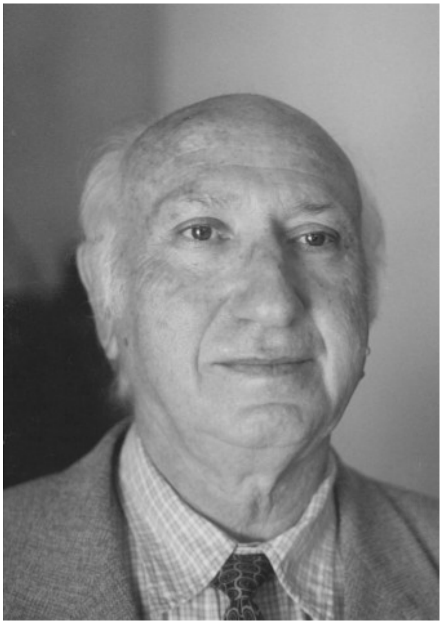
In memoriam: Manuel Valdivia Ureña (1928–2014)

por

Manuel López Pellicer

1. Manuel Valdivia: su camino hacia la Matemática

Manuel Valdivia Ureña nació el 12 de noviembre de 1928 en Martos (Jaén). En 1939 sus padres se trasladaron a Los Pilares, en cuya escuela, *Institución Castilla*, comenzó a demostrar una gran facilidad para el cálculo. En 1941 comenzó el bachillerato en el colegio *La Inmaculada*. Obtuvo brillantes calificaciones en todas las asignaturas y siempre recordó con afecto a todos sus profesores y, en especial, a D.ª Casilda Miranda, licenciada en Matemáticas que explicaba con una claridad asombrosa y le abrió los ojos a la luz de las Matemáticas.



Manuel Valdivia en 2002

Valdivia se sentía muy atraído por las Matemáticas, pero mucho más por la Filosofía, la Literatura y, en especial, por la poesía de Machado, Unamuno, Juan Ramón Jiménez y los poetas de la generación del 27.

Años más tarde, mientras estudiaba la prueba de Hermite de la transcendencia del número e, leyó *Luna del Paraíso* de Vicente Aleixandre y pensó *que no sabría elegir entre esta oda y el trabajo de Hermite, decidiendo que poesía y matemáticas le acompañarían toda la vida.* Valdivia compartió el pensamiento del matemático inglés Godfrey H. Hardy de que *un matemático, como un poeta, es creador de expresiones estéticas*, matizando que si las expresiones matemáticas son más permanentes que las poéticas, se debe a que las matemáticas están hechas con ideas, mientras que en la poesía tienen más importancia las palabras, la forma de decir las cosas, y las palabras con el tiempo se desgastan más que las ideas.

Su camino hacia las Matemáticas no fue directo. Después del Examen de Estado en Granada, inició en Madrid la carrera de Derecho. No terminó el primer curso, pues observó que con sus conocimientos matemáticos de bachillerato resolvía problemas que se resistían a los compañeros de pensión que preparaban el ingreso en la Escuela de Ingenieros Agrónomos, cuyas pruebas de ingreso superó pronto.

Las limitaciones económicas le obligaron a dar clases particulares y a ser profesor de Matemáticas, Genética, Física y Química en la Academia Claret, donde había preparado el ingreso. El exceso de trabajo no le impidió ni terminar su carrera de Ingeniero ni comenzar a mostrar su preferencia por las matemáticas.

En 1959 obtuvo una beca en Investigaciones Agronómicas y una plaza de Profesor Adjunto de Matemáticas en la Escuela de Ingenieros Agrónomos. En los dos años siguientes completó su formación científica con el doctorado en Ingeniería Agronómica y la licenciatura en Matemáticas. Estudiaba las ideas fundamentales y elaboraba las demostraciones de los teoremas cuando los necesitaba.

En 1961, el profesor Darío Maravall le puso en contacto con Ricardo San Juan, uno de los discípulos predilectos del mítico Julio Rey Pastor, quien le propuso realizar la tesis doctoral en Matemáticas sobre cuestiones de límites de funciones absolutamente continuas con distintos tipos de convergencia, tema que el propio San Juan consideraba al margen de las corrientes de interés vigentes entonces en Matemáticas.

Valdivia, sin ninguna ayuda, resolvió en poco más de medio año todas las cuestiones que le había propuesto San Juan, quien le reprochó el tiempo dilapidado en estudios y trabajos no matemáticos. San Juan no era entonces consciente de la escasez de medios que había condicionado la trayectoria de Valdivia. Obtuvo el doctorado en Matemáticas e investigó en la línea de San Juan en los artículos [1], [2] y [3] del listado de publicaciones, incluido al final. Obtuvo que $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_n f_n \, d\mu$ se puede caracterizar por la continuidad absoluta de $\varphi(E) = \limsup \left|\int_E f_n \, d\mu\right|$, deduciendo una generalización del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, recogida en el libro de H. L. Royden *Real Analysis*, tercera edición, MacMilan-Collier (1988).

En [3], Valdivia obtuvo teoremas relacionados con resultados de R. San Juan en *On the existence of a holomorphic function which approximates asymptotically with assigned bounds to a given series, and of a real function infinitely differentiable in an interval with assigned derivatives in a point and bounds in the interval*, Collect. Math. **4** (1951), 3–11. Los resultados nuevos de Valdivia sobre existencia de una función holomorfa con desarrollo asintótico se basan en que el conjunto $A(D)$ de funciones holomofas en D es compacto con la topología de ciertas métricas.

En 1965, la Universidad de Valencia tenía una cátedra de Mecánica Racional para explicar Matemáticas, cuyo titular era don Lorenzo Ferrer. Los que entonces éramos estudiantes sabíamos que se estaba celebrando en Madrid una oposición a dos cátedras de Matemáticas, de las que una estaba destinada a Valencia. Nunca oí el nombre de Valdivia entre los posibles candidatos a obtenerla.

Pero Valdivia hizo una oposición brillante, resolvió todos los problemas propuestos en el ejercicio quinto y, con todo merecimiento, obtuvo el número uno. Cuatro años después opositó a la cátedra de Matemáticas I de la Escuela de Agrónomos. Tuvo dedicación compartida entre las dos cátedras cinco años, que fueron los primeros de la Universidad Politécnica de Valencia, entonces Instituto Politécnico Superior, donde Valdivia dirigió las Matemáticas de las cuatro escuelas iniciales, Agrónomos, Arquitectura, Caminos e Industriales.

Desde entonces le hemos tenido en Valencia, renunciando a varios ofrecimientos de trasladarse a Madrid, tanto a la Universidad Complutense como a la Politécnica. Tal vez intuyó la posible creación de un grupo de investigación matemática en Valencia.

Al aceptar la invitación de La Gaceta de la RSME para escribir este artículo fui consciente de la dificultad de resumir la obra matemática de Valdivia, por la gran calidad de sus casi doscientos artículos. También sabía que debería renunciar a presentar las ideas de sus demostraciones, donde siempre estará vivo su ingenio, que sorprende por su agudeza y por la novedad de sus construcciones, tanto en los resultados difíciles como en los sencillos. Muchas veces encontró nuevos puntos de vista en resultados clásicos. Por ejemplo, es bien conocido que el teorema de Riesz nos dice que la compacidad de la bola unidad cerrada de un espacio de Banach E implica que la dimensión de E es finita. En [17], Valdivia obtuvo el siguiente resultado, llamado *versión topológica del teorema de Riesz*: *Si* (X, τ) *es un espacio topológico localmente compacto y* τ' *es una topología menos fina, Hausdorff y tal que cada punto tiene un sistema fundamental de* τ'*-entornos que son conexos para* τ*, se tiene que* $\tau = \tau'$. Luego si la bola unidad de un espacio de Banach E es compacta, τ es la topología de la norma de E y $\tau' = \sigma(E, E')$, se tiene que $\tau = \sigma(E, E')$, lo que implica que la dimensión de E es finita.

A cualquier lector le sorprenderán las ingeniosas caracterizaciones que obtuvo el profesor Valdivia de la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes de una función f respecto a otra función g en un intervalo $[a, b]$ en sus dos últimos artículos [98] y [99], que se imprimirán en septiembre.

Parte de los primeros resultados de Valdivia están en su libro «*Topics in locally convex spaces*», editado por North Holland en 1982, que sigue siendo un referente clásico en su especialidad. Muestra su fino espíritu matemático, que desmenuzó siempre con sencillez y claridad todos los temas que trató, sin perder nunca el tiempo en rodeos innecesarios, acompañado, además, de una astucia inaudita para desarrollar técnicas nuevas cuando se enfrentó a problemas abiertos. Así pudo resolver problemas planteados por eminentes analistas, como Köthe, Dieudonné, Godefroy, Grothendieck y Schwartz, los dos últimos medallas Fields.

Para agilizar la exposición se utilizarán abreviaciones naturales cuando su significado se deduzca del contexto. Por tanto, *espacio* se utilizará tanto para *espacio topológico de Hausdorff* como para *espacio localmente convexo*, y *aplicación* significará *aplicación lineal y continua*, salvo que se indique lo contrario. Como es usual, E' representará el dual topológico de un espacio localmente convexo E, en tanto que E^* y $B(E)$ serán el dual topológico y la bola unidad cerrada de un espacio de Banach E. Así mismo, usaremos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

2. El teorema general de gráfica cerrada de Adasch-Kōmura-Valdivia y el encuentro con Dieudonné

Antes de conocer a Valdivia, Ricardo San Juan invitó al matemático húngaro John Horváth a dar un curso sobre diversos aspectos de Análisis Matemático en la Universidad Complutense. Después de esta visita, San Juan y Horváth se mantuvieron en contacto por correspondencia. Horváth vivía en aquella época en París, después se marchó a Colombia y enseñó en la Universidad de Bogotá. Unos años más tarde se fue a Estados Unidos, se nacionalizó americano y trabajó desde entonces en la Universidad de Maryland.

Desde finales de 1965 Valdivia se concentró en el estudio de dos libros recientes de Köthe y de Schaefer sobre *Espacios vectoriales topológicos*. Fue su primer encuentro con el Análisis Funcional moderno y con su variedad de espacios, como los *espacios tonelados*, que son espacios localmente convexos para los que el principio de acotación uniforme es válido y que están caracterizados por ser entornos del origen los conjuntos absolutamente convexos, cerrados y absorbentes, llamados *toneles* por el grupo Bourbaki. Tres años después, Valdivia publicó su cuarto artículo, *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios localmente convexos*, en la Revista de la Academia de Ciencias, que entonces no tenía ninguna difusión internacional [4].

Valdivia, completamente solo, sin colegas ni revistas, encontró la clase más general de espacios de llegada para los que una aplicación lineal con gráfica cerrada definida en un espacio tonelado es continua. Con su resultado resolvió una conjetura del libro de Schaefer. El matemático alemán N. Adasch publicó dos años más tarde el artículo *Eine Bemerkung über den Graphensatz*, Math. Ann. **186** (1970), 327–333, que contiene el teorema general de la gráfica cerrada obtenido por Valdivia. Entonces Adasch desconocía el resultado de Valdivia.

Este teorema se conoce como *teorema de Adasch-Kōmura-Valdivia*, siendo uno de los muchos teoremas y elementos matemáticos que llevan su nombre, como los *compactos de Valdivia*. La inclusión del segundo nombre se debe a una aproximación directa al teorema general de gráfica cerrada obtenida por Kōmura en *On linear topological spaces,* Kumamoto J. Sci. Ser. A **5** (1962), 148–157, de la que Köthe escribió en la página 44 (apartado 33.9) de su libro *Topological Vector Spaces II*, Springer, 1979, que «*leads to its sharpest possible form, which was given by Valdivia*».

Entonces estaba haciendo el doctorado con el Profesor Valdivia y creo que su mérito es aún mayor de lo que escribió Köthe, pues en 1968 Valdivia tampoco tenía el artículo de Kōmura, donde obtiene su teorema de gráfica cerrada mediante comparación de topologías. Años después, el artículo de Kōmura sugirió a Valdivia en [36] nuevos resultados sobre gráfica cerrada, al determinar, para una clase $\mathcal{E}$ de espacios localmente convexos, que sea estable al formar límites inductivos y que contenga a los espacios de dimensión finita, la clase maximal $\mathcal{E}_r$ de los espacios localmente convexos para los que son continuas las aplicaciones lineales con gráfica cerrada $f\colon E \to F$ cuando $E \in \mathcal{E}$ y $F \in \mathcal{E}_r$. El teorema de Kōmura está contenido en el caso de que $\mathcal{E}$ sean los espacios tonelados.

El interés de las topologías débiles llevó a Valdivia en [21] a obtener un teorema general de gráfica cerrada del que se dedujera la continuidad para las topologías débiles. Caracterizó la clase maximal Λ_r tal que si es localmente completo el dual débil* $(E', \sigma(E', E))$ de E, F es Λ_r y la aplicación $f\colon E \to F$ tiene gráfica cerrada, entonces $f\colon (E, \sigma(E, E') \to (F, \sigma(F, F')$ es una aplicación continua. También demostró la necesidad de todas las condiciones de su teorema.

Después de obtener el teorema general de la gráfica cerrada, Valdivia dirigió su atención a obtener el teorema general de la aplicación abierta, conocido también como teorema del homomorfismo. El clásico teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder establece que una aplicación lineal continua f entre dos espacios vectoriales topológicos metrizables completos E y F es un homomorfismo topológico o tiene una imagen $f(E)$ que es de primera categoría en $\overline{f(E)}$, por lo que f es un homomorfismo topológico si y sólo si $f(E)$ es cerrado. Este teorema es equivalente al teorema de la gráfica cerrada para espacios vectoriales topológicos metrizables completos. El teorema de Banach-Schauder fue generalizado significativamente por V. Pták. El teorema general de la gráfica cerrada llevó a Valdivia en [5] a obtener el teorema general de la aplicación abierta, introduciendo las clases de espacios V y W_r para las que es isomorfismo cada biyección lineal y continua $\dot{f}\colon E \to F$ cuando $E \in V$ y $F \in W_r$.

La soledad de Valdivia terminó por mediación de los profesores Germán Ancochea y Ricardo San Juan. Durante la Reunión de Matemáticos españoles de diciembre de 1970 en La Laguna, el profesor Ancochea le presentó a Dieudonné, encargado de dar la conferencia de clausura, quien aconsejó a Valdivia que publicase sus artículos en revistas de primer nivel. Siguió su consejo y en 1971 publicó dos artículos en Mathematische Annalen, dos en Annales de l'Institut Fourier y uno en el Journal für die reine und angewandte Mathematik. Son los artículos [6], [7], [8], [10] y [11].

Horváth, en la introducción de su artículo *The Mathematical Works of Manuel Valdivia*, en Progress in Functional Analysis, Mathematics Studies 170 (Editores K. D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth y M. Maestre), North-Holland, 1992, escribió:

«*On January 12, 1968, Ricardo San Juan Llosá, professor of mathematics at the University of Madrid, wrote me the following: "I read curiosily the magistral work of Prof. Köthe on topological vector spaces. A professor ('catedrático') from Valencia, Prof. Valdivia, whose doctoral dissertation I directed, works in this and I think that he will obtain results; he seems to me a good researcher". I hardly know more prophetic words, since the same year appeared the first articles of Valdivia on the closed graph and open mapping theorems, and with these a torrent was released*».

La respuesta a la carta de San Juan no se dejó esperar. Horváth puso a Valdivia en contacto con un conocido matemático belga, Henri G. Garnir, quien organizó en 1970 un congreso en Lieja e invitó a Valdivia. Allí conoció a Gottfried Köthe, a Laurent Schwartz y a Kōsaku Yosida. Valdiva explicó su artículo [11], *Absolutely convex sets in barrelled spaces*, a un grupo de matemáticos alemanes, que se interesaron por los resultados obtenidos y por los métodos que Valdivia había desarrollado.

Desde entonces fue invitado todos los años al centro de investigación Oberwolfach, situado en la Selva Negra. Durante la Segunda Guerra Mundial el centro estuvo dedicado a investigaciones de carácter bélico. Al terminar la contienda, se entregó a los matemáticos, se modificaron sus instalaciones y se le dotó de una biblioteca extraordinaria. Allí Valdivia dio muchas conferencias y se relacionó con matemáticos de numerosos países. Contó con el apoyo del profesor Köthe, que era entonces el padre intelectual de muchos matemáticos alemanes.

A principios de los setenta eran muy pocos los matemáticos españoles que publicaban en revistas de primera fila. Valdivia fue pionero, a contracorriente. Su obra ha sido uno de los elementos determinantes del desarrollo de la investigación matemática en España, que en cuarenta años ha pasado de ser desconocida a tener relevancia internacional por índices de calidad y productividad.

En los ochenta del siglo pasado, antes de la popularización del JCR y de otros indicadores similares, el Profesor José María López Piñero, fundador del Instituto de Historia de la Ciencia y la Documentación en 1985, hizo un estudio bibliométrico donde el profesor Valdivia resultó estar entre los tres científicos españoles más citados.

3. Resultados de Valdivia sobre espacios de Pták

Valdivia, con sus teoremas generales de la gráfica cerrada y de la aplicación abierta, dio un gran salto sobre muchos resultados parciales anteriores. Poco antes de 1960, Vlastimil Pták había introducido los espacios B_r-completos y B-completos, conocidos como espacios infra-Pták y espacios de Pták, respectivamente. Una aplicación lineal con gráfica cerrada de un espacio tonelado en un espacio B_r-completo es continua, en tanto que una aplicación lineal continua de un espacio de B-completo sobre un espacio tonelado es abierta.

Cada espacio de Pták es infra-Pták. El recíproco de esta inclusión permaneció como problema abierto más de treinta años hasta que Valdivia, en [43], encontró en la clausura de c_0 en su bidual l^∞ una sucesión de vectores $(z_n)_n$ tales que si L_n es la envoltura lineal de $c_0 \cup \{z_1, \dots, z_n\}$ y $L = \cup_n L_n$, se tiene que el dual de Mackey $((l^\infty)', \tau((l^\infty)', L)$ es un B_r-completo que no es B-completo.

Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, un resultado de Oleg G. Smoljanov permitió a Valdivia probar en [20] que el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$ no es B_r-completo, y tres años más tarde obtuvo en [26] que el espacio test de distribuciones $\mathcal{D}(\Omega)$ tampoco es B_r-completo.

Refinamientos de sus técnicas le llevaron a demostrar que $\mathcal{D}^p(\Omega)$ y los espacios de Beurling $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ de funciones ultradiferenciables, así como los correspondientes espacios de ultradistribuciones, no son B_r-completos ([22] y [50]). Una exposición muy detallada de estos resultados de Valdivia están recogidos en la obra de M. Oberguggenberger, *Der Graphensatz in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen*, Teubner-Textr zur Mathematik, **44**, Teubner, Leipzig, 1982.

En [22] Valdivia obtuvo que si F es un espacio de Fréchet que es completo para la topología $\sigma(F, F')$ entonces el producto $F^{\mathbb{N}} \times F^{(\mathbb{N})}$ es un espacio B-completo, en tanto que si $(F, \sigma(F, F'))$ no es completo entonces $F^{\mathbb{N}} \times F^{(\mathbb{N})}$ no es B_r-completo. Valdivia también descubrió que el producto de una familia de espacios de Banach de dimensión infinita no es B_r-completo cuando el cardinal de la familia es mayor o igual que $2^{\aleph_0}$. En su artículo [24] podemos leer que, dadas dos sucesiones (E_n) y (F_n) de espacios de Banach de dimensión infinita, el producto $(\Pi_n E_n) \times (\Sigma_n F_n)$ no es B_r-completo.

En [51] demostró que en una suma directa localmente convexa $E = \Sigma_n E_n$ de espacios de Fréchet-Montel de dimensión infinita son equivalentes las propiedades ser B-completo, ser B_r-completo, y que cada cociente de E sea completo. En [90] complementó los resultados de [51] al demostrar que, en un espacio E que fuese suma topológica directa de una sucesión $(E_n)_n$ de espacios de Banach de dimensión infinita, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. E' con la topología de Mackey $\mu(E', E)$ es B-completo.
2. Cada cociente de Hausdorff de $(E', \mu(E', E))$ es completo.
3. Cada cociente separado de E satisface la condición débil de Mackey.
4. Para cada n el espacio E_n es casi-reflexivo, lo que significa que E_n tiene codimensión finita en su bidual E_n^{**}.

Valdivia también observó que los B_r espacios no suministraban la solución general del problema de la gráfica cerrada, pues eran un subconjunto propio de los S-espacios que había introducido en [4]. La buena pedagogía de Valdivia le llevó a cambiar el nombre de sus S-espacios por Γ_r-espacios en [9], donde demostró que tienen buenas propiedades de localización, pues si E es un subespacio de codimensión finita de un espacio de Baire, F es el límite inductivo de una sucesión creciente $(F_n)_n$ de subespacios que son Γ_r y $u\colon E \to F$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada, existe un índice n tal que $u(E) \subset F_n$. Valdivia aplicó este resultado en localización de medidas vectoriales.

4. Soluciones de Valdivia a problemas de Grothendieck y Schwartz

El teorema de la gráfica boreliana de L. Schwartz, recogido en su libro *Radon measures on arbitrary topological spaces*, Oxford University Press, 1973, así como la versión obtenida por A. Martineau en *Sur des théorèmes de S. Banach et L. Schwartz concernant le graphe fermé*, Studia Math. **30** (1968), 43–51, atrajeron la atención de Valdivia sobre los espacios de Lusin, Suslin, K-analíticos y polacos. Valdivia introdujo nuevas clases de espacios, estudió sus propiedades y resolvió en [30] el problema planteado en la página 117 del libro de Schwartz, al demostrar que si E es un espacio localmente convexo provisto con la topología débil y $\sigma(E, E') \neq \tau(E, E')$, entonces para cada espacio localmente convexo F se verifica que los productos tensoriales $E \hat{\otimes}_\pi F$ y $E \hat{\otimes}_\epsilon F$ no son espacios de Suslin.

Además, obtuvo un nuevo teorema de gráfica cerrada al probar la continuidad de una aplicación lineal con gráfica sucesionalmente cerrada definida en un espacio metrizable de Baire y con valores en un espacio de Suslin. Este resultado de Valdivia recuerda el famoso teorema de A. Grothendieck publicado en su monografía *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), de que cada aplicación lineal con gráfica sucesionalmente cerrada definida en un espacio ultrabornológico y con valores en un espacio (LF) es continua, donde un espacio ultrabornológico es un límite inductivo de espacios de Banach.

Grothendieck conjeturó que su teorema debería ser cierto para una clase mucho más amplia de espacios localmente convexos en la llegada que contuviese a los espacios (LF) y que fuese estable al formar subespacios cerrados, cocientes, productos numerables y sumas localmente convexas también numerables.

El primero en resolver esta conjetura, utilizando ideas de W. Słowikowski, fue D. A. Raíkov en *A two-sided closed graph theorem for topological linear spaces*, Sibirsk. Mat. Ž. **7** (1966), 353–372. Poco después, M. De Wilde en *Sur le théorème du graphe fermé*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **265** (1967), A376–A379, también resolvió la conjetura de Grothendieck con un elegante refinamiento de un método clásico de Banach, abriendo un nuevo campo de investigación en la teoría de los espacios localmente convexos con la introducción de las $\mathcal{C}$-webs. En [48] Valdivia demostró que el producto tensorial proyectivo de dos espacios de Suslin de dimensión no numerable es un espacio de Suslin sin $\mathcal{C}$-web, de lo que dedujo que el teorema de la gráfica boreliana de Schwartz no era un caso particular del teorema de la gráfica cerrada de De Wilde, incluso en el caso de ser la gráfica sucesionalmente cerrada.

En [47] Valdivia investigó sobre los artículos de De Wilde, Raíkov y Słowikowski, lo que le llevó en [49] a introducir los quasi-(LB)-espacios, que es la clase de espacios localmente convexos que admiten una resolución de discos de Banach. Recordemos que una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de subconjuntos de un espacio E es una resolución si $E = \cup\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $A_\alpha \subset A_\beta$ cuando $\alpha \leqslant \beta$. Valdivia dio una tercera solución a la conjetura de Grothendieck al probar la continuidad de una aplicación lineal $f\colon E \to F$ con gráfica sucesionalmente cerrada cuando E es un espacio ultrabornológico E y F es un quasi-(LB)-espacio. También demostró que un espacio localmente completo con $\mathcal{C}$-web es un espacio quasi-(LB) y que cada espacio quasi-(LB) tiene una $\mathcal{C}$-web estricta, lo que le permitió resolver afirmativamente el problema planteado por De Wilde de que los espacios localmente completos con $\mathcal{C}$-web tienen una $\mathcal{C}$-web estricta.

A. Grothendieck observó que el dual fuerte de un espacio metrizable tiene una sucesión fundamental de acotados, y que una intersección $V = \cap_n V_n$ numerable y decreciente de entornos de absolutamente convexos y cerrados de 0 que absorba los acotados es entorno de 0. Los espacios localmente convexos con estas dos propiedades los llamó espacios $(\mathcal{DF})$ en su artículo *Sur les espaces* (F) *et* $(\mathcal{DF})$, Summa Brasil. Math. **3** (1954), 57–123, donde planteó diez cuestiones. Valdivia contribuyó a resolver las cuatro siguientes:

- La existencia de un espacio $(\mathcal{DF})$ que no fuese ni bornológico ni tonelado.
- La existencia de espacios $(\mathcal{DF})$ con un sistema fundamental de acotados que cumplan la condición de convergencia de Mackey sin verificar la condición de convergencia estricta.
- Averiguar si el bidual E'' de un límite inductivo estricto E de una sucesión $(E_n)_n$ es el límite inductivo estricto de la sucesión de biduales $(E''_n)_n$.
- Y estudiar si el producto $E \times F$ de dos espacios de Fréchet totalmente reflexivos hereda o no la total reflexividad, que significa que todos los cocientes de $E \times F$ son reflexivos, definición motivada por el ejemplo de Grothendieck de un espacio de Fréchet con un cociente isomorfo a l^1. Grothendieck demostró que

un límite proyectivo reducido numerable de espacios de Banach reflexivos era totalmente reflexivo.

Valdivia tuvo aportaciones relevantes en estos cuatro problemas. El primero lo resolvió en [19] encontrando un espacio $(\mathcal{DF})$ que no es tonelado ni bornológico; además, en [34] construyó espacios $(\mathcal{DF})$ tonelados y no bornológicos.

Seth Warner resolvió la segunda cuestión en 1958 con un ejemplo, enriquecido por Valdivia en [40] al demostrar que en cualquier espacio de Banach E, cuyo dual débil* no sea separable, existe una topología τ compatible con la dualidad tal que (E, τ) es un espacio $(\mathcal{DF})$ que verifica la conjetura de Grothendieck sobre la convergencia de Mackey.

En [32] Valdivia resolvió en negativo la pregunta de Grothendieck sobre el bidual.

Averiguar que el producto de dos espacios de Fréchet totalmente reflexivos es totalmente reflexivo tuvo que esperar 35 años, hasta que Valdivia, en su artículo [56], consiguió probar el inverso del resultado antes indicado de Grothendieck. En dicho artículo demostró que un espacio de Fréchet es totalmente reflexivo si y sólo si es isomorfo a un subespacio cerrado de un producto numerable de espacios de Banach reflexivos, resultado con demostración de quince páginas que utiliza teoremas muy profundos de I. Singer. En [64] obtuvo la siguiente caracterización de la total reflexividad mediante sucesiones del dual: *Un espacio de Fréchet E es totalmente reflexivo si y sólo si*:

1. *Cada sucesión $\mu(E', E)$-nula es $\beta(E', E)$-nula y*
2. *cada sucesión $\sigma(E', E)$-nula es débilmente nula en E'_p para alguna seminorma continua p.*

También demostró que la propiedad 1 caracteriza a los espacios de Fréchet E que no contienen copia de l^1, resultado obtenido independientemente por P. Domański y L. Drewnowski en *Fréchet spaces of continuous vector-valued functions: complementability in dual of Fréchet spaces an injectivity*, Studia Math. **102** (1992), 257–267. En [68] obtuvo que un espacio de Fréchet E es reflexivo si y sólo si no contiene una copia de l^1 y verifica la condición de Grothendieck de que cada sucesión $\sigma(E', E)$-nula es $\sigma(E', E'')$-nula.

El teorema de acotación de Nikodym-Grothendieck tiene su origen en el artículo de O. M. Nikodym *Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, Monatsh. Math. u. Phys. **40** (1933), 418–426. Fue generalizado por Grothendieck en su monografía *Espaces Vectoriels Topologiques*, Soc. de Mat. de Sao Pãulo, 1955, estableciendo la acotación uniforme de una familia de medidas acotadas definidas en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ y que están acotadas en cada elemento de la σ-álgebra. Grothendieck introdujo en su monografía el espacio $l_0^\infty(I)$, que es el subespacio de $l^\infty(I)$ generado por las funciones características en los subconjuntos de I. Dieudonné observó que para la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de todas las partes de un conjunto I, el teorema de Nikodym-Grothendieck equivale a que $l_0^\infty(I)$ sea tonelado.

En [33] Valdivia demostró que el espacio $l_0^\infty(I, \mathcal{A})$ generado por las funciones características en los elementos de una σ-álgebra $\mathcal{A}$ definida en I con la norma supremo tiene una propiedad más fuerte que la tonelación, denominada *supratonelación*, pues si $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$ se recubre por una sucesión creciente $(E_n)_n$ de subespacios existe un p_0 tal que E_p es tonelado y denso en $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$, para cada $p \geqslant p_0$, de lo que dedujo un teorema de acotación para medidas acotadas, más fuerte que el de Nikodym-Grothendieck, pues el dual del espacio $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$ es el espacio de las medidas acotadas definidas en $\mathcal{A}$.

El resultado de Valdivia fue completado por J. Arias de Reyna en $l_0^\infty(\Sigma)$ *no es totalmente tonelado*, Rev. R. Acad. Ci. Exact. Fis. Natur. Madrid **79** (1985), 77–78. Arias de Reyna demostró que el espacio $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$ se puede recubrir por una sucesión de subespacios $(L_n)_n$ tales que ninguno de ellos es tonelado con clausura de codimensión finita en $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$. Baltasar Rodríguez-Salinas, en *On the class of the barrelled space* $l_0^\infty(\Sigma)$, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **74** (1980), 827–829, anunció que el espacio $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$ tenía una propiedad de tonelación más fuerte que la supratonelación.

Estos resultados sugirieron la obtención de propiedades de tonelación intermedias entre la supratonelación y la total tonelación. Las ideas de Valdivia en [33] llevaron a probar que $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$ tiene dichas propiedades de tonelación en J. C. Ferrando y M. López Pellicer, *Strong barrelledness properties in* $l_0^\infty(I,A)$ *and bounded finite additive measures*, Math. Ann. **287** (1990), 727–736, y siete años después se pudo probar que cualquier web de subespacios del espacio $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$ contiene un árbol de subespacios tonelados densos en M. López Pellicer, *Webs and Bounded Finitely Additive Measures*, J. Math. Anal. Appl. **210** (1997), 257–267, lo que implica una propiedad muy fuerte de acotación de medidas de la que se deduce un resultado de localización del rango de medidas vectoriales. De un resultado de Baltasar Rodríguez-Salinas en *On superbarrelled spaces. Closed graph theorems*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **89** (1995), 7–10, se deduce que la existencia de un árbol de tonelados densos es una propiedad maximal de tonelación en $l_0^\infty(I,\mathcal{A})$.

El artículo [97] contiene ideas recientes de Valdivia, que extienden a álgebras los resultados anteriores en una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Valdivia probó que si Ω es un intervalo compacto k-dimensional del espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{A}$ es el álgebra de subconjuntos de Ω que son Jordan medibles y $(\mathcal{A}_n)_n$ es una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathcal{A}$, cuya unión es $\mathcal{A}$, existe un entero positivo n_0 que tiene la siguiente propiedad: Si H es un conjunto de medidas aditivas complejas acotadas definidas en $\mathcal{A}$ tales que para cada A en $\mathcal{A}_{n_0}$, $\sup\{|\lambda(A)| : \lambda \in H\} < \infty$, entonces $\sup\{|\lambda|(\Omega) : \lambda \in H\} < \infty$, donde $|\lambda|$ es la variación de λ.

5. OTROS RESULTADOS DE VALDIVIA SOBRE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

En 1992, Valdivia había publicado alrededor de un centenar de artículos sobre espacios localmente convexos. John Horváth estimaba que contenían alrededor de un millar de teoremas, estimación que debería duplicarse en 2014. Algunos teoremas se han expuesto en los apartados anteriores. A continuación se comentan algunos de los restantes, seleccionados por su significación y por la sencillez de exposición.

5.1. Propiedades hereditarias, ejemplos y contraejemplos

El resultado de J. Dieudonné de que un subespacio de codimensión finita de un espacio tonelado es tonelado fue extendido por Valdivia en [11] a los subespacios F de codimensión numerable de un espacio tonelado E. Este resultado fue probado independientemente por Stephen Saxon y Mark Levin en *Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 91–96.

El libro de H. Jarchow, *Locally convex spaces*, Teubner, 1981, recoge la demostración de Valdivia, quien la extendió a sucesiones crecientes de conjuntos absolutamente convexos para extender resultados de M. De Wilde y C. Houet, que podemos leer en su artículo [11] y en el libro *Summer School on Topological Vector Spaces*, Lectures Notes in Mathematics **331**, Springer, 1973, cuyo editor fue L. Waelbroeck.

Valdivia complementó estos resultados en [44] al demostrar la heredabilidad de la tonelación en los subespacios de codimensión $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de un espacio tonelado cuyo dual de Mackey sea completo.

Un espacio localmente convexo E es bornológico si cada subconjunto absolutamente convexo bornívoro es entorno de 0, lo que equivale a que E sea un límite inductivo de espacios normados. La suma directa de una cantidad numerable de copias de $\mathbb{R}$ con la topología inducida por l_2 es un ejemplo de espacio bornológico que no es tonelado.

Los conocidos matemáticos L. Nachbin y T. Shirota, admitiendo la hipótesis del continuo, probaron la existencia de un espacio completamente regular W tal $C_c(W)$ es tonelado y no bornológico, lo que planteó el problema de demostrar la existencia de tonelados no bornológicos con independencia de la hipótesis del continuo.

Este problema fue resuelto por Y. Kōmura en *Some Examples on Linear Topological Spaces*, Math. Annalen **153** (1964), 150–162, y por Valdivia en [14], quien en un producto no numerable $E = \Pi_{i\in I} E_i$ de espacios tonelados no triviales consideró el subespacio G formado por los vectores $(x_i)_{i\in I}$ que tienen a lo sumo una cantidad numerable de componentes no nulas, y demostró que cada subespacio $F \subset E$ que contenga a G como un subespacio propio de codimensión finita es tonelado y no bornológico. En [16] Valdivia dio otra solución a este problema.

La construcción hecha por Valdivia en [27] de un espacio real compacto X tal que $E := C_c(X)$ es un hiperplano en su completación, le permitió resolver la conjetura de J. Dieudonné sobre la existencia de un espacio bornológico E cuya completación $\hat{E}$ no es un espacio bornológico.

En 1971 M. De Wilde y J. Schmets probaron que $C_c(X)$ es bornológico si y sólo si es ultrabornológico. Es obvio que un espacio ultrabornológico es tonelado y bornológico, pero el recíproco fue un problema abierto desde la primera edición del libro de Bourbaki *Eléments de Mathématique, Espaces vectoriels topologiques* hasta su resolución por Valdivia en [8], quien mejoró su resultado en [15] al demostrar la existencia de espacios tonelados bornológicos E que no son límites inductivos de espacios de Baire. En [24] probó que, además, E podía ser metrizable.

En [20], Valdivia probó que en el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de distribuciones de Schwartz existía una topología menos fina que la topología fuerte que es tonelada, bornológica, no ultrabornológica. En [29] obtuvo el resultado análogo en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dieudonné demostró que ser bornológico se hereda por codimensión finita, resultado complementado por Valdvia en [7] y [25] al demostrar que los subespacios de codimensión numerable de un espacio ultrabornológico son bornológicos y que un hiperplano de un espacio ultrabornológico puede no ser ultrabornológico.

La pregunta natural de averiguar bajo qué condiciones un espacio F de codimensión finita de un espacio de Mackey E es un espacio de Mackey fue contestada afirmativamente por M. Levin y S. Saxon cuando $(E, \sigma(E', E))$ es sucesionalmente completo y F es cerrado en su artículo *A note on the inheritance of properties of locally convex spaces by subspaces of countable codimension*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 97–102. Valdivia obtuvo en [18] un resultado análogo cuando F es separable en vez de cerrado y, en [23], dio tres condiciones que cada una implica que los subespacios de codimensión finita de un espacio de Mackey son espacios de Mackey.

Un espacio de Fréchet E es un espacio de Montel (respectivamente de Schwartz) si es separable y cada sucesión $\sigma(E', E)$-nula es $\beta(E', E)$-nula (respectivamente, converge uniformemente a 0 en algún entorno de cero en E). El teorema de Josefson-Nissenzweig llevó a Jarchow a preguntar si la separabilidad era superflua. El caso de ser espacio de Schwartz recibió dos respuestas afirmativas: Una de J. Bonet en *A question of Valdivia on quasi-normable Fréchet spaces*, Canad. Math. Bull. **34** (1991), 301–304, y otra de M. Lindström y Th. Schlumprecht en *A Josefson-Nissenzweig theorem for Fréchet spaces*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 55–58. En [67], J. Bonet, M. Lindström y Valdivia obtuvieron la solución positiva de las dos cuestiones de Jarchow. En [35], Valdivia demostró que cada espacio de Fréchet separable es isomorfo a un cociente de un espacio de Fréchet-Montel.

En [85] Valdivia probó que en un espacio de Fréchet E que no sea casi-normable existe un subespacio cerrado separable L y un acotado numerable $B \subset E/L$ tal que B no es imagen por la aplicación cociente de un acotado de $A \subset E$. Uno de los ingredientes para demostrar este resultado fue el teorema de J. Bonet en su artículo *A question of Valdivia on quasinormable Fréchet spaces*, citado en el párrafo anterior, de que un espacio de Fréchet es casi-normable si y sólo si cada sucesión en $E'(\beta(E', E))$ que converge a 0 es convergente en el sentido de Mackey.

Con estos resultados Valdivia caracterizó, en el referido artículo [85], los espacios de Fréchet E que tienen la propiedad lifting para los acotados. Valdivia obtuvo que un espacio de Fréchet E tiene la propiedad lifting para los acotados si y sólo si E es un espacio de Banach, o un espacio de Schwartz o el producto de un espacio de Banach por ω. Además en la sección 3 de ese artículo da condiciones de total reflexividad.

5.2. Espacios de sucesiones. Representación de espacios

Valdivia escribió alrededor de veinte artículos con resultados sobre espacios de sucesiones y representación de espacios, recogidos en parte en su monografía *Topics in locally convex spaces*, North-Holland, 1982. Utilizó el espacio s de las sucesiones $a := (a_n)_n$ de decrecimiento rápido provisto con las seminormas $(p_r)_r$ definidas por $p_r(a) := \text{máx}_m\, r^m\, |a_m|$ para obtener, en [31], los siguientes isomorfismos entre $s^{(\mathbb{N})}$

y $s^{\mathbb{N}}$ con los espacios de distribuciones $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ y $\mathcal{E}'(\Omega)$:

$$\mathcal{D}(\Omega) \simeq s^{(\mathbb{N})}, \quad \mathcal{D}'(\Omega) \simeq (s')^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{E}(\Omega) \simeq s^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{E}'(\Omega) \simeq (s')^{(\mathbb{N})}.$$

En [35], por ejemplo, demostró que el espacio escalonado $(\lambda, \tau(\lambda, \lambda^{\times}))$ es un espacio de Schwartz si y sólo si λ no tiene un cociente isomorfo a l^1.

Es bien conocido que la metrizabilidad de los subconjuntos compactos de un espacio topológico queda asegurada cuando el espacio admite una topología menos fina metrizable, lo que sucede en muchos espacios topológicos X utilizados en aplicaciones. En este caso, Valdivia demostró en [37] que el espacio $\mathcal{K}(X)$ de las funciones continuas reales con soporte compacto definido en un espacio X, que sea la unión de una sucesión creciente de subconjuntos compactos metrizables $(K_n)_n$ tales que $K_{n+1} \backslash K_n \neq \emptyset$ para cada n, y provisto con la topología límite inductivo, es topológicamente isomorfo a $C([0,1])^{(\mathbb{N})}$, por lo que su dual, que es el espacio $\mathcal{M}(X)$ de las medias de Radon en X, provisto de la topología fuerte, es isomorfo a $C([0,1])^{\mathbb{N}}$, con lo que identificó $\mathcal{M}(X)$ con un espacio de sucesiones de funciones.

En [87] Valdivia consideró un espacio topológico normal X, un subespacio cerrado A y el operador de $C^*(X)$ en $C^*(A)$, definido por la restricción, donde $C^*(X)$ es el conjunto de funciones continuas, reales y acotadas con la norma supremo. Valdivia obtuvo condiciones para la existencia de un operador continuo definido por extensión (lo que equivale a que el operador restricción tenga una sección que admita operador inverso continuo). En ese artículo Valdivia incluye pruebas sencillas de los teoremas de Borsuk y Milutin que aplica en la representación de diferentes espacios de funciones y de medidas.

5.3. Reflexividad, completación y propiedades tipo Baire

R. C. James demostró que un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si cada $f \in E'$ alcanza su norma en algún elemento de la bola unidad. En [13] descubrió que si un espacio de Banach real E es casi-completo y no semireflexivo, existen un subconjunto A, absolutamente convexo y cerrado, y un subconjunto $B \subset E'$, convexo y $\sigma(E', E)$-cerrado, tales que ningún elemento $u \in B$ alcanza el ínfimo en A.

En [28] demostró que, en un espacio localmente convexo E casi-completo, cada subconjunto A en el que toda función real definida en E y $\sigma(E, E')$-continua está acotada en A es relativamente $\sigma(E, E')$-compacto, de lo que dedujo que un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si cada función real definida en E y $\sigma(E, E')$-continua está acotada en la bola unidad de E.

En 1950, James demostró que existen espacios de Banach que tienen codimensión finita en su bidual y, como se indicó antes, los llamó casi-reflexivos. En [39], Valdivia demostró que la suma directa E de una sucesión de espacios casi-reflexivos tiene la propiedad de Krein-Smulian y en [46] probó que un espacio de Banach no casi-reflexivo tiene un subespacio F tal que F y E/F no son casi-reflexivos.

Si E es el producto numerable de una sucesión de espacios de Banach casi-reflexivos (E_n), entonces la codimensión de E en su bidual E'' es finita o E''/E es isomorfo al producto ω de una sucesión de copias del cuerpo de escalares. Esta propiedad sugirió a Valdivia esta definición: *Un espacio de Fréchet E es casi-reflexivo* *si la codimensión de E en E'' es finita o si E''/E es isomorfo a ω.* Valdivia, recordando la definición de totalmente reflexivo, definió que un espacio de Fréchet E es *totalmente casi-reflexivo* si cualquier cociente de E es casi-reflexivo. En el artículo [88] obtuvo que un espacio de Fréchet E es totalmente casi-reflexivo si y sólo si es isomorfo a un subespacio cerrado de un producto numerable de espacios de Banach casi-reflexivos.

Recientemente demostró, en [95], que para una suma directa numerable E de una sucesión $(E_n)_n$ de espacios de Banach de dimensión infinita, las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Cada subespacio cerrado Y de E es un espacio LB con la topología de Mackey $\mu(Y, Y')$.
2. Cada cociente Hausdorff de $E'(\mu(E', E))$ es localmente completo.
3. Cada E_n es casi-reflexivo.

Además probó que $E'(\mu(E', E))$ tiene la propiedad de Kreĭn-Šmulian si y sólo si cada E_n es reflexivo.

El libro de N. Bourbaki, *Eléments de mathematique, Espaces vectoriels topologiques*, Mason, 1981, recoge varios resultados de Valdivia sobre reflexividad.

G. Köthe descubrió que el límite inductivo estricto E de una sucesión $(E_n)_n$ de espacios localmente convexos completos es completo, resultado que implica la completitud de muchos espacios usuales en Análisis Funcional, como el espacio test de distribuciones. El análisis de la laboriosa prueba de Köthe motivó a Valdivia a dar una demostración sencilla en [24] y un resultado más fuerte que el de Köthe, pues demostró que si la topología de E es más fina que el límite inductivo de la sucesión $((E_n, \sigma(E_n, E_n'))_n$, entonces E es completo.

J. Arias de Reyna, en *Dense hyperplanes of first category*, Math. Ann. **249** (1980), 111–114, resolvió un problema de Klee al demostrar que cada espacio de Banach separable de dimensión infinita contiene un hiperplano denso de primera categoría. En [42], Valdivia extendió el resultado de Arias de Reyna a espacios de Baire. Arias de Reyna, en *Normed barely Baire spaces*, Israel J. Math. **42** (1982), 33–36, obtuvo que si el cardinal de I es mayor $\aleph_0$ se deduce que en $l^2(I)$ existen subespacios de Baire cuyo producto no es Baire, propiedad que Valdivia extendió en [45] a $c_0(I)$ y a cualquier $l^p(I)$, con $0 < p < \infty$.

En [91] Valdivia utilizó condiciones tipo Baire para probar la existencia de funciones holomorfas sin extensión holomorfa fuera de un dominio regular $\Omega \neq \mathbb{C}$. Valdivia denotó por $\mathcal{G}_b(\Omega)$ al espacio de las funciones holomorfas en Ω con derivadas acotadas en Ω y que se extienden por continuidad a $\overline{\Omega}$. Dotó a $\mathcal{G}_b(\Omega)$ de la topología definida por las seminormas

$$q_m(f) := \sup \left\{ \textstyle\sum_{j=0}^{m} \left|f^j(z)\right| : z \in \Omega \right\}$$

y demostró que $\mathcal{G}_b(\Omega)$ tiene un subespacio denso $\mathcal{F}$ que es casi-Baire, de lo que dedujo que cada $f \in \mathcal{F}\backslash\{0\}$ no admite extensión holomofa fuera de Ω. Con idéntica técnica y otras seminormas obtuvo un resultado similar prescindiendo de la acotación.

Dado un subconjunto acotado A de un espacio de Banach X se representa por A^- a la $\sigma(X^{**}, X)$-clausura de A en X^{**}. En [86] Valdivia estudió la estructura de A^- cuando cuando X^{**}/X es separable. El conjunto A se dice que es casi-débilmente compacto de orden n si existe un subespacio n-dimensional $E \subset X^{**}$, con $X \cap E = \{0\}$ tal que $A^- \subset X + E$. Valdivia probó que si A es casi-débilmente compacto de orden n lo mismo le sucede a su envoltura convexa cerrada, resultado que, en el caso separable, había sido obtenido por W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson y A. Pełczyński en *Factoring weakly compact operators*, J. Functional Analysis **17** (1974), 311–327. Además, Valdivia construyó en el artículo [86] un espacio de Banach Z con base shrinking tal que $Z^{**} = Z \oplus X$, donde X es $\sigma(Z^{**}, Z)$-cerrado e isomorfo a l^1, lo que le facilitó dar una aproximación al teorema de James-Lindenstrauss de que para cada espacio de Banach separable X existe un espacio de Banach Y tal que Y^{**}/Y es isomorfo a X.

5.4. Compacidad débil

Los teoremas tipo Eberlein-Smulian dan condiciones que implican la equivalencia entre compacidad, compacidad numerable y compacidad secuencial para la topología débil. En [12] Valdivia obtuvo condiciones para que α-compacidad débil implique compacidad débil y dedujo que en un espacio bornológico la $\sigma(E', E)$-compacidad numerable equivale a la $\sigma(E', E)$-compacidad.

Un espacio topológico se dice que es *Eberlein* (*Radon-Nikodym*, *Gul'ko*, *Talagrand*) *compacto* si y sólo si es homeomorfo a un compacto débil de un espacio de Banach (a un débil* compacto del dual de un espacio de Banach Asplund, a un débil* compacto del dual de un espacio de Banach de generación débilmente compacta, a un débil* compacto del dual de un espacio de Banach débilmente K-analítico, respectivamente).

Davis, Figiel, Johnson y Pełczynski, en el artículo *Factoring weakly compact operators* recién citado, demostraron que cada Eberlein compacto es Radon-Nikodym compacto. S. P. Gul'ko, en *The structure of spaces of continuous functions and their hereditary paracompactness*, Uspekhi Mat. Nauk **34** (1979), 33–40, y M. Talagrand, en *Espaces de Banach faiblement K-analytiques*, Ann. of Math. **110** (1979), 407–438, probaron que

$$\text{Eberlein} \Longrightarrow \text{Talagrand} \Longrightarrow \text{Gul'ko} \Longrightarrow \text{Corson}.$$

I. Namioka, en *Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability*, Mathematika **34** (1987), 258–281, demostró que ser compacto Radon-Nikodym equivale a ser fragmentable por una métrica semicontinua inferiormente. Namioka propuso preguntas sobre relaciones entre estos tipos de compactos. E. A. Reznichenko encontró un Talagrand compacto que no es Radon-Nykodym compacto (P. S. Kenderov en su manuscrito *A Talagrand compact space which is not a Radon-Nikodym space* (*An example of E. A. Reznichenko*)). En [62], Orihuela, Schachermayer y Valdivia resolvieron las conjeturas de Namioka obteniendo un compacto de Talagrand que no es Eberlein ni Radon-Nikodym compacto y demostrando que cada compacto Radon-Nikodym y Corson es Eberlein compacto.

6. Algunos resultados de Valdivia sobre espacios de Banach

En las secciones anteriores se han comentado algunos resultados sobre espacios de Banach, pues son un caso particular de los espacios localmente convexos. Las tres subsecciones siguientes se dedican a resultados de Valdivia relacionados con resoluciones proyectivas de la identidad, sucesiones básicas y espacios uniformemente rotundos, que muestran que Valdivia combinaba el dominio de muchas técnicas de Análisis Funcional con una excelente intuición geométrica.

6.1. Resoluciones proyectivas de la identidad y compactos de Valdivia

Una resolución proyectiva de la identidad en un espacio de Banach E es una familia $\{P_\alpha : \omega_0 \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$ de proyecciones lineales continuas definidas en E, donde μ es el primer ordinal tal que $|\mu| = \operatorname{dens}(E)$ y las proyecciones satisfacen las siguientes condiciones: 1. $\|P_\alpha\| = 1$; 2. $\operatorname{dens} P_\alpha(E) \leqslant |\alpha|$; 3. $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\beta$ si $\omega_0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \mu$; 4. $P_\mu = I_X$; y 5. para cada ordinal límite α tal que $\omega_0 \leqslant \alpha \leqslant \mu$ sucede que $\cup\{P_\beta(E) : \omega_0 \leqslant \beta < \alpha\}$ es densa en $P_\alpha(E)$.

Las resoluciones de la identidad para espacios de Banach de generación débilmente compacta fueron obtenidos por D. Amir y J. Lindenstrauss en *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 35–46, y para espacios de Banach débilmente numerablemente determinados las obtuvo L. Vašák en *On one generalization of weakly compactly generated Banach spaces*, Studia Math. **70** (1981), no. 1, 11–19. En [57] Valdivia obtuvo resultados sobre los espacios considerados por Vašák, que fueron el punto de partida para obtener en [59] resoluciones de la identidad en espacios metrizables débilmente numerablemente determinados.

Las resoluciones proyectivas de la identidad facilitan el estudio de los espacios de Banach, si bien su construcción suele tener dificultades, que disminuyen con la utilización de los *pares conjugados de espacios topológicos*, introducidos por S. P. Gul'ko en *The structure of spaces of continuous functions and their hereditary paracompactness*, Uspekhi Mat. Nauk **34** (1979), no. 6(210), 33–40. Presentan el inconveniente de que existen espacios de Banach con resolución proyectiva de la identidad que no admiten par conjugado.

En [58], J. Orihuela y Valdivia simplificaron la resolución de resoluciones proyectivas de la identidad con su *método del generador proyectivo*, obtenido sobre métodos desarrollados por Valdivia en [52], [55], [59] y [60] para construir proyecciones. Este método les permitió demostrar que un espacio de Banach E es Asplund si y sólo si E^* tiene un generador proyectivo, así como simplificar el resultado de V. M. Valov de que cada espacio de Banach numerablemente determinado tiene resolución proyectiva de la identidad, y el resultado de M. Fabian y G. Godefroy de que cada espacio de Banach dual con la propiedad de Radon-Nikodym tiene resolución proyectiva de la identidad.

Dado un subconjunto compacto K de $[0,1]^I$, se representa por $K(I)$ el conjunto de los elementos $(x_i)_{i\in I}$ de K tales que $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ es numerable. Sea $\mathcal{A}$ la familia de los espacios topológicos tales que cada $A \in \mathcal{A}$ es homeomorfo a un subconjunto compacto K_A de $[0,1]^{I_A}$ tal que $K_A(I_A)$ es denso en K_A. Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman *compactos de Valdivia* y contienen a los compactos de H. H. Corson. En [60], Valdivia probó la existencia de una resolución proyectiva de la identidad en $C(K)$ cuando K es un compacto de Valdivia, pues demostró que, si μ es el primer ordinal tal que $|\mu| = \operatorname{dens}(K)$, existe en K una familia $\{K_\alpha : \omega_0 \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$ de subconjuntos compactos de Valdivia tales que para cada α existe una extensión lineal continua $T_\alpha\colon C(K_\alpha) \to C(K)$ y sucede que las proyecciones P_α definidas por $P_\alpha(f) = T_\alpha(f|_{K_\alpha})$ definen una resolución proyectiva de la identidad.

Uno de los últimos resultados de Valdivia sobre compacidad está en [93], artículo conjunto con I. Monterde y V. Montesinos Santalucía, donde se mejora un resultado de J. Howard en *Mackey Compactness in Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973), 108–110, al probar que el teorema de Eberlein tiene validez para la topología Mackey* del dual E^* de un espacio de Banach E.

6.2. Bases de Markushevich y sucesiones básicas

En [51] Valdivia probó que si F es un subespacio cerrado de un espacio de Banach E y $\tilde{F}$ es la $\sigma(E^{**}, E')$-clausura de F en el bidual E^{**}, se tiene que $E + \tilde{F}$ es un subespacio cerrado del bidual E^{**}. Este lema, una construcción que realizó en [54] utilizando resultados de Bessaga, Johnson, Pelczyński y Rosenthal sobre sucesiones básicas, y resultados de James, le permitieron probar en [53] que, dado un espacio de Banach separable E, existe un espacio de Banach F tal que F y su bidual tienen base shrinking, siendo E isométrico a F^{**}/F.

Un sistema biortogonal $(x_i, u_i)_{i\in I}$ en un espacio de Banach E es una base de Markushevich si los conjuntos $\{x_i : i \in I\}$ y $\{u_i : i \in I\}$ son totales en E y en $(E^*, \sigma(E^*, E))$, respectivamente. Una base de Markushevich está asociada a una resolución proyectiva de la identidad $\{P_\alpha : \omega_0 \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$ si existe una partición $\{I_{\omega_0}\} \cup \{I_{\alpha+1} : \omega_0 \leqslant \alpha < \mu\}$ del conjunto de índices I tal que $(x_i, u_i|_{P_{\omega_0}(X)})_{i\in I}$ es una base de Markushevich en $P_{\omega_0}(E)$ y, para cada $\omega_0 \leqslant \alpha < \mu$, $(x_i, u_i|_{(P_{\alpha+1}-P_\alpha)(X)})_{i\in I}$ es una base de Markushevich en $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(E)$.

En [61] Valdivia construyó bases de Markushevich asociadas a resoluciones proyectivas de la identidad que extienden los resultados obtenidos por A. Plichko en *On projective resolutions of the identity operator and Markushevich bases*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **263** (1982), 543–546. En [65] obtuvo una base de Markushevich asociada a una resolución proyectiva de la identidad en un subespacio de $C(K)$, que le permitió probar que si la bola unidad $K = (B(E^*), \sigma(E^*, E))$ del dual de un espacio de Banach E es un compacto de Corson entonces E es complementado en $C(K)$.

En [66] demostró que, si un espacio de Banach E tiene una base shrinking y bidual separable, entonces para cada subespacio cerrado Z del bidual E^{**} que contenga a E existe una base shrinking $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E y una partición $\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2\}$ de $\mathbb{N}$ tal que la envoltura lineal cerrada de $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ es un espacio reflexivo y $E + Y = Z$, siendo Y la $\sigma(X^{**}, X^*)$-clausura de $\{x_n : n \in \mathbb{N}_2\}$. En los artículos [70] y [79] se ve la comentada intuición geométrica de Valdivia cuando trabajaba en Análisis Funcional; por limitación de espacio sólo se recoge su resultado de que un espacio de Banach E que sea Asplund admite un sistema biortogonal $(x_i, u_i)_{i\in I}$ tal que la envoltura lineal cerrada de $\{x_i : i \in I\}$ es un espacio de Banach de generación débilmente compacta y $\{u_i : i \in I\}$ es total en $(E^*, \sigma(E^*, E))$.

En [81] Valdivia unificó y refinó propiedades obtenidas por W. B. Johnson y H. P. Rosenthal en *On ω^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces*, Studia Math. **43** (1972), 77–92, que, junto a resultados de J. Hagler y W. B. Johnson en *On Banach spaces whose dual ball are not weak*-sequentially compact*, Israel J. Math. **28** (1977), 325–330, le permitieron demostrar que si un espacio de Banach X y su dual X^* no contienen una copia de l^1, entonces X tiene un cociente isomorfo a c_0.

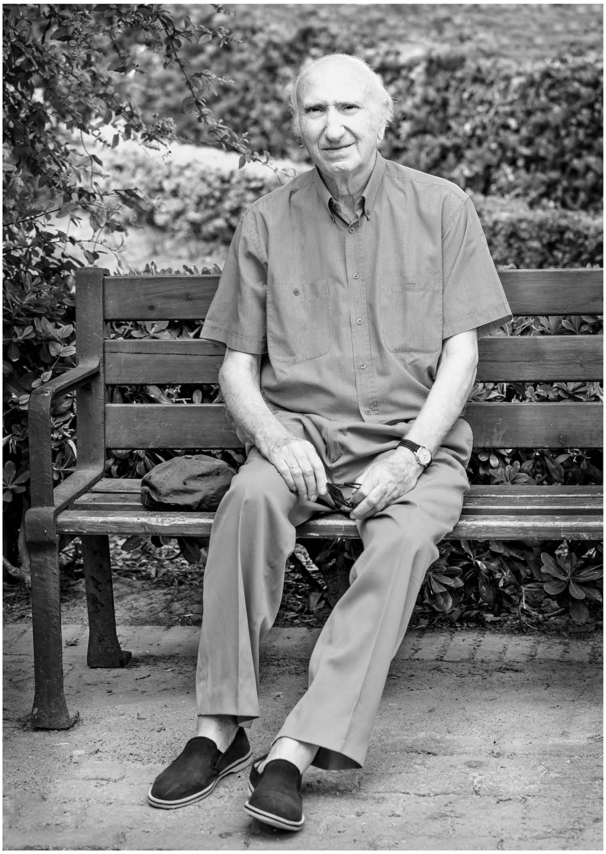
6.3. Espacios de Banach uniformemente rotundos

Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es *uniformemente rotundo* (*débilmente uniformemente rotundo*) si dadas dos sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ de la esfera unidad tales que $(\|x_n + y_n\|)_n$ converge a 2 se tiene que la sucesión $(x_n - y_n)_n$ converge (converge débilmente) a 0. El espacio $(E, \|\cdot\|)$ se dice que es *localmente uniformemente rotundo* (*localmente débilmente uniformemente rotundo*) si para cada x de la esfera unidad y cada sucesión $(y_n)_n$ de la esfera unidad tal que $(\|x + y_n\|)_n$ converge a 2 se tiene que la sucesión $(x - y_n)_n$ converge (converge débilmente) a 0. Es bien conocido que un espacio de Banach E admite un renormamiento uniformemente rotundo si y sólo si es super-reflexivo, es decir cualquier espacio de Banach no reflexivo no es finitamente representable en E.

R. Deville, G. Godefroy y V. Zizler, en *Smoothness and renorming in Banach spaces*, John Wiley, 1993, probaron que un espacio de Banach localmente débilmente uniformemente rotundo cuya norma sea Fréchet diferenciable admite un renormamiento localmente uniformemente rotundo. R. G. Haydon obtuvo esta conclusión en el espacio $C(T)$, siendo T un árbol, en *Trees in renorming theory*, Proc. London Math. Soc. **78** (1999), 541–584.

Los dos resultados anteriores son casos particulares del siguiente resultado general obtenido por A. Moltó, J. Orihuela, S. L. Troyanski y Valdivia en [82]: *Cada espacio de Banach localmente débilmente uniformemente rotundo admite un renormamiento localmente uniformemente rotundo.* La demostración utiliza una elegante técnica de cubrimientos numerables por conjuntos de diámetro pequeño.

A. Moltó, J. Orihuela y S. L. Troyanski, en *Locally uniformly rotund renorming and fragmentability*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), 619–640, probaron, con técnicas de martingalas, que un espacio de Banach con una norma que sea rotunda y Kadets es renormable con una norma localmente uniformemente rotunda. Esta prueba fue simplificada, sin utilizar martingalas, por M. Raja en *Locally uniformly rotund norms*, Mathematika **46** (1999), 343–358. R. Haydon, en el citado artículo *Trees in renorming theory*, probó que un espacio de Banach con una norma Kadets no es necesariamente renormable con una norma rotunda. Sin embargo, A. Moltó, J. Orihuela, S. L. Troyanski y Valdivia, en [83], utilizando la construcción de M. Raja, probaron que un espacio de Banach con norma Kadets y con la propiedad de Kreĭn-Mil'man es renormable con una norma localmente uniformemente rotunda. También



Manuel Valdivia en 2012

generalizaron el resultado de Raja de que el dual de un espacio de Banach con norma weak* Kadets es renormable con una norma dual localmente uniformemente rotunda.

Un punto x_0 de un subconjunto A de un espacio normado X se dice que es un punto ϵ-fuertemente extremo de A si existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in A$ y $\|x_0 - (x+y)/2\| < \delta$ implica que $\|x - y\| < \epsilon$. Un espacio normado X se dice que es MLUR si cada punto de la esfera unidad $S(X)$ es un punto ϵ-fuertemente extremo de la bola unidad $B(X)$ para cada $\epsilon > 0$.

En [84], A. Moltó, J. Orihuela, S. L. Troyanski y Valdivia probaron que un espacio normado X admite un renormamiento MLUR si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ se puede descomponer X en

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{n,\epsilon}$$

tal que cada punto de $X_{n,\epsilon}$ es un punto ϵ-fuertemente extremo de la envoltura convexa de $X_{n,\epsilon}$. De este teorema de descomposición dedujeron un método topológico lineal para obtener renormamientos LUR y MLUR. Como aplicación probaron que el espacio de James J tiene un renormamiento cuyo bidual es MLUR, lo que mejoró resultados de P. Hájek en *Dual renormings of Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **37** (1996), 241–253.

En [89], A. Moltó, J. Orihuela, S. L. Troyanski y Valdivia obtuvieron el siguiente teorema de renormamiento en el dual de un espacio de Banach E: *E^* admite una norma dual equivalente localmente uniformemente rotunda si y sólo si existe una sucesión de aplicaciones $I_n\colon E^* \to E^*$, $n \in \mathbb{N}$, que verifican la condición piecewise weak* slicely constant* (condición que omitimos detallar) *tal que cada $x^* \in E^*$ pertenece a la clausura del conjunto $\{I_n(x^*) : n \in \mathbb{N}\}$.* La sucesión $(I_n)_n$ se construye explícitamente cuando el espacio de Banach tiene una base de Markushevich fuerte. También demostraron en ese artículo que ideas de H. Lebesgue actualizadas por W. Rudin ayudan a probar la existencia de una norma equivalente localmente uniformemente rotunda cuando existe una norma débil localmente uniformemente rotunda.

7. Holomorfía infinita, espacios de polinomios y formas multilineales

El primer contacto de Valdivia con la holomorfía infinita se produjo en febrero de 1980, durante una estancia en el University College de Dublin con Seán Dineen, considerado junto a Richard Aron, profesor en Kent, dos de los mejores especialistas en holomorfía infinita. Valdivia obtuvo en [38] un resultado de interpolación del que dedujo el siguiente teorema, ya obtenido por otro método por S. Dineen en *The Cartan-Thullen theorem for Banach spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **24** (1970), 667–676: *Si E es un espacio normado separable y Ω es un subconjunto abierto de E que sea $H_b(\Omega)$-convexo, entonces Ω es un dominio de existencia para una función de $H_b(\Omega)$*, que es el espacio de las funciones holomorfas en Ω con valores complejos y acotadas.

En [41], artículo conjunto de Valdivia con R. Aron y C. Hervés, probaron que *cada polinomio continuo y n-homogéneo definido en un espacio de Banach que sea débilmente continuo en la bola unidad es débilmente uniformemente continuo en la bola unidad.* Este resultado lo aplicaron en la obtención de relaciones entre espacios de polinomios, así como entre espacios de funciones holomorfas en un espacio de Banach.

Si $(U_n)_n$ es un sistema fundamental decreciente de entornos abiertos de un compacto K de un espacio complejo de Fréchet E y si $\mathcal{H}^\infty(U_n)$ es el espacio de Banach de las funciones holomorfas acotadas en U_n, K. D. Bierstedt y R. Meise probaron en *Nuclearity and the Schwartz property in the theory of holomorphic functions on metrizable locally convex spaces*, North-Holland Math. Studies **12** (1977, editor M. Matos), 93–129, que el espacio de los gérmenes holomorfos en K es compacto si y sólo si E es un espacio de Fréchet-Schwartz. En [73], J. Mujica y Valdivia probaron que si K es un subconjunto compacto del espacio de Banach E de Tsirelson, se tiene que $\mathcal{H}(K)$ es débilmente compacto, demostrando además esta propiedad de compacidad en el espacio $\mathcal{H}_b(U)$, cuando U un subconjunto abierto de E.

E. Borel, en su artículo *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Ec. Norm. Sup. **XII** (1895), 9–55, demostró que para cada sucesión de números complejos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ existe una función f definida en $\mathbb{R}$ de clase infinito tal que $f^{(n)}(0) = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. En [69] J. Schmets y Valdivia extendieron este resultado de E. Borel al demostrar que si en un espacio real normado E existe un polinomio P con dominio E tal que $P(0) = 0$ e $\text{ínf}\{P(x) : \|x\| = 1\} > 0$, entonces para cada dirección ϵ y cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números reales existe una función f de clase C^∞ en E que es real analítica en $E\backslash\{0\}$ y tal que $D^n_\epsilon f(0) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. En [71] Valdivia probó que dado un espacio de Hilbert E, un número real A_0 y una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcionales n-lineales simétricos y continuos definidos en E^n, existe una función f definida de clase C^∞ en E tal que $f^{(m)}$ está acotada en los subconjuntos acotados de E, $f^{(m)}(0) = A_m$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$, y f es analítica en $E\backslash\{0\}$. En [77], Schmets y Valdivia extendieron este resultado a espacios de Banach reales E.

Para el espacio de Banach $\mathcal{P}_{w^*}(^mE^*)$, que es el subespacio vectorial de $\mathcal{P}(^mE^*)$ cuyos elementos son continuos en $B(E^*_\sigma)$, Valdivia probó en [74] estos tres teoremas: 1) Si E es un espacio de Asplund entonces $\mathcal{P}_{w^*}(^mE^*)$ es también un espacio de Asplund que es un subespacio cerrado de $\mathcal{P}(^mE^*)$ provisto con la topología compacta-abierta. 2) Si E es un espacio de Asplund tal que E^* tiene la propiedad de aproximación entonces $\mathcal{P}_{w^*}(^mE^*) = \mathcal{P}(^mE^*)$. 3) Si E es un espacio de Asplund de generación débilmente compacta entonces el espacio de Asplund $\mathcal{P}_{w^*}(^mE^*)$ también es de generación débilmente compacta. En [75], Valdivia obtuvo resultados similares a los del artículo [74] en el marco de las funciones holomorfas.

El estudio de la reflexividad de los espacios de polinomios y formas multilineales atrajo la atención de muchos investigadores en las dos últimas décadas del siglo XX. R. Alencar, R. Aron y S. Dineen, en *A reflexive space of holomorphic functions in infinity many variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 407–411, estudiaron su relación con la continuidad débil sucesional. R. Alencar, en *On reflexivity and basis for* $\mathcal{P}(^{\Updownarrow}\mathcal{E})$, Proc. Roy. Irish Acad. **85A** (1985), 135–138, investigó su dependencia de la existencia de bases. El estudio del bidual de $\mathcal{P}(^mE)$ fue abordado por R. Aron y S. Dineen en *Q-reflexive Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 1009–1025. En [80], Valdivia investigó la reflexividad de los espacios $\mathcal{P}(^mE)$, refinando los métodos que elaboró en su artículo [74], y probó que la propiedad de aproximación puede ser eliminada en resultados anteriores de otros autores sobre reflexividad.

8. Desarrollos asintóticos y analiticidad real

8.1. Desarrollos asintóticos

J. F. Ritt, en *On the derivatives of a function at a point*, Annals of Math. **18** (1916), 18–23, demostró que dada una sucesión $(c_n)_n$ de números complejos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ existe una función f analítica en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y con desarrollo asintótico en 0 igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}.$$

Durante diez años estuvo abierto el problema de averiguar en qué subconjuntos D de la frontera $\partial\Omega$ de un dominio no vacío Ω de $\mathbb{C}$ es posible fijar arbitrariamente el desarrollo asintótico de una función holomorfa. T. Carleman, en *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthiers-Villars, 1926, demostró que este problema tiene solución positiva cuando D es finito y Ω es convexo y acotado, o bien cuando $D = \{0\}$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \backslash \{(x, 0) : x \leqslant 0\}$. Otra solución la obtuvo Philip Franklin en *Functions of a complex variable with assigned derivatives at an infinite number of points, and an analogue of Mittag-Leffler theorem*, Acta Math. **47** (1926), 371–385.

En la comunicación *Una propiedad de interpolación en espacios de funciones holomorfas con desarrollos asintóticos* (Homenaje a N. Hayek, Publ. Univ. de la Laguna, 1990, 351–360), Valdivia probó que la solución es afirmativa si D es un conjunto finito tal que la solución sea afirmativa en cada punto de D separadamente. En [63] completó este resultado al demostrar que la solución es positiva cuando $D = \{z_0\}$ y la componente conexa de z_0 en la frontera $\partial\Omega$ tiene más de un punto.

Este resultado de Valdivia es un caso particular de un teorema que obtuvo en su artículo [72] con J. Schmets, donde se prueba que si $D \subset \partial\Omega$ no tiene ningún punto de acumulación y si la componente conexa en $\partial\Omega$ de cada punto de D contiene más de un punto, entonces la respuesta al problema de interpolación es afirmativa.

8.2. Extensión de los resultados de Mityagin

Si M es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $\{\varphi_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ es un conjunto de funciones complejas definidas en M, se dice que $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ es un *jet* en M. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, con $|\alpha| \leqslant m$, se escribe

$$R_\alpha^m(x; y) = \varphi_\alpha(x) - \sum \left\{ \frac{f_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!}(x-y)^\beta : |\beta| \leqslant m - |\alpha| \right\}$$

para cada x, $y \in M$. Si U es un subconjunto acotado en M se dice que $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ es un jet de Withney en U si, dado un $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, existe un $\delta > 0$ tal que, para cada x, $y \in U$ con $|x - y| < \delta$, y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leqslant m$, se tiene que

$$|R_\alpha^m(x; y)| \leqslant \epsilon \, |x - y|^{m - |\alpha|} .$$

Hassler Whitney, en *Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–69, caracterizó los jets $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ en un subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^n$ generados por una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, lo que significa que

$$\varphi_\alpha = f^\alpha|_F, \quad \text{para cada } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Demostró, además, que la función f se puede suponer real analítica en $\mathbb{R}^n \backslash F$ y holomorfa en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ que contiene a $\mathbb{R}^n \backslash F$. Whitney dotó al espacio $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ de los jets de Whitney en F de estructura de espacio de Fréchet y planteó la cuestión de averiguar cuando la aplicación $R\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathcal{F})$, definida por la restricción, admite inversa la derecha que sea lineal y continua, lo que equivale a la existencia de una extensión lineal y continua de F a $\mathbb{R}^n$ en el marco de las funciones de clase infinito.

Mityagin, en *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Uspehi Mat. Nauk **16** (1961), 63–132, probó que no existe dicha extensión de $\{0\}$ a $\mathbb{R}$, en tanto que sí existe de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. La investigación sobre la existencia de subespacios cerrados F de $\mathbb{R}^n$ para los que existe (o no existe) extensión lineal continua se ha ampliado del marco C^∞ al correspondiente a los jets y funciones ultradiferenciables en el sentido de Roumieu, definición debida a R. W. Braun, R. Meise y B. A. Taylor en *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Result. Math. **17** (1990), 206–237. Para los correspondientes espacios de funciones en $\mathbb{R}^n$ o de jets en F, que se representan por $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{E}_*(\mathcal{F})$, respectivamente, Valdivia fue el primero en construir una extensión lineal continua de $\mathcal{E}_*(\mathcal{F})$ en $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$ real analítica en $\mathbb{R}^n \backslash F$. En sus artículos [76] y [78] demostró que, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y el jet $\varphi \in \mathcal{E}_*(\mathcal{K})$ proviene de una función de $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$, entonces φ proviene también de otra función de este espacio $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$ que es real analítica en $\mathbb{R}^n \backslash K$ y holomorfa en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ que contiene a $\mathbb{R}^n \backslash K$. También probó que, si existe una extensión lineal y continua de $\mathcal{E}_*(\mathcal{K})$ en $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$, también existe otra extensión T lineal y continua de $\mathcal{E}_*(\mathcal{K})$ en $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$ tal que $T\varphi$ es real analítica en $\mathbb{R}^n \backslash K$ para cada jet $\varphi \in \mathcal{E}_*(\mathcal{F})$.

Entre 1997 y 1999, Valdivia publicó con Schmets cuatro artículos sobre la existencia de extensiones analíticas para jets de Whitney, de Roumieu y de Beurling, tanto en el marco C^∞ como en el de funciones ultradiferenciables. Recientemente obtuvieron, en [96], una representación global de ultradistribuciones no casi-analíticas.

H. Whitney, en *Functions differentiable on the boundaries of regions*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), 482–485, definió que un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad P si existe un $\omega > 0$ tal que, dados dos puntos x e y de M, existe una curva rectificable en M con extremos x e y tal que su longitud L verifica que $L \leqslant \omega\,|x-y|$. Si un conjunto tiene la propiedad P se dice que es Whitney-regular. En el artículo [94], Valdivia demostró que si K *es un subconjunto compacto Whitney-regular no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\Phi\colon \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}_*(\mathcal{K})$ *es la aplicación tal que* $\varphi_\alpha = f^\alpha|_K$*, para cada* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$*, entonces* Φ *es un homomorfismo topológico*. Además, construyó medidas de Borel $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ con las que obtuvo representaciones de ultradistribuciones por una serie formada con dichas medidas. En [92] Valdivia representó una ultradistribución de Beurling en Ω como suma de derivadas de elementos de $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, mejorando un resultado de H. Komatsu en *Ultradistributions I. Structure theorems and characterizations*, J. Fac. Sci. Uni. Tokyo **20** (1973), 25–105.

9. Valdivia, profesor y maestro

Valdivia fue nombrado hijo adoptivo de la ciudad de Valencia y doctor honoris causa por las Universidades Politécnica de Valencia, de Lieja, Jaime I, Alicante y Jaén. Fue distinguido con la Orden Civil de Alfonso X el Sabio y el nombramiento de Socio de Honor de la Asociación Nacional de Ingenieros Agrónomos. Recibió el premio de investigación científica de la Confederación Empresarial Española, el premio Sanchis Guarner, la Medalla de Oro del ayuntamiento de Martos y la primera Medalla de Oro del Consejo de Cultura de Valencia.

Recibió tres homenajes internacionales al cumplir los 60, 70 y 80 años. Los dos primeros superaron los 200 participantes cada uno y el tercero contó con algo más de 360 participantes. A los tres asistieron los mejores matemáticos en su especialidad.

El Profesor Valdivia fue nombrado académico correspondiente de las Academias de Barcelona, La Laguna y Lieja, académico de número de la Academia de Ingeniería desde su fundación y de la Real Academia de Ciencias desde 1977. En la contestación al discurso de ingreso de Valdivia, Germán Ancochea señaló «*que se enorgullecía de contarse entre los primeros que supieron justipreciar el valor del saber de Valdivia y prever la importancia que su brillante quehacer había de adquirir en breve espacio de tiempo*».

Valdivia, además de un gran investigador, fue un gran profesor que daba la misma importancia a la investigación que a la docencia, consciente de la obligación de sembrar como garantía de continuidad. Impartió muchísimos seminarios, en la Universidad y fuera de ella, tanto de temas de su especialidad como de otros muy alejados de su campo de investigación, pues su cultura matemática clásica y moderna era muy amplia, sin descuidar los aspectos históricos. Sentía atracción por los fundamentos de las matemáticas y por los comportamientos paradójicos.

En 2012 dio su último seminario en el Departamento de Análisis Matemático sobre Teoría de la Medida, que tuvo la excelente calidad de todos sus seminarios, clases y conferencias, con dos horas seguidas de pizarra y sin ninguna nota o guion. La única diferencia con los seminarios anteriores fue que terminaba cansado, pues la enfermedad le había debilitado. Pero Valdivia era el maestro de siempre que, en momentos adversos o cuando los medios de trabajo a su alcance eran exiguos, nunca permitió que las lamentaciones se opusieran a la utilización de todas sus posibilidades. Desde muy joven grabó la frase del poeta bengalí Rabindranath Tagore: *Si lloráis de noche porque no podéis contemplar el sol, las lágrimas os impedirán ver las estrellas.*

El fruto de su interés por la docencia y de su valoración del esfuerzo son sus 32 doctorandos, de los que proceden a su vez 114 tesis doctorales. Sintió mucho la prematura muerte de cuatro de sus doctorandos, Fuensanta Andreu Vaillo, Manuel Fernández Castillo, Miguel García Falset y Miguel Sanz Alix.

Sus restantes doctorandos son: José Alfonso Antonino Andreu, José Luis Blasco Olcina, José Bonet Solves, Trinidad Casasús Estellés, Bernardo Cascales Salinas, Rafael Crespo García, Carmen Fernández Rosell, Manuel Fúnez Valdivia, Pablo Galindo Pastor, Domingo García Rodríguez, Pedro Grimalt Ivars, María del Carmen Herrero Blanco, José Llorens Sánchez, Juan Antonio López Molina, Manuel López Pellicer, Manuel Maestre Vera, Antonio Marquina Vila, Celso Martínez Carracedo, José Manuel Mazón Ruiz, Juan Antonio Mira López, Aníbal Moltó Martínez, Vicente Montesinos Santalucía, Gaspar Mora Martínez, Joaquín Motos Izquierdo, José Orihuela Calatayud, Pedro Pérez Carreras, Manuel Suárez Fernández y Germán Torregrosa Gironés.

Tras una larga y penosa enfermedad, Valdivia falleció el 29 de abril de 2014. Valoraba mucho haber tenido excelentes amigos y era consciente de que sus discípulos agradecíamos su entrañable amistad, admirábamos su generosa entrega a las Matemáticas y sentíamos el deber de seguir su ejemplo, que es lo que nos ha dejado nuestro querido y admirado maestro, al que de todo corazón deseamos que descanse en paz.

Agradecimiento. Agradezco a La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española la invitación a escribir este artículo.

Notas. El listado de los 190 artículos publicados por don Manuel Valdivia hasta abril de 2014 está accesible en MathSciNet:

`http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=176625`

Este listado se incrementará en los próximos meses con la publicación de sus artículos aceptados.

Algunos aspectos de su obra, que la limitación en extensión ha impedido tratar en este artículo, se pueden consultar en:

- J. Horváth, *The Mathematical Works of Manuel Valdivia*, Progress in Functional Analysis, Mathematics Studies, **170** (editores K. D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth y M. Maestre), North-Holland, 1992.
- J. Schmets, *The Mathematical Works of Manuel Valdivia*, II, Progress in Functional Analysis, Mathematics Studies, **189** (editores K. D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth y M. Maestre), North-Holland, 2001.

Referencias

[1] M. Valdivia, *Sucesiones de aplicaciones continuas, absolutamente continuas y sumables con diversos tipos de convergencia*, Rev. Acad. Ci. Madrid **57** (1963), 677–726.

[2] M. Valdivia, *Algunos criterios de convergencia en la teoría de la integración*, Rev. Acad. Ci. Madrid **59** (1965), 173–210.

[3] M. Valdivia, *Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas*, Rev. Acad. Ci. Madrid **59** (1965), 339–378.

[4] M. Valdivia, *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*, Rev. Acad. Ci. Madrid **62** (1968), 545–551.

[5] M. Valdivia, *El teorema general de la aplicación abierta en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*, Rev. Acad. Ci. Madrid **62** (1968), 553–562.

[6] M. Valdivia, *On DF spaces*, Math. Ann. **191** (1971), 38–43.

[7] M. Valdivia, *On final topologies*, J. Reine Angew. Math. 251 (1971), 193–199.

[8] M. Valdivia, *A class of bornological barrelled spaces which are not ultrabornological*, Math. Ann. **194** (1971), 43–51.

[9] M. Valdivia, *Sobre el teorema de la gráfica cerrada*, Collect. Math. **22** (1971), 51–72.

[10] M. VALDIVIA, *A hereditary property in locally convex spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **21** (1971), no. 2, 1–2.

[11] M. VALDIVIA, *Absolutely convex sets in barrelled spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **21** (1971), no. 2, 3–13.

[12] M. VALDIVIA, *Some criteria for weak compactness*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 165–169.

[13] M. VALDIVIA, *On non-semi-reflexive spaces*, Manuscripta Math. **7** (1972), 307–313.

[14] M. VALDIVIA, *On nonbornological barrelled spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), no. 2, 27–30.

[15] M. VALDIVIA, *Some examples on quasi-barrelled spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), no. 2, 21–26.

[16] M. VALDIVIA, *An embedding theorem in barrelled spaces that are not bornological*, Collect. Math. **24** (1973), 7–11.

[17] M. VALDIVIA, *On finite-dimensional topological vector spaces*, Collect. Math. **24** (1973), 3–6.

[18] M. VALDIVIA, *On Mackey spaces*, Duke Math. J. **41** (1974), 835–841.

[19] M. VALDIVIA, *A class of quasi-barrelled (DF)-spaces which are not bornological*, Math. Z. **136** (1974), 249–251.

[20] M. VALDIVIA, *The space of distributions $D'(\Omega)$, is not B_r-complete*, Math. Ann. **211** (1974), 145–149.

[21] M. VALDIVIA, *Mackey convergence and the closed graph theorem*, Arch. Math. (Basel) **25** (1974), 649–656.

[22] M. VALDIVIA, *On countable locally convex direct sums*, Arch. Math. (Basel) **26** (1975), no. 4, 407–413.

[23] M. VALDIVIA, *On quasi-completeness and sequential completeness in locally convex spaces*, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 190–199.

[24] M. VALDIVIA, *On B_r-completeness*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25** (1975), no. 2, xiv, 235–248.

[25] M. VALDIVIA, *Sur certains hyperplans qui ne sont pas ultra-bornologiques dans les espaces ultra-bornologiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977), no. 16, A935–A937.

[26] M. VALDIVIA, *The space $D(\Omega)$ is not B_r-complete*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27** (1977), no. 4, iii, 29–43.

[27] M. VALDIVIA, *On the completion of a bornological space*, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), no. 6, 608–613.

[28] M. VALDIVIA, *Some new results on weak compactness*, J. Functional Analysis **24** (1977), no. 1, 1–10.

[29] M. VALDIVIA, *On the space $\mathcal{D}(\Omega)$*, Arch. Math. (Basel) **30** (1978), no. 5, 516–522.

[30] M. VALDIVIA, *Sobre los espacios de Suslin localmente convexos*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **72** (1978), no. 2, 215–220.

[31] M. Valdivia, *Representaciones de los espacios* $\mathcal{D}(\Omega)$ *y* $\mathcal{D}'(\Omega)$, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **72** (1978), no. 3, 385–414.

[32] M. Valdivia, *Solution of a problem of Grothendieck*, J. Reine Angew. Math. **305** (1979), 116–121.

[33] M. Valdivia, *On certain barrelled normed spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), no. 3, v, 39–56.

[34] M. Valdivia, *A characterization of echelon Köthe-Schwartz spaces*, Approximation theory and functional analysis (Proc. Internat. Sympos. Approximation Theory, Univ. Estadual de Campinas, Campinas, 1977), pp. 409–419, North-Holland Math. Stud., **35**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1979.

[35] M. Valdivia, *Cocientes de espacios escalonados*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **73** (1979), no. 2, 169–183.

[36] M. Valdivia, *Some new results on the closed graph theorem*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) **39** (1979), no. 1, 27–47.

[37] M. Valdivia, *Espacios de medidas de Radon*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **74** (1980), no. 1, 91–98.

[38] M. Valdivia, *Interpolation in certain function spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **80** (1980), no. 2, 173–189.

[39] M. Valdivia, *Convex sets in metrizable spaces*, Arch. Math. (Basel) **36** (1981), no. 3, 244–254.

[40] M. Valdivia, *On quasinormable echelon spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **24** (1981), no. 1, 73–80.

[41] R. M. Aron, C. Hervés y M. Valdivia, *Weakly continuous mappings on Banach spaces*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 2, 189–204.

[42] M. Valdivia, *First category subspaces in Baire topological vector spaces*, Collect. Math. **34** (1983), no. 3, 287–296.

[43] M. Valdivia, *B_r-complete spaces which are not B-complete*, Math. Z. **185** (1984), no. 2, 253–259.

[44] M. Valdivia, *A property of Fréchet spaces*, Functional analysis, holomorphy and approximation theory, II (Rio de Janeiro, 1981), 469–477, North-Holland Math. Stud., **86**, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[45] M. Valdivia, *Products of Baire topological vector spaces*, Fund. Math. **125** (1985), no. 1, 71–80.

[46] M. Valdivia, *A property of non quasireflexive Banach spaces*, Collect. Math. **36** (1985), no. 3, 291–299.

[47] M. Valdivia, *On Słowikowski, Raĭkov and De Wilde closed graph theorems*, Aspects of mathematics and its applications, 833–857, North-Holland Math. Library, **34**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[48] M. Valdivia, *Three-space problems and projective tensor products of locally convex spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **86** (1986), no. 2, 127–141.

[49] M. Valdivia, *Quasi-LB-spaces*, J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), no. 1, 149–168.

[50] M. Valdivia, *(F)-spaces and strict (LF)-spaces*, Math. Z. **195** (1987), no. 3, 345–364.

[51] M. Valdivia, *Banach spaces X with X^{**} separable*, Israel J. Math. **59** (1987), no. 1, 107–111.

[52] M. Valdivia, *Fréchet spaces generated by weakly compact subsets*, Collect. Math. **38** (1987), no. 1, 17–25.

[53] M. Valdivia, *Shrinking bases and Banach spaces Z^{**}/Z*, Israel J. Math. **62** (1988), no. 3, 347–354.

[54] M. Valdivia, *Bases and quasireflexivity in Banach spaces*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **82** (1988), no. 1, 45–53.

[55] M. Valdivia, *Resolutions of the identity in certain Banach spaces*, Collect. Math. **39** (1988), no. 2, 127–140.

[56] M. Valdivia, *A characterization of totally reflexive Fréchet spaces*, Math. Z. **200** (1989), no. 3, 327–346.

[57] M. Valdivia, *Some properties of weakly countably determined Banach spaces*, Studia Math. **93** (1989), no. 2, 137–144.

[58] J. Orihuela y M. Valdivia, *Projective generators and resolutions of identity in Banach spaces*, Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988). Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **2** (1989), suppl., 179–199.

[59] M. Valdivia, *Resolución de la identidad en ciertos espacios metrizables localmente convexos*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **83** (1989), no. 1, 75–96.

[60] M. Valdivia, *Projective resolution of identity in $C(K)$ spaces*, Arch. Math. (Basel) **54** (1990), no. 5, 493–498.

[61] M. Valdivia, *Resoluciones proyectivas del operador identidad y bases de Markushevich en ciertos espacios de Banach*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **84** (1990), no. 1, 23–34.

[62] J. Orihuela, W. Schachermayer y M. Valdivia, *Every Radon-Nikodým Corson compact space is Eberlein compact*, Studia Math. **98** (1991), no. 2, 157–174.

[63] M. Valdivia, *Interpolation in spaces of holomorphic mappings with asymptotic expansions*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **91** (1991), no. 1, 7–38.

[64] M. Valdivia, *On totally reflexive Fréchet spaces*, Recent developments in mathematical analysis and its applications (Bari, 1990), Confer. Sem. Mat. Univ. Bari no. 237-244 (1991), 39–55.

[65] M. Valdivia, *Simultaneous resolutions of the identity operator in normed spaces*, Collect. Math. **42** (1991), no. 3, 265–284 (1992).

[66] M. Valdivia, *Análisis matemático. Historia de la Matemática en el siglo XIX*, Parte 1 (Madrid, 1991), 157–174, Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur., Madrid, 1992.

[67] J. Bonet, M. Lindström y M. Valdivia, *Two theorems of Josefson-Nissenzweig type for Fréchet spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 2, 363–364.

[68] M. Valdivia, *Fréchet spaces with no subspaces isomorphic to l^1*, Math. Japon. **38** (1993), no. 3, 397–411.

[69] J. Schmets y M. Valdivia, *Domains of analyticity in real normed spaces*, J. Math. Anal. Appl. **176** (1993), no. 2, 423–435.

[70] M. Valdivia, *On certain total biorthogonal systems in Banach spaces*, Generalized functions and their applications (Varanasi, 1991), 271–280, Plenum, New York, 1993.

[71] M. Valdivia, *Sobre el teorema de interpolación de Borel en espacios de Hilbert*, Rev. Colombiana Mat. **27** (1993), no. 3-4, 235–247.

[72] J. Schmets y M. Valdivia, *On the existence of holomorphic functions having prescribed asymptotic expansions*, Z. Anal. Anwendungen **13** (1994), no. 2, 307–327.

[73] J. Mujica y M. Valdivia, *Holomorphic germs on Tsirelson's space*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 5, 1379–1384.

[74] M. Valdivia, *Banach spaces of polynomials without copies of l^1*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 10, 3143–3150.

[75] M. Valdivia, *Fréchet spaces of holomorphic functions without copies of l^1*, Math. Nachr. **181** (1996), 277–287.

[76] M. Valdivia, *On certain linear operators in spaces of ultradifferentiable functions*, Results Math. **30** (1996), no. 3-4, 321–345.

[77] J. Schmets y M. Valdivia, *On the Borel theorem in real Banach spaces*, Functional analysis (Trier, 1994), 399–412, de Gruyter, Berlin, 1996.

[78] M. Valdivia, *On certain analytic function ranged linear operators in spaces of ultradifferentiable functions*, Math. Japon. **44** (1996), no. 3, 415–434.

[79] M. Valdivia, *Biorthogonal systems in certain Banach spaces*, Meeting on Mathematical Analysis (Ávila, 1995). Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **9** (1996), Special Issue, suppl., 191–220.

[80] M. Valdivia, *Certain reflexive Banach spaces with no copy of l^p*, Functional analysis, 89–96, Narosa, New Delhi, 1998.

[81] M. Valdivia, *Some properties in spaces of multilinear functionals and spaces of polynomials*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **98A** (1998), no. 1, 87–106.

[82] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski y M. Valdivia, *On weakly locally uniformly rotund Banach spaces*, J. Funct. Anal. **163** (1999), no. 2, 252–271.

[83] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski y M. Valdivia, *Kadec and Krein-Milman properties*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 6, 459–464.

[84] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski y M. Valdivia, *Midpoint locally uniform rotundity and a decomposition method for renorming*, Q. J. Math. **52** (2001), no. 2, 181–193.

[85] M. Valdivia, *Basic sequences in the dual of a Fréchet space*, Math. Nachr. **231** (2001), 169–185.

[86] M. VALDIVIA, *Weak-star compact subsets in the bidual of a Banach space*, Unsolved problems on mathematics for the 21st century, 193–209, IOS, Amsterdam, 2001.

[87] M. VALDIVIA, *Extensiones lineales de operadores y aplicaciones*, Proceedings of the Meeting of Andalusian Mathematicians, Vol. I (Sevilla, 2000), 265–273, Colecc. Abierta, **52**, Univ. Sevilla Secr. Publ., Sevilla, 2001.

[88] M. VALDIVIA, *Bases and quasi-reflexivity in Fréchet spaces*, Math. Nachr. **278** (2005), no. 6, 712–729.

[89] A. MOLTÓ, J. ORIHUELA, S. TROYANSKI Y M. VALDIVIA, *Continuity properties up to a countable partition*, RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **100** (2006), no. 1-2, 279–294.

[90] M. VALDIVIA, *On certain* (LB)*-spaces*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **14** (2007), no. 3, 565–575.

[91] M. VALDIVIA, *Spaces of holomorphic functions in regular domains*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), no. 2, 651–662.

[92] M. VALDIVIA, *On the ultradistributions of Beurling type*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **103** (2009), no. 1, 55–74.

[93] I. MONTERDE, V. MONTESINOS Y M. VALDIVIA, *A remark on a theorem of Howard*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **104** (2010), no. 1, 1–3.

[94] M. VALDIVIA, *On Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **105** (2011), no. 2, 339–357.

[95] M. VALDIVIA, (LB)*-spaces and quasi-reflexivity*, Note Mat. **31** (2011), no. 1, 191–199.

[96] J. SCHMETS Y M. VALDIVIA, *Global representation of some mixed ultradistributions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **19** (2012), no. 1, 91–106.

[97] M. VALDIVIA, *On Nikodym boundedness property*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **107** (2013), no. 2, 355–372.

[98] M. VALDIVIA, *On the integral of Riemann-Stieltjes*, Se publicará en Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **108** (2014), no. 2.

[99] M. VALDIVIA Y M. FÚNEZ, *A note on the integral of Riemann-Stieltjes*, Se publicará en Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **108** (2014), no. 2.

MANUEL LÓPEZ PELLICER, REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES, Y DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E IUMPA, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Correo electrónico: `mlopezpe@mat.upv.es`