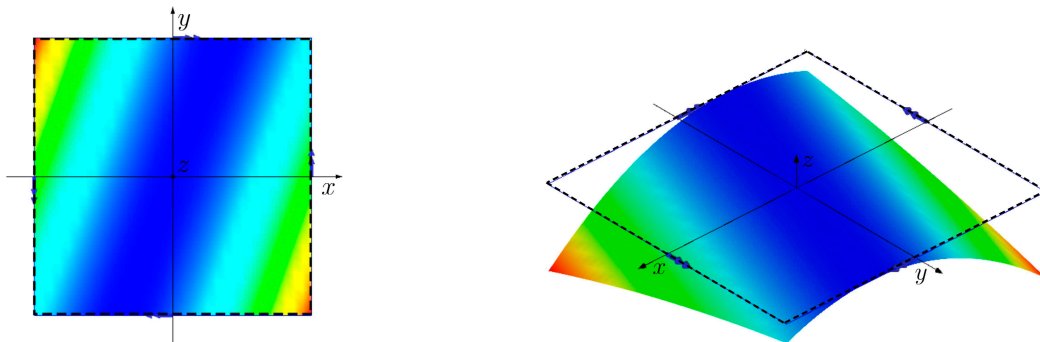


Figura 2.16: Deformación del laminado $[90/45/0]_s$ para una fuerza externa $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m con un factor de escala 10.

Es destacable que la curvatura en el eje x no es la misma que en el eje y como sí ocurre en un material isotrópico [23]. La explicación a esta diferencia viene dada por el distinto

valor que tienen las curvaturas κ_x , κ_y , κ_{xy} , debido a la matriz de rigidez a flexión \mathbf{D} . Despejando las curvaturas de la Ec. (2.18):

$$\boldsymbol{\kappa} = \hat{\mathbf{D}} \mathbf{M}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}^{-1} \quad (2.65)$$

en este caso la matriz inversa de \mathbf{D} evaluada mediante MATLAB[®] es la siguiente:

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1,3332 & -0,059 & -0,8143 \\ -0,059 & 0,249 & -0,0977 \\ -0,8143 & -0,0977 & 2,2185 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

aplicando la Ec. (2.69) a la Ec. (2.65):

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} & \hat{D}_{16} \\ \hat{D}_{12} & \hat{D}_{22} & \hat{D}_{26} \\ \hat{D}_{16} & \hat{D}_{26} & \hat{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

por tanto las curvaturas quedan:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= 100 \left[\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12} \right] = 127,4 \\ \kappa_y &= 100 \left[\hat{D}_{21} + \hat{D}_{22} \right] = 15,3 \\ \kappa_{xy} &= 100 \left[\hat{D}_{16} + \hat{D}_{26} \right] = -91,2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

dado que \hat{D}_{11} es mayor que \hat{D}_{22} la curvatura en el eje x es 8 veces mayor que en el eje y (ver Fig. 2.16). Además, que el término κ_{xy} no sea nulo, implica una distorsión de la placa.

Teoría CLPT y ElamX2 [®]		
Ángulo (°)	Deform. $\times 10^{-3}$ (-)	Tensión (MPa)
90	$\varepsilon_x = -47,8$	$\sigma_x = -511$
	$\varepsilon_y = -5,7$	$\sigma_y = -1180,8$
	$\gamma_{xy} = 34,2$	$\tau_{xy} = 245,2$
45	$\varepsilon_x = -0,032$	$\sigma_x = -0,99$
	$\varepsilon_y = -3,8$	$\sigma_y = -587,3$
	$\gamma_{xy} = 22,8$	$\tau_{xy} = -467,1$
0	$\varepsilon_x = -15,9$	$\sigma_x = -2901,4$
	$\varepsilon_y = -1,9$	$\sigma_y = -65,9$
	$\gamma_{xy} = 11,4$	$\tau_{xy} = 81,7$

Tabla 2.3: Deformaciones y tensiones globales del laminado $[90/45/0]_s$ en borde superior de lámina para unos momentos externos aplicados $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.

2.4.3. Deformaciones y tensiones en un laminado no simétrico

La secuencia de apilamiento del laminado es la misma que en el caso anterior pero con 3 capas de láminas [90/45/0]. Se realiza un estudio de flexión pura donde a diferencia del caso simétrico si existe una deformación en el plano medio junto a la curvatura. Los momentos externos que se aplican son $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.

A *priori* se observa en la Fig. 2.14 que las curvaturas son iguales o de valores muy parecidos. Se realiza el mismo procedimiento que se ha seguido en la Sección 2.4.2.

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 2,417 & -0,104 & -0,4255 \\ -0,104 & 2,4169 & -0,4255 \\ -0,4255 & -0,4255 & 26,5244 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

por tanto las curvaturas quedan:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= 100 [\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}] = 683,62 \\ \kappa_y &= 100 [\hat{D}_{21} + \hat{D}_{22}] = 683,63 \\ \kappa_{xy} &= 100 [\hat{D}_{16} + \hat{D}_{26}] = -251,52 \end{aligned} \quad (2.70)$$

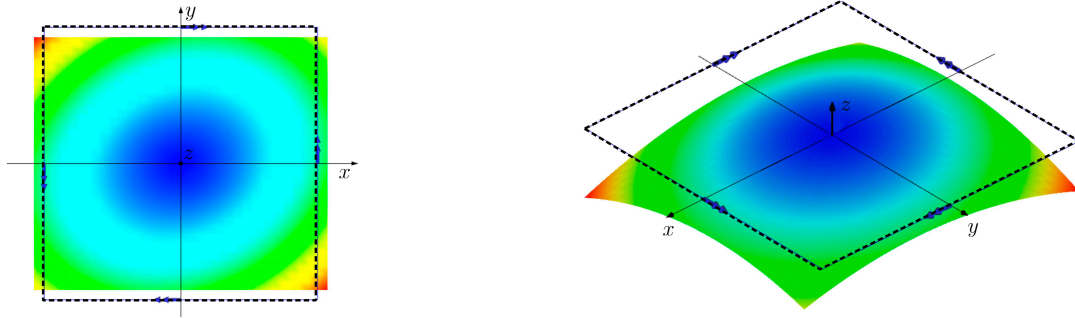


Figura 2.17: Deformación del laminado [90/45/0] para una fuerza externa $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.

Las curvaturas κ_x y κ_y son iguales, pero no debe generalizarse a cualquier laminado no simétrico, pues es mera coincidencia debido a los ángulos empleados. A modo de ejemplo se calculan las curvaturas de un laminado parecido [38/45/0].

$$\begin{aligned} \kappa_x &= 100 [\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}] = 358,3 \\ \kappa_y &= 100 [\hat{D}_{21} + \hat{D}_{22}] = 1536,4 \\ \kappa_{xy} &= 100 [\hat{D}_{16} + \hat{D}_{26}] = -1290 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Teoría CLPT y ElamX2 [®]		
Ángulo (°)	Deform. $\times 10^{-3}$ (-)	Tensión (MPa)
90	$\varepsilon_x = -201,2$	$\sigma_x = -2241,3$
	$\varepsilon_y = -55,2$	$\sigma_y = -10614,3$
	$\gamma_{xy} = 472,2$	$\tau_{xy} = 338,1$
45	$\varepsilon_x = -115,7$	$\sigma_x = -4601,9$
	$\varepsilon_y = 30,3$	$\sigma_y = -2508,1$
	$\gamma_{xy} = 15,7$	$\tau_{xy} = -2930,6$
0	$\varepsilon_x = -303$	$\sigma_x = -5169,6$
	$\varepsilon_y = 115,7$	$\sigma_y = 1109,7$
	$\gamma_{xy} = -15,7$	$\tau_{xy} = -112,7$

Tabla 2.4: Deformaciones y tensiones globales del laminado [90/45/0] en borde superior de lámina para unos momentos externos aplicados $M_x = 100$ y $M_y = 100$ N·m.

Criterios de fallo interactivos

3.1. Introducción a los criterios de fallo

Como se ha desarrollado en el Capítulo 1, es posible obtener las tensiones en las láminas conociendo los esfuerzos que actúan en el laminado. Estas tensiones pueden ser comparadas con los valores límites, prediciendo así si el laminado fallará o no ante cargas externas.

Hay varias maneras de definir el concepto de fallo, la más obvia cuando existe una separación completa o una sola fractura. Sin embargo, una definición más general sería “cuando el componente ya no puede cumplir la función para la que fue diseñado”. Esta definición incluye tanto la fractura total como también una deformación o deflexión excesiva o la formación de grietas.

Un buen diseño requiere el uso eficiente y seguro de los materiales y es necesario desarrollar teorías para comparar el estado de tensión con los criterios de fallo. En este capítulo se exponen las teorías de fallo y su aplicación es validada por los experimentos. En un laminado, la resistencia se relaciona con la de cada lámina individual. Lo que permite un método simple y económico para determinar la resistencia de este laminado. Varias teorías han sido desarrolladas para el estudio del fallo de una lámina cuyas fibras están orientadas, que se basan generalmente en las resistencias normales y a cortadura de la lámina unidireccional.

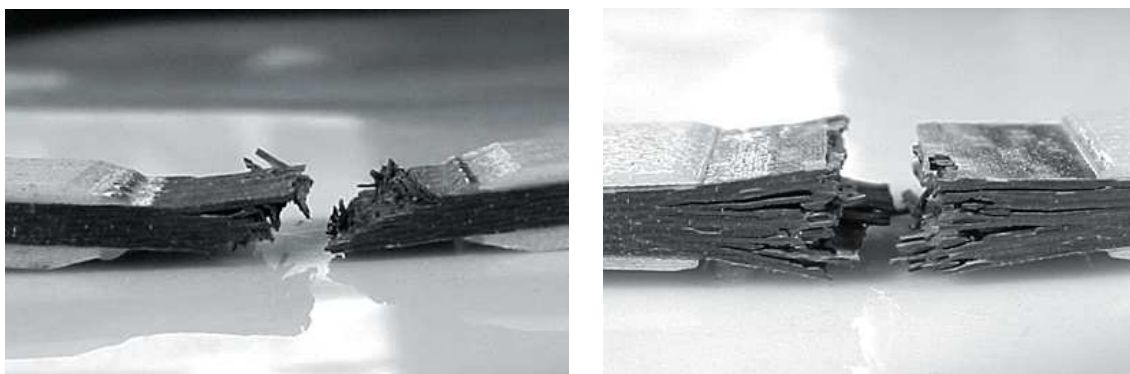


Figura 3.1: A la izquierda, fractura de un laminado F155/PW a tracción y a la derecha de F155/8HS tras un ensayo a compresión [11].

Un material isótropo, como el acero, por lo general tiene dos parámetros de resistencia: la normal y la de cortadura. En algunos casos, como para el hormigón, las resistencias normales son diferentes a tracción y compresión. Una teoría simple de fallo para un material isótropo se basa en la búsqueda de las tensiones normales principales y las tensiones a cortadura máximas. El fallo del material isótropo se producirá si la tensión máxima que se produce por la aplicación de esfuerzos es superior a la tensión de rotura de éste.

Sin embargo, en una lámina de material compuesto, las teorías de fallo no se basan en estas tensiones principales y por cortadura. Por el contrario, se basan en las tensiones en la dirección de la fibra o ejes locales, porque la lámina es ortotrópica y sus propiedades son distintas a diferentes ángulos.

En el caso de una lámina unidireccional, hay dos ejes materiales: uno paralelo a la dirección de las fibras y otro perpendicular a ellas. Por lo tanto, hay 4 parámetros de resistencia normal, para tracción X_T , Y_T y para compresión X_C , Y_C , en cada una de las 2 direcciones de los ejes materiales. El quinto parámetro es la resistencia a cortadura de una lámina unidireccional S .

A diferencia de los parámetros de rigidez vistos en el Capítulo 2, los parámetros de resistencia no se pueden transformar tensorialmente directamente para una lámina cuyas fibras están orientadas. Las teorías de rotura o fallo se basan en encontrar primero las tensiones en los ejes locales y luego usar estos 5 parámetros de resistencia para saber si la lámina unidireccional ha fallado o no.

Los criterios de fallo en un material compuesto pueden dividirse según [8] en:

- Criterios de límite: Estos criterios predicen la carga de rotura y el modo comparando las tensiones de la lámina σ_1 , σ_2 , σ_6 (o en su defecto las deformaciones ε_1 , ε_2 , γ_{12}) con su correspondiente resistencia por separado. La interacción entre las tensiones no es considerada.
- Criterios interactivos: Estos criterios predicen la carga de rotura mediante el uso de una sola ecuación cuadrática o de orden superior en la que intervienen todas las componentes de tensión (o de deformación). El fallo se produce cuando se satisface dicha ecuación, y el modo de fallo se determina indirectamente mediante la comparación de las relaciones tensión/resistencia.
- Criterios de modo: Estos criterios separan el criterio de rotura de matriz del criterio de rotura de fibras. Las ecuaciones pueden depender de 1 o más componentes de la tensión, por tanto, la interacción de resistencias varía de un criterio a otro en este grupo. Si la ecuación de fallo contiene sólo un componente de esfuerzo el modo de fallo corresponde a la dirección particular; de lo contrario, el modo de fallo se puede determinar como con los criterios interactivos mediante la comparación de relaciones de esfuerzo/resistencia de la ecuación satisfecha.

A continuación se exponen 5 criterios de fallo que han sido seleccionados por diversos motivos. Entre éstos se encuentra la simplicidad para la implementación en programas de elementos finitos MEF, así como el que mejor resultado proporciona a la hora de predecir el fallo en la actualidad.

3.1.1. Nomenclatura usada

En el presente trabajo se pretende plantear las ecuaciones de los criterios de fallo de Tsai-Wu [19], Hoffman [20], Hashin [13], Christensen [14] y Puck [15] para materiales compuestos y además compararlos. Es importante mostrar, mediante las Tablas 3.1 y 3.2, una notación uniforme que se va a seguir. Asimismo, se describen las notaciones que sigue cada autor en sus respectivos artículos.

Tsai-Wu	Hoffman	Christensen	Hashin	Puck	TRABAJO
σ_{xx}	σ_x	σ_{11}	σ_{11}	σ_1	σ_1
σ_{yy}	σ_y	σ_{22}	σ_{22}	σ_2	σ_2
σ_{zz}	σ_z	σ_{33}	σ_{33}	-	σ_3
σ_{yz}	τ_{yz}	σ_{23}	σ_{23}	-	σ_4
σ_{zx}	τ_{zx}	σ_{31}	σ_{31}	-	σ_5
σ_{xy}	τ_{xy}	σ_{12}	σ_{12}	τ_{12}	σ_6

Tabla 3.1: Notación de los esfuerzos, según los distintos autores.

Tsai-Wu	Hoffman	Christensen	Hashin	Puck	TRABAJO
X	F_{tx}	σ_{11}^T	σ_A^+	X_T	X_T
X'	F_{cx}	σ_{11}^C	σ_A^-	X_C	X_C
Y	F_{ty}	σ_{22}^T	σ_T^+	Y_T	Y_T
Y'	F_{cy}	σ_{22}^C	σ_T^-	Y_C	Y_C
S	F_{sxy}	σ_{12}^Y	τ_A	$R_{\perp\parallel}$	S
Q	F_{syx}	σ_{23}^Y	τ_T	$R_{\perp\perp}$	τ_T

Tabla 3.2: Notación de los parámetros de fallo según los distintos autores.

3.2. Criterio de Tsai-Wu

El criterio de Tsai-Wu [19] es uno de los más relevantes en la categoría de criterios interactivos. Pretende generalizar el criterio de fallo de Tsai-Hill [9] distinguiendo entre las resistencias a compresión de las de tracción. Éste criterio está basado en el criterio de plastificación de materiales anisótropos de Hill, que a su vez está basado en el criterio de Von-Mises para materiales isótropos [10]. La expresión general del criterio de Tsai-Wu es una elipse en el espacio de tensiones de forma:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.1)$$

La expresión del criterio en 3 dimensiones (3D) se obtiene expandiendo la Ec. (3.1):

$$\begin{aligned}
 & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 + \\
 & F_{11} \sigma_1^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2 F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2 F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2 F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + \\
 & F_{22} \sigma_2^2 + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2 F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2 F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2 F_{26} \sigma_2 \sigma_6 + \\
 & F_{33} \sigma_3^2 + 2 F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2 F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2 F_{36} \sigma_3 \sigma_6 + \\
 & F_{44} \sigma_4^2 + 2 F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2 F_{46} \sigma_4 \sigma_6 + \\
 & F_{55} \sigma_5^2 + 2 F_{56} \sigma_5 \sigma_6 + \\
 & F_{66} \sigma_6^2
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esto supone el cálculo de 27 coeficientes, 6 debidos a F_i y 21 a las interacciones, F_{ij} .

Si el material presenta algún tipo de simetría cabe esperar que el número de términos interactivos disminuya. En materiales ortotrópicos, F_4 , F_5 y F_6 son nulos. Tsai-Wu proponen en [19] que la tensión de fallo es independiente del signo de la tensión a cortante por lo que F_{16} sería nulo.

Esencialmente por el mismo razonamiento, suponen en [19] que las resistencias a cortadura para un material especialmente ortotrópico están desacopladas. Sin embargo, los acoplamientos entre fuerzas normales se espera que permanezcan. Con estas relaciones de simetría asumidas, el número de coeficientes independientes se reduce a 3 y 9:

$$\begin{aligned}
 & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + 0 + 0 + 0 + \\
 & F_{11} \sigma_1^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 0 + 0 + 0 + \\
 & F_{22} \sigma_2^2 + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 0 + 0 + 0 + \\
 & F_{33} \sigma_3^2 + 0 + 0 + 0 + \\
 & F_{44} \sigma_4^2 + 0 + 0 + \\
 & F_{55} \sigma_5^2 + 0 + \\
 & F_{66} \sigma_6^2
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para un material isotrópico transversalmente con plano basal 2-3, es posible afirmar de inmediato que los índices asociados a este plano son idénticos:

$$F_2 = F_3, \quad F_{12} = F_{13}, \quad F_{22} = F_{33}, \quad F_{55} = F_{66} \tag{3.4}$$

Esto permite obtener la expresión final del criterio de Tsai-Wu en 3D como:

$$\begin{aligned}
 & F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + F_{44} \sigma_4^2 + F_{66} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] + \\
 & 2 F_{12} [\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3] + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + F_1 \sigma_1 + F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] = 1
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Para determinar los coeficientes F_1 , F_2 , F_{11} , F_{22} , F_{44} , F_{66} , F_{12} , F_{23} se utilizan los 5 parámetros de resistencia del material del siguiente modo. En primer lugar, se realiza un

ensayo de tracción virtual en la dirección de las fibras. La rotura de la lámina se producirá cuando:

$$\sigma_1 = X_T, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2 \dots 6 \quad (3.6)$$

La Ec. (3.5) resulta entonces en:

$$F_1 X_T + F_{11} X_T^2 = 1 \quad (3.7)$$

Si se realiza el mismo ensayo para compresión la rotura se produce si:

$$\sigma_1 = -X_C, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2 \dots 6 \quad (3.8)$$

Aplicando esta ecuación al criterio de Tsai-Wu (Ec. (3.5)) se obtiene la siguiente relación entre coeficientes:

$$-F_1 X_C + F_{11} X_C^2 = 1 \quad (3.9)$$

Combinando las expresiones de las Ec. (3.7) y Ec. (3.9) se obtienen los coeficientes F_1 y F_{11} en función de las resistencias del material:

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_T X_C} \quad (3.10)$$

Análogamente, si se realizan estos ensayos en la dirección perpendicular a las fibras se obtienen las expresiones de F_2 , F_{22} :

$$F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_T Y_C} \quad (3.11)$$

Realizando ahora un ensayo de cortadura, la rotura se producirá cuando:

$$\sigma_6 = S, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 1 \dots 5 \quad (3.12)$$

independientemente del signo de dicha tensión. Aplicando el criterio de rotura:

$$F_{66} S^2 = 1 \quad (3.13)$$

deduciendo así el coeficiente F_{66} :

$$F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad (3.14)$$

Habiendo llegado a este punto, se plantea el controversial problema de la obtención del coeficiente F_{12} ; no puede ser obtenido mediante un ensayo uniaxial como los anteriores, pues si se analiza la Ec. (3.5) este coeficiente está multiplicando a las tensiones $\sigma_1 \sigma_2$. Para determinarlo se impone un estado biaxial de tensión, de forma que la rotura se produce a un nivel de tensión genérico $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Aplicando esta expresión a la Ec. (3.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 & \Rightarrow \\ [F_1 + F_2] \sigma + [F_{11} + F_{22} + 2 F_{12}] \sigma^2 & = 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Despejando F_{12} y sustituyendo las expresiones de F_1 , F_2 , F_{11} , F_{22} (ver Ec. (3.10) y Ec. (3.11)):

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_T} + \frac{1}{X_C} + \frac{1}{Y_T} + \frac{1}{Y_C} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} \right) \sigma^2 \right] \quad (3.16)$$

Esta expresión implica que F_{12} depende no solamente de las resistencias mecánicas de las láminas, sino que también del valor de la tensión biaxial de rotura. Es decir, para el conocimiento de dicho parámetro es necesario realizar un ensayo de tracción biaxial, lo cual resulta complejo y costoso económicamente. Una alternativa a este ensayo es estimar F_{12} por equivalencia con el criterio de Von Mises:

$$X_T = X_C = \sigma_{ad}, \quad Y_T = Y_C = \sigma_{ad} \quad (3.17)$$

donde σ_{ad} es el límite elástico del material. Sustituyendo la expresión anterior en Ec. (3.10) y en Ec. (3.11) se obtiene que:

$$F_{11} = F_{22} = \frac{1}{\sigma_{ad}^2} \quad (3.18)$$

Aplicar esta equivalencia al criterio de Tsai-Wu Ec. (3.15) resulta en:

$$\left[\frac{\sigma_1}{\sigma_{ad}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_{ad}} \right]^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (3.19)$$

Por otro lado, el criterio de fallo de Von Mises para materiales isótropos es:

$$\left[\frac{\sigma_1}{\sigma_{ad}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_{ad}} \right]^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{ad}} = 1 \quad (3.20)$$

Identificando términos entre las Ec. (3.19) y Ec. (3.20):

$$2 F_{12} = -\frac{1}{\sigma_{ad}} \quad (3.21)$$

generalizando a un material anisótropo:

$$2 F_{12} = -\sqrt{F_{11} F_{22}} \quad (3.22)$$

En [19] se enfatiza que la envolvente elipsoidal de fallo que describe el criterio debe mantenerse cerrada en cualquier estado. Matemáticamente debe cumplirse que:

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}, \quad -1 < F_{12}^* < 1 \quad (3.23)$$

El término F_{23} requiere de un ensayo biaxial al igual que ocurre con F_{12} , debiendo cumplir con la siguiente expresión:

$$F_{23} = F_{13}^* F_{22}, \quad -1 < F_{23}^* < 1 \quad (3.24)$$

El término F_{44} se obtiene analizando la Fig. 3.2 donde se observa que los estados de tensión son idénticos y por lo tanto deben producir las mismas tensiones de rotura permitiendo obtener:

$$F_{44} = 2 [F_{22} - F_{23}] \quad (3.25)$$

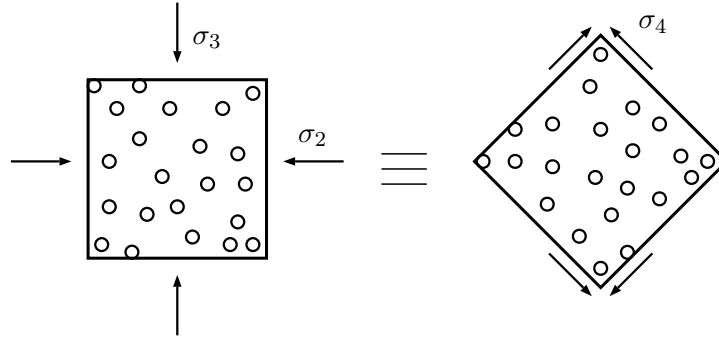


Figura 3.2: Equivalencia de estados de tensión entre tensión-compresión y cortante puro.

Para una lámina ortotrópica trabajando en tensión plana, es decir, en 2 dimensiones (2D) $\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$, la expresión de la Ec. (3.5) resulta:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (3.26)$$

El criterio de Tsai-Wu es uno de los más utilizados en códigos de elementos finitos comerciales, por ejemplo en ANSYS[®] lo implementa, debido a su simplicidad y a que predice satisfactoriamente el fallo de los materiales compuestos en múltiples casos. Muestra de ello son los resultados obtenidos por Tsai en el WWFE [17] y [18].

3.2.1. Efecto del parámetro F_{12}^* de Tsai Wu

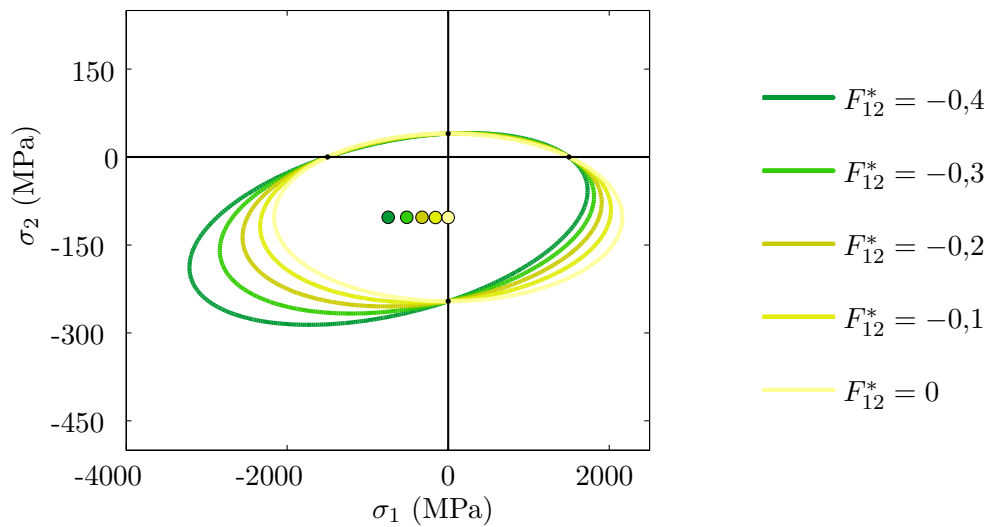


Figura 3.3: Efecto del coeficiente F_{12}^* en la envolvente de fallo de Tsai-Wu para el material T300/5208 con sus centros.

Cómo se establece en la Sección 3.2 el parámetro F_{12} es difícil de estimar, por lo que se obtiene de forma experimental y se describe con la Ec. (3.23). En la Fig. 3.3 se ha representado para una valor de σ_6 nulo la envolvente de fallo de Tsai-Wu en el plano σ_1 - σ_2 variando únicamente F_{12}^* . Para que la envolvente de fallo describa una curva cerrada el parámetro F_{12}^* debe estar en el rango $[-1, 1]$ según se explica en [19]. En estudios posteriores [22] y [23] donde se compara esta teoría con datos experimentales, se establece que el rango que mejor se ajusta a los datos experimentales es $[-0,5, 0]$.

Incrementado el valor absoluto de F_{12}^* se observa que los ejes principales rotan sobre el plano tridimensional que formarían con σ_6 . Esto provoca que el centro de la superficie de fallo se desplace dentro del plano $\sigma_1 - \sigma_2$ y los semiejes de la elipse que describen aumenten. Es posible conocer la variación de estos parámetros en función de F_{12}^* . En la Fig. 3.4 se muestra un esquema representativo:

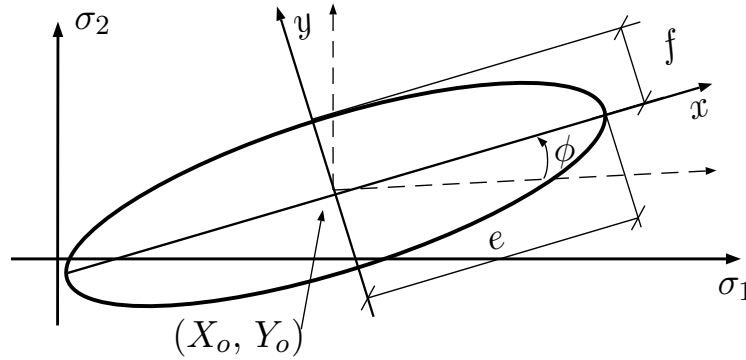


Figura 3.4: Esquema de los parámetros de la superficie de fallo de Tsai-Wu.

La inclinación del semieje mayor ϕ de la elipse de fallo se determina como la rotación de los ejes de coordenadas tal que el término de producto cruzado tiende a cero. En una ecuación cuadrática tipo $e x^2 + f x + g = 0$ el ángulo de rotación es:

$$\cot(2\phi) = \frac{e - g}{f} \quad (3.27)$$

Comparando la Ec. (3.26) a la Ec. (3.27):

$$\cot(2\phi) = \frac{F_{11} - F_{22}}{2F_{12}} \quad (3.28)$$

A través de las Ecs. (3.10) y (3.11) y con los datos establecidos en la Tabla 2.1 se calcula el valor de F_{11} y F_{22} . La expresión de F_{12} en función de F_{12}^* viene dada por la Ec. (3.23). En la Fig. 3.5 se muestra la variación del ángulo de inclinación con el parámetro F_{12}^* :

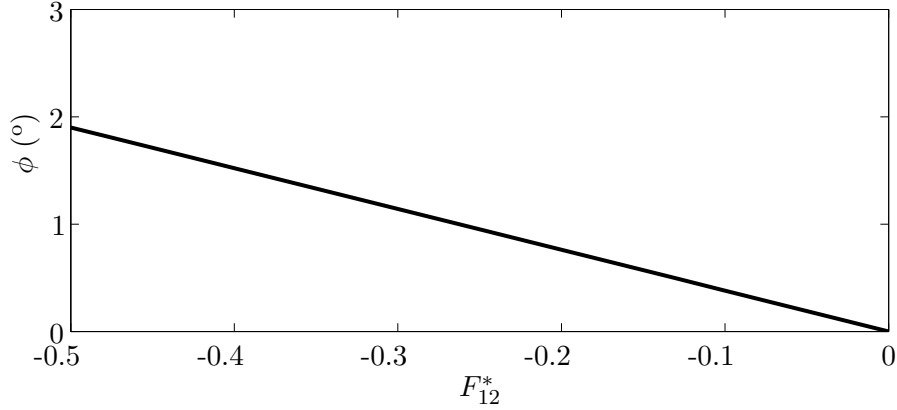


Figura 3.5: Efecto del coeficiente F_{12}^* sobre la inclinación de la envolvente de fallo de Tsai-Wu para el material T300/5208.

El centro de la elipse en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ se puede obtener sustituyendo los coeficientes F_i y F_{ij} en la Ec. (3.26), teniendo en cuenta que F_{12} es función de F_{12}^* y que σ_6 es constante en dicho plano y se ha supuesto nulo.

Para poder obtener la forma canónica de la expresión, es necesario rotar los ejes de tal manera que el término cruzado desaparezca de las ecuaciones para lo que se calcula el ángulo (ver Ec. (3.28)). El cambio que nos permite la rotación es:

$$\begin{aligned} x &= x_r \cos \phi - y_r \sin \phi \\ y &= x_r \sin \phi + y_r \cos \phi \end{aligned} \quad (3.29)$$

De esta manera, tras ajustar cuadrados es posible expresar la ecuación en forma canónica:

$$\frac{(x_r - x_0)^2}{e^2} + \frac{(y_r - y_0)^2}{f^2} = 1 \quad (3.30)$$

siendo x_0 e y_0 las coordenadas del centro de la elipse.

En la Fig. 3.6 se han representado las coordenadas del centro de la elipse que describe la superficie de fallo. Es destacable que la posición vertical no varía, mientras que la horizontal sí. El aumento de $|F_{12}^*|$ implica un aumento de la distancia horizontal al centro. Para tener una perspectiva de esta variación, en la Fig. 3.3 se encuentran representados los elipses con sus respectivos centros obtenidos para el material T300/5208.

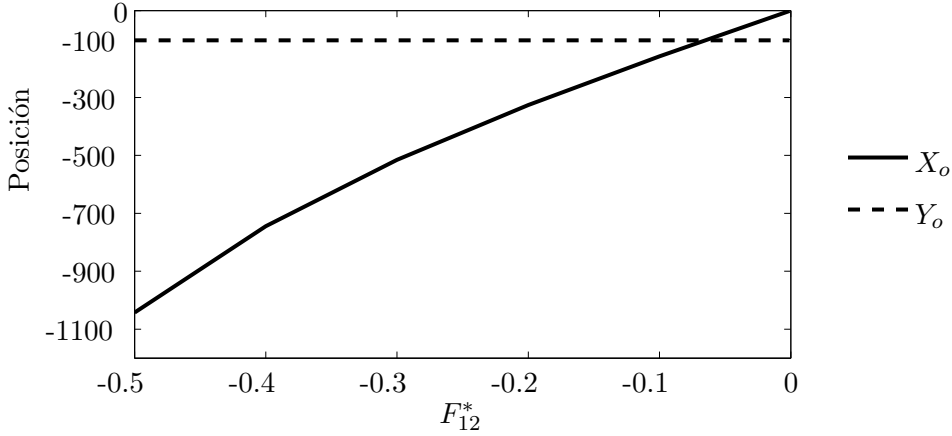


Figura 3.6: Variación del centro de la elipse de fallo en función del coeficiente F_{12}^* del criterio de Tsai-Wu para el material T300/5208.

3.2.2. Resumen Criterio de Tsai-Wu

Cómo se ha visto a lo largo de esta sección este criterio se basa en una única ecuación cuadrática.

- En 2D:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (3.31)$$

- En 3D:

$$F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + F_{44} \sigma_4^2 + F_{66} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] + 2 F_{12} [\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3] + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + F_1 \sigma_1 + F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] = 1 \quad (3.32)$$

F_{11}	F_{22}	F_{55}	F_{12}	F_{23}	F_{44}	F_1	F_2
$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{S^2}$	$F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$	$F_{13}^* F_{22}$	$2 [F_{22} - F_{23}]$	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$

Tabla 3.3: Relación entre los coeficientes de Tsai-Wu y las resistencias a fallo.

3.3. Criterio de Hoffman

En 1967 Hoffman propone en [20] un criterio de fallo basado en el criterio de Tsai-Hill. Éste último no establece discrepancias entre las resistencias a tracción y compresión,

SECCIÓN 3.3. *Criterio de Hoffman*

obviando así el efecto Bauschinger habitual en metales. Para materiales compuestos donde las diferencias entre las resistencias a tracción y compresión pueden ser muy grandes, es necesario evaluar el criterio de Tsai-Hill en los 4 cuadrantes. Hoffman consigue aglutinar estas diferencias en una sola ecuación introduciendo 3 términos lineales:

$$C_1 [\sigma_2 - \sigma_3]^2 + C_2 [\sigma_3 - \sigma_1]^2 + C_3 [\sigma_1 - \sigma_2]^2 + C_4 \sigma_1 + C_5 \sigma_2 + C_6 \sigma_3 + C_7 \sigma_4^2 + C_8 \sigma_5^2 + C_9 \sigma_6^2 = 1 \quad (3.33)$$

Estos coeficientes son determinados en función de los parámetros del material, para ello se realizan; 3 ensayos uniaxiales a tracción, 3 a compresión y 3 a cortante.

En primer lugar, se considera un estado de tensión límite a cortante y el resto de valores de tensión nulos. La lámina romperá cuando:

$$\sigma_6 = S, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 1 \dots 5 \quad (3.34)$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (3.33) se obtiene:

$$C_9 = \frac{1}{S^2} \quad (3.35)$$

De manera análoga se realizan los otros 2 ensayos a cortante obteniendo así los siguientes coeficientes:

$$C_7 = \frac{1}{\tau_T^2}, \quad C_8 = \frac{1}{R_b^2} \quad (3.36)$$

Para obtener el resto de constantes, se realizan ensayos uniaxiales de tracción y compresión. A modo de ejemplo se formula para el eje longitudinal:

$$\sigma_1 = X_T, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2 \dots 6 \quad (3.37)$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (3.33) se obtiene:

$$C_2 X_T^2 + C_3 X_T^2 + C_4 X_T = 1 \quad (3.38)$$

Se formula el mismo ensayo pero a compresión:

$$\sigma_1 = -X_C, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2 \dots 6 \quad (3.39)$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$C_2 X_C^2 + C_3 X_C^2 - C_4 X_C = 1 \quad (3.40)$$

Si se realizan los mismos ensayos en las otras 2 direcciones se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_1 Y_T^2 + C_3 Y_T^2 + C_5 Y_T &= 1 \\ C_1 Y_T^2 + C_3 Y_T^2 - C_5 Y_T &= 1 \\ C_1 Z_T^2 + C_2 Z_T^2 + C_6 Z_T &= 1 \\ C_1 Z_T^2 + C_2 Z_T^2 - C_6 Z_T &= 1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las Ecs. (3.38), (3.40) y (3.41) forman un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, un sistema determinado con solución:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{1}{X_T X_C} \right], & C_4 &= \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \\
 C_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{1}{Y_T Y_C} \right], & C_5 &= \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \\
 C_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{X_T X_C} - \frac{1}{Z_T Z_C} \right], & C_6 &= \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Si se considera el material transversalmente isotrópico, y con plano basal 2-3, existe una igualdad de coeficientes:

$$C_2 = C_3, \quad C_5 = C_6, \quad C_7 = C_8 \tag{3.43}$$

quedando el criterio de Hoffman en 3D del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 &C_1 [\sigma_2 - \sigma_3]^2 + C_2 [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] + \\
 &C_4 \sigma_1 + C_5 [\sigma_2 + \sigma_3] + C_7 [\sigma_4^2 + \sigma_5^2] + C_9 \sigma_6^2 = 1
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Para el caso de tensión plana son nulas las componentes de tensión $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ quedando:

$$C_1 \sigma_2^2 + C_2 [\sigma_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] + C_4 \sigma_1 + C_5 \sigma_2 + C_9 \sigma_6^2 = 1 \tag{3.45}$$

3.3.1. Resumen Criterio Hoffman

- En 2D:

$$C_1 \sigma_2^2 + C_2 [\sigma_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] + C_4 \sigma_1 + C_5 \sigma_2 + C_9 \sigma_6^2 = 1 \tag{3.46}$$

- En 3D:

$$\begin{aligned}
 &C_1 [\sigma_2 - \sigma_3]^2 + C_2 [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] + \\
 &C_4 \sigma_1 + C_5 [\sigma_2 + \sigma_3] + C_7 [\sigma_4^2 + \sigma_5^2] + C_9 \sigma_6^2 = 1
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

C_1	C_2	C_4	C_5	C_7	C_9
$\frac{1}{2} \left[\frac{2}{Y_T Y_C} - \frac{1}{X_T X_C} \right]$	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{X_T X_C} \right]$	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	$\frac{1}{\tau_T^2}$	$\frac{1}{S^2}$

Tabla 3.4: Relación entre los coeficientes de Hoffman y las resistencias a fallo para material transversalmente isotrópico con plano basal 2-3.

Criterios asociados con modos de fallo

4.1. Criterio de Christensen

En este apartado se describe el criterio de Christensen [14] así como sus aplicaciones y limitaciones. Este criterio se basa en la simetría transversal de los materiales compuestos de fibra y para su obtención se realizan una serie de consideraciones micromecánicas. Posteriormente, se verá que el criterio de Hashin [13], también se basa en las mismas consideraciones.

4.1.1. Simetría transversal

Los materiales compuestos reforzados con fibra son transversalmente isotrópicos. Para esta clase de simetría existen 7 invariantes de tensión, en términos de polinomios cuadráticos [19].

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 \\
 I_2 &= \sigma_2 + \sigma_3 \\
 I_3 &= \sigma_1^2 \\
 I_4 &= [\sigma_2 + \sigma_3]^2 \\
 I_5 &= \sigma_1 [\sigma_2 + \sigma_3] \\
 I_6 &= \sigma_6^2 + \sigma_5^2 \\
 I_7 &= \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_4^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por otro lado, la existencia de esfuerzos en direcciones longitudinales y transversales sugiere la separación entre 2 fases, ya que pueden existir entre ellos diferencias en un orden de magnitud o más. Esta separación entre modos no es posible sin recurrir a consideraciones micromecánicas.

4.1.2. Modos de fallo

Teniendo en cuenta las consideraciones micromecánicas de [14], se consideran 2 modos de fallo:

- Fallo de matriz (FM): Este modo depende de los siguientes invariantes:

$$f(I_2, I_4, I_6, I_7) \leq 1 \tag{4.2}$$

que se pueden expresar como un polinomio con coeficientes λ_1 , β_1 , γ_1 y Δ a determinar :

$$\lambda_1 I_2 + \beta_1 I_4 + \gamma_1 I_6 + \Delta I_7 \leq 1 \tag{4.3}$$

- Fallo de fibras (FF): Por otro lado, este modo depende de los invariantes:

$$f(I_1, I_3, I_5) \leq 1 \tag{4.4}$$

que se pueden expresar como un polinomio con coeficientes λ_2 , β_2 y γ_2 también a determinar:

$$\lambda_2 I_1 + \beta_2 I_3 + \gamma_2 I_5 \leq 1 \quad (4.5)$$

Los coeficientes anteriores se obtienen en [14] siguiendo 2 condiciones: (i) se permite el fallo bajo tracción hidrostática, pero no bajo compresión, (ii) el criterio es una forma generalizada de Von-Mises, aunque a diferencia del criterio de Tsai-Wu, esta similitud sea para cada modo por separado. Por ejemplo, en el modo matriz la componente σ_1 no estará presente.

4.1.3. Resumen del criterio de Christensen

El criterio de fallo de Christensen en 3D, como se ha visto en las secciones anteriores, se divide en 2 modos de fallo, que son:

■ **Modo I → FM:**

$$\alpha_1 k_1 [\sigma_2 + \sigma_3] + [1 + 2\alpha_1] \left[\frac{1}{4} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_4^2 \right] + \beta [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = k_1^2 \quad (4.6)$$

$$k_1 = \frac{Y_C}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{Y_C}{Y_T} - 1 \right], \quad \beta = \left[\frac{Y_C}{2S} \right]^2 \quad (4.7)$$

■ **Modo II → FF:**

$$-\alpha_2 k_2 \sigma_1 + \frac{1}{4} [1 + 2\alpha_2] \sigma_1^2 - \frac{[1 + \alpha_2]^2}{4} [\sigma_2 + \sigma_3] \sigma_1 = k_2^2 \quad (4.8)$$

$$k_2 = \frac{X_T}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{X_T}{X_C} - 1 \right] \quad (4.9)$$

En 2D se reduce a:

■ **Modo I → FM:**

$$k'_1 \sigma_2 + \alpha'_1 \sigma_2^2 + \beta' \sigma_6^2 = 1 \quad (4.10)$$

$$k'_1 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, \quad \alpha'_1 = \frac{1}{Y_C Y_T}, \quad \beta' = \frac{1}{S^2} \quad (4.11)$$

■ **Modo II → FF:**

$$k'_2 \sigma_1 + \alpha'_2 \sigma_1^2 - \frac{1}{4} [k'_2]^2 \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (4.12)$$

$$k'_2 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \quad \alpha'_2 = \frac{1}{X_T X_C} \quad (4.13)$$

4.1.4. Aplicación del criterio

Para aplicar el criterio de Christensen hay que tener en cuenta que:

- Ambos modos deben ser considerados para cualquier evaluación.
- Para algunos subespacios de esfuerzos sólo se podrá evaluar un modo, mientras que para otros se evalúan ambos.
- Una vez evaluados, si alguna de las Ecs. (4.6) ó (4.8) no se cumple, se considerará como una causa de ruptura del material.

4.1.5. Restricciones del criterio

El criterio de Christensen tiene 2 restricciones muy simples, debidas a consideraciones micromecánicas:

1. Para que el criterio se pueda separar en 2 modos distintos, se ha de cumplir:

$$k_1 \ll k_2 \quad \rightarrow \quad Y_C \ll X_T \quad (4.14)$$

2. Dado que el fallo no puede ocurrir bajo un estado de compresión hidrostática, se ha de cumplir:

$$\left| \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right| = O(k_1) \quad (4.15)$$

Por último y como referencia, en la Tabla 4.1 se presentan los valores de los parámetros de fallo de Christensen para algunos materiales [19].

Parámetros	T300/ep.	E-glass/ep.	IM6/ep.	Kev49/ep.
α_1	2,58	1,40	0,84	1,71
α_2	0	0,37	0,64	2,48
k_1 GPa	0,12	0,06	0,08	0,03
k_2 GPa	0,75	0,53	1,75	0,70
β	3,27	0,67	0,59	0,61

Tabla 4.1: Valores de parámetros de Christensen.

4.2. Criterio de Hashin

4.2.1. Introducción

El investigador Hashin propone que el criterio para predecir el fallo de un material compuesto ha de basarse necesariamente en los mecanismos de fallo del mismo y no en la extrapolación de criterios existentes para otros materiales.

Bajo esta idea, el autor propuso inicialmente en 1973 un criterio para un estado biaxial de tensión [12], que se basa en 2 modos de fallo: uno basado en el fallo de las fibras y otro basado en el fallo de la matriz. El primero estaba gobernado por las tensiones longitudinales y el segundo por las tensiones transversales y tangenciales a la fibra.

Posteriormente, en 1980 Hashin propone [13] otra vez 2 mecanismos de fallo: uno asociado a fibras y otro a matriz, pero distinguiendo entre tracción y compresión. Esta última subdivisión es debida a la diferencia entre fallos de compresión y de tracción. Así, por ejemplo, mientras que tracción en la dirección de la fibra produce una rotura, compresión produce micropandeo. Este criterio de fallo es cuadrático que, al igual que los

criterios de Tsai-Wu y Christensen, se deduce a partir de la invariancia ante rotación (en la dirección de la fibra) de los materiales compuestos. Dicha invariancia es debida a la isotropía transversal de estos materiales.

4.2.2. Consideraciones cuadráticas

Según [13], que los criterios anteriores sean cuadráticos se deben a aproximaciones de la envolvente de esfuerzos pero no a razonamientos físicos. Así, ante un criterio de fallo se pueden considerar (ver Fig. 4.1):

- La aproximación más simple para la envolvente es la elección de planos paralelos a los ejes (esfuerzos constantes), por lo que la región de fallo será un paralelepípedo. Este tipo de criterio, llamado de tensión o deformación máxima, no describe bien la interacción entre esfuerzos, por ello se relaciona con los criterios límite.
- La siguiente aproximación consiste en planos oblicuos que intersectan a los ejes, lo que debe ser entendido como una aproximación lineal que, si bien es muy usada en criterios de fallo de rocas, no tiene mucha aplicación en materiales compuestos de fibra.
- El siguiente orden de aproximación es el cuadrático.

Aproximaciones de orden superior complicarían el criterio necesitando más parámetros experimentales, sin proporcionar mucha más información.

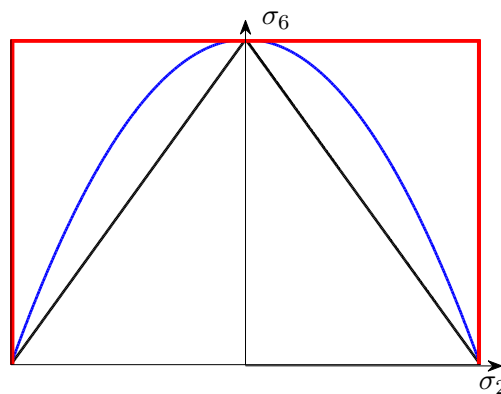


Figura 4.1: Distintas aproximaciones para criterios de fallo que se pueden realizar: esfuerzos constantes (rojo), aproximación lineal (negro) y cuadrática (azul).

4.2.3. Invariantes bajo rotaciones

Si se considera una muestra de material transversalmente isótropo, con x en la dirección de la fibra e y, z transversales (como se ve en la Fig. 4.3), los invariantes bajo rotaciones

en torno a x serán:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 \\
 I_2 &= \sigma_2 + \sigma_3 \\
 I_3 &= \sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3 \\
 I_4 &= \sigma_5^2 + \sigma_6^2 \\
 I_5 &= 2 \sigma_6 \sigma_4 \sigma_5 - \sigma_2 \sigma_5^2 - \sigma_3 \sigma_6^2
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Este criterio es cuadrático, por lo que el último invariante en la Ec. (4.16) no se usará siendo su forma más general:

$$A_1 I_1 + B_1 I_1^2 + A_2 I_2 + b_2 I_2^2 + C_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_4 I_4 = 1 \tag{4.17}$$

Si se consideran sólo esfuerzos cortantes puros longitudinales o transversales, de la Ec. (4.17) se obtiene:

$$A_3 = \frac{1}{\tau_T^2}; \quad A_4 = \frac{1}{S^2} \tag{4.18}$$

4.2.4. Modos de fallo

Observaciones experimentales de fallos de materiales compuestos unidireccionales reflejan los comentados 2 modos de fallo, que se estudian en las siguientes secciones.

En el modo de fallo de fibra el plano rotura es aproximadamente el $y-x$ (ver Fig. 4.3), por lo que los esfuerzos que producen este modo son: σ_1 , σ_5 , σ_6 . Así considerando la Ec. (4.18), la Ec. (4.17) quedará:

$$A_f \sigma_1 + B_f \sigma_1^2 + \frac{1}{S^2} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \tag{4.19}$$

Este modo, a su vez, se puede dividir en otros 2 modos: tensión y compresión.

- **Fallo de fibra a tracción (FFT)** $\sigma_1 > 0$. Sólo se dispone de un valor experimental X_T , para determinar los coeficientes A_f y B_f . Para obtenerlos es necesario realizar ensayos biaxiales combinando σ_1 y σ_6 con lo que la Ec. (4.19) queda:

$$\left[\frac{\sigma_1}{X_T} \right]^2 + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \tag{4.20}$$

- **Fallo de fibra a compresión (FFC)** $\sigma_1 < 0$. Sólo se dispone de X_C y hay 2 coeficientes a determinar también. En este caso, la dependencia del criterio respecto de S no es tan clara, por lo que Hashin sugiere un estudio experimental que nadie ha realizado de esta dependencia. Finalmente, de la Ec. (4.19) se deduce:

$$-\frac{\sigma_1}{X_C} = 1 \tag{4.21}$$

En el modo de fallo de matriz, el plano de rotura es paralelo a la fibra (ver Fig. 4.3) y depende de un cierto ángulo θ_{pf} . El plano de fallo de este modo es más complicado de obtener. Se puede identificar usando la teoría de Möhr (aplicada habitualmente en

Mecánica de Suelos), sin embargo, aunque esta teoría es muy atractiva físicamente, se obtiene un criterio no cuadrático. Los esfuerzos en este plano son: $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$. Sustituyendo la Ec. (4.18), la Ec. (4.17) para este modo se obtiene:

$$A_m [\sigma_2 + \sigma_3] + B_m [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \quad (4.22)$$

Este modo, a su vez, se puede dividir en 2: tensión y compresión.

- **Fallo de matriz a tracción (FMT)** $\sigma_2 + \sigma_3 > 0$. Sólo se dispone de Y_T y se han de determinar 2 coeficientes: A_m^T y B_m^T . Si se siguen argumentos similares a los realizados para obtener el criterio de tensión de fibra, se obtiene la ecuación:

$$\frac{1}{Y_T^2} [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \quad (4.23)$$

- **Fallo de matriz a compresión (FMC)** $\sigma_2 + \sigma_3 < 0$. Sólo se dispone de Y_C , pero de la Ec. (4.22) y suponiendo que el material falla bajo el estado de esfuerzos: $-\sigma = \sigma_2 = \sigma_3$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2\tau_T} \right)^2 - 1 \right] [\sigma_2 + \sigma_3] + \frac{1}{4\tau_T^2} [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \\ \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.2.5. Resumen del criterio de Hashin

Para 3D el criterio resulta:

- **FFT**

$$\left[\frac{\sigma_1}{X_T} \right]^2 + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \quad (4.25)$$

- **FFC**

$$-\frac{\sigma_1}{X_C} = 1 \quad (4.26)$$

- **FMT**

$$\frac{1}{Y_T^2} [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} (\sigma_6^2 + \sigma_5^2) = 1 \quad (4.27)$$

- **FMC**

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2\tau_T} \right)^2 - 1 \right] [\sigma_2 + \sigma_3] + \frac{1}{4\tau_T^2} [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \\ \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Para 2D se reduce a:

■ **FFT**

$$\frac{1}{X_T X_C} \sigma_1^2 + \frac{1}{S^2} \sigma_6^2 = 1 \quad (4.29)$$

■ **FFC**

$$-\frac{\sigma_1}{X_C} = 1 \quad (4.30)$$

■ **FMT**

$$\left[\frac{\sigma_2}{Y_T} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_6}{S} \right]^2 = 1 \quad (4.31)$$

■ **FMC**

$$\left[\left(\frac{Y_C}{2\tau_T} \right)^2 - 1 \right] \left[\frac{\sigma_2}{Y_C} \right] + \left[\frac{\sigma_2}{4\tau_T} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_6}{S} \right]^2 = 1 \quad (4.32)$$

4.2.6. Aplicación del criterio

Para aplicar el criterio de Hashin hay que tener en cuenta: los modos fibra o matriz se aplican de forma similar al criterio de Christensen (ver la Sección 4.1.4).

4.2.7. Restricciones del criterio

El criterio de Hashin no tiene restricciones importantes, aunque cabe destacar una serie de comentarios:

- El parámetro de fallo τ_T es muy difícil de medir, pero ningún criterio de fallo generalizado debería prescindir de él. Como no suele aparecer en las tablas de propiedades, en este trabajo se obtiene con ayuda de la relación dada en [14]:

$$\tau_T = S \left[\frac{Y_C}{Y_T} \right]^{-1/2} \quad (4.33)$$

- El modo FFT puede aproximarse mediante:

$$\frac{\sigma_1}{X_T} = 1 \quad (4.34)$$

para lo que se desprecian las contribuciones de los términos cortantes σ_6 y σ_5 .

- La influencia de los esfuerzos cortantes en los modos de fibra, según [13], no está bien entendida. Por esto propone un estudio experimental amplio de dicha dependencia.

4.3. Criterio de Puck

4.3.1. Introducción

Este criterio utilizado en la industria aeroespacial alemana [15] se corresponde con el grupo de criterios de modo. Entre 1968 y 1969 Puck concluye de observaciones experimentales en láminas unidireccionales sobre las que actúan esfuerzos en estado plano, la existencia de diferentes mecanismos de fallo y la interacción entre los mismos. Así, distingue también entre fallo de las fibras (FF) y fallo entre fibras (sus siglas en inglés, IFF) y además entre tracción y compresión, resultando en 5 mecanismos de fallo diferentes.

El criterio de Puck se basa en los principios de Möhr. La hipótesis de fractura de Möhr en materiales frágiles establece que “*el límite de fractura de un material está determinado por las tensiones en el plano de fractura*” [22]. Es así como se consigue que sólo contribuyan al criterio aquellas componentes de tensión que realmente influyen en un mecanismo de fallo. El concepto de “plano de acción” es relevante en el caso de fallo entre fibras, y se define como el plano en el que la probabilidad de producirse el fallo es mayor.

- **FF:** Para este mecanismo, se define una ecuación de tensión máxima que se basa en la consideración de que el composite falla cuando la fibra más cargada alcanza una determinada tensión crítica.
- **IFF:** Es posible distinguir 3 modos de fallo: modo A, debido a tracción y 2 modos llamados B y C debidos a compresión. El desarrollo de éstos es llevado a cabo más adelante. Este tipo de fallo resulta de gran importancia, sobre todo tras demostrarse que en tubos sometidos a torsión, las fracturas oblicuas generadas bajo compresión transversal pueden ocasionar la destrucción del composite (ver Fig. 4.15).

La iniciación de IFF se debe a la generación de microgrietas en la matriz, que producen elevadas concentraciones de tensiones interlaminares y eventualmente inician delaminaciones locales.

Estos 2 mecanismos de fallo son independientes ya que los fenómenos de fractura son totalmente distintos. La FF se produce por la rotura de las fibras que refuerzan el composite, mientras que el IFF es debido a la fractura de la matriz en un plano paralelo a estas fibras, causada por las tensiones actuantes en ese plano.

La capacidad portante de un laminado depende en gran medida de la resistencia de sus fibras, porque debido a su mayor rigidez (comparada con la de la matriz) la mayor parte de la carga está concentrada en ellas; por lo tanto el mecanismo de fallo FF es de gran importancia en el diseño. Pero sucede que antes de que las fibras alcancen su máxima deformación aparece el fenómeno IFF lo que significa que se produce una rotura local de la matriz. Ambos mecanismos se caracterizan por una rotura súbita local del material sin apenas deformaciones plásticas.

Para una mejor comprensión de estos fenómenos en la Fig. 4.2 se han representado los 2 mecanismos de fallo y la combinación de esfuerzos que los generan.

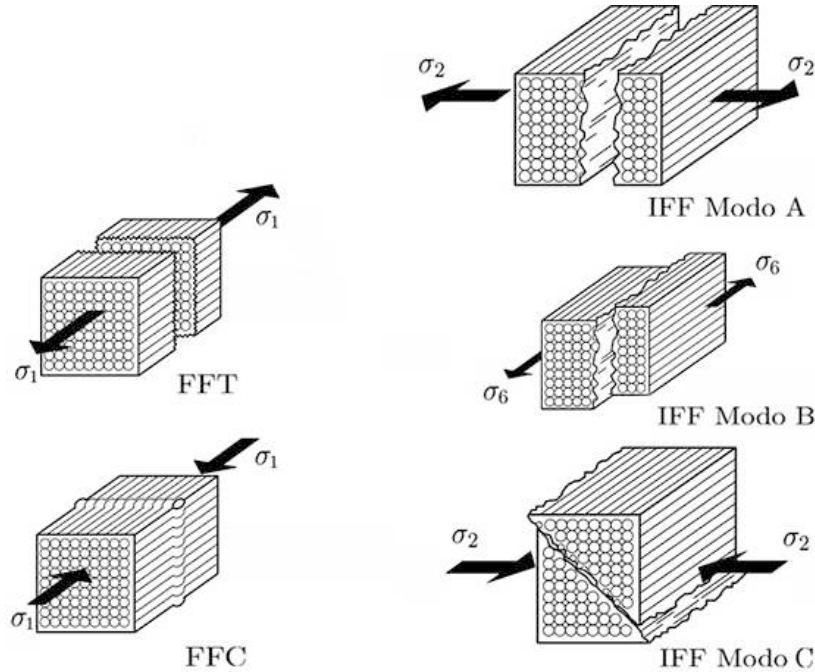


Figura 4.2: Mecanismos de fallo. Ambos son totalmente distintos ya que FF afecta a fibra mientras que IFF afecta a matriz.

4.3.2. Símbolos

Debido a la gran variedad de símbolos usados en el criterio de Puck, resulta necesario un recopilatorio de éstos que facilite su comprensión. Cabe mencionar que el plano 1-2 se considera anisótropo por la presencia de las fibras longitudinales mientras que los planos 1-3 y 2-3 basales o isotrópicos. Algunos de los símbolos utilizados para este criterio ya han sido usados con anterioridad, en particular: X_T , X_C , Y_T , Y_C , S , σ_1 , σ_2 , σ_6 y ν_{12} . El resto de símbolos que aparecen en el desarrollo del criterio son:

- τ_T^A . Resistencia del composite a cortante en el plano isótropo de fractura.
- ε_{1T} . Deformación longitudinal de fallo a tracción.
- ε_{1C} . Deformación longitudinal de fallo a compresión.
- $m_{\sigma f}$. Factor de aumento de tensión media en dirección transversal.
- $R_{\perp}^{(+A)}$. Resistencia a tracción en un plano de fractura.
- $R_{\perp}^{(-A)}$. Resistencia a compresión en un plano de fractura.
- $R_{\perp\perp}^A$. Resistencia a cortante en un plano de fractura en dirección perpendicular fibra.
- $R_{\perp\parallel}^A$. Resistencia a cortante en un plano de fractura en dirección paralela fibra.

- θ_{fp} . Ángulo del plano de fractura.
- σ_n . Tensión normal al plano de fractura en dirección x_n (ver Fig. 4.3).
- σ_{nl} . Tensión tangencial al plano de fractura en plano x_n - x_1 .
- σ_{nt} . Tensión tangencial al plano de fractura en plano x_n - x_t .
- $p_{\perp\parallel}^{(-)}$. Pendiente envolvente ejes σ_n, τ_{nl} para $\tau_{nl} < 0$.
- $p_{\perp\parallel}^{(+)}$. Id. ejes σ_n, τ_{nl} para $\tau_{nl} > 0$.
- $p_{\perp\perp}^{(-)}$. Id. ejes σ_n, τ_{nt} para $\tau_{nt} > 0$.
- $p_{\perp\perp}^{(+)}$. Id. ejes σ_n, τ_{nt} para $\tau_{nt} > 0$.
- E_{f1} . Módulo de Young de fibra.
- E_1 . Módulo de Young del composite en dirección fibra.
- ν_{f12} . Coeficiente de Poisson principal de fibra.
- σ_{6c} . Tensión de cortante en posición de cambio entre modos B y C.

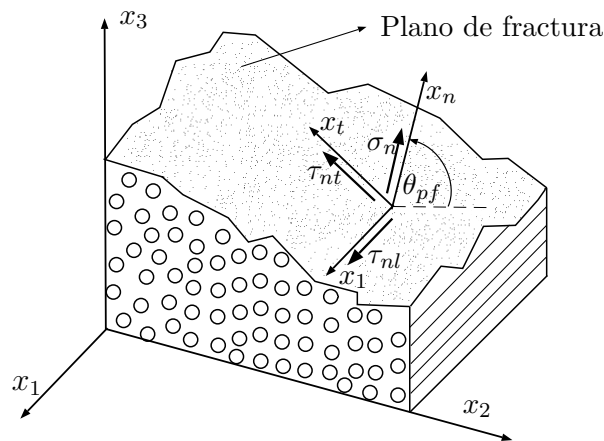


Figura 4.3: Plano de fractura genérico en composite UD y ejes asociados.

4.3.3. Fundamentos del método

Puck basa su teoría de fallo en las siguientes hipótesis:

1. La capa unidireccional (UD) es transversalmente isótropa y el fallo ocurre de una manera frágil.
2. La Teoría de Möhr es válida. La resistencia del material es determinada por las tensiones en el plano de fractura en el momento de la rotura.

3. Para compresión transversal y cortante, el plano de fractura puede ser inclinado con respecto a la cara en que las tensiones externas están actuando, (ver Fig. 4.4).

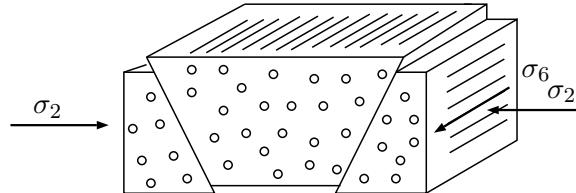


Figura 4.4: Fallo por compresión transversal con plano de fractura inclinado.

4. Para estados de tensión plana $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$ se remplazan por las principales σ_I, σ_{II} y se toma como válida la modificación de Paul [21] a la teoría de la fractura de Möhr. Esta modificación se basa en la diferenciación de los 2 mecanismos de fractura, lo que da lugar a las siguientes hipótesis. Un material intrínsecamente frágil se fracturará (ver Fig. 4.5):

- En el plano donde la tensión de cortante τ_{nt} alcanza un valor crítico que es dado por la resistencia a la fractura por cortante τ_T^A .
- En el plano donde la tensión máxima principal σ_{II} ó σ_{III} alcanza la resistencia a tracción-compresión transversal Y_T ó Y_C .
- En el plano donde se produzca una combinación de ambos.

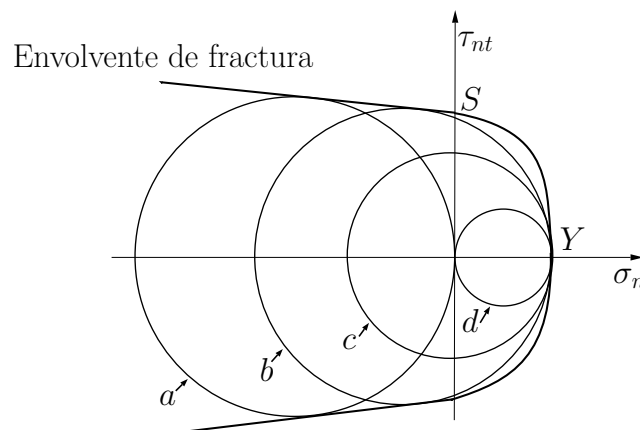


Figura 4.5: Envolvente de fractura Möhr. El material puede romper por tracción (círculo d) o compresión simple a , por un estado de cortante puro c , o por una combinación de ambos b .

4.3.4. FF. Fractura de fibra

Es un mecanismo de fallo bastante sencillo, usado desde 1969 y muy parecido al criterio de tensión máxima longitudinal. El fallo de la fibra se entiende como la pérdida de la

capacidad portante de la lámina en dirección longitudinal. Ésta puede originarse tanto a tracción como a compresión.

A tracción, el fallo consiste en la rotura simultánea de la mayoría de las fibras. Algunas de ellas rompen cuando se alcanza el 60% de la carga máxima soportada, pero estas fracturas parciales no son tenidas en cuenta. El mecanismo de fallo FF está dominado por la capacidad portante de las fibras, por lo que los micro-defectos existentes en la matriz no influyen de manera significativa.

A compresión, los fenómenos más frecuentes son el micro-pandeo de las fibras y el “fiber kinking” (ver Fig. 4.6) que al aumentar la carga derivan en un pliegue macroscópico de la lámina. En este caso, el fallo de la fibra depende en gran medida de la interacción fibra-matriz, por tanto los micro-defectos en la matriz sí que afectarán.

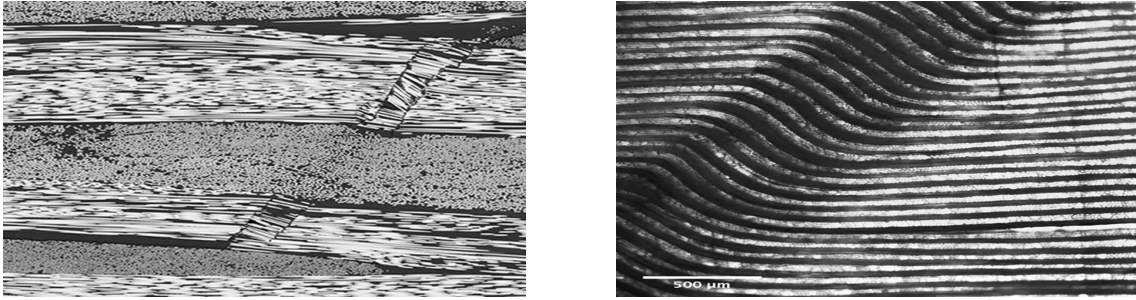


Figura 4.6: Imágenes representativas del efecto “fiber kinking”.

Es posible establecer que el fallo de la fibra se producirá cuando la tensión normal longitudinal sea igual a la que provoca el fallo bajo un estado de tensión uniaxial σ_1 :

$$\sigma_1 \geq 0 \Rightarrow \sigma_1 = X_T, \quad \sigma_1 < 0 \Rightarrow \sigma_1 = -X_C \quad (4.35)$$

donde el signo menos que precede a X_C se debe a que las resistencias se definen con valores absolutos.

Desde el punto de vista del “factor de exposición de tensiones” (coeficiente de seguridad), la Ec. (4.35) se puede expresar como:

$$\sigma_1 \geq 0 \Rightarrow R_\sigma = \frac{\sigma_1}{X_T}, \quad \sigma_1 < 0 \Rightarrow R_\sigma = \frac{-\sigma_1}{X_C} \quad (4.36)$$

Otra manera de expresar el mecanismo FF consiste en indicar que la fractura se produce cuando la deformación de las fibras más cargadas alcanza la deformación de rotura del material obtenida de ensayos:

$$\varepsilon_1 \geq 0 \Rightarrow R_\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1T}}, \quad \varepsilon_1 < 0 \Rightarrow R_\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1C}} \quad (4.37)$$

De esta manera $0 \leq R \leq 1$ (donde R es la menor de R_σ y R_ε) evalúa el riesgo de fractura, que ocurrirá si $R = 1$. Una buena aproximación podría tomarse como una

combinación del criterio en ambos espacios (tensión y deformación):

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{X_T} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1T}} \right] = 1 && \Leftrightarrow \sigma_1 \geq 0 \\ R &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{X_C} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1C}} \right] = -1 && \Leftrightarrow \sigma_1 < 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aún en un estado tensional sólo transversal ($\sigma_1 = 0$ pero $\sigma_2 \neq 0$) pueden aparecer tensiones en la dirección paralela a las fibras, tanto en ellas mismas como en la matriz, ya que fibra y matriz experimentan distintas deformaciones como consecuencia de los distintos módulos elásticos y coeficientes de Poisson. Por esto es necesario reducir la magnitud de los valores a través de $m_{\sigma f}$. El valor recomendado de $m_{\sigma f}$ para reproducir este fenómeno depende del material; 1.3 para GFRP y 1.1 para CFRP [13]. La deformación normal longitudinal en la fibra se puede entonces expresar a través de la ley de comportamiento como:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - m_{\sigma f} \frac{\nu_{12}}{E_{f1}} \sigma_2 \quad (4.39)$$

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad a las deformaciones de fibra y matriz se obtiene la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{1T}} \left[\varepsilon_1 + m_{\sigma f} \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} \sigma_2 \right] &= 1 && \Leftrightarrow \sigma_1 \geq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_{1C}} \left[\varepsilon_1 + m_{\sigma f} \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} \sigma_2 \right] &= -1 && \Leftrightarrow \sigma_1 < 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por lo tanto la condición de fallo bajo una combinación σ_1, σ_2 se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{X_T} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{X_T} + m_{\sigma f} \nu_{f12} \frac{E_1}{E_{f1}} \frac{\sigma_2}{X_T} &= 1 && \Leftrightarrow \sigma_1 \geq 0 \\ \frac{\sigma_1}{X_C} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{X_C} + m_{\sigma f} \nu_{f12} \frac{E_1}{E_{f1}} \frac{\sigma_2}{X_C} &= -1 && \Leftrightarrow \sigma_1 < 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

La expresión de esta ecuación en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ es una línea recta cuyo punto de corte con el eje de abscisas es la resistencia longitudinal X_T , y con el eje de ordenadas (ver Fig. 4.7):

$$\frac{X_T}{m_{\sigma f} \nu_{f12} \frac{E_1}{E_{f1}} - \nu_{12}} \quad (4.42)$$

Se obtiene la misma expresión con signos cambiados para el caso de compresión.

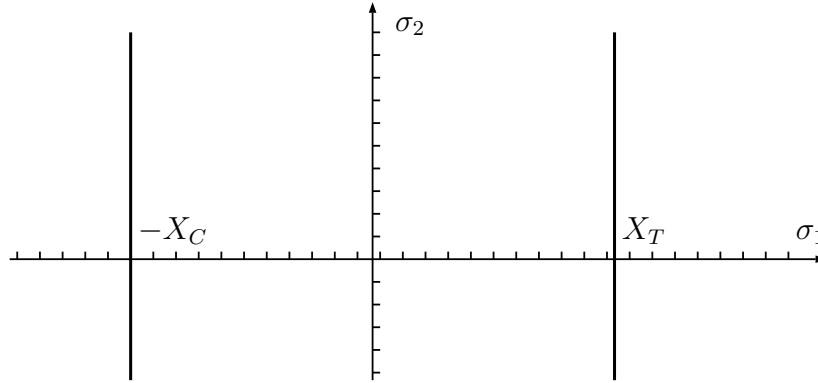


Figura 4.7: Envoltura de fractura para FF en el espacio σ_1, σ_2 .

4.3.5. Consideraciones micromecánicas

Aunque Puck desarrolla su formulación para estado plano de tensiones 2D, también tiene en cuenta la influencia que la anisotropía origina en la distribución transversal 3D de tensiones. Este criterio de fallo se basa en consideraciones micromecánicas tomando parámetros de resistencia correspondientes a una situación tridimensional y los usa en un modelo plano. De esta manera, se obtiene un modelo capaz de obtener el ángulo de fractura del material. En los apartados siguientes se expone una formulación en la que entran en juego dichos parámetros.

4.3.6. IFF. Fallo de interfibra

Este mecanismo de fallo está basado en los mismos fundamentos mecánicos que el criterio propuesto por Hashin. Se asume que casi todos los composites usados en aplicaciones estructurales con una matriz polimérica se comportan de una manera frágil. Entonces, este criterio se caracteriza porque el fallo no depende de σ_1 , sino de un estado tensional dado por σ_2 , o en general σ_n (dirección transversal de las fibras, ver Fig. 4.3) y por σ_6 (ver Fig. 4.4) o en general τ_{nl} . Esta interacción es debida a que este mecanismo de fractura ocurre en un plano paralelo a la fibra por lo tanto el fallo se produce en la matriz y no interviene ninguna fibra. Matemáticamente este criterio se expresa de una forma similar a la de Möhr:

-Zona de tracción: $\sigma_n \geq 0$. Las 3 componentes planas contribuirán al fallo, por tanto, la ecuación que establezca el criterio deberá ser una interacción de ellas. Dado que el signo de las componentes tangenciales no tiene influencia sobre el fallo, una interacción tipo cuadrática es la forma más simple que resulta adecuada. La fractura aparece cuando se cumple la siguiente condición en 3D:

$$\left[\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+A)}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}^A} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right]^2 = 1 \quad (4.43)$$

que para tensión plana $\tau_{nt} = 0$ se reduce en un término.

La envolvente de fractura de la expresión reducida se representa por una elipse (ver Fig. 4.8) cuyos semiejes son respectivamente las resistencias a tracción pura y a cortante del material.

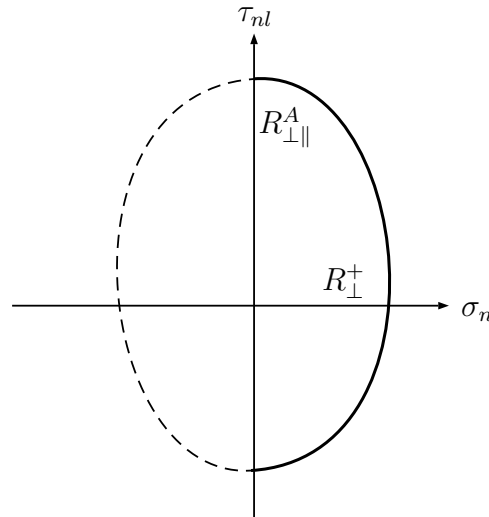


Figura 4.8: Envolvente de fallo para IFF a tracción (tensión plana).

-Zona de compresión: $\sigma_n < 0$. Se postula que una tensión de compresión transversal que actúa en el plano de fractura no contribuye al inicio de la fractura, en cambio aumenta la resistencia a la cortadura causada por las tensiones de cortante τ_{nl} . En la siguiente ecuación dada en [15] se observa para tensión plana que el denominador aumenta ante una carga de compresión:

$$\left[\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp}^A - p_{\perp\parallel} \sigma_n} \right]^2 = 1 \quad (4.44)$$

que se representa por 2 rectas cuyos puntos de intersección con el eje de abscisas y ordenadas son respectivamente $R_{\perp}^A/p_{\perp\parallel}$ y $\pm R_{\perp}^A$. De la Fig. 4.9 se desprende que, teóricamente, cuanto mayor es $|\sigma_n|$ más aumenta la resistencia a cortante.

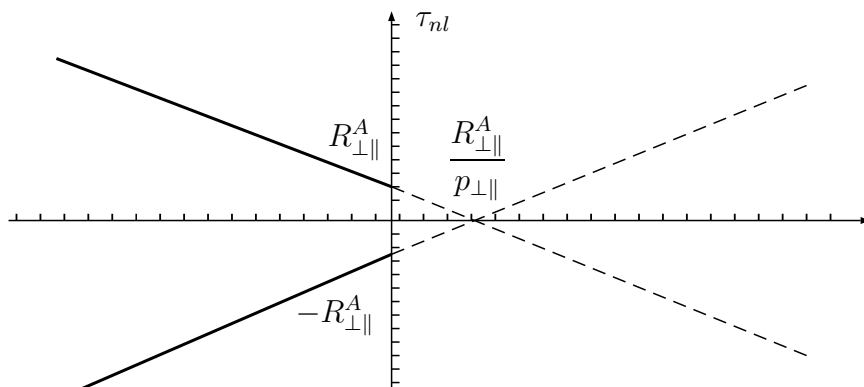


Figura 4.9: Envolvente de fallo para IFF en compresión para tensión plana.

En IFF y en función de cómo se combinen σ_2, σ_6 se distinguen 3 modos distintos de fallo:

Modo A

Se produce por un esfuerzo de tracción combinado con un cortante σ_6 dando lugar a una fractura en dirección del espesor. Puck lo modeliza mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\left[\frac{\sigma_6}{S}\right]^2 + \left[1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{Y_T}{S}\right]^2 \left[\frac{\sigma_2}{Y_T}\right]^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \left[\frac{\sigma_2}{S}\right] = 1 \quad (4.45)$$

En caso de tracción pura se producirá la rotura cuando la tensión de tracción σ_2 alcance la resistencia a tracción del plano de rotura. Por otra parte, para cortante puro se producirá la rotura cuando σ_6 alcance la resistencia del plano de rotura a esfuerzo cortante en la dirección paralela a las fibras. Cuando se produce este modo de fractura se tendría también que disminuir el módulo de Young efectivo, aunque en la bibliografía consultada no se ha encontrado esta reducción.

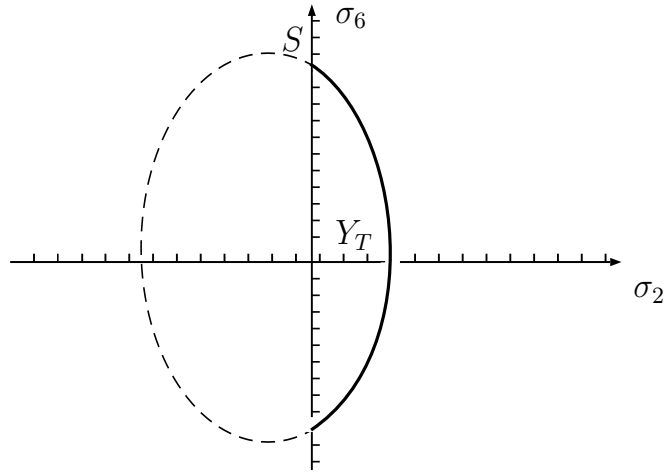


Figura 4.10: Representación del modo de fallo A, válido sólo en zona interior a línea gruesa.

En caso de que σ_2 sea de compresión se producen los modos de fallo B y C, que se diferencian en función del cociente entre las tensiones σ_2 y σ_6 .

Modo B

Este modo es de aplicación para compresión transversal y la segunda relación:

$$\sigma_2 \leq 0, \quad 0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_6} \right| \leq \frac{\tau_T^A}{|\sigma_{6c}|} \quad (4.46)$$

siendo:

$$\sigma_{6c} = S \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}} \quad (4.47)$$

La resistencia τ_T^A no se puede obtener experimentalmente y se ha de recurrir a la siguiente ecuación empírica:

$$\tau_T^A \equiv \frac{Y_C}{2 [1 + p_{\perp\perp}^{(-)}]} = \frac{S}{2 p_{\perp\parallel}^{(-)}} \left[\sqrt{1 + 2 p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{Y_C}{S}} - 1 \right] \quad (4.48)$$

Se inicia una microfractura en la dirección del espesor; pero que ni se abre ni crece con aumento del esfuerzo cortante; pero cuando σ_2 alcanza el valor τ_T^A la fractura crece con un ángulo inclinado con respecto al plano de actuación de tensiones.

Para este rango de tensiones, la ecuación que determina el fallo es:

$$\frac{1}{S} \left[\sqrt{\sigma_6^2 + (p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2 \right] = 1 \quad (4.49)$$

que está representada por una parábola con eje de simetría σ_2 :

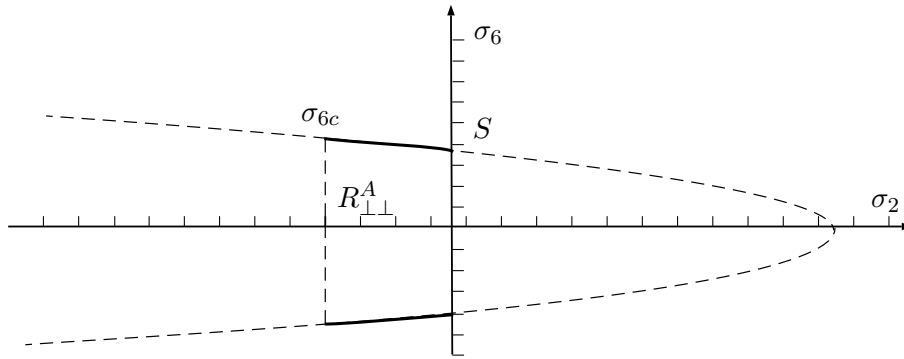


Figura 4.11: Representación del modo de fallo B.

Modo C

Es de aplicación con las siguientes condiciones:

$$\sigma_2 \leq 0, \quad 0 \leq \left| \frac{\sigma_6}{\sigma_2} \right| \leq \frac{|\sigma_{6c}|}{\tau_T^A} \quad (4.50)$$

Este modo se caracteriza porque el plano de fractura se produce con una inclinación de entre 45° y 55° , según han confirmado los ensayos indicados en la referencia. Este modo se formula de la siguiente manera:

$$\left[\left(\frac{\sigma_6}{2 (1 + p_{\perp\perp}^{(-)}) S} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_C} \right)^2 \right] \frac{Y_C}{-\sigma_2} = 1 \quad (4.51)$$

Según la Ec. (4.51), en caso de compresión pura el material romperá cuando σ_2 alcance su resistencia a compresión Y_C .

Para el caso particular del material estudiado a lo largo del trabajo la envolvente toma la forma de la Fig. 4.14, con valores $p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0,3$, $p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0,25$ tomados de la Tabla 4.3 y empleando las Ecs. (4.53) y (4.54).

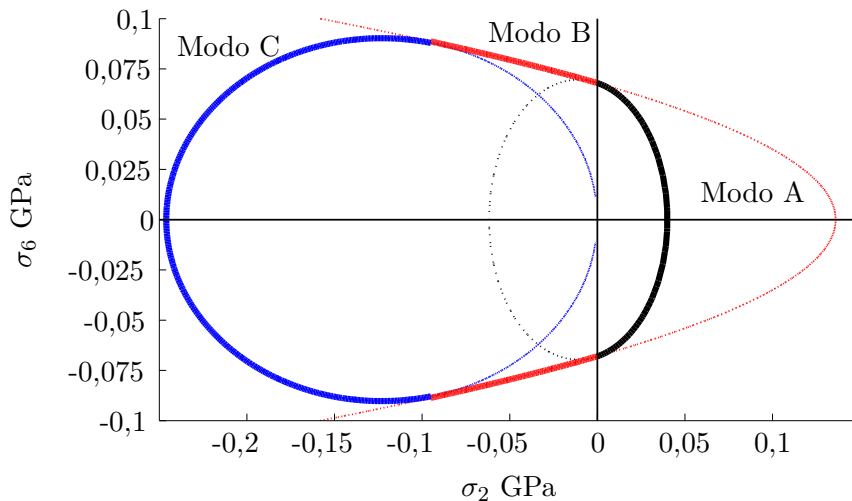


Figura 4.14: Envolvente de fractura para el caso particular de T300/5208.

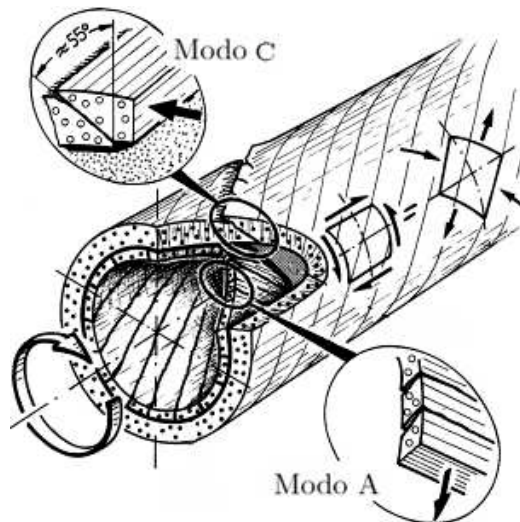


Figura 4.15: Representación de los modos de fallo A y C para una pieza sometida a torsión [15] (cortante puro, únicamente modos A y C).

Como ha sido indicado en la Sección 4.3.5, se puede obtener la inclinación del plano de fractura. Para ello se recuerda que R es el factor por el que se ha de multiplicar un estado tensional para alcanzar la fractura. Se deben expresar σ_2 , σ_6 en función de θ_{pf} , ángulo de máxima probabilidad de fractura tal que R sea mínimo. Tras una serie de desarrollos en

[15] se obtiene:

$$\cos(\theta_{fp}) = \sqrt{\frac{\tau_T^A}{-\sigma_2}} \quad (4.52)$$

Para que se produzca la fractura en IFF ha de cumplirse $\tau_T^A \leq \sigma_2 \leq Y_C$, y como por definición $|Y_C| \geq |\tau_T^A|$, el valor de la raíz varía entre 0 – 1 y por lo tanto $0^\circ < \theta_{fp} < 90^\circ$.

4.3.7. Determinación de los parámetros del criterio de Puck

Para la aplicación del criterio de Puck se han de determinar 7 parámetros independientes, que se hallan de forma parecida a la de los más comunes criterios de fallo. De estos 7 parámetros, 3 corresponden a la resistencia del material mientras que los restantes ajustan el modelo de manera más precisa a los resultados experimentales. Éstos últimos representan la inclinación de las líneas de la envolvente de fractura en los puntos de intersección de modos.

Determinación de los parámetros de resistencia

El mecanismo de fallo IFF se rige por las propiedades de la matriz, y la fractura siempre ocurre en un plano paralelo a la fibra que puede estar sometido a un esfuerzo normal, a uno cortante, o a una combinación de ambos. Puck asume que sólo las tensiones actuantes en el plano de fractura son responsables de ella. Por lo tanto en vez de los parámetros de resistencia a la fractura en las direcciones fibra/matriz, han de usarse las resistencias del plano de acción de la tensión máxima. Estas resistencias se pueden interpretar y visualizar en el espacio σ_n, τ_{nl} como las distancias entre el origen y la intersección de la envolvente de fractura con los ejes correspondientes.

Los ensayos han demostrado que un elemento sujeto a tracción siempre falla en el plano de las tensiones. La misma situación ocurre para un elemento sujeto a un cortante puro transversal/longitudinal τ_{nl} . Por lo tanto estas 2 resistencias pueden ser obtenidas por ensayos simples de tracción y de torsión obteniendo:

$$R_{\perp}^{(+A)} = R_{\perp}^{(+)} = X_T, \quad R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel} = S \quad (4.53)$$

donde $R_{\perp\parallel}$ es la misma resistencia que la definida en la Sección 4.3.2 pero no en un plano de fractura sino en el de dirección de fibras.

Para elementos sometidos a cargas que provocan tensiones de cortante puro transversal/transversal τ_{nt} aparece un plano de fractura que forma aproximadamente un ángulo de 45° con respecto al plano de actuación de estas tensiones. Por lo tanto el valor de τ_T^A no es el mismo que el obtenido de los ensayos de torsión τ_T . Los ensayos de compresión y cortante combinados han corroborado este hecho y han permitido calcular τ_T^A a partir de los resultados del ensayo de compresión transversal uniaxial usando la siguiente correlación:

$$\tau_T^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2 \left[1 + p_{\perp\perp}^{(-)} \right]} \quad (4.54)$$

Por lo tanto se desprende que usando las resistencias $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp\parallel}$ y $R_{\perp}^{(-)}$ el criterio queda aplicado correctamente a las características del material.

Elección de los parámetros de inclinación

Como se indicó en el apartado anterior, se usan 4 “parámetros de inclinación” que dan continuidad de valor (no de pendiente) a la envolvente de fractura, como se puede ver en la Fig. 4.16.

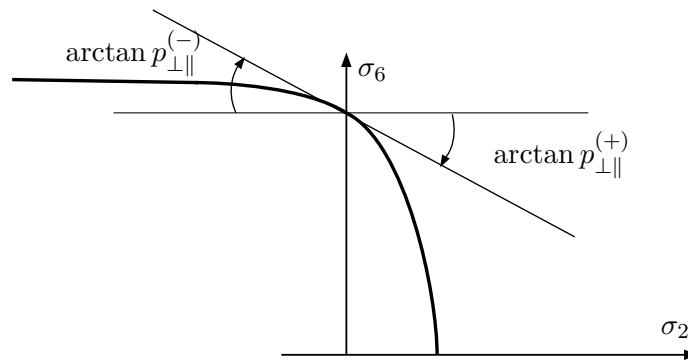


Figura 4.16: Significado físico de los parámetros p .

Como se puede observar en la Fig. 4.16, la zona de seguridad es mucho mayor para tensión normal compresiva. Para tensiones tangenciales τ_{nl} en la dirección de la fibra como en la dirección transversal a ella τ_{nt} los parámetros de inclinación deberían ser los mismos, pero desde un punto de vista micromecánico cada tipo genera distribuciones de tensiones ligeramente diferentes en la matriz. Por lo tanto las resistencias del plano de rotura también son diferentes $R_{\perp\parallel}^A \neq R_{\perp\perp}^A$. Otro aspecto a tener en cuenta es que los parámetros son diferentes $p_{\perp\parallel}^{(-)} \neq p_{\perp\parallel}^{(+)}$, ya que en este punto se pasa del modo A al B, las tracciones favorecen IFF mientras que las compresiones lo desfavorecen.

Estos parámetros de inclinación $p_{\perp\parallel}$ pueden ser obtenidos de las curvas experimentales $\sigma_2 - \sigma_6$, lo que es posible ya que el ángulo de fractura es 0° tanto para el modo A como para el B; por lo tanto $\sigma_2 = \sigma_n$ y $\sigma_6 = \tau_{nt}$ (ver Fig. 4.3).

La curva τ_{nt} , σ_n puede ser indirectamente dibujada de los ensayos de compresión transversal mediante la siguiente ecuación:

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta_{pf}^c} - 1 \quad (4.55)$$

Tampoco existen pistas acerca de valores razonables de $p_{\perp\perp}$ aparte de la presunción de que todos los parámetros de inclinación deberían de ser aproximadamente de la misma magnitud. Sin embargo parece ser apropiado elegir $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(-)}$. De hecho esto significa que la curva no cambia su inclinación en la intersección con el eje vertical.

Para el caso de laminados muy delgados no hay tensiones significativas en la dirección del espesor; en este caso se acoplan los parámetros independientes $p_{\perp\parallel}^{(-)}$, $p_{\perp\perp}^{(-)}$ de la siguiente manera:

$$\frac{p_{\perp\perp}}{R_{\perp\perp}^A} = \frac{p_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}^A} = \text{cte} \quad (4.56)$$

También se puede obtener la siguiente correlación entre $p_{\perp\perp}$ y $p_{\perp\parallel}$ si se aplican los valores recomendados en [15]:

$\varphi = 60\%$ (Volumen de fibras)	$R_{\perp}^{(+)}$ $\times 10^{-6}$ N/m ²	$R_{\perp\parallel}$ $\times 10^{-6}$ N/m ²	$R_{\perp}^{(-)}$ $\times 10^{-6}$ N/m ²	$p_{\perp\parallel}^{(+)}$ -	$p_{\perp\parallel}^{(-)}$ -
Fibra de vidrio	45	65	145	0.3	0.25
Fibra de carbono	50	100	230	0.35	0.3

Tabla 4.2: Valores del parámetro de inclinación $p_{\perp\parallel}$ y de resistencias R_{\perp} , $R_{\perp\parallel}$ tanto para el dominio de tracción como compresión [15].

	$p_{\perp\perp}^{(-)}$	$p_{\perp\perp}^{(+)}$
GFRP	0.2 a 0.25	0.2 a 0.25
CFRP	0.25 a 0.3	0.25 a 0.3

Tabla 4.3: Valores del parámetro de inclinación $p_{\perp\perp}$ tanto para el dominio de tracción como compresión [13].

4.3.8. Coeficiente de seguridad R

Para comprender el desarrollo matemático posterior, es necesario profundizar en el tema del coeficiente de seguridad R cuya definición fue dada en la Sección 4.3.6. Este coeficiente permite conocer de manera cuantitativa el riesgo de rotura (ver Fig. 4.17).

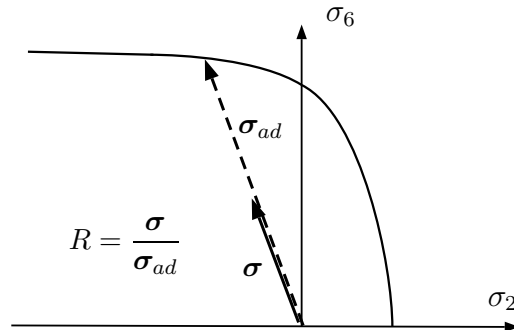


Figura 4.17: Visualización del coeficiente de seguridad R .

Su cálculo se lleva a cabo de manera distinta dependiendo del tipo de la expresión del criterio de fallo:

- Si la ecuación es lineal, R tiene la expresión inversa a dicha ecuación.
- Si la ecuación es cuadrática es necesario aplicar la Ec. (4.57), en donde L representa los términos lineales y Q los cuadráticos.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left[\Sigma L + \sqrt{(\Sigma L)^2 + 4 \Sigma Q} \right] \quad (4.57)$$

4.3.9. Influencia de σ_1 en IFF

Tal y como se ha formulado el criterio, la carga aplicada en dirección longitudinal σ_1 no afecta al fallo interfibras. Sin embargo esto no ocurre en la realidad, ya que puede observarse la existencia de una cierta interacción entre los 2 mecanismos de fallo.

Al aplicar carga longitudinal, algunas fibras fallan antes de llegar a su resistencia límite teórica (el número de fibras que fallan aumenta al aumentar la carga). La tensión σ_1 no interacciona con las tensiones σ_n , τ_{nt} y τ_{nl} como se ha visto en otros criterios ya que no actúa en el plano de fractura. En su lugar, σ_1 produce una reducción de las resistencias de IFF, traduciéndose en una disminución del área de la envolvente.

La forma analítica de traducir este fenómeno es multiplicar las resistencias en el plano de acción por un factor de reducción η_{w1} , que aumenta progresivamente con σ_1 , que por simplicidad se asume el mismo para todas las resistencias. Esta hipótesis supone que el ángulo de inclinación del plano de fractura y el mecanismo de fractura IFF no se ven afectados por esta reducción.

La reducción de las resistencias en el plano de acción debido a la introducción del coeficiente η_{w1} resulta en una reducción del coeficiente de seguridad R , según [24]:

$$R_1 = R_0 \eta_{w1} \quad (4.58)$$

donde R_0 es el coeficiente de seguridad original.

En [16] el debilitamiento se incluyen en la envolvente por un segmento de elipse (ver Fig. 4.18). Antes de esta referencia se calculaba el valor de η_{w1} mediante iteraciones pero en la actualidad se ha hallado una expresión cerrada. La sección de elipse comienza en el punto $s \cdot R_{\parallel}$ y finaliza en el límite con la línea vertical de FF. Los parámetros s y m varían entre 0 y 1 y a falta de experimentos se utilizan 0,5 para ambos.

$$\eta_{w1} = \frac{c \left[a \sqrt{c^2 (a^2 - s^2) + 1} + s \right]}{[ca]^2 + 1}, \quad c = \frac{R_{FF}}{R_0}, \quad a = \frac{1 - s}{\sqrt{1 - m^2}} \quad (4.59)$$

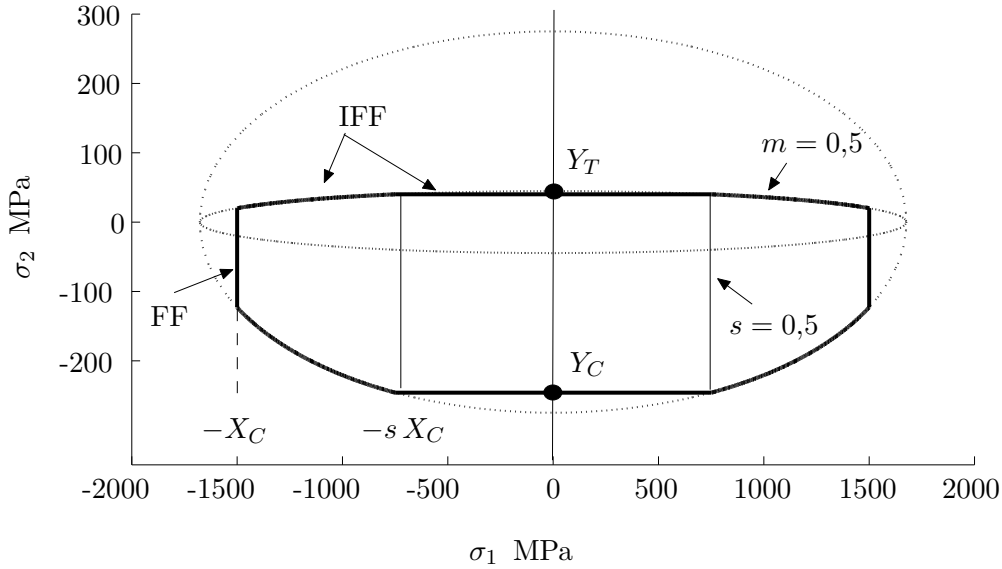


Figura 4.18: Envolvente en el plano σ_1 - σ_2 con influencia de σ_1 en IFF en función de los parámetros m y s .

4.3.10. Resumen del criterio de Puck

El criterio de fallo de Puck se divide en 2 mecanismos distintos de fallos:

1. FF: dentro de este mecanismo se distinguen otros 2 modos, dependiendo de si σ_1 es de tracción o compresión:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{X_T} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{X_T} + m_{\sigma f} \nu_{f12} \frac{E_1}{E_{f1}} \frac{\sigma_2}{X_T} &= 1 \quad \Leftrightarrow \sigma_1 \geq 0 \\ \frac{\sigma_1}{X_C} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{X_C} + m_{\sigma f} \nu_{f12} \frac{E_1}{E_{f1}} \frac{\sigma_2}{X_C} &= -1 \quad \Leftrightarrow \sigma_1 < 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

2. IFF: en este mecanismo de fallo se distinguen 2 submecanismos, dependiendo de si σ_2 es a tracción (modo A) o si es a compresión. Este último se divide a su vez en 2 modos; modo B y modo C dependiendo de la relación entre σ_2 y σ_6 .

- Modo A

$$\sigma_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left[\frac{\sigma_6}{S}\right]^2 + \left[1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{Y_T}{S}\right]^2 \left[\frac{\sigma_2}{Y_T}\right]^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \left[\frac{\sigma_2}{S}\right] = 1 \quad (4.61)$$

- Modo B

$$\sigma_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \left|\frac{\sigma_2}{\sigma_6}\right| \leq \frac{\tau_T^A}{|\sigma_{6c}|} \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{S} \left[\sqrt{\sigma_6^2 + \left(p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2 \right] = 1 \quad (4.63)$$

- Modo C

$$\sigma_2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{\sigma_6}{\sigma_2} \right| \leq \frac{|\sigma_{6c}|}{\tau_T^A} \quad (4.64)$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_6}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)}) S} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_C} \right)^2 \right] \frac{Y_C}{-\sigma_2} = 1 \quad (4.65)$$

Comparativa de los diversos criterios

5.1. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Hoffman

En esta sección se van a comparar los criterios de fallo de Tsai-Wu y Hoffman con ayuda de tablas y gráficas. En las demás secciones se realizará una comparativa similar entre criterios comparables.

5.1.1. Criterio de Hoffman en la forma de Tsai-Wu

Se reescribe el criterio de Hoffman, pero notando a los coeficientes como en Tsai-Wu. Para ello se comparan las Ecs. (3.5) y (3.44) donde se extraen las siguientes relaciones entre los 8 coeficientes de Tsai-Wu y los 9 de Hoffman:

F_1	F_2	F_{11}	F_{22}	F_{12}	F_{23}	F_{44}	F_{55}
C_4	C_5	$2C_2$	$C_1 + C_2$	$-C_2$	$-C_1$	C_7	C_9

Tabla 5.1: Relación entre los coeficientes de Tsai-Wu y Hoffman.

Si se observan las Ecs. (3.5) y (3.44) destaca que los invariantes de tensión son los mismos en ambos criterios, permitiendo la fácil relación entre coeficientes.

5.1.2. Comparación de los coeficientes de los criterios

Establecida la relación entre coeficientes, se procede a una comparación de éstos de manera cualitativa y cuantitativa.

Comparación cualitativa

En la Tabla 5.2 se comparan los coeficientes cualitativamente. En ella se observa que los coeficientes F_{23} , F_{44} y F_{12} no coinciden en ambos criterios. Es importante decir que en estos coeficientes están presentes los términos de acoplamiento F_{12}^* y F_{13}^* en Tsai-Wu mientras Hoffman los relaciona con las resistencias uniaxiales del material. Respecto al coeficiente F_{44} , Tsai-Wu establece su valor mediante una comparación de estados de tensión (ver Fig. 3.2) y Hoffman lo relaciona directamente con la resistencia a cortante en ese plano.

Comparación cuantitativa

Para la comparación cuantitativa, usando el material T300/5208 con sus propiedades indicadas en la Tabla 2.1, se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 5.3. Se vuelve a apreciar, pero ahora numéricamente, que los coeficientes que difieren son F_{23} , F_{44} y F_{12} pero con mismo orden de magnitud.

Coeficiente	Tsai – Wu	Hoffman
F_1	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$
F_2	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$
F_{11}	$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{X_T X_C}$
F_{22}	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$
F_{23}	$F_{13}^* F_{22}$	$-\frac{1}{2} \left[\frac{2}{Y_T Y_C} - \frac{1}{X_T X_C} \right]$
F_{55}	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{S^2}$
F_{44}	$2 [F_{22} - F_{23}]$	$\frac{1}{\tau_T^2}$
F_{12}	$F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$	$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{X_T X_C} \right]$

Tabla 5.2: Comparación cualitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Hoffman.

Coef. General	Tsai-Wu	Coef. TW	Hoffman	Coef. Hf
F_1 GPa ⁻¹	0	F_1	0	F_1
F_2 ”	20,935	F_2	20,935	F_2
F_{11} GPa ⁻²	0,444	F_{11}	0,444	F_{11}
F_{22} ”	101,626	F_{22}	101,626	F_{22}
F_{23} ”	-50,813	F_{23}^{TW}	-94,4747	F_{23}^{Hf}
F_{55} ”	216,263	F_{55}	216,263	F_{55}
F_{44} ”	304,878	F_{44}^{TW}	406,504	F_{44}^{Hf}
F_{12} ”	-3,360	F_{12}^{TW}	-0,222	F_{12}^{Hf}

Tabla 5.3: Comparación cuantitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Hoffman así como la notación distintiva entre ambos.

En esta sección se ha visto que todos los coeficientes son iguales, excepto F_{23} , F_{44} y F_{12} . Por esto y debido a que se usará después, a estos coeficientes distintos se les notará con superíndices que indiquen al criterio que se refieren.

5.1.3. Comparación en subespacios de esfuerzos

σ_2 versus σ_6

Para este subespacio de esfuerzos la ecuación que define la envolvente es igual para cada criterio:

$$\begin{aligned} \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{22} \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 + F_2 \sigma_2 = 1 \\ \text{Hoffman} &\rightarrow F_{22} \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 + F_2 \sigma_2 = 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

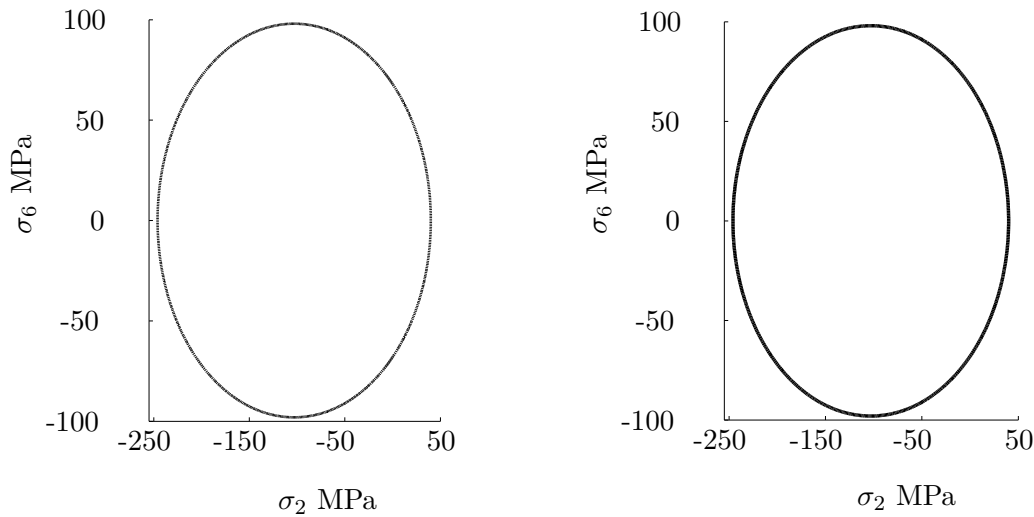


Figura 5.1: Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . A la izquierda Tsai-Wu y a la derecha Hoffman. Se observa que con ambos criterios se obtiene la misma envolvente.

Estas 2 ecuaciones resultan iguales, por lo que para este subespacio de esfuerzos es indiferente usar un criterio u otro. Por otro lado, la envolvente (esto es la representación gráfica de las Ecs. (5.6)) para este subespacio se muestra en la Fig. 5.1.

σ_2 versus σ_3

Las ecuaciones de cada criterio resultan:

$$\begin{aligned} \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^{TW} \sigma_2 \sigma_3 + F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] = 1 \\ \text{Hoffman} &\rightarrow F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^{Hf} \sigma_2 \sigma_3 + F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] = 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

En este caso, las Ecs. (5.2) se diferencian en el coeficiente F_{23} , por lo que sus envolventes (Fig. 5.2) deben ser distintas. Se observa también que la envolvente en Hoffman no es cerrada con lo que es más permisiva.

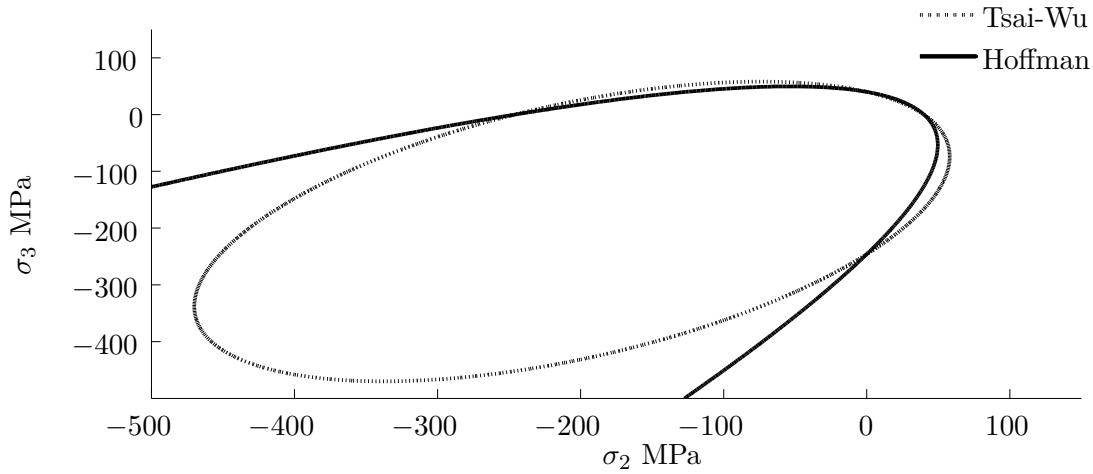


Figura 5.2: Subespacio formado por σ_2 y σ_3 de los criterios Tsai-Wu y Hoffman.

σ_2 versus σ_1

Las ecuaciones de cada criterio resultan:

$$\text{Tsai-Wu} \rightarrow F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2 F_{12}^{TW} \sigma_1 \sigma_2 + F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 = 1 \quad (5.3)$$

$$\text{Hoffman} \rightarrow F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2 F_{12}^{Hf} \sigma_1 \sigma_2 + F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 = 1$$

Analizando las Ecs. (5.3) se observa que se diferencian en un coeficiente F_{12} provocando que la forma de la elipse que describen sea distinta (ver Fig 5.3).

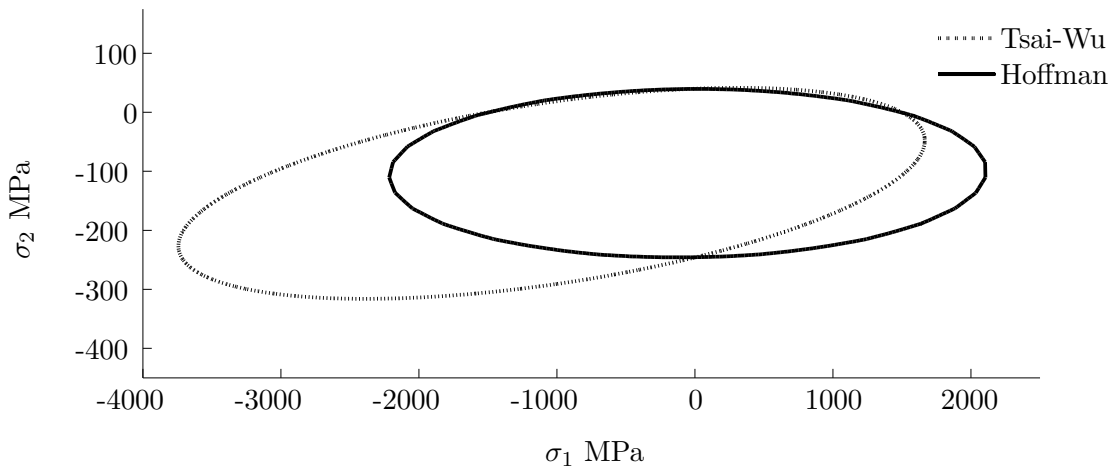


Figura 5.3: Subespacio formado por los σ_2 y σ_1 donde ambos criterios describen 2 elipses.

Como se aprecia en la Fig. 5.3, Tsai-Wu abarca en la envolvente mayor zona de compresión, este punto es uno de los aspectos más criticados de su teoría debido a lo permisivo que es en dicha zona.

σ_2 versus σ_1 versus σ_6

En la Fig. 5.4 se representa las envolventes de ambos criterios para un estado 3D:

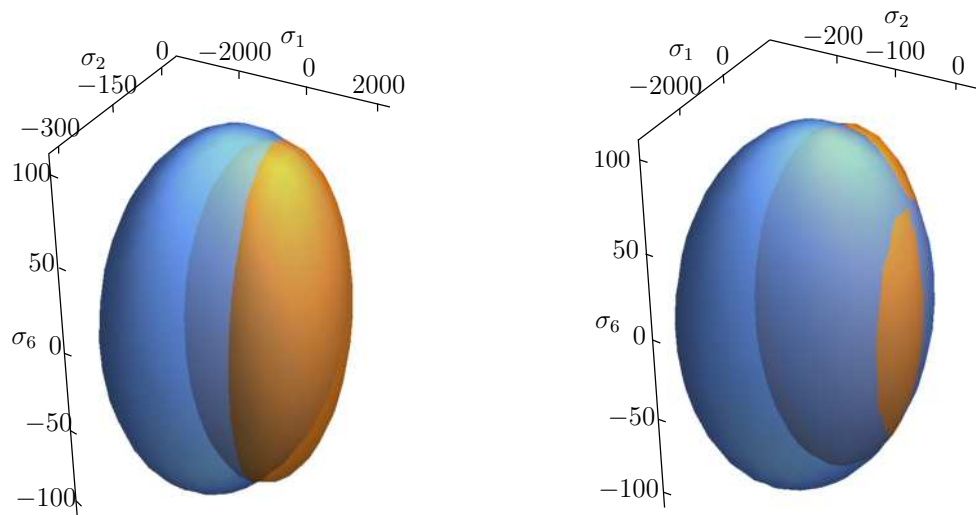


Figura 5.4: Espacio formado por σ_6 , σ_2 y σ_1 donde ambos criterios describen 2 elipsoides. Tsai-Wu se representa en azul y Hoffman en naranja.

Si se analiza la figura anterior se observa que la envolvente de Tsai-Wu tiene mayor volumen que la de Hoffman para zonas de compresión, punto de críticas por otros autores.

5.1.4. Conclusiones

Las conclusiones que se extraen de la comparativa entre Tsai-Wu y Hoffman son:

- Ambos criterios provienen inicialmente de Von Mises, y pretenden una mejora del criterio de Tsai-Hill, la diferenciación entre tracción y compresión, es por ello que la ecuación general resultante es la misma.
- La diferencia entre criterios está en la definición de los coeficientes F_{23} , F_{12} y F_{44} .
- Los coeficientes de acoplamiento F_{23} , F_{12} en el criterio de Hoffman se encuentran definidos en función de las resistencias uniaxiales del material mientras que en Tsai-Wu dependen de parámetros experimentales F_{12}^* y F_{13}^* .
- En tensión plana, la única diferencia entre los criterios es el coeficiente F_{12} .
- Ninguno de los 2 criterios establece una diferencia entre distintos modos de fallo.

5.2. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Christensen

5.2.1. Descripción criterio Christensen en forma Tsai-Wu

Se reescribe el criterio de Christensen, pero notando a los coeficientes como en Tsai-Wu:

1. Modo I → FM:

$$F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] + F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \quad (5.4)$$

donde, relacionando las Ecs. (5.4) y (4.6), los coeficientes se expresan como se indica en la Tabla 5.4.

F_2	F_{22}	F_{23}	F_{44}	F_{55}
$\frac{\alpha_1}{k_1}$	$\frac{[1 + 2 \alpha_1]}{4 k_1^2}$	$-\frac{[1 + 2 \alpha_1]}{4 k_1^2}$	$\frac{[1 + 2 \alpha_1]}{k_1^2}$	$\frac{\beta}{k_1^2}$

Tabla 5.4: Coeficientes de Christensen para modo matriz, según la notación de Tsai-Wu.

2. Modo II → FF:

$$F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 + 2 F_{12} [\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3] = 1 \quad (5.5)$$

donde las expresiones de los coeficientes (ver Tabla 5.5) se obtienen al comparar las Ecs. (4.8) y (5.5).

F_1	F_{11}	F_{12}
$-\frac{\alpha_2}{k_2}$	$\frac{[1 + 2 \alpha_2]}{4 k_2^2}$	$-\frac{1}{2} \left[\frac{1 + \alpha_2}{2 k_2} \right]^2$

Tabla 5.5: Coeficientes de Christensen para modo fibra, según la notación de Tsai-Wu.

5.2.2. Comparación de ecuaciones de criterio de fallo

Si se observan las Ecs. (3.5), (5.4) y (5.5), se concluye que:

- Los invariantes dados en la Ec. (4.1) son los mismos en ambos criterios.
- El modo I (ver Ec. (5.4)), salvo diferencias implícitas en los coeficientes que después se discutirán, se corresponde con el criterio de Tsai-Wu (ver Ec. (3.5)) considerando $\sigma_1 = 0$.
- En el modo II (ver Ec. (5.5)) se completan el resto de invariantes que aparecen en Tsai-Wu.

5.2.3. Comparación de los coeficientes de los criterios

Los coeficientes de cada criterio se diferencian en su definición. El objetivo de esta sección es compararlos, para lo que se siguen dos vías: cualitativa y cuantitativa.

Comparación cualitativa

En la Tabla 5.6 se comparan los coeficientes cualitativamente. En ella se observa que los coeficientes F_{23} , F_{44} y F_{12} no coinciden en ambos criterios. Es importante decir que en estos coeficientes están presentes los términos de acoplamiento F_{12}^* y F_{13}^* , de forma que para ciertos valores de estos últimos ambos criterios coinciden.

Coeficiente	Tsai-Wu	Christensen
F_1	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	$-\frac{\alpha_2}{k_2} = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$
F_2	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	$\frac{\alpha_1}{k_1} = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$
F_{11}	$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1 + 2\alpha_2}{4k_2^2} = \frac{1}{X_T X_C}$
F_{22}	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1 + 2\alpha_1}{4k_1^2} = \frac{1}{Y_T Y_C}$
F_{23}	$F_{13}^* F_{22}$	$-\frac{1 + 2\alpha_1}{4k_1^2} = -F_{22}$
F_{55}	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{\beta}{k_1^2} = \frac{1}{S^2}$
F_{44}	$2 [F_{22} - F_{23}]$	$\frac{[1 + 2\alpha_1]}{k_1^2} = 2 [F_{22} - F_{23}]$
F_{12}	$F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$	$-\frac{1}{2} \left[\frac{1 + \alpha_2}{2k_2} \right]^2$

Tabla 5.6: Comparación cualitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Christensen.

Comparación cuantitativa

Para la comparación cuantitativa, usando el material T300/5208 se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 5.7. Se vuelve a apreciar, pero ahora numéricamente, que los coeficientes que difieren son F_{23} , F_{44} y F_{12} . Debido a la diferencia entre estos coeficientes ya que se usarán después se les notará con superíndices que indiquen al criterio que se refieren.

Coef. General	Tsai-Wu	Coef. TW	Christensen	Coef. Ch	
F_1	GPa ⁻¹	0	F_1	0	F_1
F_2	"	20,935	F_2	20,935	F_2
F_{11}	GPa ⁻²	0,444	F_{11}	0,444	F_{11}
F_{22}	"	101,626	F_{22}	101,626	F_{22}
F_{23}	"	-50,813	F_{23}^{TW}	-101,626	F_{23}^{Ch}
F_{55}	"	216,263	F_{55}	216,263	F_{55}
F_{44}	"	304,878	F_{44}^{TW}	406,504	F_{44}^{Ch}
F_{12}	"	-3,360	F_{12}^{TW}	-0,222	F_{12}^{Ch}

Tabla 5.7: Comparación cuantitativa de los coeficientes de Tsai-Wu y Christensen y notación de los distintos coeficientes.

5.2.4. Comparación en subespacios de esfuerzos

En las siguientes secciones se comparan los dos criterios en distintos subespacios de esfuerzos. Según sea el subespacio se usará el modo I, el modo II o ambos modos definidos por el criterio de Christensen.

σ_2 *versus* σ_6

Para este subespacio de esfuerzos sólo se utiliza el Modo I (Ec. (5.4)) del criterio de Christensen, ya que el Modo II (Ec. (5.5)) no depende de σ_2 ni σ_6 . Las ecuaciones de cada criterio resultarían:

$$\begin{aligned}
 \text{Tsai-Wu} &\quad \rightarrow \quad F_{22} \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 + F_2 \sigma_2 = 1 \\
 \text{Christensen} &\quad \rightarrow \quad F_{22} \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 + F_2 \sigma_2 = 1
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Estas 2 ecuaciones resultan iguales, por lo que para este subespacio de esfuerzos es indiferente usar un criterio u otro. Por otro lado, la envolvente (esto es la representación gráfica de las Ecs. (5.6)) para este subespacio se muestra en la Fig. 5.5.

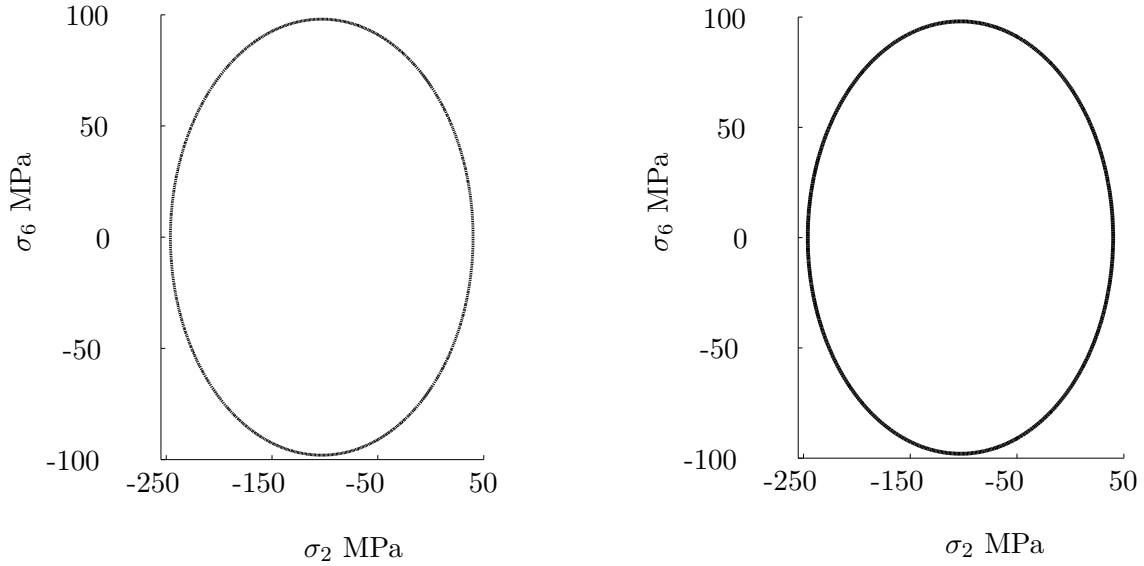


Figura 5.5: Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . A la izquierda Tsai-Wu y a la derecha el modo I de Christensen. Se observa que con ambos criterios (Christensen y Tsai-Wu) se obtiene la misma envolvente.

σ_2 versus σ_3

Para este subespacio de esfuerzos sólo se utiliza el Modo I (ver Ec. (5.4)) del criterio de Christensen, ya que el Modo II (ver Ec. (5.5)) no depende de σ_2 ni σ_3 . Las ecuaciones de cada criterio serían:

$$\begin{aligned}
 \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^{TW} \sigma_2 \sigma_3 + F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] = 1 \\
 \text{Christensen} &\rightarrow F_{22} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^{Ch} \sigma_2 \sigma_3 + F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] = 1
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

En este caso, las Ecs. (5.7) se diferencian en un coeficiente, por lo que sus envolventes (Fig. 5.6) son diferentes. Se observa también que la envolvente en Christensen no es cerrada, esto es debido a que no se cumple la restricción (4.15) del criterio (ver la Sección 4.1.5).

Se podría realizar un estudio más profundo de los coeficientes F_{23}^{TW} y F_{23}^{Ch} con ayuda de la Tabla 5.7. Así, se puede ver que los coeficientes sólo se diferencian en un factor de 0,5, que es debido al valor que tenga el coeficiente F_{13}^* . Mientras que en Tsai-Wu tiene el valor $-0,5$, en Christensen -1 , siendo el primero mucho menos permisivo.

En conclusión, el criterio de Christensen para este subespacio es distinto al de Tsai-Wu debido al coeficiente F_{13}^* .

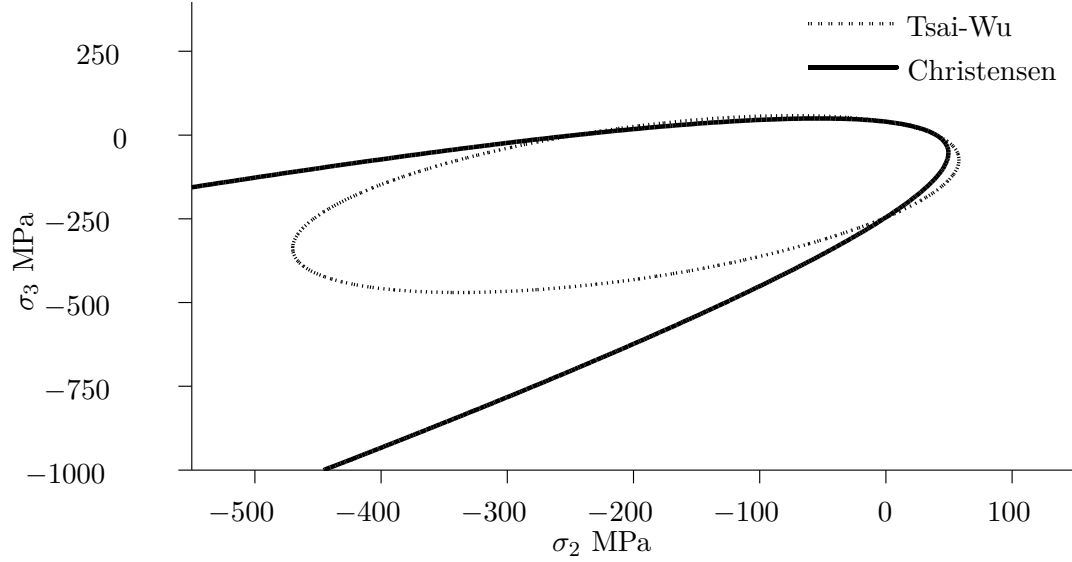


Figura 5.6: Subespacio formado por σ_2 y σ_3 . Sólo se aplica el modo I de Christensen. La diferencia entre criterios es debida al valor del coeficiente F_{13}^* .

σ_2 versus σ_1

Para este subespacio de esfuerzos se usan los 2 modos (ver Ecs. (5.4) y (5.5)) del criterio de Christensen. Las ecuaciones de cada criterio serían:

$$\begin{aligned}
 \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2 F_{12}^{TW} \sigma_1 \sigma_2 + F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 = 1 \\
 \text{Christensen} &\rightarrow \begin{cases} \text{Modo I} &\rightarrow F_2 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 = 1 \\ \text{Modo II} &\rightarrow F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 + 2 F_{12}^{Ch} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \end{cases} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Analizando las Ecs. (5.8) se observa que además de diferenciarse en un coeficiente, aparece una nueva ecuación (Modo II). Esto hace que la envolvente del criterio de Christensen esté compuesta por dos curvas no cerradas que encierran una superficie, como se puede apreciar en la Fig 5.6.

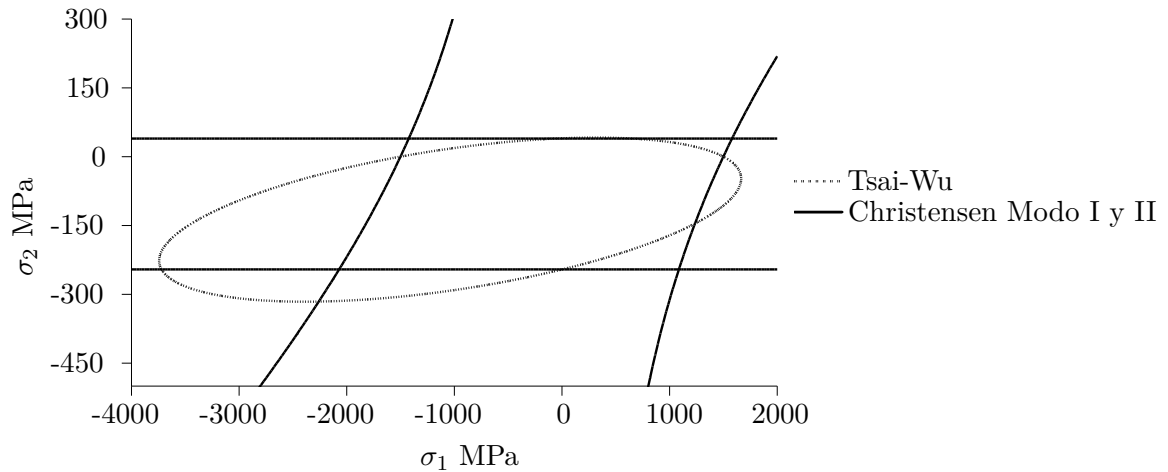


Figura 5.7: Subespacio formado por los σ_2 y σ_1 . Se usan los 2 modos del criterio de Christensen. La envolvente del criterio de Christensen está compuesta por 2 curvas (no cerradas), correspondientes a los 2 modos.

5.2.5. Conclusiones

Se pueden obtener una serie de conclusiones de esta comparación:

- El criterio de Tsai-Wu es más general que el criterio de Christensen, pero este último hace una aproximación micromecánica.
- Además de la separación en 2 Modos, la diferencia está en los coeficientes F_{23} , F_{12} y F_{44} .
- El criterio de Christensen tiene 5 parámetros de fallo; X_T , X_C , Y_T , Y_C y S , mientras que el de Tsai-Wu tiene 2 más; F_{12}^* y F_{13}^* . Estos últimos son los responsables de que los coeficientes de ambos criterios no coincidan siempre.
- El mismo autor Christensen en [14] propone pasar de 5 parámetros de fallo a 4, debido al paralelismo entre propiedades elásticas y parámetros de fallo. La reducción se hace con la ligadura:

$$S = \frac{Y_C}{2} \tag{5.9}$$

5.3. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Hashin

5.3.1. Criterio de Hashin en la forma de Tsai-Wu

En esta sección no será tan fácil comparar ambos criterios, debido a:

- Los invariantes usados en un criterio y otro (Ecs. (4.1) y (4.16)) son distintos.

- Los coeficientes F_{22} y F_{23} , del criterio de Tsai-Wu, tendrán valores diferentes en el criterio de Hashin para tracción tensión o compresión. Así, en el último se tiene que diferenciar: F_{22}^T , F_{23}^T , F_{22}^C y F_{23}^C .

Teniendo en cuenta estas disconformidad, se puede escribir:

1. **FFT:**

$$F_{11} \sigma_1^2 + F_{55} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \quad (5.10)$$

donde, relacionando las Ecs. (4.29) y (5.10), al igual que se hizo en la sección anterior, los coeficientes de la Ec. (5.10) se expresan en la Tabla 5.8.

F_{11}	F_{55}
$\frac{1}{X_T^2}$	$\frac{1}{S^2}$

Tabla 5.8: Coeficientes de Hashin para modo FFT, según la notación de Tsai-Wu.

2. **FFC:**

$$F_1 \sigma_1 = 1 \quad (5.11)$$

donde, relacionando las Ecs. (4.30) y (5.11), se obtiene:

$$F_1 = -\frac{1}{X_C}$$

3. **FMT:**

$$F_{22}^T [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + F_{44} \sigma_4^2 + 2 F_{23}^T \sigma_2 \sigma_3 + F_{55} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \quad (5.12)$$

donde, relacionando las Ecs. (4.31) y (5.12), los coeficientes se pueden expresar como se indica en la Tabla 5.9.

F_{22}^T	F_{23}^T	F_{44}	F_{55}
$\frac{1}{Y_T^2}$	$F_{22}^T - \frac{F_{44}}{2}$	$\frac{1}{\tau_T^2}$	$\frac{1}{S^2}$

Tabla 5.9: Coeficientes de Hashin para modo FMT, según la notación de Tsai-Wu.

4. **FMC:**

$$F_2 [\sigma_2 + \sigma_3] + F_{22}^C [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + F_{44} \sigma_4^2 + 2 F_{23}^C \sigma_2 \sigma_3 + F_{55} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \quad (5.13)$$

donde, relacionando las Ecs. (4.32) y (5.13), los coeficientes se pueden expresar como se indica en la Tabla 5.10.

F_2	F_{22}^C	F_{44}	F_{23}^C	F_{55}
$\frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2\tau_T} \right)^2 - 1 \right]$	$\frac{1}{4\tau_T^2}$	$\frac{1}{\tau_T^2}$	$F_{22}^C - \frac{F_{44}}{2}$	$\frac{1}{S^2}$

Tabla 5.10: Coeficientes de Hashin para modo FMC, según la notación de Tsai-Wu.

5.3.2. Comparación de los coeficientes de los criterios

Aquí se comparan los coeficientes de cada criterio de una forma cualitativa y cuantitativa (ver Tablas 5.11 y 5.12):

Coeficientes	Tsai-Wu	Hashin
F_1	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	$-\frac{1}{X_C}$
F_2	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	$\frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2\tau_T} \right)^2 - 1 \right]$
F_{11}	$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{X_T^2}$
$F_{22}^C \equiv F_{22}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{4\tau_T^2}$
$F_{22}^T \equiv F_{22}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{Y_T^2}$
$F_{23}^C \equiv F_{23}$	$F_{13}^* F_{22}$	$F_{22}^C - \frac{F_{44}}{2}$
$F_{23}^T \equiv F_{23}$	$F_{13}^* F_{22}$	$F_{22}^T - \frac{F_{44}}{2}$
F_{55}	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{S^2}$
F_{44}	$2 [F_{22} - F_{23}]$	$\frac{1}{\tau_T^2}$
F_{12}	$F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$	0

Tabla 5.11: Comparación cualitativa entre los coeficientes de Tsai-Wu y Hashin.

Coef. General		Tsai-Wu	Coef. TW	Hashin	Coef. H
F_1	GP a^{-1}	0	F_1^{TW}	-0,667	F_1^H
F_2	"	20,935	F_2^{TW}	90,4163	F_2^H
F_{11}	GP a^{-2}	0,444	F_{11}^{TW}	0,444	F_{11}^H
F_{22}	"	101,626	F_{22}^{TW}	356,834	F_{22}^C
F_{22}	"	101,626	F_{22}^{TW}	625	F_{22}^T
F_{23}	"	-50,813	F_{23}^{TW}	-356,83	F_{23}^C
F_{23}	"	-50,813	F_{23}^{TW}	-88,668	F_{23}^T
F_{55}	"	216,263	F_{55}	216,263	F_{55}
F_{44}	"	304,878	F_{44}^{TW}	1427,34	F_{44}^H
F_{12}	"	-3,360	F_{12}^{TW}	0	F_{12}^H

Tabla 5.12: Comparación cuantitativa entre los coeficientes de Tsai-Wu y Hashin, para el material T300/5208 grafito/epoxy y la notación de los distintos coeficientes.

Debido a que para dicho material, la resistencias X_C y X_T presentan el mismo valor, el parámetro F_{11} coincide para ambos criterios, pero por definición sólo coincide F_{55} .

5.3.3. Comparación en subespacios de esfuerzos

En los siguientes apartados se comparan gráficamente los criterios de Tsai-Wu y Hashin. Para ello se eligen una serie de subespacios y se indican los modos del criterio de Hashin que intervienen.

σ_2 versus σ_6

Para representar este subespacio sólo se usa el Modo Matriz (tanto en compresión como tracción) del criterio de Hashin, ya que el Modo Fibra sólo se aplica cuando $\sigma_1 \neq 0$. Las ecuaciones a representar en cada criterio serían:

$$\begin{aligned}
 \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{22}^{TW} \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 + F_2^{TW} \sigma_2 = 1 \\
 \text{Hashin} &\rightarrow \begin{cases} \text{FMT} \rightarrow F_{22}^T \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 = 1 \\ \text{FMC} \rightarrow F_2^H \sigma_2 + F_{22}^C \sigma_2^2 + F_{55} \sigma_6^2 = 1 \end{cases} \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Aparte de las diferencias entre coeficientes de las Ecs. (5.14), la diferencia es otra vez que se consideran 2 modos en el criterio de Hashin. Esta diferencia produce 2 envolventes y que se tenga que recurrir a la condición $\sigma_2 > 0$ ó $\sigma_2 < 0$ para construir la envolvente del criterio, tal como se indica en la Fig. 5.8:

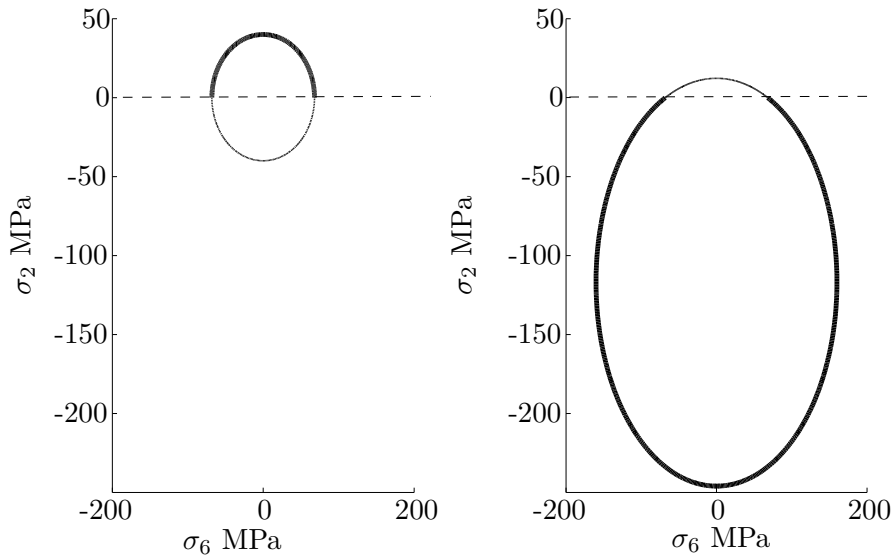


Figura 5.8: Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . Construcción de la envolvente del criterio de Hashin, a partir de los modos FMT (izquierda) y FMC (derecha), siendo la zona válida la de mayor grosor.

Por último, en la Fig. 5.9, se observan las envolventes de ambos criterios y como Hashin distingue entre tracción y compresión.

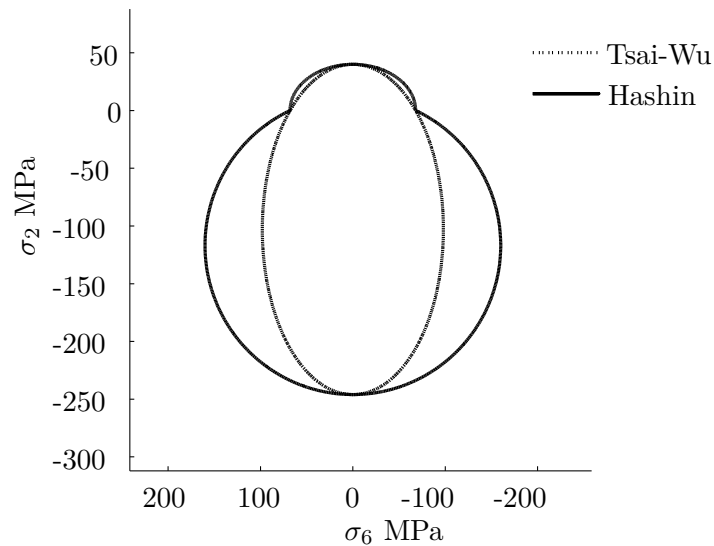


Figura 5.9: Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . En línea continua se representa el criterio de Hashin y en discontinua el de Tsai-Wu. En este subespacio de esfuerzos, los criterios de Tsai-Wu y Christensen eran iguales.

σ_2 versus σ_3

Para representar este subespacio sólo se usa el FM (tanto compresión como tracción) del criterio de Hashin, ya que el FF sólo se aplica cuando $\sigma_1 > 0$ ó $\sigma_1 < 0$. Las ecuaciones a representar en cada criterio serían:

$$\begin{aligned} \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{22}^{TW} [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^{TW} \sigma_2 \sigma_3 + F_2^{TW} [\sigma_2 + \sigma_3] = 1 \\ \text{Hashin} &\rightarrow \begin{cases} \text{FMT} &\rightarrow F_{22}^T [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^T \sigma_2 \sigma_3 = 1 \\ \text{FMC} &\rightarrow F_2^H [\sigma_2 + \sigma_3] + F_{22}^C [\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + 2 F_{23}^C \sigma_2 \sigma_3 = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Al igual que en la sección anterior, se construye la envolvente del criterio de Hashin y se compara con la de Tsai-Wu en la Fig. 5.10. En esta ocasión, como ocurría cuando se trabajó con el criterio de Christensen, la envolvente no es cerrada.

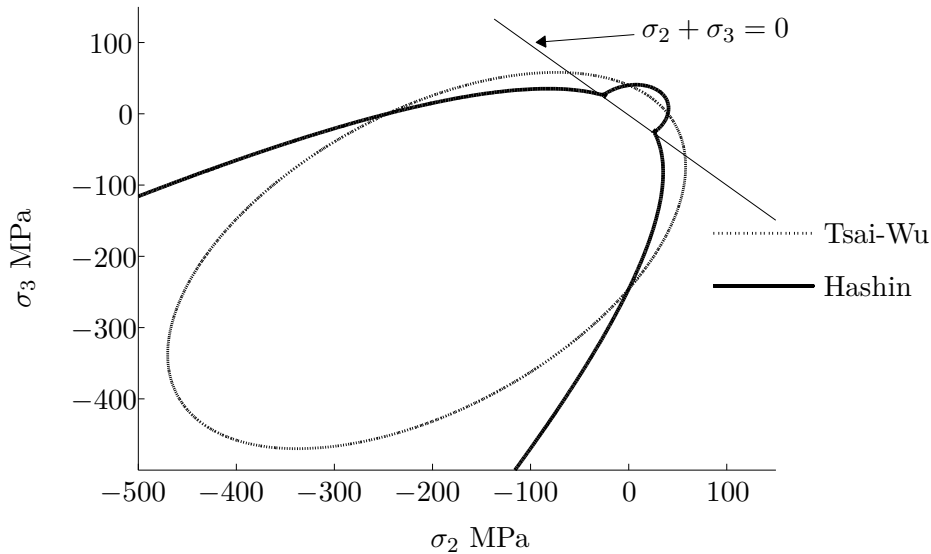


Figura 5.10: Subespacio formado por σ_2 y σ_3 . Se comparan los criterios de Hashin (línea continua) y Tsai-Wu (discontinua). Se observa que la envolvente de Hashin está compuesta por 1 elipse cerrada y otra no cerrada.

σ_2 versus σ_1

Para este subespacio se usan todos los modos de fallo del criterio de Hashin, esto es; FMT, FMC, FFT y FFC. Las ecuaciones de cada criterio resultan:

$$\begin{aligned}
 \text{Tsai-Wu} &\rightarrow F_{11}^{TW} \sigma_1^2 + F_{22}^{TW} \sigma_2^2 + 2 F_{12}^{TW} \sigma_1 \sigma_2 + F_1^{TW} \sigma_1 + F_2^{TW} \sigma_2 = 1 \\
 \text{Hashin} &\rightarrow \begin{cases} \text{FMT} \rightarrow F_{11}^H \sigma_1^2 = 1 \\ \text{FMC} \rightarrow F_1^H \sigma_1 = 1 \\ \text{FFT} \rightarrow F_{22}^T \sigma_2^2 = 1 \\ \text{FFC} \rightarrow F_2^H \sigma_2 + F_{22}^C \sigma_2^2 = 1 \end{cases} \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Se construye la envolvente del criterio de Hashin teniendo en cuenta que ahora se tienen 4 modos distintos. Se puede ver en la Fig. 5.11 que está formada por rectas (esfuerzos constantes).

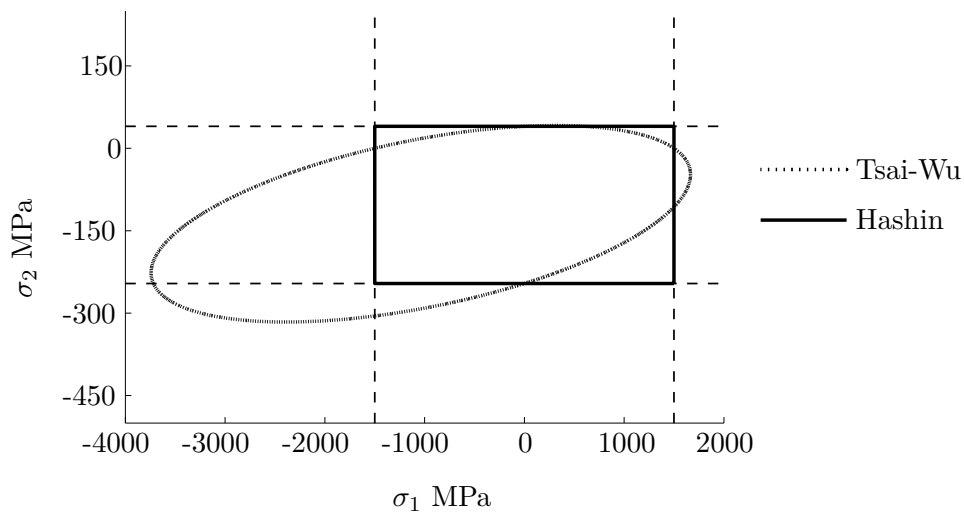


Figura 5.11: Subespacio formado por σ_2 y σ_1 . Hashin se representa por 4 líneas discontinuas correspondientes a 4 modos que forman la envolvente rectangular para $\tau_T = 0$. El criterio de Tsai-Wu aparece representado por puntos dando lugar a una envolvente elipsoidal.

5.3.4. Conclusiones

- En el criterio de Tsai-Wu existen 7 parámetros de fallo, mientras que en Hashin sólo intervienen 6.
- En el criterio de Hashin sólo el parámetro τ_T es costoso de obtener experimentalmente, mientras que en el criterio de Tsai-Wu existen 2 parámetros: F_{12}^* y F_{13}^* .
- Tsai-Wu no distinguen las 2 fases que tienen los compuestos de fibra, mientras que Hashin sí.

- En el criterio de Tsai-Wu se usan los parámetros de compresión para un fallo bajo tensión biaxial. Esto es físicamente inaceptable y es solucionado por Hashin.
- Según Tsai-Wu [19] la curva que define al criterio de fallo ha de ser cerrada sino, bajo combinaciones de esfuerzos, no habría fallo del material. Por otro lado, Hashin propone que un fallo infinito debe ser interpretado como una indicación de la diferencia de órdenes de magnitud (por ejemplo, el fallo bajo presión hidrostática).

5.4. Comparación de los criterios de Tsai-Wu y Puck.

La formulación seguida para cada criterio se corresponde a tensión plana ya que Puck únicamente lo desarrolla para este caso. La expresión de Tsai-Wu viene dada por la Ec. (3.26) y la de Puck se recogen en la Sección 4.3.10.

Comparación de ecuaciones de criterio de fallo

Observando las ecuaciones anteriores se concluye que:

- Tsai-Wu engloba el fallo en una única ecuación mientras que Puck considera 2 mecanismos de fallo completamente diferentes, expresando los modos de fallo de matriz mediante 3 ecuaciones.
- Puck para FF considera σ_1, σ_2 mientras que para el mecanismo IFF usa σ_2, σ_6 .
- Se ha intentado expresar el criterio de Puck mediante coeficientes (F_1, F_2, \dots) no correspondiendo ningún coeficiente con Tsai-Wu porque:
 - Para FF Puck considera una envolvente de fallo lineal, que nunca puede corresponder a una elipse.
 - Dado que para IFF se tienen en cuenta consideraciones micromecánicas, no se pueden expresar las 3 ecuaciones (Modo A, B y C) con unos mismos coeficientes.

Comparación en subespacio de esfuerzos

Se procede a comparar en los subespacios acoplados comunes para ambos criterios:

σ_1 versus σ_2

En esta comparación y para Puck únicamente se aplica FF, ya que sólo esta ecuación depende de estas tensiones. Analizando las ecuaciones para ambos criterios se observa que Puck es lineal mientras que Tsai-Wu corresponde con una cónica (elipse). Ello se debe a que el primero considera el modo de fallo de tensión máxima, mientras que Tsai-Wu parte de Von-Mises. De la definición del criterio de tensión máxima se refleja que σ_2 no depende en gran medida de σ_1 pues la pendiente de la recta es infinita (el acoplamiento es mínimo). Ambos criterios coinciden para el fallo en estado de tracción o compresión pura, quedando representado gráficamente en la Fig. 5.12.

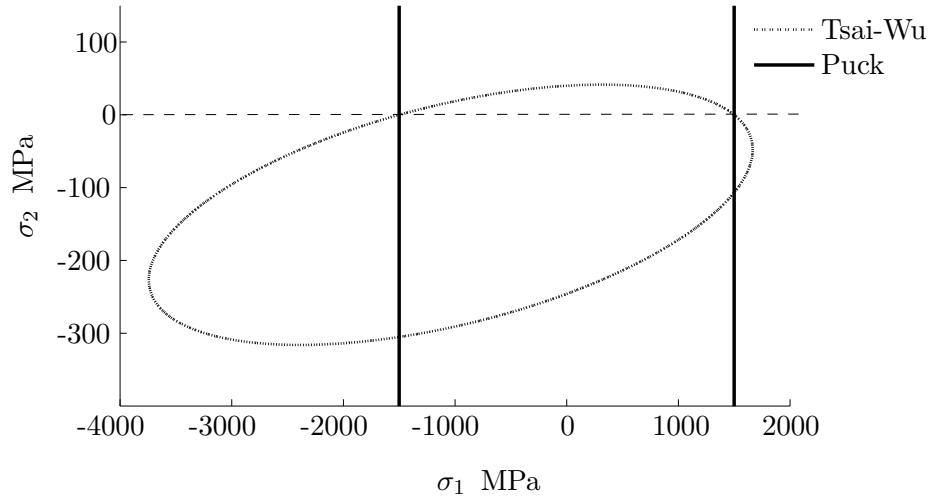


Figura 5.12: Subespacio formado por σ_1 y σ_2 . Puck usa una aproximación lineal (línea continua) ya que se basa en tensión máxima, Tsai-Wu (discontinua) lo hace en Von Mises.

En la Fig. 5.13 se muestra el mismo subespacio pero aplicando la interacción de σ_1 sobre IFF descrita en la Sección 4.3.9:

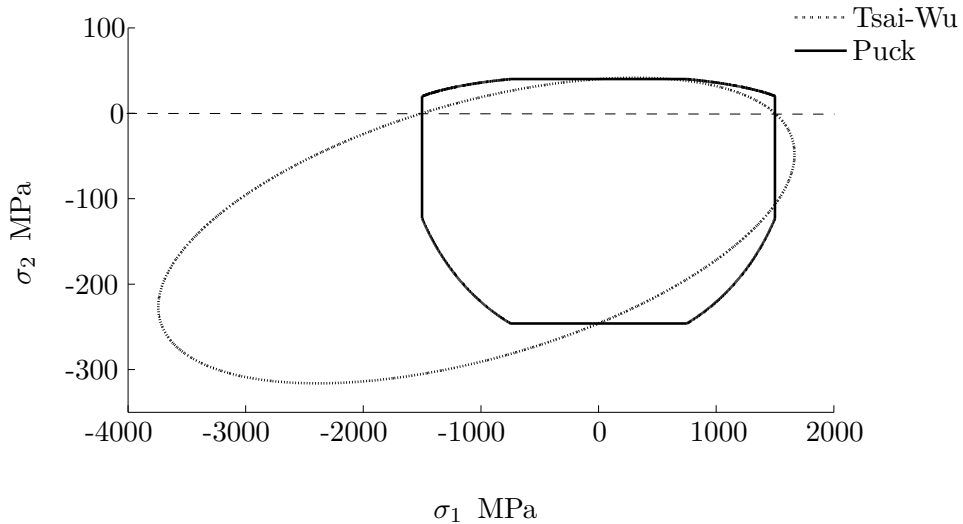


Figura 5.13: Subespacio formado por σ_1 y σ_2 . A diferencia de la Fig. 5.12 se incluye la influencia de σ_1 sobre el mecanismo IFF en la envolvente de Puck.

Tsai-Wu resulta más permisivo para altas compresiones mientras que para el resto de zonas son bastante similares ambos criterios.

σ_2 versus σ_6

Para este caso en Puck únicamente se aplica IFF. Se adecúa la zona de fractura más a la realidad mediante los denominados parámetros de inclinación. La envolvente de fractura está formado por 3 cónicas continuas y diferenciables. Tsai-Wu construye la envolvente mediante una única ecuación provocando que no se tenga en cuenta la verdadera estructura del material. A pesar de esta diferencia ambas envolventes son muy similares según se muestra en la Fig. 5.14:

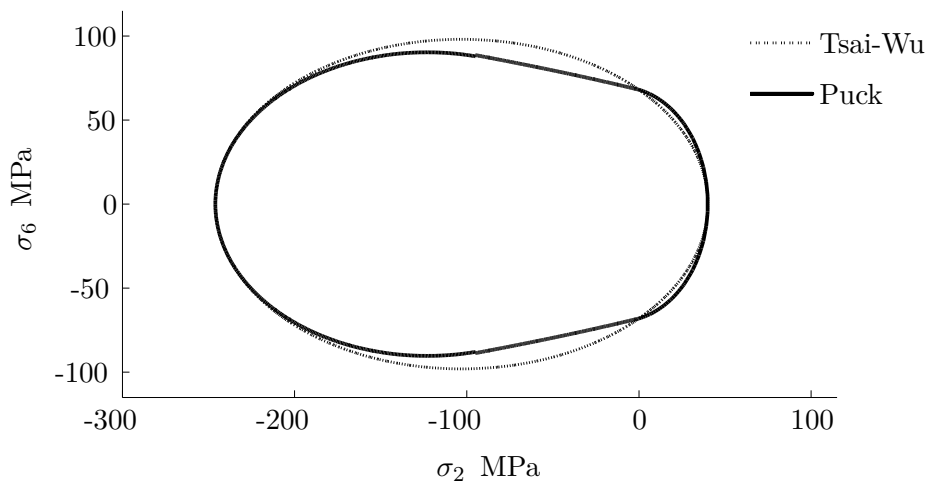


Figura 5.14: Subespacio formado por σ_2 y σ_6 . Puck utiliza únicamente el modo IFF (línea continua).

5.4.1. Conclusiones

De este estudio se han obtenido una serie de conclusiones:

- El criterio de Puck se adapta mejor a la realidad que Tsai-Wu, ya que el primero tanto tiene en cuenta consideraciones micromecánicas como los distintos modos de fallo que pueden ocurrir en la matriz.
- Tsai-Wu acopla en una única ecuación todas las tensiones correspondiente a un estado plano $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$. En cambio Puck basa su criterio en 2 mecanismos de fallo completamente distintos correspondientes desacoplando cada modo de fallo con las tensiones que lo provocan.
- Puck es novedoso por que introduce parámetros de inclinación, permitiendo así adecuar a la realidad la envolvente de fractura. Por otra parte resulta ser uno de los criterios con más parámetros a medir.
- Tsai-Wu no tiene en cuenta la verdadera estructura del material, fijando la envolvente de fractura mediante unos simples puntos de interpolación obtenidos experimentalmente (criterio generalizado de fractura).

5.5. Comparativa de los criterios de Tsai-Wu, Hashin, Hoffman y Christensen en tensión uniaxial límite

A modo de comparativa se someten los 5 criterios mencionados al caso de un estado de tensión uniaxial σ_x a un laminado unidireccional. Con MATLAB[®] se han representado la evolución (ver Fig. 5.15) de dichos criterios en función del ángulo de fibra θ . El material usado en esta sección se recoge en la Tabla 5.13. Cabe destacar que dicho material fue usado en los años 80 por sus altas prestaciones, sobre todo en el sector militar, pero debido a su coste económico no se usa en la actualidad.

B4/N5055					
X_T	1296,21	MPa	ν_{12}	0,23	-
Y_T	62,05	"	ν_{f12}	0,33	"
S	68,95	"	$p_{\perp\parallel}^{(+)}$	0,3	"
X_C	2489	"	$p_{\perp\parallel}^{(-)}$	0,25	"
Y_C	310,26	"	E_1	1406,5	MPa
m_{of}	1,2	-	E_{f1}	2068,4	"

Tabla 5.13: Propiedades y características del material B4/N5055 extraído de [1] y [25].

En la Fig. 5.15 se han representado 3 de los 5 criterios estudiados atendiendo a aquellos que son cuadráticos; Tsai-Wu, Hoffman y Christensen. Se destaca que los 2 primeros únicamente emplean una ecuación mientras que Christensen 2, una para FF y otra para FM. El modo de fallo FF se encuentra asociado a ángulos de orientación de la fibra θ pequeños, mientras que para medios y altos valores es el modo FM.

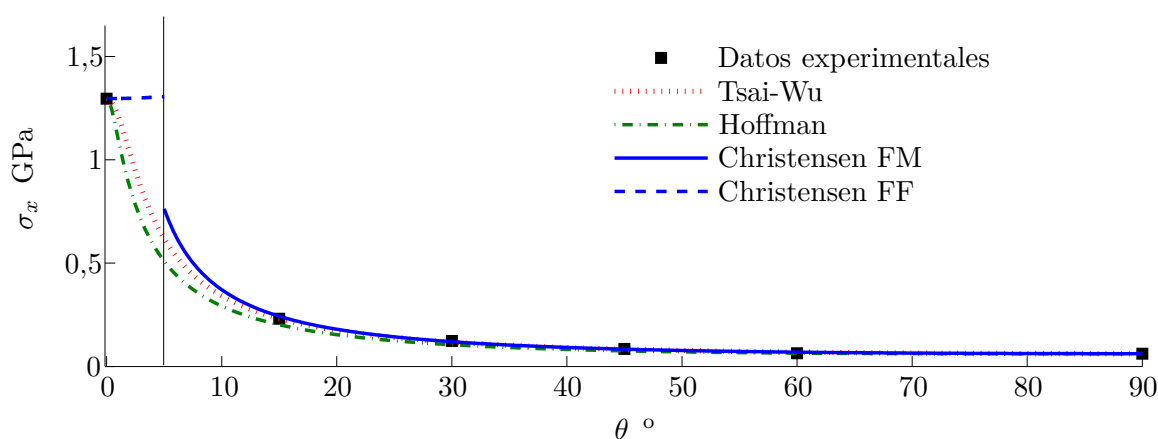


Figura 5.15: Comparativa para ensayo uniaxial de los criterios cuadráticos con material boron-epoxy, datos experimentales extraídos de [25].

En términos generales se observa que la predicción de estos criterios es acertada, pues el error de estimación que presentan con respecto a los datos experimentales es muy pe-

queño. La tendencia de la ordenada es a disminuir la tensión de rotura para un ensayo uniaxial, conforme aumenta la orientación de las fibras. Esto parece lógico, pues a 0° , la fibras se encuentran orientadas en la dirección donde se aplica el esfuerzo, aumentando así la resistencia que opone el material a rotura. A 90° grados, la mayor parte de la resistencia es debida a la matriz en sí. Para este ensayo a un ángulo $\theta = 0^\circ$ la tensión de rotura que se obtiene debe coincidir con la resistencia última del material en dicha orientación, $\sigma_x = X_T$, se observa que los 3 criterios predicen esta afirmación. De la misma forma para el caso en que $\theta = 90^\circ$, $\sigma_x = Y_T$.

Se observa que en el criterio de Christensen existe una discontinuidad en la curva debido su formulación. El modo FF tiende a infinito conforme aumenta el ángulo θ por lo que únicamente tiene sentido a para valores pequeños de este parámetro. Respecto al modo FM ocurre al contrario, para valores pequeños este modo tiende a infinito por lo que carece de sentido analizarlo en dicha zona ya que el modo FF se aproxima mejor. La división de los tramos se ha realizado a inspección, siendo 5° el valor escogido.

En la Fig. 5.16 se representan los 2 criterios restantes:

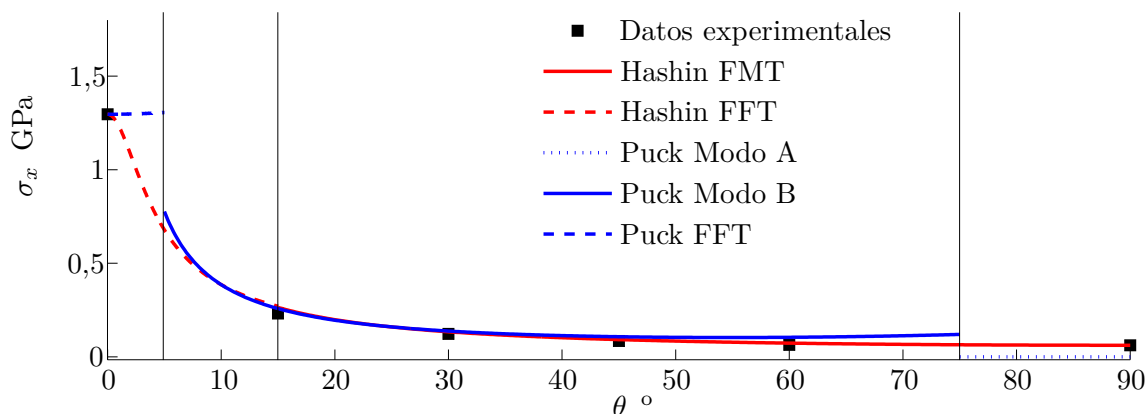


Figura 5.16: Comparativa de diversos criterios de fallo no cuadráticos para un material de boron-epoxy, datos experimentales extraídos de [25].

En este caso en el criterio de Hashin se representa el modo FFT y FMT, es decir, 2 tramos (de 0° a 15° y de 15° a 90°) mientras que en el de Puck se divide en 3 tramos (de 0° a 5° , de 5° a 75° y de 75° a 90°), el primero correspondiendo al mecanismo FFT, el segundo al modo B y el tercero al modo A. Que el segundo tramo se corresponda con el modo B no es obvio, se obtiene de aplicar una equivalencia de estados; un estado uniaxial a 0° con σ_x y $-\sigma_y$ se transforma a un estado de cortante predominante con fibras orientadas a 45° por lo que entorno a este valor θ la predicción de este modo es más próxima a los datos experimentales.

5.6. Conclusiones Generales

- Los criterios de Christensen, Hashin y Puck distinguen entre 2 modos distintos de fallo. Esto se ajusta más a la realidad física de 2 fases fibra y matriz, bien distintas en el composite.
- Los criterios de Christensen, Hoffman y Tsai-Wu son cuadráticos por lo que no distinguen entre tensiones normales de tracción o compresión; esto es físicamente inaceptable.
- En cuanto a parámetros de fallo, se puede ver en la Tabla 5.14 las ventajas y desventajas de todos los criterios. Se entiende por costosos de obtener aquellos parámetros de fallo obtenidos a través de ensayos complejos.

Criterio	Parámetros	Costosos de obtener
Tsai-Wu	7	2
Hoffman	6	1
Christensen	5	0
Hashin	6	1
Puck	8	2

Tabla 5.14: Parámetros de fallo de cada criterio, así como aquellos que son costosos de obtener experimentalmente.

6

Análisis MEF de un volante de inercia

6.1. Introducción

El uso de los volantes de inercia proviene de hace muchos años y continúa vigente en la actualidad. El funcionamiento básico es el de un disco que gira, en ocasiones a grandes velocidades, teniendo la capacidad de almacenar y liberar la energía en periodos de tiempo muy cortos. Este es el motivo por el cual resulta adecuado para sistemas mecánicos de ciclo energético discontinuo donde el periodo de tiempo sea muy corto, por lo que, tradicionalmente, se ha utilizado en motores y compresores alternativos, prensas y troqueladoras.

En volantes tradicionales la cantidad de energía es menor que en otros sistemas de almacenamiento, pero en las últimas décadas se fabrican de materiales compuestos, lo que ha supuesto un aumento notable de su capacidad de almacenamiento. Esta innovación permite aplicarlos a campos en los que antes era totalmente impensable, por ejemplo, para almacenamiento de energía en automóviles, trenes o autobuses, satélites, etc.

Cada vez es más frecuente que el volante incorpore un motor-generador eléctrico propio, de forma que configura una máquina aislada, conectada al exterior únicamente por cables eléctricos igual que una batería eléctrica. Físicamente está formado por 4 elementos básicos como se aprecia en la Fig.6.1:

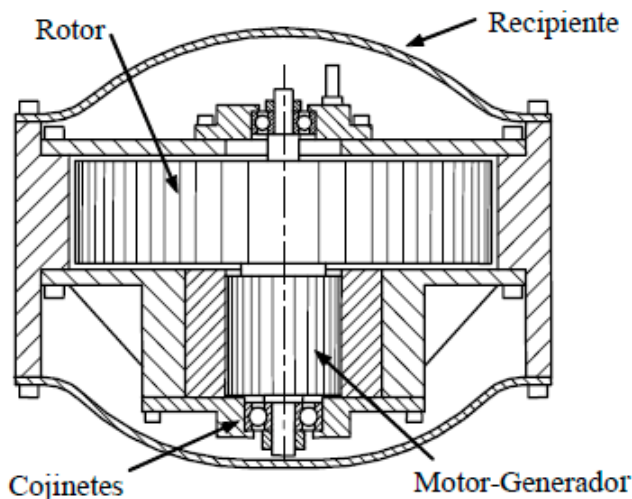


Figura 6.1: Estructura de un acumulador cinético [26].

6.1.1. Aplicaciones del volante de inercia

La aplicación más destacable es su uso para abastecer de energía eléctrica a satélites en la industria aeroespacial. Durante las horas solares se almacena la energía proveniente de

las placas fotovoltaicas, de forma similar a las baterías eléctricas pero con un peso menor y una fiabilidad mayor. En la actualidad son las baterías químicas de níquel-hidrógeno o níquel cadmio quienes proporcionan la energía. La aplicación de los volantes de inercia para realizar dicha función es una tecnología alternativa que está siendo considerados como los próximos sustitutos de las baterías químicas.

Otro campo es la aplicación a los vehículos urbanos, cuya velocidad discontinua y la energía cinética se pierde en forma de calor durante las frenadas. El acumulador cinético es capaz de almacenar la energía de la frenada porque su potencia, a diferencia de las baterías químicas, es suficiente para absorber la energía en unos segundos y para devolverla en la aceleración.

Su uso en los trenes es similar al de los vehículos urbanos y se aplican tanto si el motor es eléctrico como de combustión interna. Sin embargo, para trenes de alta velocidad es necesario que el acumulador se encuentre situado en las estaciones ya que su masa es muy grande comparada con la masa del tren.

A parte del sector del transporte, también se utiliza en el suministro de energía eléctrica para evitar los cortes de corriente. sirven como fuente complementaria durante las interrupciones de corta duración.

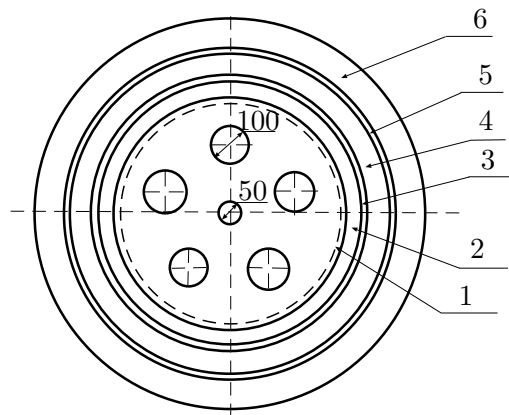
6.1.2. Desventajas del volante de inercia

Para mejorar las aplicaciones de los volantes es necesario aumentar la energía específica del rotor, tanto por unidad de peso como de volumen. Pero en la mayoría de aplicaciones interesa disminuir los costes de fabricación para que sean competitivos con otros sistemas. Lo primero se consigue básicamente aumentando la velocidad de giro, para lo segundo, más complejo, se debe combinar la utilización de materiales baratos con la simplificación de los procesos de fabricación. En ambos casos es necesario estudiar nuevas formas para aumentar la resistencia del rotor.

Los principales problemas en un rotor de material compuesto son la baja resistencia a tensión radial y la unión de la llanta con el eje interior. La tensión radial en el disco sólo aparece si el espesor de pared es grande, tiene poca importancia en los volantes metálicos pero es muy perjudicial en materiales compuestos.

6.2. Características del rotor analizado

El rotor que se va a analizar mediante ANSYS[®] en este trabajo es utilizado en una estación de trenes de alta velocidad. En él se diferencian 2 claras partes; una zona central compuesta por una llanta de acero y 4 discos y una segunda parte que lo envuelve compuesta de sucesivas capas de fibra de vidrio y poliuretano (ver Fig. 6.2).



Anillo	radio int.	radio ext.
1	570	595
2	595	680
3	680	715
4	715	825
5	825	858
6	858	1000

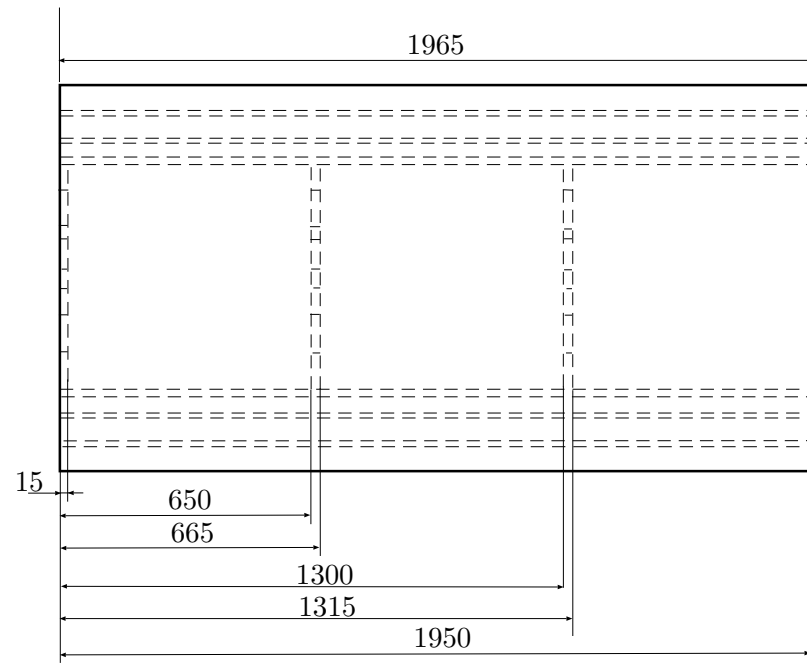


Figura 6.2: Dimensiones del volante de inercia a analizar cuyas unidades están presentadas en mm.

El anillo 1 está formado por acero, en él se unen los 4 discos del mismo material dando lugar así a la llanta. Los anillos 2, 4 y 6 son de material compuesto, más concretamente de fibra de vidrio con un ángulo $\theta = 0^\circ$ cuyas propiedades están recogidas en la Tabla 6.1. El resto de anillos son de poliuretano y como sucede con el acero no serán objeto de estudio.

Fibra de vidrio					
E_x	36,5	GPa	ν_{yz}	0,22	-
E_y	15	"	X_T	1050	MPa
E_z	15	"	X_C	938	"
G_{xy}	6,35	"	Y_T	43	"
G_{xz}	6,35	"	Y_C	106	"
G_{yz}	1,6	"	Z_T	43	"
ν_{xy}	0,24	-	Z_C	106	"
ν_{xz}	0,24	"	S	88	"

Tabla 6.1: Propiedades y características de la fibra de vidrio empleada extraída de [27].

En la Fig. 6.3 se puede ver una representación en 3D del modelo de estudio creado con Solidworks[®]:

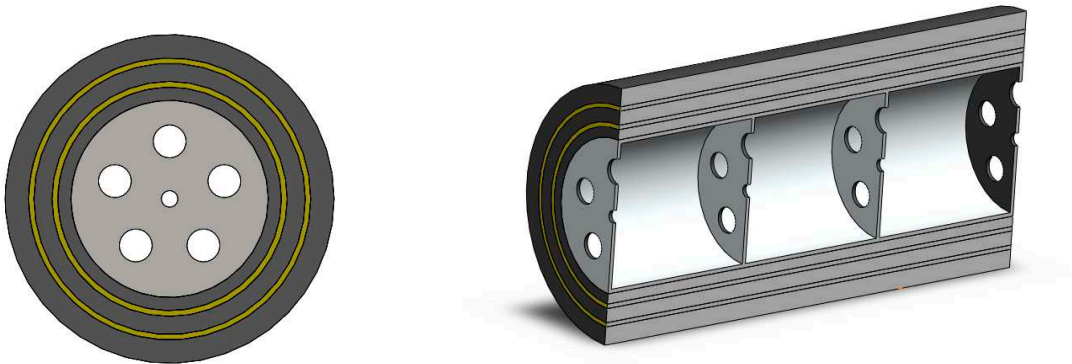


Figura 6.3: Volante de inercia en 3D. A la izquierda una vista frontal del diseño, donde los anillos negros representan a los formados por material compuesto y a la derecha una perspectiva cortada que permite observar la disposición interior de los discos.

6.3. Análisis MEF

Esta sección tiene como objetivo la obtención de las 6 componentes de tensión en varios puntos de los anillos de fibra de vidrio del volante de inercia. Para realizar este estudio se ha empleado el módulo de ANSYS[®] *Composite PrePost* el cual ha sido desarrollado específicamente para materiales compuestos, permitiendo una manipulación sencilla de las capas y orientaciones del laminado. Introducidas la geometría y declarado el material de cada pieza se realiza el mallado del conjunto como se observa en la Fig. 6.4:

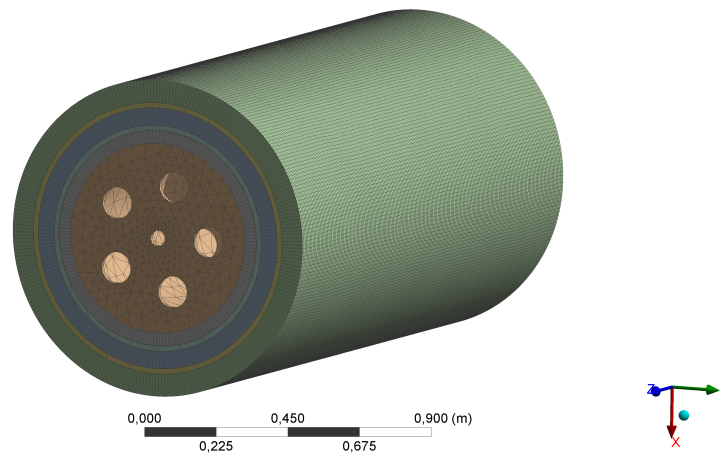


Figura 6.4: Representación del mallado obtenido en ANSYS[®] del volante de inercia.

En este punto, resulta necesario emplear ANSYS[®] *Static Structural* que nos permitirá analizar el modelo en conjunto para una velocidad rotacional de 3500 rpm. En la Fig. 6.5 se puede observar la distribución de la tensión $\sigma_x = \sigma_r$ sobre el anillo intermedio.

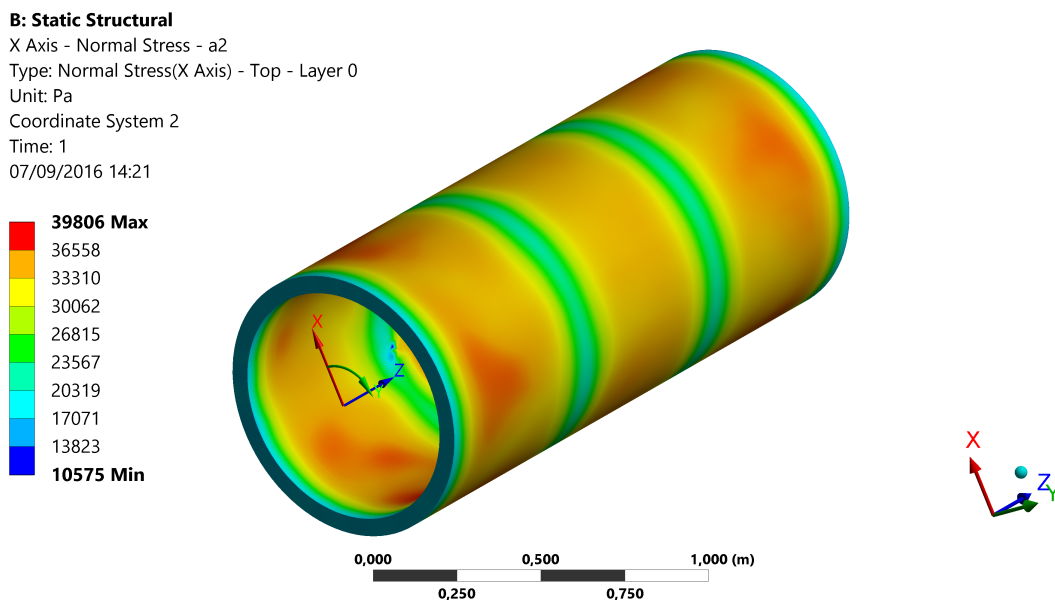


Figura 6.5: Representación MEF de la tensión σ_x que se corresponde con la radial del anillo 2 de fibra de vidrio.

Resulta interesante analizar el rango de valores de σ_x y σ_y pues se aprecia que σ_y es 720 veces mayor a σ_x esto resulta lógico debido a las rigideces del material en esas direcciones.

(ver Fig. 6.6 y Fig. 6.5). Tal y como se podría esperar, los valores de tensión obtenidos son positivos ya que debido a la velocidad rotacional el volante de inercia tiende a expandirse, aumentando su radio.

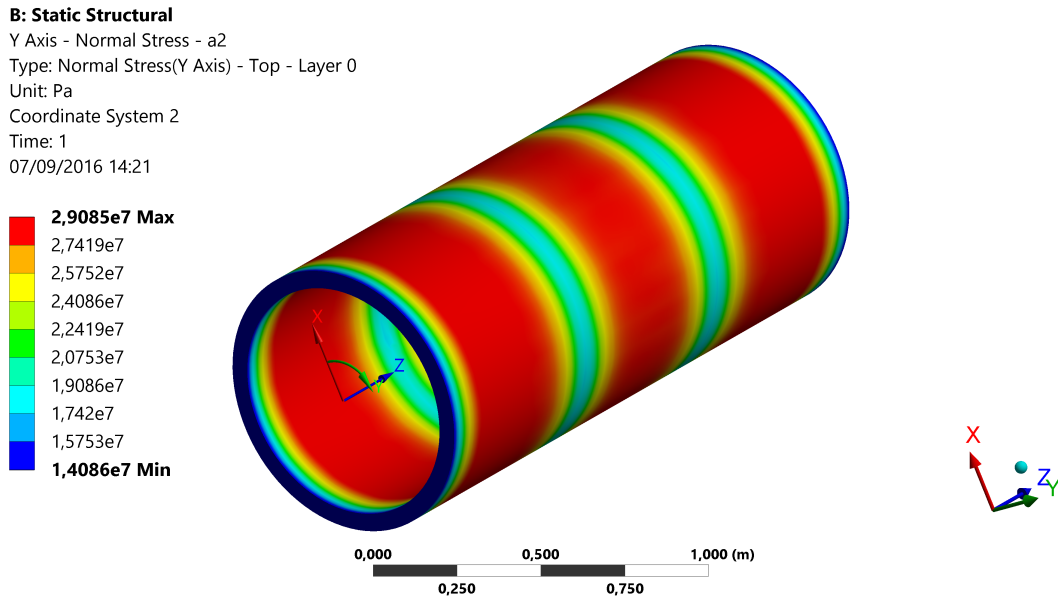


Figura 6.6: Representación MEF de la tensión σ_y que se corresponde con la circunferencial del anillo 2 de fibra de vidrio.

Se puede apreciar en las 2 figuras anteriores la definición de los ejes empleados en coordenadas cilíndricas.

- Eje x, radial.
- Eje y, circunferencial.
- Eje z, axial.

La distribución de tensiones en el resto de anillos es similar a la del anillo 2 pero variando el rango de tensiones, a mayor proximidad al interior de la pieza mayor rango.

ANSYS[®] permite guardar todos los valores de tensión obtenidos en cada nodo en un fichero de Excel[®]. Empleando MATLAB[®] se calculan los coeficientes de seguridad en cada nodo de los anillos de fibra. Esto nos permite conocer si existe algún punto que no cumpla con los criterios.

En la Tabla 6.2 se han escogido 5 puntos de entre los 3 anillos de fibra de vidrio. El punto 1 pertenece al anillo 1 y se ha elegido como aquel que presenta mayor valor de σ_x ya que esta tensión con la dirección de los ejes empleados se corresponde con la tensión radial que puede producir una delaminación. El punto 2 se ha escogido como aquel que

SECCIÓN 6.3. *Análisis MEF*

presenta el mayor coeficiente de seguridad entre todos los nodos del anillo 1, resultando ser con el criterio de Puck. Los puntos 3 y 4 se han seleccionado de la misma manera que el punto 1 y 2, pero perteneciendo al anillo 2. El punto 5 pertenece al anillo 3 de fibra de vidrio pero con mayor tensión radial. En las Figs. 6.7, 6.8 y 6.9 se puede apreciar la localización de dichos puntos:

Punto 2
07/09/2016 19:41

- A** Punto 2
- B** Punto 1

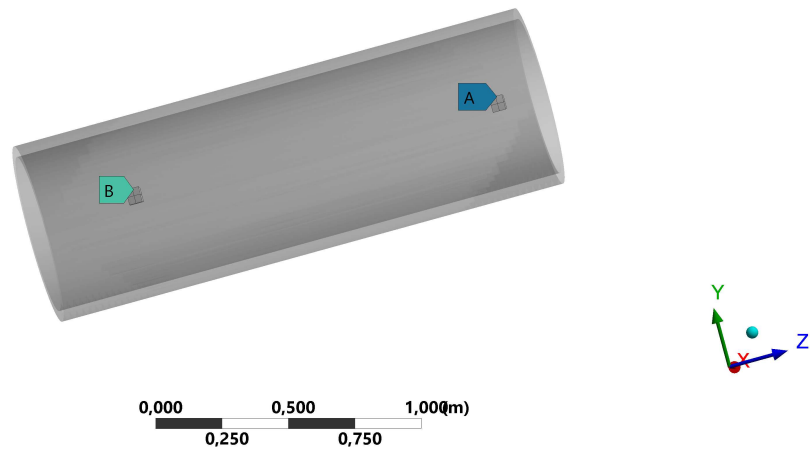


Figura 6.7: Situación de los nodos de los puntos 1 y 2 sobre el anillo 1 de fibra de vidrio.

Punto 3
07/09/2016 19:49

- A** Punto 3
- B** Punto 4

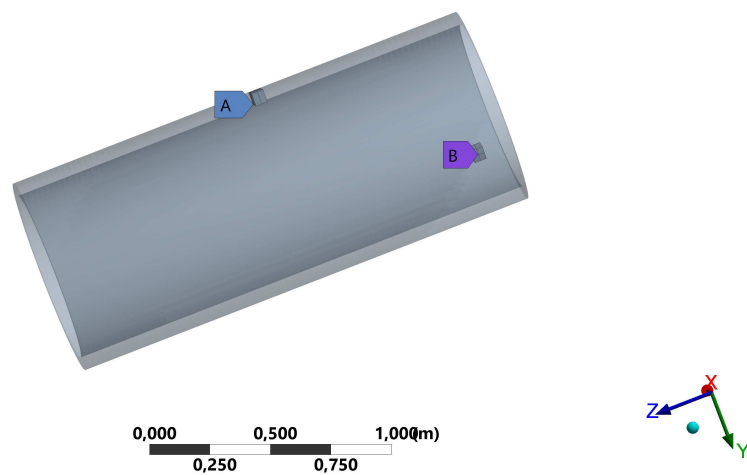


Figura 6.8: Situación de los nodos de los puntos 1 y 2 sobre el anillo 1 de fibra de vidrio.

Punto 5
07/09/2016 19:57

■ Punto 5

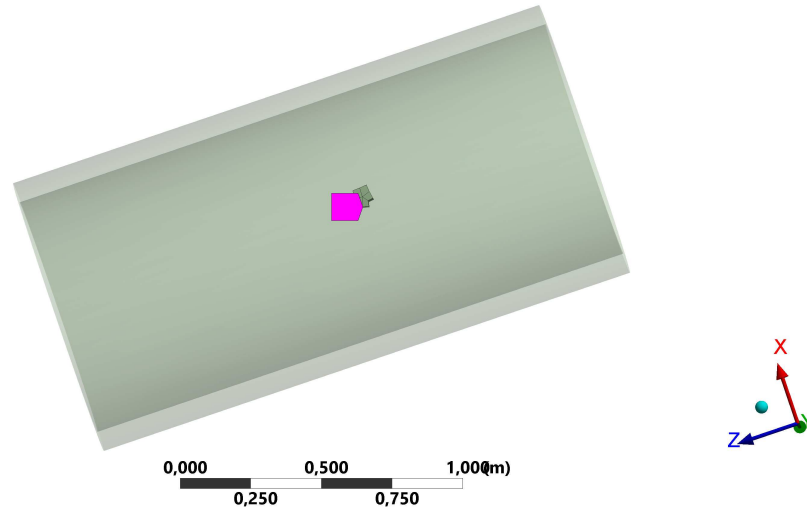


Figura 6.9: Situación de los nodos de los puntos 1 y 2 sobre el anillo 1 de fibra de vidrio.

Punto	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{xz}
1	$6,31 \times 10^4$	$3,41 \times 10^7$	$-1,84 \times 10^5$	$-1,11 \times 10^3$	$-6,70 \times 10^2$	-1,69
2	$5,94 \times 10^4$	$3,42 \times 10^7$	$3,86 \times 10^6$	$1,16 \times 10^4$	$1,67 \times 10^3$	$6,35 \times 10^2$
3	$3,98 \times 10^4$	$2,82 \times 10^7$	$-5,45 \times 10^5$	$-3,23 \times 10^3$	$-7,49 \times 10^3$	$-2,32 \times 10^2$
4	$3,46 \times 10^4$	$2,88 \times 10^7$	$1,9 \times 10^6$	$-1,98 \times 10^3$	$-4,04 \times 10^3$	$1,31 \times 10^2$
5	$2,41 \times 10^4$	$2,23 \times 10^7$	$-1,02 \times 10^6$	$6,63 \times 10^4$	$-4,53 \times 10^4$	$-1,66 \times 10^3$

Tabla 6.2: Componentes de tensión de los 5 puntos a estudiar de los diferentes anillos de fibra de vidrio expresadas en Pa.

En la Tabla 6.3 se recoge la aplicación de los criterios de fallo a los puntos de la Tabla 6.2:

Punto	Tsai-Wu	Hoffman	Christensen	Hashin	Puck
1	0,792	0,794	0,794	0,790	0,789
2	0,811	0,784	0,784	0,861	0,885
3	0,655	0,658	0,658	0,647	0,644
4	0,676	0,663	0,663	0,701	0,713
5	0,515	0,522	0,522	0,502	0,494

Tabla 6.3: Coeficientes de seguridad R con un error de precisión de $\pm 0,001$ para los 5 puntos de la Tabla 6.2.

Se observa en este caso, que los 5 puntos evaluados del volante de inercia se encuentra

SECCIÓN 6.3. *Análisis MEF*

en zona segura, pues el valor del coeficiente de seguridad no alcanza el valor 1. Además este parámetro nos permite obtener una idea de forma cuantitativa del margen que se tiene hasta la predicción del fallo.

En la Tabla 6.4 se ha calculado la dispersión entre los valores de los criterios obtenidos:

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5
0,63 %	12,2 %	2,15 %	7,32 %	5,48 %

Tabla 6.4: Dispersión entre los valores de los criterios para los 5 puntos estudiados.

Se observa que la dispersión de los valores obtenidos es inferior al 10 % a excepción del punto 2. Esto nos permite concluir debido a las diferencias que se han mencionado en el desarrollo de cada criterio, el coeficiente de seguridad que proporcionan es muy similar. Es Puck quien para los 5 puntos estudiados presenta mayor valor de R , siendo menos permisivo. Otro dato que llama la atención es la similitud del coeficiente de seguridad entre Hoffman y Christensen, pues si se analizan con más dígitos significativos, no es hasta la quinta cifra en la que se diferencian.

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusiones

En el presente Trabajo Final de Grado se ha llevado a cabo el estudio de 5 criterios de fallo para materiales compuestos. Ha sido necesario un estudio exhaustivo de la Teoría Clásica de Laminación de Placas. En ambos casos se ha llevado a cabo su implementación en MATLAB[®]. Posteriormente se ha realizado una comparativa de los diversos criterios de fallo permitiendo observar las diferencias presentes en ellos. Para finalizar se ha aplicado los criterios estudiados a un volante de inercia de una estación de AVE.

Tras los estudios mencionados, las principales conclusiones que pueden extraerse son las siguientes:

- Se ha verificado que para un material sometido a un esfuerzo uniaxial N_x la tensión que se produce es $\sigma_x = N_x/A$ siendo A el área de aplicación. La orientación de las láminas así como el tipo de material empleado no influye. La CLPT cumple con dicha verificación.
- Se ha corroborado que en un laminado simétrico la deformación de cada lámina en ejes globales resulta ser la misma en 2D.
- El fallo de los materiales compuestos resulta difícil de definir y predecir. En éste intervienen diversos mecanismos de fallo los cuales interactúan entre sí. Existen diversos criterios de fallo pero el resultado obtenido no resulta completamente satisfactorio como muestra WWFE en todos los campos.
- El criterio de Tsai-Wu resulta matemáticamente sencillo de implementar esto provoca que en la actualidad se siga utilizando en programas informáticos.
- El coeficiente de acoplamiento en Tsai-Wu entre las tensiones σ_1 y σ_2 no es posible obtenerlo de manera experimental, ya que la realización de un ensayo biaxial es compleja además de costosa. Se ha observado que el valor de este parámetro influye de manera notoria en la envolvente de fallo.
- Tsai-Wu y Hoffman no diferencian entre diversos mecanismos de fallo mientras que Christensen efectúa una diferencia entre FF y FM, Hashin entre FFT, FFC, FMT y FMC. Puck realiza una distinción en 2 mecanismos de fallo FF e IFF, a su vez distingue entre FFT y FFC y divide el mecanismo IFF en 3 modos; A, B y C.
- Tsai-Wu y Hoffman provienen de Von Mises y la diferencia entre ambos radica en los coeficientes de acoplamiento y aquellos que son función de éstos: F_{12} , F_{23} y F_{44} .
- Los criterios de Tsai-Wu, Hoffman y Christensen son cuadráticos por lo que no distinguen entre tensiones normales de tracción o compresión; lo cual no es aceptable físicamente.

- Cada criterio necesita distintos parámetros; 7 Tsai-Wu, 6 Hoffman, 5 Christensen, 6 Hashin y 8 Puck.
- En cada criterio existen diversos parámetros que resultan costosos de obtener debido a la complejidad de los ensayos. En Tsai-Wu son 2, los de acoplamiento, en Hoffman es 1, τ_T , al igual que en Hashin. Para Christensen no existen parámetros costosos. Por otro lado en Puck son 2 pendientes de la envolvente los que resultan dificultosos.
- No existe todavía un criterio realmente adecuado, que esté de acuerdo con los datos experimentales y que además represente de una manera satisfactoria los mecanismos de fallo reales que ocurren en el laminado.
- Es fundamental comprender las bases teóricas y los modelos analíticos para una adecuada interpretación de los resultados obtenidos con MEF, para la detección de errores y la validación de los modelos.
- Para el volante de inercia estudiado con una velocidad rotacional de 3500 rpm los 5 criterios presentan un coeficiente de seguridad similar.

7.2. Proyectos futuros

Durante la realización del presente trabajo han surgido nuevas ideas y ramas de estudio en las que profundizar, tanto de carácter continuador como transversales al tema principal. Las más destacadas son:

- Realización de una comparativa de la Teoría Clásica de Laminación de Placas con teorías desarrolladas para laminados.
- Inclusión de las tensiones residuales en los criterios de fallo, que a diferencia de los metales resultan importantes en materiales compuestos ya que reducen la envolvente de fallo.
- Realización de ensayos experimentales que permitan realizar una comparativa con el desarrollo teórico.

A

Presupuesto

En el siguiente desglose se contempla el coste total para la realización del presente proyecto:

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
355	Horas totales de ingeniero aeroespacial	50,00 €	17.750,00 €
30	Búsqueda de información		
55	Formación teórica		
20	Formación en ANSYS [®]		
50	Programación en MATLAB [®]		
15	Definición de geometría		
90	Redacción informe		
60	Depuración de errores		
30	Análisis de resultados		
60	Horas totales tutor proyecto	65,00 €	3.900,00 €
15	Licencia de ANSYS [®]	3,00 €/h	45,00 €
15	Licencia de SolidWorks [®] académica	5,00 €/h	75,00 €
10	Licencia de Mathematica [®] académica	3,00 €/h	30,00 €
50	Licencia de MATLAB [®] académica	3,00 €/h	150,00 €
Coste total (sin IVA)			21.950,00 €
IVA (21 %)			4.609,50 €
Total presupuestado			26.559,50 €

El presupuesto total del proyecto asciende a la cantidad de VEINTISÉIS MIL QUINIENTOS CINCUENTA Y NUEVE CON CINCUENTA EUROS.

B

Pliego de condiciones

B.1. Condiciones del puesto de trabajo

B.1.1. Introducción

Durante la realización de cualquier proyecto, el trabajador está sometido a una serie de condiciones que pueden influir tanto en su rendimiento como en su salud. Debido a este hecho, es necesario regular dichas condiciones para minimizar los riesgos laborales que puedan suponer.

La normativa que regula el tipo de actividades como la que se desarrolla en este caso es la recogida en el Real Decreto 488/1997 del 14 de abril, sobre disposiciones mínimas de seguridad y salud relativas al trabajo con equipos que incluyen pantallas de visualización (PVD).

Para prever el tipo de riesgos a los que puede enfrentarse el trabajador se atiende a cuatro variables:

- Tiempo de trabajo con la pantalla de visualización.
- Tiempo de atención requerida ante la pantalla, que a su vez puede ser continua o discontinua.
- Exigencia y grado de complejidad de la tarea realizada ante la pantalla.
- Necesidad de obtener una información de manera muy rápida.

Entre los diferentes riesgos que pueden surgir a raíz de este tipo de actividades son:

- Seguridad por contacto eléctrico.
- Higiene industrial
 - Iluminación.
 - Ruido
 - Condiciones termohigrométricas.
- Ergonomía.
 - Fatiga visual.
 - Fatiga física.
 - Fatiga mental.

B.1.2. Lugares de trabajo

Los entornos donde se lleva a cabo la actividad deben atenerse a lo establecido en el Real Decreto 486/1997 del 14 de abril, sobre condiciones mínimas de seguridad y salud aplicables a los lugares de trabajo, además de a lo establecido específicamente en el Real Decreto 488/1997 ya reseñado sobre puestos de trabajo con PVD's.

Medidas de emergencia: vías y salidas de evacuación

En caso de que se declare una emergencia, las salidas y vías de evacuación deben haber sido claramente comunicadas a los trabajadores. Existen numerosas normativas relativas a este aspecto, estando la mayoría de ellas enfocadas a la fase constructiva de la instalación. En este pliego de condiciones se asume que estas medidas fueron debidamente cumplidas en la construcción de la instalación.

Condiciones de protección contra incendios

Todas las instalaciones contra incendios deben estar proyectadas, implantadas y mantenidas por empresas debidamente autorizadas por el organismo competente.

Instalación eléctrica

La instalación eléctrica debe estar proyectada, puesta en funcionamiento y mantenida por una empresa debidamente autorizada por el Ministerio de Industria o la Consejería de Industria u organismo similar de la comunidad autónoma correspondiente.

Esta instalación debe evitar originar contactos con las personas, incendios y explosiones según los establecidos por la normativa en vigor. Toda actividad que incluya equipos con pantallas de visualización debe cumplir lo siguiente:

- Cumplir los requerimientos de la Directiva sobre emisiones electromagnéticas, que exige su reducción a niveles insignificantes, desde el punto de vista de protección, seguridad y salud del trabajador.
- Garantizar el adecuado mantenimiento de los cables y conexiones.
- Mantener la separación de los cables eléctricos y telefónicos.
- Emplear longitudes de cables que permitan futuros cambios y, al mismo tiempo, disponerlos para que su mantenimiento sea el correcto en todo momento.
- Facilitar el acceso y mantenimiento de los cables, evitando que se localicen en superficies donde puedan ser pisados o sometidos a condiciones adversas.

Condiciones termohigrométricas

El Real Decreto 488/1997 sobre puestos de trabajo con equipos con pantallas de visualización establece las siguientes magnitudes para garantizar el bienestar y confort térmico de los trabajadores:

- La temperatura operativa de confort debe mantenerse en el rango de 23 a 26 °C en verano y de 20 a 24 °C en invierno.
- La humedad relativa del aire debe mantenerse siempre entre el 45 % y el 65 %, con el objetivo de prevenir la sequedad de ojos y mucosas.

Iluminación

La iluminación de un puesto de trabajo puede ser natural o artificial, aunque es recomendable el uso de iluminación natural. No obstante, su variabilidad con la hora del día, la meteorología y las estaciones requiere que se complemente con luz artificial.

Las condiciones de iluminación deben ser suficientes para el correcto desarrollo de las tareas a realizar. Su ubicación y orientación deben evitar reflejos y deslumbramientos.

Ergonomía

Las posturas en un puesto de trabajo con pantallas de visualización son estáticas y prolongadas. Estas situaciones pueden llevar a problemas posturales en las personas. Por ello, es de especial importancia que el diseño se adapte a las características anatómicas y fisiológicas de las personas.

La altura del asiento debe ser ajustable dentro del rango necesario para el conjunto de usuarios, así como su profundidad e inclinación. El respaldo debe tener una suave prominencia para dar apoyo a la zona lumbar. Se recomienda la utilización de sillas dotadas de ruedas, aunque la resistencia de las ruedas a iniciar el movimiento debe evitar desplazamientos involuntarios en suelos lisos y con actividades de tecleo intensivo.

La superficie de la mesa de trabajo debe ser poco reflectante y de dimensiones suficientes como para permitir movimientos de trabajo y cambiar de postura. Además, debe permitir una colocación flexible de la pantalla, del teclado, de los documentos y del material accesorio.

La distancia entre la pantalla y los ojos del usuario no debe ser inferior a 40 cm. La distancia óptima entre el usuario y la pantalla en lo relativo a confort visual se sitúa entre los 45 y los 75 cm.

La imagen de la pantalla debe ser estable, sin fenómenos de destellos. La luminosidad y el contraste debe ser fácilmente regulable por el usuario. Asimismo, la pantalla debe ser orientable e inclinable a voluntad.

El teclado debe estar inclinado y ser independiente de la pantalla, de modo que permita al trabajador adoptar una postura cómoda, que no provoque cansancio en brazos y manos.

Es recomendable el uso de protectores de pantalla. Éstos consisten en un cristal polarizado, sostenido por un marco, que se superpone al cristal de la pantalla. De este modo

se consigue proteger la vista de los usuarios, además de mejorar las prestaciones ofrecidas por la pantalla, relacionadas con el contraste y la claridad.

Ruido

La normativa establece que el empresario debe evaluar la exposición de los trabajadores al ruido, con el objeto de determinar si se superan los límites establecidos en esta norma y en su caso aplicar las medidas procedentes.

Los lugares donde se emplean pantallas de visualización no suelen tener problemas de altos niveles sonoros, sin embargo, pueden existir niveles medios que generen molestia y falta de atención en el trabajador. De esta forma, el nivel sonoro en estos puestos de trabajo debe ser lo más bajo posible.

La directiva establece que para tareas complejas y difíciles el nivel sonoro equivalente no debe exceder los 55dB A.

B.2. Condiciones de los recursos informáticos

Para la realización de los cálculos requeridos en el trabajo es necesario el uso de recursos informáticos. Estos recursos se dividen en dos grupos: *hardware* y *software*. El primero compone todos los equipos informáticos que para la realización de este trabajo requieren de potencia de cálculo y memoria. Por otro lado, el *software* lo integra todos y cada uno de los programas informáticos utilizados.

B.2.1. Condiciones del *hardware*

Como *hardware* ha sido utilizado un ordenador portátil con el que se han realizado todos los cálculos.

Ordenador portátil: Lenovo Z580

- Procesador: Intel(R) Core(TM) i7-3520M, 2,90 GHz
- Memoria RAM: 8 GB
- Tarjeta gráfica: NVIDIA GeForce GT 635M
- Unidad de almacenamiento: 465 GB
- Monitor: Generic PnP Monitor
- Sistema Operativo: Windows 10 Home
- Arquitectura: 64 bits

B.2.2. Condiciones del *software*

Todo el software utilizado se corresponde con software de uso comercial con licencia. Los distintos programas utilizados son:

SolidWorks Corp.

Para el diseño asistido por ordenador de la geometría de trabajo se ha utilizado SolidWorks[®], integrado en la plataforma ANSYS Workbench[®]. El programa permite modelar piezas y conjuntos y extraer de ellos tanto planos técnicos como otro tipo de información necesaria para la producción. Es un programa que funciona con base en las nuevas técnicas de modelado con sistemas CAD. Sus requerimientos son suficientes como para desarrollar una geometría sencilla como la que se realiza en el presente trabajo (ver Fig.6.3).

ANSYS Inc.

La compañía ANSYS Inc incluye una gran variedad de programas en su *software* ANSYS, entre los que se han utilizado los que se describen a continuación.

El mallador elegido para la elaboración de la malla es ANSYS Mesher[®], también integrado en la plataforma ANSYS Workbench[®].

Para el cálculo de tensiones se ha hecho uso de ANSYS Composite PrePost[®] (ACP), registrado por la compañía ANSYS Inc. Se trata de un *software* que permite modelar piezas de materiales compuestos. El estudio en sí se ha realizado con el módulo *Static structural*.

MATLAB

MATLAB[®] (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). En él se ha realizado la implementación de los 5 criterios de fallo estudiados y la CLPT.

Otros programas

En este grupo se recogen todos aquellos programas utilizados para realizar cálculos matemáticos sencillos que requieren del uso de un ordenador; Microsoft Office Excel , Wolfram Mathematica[®].

Para la redacción del documento se ha utilizado L^AT_EX, un sistema de composición de textos, orientado a la creación de documentos escritos que presenten una alta calidad tipográfica. Por sus características y posibilidades, es usado de forma especialmente intensa en la generación de artículos y libros científicos que incluyen, entre otros elementos,

expresiones matemáticas.

Para la realización de la mayoría de figuras se ha hecho uso de LatexDraw[®], programa basado en Java que permite además de proporcionar las imágenes en formatos conocidos como .png o .jpg, exportar el código PSTricks de la imagen.

Bibliografía

- [1] STEPHEN W. TSAI AND H. THOMAS HAHN. *Introduction to composite materials*. Technomic Publishing Company, 1980.
- [2] ROBERT M. JONES. *Mechanics of composite materials*. Taylor and Francis Group, 1999.
- [3] S. Oller (Ed.) *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*. Ed. CIMNE, 2002.
- [4] DANIEL GAY and SUONG V. HOA *Composite materials Design and applications*. Taylor and Francis Group, 2007.
- [5] Recuperado de: www.airbus.com
- [6] Recuperado de: www.boeing.com
- [7] LEKHNITSKII S. G. *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, 1945.
- [8] SUN, C.T., QUINN, B.J., TAO, J. AND OPLINGER, D.W. *Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates*. NASA, Dot/FAA/AR-95/109, 1996.
- [9] S.W. TSAI. *Strength Theories of Filamentary Structures*. Eds. R.T. Schwartz and H.T. Schwartz, Wiley Interscience, 1968.
- [10] V.D. AZZI AND S.W. TSAI. *Anisotropic strength of composites*. Experimental Mechanics, 1965, pp. 283-288.
- [11] PAIVA, JANE MARIA FAULSTICH DE AND MAYER, SERGIO AND REZENDE, MIRABEL CERQUEIRA. *Evaluation of mechanical properties of four different carbon/epoxy composites used in aeronautical field*. Experimental MEchanics, 2005.
- [12] HASHIN, Z. AND ROTEM A. *A Fatigue Criterion for Fiber Reinforced Materials*. J. Comp. Mat., 1973.
- [13] HASHIN, Z. *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*. J. of Applied Mechanics, 1980.
- [14] CHRISTENSEN, R.M. *The Numbers of Elastic Properties and Failure Parameters for Fiber Composites*. J. Eng. Mater. Tech, 1998.
- [15] PUCK, A. AND SCHÜRSMANN, H. *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models* Composites Science and Technology, 1998.

- [16] PUCK, A. *Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion*. Composites Science and Technology, 2002.
- [17] K-S. LIU AND S.W.TSAI. *A progressive quadratic failure criterion for a laminate**. Composites Science and Technology, 1998.
- [18] A KURAIISHI, K-S. LIU AND S.W.TSAI. *A progressive quadratic failure criterion, part B*. Composites Science and Technology, 2002.
- [19] S.W.TSAI AND WU. *A general theory of strength for anisotropic materials*. Journal of Composite Materials, 1971, pp. 58-80.
- [20] HOFFMAN. O. *The Brittle Strength of Orthotropic Materials*. J. Composite Materials, 1967, pp. 200-206.
- [21] PAUL B. *A Modification of the Coulomb-Mohr Theory of Fracture*. Journal of Applied Mechanics, 1961, p. 259.
- [22] KNOPS M. *Analysis of Failure in Fiber Polymer Laminates. The Theory of Alfred Puck*. Springer: 2008, p. 5.
- [23] VENTSEL, E. AND KRAUTHAMMER, T. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*. Marcel-Dekker, 2001.
- [24] PUCK A. *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*. Hanser, 1996.
- [25] BYRON PIPES R. AND COLE B. *On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Materials*. J. Composite Materials, 1973, pp. 246.
- [26] RIPOLL MASFERRER LL. *Análisis y diseño de volantes de inercia de materiales compuestos*. Universitat de Girona, 2005
- [27] ABDEL-GHANY A., TAHA I. AND EBEID S. *Failure Prediction of Fiber Reinforced Polymer*. International Journal of Engineering and Technical Research, 2016