MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 8(2), 2015 doi: 10.4995/msel.2015.3962.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

La resolución de problemas como instrumentos para la modelización matemática: "Ejemplos para la vida real"

Problem solving as instruments for the mathematical modeling: "Examples For Real Life"

Sixto Romero, Isabel Mª Rodríguez
Universidad Huelva
sixto@uhu.es, rodgar@uhu.es

José Romero
CEIP Federico García Lorca. Huelva
josecaeja@gmail.com

Rocío Benítez
Consejería de Educación, Cultura y Deporte. Huelva
rbcambra@gmail.com

Isabel Mª Salas
IES El Valle-Hinojos. Huelva
isasalas2312@gmail.com

Abstract

No hace muchos años que los investigadores en Educación Matemática han centrado su atención en el diseño de actividades basado en la modelización matemática de situaciones reales con el convencimiento de obtener una mayor garantía en la ganancia, por parte de nuestros alumnos, del aprendizaje matemático, y por ende en la enseñanza por parte de los enseñantes. El trabajo que presentamos, en el contexto del CURSO DE VERANO-2014-Matemáticas a lo largo de la vida, en las IV Jornadas de Modelización Matemática, pretende utilizar la Resolución de Problemas (RdP's) como un instrumento útil y necesario para llegar al concepto de Modelización Matemática.

Not many years ago that researchers in mathematics education have focused on designing activities based on mathematical modelling of real situations with the conviction to get a better guarantee on profit, by our students, the mathematical learning, and thus teaching by the teachers. The work presented in the context of the SUMMER-2014-Mathematics throughout life, in the Fourth Conference on Mathematical Modelling, intends to use the Problem Solving (PS) as a useful and necessary tool to reach the concept of Mathematical Modelling.

Keywords: Modelling, problem solving, conjecture, algoritmia, teaching and learning.
Palabras clave: Modelización Matemática, resolución de problemas, conjetura, algorítmia, enseñanza y aprendizaje.

1 Introducción: planteamiento

Las matemáticas son para muchos una ciencia algo antipática. La mayoría de las persona tenemos y/o hemos tenido contacto con ellas, aunque solo fuese en los años escolares, y convivimos con ellas a diario, las miramos con desconfianza porque a veces resultan crípticas, áridas y tan abstractas que no sabríamos por dónde acometerlas si quisiéramos intentarlo.

A lo largo de la Historia, las Matemáticas han ocupado un lugar predominante en los currículos escolares (Rico, 1997, Romberg,1991). Han alcanzado este protagonismo no tanto por la importancia que tienen en sí mismas como por razones de tipo cultural y social. Es tal la importancia lograda que prácticamente se enseña en todas las escuelas del mundo.

Tradicionalmente han existido dos razones básicas para ponderar las Matemáticas:

a) "**Su facultad para desarrollar la capacidad de pensamiento**". Juan Luis Vives (1492-1540) ya señaló que "**son una asignatura para manifestar la agudeza de la mente**".

b) "**Su utilidad, tanto para la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas necesarias para el desarrollo personal y profesional**".

Vamos a utilizar la propuesta de la Resolución de Problemas (RdP's) como una herramienta de manejo para conseguir que nuestros alumnos profundicen con mayor o menor grado de matematización y conseguir llegar al concepto de Modelización Matemática. Pero claro, nos surge una duda,

¿Cómo ligar las Matemáticas con otras áreas del conocimiento?

De los problemas que existen a nivel mundial en la etapa de secundaria, en el área de conocimiento de matemáticas, el que actualmente está llamando la atención de los profesionales de Educación Matemática tiene relación con la forma de ligar y estructurar los planes de estudios en su relación con otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática: la mayoría de los temas están desconectados del mundo real y, por qué no decirlo, de las ciencias, lo que tiene como *handicap* que los estudiantes no conciben la verdadera utilidad de las matemáticas necesarias para su formación.

En muchos países, y en España también, teniendo en cuenta las excepciones en algunas comunidades autónomas, "*... se ha generado una tradición en la forma de organizar los curricula en matemáticas, reduciéndose la enseñanza a un trabajo basado en algoritmos que no permite a los estudiantes comprender el rol de la matemática en la sociedad*" (Aravena, 2007).

Esta forma de enseñanza arraigada en los sistemas educativos ha sido perjudicial para obtener mayores logros en los aprendizajes de nuestros estudiantes, donde se acrecienta aún más la diversidad.

2 Estudio de casos con números

Desde no hace muchos años, los investigadores en Educación Matemática han centrado su atención en el diseño de actividades basado en la modelización matemática de situaciones reales con el convencimiento de obtener una mayor garantía en la ganancia, por parte de nuestros alumnos, del aprendizaje matemático, y por ende en la enseñanza por parte de los enseñantes.

Para llegar a modelar matemáticamente, desde el punto de vista de las actitudes y concepciones, el papel de la RdP's debe ser, a nuestro juicio, el vehículo del aprendizaje matemático a través:

a) Del desarrollo de una actitud abierta.

b) De ejemplos que nos conducen a una concepción dinámica de la evolución del conocimiento.

c) De una visión integrada de la Matemática.

d) De la facilitación en la introducción significativa de un nuevo concepto.

e) De la puesta en relieve de los procesos inductivos y deductivos de forma rigurosa.

f) De la muestra de la utilidad de la Matemática en la vida.

g) Del desarrollo de estrategias para conseguir llegar a ser un "*buen ciudadano*".

Los problemas tienen una larga tradición en matemáticas. George Polya[*] consideraba los Elementos de Euclides como una colección de problemas (una sucesión de enunciados y soluciones). Junto a Gabor Szegö[*] produjo bajo el título de Ejercicio de Análisis, una colección graduada de problemas que eran, sin duda, en su época, la mejor introducción al análisis matemático, y que ha quedado como una joya de gran interés que merece ser estudiada: "*...esto demuestra, la inutilidad de seguir insistiendo sobre el papel de los problemas en la investigación matemática...*" (Kahane, J. P. 2002).

Con la presentación ulterior de varios ejemplos sobre modelización, para diferentes niveles de enseñanza, cada uno de ellos ilustrativo de los diferentes niveles de complejidad que pueden aparecer en el proceso de matematización, se va haciendo explícito el marco teórico que fundamenta globalmente cada uno de los pasos dados, los enfoques adoptados o los resultados obtenidos. Consecuentemente, si conseguimos que nuestros estudiantes intenten modelizar desde la matemática, conseguiríamos una mayor tendencia y favorecimiento a la comprensión de los conceptos y métodos, permitiendo así una visión más completa y global de la matemática.

Por ello, a la sociedad actual hay que dotarla del papel de enfrentarse a la resolución de problemas, hacer estimaciones, tomar decisiones,..., enfrentarse en definitiva a una matematización de la cultura.

2.1 Agujeros Negros Numéricos

Fuera del campo de la Física, en Matemáticas algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que ya no varían en sucesivas iteraciones. Esto permite presentar dichos procesos como efectos de pseudomentalismo con números. Así como un agujero negro es un cuerpo con una gravedad tan fuerte que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz, también existen números que atraen a otros al efectuar ciertas operaciones.

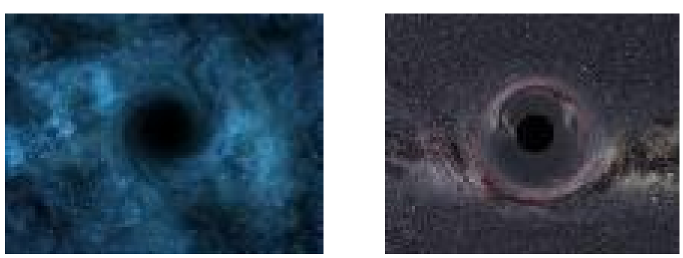


Figura 1: Agujeros negros.

Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación.

[*]Polya, G, Szegö, G. (1972)[1925]. Problems and theorems in analysis, 2, Vols. Springer-Verlag

Caso 1. Un agujero negro, el 123

El Presidente del club Recreativo de Huelva está preocupado por la baja afluencia de público al Nuevo Colombino, tras la trayectoria última de perder partidos de manera consecutiva. Ha diseñado una estrategia para convencer a la gente para que vayan al campo. Regalará la mitad de la recaudación del partido a uno de los aficionados que asistaa al campo de fútbol.

El sistema de sorteo será el siguiente:

a) *Cada persona, cuando entre en el estadio, elegirá una cifra entre el 0 y el 9 (ambos incluidos), con la que se irá formando un número.*

b) *Así, si el primer espectador que entra en el estadio elige el 1, el siguiente el 4, el siguiente el 3..., iremos formando el número: 143...*

c) *Este número tendrá tantas cifras como espectadores haya en el estadio.*

Una vez que hayan entrado todos los aficionados, y tengamos ya el número completo, procedemos de la siguiente manera:

1. Formaremos un nuevo número, cuyas primeras cifras serán la cantidad de cifras pares que contiene nuestro número, las siguientes cifras serán la cantidad de cifras impares que contiene el número, y por último añadiremos el número total de cifras (impares + pares).

2. Repetiremos el proceso sucesivamente.

3. El premio consistente en la mitad de la recaudación se entregará a aquel aficionado cuyo número de butaca coincida con el número resultante de todo este proceso (todas las butacas del Colombino están enumeradas del 1 al 22.670).

Con este sorteo, el Presidente consiguió durante unas jornadas que el estadio se volviese a llenar. Los aficionados estaban encantados con la posibilidad de llevarse a casa un estupendo premio. Pero poco a poco los asistentes han empezado a decrecer nuevamente. ¿Cuál sería el motivo?

Parece que los aficionados sólo volverán cuando el RECRE recupere el nivel deportivo de hace unos años, ya que el incentivo económico no ha bastado para recuperar el nivel de asistencia en el NUEVO COLOMBINO, sobre todo cuando se ha dado a conocer el listado de los agraciados por el sorteo. Todos los premios hasta la fecha han sido entregados al mismo espectador: **El PRESIDENTE DEL RECRE**.

¿Cómo es esto posible?

Veamos qué es lo que ocurre una vez que se ha llenado el estadio. Supongamos un número de 22.670 cifras que corresponde a todos los socios que han entrado:

```
27182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240 7
```

Observamos distintas posibilidades (P_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$), que pueden presentarse:

$\boxed{P_1}$ Que todos los espectadores hayan escogido una cifra **impar**: **0226702267 0**

$\boxed{P_2}$ Que haya menos impares que **pares**, por ejemplo: **13258941222670**

$\boxed{P_3}$ Que las cifras **pares** e **impares** sean iguales o muy parecidas: **11335113322670**

$\boxed{P_4}$ Que haya más **impares** que **pares**, por ejemplo: **85731409722670**

$\boxed{P_5}$ Que todos hayan escogido una cifra **par**: **22670022670**

Así, vemos que el número que obtendremos después del primer proceso tendrá entre 11 y 15 cifras. En el caso de que este número tenga el mayor número de cifras posible, esto es, 15 cifras, y siguiendo el mismo razonamiento, obtendremos tras el segundo proceso un número de 4 o 5 cifras:

01515, 11415, 21315,..., 7815,...,15015

Nos ponemos nuevamente en el caso de que tenga el mayor número posible de cifras, en este caso, 5 cifras. Aplicamos otra vez el procedimiento, y los posibles resultados ahora serán de 3 cifras:

055, 145, 235, 325, 415, 505

Después de varias iteraciones, se llegará a un número de 3 cifras, que sólo puede ser **303** (si las **3** cifras son **pares**), **213** (si **2** son **pares** y una **impar**), **123** (si una cifra es **par** y **2 impares**) o **033** (si las **3** cifras son **impares**).

En estos 4 casos al volver a hacer el cálculo se obtendrá inevitablemente? el **123**. *¡Que curiosamente coincide con el número de asiento del Presidente del Recre!*

Caso 2. El 6174, ¿otro agujero negro?

El número 6174 es conocido como la Constante de Kaprekar (O'Connor, 2007) en honor de su descubridor el matemático indio Kaprekar. Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905–1986), nació en Dahanu, cerca de Bombay. Se interesó por los números siendo muy pequeño.

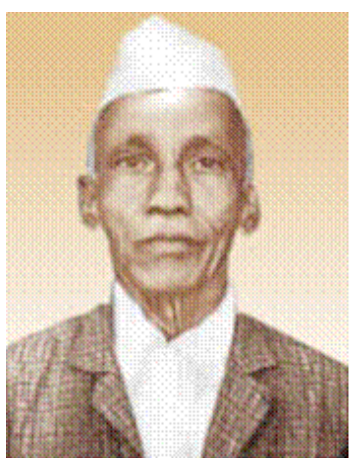


Figura 2: D.R. Kaprekar.

Desde 1930 hasta su jubilación en 1962, trabajó como profesor de escuela en Devlali, India. Kaprekar descubrió muchas propiedades interesantes en la teoría recreativa de números.

I. Consideremos el número 6174:

a) Reordenamos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, los colocamos en orden decreciente.

b) Reordenémoslo también para construimos el menor número posible y restemos. Obtenemos así, 7641-1467=6174, que es el número con el que empezamos.

II. Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos,

Paso 1 :	9954-4599=5355	Hagamos lo mismo con la diferencia 5355.
Paso 2 :	5553-3555=1998	Nada especial. Hagamos lo mismo con la diferencia 1998.
Paso 3 :	9981-1899=8082	
Paso 4 :	8820-0288=8532	
Paso 5 :	8532-2358=6174	

¡Otra vez el dichoso número!

III. A medida que nos introducimos en la resolución pueden surgir interrogantes: ¿siempre llegamos a este número? Si ello siempre ocurre, ¿cuál es el número máximo de pasos necesarios para obtener el número 6174? ¿Es el 6174 el único número con esta propiedad? (Weisstein, 2015).

¡Dos interesantes resultados para aquellas personas que disfrutan trabajando con números!

IV. Examinar qué sucede con otros números de distinta longitud arroja más misterio que luz al asunto.

- Si se prueba con los números de dos dígitos no se llega nunca a un número fijo, sino a un bucle cíclico del tipo 09, 81, 63, 27, 45, 09.
- Con tres dígitos se llega a 495.
- Para cuatro dígitos el número es el misterioso 6174.
- Para cinco dígitos, no hay número fijo, sino tres ciclos (además de distinta longitud).
- Para seis dígitos, se puede llegar al 549945, al 631764 o a un ciclo de siete números.
- Para siete dígitos tampoco hay número fijo, sino un único ciclo de nueve números.
- Para ocho y nueve hay otro par de números en cada caso.
- Con diez dígitos se puede llegar a tres valores distintos: 6333176664, 9753086421 y 9975084201, o entrar en cinco ciclos cortos.

Caso 3. Otros agujeros negros numéricos: La conjetura de Collatz o problema $3n+1$

Con otros algoritmos, hay expresiones matemáticas y secuencias de operaciones que siempre nos llevan a un agujero negro que atrae al resto de números, independientemente de la cifra con que iniciemos el proceso. Son muchos los casos que nos podemos encontrar y que se denominan agujeros negros en algoritmos no solo aritméticos, si no también geométricos e incluso alfanuméricos, por ejemplo, la conjetura de Collatz.

La conjetura de Collatz, conocida también como conjetura $3n+1$ o conjetura de Ulam —Stanisław Marcin Ulam (1909–1984) fue un matemático polaco-estadounidense que participó en el proyecto Manhattan y propuso el diseño Teller-Ulam de las armas termonucleares— entre otros nombres. Fue enunciada por el matemático Lothar Collatz en 1937, y hasta la fecha no resuelta. Se define, como una operación tal que aplica a cualquier número entero positivo la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n)$ dada por:

a) Si el número n, es par, se divide entre 2: $f(n) = n/2$.

b) Si el número n es impar, se multiplica por 3 y se suma 1: $f(n) = 3n + 1$

Así, por ejemplo para el número $n = 7$, llamamos **órbita**, a las imágenes sucesivas por la aplicación f,

$$
\begin{array}{l}
f(7) = 3 \cdot 7 + 1 = 22 \\
f(f(7)) = f(22) = 11 \\
f(f(f(7))) = f(11) = 3 \cdot 11 + 1 = 34 \\
f(f(f(f(7)))) = f(34) = 34/2 = 17 \\
f(f(f(f(f(7))))) = f(17) = 3 \cdot 17 + 1 = 52 \\
f(f(f(f(f(f(7)))))) = 52/2 = 26 \\
f(f(f(f(f(f(f(7))))))) = 13 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))))) = 3 \cdot 13 + 1 = 40 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))))) = 40/2 = 20 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))) = 20/2 = 10 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))) = 10/2 = 5 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7))))))))) = 5 \cdot 3 + 1 = 16 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))))))) = 16/2 = 8 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))))))) = 8/2 = 4 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))))))) = 4/2 = 2 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7))))))))))) = 2/2 = 1 \\
f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(7)))))))))) = 3 \cdot 1 + 1 = 4
\end{array}
$$

Y así se repite indefinidamente:

$$7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, \mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \ldots$$

La conjetura dice que siempre alcanzaremos el 1 (y por tanto el ciclo 4, 2, 1) para cualquier número con el que comencemos.

De existir algún contraejemplo a la conjetura debe satisfacer alguna de estas condiciones: la órbita del número no está acotada; o bien, la órbita también es periódica, pero con un período distinto de 4, 2, 1.

Aparte del citado *ut-supra* $n = 7$, si comenzáramos con $n = 27$ la sucesión tiene 112 pasos, llegando hasta 9232 antes de descender a 1:

```
27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121,
364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175,
526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502,
251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438,
719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367,
4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300,
650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80,
40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
```

Hasta la actualidad no se ha demostrado si es verdadera o falsa la conjetura desde un punto de vista formal. Sí es verdad que existen investigadores, en el campo de la computación que están dirigiendo sus investigaciones a calcular las secuencias de números cada vez mayores. Así, por ejemplo se puede citar que en noviembre de 2005 se comprobó la conjetura para todas las secuencias de números menores que 2^{58}.

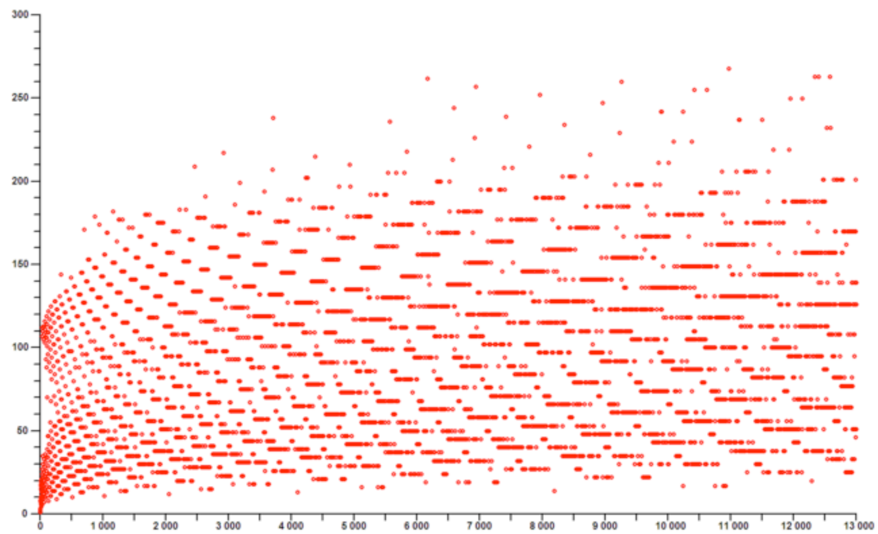


Figura 3: Tiempo de órbita (número de iteraciones) necesario para alcanzar la unidad para números comprendidos entre 1 y 13000. (http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:3n1_diagrama.png)

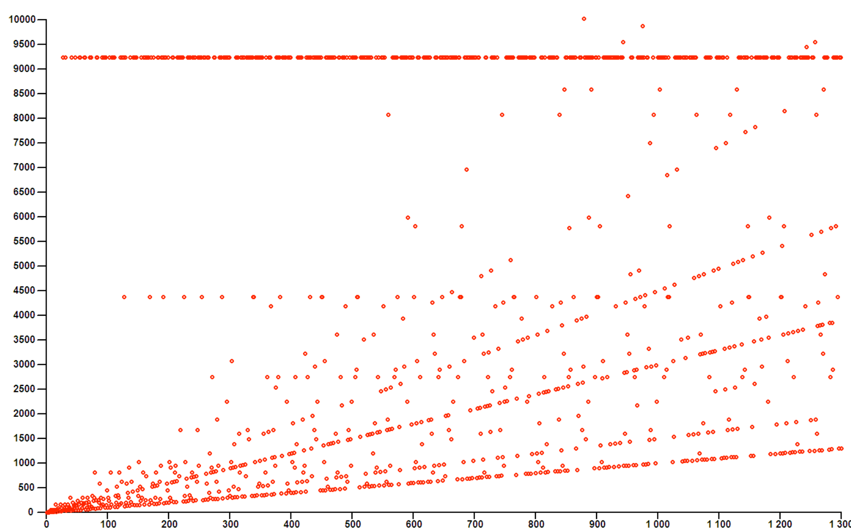


Figura 4: Cota superior para valores entre 1 y 1300. La línea horizontal superior corresponde a la cota 9232. Esta cota es un valor 'preferido' para muchas secuencias, como las que comienzan con 27, 31, 41, 47, 54, 55, 62, 63,... (http://commons.wikimedia.org/wiki/File:3n1_cota_superior.png)

3 Matemáticas y Cordones

Al igual que la física o la química, lo cierto es que las matemáticas están por todas partes en nuestra vida diaria y hay muchas formas de perderles el miedo. Hay muchas matemáticas tras el sistema más universal de sujeción para los zapatos (Fieggen,2015). Al fin y al cabo, se trata de pasar un cordón por una serie de agujeros en distintas combinaciones. ¿Cuántas hay? ¿Y cómo se calculan? ¿No es esto Matemáticas?

Figura 5: ¡Podemos empezar por atarnos los cordones de las zapatillas!

En un zapato medio con seis pares de ojales hay casi dos billones de formas distintas de hacer pasar un cordón a través de todos los ojales. ¡Claro que en la práctica, a la hora de atarse unas zapatillas, no todas esas combinaciones son prácticas ni cómodas!

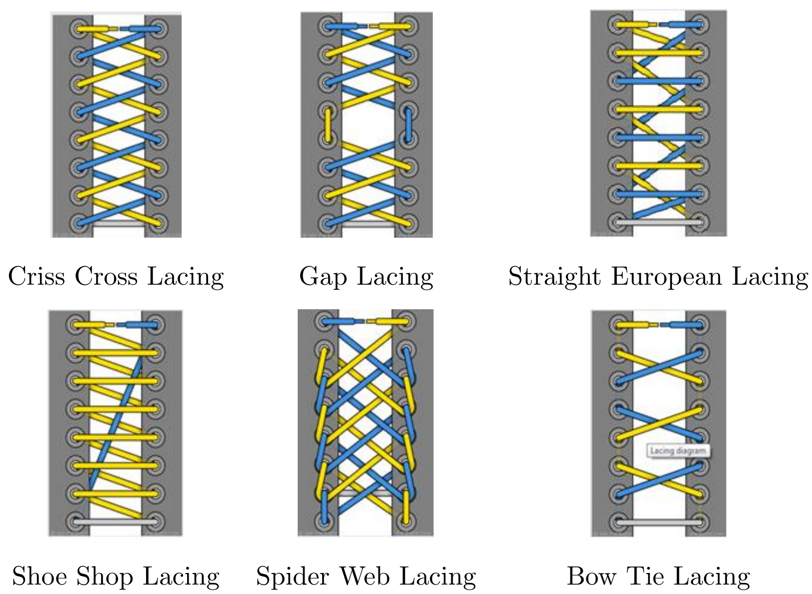


Figura 6: Diferentes formas de amarrar los cordones (http://www.fieggen.com/shoelace/lacingmethods.htm).

3.1 Idealización del problema

Antes de pasar a la idealización (modelización), dos cuestiones podemos plantearnos:

a) ¿Hay que pensar en la Estética que muestra diferentes estilos? (Óptica del comprador).

b) Más pertinente sería, ¿qué tipo de encordonado requiere los cordones más cortos, y por consiguiente más barato? (Fabricante).

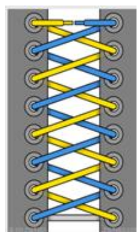
Pensemos en:

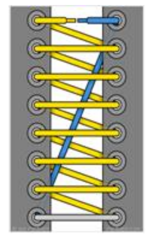
¿Qué pauta de encordonado, entre todas las posibles, requiere los cordones más cortos?

Vamos a centrarnos en la longitud del cordón hasta los dos ojetes de la parte superior. La cantidad de cordón extra se necesita básicamente para hacer el nudo eficaz, y dado que es la misma para todos los métodos de encordonados, podemos ignorarla. Partiendo de un enfoque a lo bruto, la longitud del cordón puede calcularse en términos de los tres parámetros del problema:

- El número n de pares de ojetes
- La distancia d entre ojetes sucesivos.
- El espacio r entre los ojetes izquierdo y derecho correspondientes.

Con la ayuda del Teorema de Pitágoras (¿qué habría pensado de esta aplicación particular?) tenemos que la longitud del cordón:





1. Criss Cross Lacing 2. Shoe Shop Lacing

1. Criss Cross Lacing : $L = r + 2(n-1)\sqrt{d^2 + r^2}$.
2. Shoe Shop Lacing : $L = (n-1)r + (n-1)\sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + r^2}$.

Podemos preguntarnos cuál de las longitudes es más pequeña. Para simplificar, si $n = 8$, $d = 1$, $r = 2$:

1. Criss Cross Lacing : $L = 2 + 14\sqrt{5} \approx 33.3049$.
2. Shoe Shop Lacing : $L = 14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53} \approx 36.9325$.

Se observa que la longitud más corta es la del encordonado al estilo americano. Ahora bien, ¿podemos estar seguros de que esto será siempre así o por el contrario, es posible que el resultado dependa de los valores de n, d y r?

¡Sólo un matemático se preocuparía por los diferentes casos que aparecerían dando valores distintos a n, d y r!

4 Las escaleras de Fibonacci

Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en la cría de conejos, configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en disposición de las hojas de un tallo, las inflorescencias del brécol romanescu, en la flora de la alcachofa,...

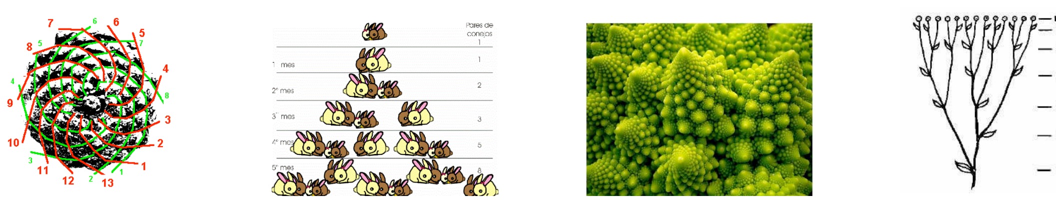


Figura 7: Ejemplos de la sucesión de Fibonacci (http://www.neoteo.com/la-sucesion-de-fibonacci-en-la-naturaleza/)

Vamos a estudiar una aplicación de la citada sucesión con la situación real de Subir una escalera.

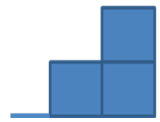
¿De cuántas maneras diferentes podemos subir una escalera de 5, de 10, de 20, de 30, de 40, de 50 escalones suponiendo que ¡cómo máximo se permite subir los escalones de dos en dos!?

a) **Un Escalón:** Una manera

Directamente

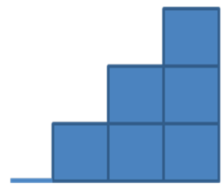
b) **Dos Escalones:** Dos maneras

Directamente
De uno en uno



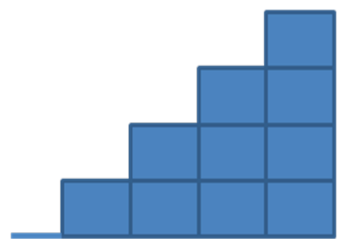
c) **Tres Escalones:** Tres maneras

De uno en uno
Dos escalones y después uno
Un escalón y después dos



d) **Cuatro Escalones:** Cinco maneras

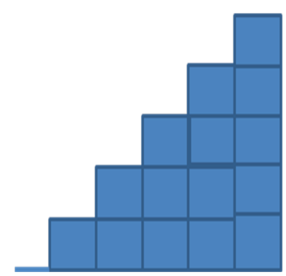
De uno en uno
De dos en dos
Uno, uno y dos
Dos, uno y uno
Uno, dos y uno



Con los casos tratados,

e) **Cinco Escalones:** Ocho maneras

Decidimos subir el primer escalón,
y ya sabemos que hay 5 maneras de subir 4 escalones.
Decidimos subir dos escalones,
y sabemos que para subir los tres restantes hay 3 maneras de subir.
Por lo tanto, en total serán: 5+3=8 maneras.



f) **Seis Escalones:** $8 + 5 = 13$ maneras

g) **Siete Escalones:** $13 + 8 = 21$ maneras

De esta manera se consigue la siguiente tabla:

Escalones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Formas	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Se obtiene así la denominada Sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

dónde el término general, para una escalera de n-peldaños las diferentes formas de subir, viene expresado en forma recurrente:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2, \qquad f_1 = f_2 = 1,$$

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right).$$

Por razones obvias, no vamos a hacer un estudio profundo de las propiedades de la sucesión de Fibonacci pero para establecer un análisis formal de ésta, y a modo de resumen, es conveniente, explicitar como modelo matemático la función que la genera.

Para cualquier sucesión de números: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, ...$ una función generatriz puede ser $f(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots$, es decir, una serie formal de potencias donde cada coeficiente es un número de la sucesión. La sucesión de Fibonacci tiene la función generadora,

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + 5 \cdot x^5 + 8 \cdot x^6 + \ldots.$$

La definición de la sucesión de Fibonacci como se ha mostrado es recurrente, es decir que se necesitan calcular varios términos anteriores para calcular un término determinado. Podemos obtener de manera explícita la sucesión de Fibonacci a partir de la recurrencia:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

Con las condiciones iniciales $f_1 = 1, f_2 = 1$. El polinomio característico de esta relación de recurrencia es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

De esta manera , la fórmula explícita de la sucesión de Fibonacci tendrá la forma

$$a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + b(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,$$

que junto a las condiciones iniciales se infiere que para cada término de la sucesión se puede conseguir, a partir de la expresión citada *ut-supra*:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right).$$

Llegado a este punto, se puede pedir al estudiante que trabaje con interesantes propiedades de la sucesión de Fibonacci. Como se ha indicado, los números de Fibonacci aparecen en numerosas aplicaciones de diferentes áreas ya citadas pero también al contar el número de cadenas de bits de longitud n que no tiene ceros consecutivos y en una vasta cantidad de contextos diferentes. En la publicación **Fibonacci Querterly**, revista especialmente dedicada a la sucesión de Fibonacci y temas afines, se trata de un tributo a cuán ampliamente los números de Fibonacci aparecen en matemáticas y sus aplicaciones en otras áreas. Entre ellas:

- Al construir bloques cuya longitud de los lados sean números de Fibonacci (Cook, 2014) se obtiene un dibujo que se asemeja al rectángulo aúreo que denominado también como rectángulo dorado, es un rectángulo que posee una proporcionalidad entre sus lados igual a la razón aúrea. Es decir, un rectángulo que al substraer la imagen de un cuadrado igual al de su lado menor, el rectángulo resultante es igualmente un rectángulo dorado. A partir de este rectángulo se puede obtener la espiral dorada , que es una esprial logarítmica:
- Estudiar como la razón o cociente entre un término y el inmediatamente anterior varía de forma continua pero se estabiliza, en un agujero numérico, como es el número aúreo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339,$$

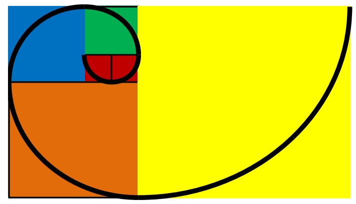


Figura 8: Rectángulo Aúreo. Espiral Aúrea.

que no es solo "propiedad" de la sucesión de Fibonacci, ya que cualquier sucesión recurrente de orden 2, como por ejemplo, la sucesión $5, 6, 11, 17, 28, 45, ...$ conduce al mismo límite.

- Comprobar que todo número natural se puede escribir como la suma de un número limitado de términos de la sucesión de Fibonacci.
- La sucesión de Fibonacci es periódica en las congruencias módulo m, para cualquier m.
- Cada número de la sucesión de Fibonacci es la suma del término que se encuentra dos posiciones antes y el término que se encuentra en una posición después:
$$f_n = \frac{f_{n-2} + f_{n-1}}{2}.$$
- La suma de los n primeros números es igual al número que ocupa la posición $n + 2$ menos uno:
$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$$

5 Conclusiones

La experiencia acumulada por los autores de este trabajo nos quiere poner de manifiesto, que la enseñanza problematizada y modelizada (Romero, 2000) de las matemáticas nos permite hacer realidad, y estamos convencidos de ello, que existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático (De Lange et al., 1993; Romero, 2011). Esto significa que debemos de manera implícita o explícita inculcar, a nuestros estudiantes, la idea de recorrer el proceso entre la situación real y la idea matematizada, y viceversa. ¿Cómo desarrollarlos?

Como idea de futuros trabajos:

∗ Utilizando determinados conceptos matemáticos, podríamos analizar el perfil inicial de las alumnas y alumnos, las capacidades que pudieran desarrollar y el cambio en la concepción matemática cuando aborden procesos de modelización.

∗ Pretendemos, a partir de una metodología de tipo cualitativo y cuantitativo, diseñar una estrategia que permita un estudio detallado y conciso de los resultados de los alumnos a los que se les someta determinadas pruebas de modelización.

∗ Todo ello, esperamos que nos conduzca a obtener una conclusión en la que queden reflejadas las debilidades y fortalezas con problemas planteados, en cuanto a las matemáticas que se "necesitan" o son visibles en el quehacer diario (Romero et al, 2008).

Hemos pretendido, no sé si lo habremos logrado, mostrar algunos ejemplos, unos originales y otros no, con los que los alumnos/as y los enseñantes puedan modelizar diferentes situaciones y realizar actividades creativas diversas (Romero et al, 2008).

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Referencias

Aravena, D. M., Caamaño, E. C. (2007).
Modelizacion matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de talca, Chile.
Estudios Pedagógicos XXXIII, 2: 7–25, 200.

Cook, C. K. (2014).
The Fibonacci Quarterly.
Fibonacci Quarterly 52(4).

De Lange, J., Keitel, C., Huntley, I., Niss, M. (1993).
Innovations in maths education by modelling and applications.
London: Ellis Horwood.

Fieggen, I. (2015).
http://www.fieggen.com/shoelace/lacing.htm

Kaprekar, D. R. (2007).
https://en.wikipedia.org/wiki/D._R._Kaprekar

Kaprekar, D. R. (2007).
School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html

O'connor, J., Robertson, E. F. (2007).
D. R. Kaprekar, MacTutor History of Mathematics archive.
University of St Andrews. Scotland.

Rico, L. (1997.).
Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para la Educación secundaria.
La Educación matemática en la enseñanza Secundaria. Barcelona: ICE. Universidad de Barcelona/Horsori Editorial. 15–59.

Romberg, T. (1991).
Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas.
Revista de Educación 294, 323–406.

Romero, S. (2000).
Matematización de la cultura. Límites y asedios a la racionalidad.
Epsilon. SAEM Thales 48, 409–420.

Romero , S. (2011).
La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática.
Modelling in Science Education and Learning 4, 35–70.

Romero, S., Benítez, R. (2008).
De la Jungla de Cristal III a las ecuaciones diofánticas pasando por el algoritmo de Euclides.
Epsilón. SAEM Thales 70, 7–26.

Romero, S., Castro, F. (2008).
Modelización matemática en Secundaria desde un punto de vista superior: El problema de Dobogókó.
Modelling in Science Education and Learning 1, 11–23.

Weisstein, E. W. (2015).
Kaprekar Number.
A Wolfram Web Resource: http://mathworld.wolfram.com/KaprekarNumber.html

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL