

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de  
Materiales



Trabajo de Fin de Máster de Ingeniería Mecánica

“MODELADO Y SIMULACIÓN ACÚSTICA  
3D MEDIANTE COMSOL DE  
DISPOSITIVOS DE LA LÍNEA DE ESCAPE  
EN VEHÍCULOS. APLICACIÓN A  
CATALIZADORES”

*Presentado por:* D. Carlos Pelayo Villar Pérez  
*Dirigido por:* Dr. D. Francisco David Denia Guzmán

Valencia, septiembre de 2016

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, quisiera agradecer a Paco, tutor de este Trabajo Fin de Máster, la dedicación y ayuda proporcionadas, a lo largo de los meses de estudio.

A compañeros como Diego, Mario o Álvaro durante mis años en Almería, o Pablo, Pepe, Morata, Manín, Dani, Javi o Víctor en Valencia, entre otros, por su enorme colaboración y amistad tanto dentro como fuera de clases.

A mis padres, quienes, a pesar de encontrarse a kilómetros y kilómetros de distancia, siempre han sabido brindarme su apoyo, no sólo durante estos meses, sino durante todos mis años de estudio en Ingeniería.

Y por último, y no por ello menos importante: a Jen, mi pareja, principal sufridora de mis decepciones (la mayoría exageradas) y principal responsable de haber logrado cumplir mis objetivos, de sostenerme cuando todo parecía encaminarse al fracaso y de encontrarme en el lugar adecuado en el momento correcto.

## **RESUMEN**

Se pretende utilizar el programa comercial Comsol para desarrollar e implementar una metodología basada en elementos finitos que permita la simulación del comportamiento acústico de dispositivos de la línea de escape de vehículos que incorporan un monolito en su interior. Dichos dispositivos, tales como catalizadores, tienen un impacto acústico considerable desde el punto de vista del control de las emisiones sonoras y deben ser tenidos en cuenta en el diseño integral de la línea de escape de motores de combustión. Los modelos a implementar deben permitir el acoplamiento de regiones de aire mediante monolitos cerámicos formados por tubos capilares que tienen características acústicas disipativas.

Con las herramientas desarrolladas, se hará un estudio exhaustivo de la influencia en la atenuación acústica de parámetros de diseño como la resistividad y la porosidad del monolito, así como otras características de tipo geométrico, etc.

## **PALABRAS CLAVE**

Elementos finitos, acústica, catalizadores, control de ruido, Comsol.

## **RESUM**

Es pretén utilitzar el programa comercial Comsol per a desenvolupar i implementar una metodologia basada en elements finits que permeta la simulació del comportament acústic de dispositius de la línia d'escapament de vehicles que incorporen un monòlit en el seu interior. Aquests dispositius, com ara catalitzadors, tenen un impacte acústic considerable des del punt de vista del control de les emissions sonores i han de ser tinguts en compte en el disseny integral de la línia d'escapament de motors de combustió. Els models a implementar han de permetre l'adaptament de regions d'aire per mitjà de monòlits ceràmics formats per tubs capil·lars que tenen característiques acústiques dissipatives.

Amb les ferraments desenvolupades, es farà un estudi exhaustiu de la influència en l'atenuació acústica de paràmetres de disseny com la resistivitat i la porositat del monòlit, així com altres característiques de tipus geomètric, etc.

## **PARAULES CLAU**

Elements finits, acústica, catalitzadors, control de soroll, Comsol.

## **ABSTRACT**

Commercial package Comsol is used in the current work to develop and to implement a method based on the finite element method that allows the simulation of the acoustic behaviour of automotive exhaust devices including a monolith. These devices, such as catalytic converters, can have a considerable acoustic impact from the point of view of noise emission control, and they must be kept in mind in the integral acoustic design of the exhaust system in internal combustion engines. The models to be implemented must allow the connection of air sections by ceramic monoliths formed by capillaries which have dissipative acoustic properties.

With the developed tools, an exhaustive study is made considering the influence on the acoustic attenuation of model parameters such as monolith's resistivity and porosity, as well as other geometric characteristics, etc.

## **KEY WORDS**

Finite elements, acoustics, catalytic converters, noise control, Comsol

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>1. Objeto y alcance de estudio</b> .....	8
<b>2. Introducción</b> .....	10
<b>2.1 – Motivación</b> .....	11
<b>2.2 – Catalizadores y reducción de emisiones</b> .....	12
<b>2.3 – Control del ruido</b> .....	14
<b>3. Fundamentos</b> .....	15
<b>3.1 – Teoría acústica</b> .....	16
3.1.1 – Sonido .....	16
3.1.2 – Mecanismos de propagación .....	17
3.1.3 – Tipología de ondas .....	18
3.1.4 – Medios de propagación .....	19
3.1.5 – Comportamiento armónico de ondas .....	20
3.1.6 – Impedancia acústica .....	22
3.1.7 – Medición del sonido .....	22
<b>3.2 – Catalizadores</b> .....	24
3.2.1 – Ruido en motores .....	24
3.2.2 – Catalizadores como atenuadores acústicos .....	25
<b>4. Modelo de ondas</b> .....	29
<b>4.1 – Modelos aplicables</b> .....	30
4.1.1 – Modelo dinámico .....	30
4.1.2 – Modelo acústico lineal .....	34
<b>4.2 – Hipótesis iniciales</b> .....	35
<b>4.3 – Dedución de la ecuación de ondas</b> .....	36
<b>4.4 – Solución a la ecuación de ondas</b> .....	39
4.4.1 – Distribución espacial de presión .....	39
4.4.2 – Velocidad de partículas .....	40
<b>4.5 – Ecuación de Helmholtz</b> .....	41

<b>4.6 – Impedancia acústica</b> .....	42
4.6.1 – Impedancia acústica del aire.....	43
4.6.2 – Impedancia acústica de pared rígida .....	44
<b>5. Fenómenos de propagación en conductos</b> .....	45
<b>5.1 – Introducción</b> .....	46
<b>5.2 – Propagación acústica en cambios de sección</b> .....	46
5.2.1 – Reflexión .....	46
5.2.2 – Transmisión.....	49
<b>5.3 – Propagación acústica en particiones</b> .....	50
<b>5.4 – Propagación acústica en conductos capilares</b> .....	53
<b>6. Método de elementos finitos</b> .....	55
<b>6.1 – Generalidades del MEF</b> .....	56
6.1.1 – Introducción.....	56
6.1.2 – Tipología de modelos.....	57
<b>6.2 – Método de Elementos Finitos (MEF)</b> .....	58
6.2.1 – Paso 1: Discretización del modelo .....	58
6.2.2 – Paso 2: Aproximación nodal .....	59
6.2.3 – Paso 3: Planteamiento matricial .....	60
6.2.4 – Paso 4: Ensamblado .....	60
6.2.5 – Paso 5: Definición de las condiciones de contorno.....	60
6.2.6 – Paso 6: Transformación de coordenadas.....	60
6.2.7 – Paso 7: Resolución .....	61
<b>6.3 – Aplicación</b> .....	61
6.3.1 – Modelo 3D conductos / 3D monolito .....	62
6.3.2 – Modelo 3D conductos / 1D monolito .....	65
<b>7. Método de trabajo</b> .....	70
<b>7.1 – Definición del problema</b> .....	71
<b>7.2 – Implementación computacional</b> .....	72
7.2.1 – Pre-procesado.....	73

7.2.2 – Procesado .....	74
7.2.3 – Post-procesado .....	74
<b>8. Modelización en Comsol .....</b>	<b>75</b>
8.1 – Introducción.....	76
8.2 – Implementación en Comsol Multiphysics.....	76
8.3 – Procedimiento en Comsol .....	77
8.4 – Modelado y análisis.....	77
8.4.1 – Modelo 3D-3D.....	78
8.4.2 – Modelo 3D-1D.....	95
8.4.3 – Modelado con componente 3D estando entrada y salida centradas .....	104
8.4.4 – Modelado con conducto de salida descentrado.....	107
8.4.5 – Modelado con conducto de salida en situación de descentrado óptimo .....	108
<b>9. Resultados y conclusiones .....</b>	<b>110</b>
9.1 – Introducción.....	111
9.2 – Influencia de la resistividad sobre TL.....	111
9.3 – Influencia de la longitud del monolito sobre el índice TL .....	113
9.4 – Comparación de TL entre los casos 3D-1D y 3D-3D.....	115
9.5 – Comparación de TL entre los casos centrados, descentrado y descentrado óptimo .....	117
9.6 – Conclusiones finales .....	118
<b>10. Bibliografía .....</b>	<b>120</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>124</b>
ANEXO I: Cálculo de las propiedades del monolito usando Mathcad .....	125
ANEXO II: Cálculo de la matriz de transferencia usando Mathcad .....	128

# 1.

## Objeto y alcance de estudio

El presente Trabajo de Fin de Máster tiene como objetivo principal el de implementar y desarrollar una metodología basada en elementos finitos, la cual permita la simulación del comportamiento acústico de catalizadores situados en el escape de los motores de combustión interna alternativos de vehículos.

Se tomarán dos alternativas posibles para la determinación de dicha metodología, atendiendo a la composición del catalizador en cuestión:

- Monolito interior con numerosos capilares.
- Matriz de transformación existente entre los conductos de admisión y de escape.

La simulación del comportamiento acústico tendrá lugar mediante el uso del programa de elementos finitos COMSOL MULTIPHYSICS, empleando igualmente códigos de tipo numérico y analítico desarrollados por el grupo de investigación del Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales.

Mediante este software, se realizará un estudio sistemático de la influencia de parámetros tales como porosidad o longitud de geometrías sobre la atenuación acústica que tiene lugar en el catalizador.

# 2.

## Introducción

## 2.1 – Motivación

El grupo de investigación en el que se enmarca el presente Trabajo Fin de Máster tiene una amplia experiencia en el modelado y caracterización experimental del comportamiento acústico del sistema de escape en motores de combustión interna alternativos.

En las últimas décadas, se ha llevado a cabo un trabajo exhaustivo en relación al desarrollo, implementación y validación de herramientas computacionales basadas en soluciones analíticas tridimensionales de la ecuación de ondas para reducir el coste computacional, si bien su aplicabilidad queda relegada a configuraciones relativamente simples desde un punto de vista geométrico [1-6].

Con el fin de eliminar dichas limitaciones geométricas, el grupo de investigación también ha dedicado especial atención al desarrollo de herramientas generales basadas en elementos finitos para considerar casos más complejos, como por ejemplo la presencia de altas temperaturas, gradientes térmicos y flujo medio [7-9].

Dado el elevado coste computacional de las técnicas numéricas tales como el Método de Elementos Finitos [10], es destacable también el interés en modelos híbridos analítico-numéricos que reduzcan dicho coste en términos de cálculo en el estudio de casos complejos [11,12].

Si bien la atenuación acústica viene dada en gran medida por los silenciadores de la línea de escape, otros dispositivos tales como los catalizadores y los filtros de partículas también tienen una influencia relevante. Por este motivo, en los últimos años se han desarrollado modelos y herramientas para la adecuada caracterización acústica de dichos dispositivos [13-15].

## 2.2 – Catalizadores y reducción de emisiones

El progresivo y alarmante crecimiento de las emisiones de gases tales como  $\text{CO}_2$  o  $\text{NO}_x$  a la atmósfera desde el sector automovilístico, entre otros, provocó la redacción de la Ley de Aire Limpio de 1970 por parte de la EPA (Agencia de Protección Ambiental), tras la cual se intensificó el estudio de la tecnología catalítica, obteniendo resultados cada vez mejores [16].

Los convertidores catalíticos, o catalizadores, instalados en la tubería de escape de los motores de combustión interna alternativa, están compuestos por dos estructuras cerámicas llamadas monolitos, los cuales contienen numerosos conductos o capilares interiores (del orden de 400 celdas por pulgada) revestidos de materiales como platino, radio o rodio. El monolito queda montado térmicamente aislado en el interior de una caja de acero inoxidable y es en su interior donde tienen lugar las transformaciones químicas que dan como resultado una reducción de emisiones contaminantes.

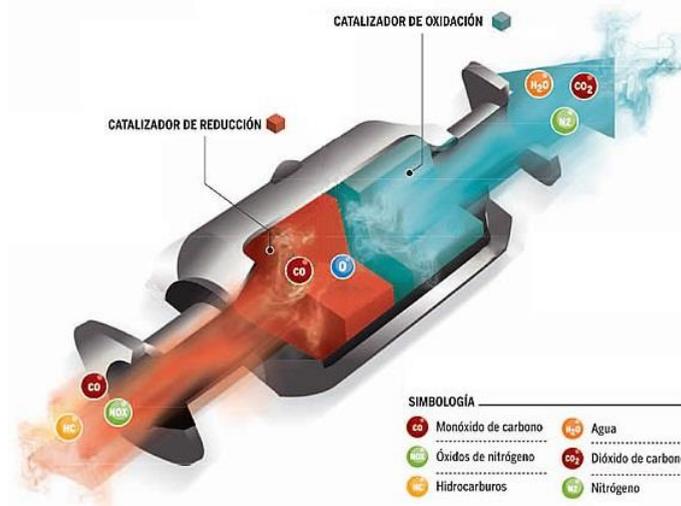


Figura 2.1: Fenómenos de reducción y oxidación de contaminantes en el interior de un catalizador

Tal y como se aprecia en la Fig. 2.1, las emisiones resultantes de la combustión ( $\text{NO}_x$ , CO y HC sin quemar) llegan al catalizador y entran en primer lugar por los capilares del primer monolito, cubierto de platino y rodio, lo cual produce la reducción del óxido de nitrógeno en nitrógeno. El segundo monolito, cubierto de platino y paladio, oxida el CO y los HC, produciendo  $\text{CO}_2$  y agua, que son los gases resultantes y expulsados por el colector de escape.

Los estudios más actuales sobre el comportamiento de la conversión de emisiones comprenden un modelo multidimensional, facilitando la predicción de gradientes más reales de temperatura, en direcciones axiales y radiales, lo cual tiene importantes implicaciones en términos de pérdidas de calor o resistencia estructural.

Aunque el principal objetivo de estos convertidores catalíticos es la reducción de emisiones contaminantes, tal y como se ha comentado, resulta muy interesante el estudio de su capacidad para atenuar ruidos producidos en el motor o por los propios gases. Esta característica será clave en el presente trabajo.

## 2.3 – Control del ruido

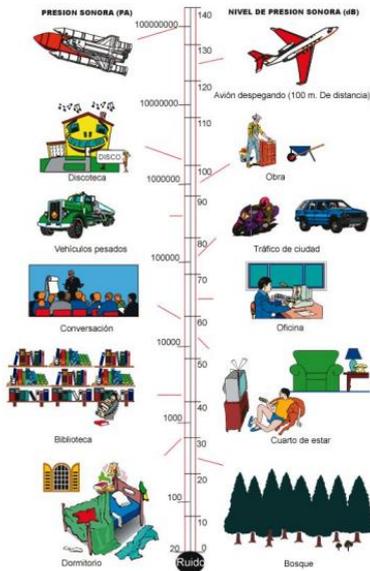


Figura 2.2: Escala de niveles sonoros cotidianos

El ruido, entendido como sonido acústico indeseado, molesto y excesivo y que interfiere en la actividad humana, puede causar importantes efectos psicológicos y fisiológicos adversos sobre las personas, tales como modificación del ritmo respiratorio o aceleración del ritmo cardíaco. Es por ello por lo que numerosos gobiernos mundiales han implantado legislación referente al control del ruido y a la imposición de límites para su generación [17].

En la vida cotidiana, tal y como se aprecia en la Fig. 2.2, se producen multitud de fuentes de ruido, especialmente el relacionado con el tráfico de vehículos. Éstos están compuestos por gran cantidad de elementos que, durante el funcionamiento, son capaces de alterar la vida de las personas: interacción de las ruedas con el suelo, paso de gases por tuberías, órganos de transmisión o motor. Este último elemento produce el ruido más importante, ya sea durante el proceso de combustión, durante el accionamiento mecánico o el proceso de renovación de carga.

# 3.

## Fundamentos

## 3.1 – Teoría acústica

### 3.1.1 – Sonido

El sonido es un fenómeno físico que consiste en la alteración mecánica de las partículas de un medio elástico, producida por una perturbación de presión, que es capaz de provocar una sensación auditiva. La vibración de las moléculas de aire provoca una variación de la presión atmosférica, es decir, el paso de una onda sonora produce una onda de presión que se propaga por el aire.

En el aire, que es el medio al que habitualmente nos referiremos, la perturbación se propaga por la puesta en vibración de las moléculas de aire situadas en la proximidad del elemento vibrante, que a su vez transmiten el movimiento a las moléculas vecinas, y así sucesivamente, quedando esta propagación en función de las propiedades inerciales y elásticas del medio en el cual se transmite el sonido.

La propagación de ondas acústicas es un fenómeno que afecta a propiedades tales como presión ( $p$ ), densidad ( $\rho$ ), condensación ( $\theta$ ), desplazamiento ( $\xi$ ) y velocidad de partículas ( $c$ ). Generalmente, para los casos de presión, densidad y velocidad tenemos que:

- $p_T = p_0 + p$
- $\rho_T = \rho_0 + \rho$
- $u_T = u_0 + u$

De aquí en adelante nos referiremos al subíndice T como valor total, al subíndice 0 como valor medio y a las variables sin subíndice como valores de perturbación acústica.

Cabe destacar que existen dos características básicas de una onda:

- Frecuencia ( $f$ ): número de perturbaciones por unidad de tiempo.

- Longitud de onda ( $\lambda$ ): distancia entre dos puntos consecutivos en el mismo estado de vibración.

Ambos conceptos están relacionados de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{f} ; \lambda = c \cdot T$$

Donde T es el periodo y c la velocidad del sonido.

### 3.1.2 – Mecanismos de propagación

Al relacionarse la propagación de ondas con el desplazamiento de las mismas en el espacio, las ondas acústicas pueden ser de tipo unidimensional, bidimensional o tridimensional.

- a) Ondas planas: tienen lugar cuando la propagación es unidimensional, con frentes de onda como planos paralelos, quedando dependencia únicamente respecto de una coordenada espacial (x) y del tiempo.
- b) Ondas esféricas: características de la propagación multidimensional, con frentes de onda como esferas concéntricas. La dependencia de la onda será respecto de la distancia radial y el tiempo.

Estos conceptos cobrarán gran sentido en el presente trabajo, especialmente a la hora de diferenciar los casos de estudio, así como el comportamiento acústico a bajas frecuencias.

### 3.1.3 – Tipología de ondas

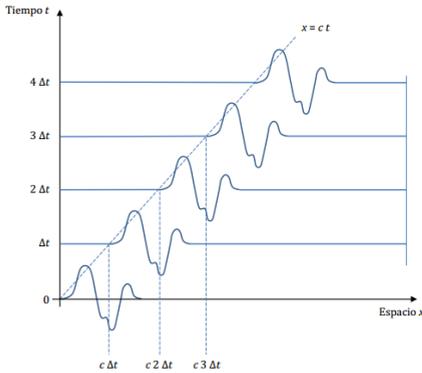
Aunque la transmisión de las ondas está siempre relacionada con el movimiento de partículas alrededor de su posición de equilibrio (vibración), éstas pueden clasificarse según la relación entre el movimiento de las partículas y dirección de propagación y según el sentido de dicha propagación:

I) Ondas según desplazamiento de partículas:

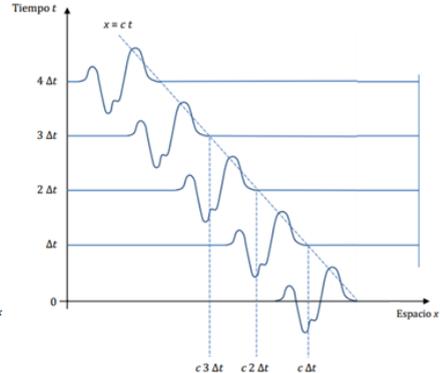
- **Ondas longitudinales:** en ellas la dirección del desplazamiento alrededor de la posición de equilibrio es la misma que la de propagación de la perturbación.
- **Ondas transversales:** en ellas la dirección de desplazamiento de partículas es perpendicular a la de la propagación de la perturbación.

II) Ondas según sentido de propagación

- **Ondas progresivas:** la propagación se produce en sentido creciente de la componente axial de desplazamiento, definiéndose como  $f(ct - x)$ .
- **Ondas regresivas:** la propagación se produce igualmente en sentido creciente de la componente axial de desplazamiento, aunque éstas se definen como  $f(ct + x)$ .



**Figura 3.1: Propagación de una onda progresiva**



**Figura 3.2: Propagación de una onda regresiva**

En determinadas circunstancias, como en conductos tubulares, nos podemos encontrar con una combinación de una onda progresiva y otra regresiva, lo cual genera una **onda estacionaria**, caracterizada por la falta de existencia de transporte neto de energía.

### 3.1.4 – Medios de propagación

Las ondas necesitan un medio por el cual éstas son capaces de propagarse a partir de una perturbación. Este medio puede tratarse de un sólido, un líquido o un gas, dependiendo de las propiedades de cada uno para caracterizar la propagación.

Con normalidad, trataremos la propagación del sonido en el **aire**, cuya densidad se puede conocer a partir de la temperatura mediante la ecuación (3.1):

$$\rho_T = \frac{p_T \cdot M_{mol}}{R \cdot T} \quad (3.1)$$

Donde  $R = 8.314 \frac{J}{K \cdot mol}$ ,  $p_0 \approx p_T = 101325 Pa$  y  $M_{mol} = 0.02897 \frac{kg}{mol}$ .

Asumiendo que el proceso de propagación es adiabático, podemos obtener una forma de obtener la velocidad en el medio:

$$c^2 = \left( \frac{dp_T}{d\rho_T} \right)_{ad} = \frac{\gamma \cdot p_T}{\rho_T} = \frac{\gamma \cdot p_0}{\rho_0} \quad (3.2)$$

Combinando las ecuaciones (3.1) y (3.2) llegamos a la ecuación de velocidad de onda, la cual depende del medio y la temperatura absoluta:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M_{mol}}} \quad (3.3)$$

En el aire, con valores ambientales típicos de  $T=288$  K y  $\gamma=1.4$ , la velocidad del sonido equivale a  **$c_0=341$  m/s**.

### 3.1.5 – Comportamiento armónico de ondas

Las ondas sonoras en fluidos se pueden considerar como una sucesión de compresiones y enrarecimientos de los mismos, de tal modo que al paso de las ondas, la presión del medio experimenta fluctuaciones que son vibraciones armónicas, caracterizadas por funciones seno y coseno.

Así, al existir una onda sonora en un fluido, su presión varía sinusoidalmente tal y como se muestra en la ecuación (3.4).

$$p(x, t) = p_0 \cdot \cos\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \quad (3.4)$$

Considerando un factor  $k$ , conocido como número de onda, que relaciona la velocidad angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  y la de propagación, tal que  $k = \frac{\omega}{c_0}$ , obtenemos otra forma de expresar la presión en el fluido:

$$p(x, t) = p_0 \cdot \cos(\omega t - kx) \quad (3.5)$$

Sin embargo, la forma más sencilla de representar las ondas sonoras es mediante notación compleja, ya que al depender del

tiempo, la función coseno se puede expresar tal que  $e^{i\omega t}$ . Utilizando la ecuación de Euler y sustituyendo en la (3.5) resulta:

$$p(x, t) = \text{Re} [p_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}] = \text{Re} (p_0 \cdot e^{i\omega t} e^{-ikx}) = \text{Re}(\widehat{p}_0 \cdot e^{i\omega t}) \quad (3.6)$$

(Ecuación de Euler:  $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ )

De donde se extrae que  $\widehat{p}_0 = e^{-ikx}$  es la amplitud compleja y  $\text{Re}$  la parte real del número complejo, el cual puede representarse según la figura 3.3.

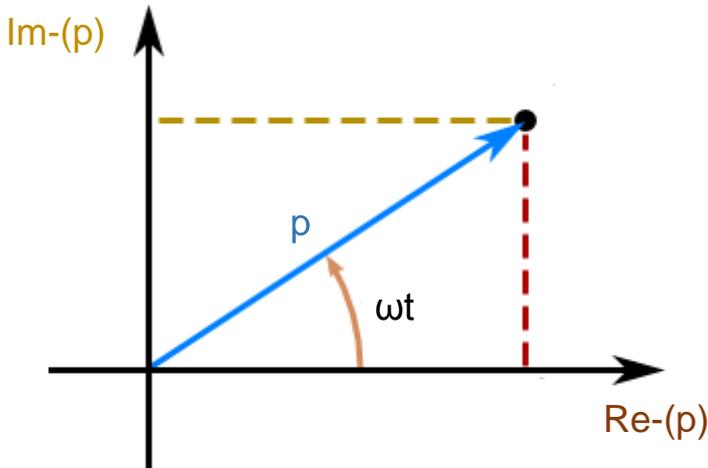


Figura 3.3: Representación de una onda compleja

Una vez introducido el concepto de onda armónica y su representación compleja, podemos representar de esta forma las ecuaciones de ondas progresivas y regresivas tratadas anteriormente, según las ecuaciones (3.7) y (3.8), respectivamente:

$$p(x, t) = p_0 \cdot \cos(\omega - kx) \rightarrow \widehat{p}_0 = p_0 \cdot e^{-ikx} \quad (3.7)$$

$$p(x, t) = p_0 \cdot r \cdot \cos(\omega + kx) \rightarrow \widehat{p}_0 = p_0 \cdot r \cdot e^{ikx} \quad (3.8)$$

Como se introdujo con anterioridad de igual manera, una onda estacionaria consiste en una combinación de onda progresiva y

onda regresiva, por lo que su ecuación se hallaría combinando las ecuaciones (3.7) y (3.8), obteniendo la ecuación (3.9):

$$p(x, t) = p_0(e^{-ikx} + r \cdot e^{ikx}) \quad (3.9)$$

El factor  $r$  se trata de un coeficiente de reflexión de la presión incidente sobre el obstáculo que produce la regresión y es resultado de la relación entre onda regresiva y onda progresiva, cuyo valor depende del propio obstáculo.

### 3.1.6 – Impedancia acústica

La impedancia acústica puede definirse como la relación entre la presión acústica y la velocidad de la partícula. Es decir, se puede tratar como la oposición o resistencia del medio a la propagación de la onda acústica.

$$Z = \frac{p}{u}$$

Para cualquier medio, existe una impedancia característica, que depende de la densidad del mismo y de la velocidad de propagación, por lo que es exclusiva para cada medio. Por lo tanto, para el caso de ondas progresivas, esta impedancia toma ecuación  $z_0 = \rho_0 \cdot c$ , mientras que para ondas regresivas su ecuación es  $z_0 = -\rho_0 \cdot c$ .

### 3.1.7 – Medición del sonido

Al propagarse una onda acústica en un medio, se produce una modificación en la presión, densidad y velocidad local. Es por ello por lo que para realizar una medición de la perturbación acústica un método válido consistiría en medir el estado de las variables anteriores durante la propagación, siempre en términos de presión.

El ser humano tiene la capacidad de percibir sonidos a partir de 20  $\mu\text{Pa}$ , el cual se conoce como umbral de audición, hasta 20 Pa sin sufrir daños, considerando este último como umbral del dolor. Como se puede comprobar, el oído humano es capaz de percibir sonidos en un amplísimo rango de presiones, y tiene una respuesta no lineal. Debido a este hecho, este rango se comprime utilizando una escala logarítmica, la cual nos permite disponer de valores numéricos más manejables.

El nivel de presión sonora, atendiendo a lo anterior, se obtendría de la siguiente manera:

$$L_p = 10 \cdot \log\left(\frac{p_{ef}}{p_0}\right)^2 = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{ef}}{p_0}\right) \quad (3.10)$$

Donde  $p_0$  representa el valor de referencia de la presión acústica (con valor de  $20 \cdot 10^{-6}$  Pa) y  $P_{ef}$  es la presión acústica eficaz. El resultado se expresa en decibelios (dB).

## 3.2 – Catalizadores

### 3.2.1 – Ruido en motores

Tal y como se mostró en la Fig. 2.2, los vehículos son la fuente de ruido más común y principal dentro de una ciudad, alcanzando los 80 dB, el cual está producido por diferentes componentes de los vehículos, tales como el motor, la interacción de las ruedas con el suelo, paso de gases por tuberías o los órganos de transmisión. De todos ellos, el más importante es el producido por el motor, el cual puede deberse a la combustión, a la renovación de carga o al accionamiento mecánico [18].

Los procesos anteriores producen dos tipos de ruidos:

- Ruido aerodinámico: obtenido a partir de las variaciones no estacionarias del caudal de fluido en los extremos de los colectores de admisión y de escape. Este ruido puede subdividirse en otros dos procesos [19]:
  - Ruido de llenado y vaciado de cilindros.
  - Ruido producto de la turbulencia obtenida al atravesar distintas singularidades tales como cambios de sección o válvulas.
- Radiación: resultado de la vibración de superficies.

El llenado y vaciado de los cilindros produce un espectro de ruido con un alto predominio de frecuencias múltiplo de la frecuencia de encendido [20], por lo que existe una gran dependencia del régimen de giro. La forma de apertura en admisión y escape es principal causa de la onda de presión inducida por el cilindro, de lo que se deduce que este hecho determina sobremanera el contenido espectral de la perturbación.

Aquí nos encontramos con dos hechos importantes, en admisión y en escape:

- a) Admisión: variaciones suaves de presión, con predominio de emisión en baja frecuencia.
- b) Escape: posibilidad de desarrollo de ondas de choque en el colector, debido a variaciones más bruscas de presión y de mayor amplitud que en el caso de la admisión. Por ello, se produce un incremento considerable de ruido de alta frecuencia.

Por lo tanto, se puede extraer de todo lo anterior que se hace imperativo controlar la generación de ruido en motores de combustión interna alternativos, mediante el diseño de elementos de disipación de ruido en el escape como los silenciadores. Como se verá, los catalizadores (que es el tema que nos ocupa), no tienen como principal objetivo la reducción del ruido producido en los motores, pero se han realizado numerosas investigaciones y ensayos en los que se buscan dichas reducciones, siendo importante su impacto, por lo que se realizan los estudios.

### 3.2.2 – Catalizadores como atenuadores acústicos

El catalizador consiste en un dispositivo cuya misión principal consiste en disminuir los elementos contaminantes contenidos en los gases de escape de un vehículo mediante la técnica de la catálisis. Este dispositivo queda instalado en el tubo de escape, cerca del motor, debido a que en ese punto los gases mantienen una temperatura elevada [21].

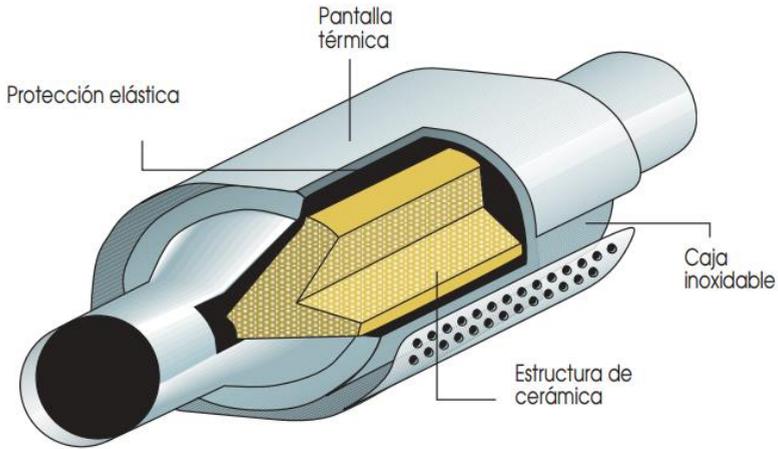


Figura 3.4: Composición de un catalizador común

El catalizador es un recipiente de acero inoxidable, normalmente provisto de una carcasa-pantalla metálica antitérmica, igualmente inoxidable, que protege los bajos del vehículo de las altas temperaturas alcanzadas.

Dentro del mismo se encuentra un soporte cerámico o **monolito**, con forma ovalada o cilíndrica, con una estructura de múltiples celdillas en forma de panal, cuya densidad es de aproximadamente 450 celdillas por cada pulgada cuadrada (unas 70 por  $\text{cm}^2$ ). Su superficie se encuentra impregnada con una resina que contiene elementos nobles metálicos, tales como Platino (Pt) y Paladio (Pd), que permiten la función de oxidación, y Rodio (Rh), que interviene en la reducción, tal y como se comentó en el subcapítulo 2.1.

Los mencionados metales preciosos actúan como elementos activos catalizadores; es decir, inician y aceleran las reacciones químicas entre otras sustancias con las cuales entran en contacto, sin participar ellos mismos en estas reacciones. Los gases de escape contaminantes generados por el motor, al entrar en contacto con la superficie activa del catalizador son transformados parcialmente en elementos inocuos no contaminantes.

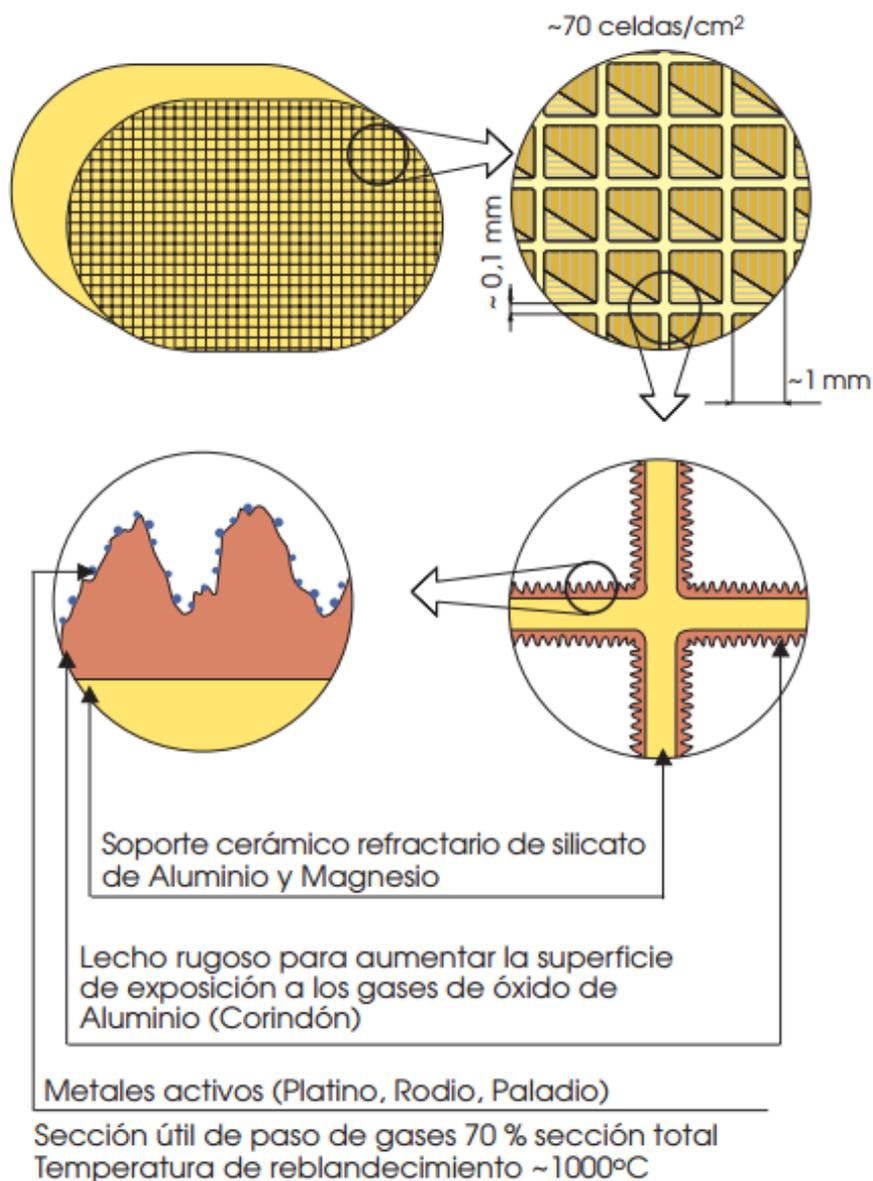


Figura 3.5: Descripción del monolito

El control de emisiones ha sido claramente el objetivo principal de los convertidores catalíticos, dentro del sistema de escape de los motores de combustión interna alternativa. Sin embargo, este elemento es igualmente muy efectivo en la tarea de reflejar y disipar considerablemente el ruido producido por el propio motor, actuando por lo tanto como un silenciador reactivo / disipativo.

El uso de toda la superficie cerámica posible de todas las celdas de sección cuadrada, a partir de ahora referidas como capilares, es altamente deseable. De este modo, el conducto de entrada se conecta al catalizador mediante un difusor, con la esperanza de que el fluido se expanda de forma relativamente uniforme sobre toda la superficie del monolito.

En resumen, el tratamiento que se dará en este trabajo al catalizador será de atenuador acústico, combinando el campo ondulatorio en el interior del monolito con los conductos de entrada y salida y el de escape, descartando la transferencia de masa y calor, así como las reacciones químicas que tienen lugar en la reducción de contaminantes.

Como se volverá a comentar posteriormente, se propondrán dos configuraciones posibles a la hora de estudiar el comportamiento acústico de los catalizadores:

- I) Modelo completamente multidimensional (3D conductos / 3D monolito).
- II) Modelo sustituyendo el monolito por una matriz de transferencia "nodo a nodo" (3D conductos / 1D monolito).

# 4.

## Modelo de ondas

En este capítulo se presentarán las ecuaciones que gobiernan la propagación acústica del sonido, a partir de unos modelos e hipótesis que simplifican el problema, generando soluciones aceptables.

Por ello, se deducirá la ecuación de ondas y se propondrán hipótesis que obtendrán la linealización de la misma.

## 4.1 – Modelos aplicables

Dentro del ámbito de los catalizadores, existen 2 modelos que nos permiten realizar el estudio de la atenuación acústica

### 4.1.1 – Modelo dinámico

Se trata de un modelo fluido-mecánico caracterizado por la complejidad que tiene lugar en la búsqueda de soluciones debido a la no linealidad de sus variables. Puede ser definido a partir de las ecuaciones dinámicas de momento, de continuidad y de energía [20].

La solución de estas ecuaciones permite describir el comportamiento espacio-temporal de las variables acústicas, teniendo en cuenta en el caso más general la fricción entre superficies, la transmisión de calor y, por tanto, las variaciones de entropía.

Se consideran simultáneamente 3 ecuaciones:

#### a) Ecuación de momento

En ella se representa el equilibrio dinámico entre fuerzas inerciales, volumétricas, viscosas y de presión. En fluidos newtonianos, la ecuación se conoce como “ecuaciones de Navier-Stokes”.

$$\rho a_x = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right) \right] + \frac{\delta}{y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\delta}{z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (4.1)$$

$$\rho a_y = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right) \right] + \frac{\delta}{x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\delta}{z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$\rho a_z = \rho B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right) \right] + \frac{\delta}{y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\delta}{x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (4.3)$$

Donde  $\mu$  representa la viscosidad dinámica,  $B_x, B_y, B_z$  son las fuerzas volumétricas (en este caso, gravedad) y  $a_x = \frac{Du}{Dt}$ ,  $a_y = \frac{Dv}{Dt}$ ,  $a_z = \frac{Dw}{Dt}$  son la aceleración de las fuerzas de inercia. Se define la derivada natural  $\frac{D}{Dt}$  como:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.4)$$

#### b) Ecuación de continuidad

Expresa la conservación de la masa para un volumen de control.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

Donde  $u, v$  y  $w$  representan las componentes del vector velocidad  $\vec{v}$ ,  $\rho$  es la densidad de fluido y  $t$  es el tiempo.

c) Ecuación de la energía

Expresa la conservación de energía mediante el balance expresado en la ecuación (4.6).

$$E_{entrante} = E_{saliente} + E_{acumulada} \quad (4.6)$$

Si se toma un volumen de control diferencial del fluido, con dimensiones dx, dy y dz, cada término de la ecuación anterior se puede expresar tal que:

**I) Energía entrante**

$$\underbrace{\left\{ \rho u E - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u E) \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Energía interna en x}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \rho u |\bar{u}|^2 - \frac{\partial}{\partial x} [\rho u |\bar{u}|^2] \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Energía cinética en x}} + \underbrace{\left\{ p u - \frac{\partial (p u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Trabajo de flujo en x}} - \underbrace{\left\{ k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Conducción de calor en x}} dydz +$$

$$\underbrace{\left\{ \rho v E - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v E) \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Energía interna en y}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \rho v |\bar{u}|^2 - \frac{\partial}{\partial y} [\rho v |\bar{u}|^2] \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Energía cinética en y}} + \underbrace{\left\{ p v - \frac{\partial (p v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Trabajo de flujo en y}} - \underbrace{\left\{ k \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Conducción de calor en y}} dx dz +$$

$$\underbrace{\left\{ \rho w E - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w E) \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Energía interna en z}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \rho w |\bar{u}|^2 - \frac{\partial}{\partial z} [\rho w |\bar{u}|^2] \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Energía cinética en z}} + \underbrace{\left\{ p w - \frac{\partial (p w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Trabajo de flujo en z}} - \underbrace{\left\{ k \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Conducción de calor en z}} dy dx +$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} dx dy dz + \phi dx dy dz \quad (4.7)$$

Generación volumétrica  
interna de calor



Función de disipación  
debida a viscosidad

## II) Energía saliente

$$\underbrace{\left\{ \rho u E + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u E) \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Energía interna en x}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \rho u |\bar{u}|^2 + \frac{\partial}{\partial x} [\rho u |\bar{u}|^2] \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Energía cinética en x}} + \underbrace{\left\{ p u + \frac{\partial (p u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Trabajo de flujo en x}} - \underbrace{\left\{ k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right\}}_{\text{Conducción de calor en x}} dydz +$$

$$\underbrace{\left\{ \rho v E + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v E) \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Energía interna en y}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \rho v |\bar{u}|^2 + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v |\bar{u}|^2] \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Energía cinética en y}} + \underbrace{\left\{ p v + \frac{\partial (p v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Trabajo de flujo en y}} - \underbrace{\left\{ k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right\}}_{\text{Conducción de calor en y}} dx dz +$$

$$\underbrace{\left\{ \rho w E + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w E) \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Energía interna en z}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left\{ \rho w |\bar{u}|^2 + \frac{\partial}{\partial z} [\rho w |\bar{u}|^2] \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Energía cinética en z}} + \underbrace{\left\{ p w + \frac{\partial (p w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Trabajo de flujo en z}} - \underbrace{\left\{ k \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right\}}_{\text{Conducción de calor en z}} dy dx$$

(4.8)

## III) Energía acumulada

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho (u^2 + v^2 + w^2) \} \right] dx dy dz \quad (4.9)$$

Donde E representa la energía interna, k la conductividad térmica, T la temperatura y Q el calor generado por el fluido por unidad de volumen.

Estas ecuaciones son igualmente válidas para flujos laminares, de transición y turbulentos. En este último caso, las variables fluctúan aleatoriamente alrededor de su valor medio, por lo que el problema adquiere una naturaleza inmensamente compleja. Al no ser posible la resolución del problema en cada instante de tiempo, la manera más común de buscar una solución consiste en realizar

un promediado temporal de las ecuaciones y en la obtención de una nueva expresión de las mismas para describir los campos desconocidos promediados temporalmente.

#### 4.1.2 – Modelo acústico lineal

Consiste en una simplificación del modelo dinámico, considerando que los incrementos respecto de los valores de equilibrio son despreciables. Por ello, este modelo únicamente es aplicable para la propagación de perturbaciones de baja amplitud, lo cual puede ser capital en casos como fenómenos de flujo que tienen lugar en el interior de los colectores de motores de combustión interna.

Sin embargo, se ha comprobado que este modelo es válido y funcional para variaciones de presión entre 20 y 200 Pa, respecto a la presión atmosférica, por lo que sería posible caracterizar los catalizadores, ya que no se suelen superar los 140 dB.

## 4.2 – Hipótesis iniciales

### 1ª hipótesis

Se considera que el fluido por el que se propagan las ondas se trata de un gas perfecto.

### 2ª hipótesis

El proceso de propagación en el aire es adiabático, es decir, que no se produce intercambio de calor con el entorno.

### 3ª hipótesis

Al disponer de un gas perfecto, no existen pérdidas de energía por fricción: **viscosidad nula** (gas ideal,  $\mu=0$ ).

### 4ª hipótesis

Se considera la velocidad media del fluido nula ( $\vec{u}_0 = 0$ ), de lo que se extrae que las partículas sólo se mueven alrededor de su posición de equilibrio, provocando una propagación en forma de perturbación, y no una propagación neta de las partículas.

### 5ª hipótesis

Se consideran pequeñas variaciones de presión, velocidad y densidad de la partícula, linealizando el problema.

$$p = p_0 + p_a$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_a$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_a$$

Donde los términos con subíndice 0 expresan valores estáticos o medios y los de subíndice a son los valores pulsantes, los cuales representan variaciones producidas en el sonido.

### 4.3 – Deducción de la ecuación de ondas

La deducción de la ecuación de ondas tendrá como punto de partida las ecuaciones vistas según el modelo dinámico junto con las hipótesis iniciales.

#### 1) Ecuación de la dinámica (o de momento)

Asumiendo las hipótesis propuestas a las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), las ecuaciones de Navier-Stokes se simplificarán de la siguiente manera, obteniendo las **ecuaciones de Euler**:

$$\rho a_x = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$\rho a_y = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.11)$$

$$\rho a_z = \rho B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.12)$$

Con el objetivo de simplificar, a partir de la ecuación (4.4) y considerando  $\vec{B} = \vec{g}$ :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{B} - \nabla p \rightarrow \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \nabla \vec{u} - \vec{g} \right) = -\nabla p \quad (4.13)$$

Si aplicamos ahora las hipótesis 4 y 5:

$$(\rho_0 + \rho_a) \left( \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} - \vec{u}_a \nabla \vec{u}_a - \vec{g} \right) = -\nabla(p_0 + p_a) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} + \rho_0 \vec{u}_a \nabla \vec{u}_a - \rho_0 \vec{g} + \rho_a \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} + \rho_a \vec{u}_a \nabla \vec{u}_a - \rho_a \vec{g} \\ = -\nabla p_0 - \nabla p_a \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como la hipótesis 5 nos indica que las variables pulsantes tienen valores pequeños, los términos  $\vec{u}_a \nabla \vec{u}_a$  y  $\rho_a \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t}$  son infinitésimos de orden superior y pueden considerarse despreciables. De igual modo, el término  $\rho_0 \vec{g} + \rho_a \vec{g}$  es despreciable respecto de  $\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t}$  y

el término  $\nabla P_0$  es nulo, ya que  $P_0$  es constante. Así mismo, la ecuación de Navier-Stokes quedaría de la siguiente forma:

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} = -\nabla p_a} \quad (4.16)$$

*Ec. de la dinámica linealizada*

Donde  $\nabla p_a = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}$

## 2) Ecuación de continuidad

Aplicando las hipótesis 4 y 5 a la ecuación (4.5) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_a) + \nabla[(\rho_0 + \rho_a)\vec{u}_a] &= 0 \\ \rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{u}_a + \nabla(\rho_a \vec{u}_a) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Debido a que el término  $\rho_a \vec{u}_a$  es despreciable respecto al resto y a que  $\frac{\partial \rho_0}{\partial t}$  es nulo al ser constante la densidad media, la expresión (4.17) se podría simplificar de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{u}_a = 0} \quad (4.18)$$

*Ec. de continuidad linealizada*

## 3) Ecuación de estado

Partiendo de las ecuaciones de comportamiento del gas, así como de las hipótesis 1 y 2, tenemos lo siguiente:

- Gas isoentrópico:  $p \cdot V^\gamma = cte$
- Diferenciando lo anterior  $\rightarrow V^\gamma \cdot dp + p \cdot \gamma \cdot dV^{\gamma-1} dV = 0$
- Dividiendo  $\rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$
- Aplicando masa fija del volumen de control  $\rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = c_0^2 \quad (4.19)$$

Donde  $c_0$  representa la velocidad de propagación del sonido en el aire. Combinando esta ecuación con la hipótesis 5, obtenemos:

$$p = p_0 + p_a$$
$$\frac{\partial p_a}{\partial \rho_a} = \gamma \frac{p_a + p_0}{\rho_a + \rho_0} = c_0^2 \quad (4.20)$$

Finalmente, si consideramos nulas las pequeñas variaciones de presión y densidad, podemos decir que:

$$\boxed{\frac{\partial p_a}{\partial \rho_a} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c_0^2} \quad (4.21)$$

*Ecuación de estado*

#### 4) Ecuación de ondas

Para su deducción, sólo bastaría con combinar las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

- Sustituyendo la ecuación (4.21) en la ecuación (4.18):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{u}_a = 0 \quad (4.22)$$

- Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{u}_a = 0 \quad (4.23)$$

- Derivando (4.16) respecto del vector de desplazamiento:

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{u}_a = -\nabla^2 p_a \quad (4.24)$$

- Igualando (4.23) con (4.24):

$$\boxed{\nabla^2 p_a - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0} \quad (4.25)$$

*Ecuación de ondas*

Como se puede apreciar en la ecuación (4.25), ésta depende únicamente de la presión acústica cuando la velocidad media del fluido es nula, tal y como expresa la hipótesis 4. En este caso, nos encontraríamos con una ecuación de ondas convectiva.

## 4.4 – Solución a la ecuación de ondas

### 4.4.1 – Distribución espacial de presión

Debido a que en este proyecto nos enfrentaremos a un estudio de propagación de ondas unidimensional, cuando la velocidad media del fluido es nula, el problema de presión adquiere tal forma que se podría expresar como la combinación de una onda progresiva y otra regresiva, producto del choque de la onda con obstáculos o paredes.

$$p(x, t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

La solución más frecuente a tomar consiste en asumir comportamiento acústico de la onda de propagación.

$$p(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + B \cdot \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (4.26)$$

Donde A y B representan las amplitudes de las ondas progresiva y regresiva, respectivamente, k el número de onda,  $\omega$  la frecuencia angular (ambas comentadas previamente en el subcapítulo 3.1.5) y  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  los ángulos de fase de las ondas.

Si tenemos en cuenta la ecuación de Euler, vista igualmente con anterioridad en 3.1.5, podríamos expresar la ecuación (4.26) tal que:

$$p(x, t) = A \cdot e^{j(\omega t - kx + \varphi_1)} + B \cdot e^{j(\omega t + kx + \varphi_2)} \quad (4.27)$$

$$p(x, t) = A e^{j\varphi_1} e^{j(\omega t - kx)} + A e^{j\varphi_2} e^{j(\omega t + kx)} \quad (4.28)$$

Si tomamos la amplitud de forma compleja, comprendiendo los ángulos de fase, la ecuación (4.28) se expresaría de la siguiente manera:

$$p(x, t) = \hat{A}e^{j\omega t}e^{-jkx} + \hat{B}e^{j\omega t}e^{jkx} \quad (4.29)$$

Finalmente, se admite que con frecuencia se puede omitir la dependencia temporal, ya que se sobreentiende que la onda de propagación varía con el tiempo.

$$p(x) = \hat{A}e^{-jkx} + \hat{B}e^{jkx} \quad (4.30)$$

De la ecuación (4.30) se puede extraer que el primer término  $\hat{A}e^{-jkx}$  representa una onda progresiva, que se propaga en dirección x positiva, mientras que el segundo término  $\hat{B}e^{jkx}$  hace referencia a una onda regresiva, la cual se propaga en dirección x negativa.

Para facilitar la comprensión del fenómeno de reflexión, la ecuación (4.30) puede reescribirse como:

$$p(x) = p \cdot e^{-jkx} + p \cdot r \cdot e^{jkx} \quad (4.31)$$

Donde r representa el coeficiente de reflexión de la presión que incide sobre la pared rígida al final del conducto. Esta r consiste en el resultado de la relación entre la onda regresiva y la onda progresiva que se propaga a lo largo del conducto, y su valor depende de la impedancia de la pared considerándose como un complejo:

$$r = \Re \cdot e^{j\varphi} \quad (4.32)$$

#### 4.4.2 – Velocidad de partículas

En la hipótesis 4 del subcapítulo 4.2 se consideró que la velocidad media de las partículas de fluido a lo largo de la propagación es nula ( $\vec{u}_0 = 0$ ), aunque éstas oscilan alrededor de su posición de equilibrio con una velocidad  $\vec{u} = \vec{u}_a$ , cuya onda de presión se comporta tal y como se ha comprobado en la ecuación (4.30).

Como nos enfrentamos a un caso de propagación unidimensional en los conductos del monolito del catalizador, la ecuación

dinámica para una dimensión (onda plana) quedaría representada según la ecuación 4.33:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (4.33)$$

Si asumimos que la velocidad puede ser expresada igualmente de forma compleja como  $u = \hat{u} \cdot e^{j\omega t}$ , se derivada respecto del tiempo sería tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = j\omega \hat{u} e^{j\omega t} \quad (4.34)$$

Combinando las ecuaciones 4.33 y 4.34:

$$-\frac{\partial p_a}{\partial x} = \rho_0 j\omega \cdot u(x) \quad (4.35)$$

Despejando la componente de velocidad:

$$u(x) = -\frac{1}{\rho_0 j\omega} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 j\omega} (-jk \cdot \hat{A} e^{-jkx} + jk \cdot \hat{B} e^{jkx}) \quad (4.36)$$

Como  $k = \frac{\omega}{c}$ , la ecuación anterior se simplificaría:

$$u(x) = \frac{1}{\rho_0 c} (\hat{A} e^{-jkx} - \hat{B} e^{jkx}) = \frac{1}{Z_0} (\hat{A} e^{-jkx} - \hat{B} e^{jkx}) \quad (4.37)$$

Donde  $Z_0$  se denomina impedancia característica del medio, como se explicará en el capítulo 4.6.

## 4.5 – Ecuación de Helmholtz

La ecuación de Helmholtz queda definida a partir de la ecuación de ondas (ec. 4.25) y tiene lugar cuando la presión incidente  $P_a$  tiene un comportamiento armónico constante en el tiempo. Es decir, que la función queda fija e inmóvil en el tiempo y únicamente aumenta y disminuye la amplitud en cada punto del espacio [18].

De este modo, consideraríamos la presión  $P_a$  como la presión compleja definida en la ecuación (4.38):

$$P_a = P \cdot e^{j\omega t} \quad (4.38)$$

Sustituyendo la anterior ecuación en la de ondas (4.25), obtendríamos la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 P + k^2 \cdot P = 0 \quad (4.39)$$

*Ecuación de Helmholtz*

Siendo  $j$  la unidad imaginaria,  $k = \omega/c_0$  el número de onda,  $\omega$  la frecuencia angular y  $P$  la amplitud compleja de la presión acústica  $P_a$ .

## 4.6 – Impedancia acústica

Como se vio anteriormente en el subcapítulo 3.1.6, la impedancia acústica puede definirse como la resistencia del medio a la propagación de ondas acústicas por el mismo y se expresó según la ecuación  $Z = \frac{p}{u}$ . Este razonamiento queda completamente refutado por la ecuación (4.37), si sabemos (según la ec. 4.30) que  $p(x) = \hat{A}e^{-jkx} + \hat{B}e^{jkx}$ , estableciendo la siguiente relación por lo tanto:

$$Z_0 = \frac{p(x)}{u(x)} \quad (4.40)$$

Atendiendo a las ecuaciones (4.30) y (4.37) se pueden extraer las siguientes relaciones entre la velocidad y la presión:

- Las ondas progresivas  $\hat{A}e^{-jkx}$  están en fase (ya que tienen el mismo signo).
- Las ondas regresivas  $\hat{B}e^{jkx}$  están en oposición de fase (al tener signo contrario).

#### 4.6.1 – Impedancia acústica del aire

En el caso de una onda plana progresiva que se propaga en dirección x positiva en el aire:

$$p(x) = \hat{A}e^{-jkx} \quad (4.41)$$

$$u(x) = \frac{\hat{A}e^{-jkx}}{\rho_0 c_0} \quad (4.42)$$

Relacionando ambas ecuaciones según la definición de impedancia característica expresada según (4.40), obtendríamos su valor para una onda plana progresiva:

$$Z_0 = \rho_0 c_0 \quad (4.43)$$

Sabiendo que en el aire a temperatura de 15°C, la densidad adquiere un valor de  $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$  y que la velocidad de propagación es de  $c_0 = 340 \text{ m/s}$ , la impedancia característica del aire para estas condiciones tiene un valor de  $Z_0 = 416.5 \text{ rayl}$ . Cabe destacar que cada material y cada medio tienen su impedancia característica propia, ya que no es exclusiva del aire.

Por el contrario, si tratamos una onda regresiva que se propaga en dirección x negativa en el aire:

$$p(x) = -\hat{B}e^{jkx} \quad (4.44)$$

$$u(x) = \frac{\hat{B}e^{jkx}}{\rho_0 c_0} \quad (4.45)$$

La impedancia característica tendría la siguiente forma:

$$Z_0 = -\rho_0 c_0 \quad (4.46)$$

#### 4.6.2 – Impedancia acústica de pared rígida

Al existir un fenómeno de reflexión en las paredes del conducto, y como se ha explicado a la hora de definir la el campo de presiones en el mismo, este se describe según la suma de una onda progresiva y una regresiva:

$$p(x) = p \cdot e^{-jkx} + p \cdot r \cdot e^{jkx}$$

Combinando las ecuaciones (4.31) y (4.37) para este caso, obtendríamos:

$$u(x) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (p \cdot e^{-jkx} + p \cdot r \cdot e^{jkx}) \quad (4.47)$$

Aplicando la relación establecida por la ec. (4.40) tendríamos por lo tanto:

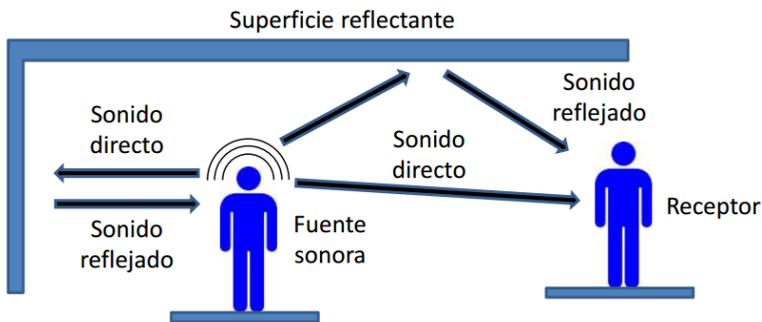
$$Z = \rho_0 c_0 \left( \frac{1+r}{1-r} \right) \quad (4.48)$$

# 5.

## Fenómenos de propagación en conductos

## 5.1 – Introducción

En el momento en que una onda progresiva alcanza una región de transición entre dos medios, con cambios en las condiciones existentes entre ambos, se origina una onda reflejada que regresa al medio inicial, y otra que se transmite a la nueva región. Estos cambios comprenden cambios del medio, de geometría y de temperatura.



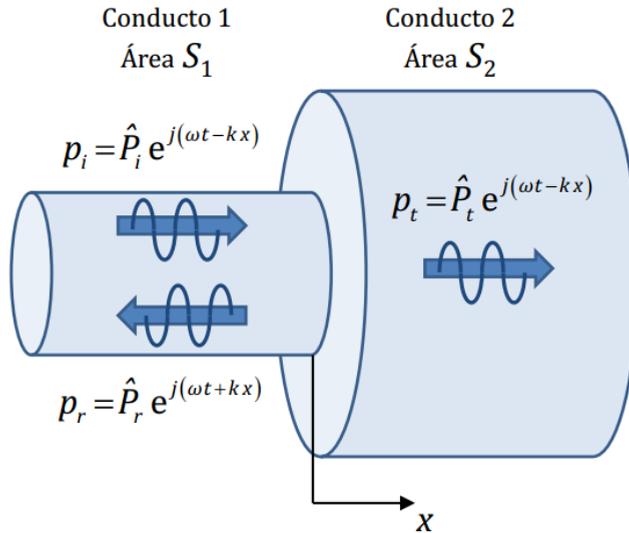
**Figura 5.1: Recepción de sonido directo y reflejado**

En este capítulo se tratarán los fenómenos que tienen lugar cuando las ondas que transcurren por un conducto se enfrentan a un cambio de geometría, como el que tiene lugar al pasar del tubo procedente del motor al catalizador.

## 5.2 – Propagación acústica en cambios de sección

### 5.2.1 – Reflexión

Consideramos dos conductos de secciones diferentes, tal y como se muestra en la Fig. 5.2. Asumimos que el medio en ambas secciones será el mismo (en nuestro caso aire) y la frecuencia no varía.



**Figura 5.2: Reflexión y transmisión de ondas acústicas entre dos conductos de distinta sección**

De la figura anterior se definen 3 tipos de ondas, las cuales se suponen con frecuencia constante:

- Onda incidente  $\rightarrow p_i = \hat{P}_i e^{j(\omega t - kx)}$
- Onda reflejada  $\rightarrow p_r = \hat{P}_r e^{j(\omega t + kx)}$
- Onda transmitida  $\rightarrow p_t = \hat{P}_t e^{j(\omega t - kx)}$

En la zona de cambio se debe satisfacer que las presiones y conductividades de flujo másico en dicho lugar sean iguales (condición de continuidad). Es por ello por lo que se puede establecer las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{Condiciones de contorno} \begin{cases} p_1 = p_2 \Rightarrow p_t = p_i + p_r \\ u_1 S_1 = u_2 S_2 \end{cases}$$

a) Presión

Cumpliendo con las condiciones de contorno entre los dos medios se tiene que:

$$\hat{P}_i e^{j(\omega t - kx)} + \hat{P}_r e^{j(\omega t + kx)} = \hat{P}_t e^{j(\omega t - kx)}$$

Como hemos supuesto frecuencia constante:

$$\hat{P}_i e^{-jkx} + \hat{P}_r e^{jkx} = \hat{P}_t e^{-jkx} \quad (5.1)$$

Para  $x=0$  obtenemos la relación de amplitudes complejas de presión entre ambos medios:

$$\hat{P}_i + \hat{P}_r = \hat{P}_t \quad (5.2)$$

b) Conductividad de flujo másico

Del mismo modo que para el caso de la presión, a partir de las condiciones de contorno en referencia a este concepto, e introduciendo el concepto de impedancia característica del aire:

$$S_1 \frac{\hat{P}_i e^{j(\omega t - kx)} - \hat{P}_r e^{j(\omega t + kx)}}{Z_0} = S_2 \frac{\hat{P}_t e^{j(\omega t - kx)}}{Z_0}$$

Como en el caso anterior, suponiendo frecuencia constante y en  $x=0$ :

$$S_1 \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_r) = S_2 \cdot \hat{P}_t \quad (5.3)$$

Se define finalmente el **coeficiente de reflexión R** como la relación entre la onda reflejada y la incidente:

$$R = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_i} = \frac{S_1 - S_2}{S_2 + S_1} \quad (5.4)$$

Como se puede apreciar, este coeficiente sólo tiene valores comprendidos entre -1 y 1, pudiéndonos encontrar los siguientes 3 casos:

- Onda reflejada en fase con incidente si  $S_1 \gg S_2 \rightarrow 0 < R \leq 1$ .
- Onda reflejada en oposición de fase con incidente si  $S_2 \gg S_1 \rightarrow -1 \leq R < 0$ .
- Sin reflexión si  $S_1 = S_2 \rightarrow R=0$  (onda incidente = onda transmitida, no hay cambio de sección).

### 5.2.2 – Transmisión

Partiendo de las consideraciones tomadas para el caso de reflexión, de una onda pasando de una sección a otra, con las condiciones de contorno establecidas, **entra en juego el coeficiente de transmisión T**, el cual queda definido como la relación entre la onda transmitida y la incidente.

$$T = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_i} = \frac{2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} \quad (5.5)$$

Este coeficiente sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 2, encontrándonos 3 situaciones características:

- Onda transmitida con doble amplitud respecto de la incidente si  $S_1 \gg S_2 \rightarrow T \rightarrow 2$ .
- Onda transmitida prácticamente nula si  $S_2 \gg S_1 \rightarrow T \rightarrow 0$ .
- Sin reflexión si  $S_1 = S_2 \rightarrow T=1$  (onda incidente = onda transmitida, no hay cambio de sección).

Frecuentemente se trabaja en términos de energía acústica a la hora de estudiar y valorar la propagación del sonido. Sabiendo que la intensidad media activa de una onda armónica es  $\bar{I} = \frac{|P|^2}{2\rho c}$ , la relación entre energía transmitida e incidente se describe mediante la ec. (5.6).

$$\alpha_t = \frac{Pot_t}{Pot_i} = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \left| \frac{P_t}{P_i} \right|^2 \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow$$
$$\alpha_t = \frac{4 \cdot S_1 \cdot S_2}{(S_1 + S_2)^2} \quad (5.6)$$

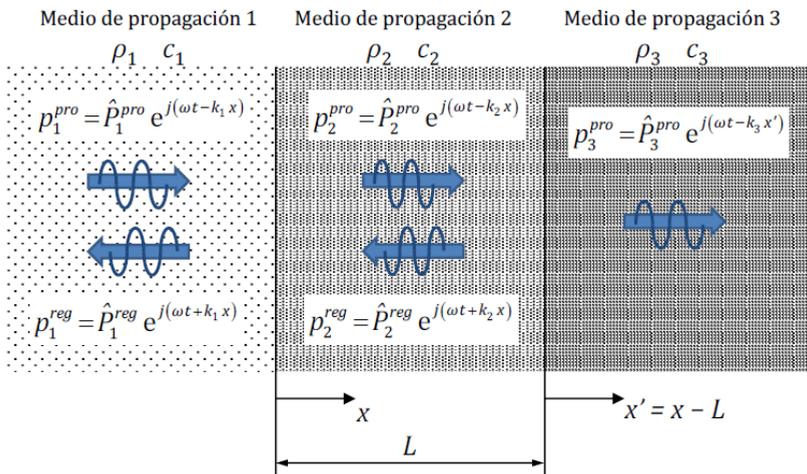
Esta relación anterior, expresada según la ecuación (5.6), se define como coeficiente de transmisión de potencia, el cual nos facilita el cálculo del **índice de pérdida de transmisión TL**, el cual será un factor decisivo al realizar el estudio de la atenuación acústica de los catalizadores, ya que buscamos que éstos

transmitan el menor ruido posible, por lo que esperamos los valores más altos de TL.

$$TL = 10 \cdot \log\left(\frac{Pot_i}{Pot_t}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{\alpha_t}\right) \quad (5.7)$$

### 5.3 – Propagación acústica en particiones

En el caso que nos ocupa, nos enfrentamos al paso de perturbación acústica a lo largo de 3 medios, tal y como se puede observar en la Figura 5.3:



**Figura 5.3: Reflexión y transmisión de sonido a lo largo de 3 medios distintos**

Como sabemos, la figura anterior para nuestro caso de estudio se puede simplificar de tal forma que los medios 1 y 3 son el mismo (aire), teniendo el segundo (monolito) unas propiedades distintas.

Se aprecia que cuando una onda alcanza un plano de separación entre medios, parte de la misma (así como su correspondiente energía acústica) se refleja como una onda regresiva en el medio

1, mientras que en el medio 2 se transmite otra onda, actuando de igual forma entre los medios 2 y 3. Es lógico, por tanto, pensar que la energía y la presión acústica transmitidas en el medio 3 habrán disminuido con respecto a la que incide desde el medio 1.

A partir de las fórmulas de presión comentadas en el capítulo 5.2, establecemos unas condiciones de contorno para las dos separaciones disponibles:

a) **En  $x=0$ :**

En la zona de cambio se debe satisfacer que las presiones y velocidades acústicas en dicho lugar sean iguales (condición de continuidad). Es por ello por lo que se puede establecer las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{Condiciones de contorno} \begin{cases} p_1 = p_2 \Rightarrow p_1^{pro} + p_1^{reg} = p_2^{pro} + p_2^{reg} \\ u_1 = u_2 \Rightarrow u_1^{pro} + u_1^{reg} = u_2^{pro} + u_2^{reg} \end{cases}$$

Siguiendo los mismos pasos que tomamos en la sección 5.2.1, podemos llegar a la siguiente expresión a partir de la continuidad de presión:

$$\hat{p}_1^{pro} + \hat{p}_1^{reg} = \hat{p}_2^{pro} + \hat{p}_2^{reg} \quad (5.8)$$

En cuanto a la continuidad de velocidad, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\hat{p}_1^{pro} - \hat{p}_1^{reg}}{z_1} = \frac{\hat{p}_2^{pro} - \hat{p}_2^{reg}}{z_2} \quad (5.9)$$

b) **En  $x=L$**

En este punto, situado en el cambio entre los medios 2 y 3, establecemos unas condiciones de contorno muy similares a las de  $x=0$ .

$$\text{Condiciones de contorno} \begin{cases} p_2 = p_3 \Rightarrow p_2^{pro} + p_2^{reg} = p_3^{pro} \\ u_2 = u_3 \Rightarrow u_2^{pro} + u_2^{reg} = u_3^{pro} \end{cases}$$

Desarrollando las mencionadas condiciones de contorno, de manera análoga al caso anterior, obtendremos las siguientes relaciones, expresadas mediante las ecuaciones (5.10) y (5.11).

$$\hat{p}_2^{pro} e^{-jk_2x} + \hat{p}_2^{reg} e^{jk_2x} = \hat{p}_3^{pro} \quad (5.10)$$

$$\frac{\hat{p}_2^{pro} e^{-jk_2x} - \hat{p}_2^{reg} e^{jk_2x}}{z_2} = \frac{\hat{p}_3^{pro}}{z_3} \quad (5.11)$$

Mediante la combinación de las ecuaciones (5.8), (5.9), (5.10) y (5.11), es posible obtener la relación entre la onda incidente desde el medio 1 y la propagada en el medio 3 mediante la ecuación 5.12 (coeficiente de transmisión), lo cual resultaría clave en el estudio que nos compete:

$$T = \frac{\hat{p}_3^{pro}}{\hat{p}_1^{pro}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) \cos(k_2 \cdot L) + j \frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}\right) \sin(k_2 \cdot L)} \quad (5.12)$$

En el caso general, las impedancias de los medios son complejas, por lo que para el cálculo del coeficiente de transmisión de potencia tendríamos en cuenta la parte real de la impedancia conjugada:

$$\alpha_t = \frac{Pot_3^{pro}}{Pot_1^{pro}} = \frac{|\hat{p}_3^{pro}|^2 \cdot Re\left(\frac{1}{\hat{z}_3^*}\right)}{|\hat{p}_1^{pro}|^2 \cdot Re\left(\frac{1}{\hat{z}_1^*}\right)} = |T|^2 \frac{Re\left(\frac{1}{\hat{z}_3^*}\right)}{Re\left(\frac{1}{\hat{z}_1^*}\right)} \quad (5.13)$$

## 5.4 – Propagación acústica en conductos capilares

Considerando ausencia de flujo medio de aire, un conjunto de conductos capilares se puede caracterizar acústicamente mediante la densidad equivalente [15]:

$$\rho_m = \rho_0 \left( 1 + \frac{R \cdot \phi}{j\omega\rho_0} \cdot G_c(s) \right) \quad (5.14)$$

Donde  $R$ ,  $\omega$  y  $\phi$  representan la resistividad estacionaria, la frecuencia angular y la porosidad del monolito, respectivamente.  $G_c(s)$  es una función definida como:

$$G_c(s) = \frac{-\frac{s}{4}\sqrt{-j} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}} \frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}} \quad (5.15)$$

Siendo  $J_0$  y  $J_1$  las funciones de Bessel de primer especie y orden 0 y 1 y  $s$  el número de onda tangencial, expresado según la ecuación (5.10).

$$s = \alpha \sqrt{\frac{8\omega\rho_0}{R\phi}} \quad (5.16)$$

En la anterior ecuación, el factor  $\alpha$  depende de la geometría de sección transversal del capilar. En nuestro caso, la sección será cuadrada, tomando el factor un valor de 1.07.

Por otro lado, se obtiene la velocidad del sonido equivalente dentro del capilar  $c_m$  a partir de la densidad equivalente:

$$c_m = \sqrt{\frac{K_m}{\rho_m}} = \frac{c_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{R \cdot \phi}{j\omega\rho_0} \cdot G_c(s)\right) \cdot (\gamma - (\gamma - 1) \cdot F)}} \quad (5.17)$$

$$K_m = \frac{\gamma \cdot P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \cdot F} \quad (5.18)$$

$$F = \frac{1}{1 + \frac{R \cdot \phi}{j \text{Pr} \omega \rho_0} \cdot G_c(\sqrt{\text{Pr} s})} \quad (5.19)$$

Donde:

- $\gamma$  es la relación de calores específicos.
- $c_0$  es la velocidad del sonido en aire en condiciones ambientales (según Ec. 3.2).
- $K_m$  es módulo volumétrico.
- Pr es el número de Prandtl (definido como  $\text{Pr} = \mu \cdot C_p / \kappa$ )
- $\kappa$  es conductividad térmica.
- $\mu$  es viscosidad dinámica.
- $C_p$  es calor específico a presión constante.

# 6.

## Método de elementos finitos

## 6.1 – Generalidades del MEF

### 6.1.1 – Introducción

Como se ha visto en anteriores capítulos, la propagación acústica del sonido en conductos se trata de un problema físico que se caracteriza por el uso de ecuaciones con derivadas parciales, denominándose ese tipo de problemas como “de contorno”, los cuales tienen soluciones de gran complejidad, siendo la de tipo analítico la mejor opción para abordarlos.

Sin embargo, en determinadas ocasiones, el problema sigue siendo bastante difícil de resolver, aun realizando simplificaciones. Por ello, se recurre con frecuencia a los métodos de resolución numérica aproximada para ayudar a encontrar una solución, encontrándonos 3 tipos donde se acota el error cometido:

- Método de diferencias finitas.
- Método de elementos de contorno.
- Método de elementos finitos.

Este último será el método escogido para la solución de nuestro problema, ya que nos permite subdividir el dominio en un conjunto de subdominios (llamados elementos finitos), los cuales se encuentran definidos por los nodos que conecta. En este método, el valor de la función local en dichos nodos es desconocido, y se calcula generalmente mediante funciones polinómicas, en función de un conjunto de variables discretas, lo que permite analizar geometrías complejas.

Las ecuaciones de comportamiento aproximadas pueden calcularse mediante ensamblado de las ecuaciones de comportamiento de cada elemento finito. Esto es una gran ventaja del método, ya que permite realizar gran parte de los cálculos de forma sistematizada.

### 6.1.2 – Tipología de modelos

Los problemas físicos pueden ser representados como modelos continuos o modelos discretos.

- **Modelos continuos:** son capaces de describir fielmente las propiedades físicas del problema, obteniendo mediante su resolución una solución analítica exacta. Sin embargo, su principal inconveniente es que normalmente nos llevan a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por lo que el sistema no es simple y no puede ser resuelto.
- **Modelos discretos:** su principal finalidad consiste en transformar el problema original en otro con propiedades físicas definidas mediante un conjunto de variables discretas representadas por un sistema de ecuaciones algebraicas. El mínimo número de variables discretas que son necesarias para la definición de la configuración del problema físico se conoce como grados de libertad.

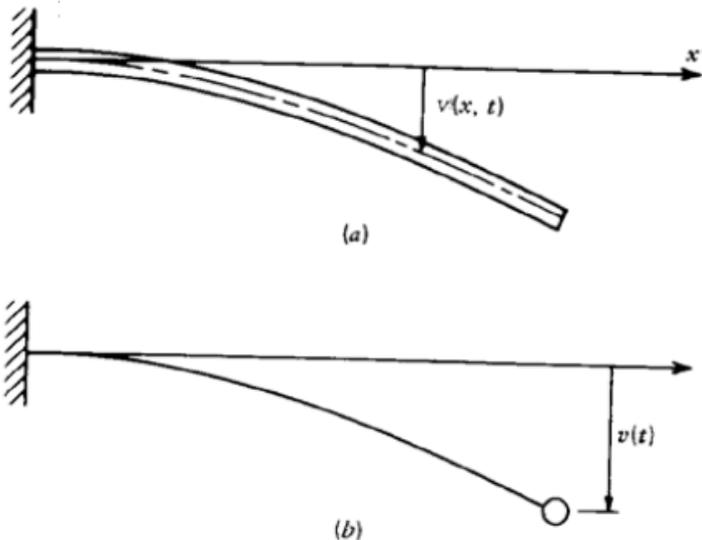


Figura 6.1: a) Modelo continuo, b) Modelo discreto de 1 gdl

Estos últimos modelos, los discretos, ofrecen como principal ventaja la sencilla resolución del problema, aunque introducen un error de discretización, que se debe a las aproximaciones realizadas para transformar las ecuaciones diferenciales en algebraicas.

Nuestro modelo a utilizar en el presente trabajo consistirá en el modelo discreto, mediante el uso del método de elementos finitos.

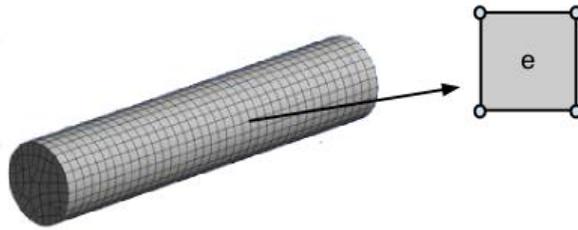
## 6.2 – Método de Elementos Finitos (MEF)

El método de elementos finitos puede definirse como un método numérico cuyo objetivo principal trata de buscar una solución aproximada a los problemas gobernados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Este método transforma el problema diferencial en un problema algebraico mediante la discretización, convirtiendo el sistema continuo de infinitos grados de libertad a uno equivalente de  $N$  grados de libertad.

### 6.2.1 – Paso 1: Discretización del modelo

En primer lugar, descomponemos el dominio completo en un número finito de elementos interconectados entre sí. Los elementos en cuestión pueden tratarse de puntos (caso unidimensional), líneas (caso bidimensional) o superficies (caso tridimensional), en función del tipo de problema planteado. Conforme el tamaño de los elementos sea menor, la solución aproximada será más cercana a la real, el coste computacional del problema será mayor.



**Figura 6.2: Discretización del modelo**

Los elementos en los que se divide un dominio están, a su vez, formados por un número finito de nodos, los cuales actúan como nexo de unión entre elementos finitos, permitiendo de este modo que exista una continuidad en el sistema. Estos nodos representan matemáticamente las incógnitas del problema. Es decir, se trata de los grados de libertad del mismo.

### 6.2.2 – Paso 2: Aproximación nodal

Las funciones de interpolación son las funciones locales que relacionan el comportamiento dentro del elemento con el valor resultante de la función en sus nodos. Esto es, que si el término  $u$  es nuestra incógnita, mediante la función de interpolación seremos capaces de calcular su valor, siendo en este caso la presión, en cualquier punto dentro del elemento. La función de interpolación adquiere la siguiente forma:

$$u^e = \sum_{i=1}^n N_i u_i^e = \mathbf{N} \{u^e\} \quad (6.1)$$

donde  $e$  es el elemento seleccionado,  $n$  es el número de nodos del elemento,  $\mathbf{N}$  se trata del vector de funciones expresado de forma traspuesta y  $\{u^e\}$  es el vector con el valor de la función de interpolación en los nodos.

### 6.2.3 – Paso 3: Planteamiento matricial

Quedan definidas las matrices que definen el comportamiento de cada elemento del dominio, a partir de las propiedades del material.

### 6.2.4 – Paso 4: Ensamblado

Todas las matrices de cada elemento se ensamblan, teniendo como resultado una matriz global que representa el comportamiento del problema en conjunto a partir de un sistema de N ecuaciones algebraicas. Este ensamblado se lleva a cabo siguiendo una ley de ordenación, la cual establece una relación entre la numeración local de los nodos y la numeración global de los mismos.

### 6.2.5 – Paso 5: Definición de las condiciones de contorno.

Este paso resulta clave, ya que aquello que rodea al problema, influye directamente en su solución.

### 6.2.6 – Paso 6: Transformación de coordenadas

Todo el sistema, así como sus distintos elementos finitos y nodos, quedan referenciados a unos ejes de referencia globales, siendo capaces de calcular las matrices de los elementos finitos en relación a los mismos, aunque la forma más sencilla de determinar las funciones de forma N se realiza empleando los ejes locales de cada elemento.

Esto nos lleva a que resulte imperativo el uso de una transformación de coordenadas, con el objetivo de calcular la solución del problema en base a las coordenadas locales.

### 6.2.7 – Paso 7: Resolución

La solución al sistema de ecuaciones representado por la matriz global nos da como resultado los valores de los grados de libertad en los distintos nodos del dominio. Esta solución puede realizarse mediante distintos procedimientos:

- Si el sistema de ecuaciones es pequeño, es posible la aplicación de métodos directos, como el método de Gauss o la factorización de Cholesky.
- En sistemas grandes, es posible la aplicación de métodos iterativos, como el método de Gauss-Siedel o el método de Jacobi.
- En sistemas no lineales se aplica el método de Newton-Raphson.

### 6.3 – Aplicación

Para la solución de la modelización del comportamiento acústico del catalizador, se abordará la aplicación del método de elementos finitos sobre la ecuación de ondas. Con el objetivo de conseguirlo, se propondrán 2 alternativas: un modelo completamente multidimensional (3D en conductos y 3D en el monolito), y representado mediante la Fig. 6.2 a), y un modelo propuesto (3D en conductos y 1D en el monolito), reflejado en la Fig. 6.2 b), en el que el monolito se sustituye por una relación “nodo a nodo” y representada mediante una matriz de transformación  $T^m$ .

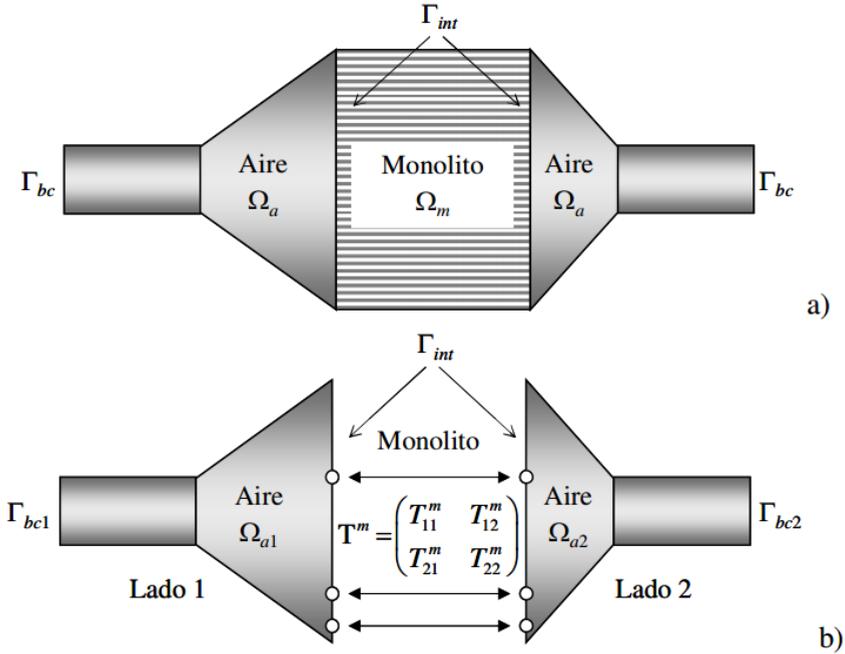


Figura 6.2: Esquema con proposiciones para modelación, a) 3D conducto/3D monolito, b) 3D conducto/1D monolito

### 6.3.1 – Modelo 3D conductos / 3D monolito

Este modelo sigue los pasos seguidos por Selamet [16], escribiendo la ecuación de Helmholtz en las regiones de entrada y salida como [23]:

$$\nabla^2 P_a + k_0^2 \cdot P_a = 0 \quad (6.2)$$

Tomando  $P_a$  como la amplitud compleja de presión en el aire y  $k_0$  como el número de onda en el aire.

Dentro del monolito, la ecuación de Helmholtz adquiere la siguiente forma:

$$\nabla^2 P_m + k_m^2 \cdot P_m = 0 \quad (6.3)$$

Entre ambas regiones (conducto y monolito), las condiciones de acoplamiento de campo acústico se asocian a la continuidad de presión y velocidad normal a la interfase  $\Gamma_{int}$ .

$$\text{Condiciones de acoplamiento} \begin{cases} P_a = P_m \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial n} = - \frac{\phi}{\rho_m} \frac{\partial P_m}{\partial n} \end{cases}$$

Donde  $\phi$  representa la porosidad del monolito.

La interpolación de elementos finitos dentro de un elemento  $e$  proporciona para el aire la Ec. (6.4) y para el monolito la Ec. (6.5), siendo  $\mathbf{N}$  el vector de funciones de forma [15][16][22]:

$$P_a = \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_a^e \quad (6.4)$$

$$P_m = \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_m^e \quad (6.5)$$

Aplicando en este momento el método de residuos ponderados junto con la formulación Galerkin, se obtiene para el aire:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_a^e} \left( \int_{\Omega_a^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_a^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_a^e \\ = \sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{be}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.6) \end{aligned}$$

Mientras que para el caso del monolito:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_m^e} \left( \int_{\Omega_m^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_m^2 \int_{\Omega_m^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_m^e \\ = \sum_{e=1}^{N_m^e} \int_{\Gamma_m^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_m}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.7) \end{aligned}$$

Multiplicando la Ec. (6.7) por  $\frac{\phi \rho_0}{\rho_m}$  y añadiendo a (6.6):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_a^e} \left( \int_{\Omega_a^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_a^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_a^e \\
 & + \frac{\phi \rho_0}{\rho_m} \sum_{e=1}^{N_m^e} \left( \int_{\Omega_m^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_m^2 \int_{\Omega_m^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_m^e = \\
 & \sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{be}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Habiéndose eliminado el término expresado en la Ec. (6.9) debido a la condición de continuidad de velocidad normal.

$$\sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} \, d\Gamma + \frac{\phi \rho_0}{\rho_m} \sum_{e=1}^{N_m^e} \int_{\Gamma_m^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_m}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.9)$$

Por lo tanto, la ecuación (6.8) puede ser escrita tal que:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \quad (6.10)$$

Definiendo los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Omega_a^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega + \frac{\phi \rho_0}{\rho_m} \sum_{e=1}^{N_m^e} \int_{\Omega_m^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \\
 \mathbf{M} &= \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Omega_a^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega + \frac{\phi \rho_0}{\rho_m} \frac{1}{c_m^2} \int_{\Omega_m^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \\
 \mathbf{F} &= \sum_{e=1}^{N_a^e} \int_{\Gamma_a^e \cap \Gamma_{be}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} \, d\Gamma
 \end{aligned}$$

Se puede observar según la ecuación (6.10) que las partículas de aire tienen un comportamiento vibratorio.

### 6.3.2 – Modelo 3D conductos / 1D monolito

Para este caso, similar al expuesto en el subcapítulo 6.2.1, tendremos en cuenta cada una de las regiones de aire separadas por el monolito, siguiendo para ello los mismos pasos. De este modo tenemos:

#### Lado 1

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \left( \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e \\
 &= \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} \, d\Gamma \\
 &+ \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{be1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

#### Lado 2

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \left( \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e \\
 &= \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \, d\Gamma \\
 &+ \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{be2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

El monolito en este caso se sustituye por una matriz de transformación de 4 polos (según la Fig 6.1 b)), por lo que la relación entre campos acústicos de presión y velocidad a ambos lados es:

$$P_{a1} = T_{11}^m \cdot P_{a2} - T_{12}^m \left( -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (6.13)$$

$$-\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} = T_{21}^m \cdot P_{a2} - T_{22}^m \left( -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (6.14)$$

A partir de la Ec. (6.13),

$$\frac{\partial P_{a2}}{\partial n} = \frac{j\omega\rho_0}{T_{12}^m} P_{a1} - \frac{j\omega\rho_0 T_{11}^m}{T_{12}^m} P_{a2} = j\omega\Pi_{21} P_{a1} - j\omega\Pi_{22} P_{a2} \quad (6.15)$$

Combinando las Ec. (6.14) y (6.15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} &= -j\omega\Pi_{21} T_{22}^m P_{a1} + j\omega(\Pi_{22} T_{22}^m - \rho_0 T_{21}^m) P_{a2} \\ &= j\omega\Pi_{11} P_{a1} - j\omega\Pi_{12} P_{a2} \end{aligned} \quad (6.16)$$

### a) Lado 1

Sustituyendo ahora la Ec. (6.16) en el lado derecho de la Ec. (6.11),

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \left( \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e \\ &= \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{be1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} \, d\Gamma \\ &+ \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T (j\omega\Pi_{11} P_{a1} - j\omega\Pi_{12} P_{a2}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6.17)$$

Manipulando la Ec. (6.17),

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \left[ \left( \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e + j\omega\Pi_{11} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e \, d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - j\omega\Pi_{12} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e \, d\Gamma \right] = \\ &\quad \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{be1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6.18)$$

Expresando la anterior ecuación de forma compacta,

$$(\mathbf{K}_{a1} + j\omega\mathbf{C}_{a1} - \omega^2\mathbf{M}_{a1})\tilde{\mathbf{P}}_{a1} - j\omega\mathbf{C}_{a1a2}\tilde{\mathbf{P}}_{a2} = \mathbf{F}_{a1} \quad (6.19)$$

Donde se consideran las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{a1} &= \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{a1} &= \Pi_{11} \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Gamma \\ \mathbf{M}_{a1} &= \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{a1a2} &= \Pi_{12} \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Gamma \\ \mathbf{F}_{a1} &= \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{be1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} \, d\Gamma \end{aligned}$$

### b) Lado 2

De manera análoga al lado izquierdo, para el lado derecho de la Ec. (6.12), sustituyendo en la misma la Ec. (6.15).

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \left( \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e \\ &= \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{be2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \, d\Gamma \\ &+ \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T (j\omega\Pi_{21}P_{a1} - j\omega\Pi_{22}P_{a2}) \, d\Gamma \quad (6.20) \end{aligned}$$

Manipulando la Ec. (6.20),

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} & \left[ \left( \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e \right. \\
 & + j\omega \Pi_{22} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e \, d\Gamma \\
 & \left. - j\omega \Pi_{21} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e \, d\Gamma \right] \\
 & = \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{be2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \, d\Gamma \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

Expresando la anterior ecuación de forma compacta,

$$(\mathbf{K}_{a2} + j\omega \mathbf{C}_{a2} - \omega^2 \mathbf{M}_{a2}) \tilde{\mathbf{P}}_{a2} - j\omega \mathbf{C}_{a2a1} \tilde{\mathbf{P}}_{a1} = \mathbf{F}_{a2} \quad (6.22)$$

Donde se consideran las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{a2} &= \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \\
 \mathbf{C}_{a2} &= \Pi_{22} \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Gamma \\
 \mathbf{M}_{a2} &= \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \\
 \mathbf{C}_{a2a1} &= \Pi_{21} \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Gamma \\
 \mathbf{F}_{a2} &= \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{be2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \, d\Gamma
 \end{aligned}$$

Las Ec. (6.19) y (6.22) pueden componer un sistema de ecuaciones matricial como el que se muestra a continuación:

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{a1} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{a2} \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{a1} & -\mathbf{C}_{a1a2} \\ -\mathbf{C}_{a2a1} & \mathbf{C}_{a2} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{a1} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{a2} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{a1} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{a1} \\ \mathbf{F}_{a2} \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

La cual se puede simplificar de la siguiente manera, asemejándose completamente con la Ec. (6.10) contemplada para el caso 3D/3D:

$$(\mathbf{K}_a + j\omega \mathbf{C}_a - \omega^2 \mathbf{M}_a) \tilde{\mathbf{P}}_a = \mathbf{F}_a \quad (6.24)$$

# 7.

## Método de trabajo

## 7.1 – Definición del problema

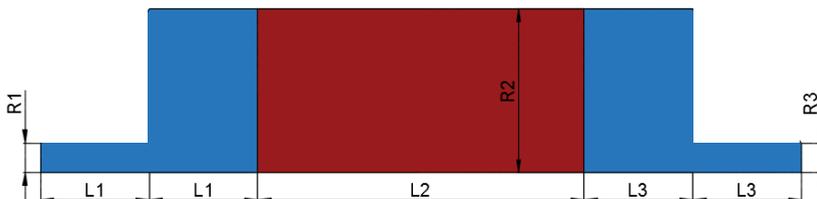
Se llevará a cabo el análisis del comportamiento del catalizador mediante la variación de distintos parámetros relacionados con la geometría y las propiedades de los materiales, de tal forma que finalmente se pueda realizar una comparación de resultados para determinar qué factores son más favorables para el comportamiento acústico de los catalizadores.

Tal y como se ha introducido en el capítulo 6, nos enfrentamos a dos casos:

- Caso 1: Modelo 3D conductos / 3D monolito
- Caso 2: Modelo 3D conductos / 1D monolito, sustituyendo éste por una matriz de transferencia.

La comparación de los resultados de pérdida de transmisión TL se realizará en función de la longitud y resistividad del monolito, tanto para cada caso como para ambos, así como en función de la situación del conducto de salida, el cual se encontrará centrado, descentrado 0.05m respecto del eje del monolito, y en situación de descentrado óptimo (a  $0.6276 \cdot r_{\text{monolito}}$  respecto del eje del monolito).

El catalizador tendrá la geometría representada mediante la Figura 7.1.



**Figura 7.1: Geometría del catalizador**

La entrada de aire al catalizador se realizará en la parte izquierda del mismo, situándose la salida hacia el escape en la parte

derecha. Los parámetros geométricos tendrán los siguientes valores:

Parámetro	Valor
<b>Conducto de entrada</b>	
<b>Radio (R1)</b>	0.0268 m
<b>Longitud (L1)</b>	0.1 m
<b>Cuerpo del catalizador</b>	
<b>Radio (R2)</b>	0.15 m
<b>Longitud (L2)</b>	0.2 m, 0.3 m, 0.4 m
<b>Conducto de salida</b>	
<b>Radio (R3)</b>	0.0268 m
<b>Longitud (L3)</b>	0.1 m

Como se ha comentado previamente, los valores de longitud y resistividad del monolito y la situación del conducto de salida serán variables, los cuales nos servirán para la comparación de resultados.

## 7.2 – Implementación computacional

Con el objetivo de realizar un cálculo de atenuación acústica en catalizadores mediante el método de elementos finitos, se recurrirá al empleo de un programa de simulación y modelado acústico: COMSOL Multiphysics.

Mediante este software, concretamente con su módulo de cálculo acústico, será posible, en primer lugar, modelar la geometría del catalizador, para finalmente realizar un cálculo de la pérdida de transmisión en función de los valores geométricos introducidos y de las propiedades del monolito, ya se tome este como 3D o se sustituya por una matriz de transferencia.

La implementación computacional del Método de Elementos Finitos consta de 3 fases:

### 7.2.1 – Pre-procesado

Consiste en discretizar el modelo real en elementos y nodos, es decir, en introducir los parámetros de entrada del problema dentro del software. Se realizan distintos pasos:

a) Geometría

Se realiza un dibujo del modelo o se procede a la importación del mismo en un formato digital (tipo CAD, por ejemplo) y se selecciona el tipo de elementos a utilizar (1D, 2D, 3D, etc)

b) Propiedades

Introducción de propiedades acústicas del medio. En nuestro estudio, para los conductos de entrada y salida trabajaremos con aire, mientras que para el caso 3D/3D, las propiedades del monolito serán distintas según la porosidad y la resistividad con la que queramos realizar los cálculos, aunque otras propiedades, como impedancia, serán fijas.

c) Sistema de coordenadas

Los ejes de coordenadas quedarán definidos para que sea posible una referenciación correcta en el software. En este trabajo se recurre a un eje de referencia 2D axisimétrico, con el eje r axial a lo largo del cual se diseñará el catalizador, y un eje z radial.

d) Condiciones de contorno

Introducción de las condiciones de contorno a las que sometamos al catalizador, las cuales serán detalladas en el capítulo 8.

e) Mallado

Se seleccionarán el tipo y el tamaño de los elementos finitos en los que se seccionará la geometría del catalizador. La exactitud y calidad del resultado del MEF depende del tamaño de elemento escogido, por lo que este paso es tremendamente importante.

### 7.2.2 – Procesado

Consiste en la creación y resolución del sistema de ecuaciones mediante la aplicación de métodos iterativos. Este paso incluye:

- Elección de fenómeno físico a emplear.
- Generación de funciones de forma.
- Cálculo de matrices de cada elemento finito.
- Configuración de parámetros de cálculo.
- Transformación de coordenadas.
- Ensamblado.
- Implantación de condiciones de contorno.

### 7.2.3 – Post-procesado

Tras la resolución, se representarán los resultados y las variables, tanto fundamentales como secundarias. En este paso se deben tomar las decisiones que se consideren más oportunas sobre la bondad del diseño y analizar la viabilidad del proceso respecto a los objetivos marcados antes del diseño.

# 8.

## Modelización en Comsol

## 8.1 – Introducción

Durante años, el software Sysnoise fue considerado el más adecuado y más eficaz para estudios relacionados con el mundo de la vibro-acústica. Sin embargo, la falta de actualización en su desarrollo lo convirtió en un programa desfasado y de difícil integración con los actuales sistemas operativos. Este hecho motivó al Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia para valorar nuevas alternativas, siendo una de ellas el software COMSOL Multiphysics.

En este capítulo se procederá al modelado y análisis mediante el Método de Elementos Finitos con el mencionado programa, para las geometrías y condiciones de contorno comentadas en el capítulo 7.

## 8.2 – Implementación en Comsol Multiphysics

El software COMSOL Multiphysics tiene como principal objetivo el análisis y cálculo mediante elementos finitos de aplicaciones físicas relacionadas con fenómenos acoplados y/o multifísicos. El programa permite al usuario la simulación en 1D, 2D o 3D, de tal manera que se puede completar toda la definición del problema en un mismo programa.

Actualmente, COMSOL está dividido en distintos módulos físicos, los cuales se añaden al software a modo de extensión, como por ejemplo los módulos de fatiga, de comportamiento térmico o el acústico, que será el que empleemos en este estudio.

### 8.3 – Procedimiento en Comsol

Los pasos a considerar para el modelado y análisis de los 2 ejemplos de catalizador a estudio son los siguientes:

- 1) Definición del tipo de estudio y tipo de problema.
- 2) Creación y definición de variables globales.
- 3) Diseño de la geometría.
- 4) Selección de dominios y contornos.
- 5) Definición de funciones y operadores.
- 6) Selección y creación de materiales.
- 7) Definición de condiciones de contorno.
- 8) Mallado.
- 9) Definición de ensayo y cálculo del problema.
- 10) Obtención de resultados.

### 8.4 – Modelado y análisis

En este apartado se aplicará el método de los elementos finitos para los dos casos que se comentaron en el capítulo 6:

- a) Modelo 3D-3D: monolito interior 3D con densidad y velocidad equivalente.
- b) Modelo 3D-1D: sustitución del monolito interior por una matriz de transferencia punto a punto.

Para ambos casos, se realizarán los estudios para las siguientes longitudes y resistividades de monolito:

- Longitudes: 0.2m, 0.3m y 0.4m.
- Resistividades: 500 rayl/m, 1000 rayl/m y 2000 rayl/m.

Se realizarán 70 estudios en total con Comsol, teniendo en cuenta los datos anteriores de longitudes y resistividades del monolito, así como el cálculo para componentes en 3D y 2D axisimétrico, separando para el primer caso entre salida y entrada centradas,

salida descentrada y salida descentrada en situación de descentrado óptimo.

#### 8.4.1 – Modelo 3D-3D

A continuación se detallará el proceso a seguir para determinar la pérdida de transmisión a lo largo del catalizador, en función de la frecuencia, siguiendo el modelo 3D-3D.

##### 1. Definición del problema y del tipo de estudio

Mediante el software Comsol, se seleccionará en primer lugar un espacio 2D axisimétrico, con eje z y radio r (*Modelo > Añadir componente > 2D axisimétrico*) [24].

Una vez seleccionado, se deberá definir la tipología de problema. En Comsol nos podemos encontrar 5 tipos de problemas, en función de la variable dependiente básica empleada para la modelización del campo acústico:

- Presión acústica: presión  $p$ .
- Interacción sólido-acústica: presión  $p$  y desplazamiento  $u$ .
- Ondas poro-elásticas: presión  $p$  en el interior del fluido saturado y desplazamiento total  $u$  de la matriz porosa.
- Termoacústica: presión acústica  $p$ , velocidad  $v$  de las partículas del campo acústico y variación de temperatura acústica  $T$ .
- Aeroacústica: perturbaciones acústicas de campos de flujo.

En el caso que nos ocupa, se elegirá la **Presión acústica** (*Acústica > Acústica de presión > Presión acústica, Frecuencia → Añadir al componente*).

Finalmente, se debe definir el tipo de estudio a realizar. Al buscar los resultados de pérdida de transmisión TL en función de la frecuencia, se seleccionará el **Dominio de la frecuencia**.

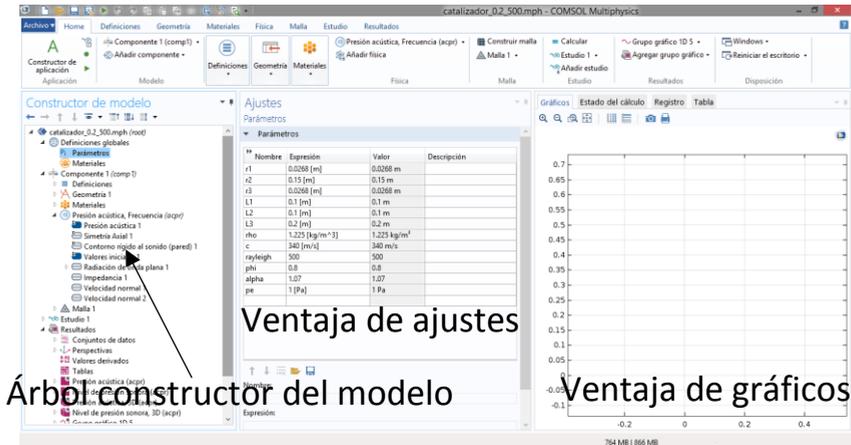


Figura 8.1: Vista general de Comsol

## 2. Definición de variables globales

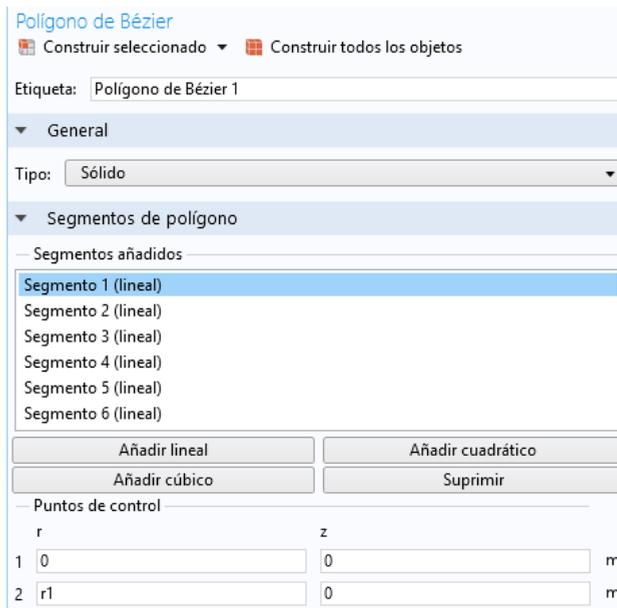
Las variables globales consisten en parámetros constantes definidos con anterioridad para ser empleadas en el futuro durante la definición de propiedades. Este paso es completamente opcional, aunque bastante útil para definir la geometría y determinadas propiedades acústicas durante el desarrollo del estudio (*Modelo > Definiciones > Parámetros*).

Nombre	Expresión	Descripción
r1	0.0268 [m]	Radio de entrada
r2	0.15 [m]	Radio del monolito
r3	0.0268 [m]	Radio de salida
L1	0.1 [m]	Longitud 1 entrada / salida
L2	0.1 [m]	Longitud 2 entrada /salida
L3	0.2 [m]	Longitud monolito
rho	1.225 [kg/m <sup>3</sup> ]	Densidad del aire
c	340 [m/s]	Velocidad de propagación
alpha	1.07	
pe	1 [Pa]	Presión de entrada

Como se puede comprobar, el valor de L3 corresponde a la longitud del monolito, siendo en el primer caso de 0.2m. Para este valor de longitud se realizarán 3 estudios (para los 3 valores de resistividad mencionados), mientras que se repetirá el proceso para L3=0.3m y L3=0.4m.

### 3. Creación de geometría

Este paso resulta ser bastante sencillo, correspondiendo a la creación la sección del catalizador, dividiéndolo en 3 partes: entrada, monolito y salida. Seleccionando previamente las unidades correctas con las que se trabajará en la geometría (marcando *Componente 1 > Geometría 1* y seleccionando metros como unidad de longitud y grados como unidad angular), se procederá a crear la entrada al catalizador mediante el uso de Polígono de Bezier (*Geometría > Primitivas > Polígono de Bezier*). Dentro de la ventana de creación, se generarán las rectas que conformarán la sección sólida que buscamos, introduciendo 6 segmentos lineales mediante sus puntos de inicio y final, tal y como se muestra en la Figura 8.2.



**Figura 8.2: Dimensiones de la entrada al catalizador**

Los puntos que conforman la sección de entrada serían los siguientes:

- 1)  $r=0, z=0$ .
- 2)  $r=r1, z=0$ .
- 3)  $r=r1, z=L1$ .
- 4)  $r=r2, z=L1$ .
- 5)  $r=r2, z=L1+L2$ .
- 6)  $r=0, z=L1+L2$ .
- 7)  $r=0, z=0$ .

Para la sección de salida se repetiría el proceso, aunque con los siguientes pasos:

- 1)  $r=0, z= L1+L2+L3$ .
- 2)  $r=r2, z= L1+L2+L3$ .
- 3)  $r=r2, z= L1+L2+L3+L2$ .
- 4)  $r=r1, z= L1+L2+L3+L2$ .
- 5)  $r=r1, z= L1+L2+L3+L2+L1$ .
- 6)  $r=0, z= L1+L2+L3+L2+L1$ .
- 7)  $r=0, L1+L2+L3$ .

Por último, para crear la sección correspondiente al monolito, se utilizarían los siguientes puntos:

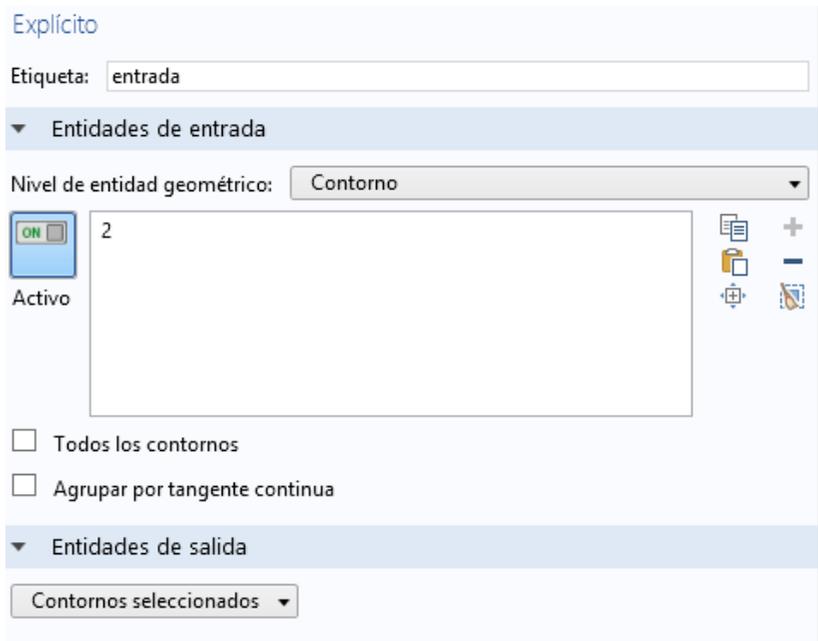
- 1)  $r=0, z= L1+L2$ .
- 2)  $r=r2, z= L1+L2$ .
- 3)  $r=r2, z= L1+L2+L3$ .
- 4)  $r=0, z= L1+L2+L3$ .
- 5)  $r=0, z= L1+L2$ .

Como se observa, conforme variamos los valores de parámetros, la geometría se modificará automáticamente. Ésto es tremendamente útil para cuando estudiemos los 3 casos de longitud de monolito cambiando únicamente el valor de L3 en los parámetros.

#### 4. Creación de contornos y dominios

Con motivo de una mayor facilidad en la definición de las condiciones de contorno a introducir en el componente (las cuales serán definidas más adelante), se introducirán los siguientes dominios y contornos para el modelo 3D-3D y que influirán en el comportamiento del catalizador:

- Entrada (contorno)
- Salida (contorno)
- Monolito (dominio)



**Figura 8.3: Creación del contorno de entrada al catalizador**

Los 2 contornos y el dominio se definen mediante la ruta *Definiciones > Selecciones > Explícito*, y seleccionando el tipo dentro del campo *Nivel de entidad geométrico*. A continuación se seleccionará para cada uno la línea o área según la Figura 8.4:

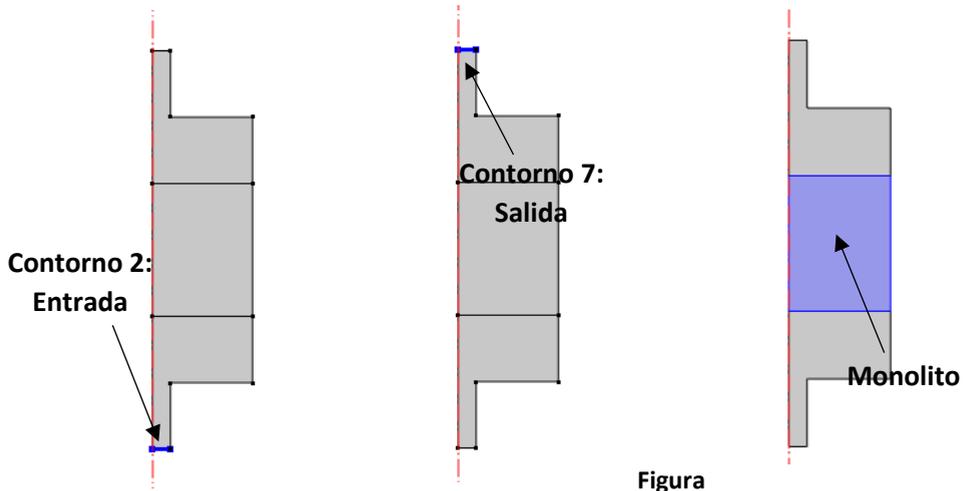
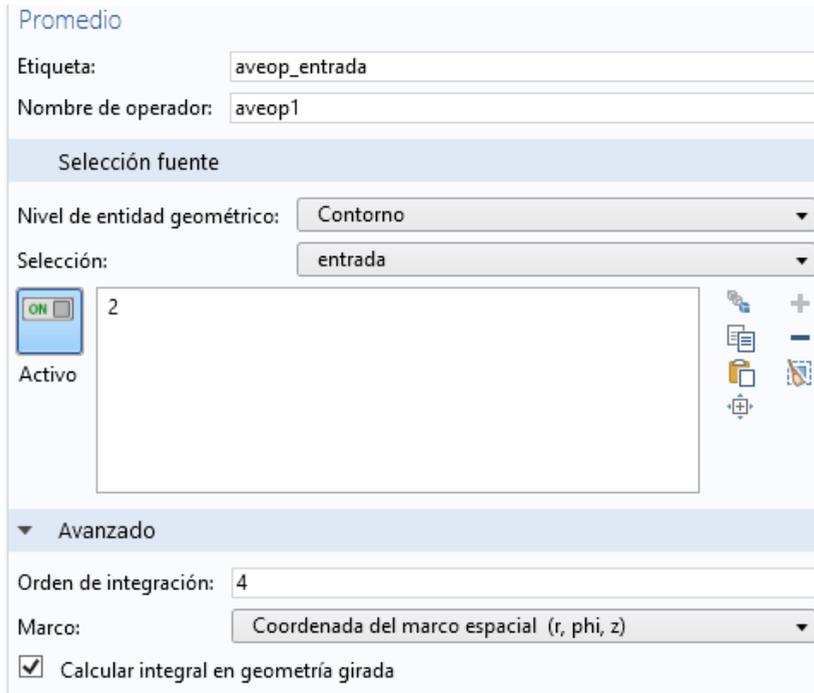


Figura 8.4: Vista del contorno de entrada (izquierda), el contorno de salida (centro) y el dominio del monolito (derecha)

## 5. Definición de funciones y operadores

En este apartado será definido el cálculo de la pérdida de transmisión TL, el cual depende de los valores de presión y velocidad en la entrada y la salida del catalizador. Por ello, será necesario definir 2 operadores, uno en la entrada y otro en la salida (*Definiciones > Acoplamiento > Acoplamientos de componente > Promedio*), los cuales serán nombrados *aveop\_entrada* y *aveop\_salida*, respectivamente, de la manera mostrada en la Figura 8.5.



**Figura 8.5: Creación del promedio en el contorno de entrada**

Para finalizar, se deberá definir la función que determine el cálculo del coeficiente de atenuación TL. Ya que nos enfrentamos a un problema de presión acústica, con esta misma como variable dependiente única, el cálculo de la pérdida de transmisión se realizará dependiendo de la presión incidente en la entrada y la presión en la salida, según la Ecuación (8.1) y la Figura 8.6 (*Definiciones > Variables > Variables locales*).

$$TL = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{incidente}}{p_{salida}}\right) \quad (8.1)$$

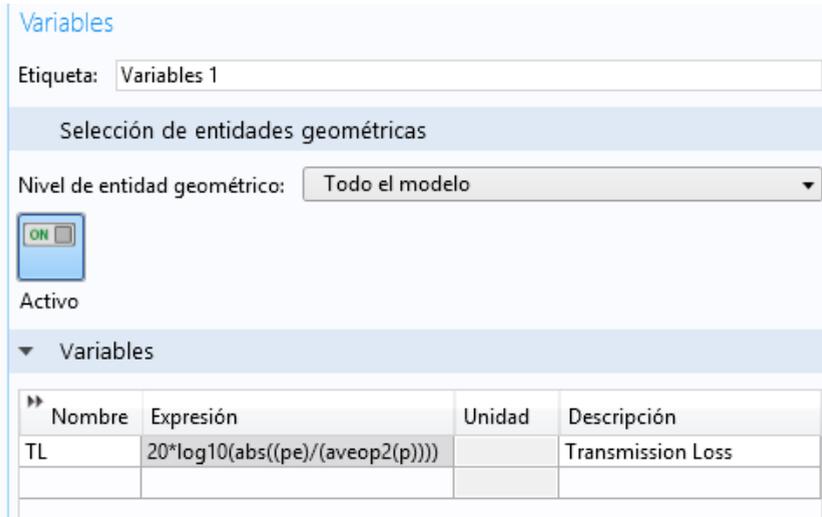


Figura 8.6: Definición del coeficiente TL

Como se puede observar, el operador  $aveop2(p)$  corresponde a la evaluación de la presión en la salida del catalizador (introducido mediante  $aveop\_salida$  de igual forma que en la Figura 8.5, en el contorno 7 de salida), mientras que  $p_e$  es la presión incidente introducida como parámetro global anteriormente.

## 6. Creación y definición de materiales

Resulta primordial asignar el material en el interior del catalizador, indicando que la propagación acústica se realizará por medio del aire. Para ello, se recurre a *Materiales > Añadir material*, seleccionando el aire para los dominios de entrada y salida, como se muestra en la Figura 8.7. El dominio del monolito lo dejamos sin material, ya que más adelante le aplicaremos la densidad y la velocidad equivalentes.

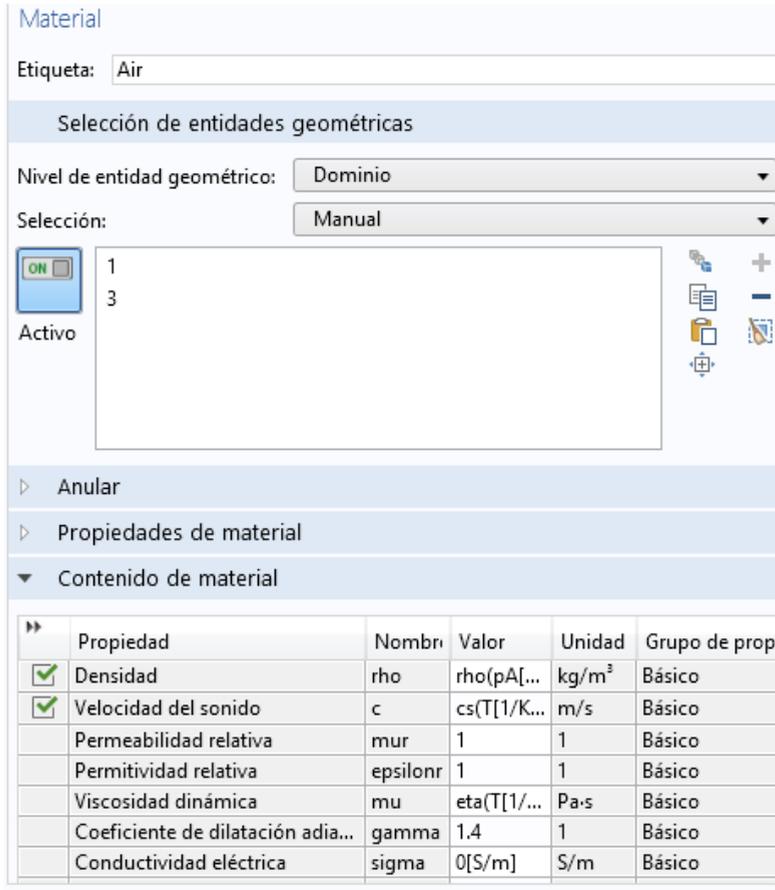


Figura 8.7: Selección y asignación de material

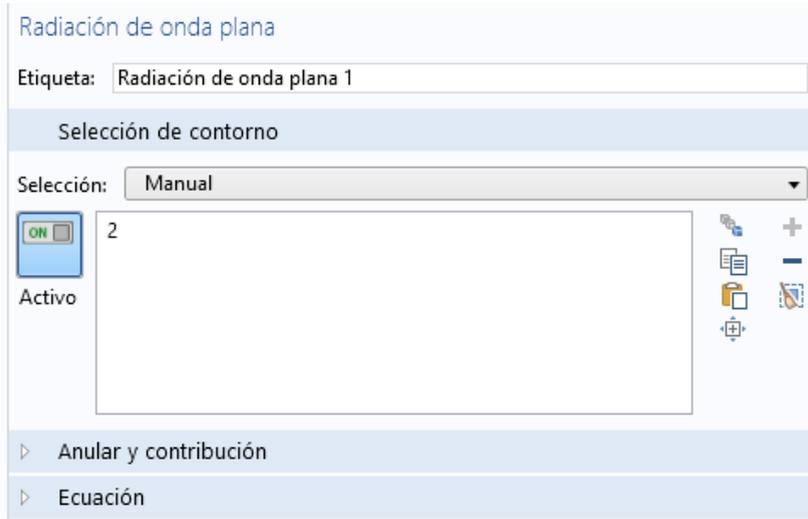
## 7. Definición de las condiciones de contorno

Para nuestro caso, nos encontramos con 5 condiciones a aplicar sobre el problema:

- 1) Presión incidente en la entrada.
- 2) Impedancia en la salida del catalizador.
- 3) Comportamiento del material absorbente (monolito).
- 4) Simetría axial.
- 5) Paredes rígidas.

## 1 – Presión incidente

En primer lugar aplicaremos la presión entrante en el catalizador, utilizando la ruta *Física > Contornos > Radiación de onda plana* y aplicando los ajustes sobre el contorno de entrada de la manera mostrada en la Figura 8.8.



**Figura 8.8: Ajuste en la entrada**

A continuación, dentro del árbol de constructor del modelo, seleccionando Campo de presión incidente con el botón derecho del ratón sobre Radiación de onda plana será cuando indiquemos el valor de la presión incidente, ya definida como  $P_e$  en las variables globales, de la siguiente manera:

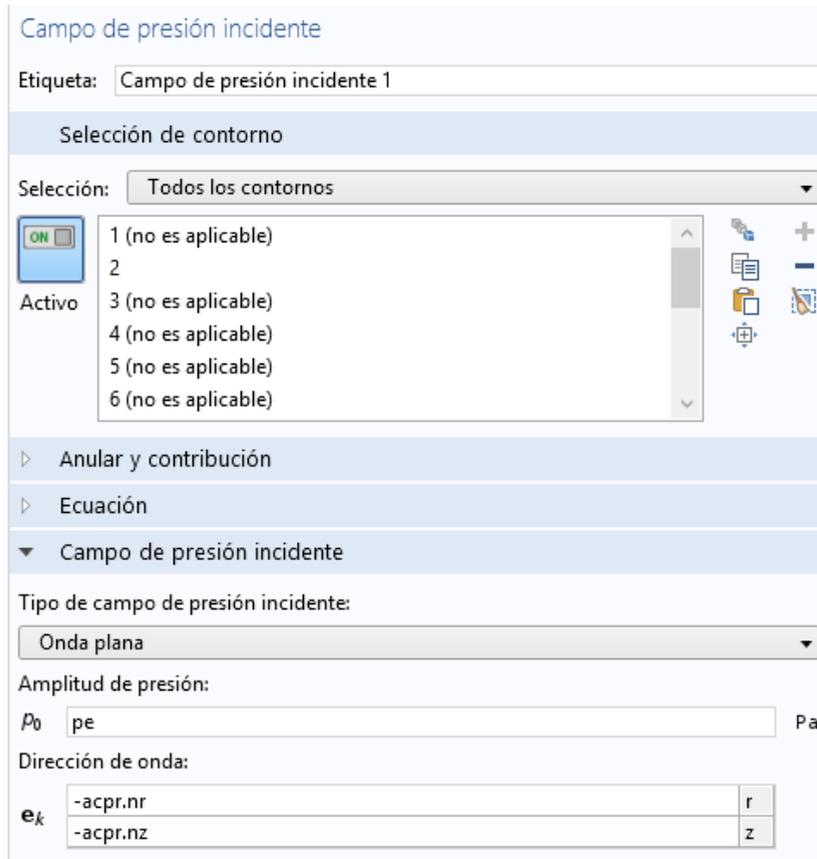
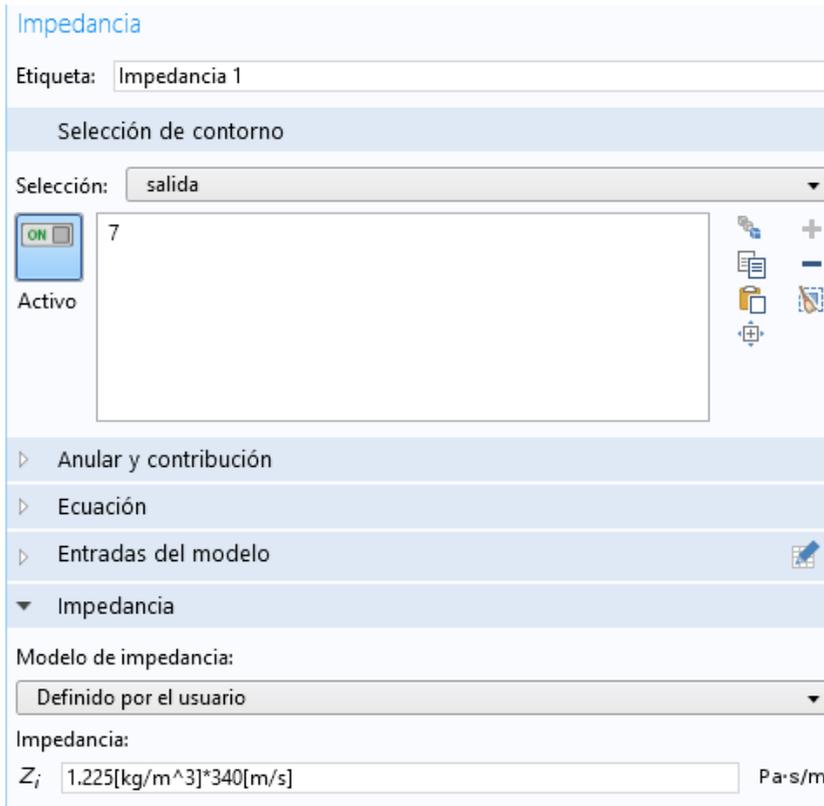


Figura 8.9: Aplicación de onda plana incidente en la entrada

## 2 – Impedancia de salida

El siguiente paso a seguir consiste en la aplicación de la condición de contorno en la salida del catalizador. Para ello, siguiendo la ruta *Física > Contornos > Impedancia*, seleccionamos los ajustes siguientes para aplicar la mencionada impedancia de salida, con los valores definidos en las variables globales.



**Figura 8.10: Definición de la impedancia en la salida**

Como se observa, la salida es anecoica y la impedancia adquiere el siguiente valor:

$$Z = \rho \cdot c = 1.225 \frac{kg}{m^3} \cdot 340 \frac{m}{s} = 416.5 \text{ rayl}$$

### 3 – Material absorbente

Una vez aplicada la impedancia de salida, el siguiente paso nos lleva a la asignación del comportamiento absorbente del monolito, definiendo la presión acústica que tiene lugar en el mismo para cada frecuencia. Para ello, se necesitarán los datos de velocidad

y densidad equivalentes en función de las frecuencias, obtenidas en Mathcad según el Anexo I.

La definición se realiza mediante la ruta *Física > Contornos > Presión acústica*, quedando la ventana de ajustes de la siguiente manera:

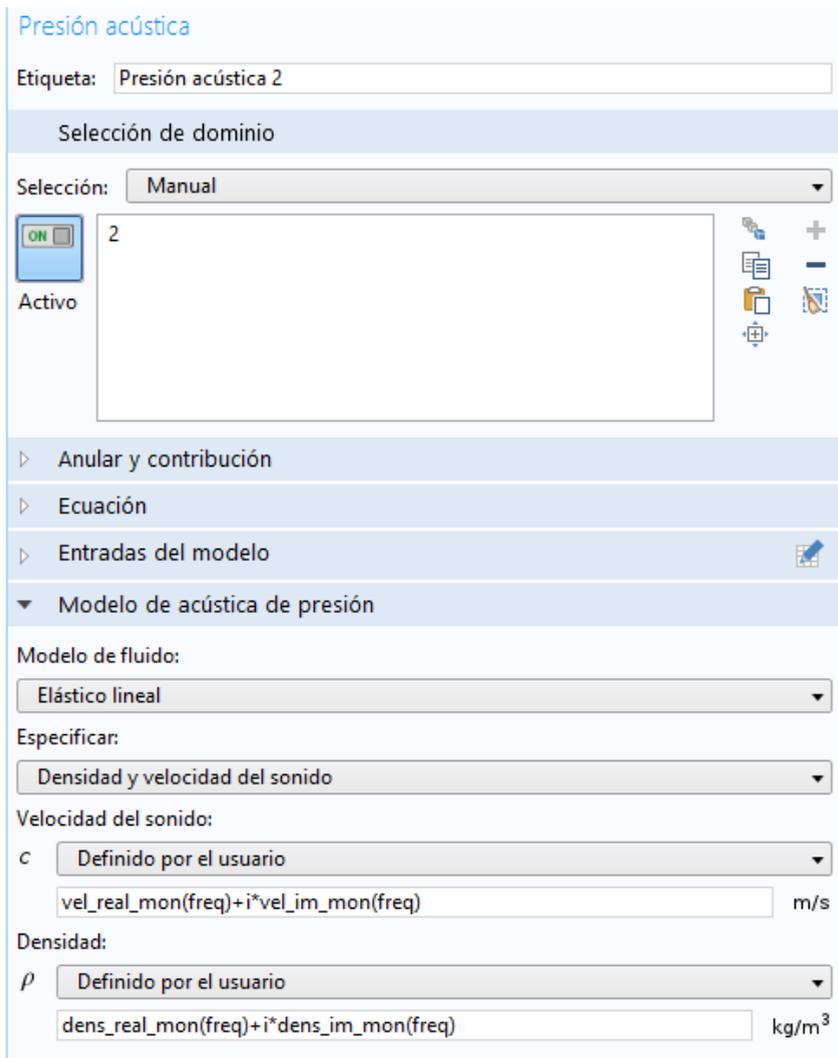


Figura 8.11: Definición de las propiedades de velocidad y densidad en el monolito

Como se puede apreciar, se utilizan las siguientes expresiones:

$$v_{eq} = v_{real}(f) + i \cdot v_{im}(f)$$

$$\rho_{eq} = \rho_{real}(f) + i \cdot \rho_{im}(f)$$

Estos valores de velocidad y densidad reales e imaginarios serán definidos mediante la ruta *Definiciones > Funciones > Interpolación*, cargando los datos obtenidos a partir de los archivos “.txt” generados en Mathcad, de la forma expuesta en el Anexo I, aplicándolo a nuestro caso en Comsol de la manera mostrada en la Figura 8.12.

Origen de datos: Tabla local

Nombre de función: dens\_real\_mon

t	f(t)
10	2.114370818
20	2.110667845
30	2.10469719
40	2.0967341
50	2.087117564
60	2.076215957
70	2.064395568
80	2.051995948
90	2.039313755
100	2.026594782

Definir función primitiva  
Nombre de función primitiva: int1\_prim

Definir función inversa  
Nombre de función inversa: int1\_inv

Interpolación y extrapolación

Interpolación: Lineal

Extrapolación: Constante

Unidades

Argumentos: 1/s

Función: kg/m^3

Figura 8.12: Importación de la parte real de la densidad del monolito

## 5 – Simetría axial

Debido a que nuestro problema es de tipo axisimétrico, esta condición debe ser aplicada para que tenga lugar el mismo caso al otro lado del eje. Al indicar al principio que el problema es 2D axisimétrico, esta condición se crea de manera automática.

## 6 – Paredes rígidas

Esta condición se crea automáticamente sobre las paredes sobre las que no se ha aplicado una condición de contorno concreta (entrada, salida o simetría axial).

## 8. Definición del mallado

Para la creación de la malla, se recurre a seleccionar *Cuadrático* libre al clicar sobre *Malla* con el botón derecho del ratón dentro del árbol de constructor del modelo. Una vez escogido el tipo de mallado, dentro de “Tamaño” seleccionamos un tamaño de malla de 0.005 m, tal y como se muestra en la Figura 8.13.

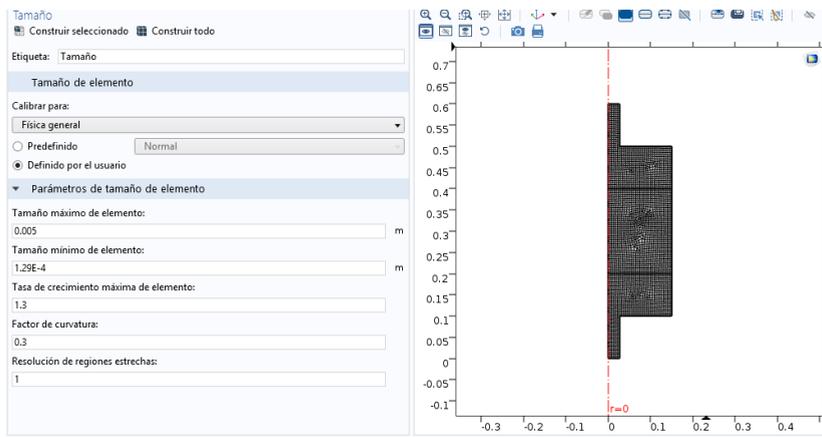


Figura 8.13: Mallado del catalizador

## 9. Definición del ensayo y cálculo del problema

Una vez hemos definido el problema, a continuación debemos seleccionar un rango de frecuencias en el que tendrá lugar el cálculo del problema, para su posterior resolución, siendo este rango elegido entre 10 y 3200 Hz, en pasos de 10 Hz. Esta definición se realiza mediante la ruta *Constructor del modelo > Dominio de la frecuencia > Frecuencias*, tal y como se muestra en la Figura 8.14.

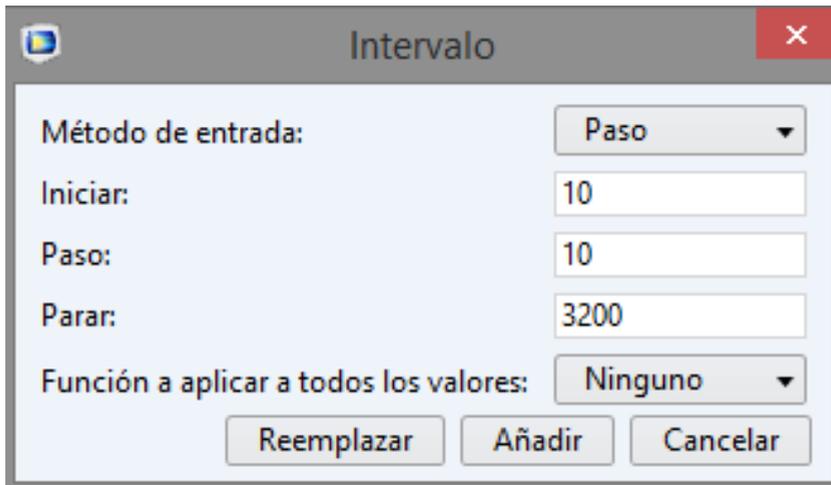


Figura 8.14: Intervalo de frecuencias

Por último, se procede al cálculo del programa seleccionando **Calcular** dentro del menú *Home*.

## 10. Obtención de gráficas de Transmission Loss

El paso final consiste en la representación de la solución por medio de una gráfica que nos muestre el valor de la pérdida de transmisión acústica (TL) en función de la frecuencia. Para ello, se utiliza la ruta *Resultados > Grupo gráfico 1D > Global*, rellenando los ajustes de la siguiente forma:

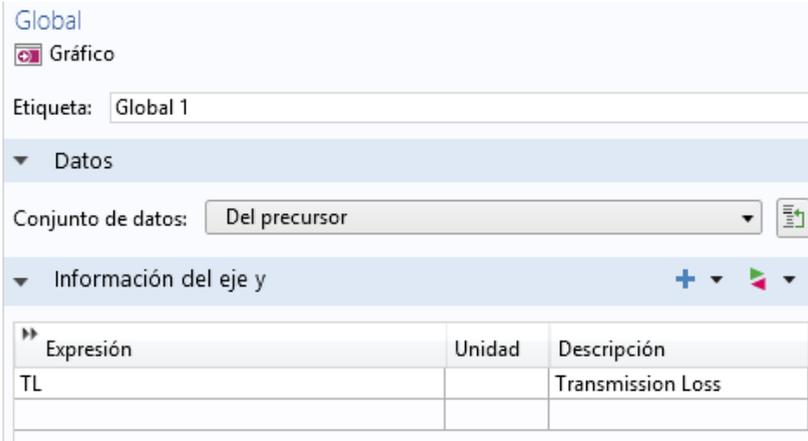


Figura 8.15: Asignación del coeficiente TL en la gráfica

De este modo se consigue obtener las gráficas buscadas.

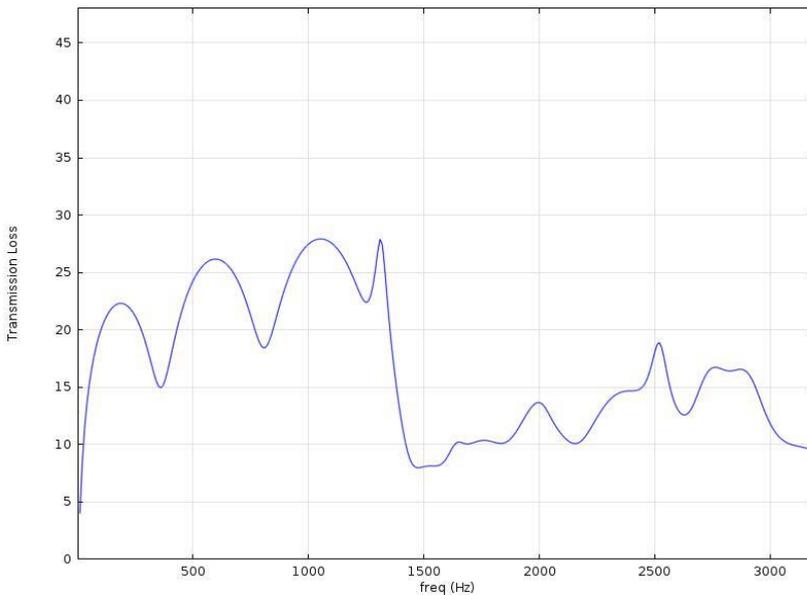
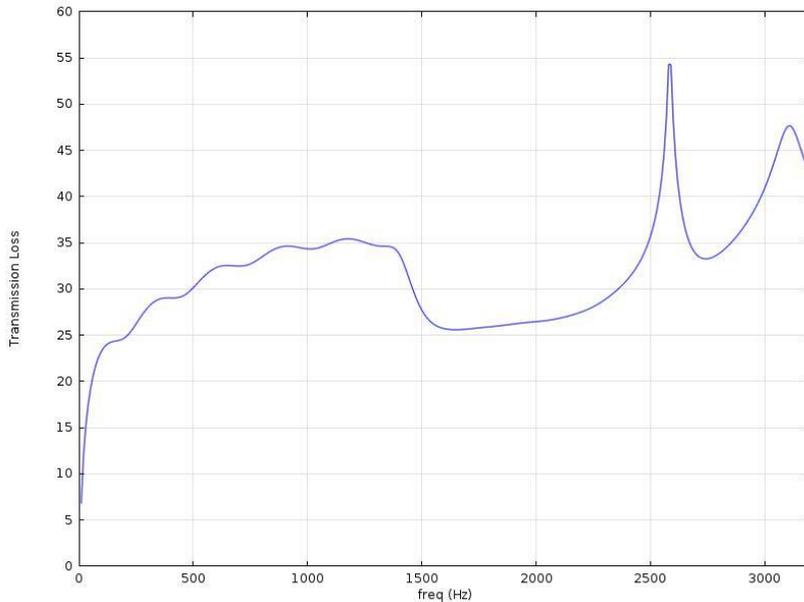


Figura 8.16: Gráfica de TL para  $L=0.2\text{m}$  y  $R=500\text{ rayl/m}$ , según modo 3D-3D



**Figura 8.17:** Gráfica de TL para  $L=0.4\text{m}$  y  $R=2000\text{ rayl/m}$ , según modo 3D-3D

#### 8.4.2 – Modelo 3D-1D

Como se ha comentado repetidamente a lo largo del trabajo, a continuación nos proponemos realizar el cálculo de las gráficas de pérdida de transmisión acústica asumiendo una capilaridad del monolito, que se ajustaría más a la realidad que en el caso anterior.

En comparación con el caso 3D-3D, la única diferencia en cuanto al modelado en Comsol estaría en la creación de la geometría, la definición de contornos y dominios y la definición y la asignación de condiciones de contorno. El resto de pasos son iguales respecto al caso 3D.

### 3. Creación de geometría

Como lo que buscamos ahora es en sustituir el monolito por una matriz de transferencia, la única acción a realizar en este paso sería la de eliminar el dominio y la geometría del monolito, de tal forma que lo único que nos quedaría sería lo mostrado en la Figura 8.18.

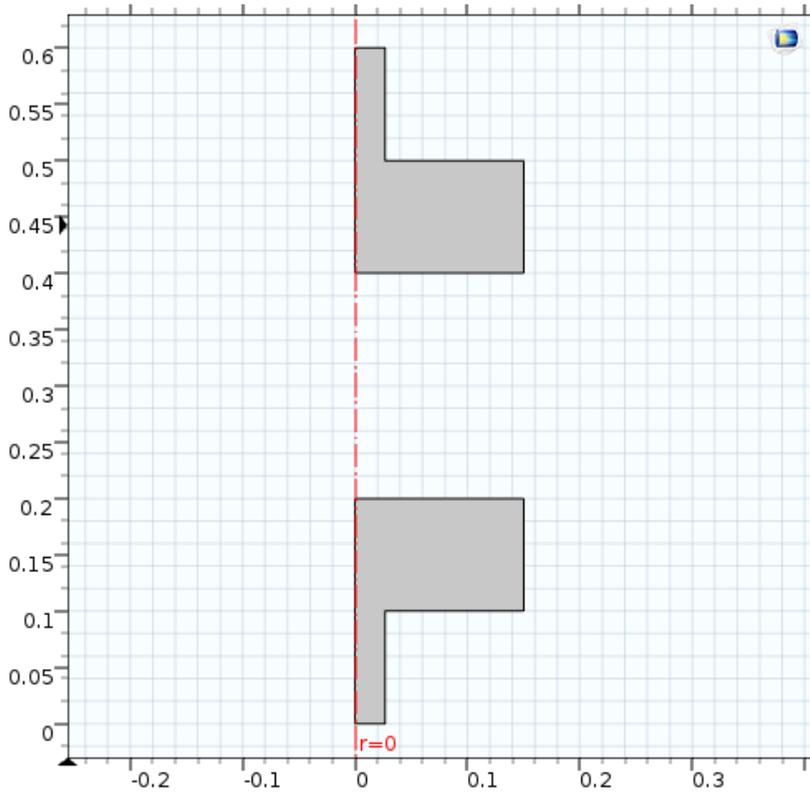


Figura 8.18: Vista de la geometría del catalizador para el caso 3D-1D

### 4. Creación de contornos y dominios

Al suprimir el dominio del monolito, con la intención de sustituirlo por una matriz de transferencia, será necesaria la definición de 4

contornos en este caso, de igual manera que la expuesta en la Figura 8.3:

- Entrada (contorno)
- Salida (contorno)
- Pared 1 (contorno)
- Pared 2 (contorno)

Como se puede apreciar en la Figura 8.19, la pared 1 corresponde a la entrada al “monolito” (llamada “**inlet**”), mientras que la pared 2 hace referencia a la salida del mismo (llamada “**outlet**”).

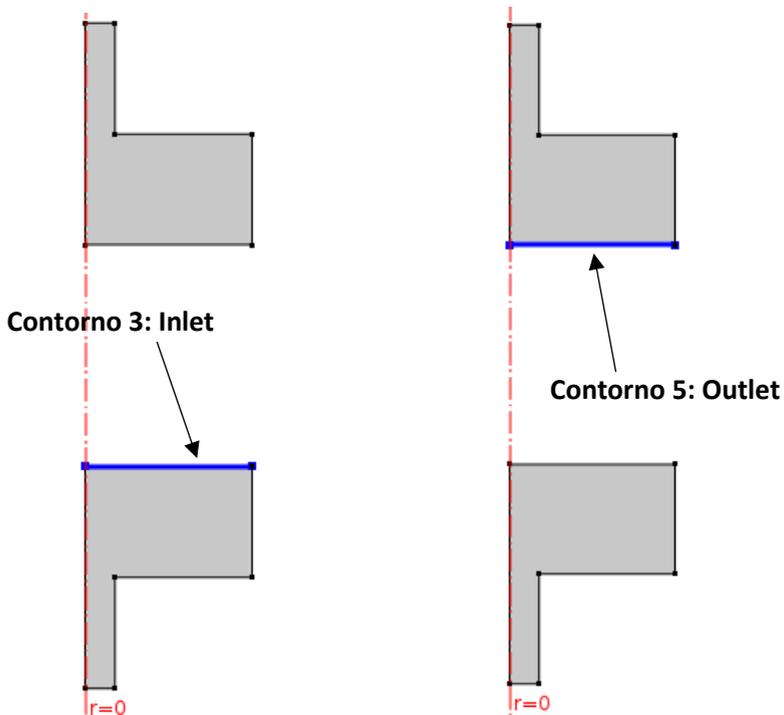


Figura 8.19: Contorno inlet (izquierda) y contorno outlet (derecha)

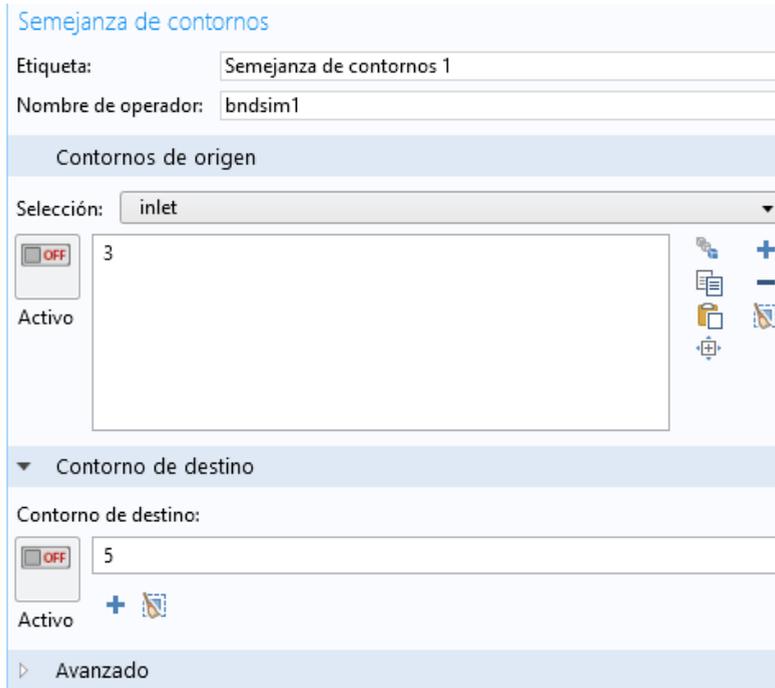
## 7. Definición de las condiciones de contorno

La única diferencia entre los casos 3D-3D y 3D-1D consiste en que en el segundo no nos encontramos con un dominio en

concreto, sino con un espacio en el que aplicaremos la matriz de transferencia que obtendremos mediante Mathcad de la manera expuesta en el Anexo II. Por ello, nos encontramos esta vez con las siguientes condiciones:

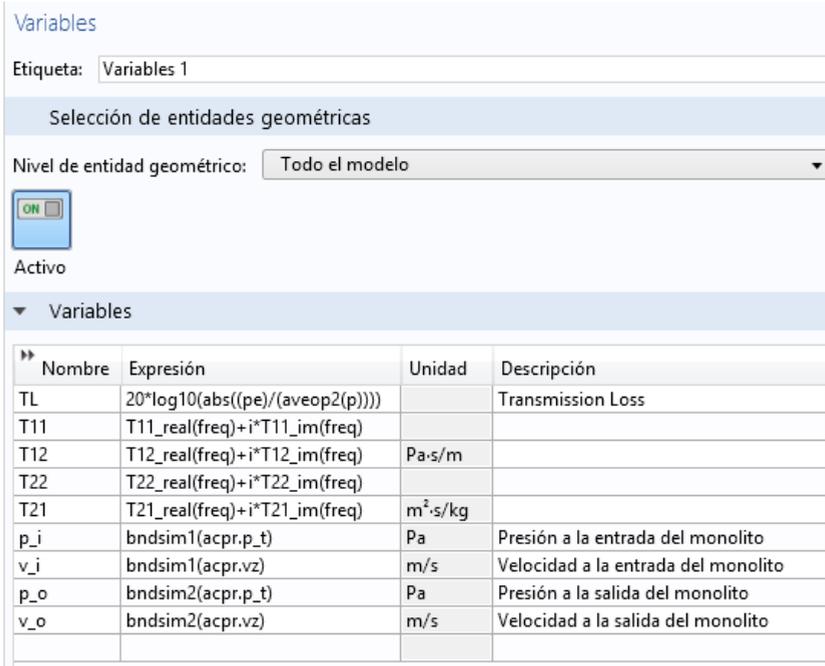
- 1) Presión incidente en la entrada.
- 2) Impedancia en la salida del catalizador.
- 3) Matriz de transferencia entre las paredes 1 y 2.
- 4) Simetría axial.
- 5) Paredes rígidas.

De las anteriores condiciones, sólo cambia la número 3, la cual se aplicaría en primer lugar asignando una semejanza de contornos entre las paredes 1 y 2 según la ruta *Definiciones > Acoplamientos > Acoplamientos de componente > Semejanza de contornos*. Este paso lo utilizamos, como se muestra en la Figura 8.20, con pared 1 como pared de origen y pared 2 como pared de destino (marcando ambos como desactivados) y al revés, por lo que tendremos 2 semejanzas finalmente.



**Figura 8.20: Definición de la semejanza de contornos desde inlet hasta outlet**

A continuación resulta indispensable la creación de las componentes de la matriz de transferencia, cargando los datos obtenidos en Mathcad según el Anexo, estableciendo unas interpolaciones de igual manera que las de velocidad y densidad del monolito en el caso anterior (*Definiciones > Funciones > Interpolación*). De este modo, obtenemos un valor real y otro imaginario para cada componente, por lo que creamos una variable local para cada una de la siguiente manera:



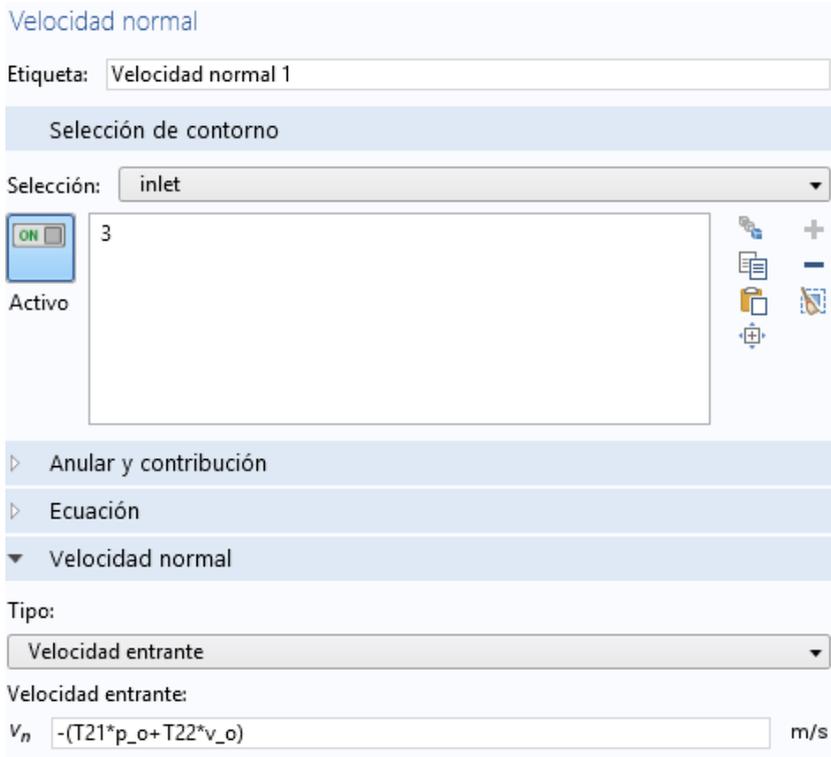
**Figura 8.21: Definición de TL, las componentes de la matriz de transferencia y de las presiones y velocidades en la entrada y la salida del monolito**

Como se puede apreciar en la figura anterior, también definimos unos valores de presión y velocidad, aplicados a cada pared interior, con el objetivo de utilizarlos para el cálculo de TL. La presión y velocidad en inlet corresponden a los valores  $p_1$  y  $v_1$  según la Ec. (8.2), mientras que la presión y velocidad en outlet corresponden a  $p_2$  y  $v_2$ .

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

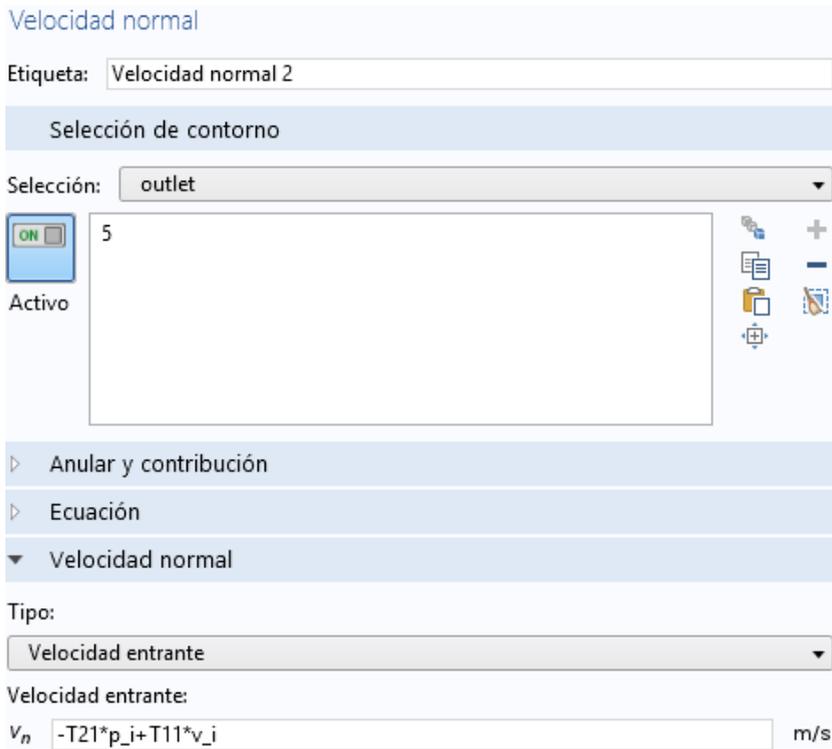
Una vez definidas las componentes de la matriz de transferencia, calculadas e importadas desde Mathcad, así como las variables de presión y velocidad en los extremos del monolito que nos servirán para determinar la TL correspondiente para cada frecuencia, se debe aplicar la Ec. (8.2) en Comsol. Para ello, se utiliza la ruta *Física > Contorno > Contornos > Velocidad Normal*,

aplicando los ajustes para el cálculo en el inlet según la Figura 8.22.



**Figura 8.22: Definición de la ecuación de transferencia en el inlet**

Para la aplicación en el outlet, utilizando la misma física de velocidad normal seguimos los ajustes mostrados en la Figura 8.23.



**Figura 8.23: Definición de la ecuación de transferencia en el outlet**

Aplicando los mismos pasos de tamaño y tipo de malla e intervalos de frecuencias en los que realizar el estudio, acabamos obteniendo las gráficas de atenuación acústica, mostrándose en las siguientes figuras la menor y la mayor, respectivamente.

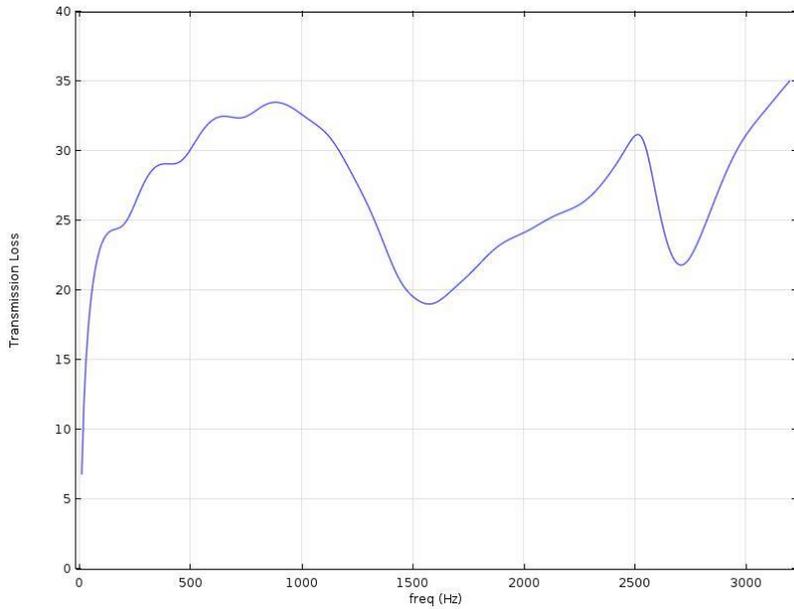


Figura 8.24: Gráfica de TL para L=0.4m y R=2000 rayl/m, según modo 3D-1D

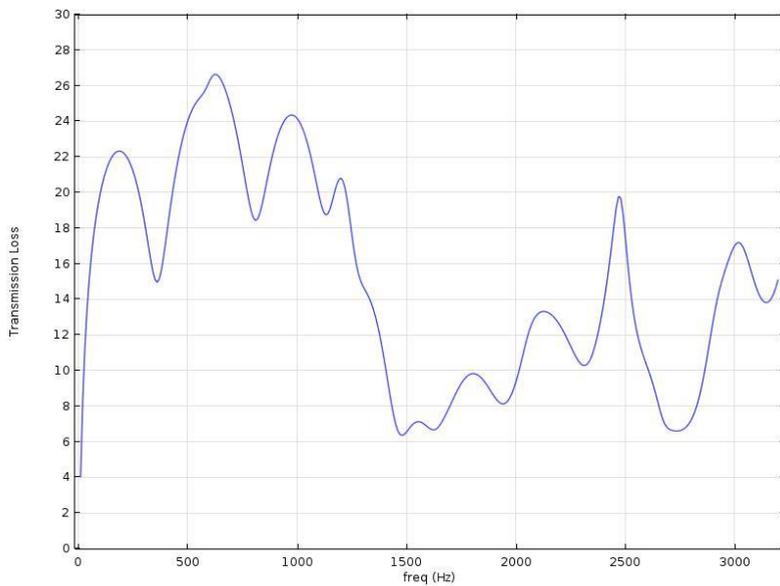


Figura 8.25: Gráfica de TL para L=0.2m y R=500 rayl/m, según modo 3D-1D

### 8.4.3 – Modelado con componente 3D estando entrada y salida centradas

El siguiente paso en el estudio de la atenuación acústica mediante el software Comsol consiste en realizar el mismo procedimiento seguido para los casos 3D-1D y 3D-3D, pero mediante el uso de un componente 3D. Para el caso de la entrada y la salida centradas, el resultado debería ser exactamente el mismo que para el componente 2D axisimétrico. Sin embargo, esta configuración en 3D nos permitiría realizar el estudio del comportamiento acústico para casos en los que la salida quede descentrada respecto del monolito, situación que no es posible modelizar mediante un componente 2D axisimétrico.

Resulta bastante obvio que la única diferencia, tanto para los casos 3D-3D y 3D-1D, con el componente 2D axisimétrico está en la creación de la geometría, ya que esta vez no se realizará sobre un plano. De igual modo, los ejes del sistema de coordenadas ya no serán  $r$  y  $z$ , sino  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

#### 3. Creación de geometría

En este caso, en lugar de crear secciones rectangulares, se crean directamente cilindros de la manera mostrada en la Figura 8.26.

Cilindro

Construir seleccionado ▾ Construir todos los objetos

Etiqueta: Cilindro 1

▼ Tipo de objeto

Tipo: Sólido ▾

▼ Tamaño y forma

Radio: r1 m

Altura: L1 m

▼ Posición

x: 0 m

y: 0 m

z: 0 m

▼ Eje

Tipo de eje: Eje x ▾

▼ Ángulo de rotación

Rotación: 0 deg

▶ Capas

▼ Selecciones de entidades resultandes

**Figura 8.26: Creación del cilindro de entrada**

Por ello, para crear los cilindros de entrada, entrada de cámara, monolito, salida de cámara y salida, se introducen estas condiciones para un caso 3D-3D, todas ellas teniendo en cuenta que los cilindros se crean a lo largo del eje x:

- Entrada:
  - Radio: r1
  - Altura: L1
  - Posición: 0, 0, 0
- Entrada cámara:
  - Radio: r2

- Altura: L2
- Posición: L1, 0, 0
- Monolito:
  - Radio: r2
  - Altura: L3
  - Posición: L1+L2, 0, 0
- Salida cámara:
  - Radio: r2
  - Altura: L2
  - Posición: L1+L2+L3, 0, 0
- Salida:
  - Radio: r1
  - Altura: L1
  - Posición: L1+L2+L3+L2, 0, 0

Cuando nos enfrentamos al caso 3D-1D, al igual que con componente 2D axisimétrico, eliminamos el monolito, ya que lo sustituimos por la matriz de transferencia, cuyos datos importamos desde Mathcad.

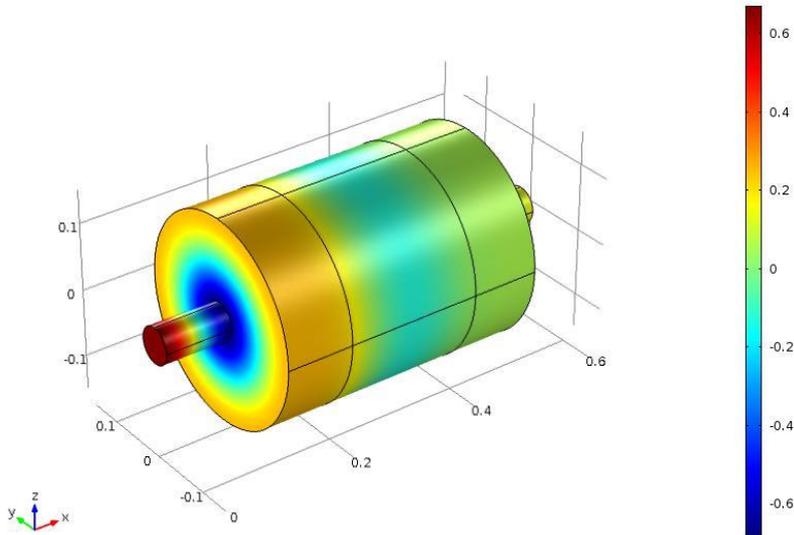
## 8. Definición del mallado

Al enfrentarnos ahora a un caso con elementos tridimensionales de malla, aumentaremos el tamaño de malla hasta 0.04 en el caso 3D-3D y 0.02 en el caso 3D-1D, ya que de esta manera utilizamos los elementos más pequeños posibles y conseguimos tiempos de cálculo que no superen las 2 horas.

Los resultados obtenidos con el componente 3D y los conductos de entrada y salida centrados se muestran y comentan en el capítulo 9, aunque como se comprobará, son muy similares a los que se consiguen con Matlab y el componente 2D axisimétrico.

#### 8.4.4 – Modelado con conducto de salida descentrado

En la figura 8.27 se observa la distribución de presiones dentro del catalizador para una frecuencia concreta. Como se puede contemplar, el modo de distribución de presión que tiene lugar es de tipo circular, apreciándose que la presión es negativa en el centro del cuerpo del catalizador, siendo rodeada por una sección circular de presión nula, y a su vez rodeado por otra sección circular de presión positiva.



**Figura 8.27: Distribución de presión para  $L=0.2$  m y  $R=2000$  rayl/m, caso 3D-3D**

Es por ello por lo que sería interesante comprobar cómo actuaría el catalizador acústicamente si modificamos la situación del conducto de salida a otra que no se encuentre centrada respecto al cuerpo del monolito. Cabe esperar que, de esta manera, se pueda producir una mejora en la obtención de la pérdida de transmisión para determinados descentrados.

Para conseguir este descentrado, cambiaremos la posición del conducto de salida a una distancia de 0.05m respecto del eje x, quedando los resultados mostrados y comentados en el capítulo 9.5 del presente trabajo.

#### 8.4.5 – Modelado con conducto de salida en situación de descentrado óptimo

Siguiendo el planteamiento sugerido en el capítulo 8.4.4, en el cual se comentó la posibilidad de realizar el estudio de la atenuación acústica del catalizador si se traslada el conducto de salida una cierta distancia respecto del eje del cuerpo del monolito, sería igualmente recomendable observar los resultados de pérdida de transmisión que tienen lugar si este conducto de salida se sitúa en la línea nodal del modo de distribución de presión.

Un estudio realizado por el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universidad de Valencia sobre la mejora de la atenuación acústica en conductos [25] llegó a la conclusión de que, a partir de un conducto genérico de radio 1, el modo correspondiente a la distribución radial concéntrica de presión adquiere un valor nulo en un radio de 0.6276. Es por ello por lo que se puede desplazar el conducto de salida a una distancia sobre la línea nodal de  $r = 0.6276 \cdot R_2$  para reducir el efecto de este modo.

La manera de aplicar este desplazamiento en Comsol consistiría en fijar la posición del conducto de entrada a una distancia d respecto del eje x, tomando d un valor de  $0.6276 \cdot R_2$  en los parámetros generales (*Modelo > Definiciones > Parámetros*).

▼ Parámetros

» Nombre	Expresión	Valor
r1	0.0268 [m]	0.0268 m
r2	0.15 [m]	0.15 m
r3	0.0268 [m]	0.0268 m
L1	0.1 [m]	0.1 m
L2	0.1 [m]	0.1 m
L3	0.2 [m]	0.2 m
pe	1 [Pa]	1 Pa
d	$0.6276 \cdot r2$	0.09414 m

**Figura 8.27: Parámetros generales necesarios para el descentrado óptimo con L=0.2 m**

Los resultados al aplicar este descentrado óptimo se mostrarán y comentarán en el capítulo 9.5, comparándolos con los obtenidos con los conductos de entrada y salida centrados y con el conducto de salida descentrado a una distancia de 0.05m respecto del cuerpo del monolito.

# 9.

## Resultados y conclusiones

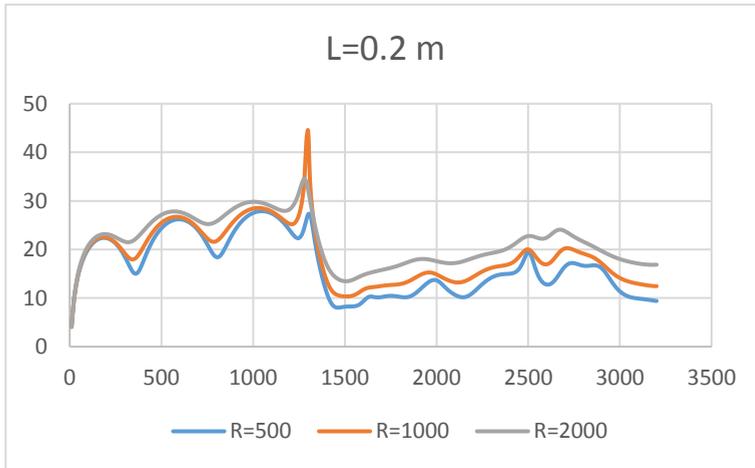
## 9.1 – Introducción

Son múltiples las alternativas que encontramos al utilizar COMSOL MULTIPHYSICS para poder modelar y analizar el comportamiento acústico de diferentes materiales o componentes mecánicos, como el catalizador. En nuestro trabajo, se ha recurrido a la utilización de una geometría similar a la de un silenciador convencional, estudiando la atenuación acústica que tiene lugar para distintas longitudes, distintos valores de resistividad o distintos métodos, como los casos 3D-1D y 3D-3D o teniendo en cuenta un elemento tridimensional o axisimétrico de 2 dimensiones.

Como se ha comentado previamente, los resultados que se mostrarán a continuación, especialmente los introducidos en los apartados 9.2 y 9.3, han sido comparados con un modelo validado por el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, realizado en Matlab.

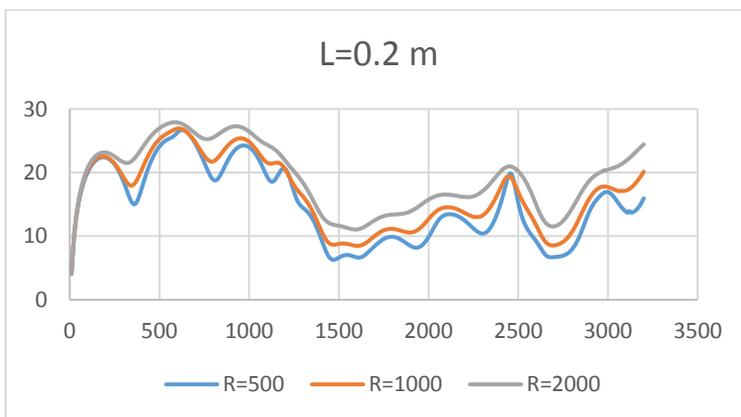
## 9.2 – Influencia de la resistividad sobre TL

Como se ha comentado previamente, en el ámbito de las propiedades acústicas, la resistividad consiste en la oposición de un medio a permitir el paso de ondas de presión, estando en relación, por tanto, con la capacidad de un material de reducir la energía acústica transmitida, disminuyendo la velocidad del sonido en el interior del mismo. Esta resistividad tiene el rayl/m como unidad de medida.



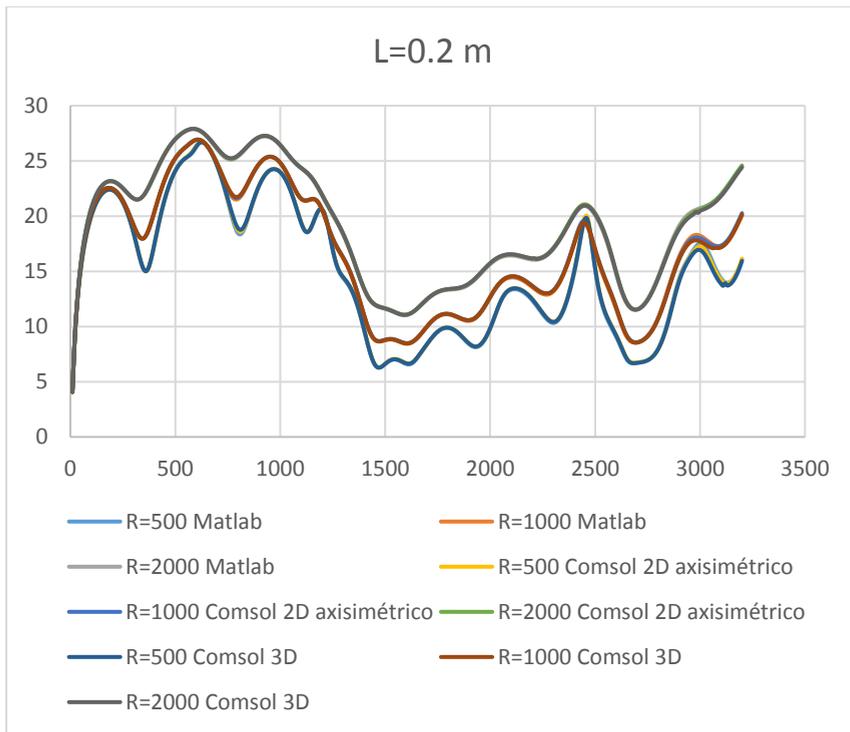
**Figura 9.1: Resultados de TL para  $L=0.2$ m y distintos valores de resistividad, caso 3D-3D**

Por lo tanto, si esta resistividad corresponde a una reducción de energía acústica, resulta bastante lógico que conforme aumentemos esta magnitud, se obtengan mejores resultados de atenuación acústica, siempre y cuando se realice para una misma longitud de cámara del catalizador, tal y como se aprecia en la Figura 9.1. El hecho de realizar el estudio según el caso 3D-1D no influye sobre este hecho, como se observa en la figura 9.2, ya que adquiere la misma tendencia.



**Figura 9.2: Resultados de TL para  $L=0.2$ m y distintos valores de resistividad, caso 3D-1D**

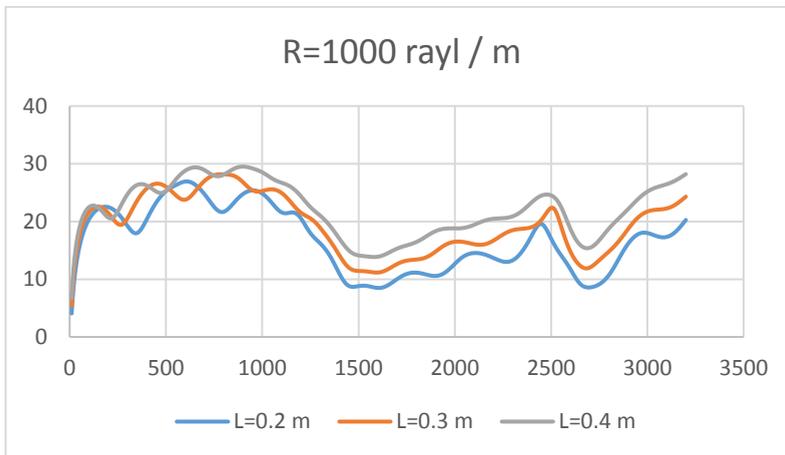
A continuación se muestra una comparación entre los resultados obtenidos por el programa de Matlab validado por el Dpto. de Ingeniería Mecánica y Materiales y los brindados por la aplicación en Comsol. Se observa que las gráficas son prácticamente idénticas, concluyendo que el trabajo realizado nos facilita unos resultados válidos y correctos, tanto para el estudio según componente 2D axisimétrica y componente diseñada en 3D.



**Figura 9.3: Comparación de resultados de TL entre Matlab y Comsol para  $L=0.2\text{m}$  y distintos valores de resistividad, caso 3D-1D**

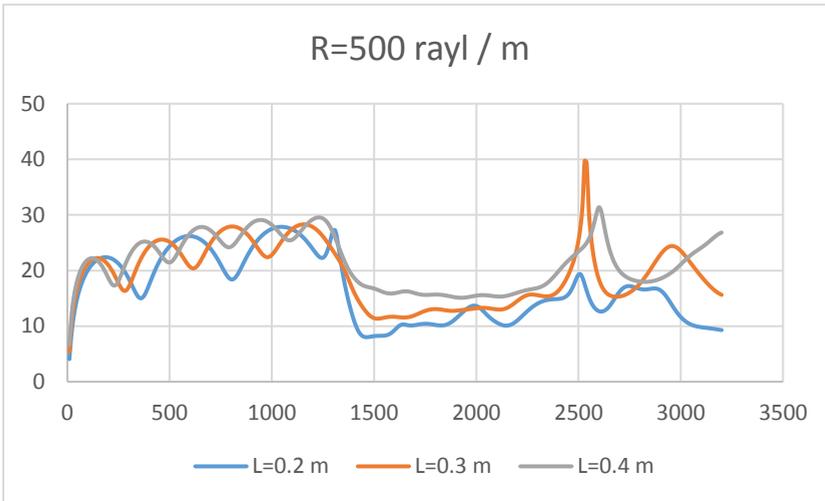
### 9.3 – Influencia de la longitud del monolito sobre el índice TL

En capítulos anteriores se ha explicado que el material incluido en la cámara del catalizador, llamado monolito, tiene unas propiedades que permiten la reducción de la energía acústica que transmiten las partículas de aire que circulan en su interior. Es por ello, por lo que cabe esperar que conforme aumentemos la longitud del monolito, a la salida del catalizador se produzca una mayor reducción acústica, ya que las partículas de aire han tenido que circular por una mayor superficie atenuadora. Esto es comprobado según la siguiente Figura:



**Figura 9.4: Resultados de TL para una resistividad de 1000 rayl/m y distintos valores de longitud de monolito, caso 3D-1D**

Se puede contemplar, según la Figura 9.4, que a bajas frecuencias existen más valores máximos cuando aumentamos la longitud del monolito. Estos “picos redondeados” se llaman “cúpulas de atenuación acústica” y aparecen más conforme mayor recorrido realicen las ondas, ya que se producen mayores efectos de resonancia.

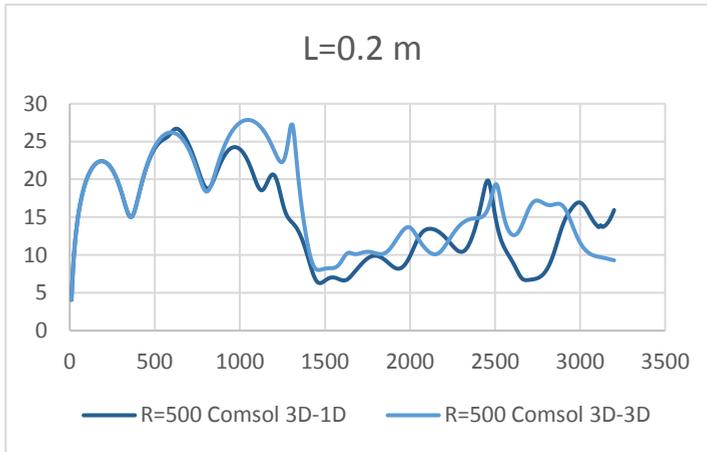


**Figura 9.5: Resultados de TL para una resistividad de 500 rayl/m y distintos valores de longitud de monolito, caso 3D-3D**

## 9.4 – Comparación de TL entre los casos 3D-1D y 3D-3D

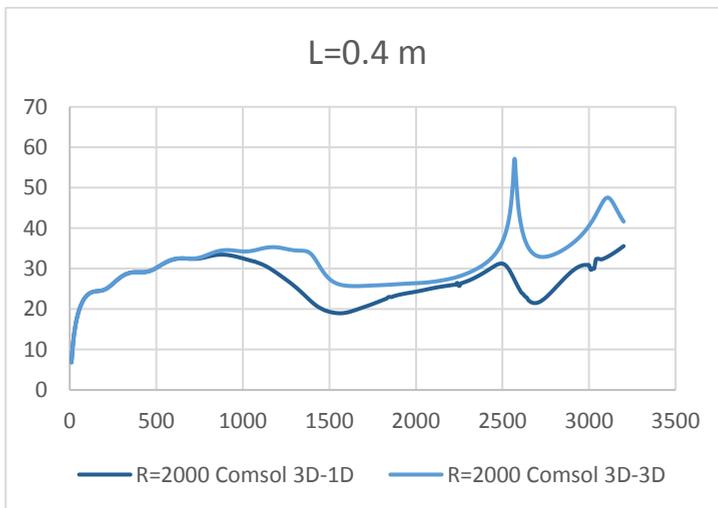
Principalmente, el objetivo de este trabajo consiste en comparar la forma de estudiar el comportamiento acústico del monolito. Se tomaron dos caminos: mediante una suposición de que el monolito adquiere una disposición en 3D, o la de que el monolito es sustituido por una matriz de transferencia que relaciona la presión y la velocidad de las partículas de aire a la entrada y a la salida del mismo. Es por ello por lo que no se obtendrán los mismos resultados para ambos casos.

Si observamos la Figura 9.6, la cual refleja los resultados del índice TL en el caso en que tomamos el monolito como un elemento tridimensional, nos damos cuenta de que no coinciden más que para bajas frecuencias. Este hecho tiene lugar ya que a bajas frecuencias, las ondas en ambos casos se comportan como ondas planas.



**Figura 9.6:** Comparación del índice TL para una longitud de 0.2m y resistividad de 500 rayl/m

Sin embargo, a frecuencias mayores de 750 Hz aproximadamente, podemos concluir que las ondas dejan de ser planas en el caso 3D-3D, transmitiéndose de manera tridimensional por el interior del monolito, algo que se aleja bastante de la realidad, al encontrarnos en la misma multitud de conductos por los que las ondas adquieren una mayor planitud.



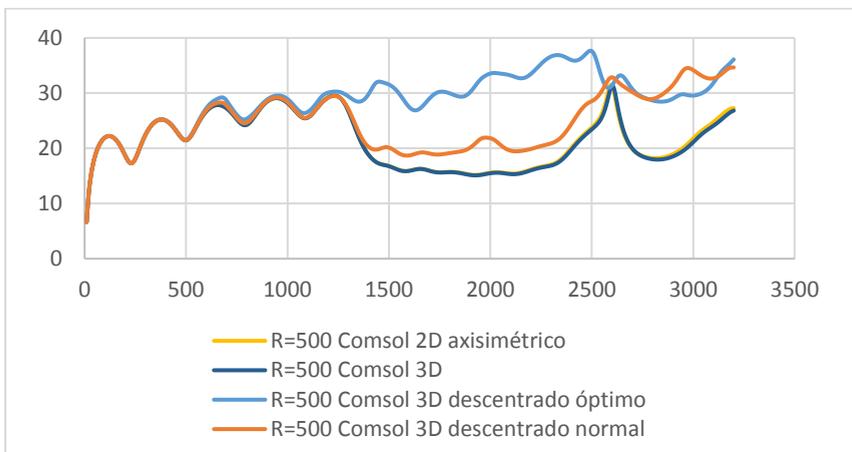
**Figura 9.7:** Comparación del índice TL para una longitud de 0.4m y resistividad de 2000 rayl/m

## 9.5 – Comparación de TL entre los casos centrados, descentrado y descentrado óptimo

En la Figura 8.27 pudimos contemplar cómo se comporta la distribución de presiones en el interior del catalizador, siendo de un signo concreto alrededor de su eje, rodeado por una sección circular de presión igual a 0 y ésta a su vez rodeada por otra sección de valor contrario al del centro.

Con este último tipo de estudio, se quiere atender a cómo se comportaría el catalizador si situamos la salida a una determinada distancia del eje, ya sea una en concreto o a la ya mencionada “distancia óptima”.

Como cabía esperar, si atendemos a los resultados mostrados por la Figura 9.8, se cumple lo que se vaticinó en los capítulos 8.4.4 y 8.4.5: con el descentrado óptimo se obtienen mejores resultados de pérdida de transmisión, ya que prácticamente para todas las frecuencias de nuestro rango, la salida queda situada a una distancia tal que la presión es muy cercana a 0, con el resultado de una mayor atenuación acústica.



**Figura 9.8: Comparación del índice TL para los casos centrado, descentrado y descentrado óptimo, según una longitud de 0.4m y resistividad de 500 rayl/m**

Sin embargo, se puede apreciar igualmente que para determinadas frecuencias altas, normalmente entre 2600 y 2800 Hz, los resultados para un descentrado normal son mejores que para el descentrado óptimo. Esto puede explicarse como que en dicho rango de frecuencias, la distancia a la que se sitúa el conducto de salida según descentrado óptimo no corresponde exactamente a un modo en el que la presión acústica en dicho punto sea nula.

## 9.6 – Conclusiones finales

Tras todo lo comentado en el capítulo 3 del presente trabajo, resulta bastante claro pensar que al añadir un convertidor catalítico en el sistema de escape de un vehículo se debe mejorar la atenuación acústica producida en el mismo, sirviendo como un excelente complemento que no sólo reduce las emisiones contaminantes procedentes de la combustión en el motor.

La idea de comparar los resultados de atenuación acústica para distintos factores nos ayuda a identificar las mejores opciones a tener en cuenta cuando queramos diseñar e instalar un catalizador dentro del sistema de escape. Si, como hemos visto en el capítulo 3, el catalizador está compuesto por un monolito interior que ayuda a reducir emisiones acústicas por disipación de energía sonora, cabe esperar que al aumentar la longitud de dicho monolito podamos obtener unos resultados mejores desde el punto de vista de atenuación acústica, tal y como podemos apreciar en la Figura 9.4. Sin embargo, este factor puede llegar a tener limitaciones de índole económica y ser complicado de implementar constructivamente, por motivos de tamaño y peso.

Del mismo modo, si bien la resistividad al flujo se define como la resistencia de un material a la circulación de un flujo estacionario (lo cual implica una mayor caída de presión o pérdida de carga), dicha resistividad es también un indicador de la disipación de energía acústica, y en base a los resultados presentados resulta igualmente evidente que conforme aumentemos esta propiedad

del monolito, la pérdida de transmisión también crezca, tal y como se observa en las Figuras 9.1 y 9.2.

Finalmente, y no por ello menos importante, cabe la necesidad de mencionar que se han tenido en cuenta dos casos posibles a la hora de tratar el monolito interior:

- Un caso en el que se supone que el monolito tiene una distribución tridimensional y los fenómenos de propagación de onda en su interior son igualmente multidimensionales. Se asume en este caso que, desde un punto de vista acústico, el material del monolito se caracteriza por unas propiedades características equivalentes (velocidad del sonido y densidad) que son complejas y dependen de la frecuencia.
- Un segundo caso en el que el monolito es sustituido por una matriz de transferencia, la cual relaciona la velocidad y la presión de las ondas sonoras a la entrada y a la salida del propio monolito, nodo a nodo.

Esta última alternativa de modelado resulta ser la más cercana a la realidad, ya que reproduce de manera más realista la propagación básicamente unidimensional o de onda plana que tiene lugar en el interior de los conductos capilares, cuya sección transversal es considerablemente inferior a las longitudes de onda consideradas en las simulaciones.

# 10.

## Bibliografía

- [1] F.D. Denia, J. Albelda, F.J. Fuenmayor, A.J. Torregrosa, [Acoustic behaviour of elliptical chamber mufflers](#). Journal of Sound and Vibration 241, 401-421 (2001).
- [2] A. Selamet, F.D. Denia, A.J. Besa, [Acoustic behavior of circular dual-chamber mufflers](#). Journal of Sound and Vibration 265, 967-985 (2003).
- [3] F.D. Denia, A. Selamet, F.J. Fuenmayor, R. Kirby, [Acoustic attenuation performance of perforated dissipative mufflers with empty inlet/outlet extensions](#). Journal of Sound and Vibration 302, 1000-1017 (2007).
- [4] R. Kirby, F.D. Denia, [Analytic mode matching for a circular dissipative silencer containing mean flow and a perforated pipe](#). The Journal of the Acoustical Society of America 122, 3471-3482 (2007).
- [5] F.D. Denia, A. Selamet, M.J. Martínez, F.J. Fuenmayor, [Sound attenuation of a circular multi-chamber hybrid muffler](#). Noise Control Engineering Journal 56, 356-364 (2008).
- [6] F.D. Denia, A.G. Antebas, A. Selamet, A.M. Pedrosa, [Acoustic characteristics of circular dissipative reversing chamber mufflers](#). Noise Control Engineering Journal 59, 234-246 (2011).
- [7] A.G. Antebas, F.D. Denia, A.M. Pedrosa, F.J. Fuenmayor, [A finite element approach for the acoustic modeling of perforated dissipative mufflers with non-homogeneous properties](#). Mathematical and Computer Modelling 57, 1970–1978 (2013).
- [8] E.M. Sánchez-Orgaz, F.D. Denia, J. Martínez-Casas, L. Baeza, [3D acoustic modelling of dissipative silencers with nonhomogeneous properties and mean flow](#). Advances in Mechanical Engineering 6, 537935 (2014).
- [9] F.D. Denia, E.M. Sánchez-Orgaz, J. Martínez-Casas, R. Kirby, [Finite element based acoustic analysis of dissipative silencers with high temperature and thermal-induced heterogeneity](#). Finite Elements in Analysis and Design 101, 46-57 (2015).

- [10] F.J. Fuenmayor, F.D. Denia, J. Albelda, E. Giner, [H-adaptive refinement strategy for acoustic problems with a set of natural frequencies](#). Journal of sound and vibration 255, 457-479 (2002).
- [11] J. Albelda, F.D. Denia, M.I. Torres, F.J. Fuenmayor, [A transversal substructuring mode matching method applied to the acoustic analysis of dissipative mufflers](#). Journal of Sound and Vibration 303, 614-631 (2007).
- [12] F.D. Denia, E.M. Sánchez-Orgaz, L. Baeza, R. Kirby, [Point collocation scheme in silencers with temperature gradient and mean flow](#). Journal of Computational and Applied Mathematics 291, 127-141 (2016).
- [13] F.D. Denia, A.G. Antebas, R. Kirby, F.J. Fuenmayor, *Multidimensional acoustic modelling of catalytic converters*. Proceedings of the 16th International Congress on Sound and Vibration, Krakow, 2009.
- [14] F.D. Denia, L. Baeza, R. Kirby, A. Selamet, *A multidimensional analytical study of sound attenuation in catalytic converters*. Proceedings of the Inter-noise 2010, 39th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, Lisbon, 2010.
- [15] F.D. Denia, J. Martínez-Casas, L. Baeza, F.J. Fuenmayor, [Acoustic modelling of exhaust devices with nonconforming finite element meshes and transfer matrices](#). Applied Acoustics 73, 713-722 (2012).
- [16] A. Selamet, V. Easwaran, J.M. Novak, R.A. Kach. *Wave attenuation in catalytic converters: Reactive versus dissipative effects*. Acoustic Society of America, Vol. 103, N°2, 1998.
- [17] Dpto. de Ingeniería. *Conceptos básicos del ruido ambiental*. Universidad de Almería.
- [18] V. Juan. *Desarrollo e implementación en Comsol de una metodología completa de modelado y simulación acústica de silenciadores disipativos de vehículos con superficies perforadas,*

*microperforadas y sinterizadas*. Dpto. de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad de Valencia. 2015

[19] J.S. Lamancusa, K.B. Todd. *An experimental study of induction combustion in four-cylinder internal combustion engines*. Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, 111, 199-207, 1989.

[20] M.L. Munjal. *Acoustic of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons. Nueva York. 1997.

[21] AS, S.L.U. [\*En qué consiste el catalizador\*](#).

[22] F.D. Denia, A.G. Antebas, J. Martínez-Casas, F.J. Fuenmayor. *Modelado numérico del comportamiento acústico de catalizadores. Influencia de la técnica de acoplamiento conducto/monolito en la predicción de la atenuación sonora*. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 2009.

[23] F.D. Denia, A.G. Antebas. *Multidimensional acoustic modelling of catalytic converters*. 16th International Congress of Sound and Vibration, Cracovia, 2009

[24] Comsol AB. *Comsol Multyphysics Acoustics Module User's Guide*. 2013.

[25] F.D. Denia. *Modelado del comportamiento acústico de silenciadores de escape mediante técnicas analíticas y el método de elementos finitos*. Universidad Politécnica de Valencia. 2004.

# Anexos

## ANEXO I: Cálculo de las propiedades del monolito usando Mathcad

### 1) Introducción

En este anexo se explicará el cálculo de las características absorbentes del monolito, de tal forma que sea posible exportar los datos de forma sencilla para Comsol Multiphysics. Este anexo tendrá aplicación directa para el subcapítulo 8.4.1, en el que se realizará el cálculo de la atenuación acústica según un modelo 3D-3D.

Para que Comsol sea capaz de leer dichas propiedades se debe utilizar la siguiente expresión:

$$Velocidad = v_{real}(f) + i \cdot v_{imag}(f)$$

$$Densidad = \rho_{real}(f) + i \cdot \rho_{imag}(f)$$

donde la frecuencia  $freq$  y la unidad imaginaria  $i$  son variables internas de Comsol y las variables con subíndice  $real$  e  $imag$  corresponden a la parte real e imaginaria de la velocidad y la densidad, respectivamente.

Como se explicó a lo largo del capítulo 8, en Comsol se calculará la TL para cada frecuencia entre 10 y 3200 Hz con un paso incremental de 10 Hz.

### 2) Cálculo de velocidad y densidad equivalentes en el monolito

Para realizar este paso, en primer lugar definimos las siguientes constantes en Mathcad:

- Velocidad del aire  $c_0 = 340 \frac{m}{s}$
- Densidad del aire  $\rho_0 = 1.225 \frac{kg}{m^3}$
- Porosidad  $\phi = 0.8$
- Viscosidad dinámica  $\mu = 1.783 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$
- Calor específico del aire  $c_p = 1005 \frac{J}{kg \cdot K}$

- Conductividad térmica  $\kappa = 0.02534 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
- Relación de calores específicos  $\gamma = 1.4$

Aplicando ahora las ecuaciones (5.14) y (5.17) mostradas anteriormente, y sabiendo que  $\text{Pr} = \mu \cdot C_p / \kappa$ , en Mathcad creamos las siguientes fórmulas:

$$\rho_{m_{kk}} := \rho_0 + \frac{R \cdot \phi \cdot G_{c1_{kk}}}{j \cdot \omega_{kk}}$$

$$c_{m_{kk}} := \frac{c_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{\phi \cdot R}{j \cdot \omega_{kk} \cdot \rho_0} \cdot G_{c1_{kk}}\right) \cdot \left(\gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \frac{\phi \cdot R}{j \cdot \omega_{kk} \cdot \rho_0 \cdot \text{Pr}} \cdot G_{c2_{kk}}}\right)}}$$

$$G_{c1_{kk}} := G_c(s_{kk})$$

$$G_{c2_{kk}} := G_c(s_{kk} \cdot \sqrt{\text{Pr}})$$

$$G_c(s) = \frac{-\frac{s}{4} \cdot \sqrt{-j} \cdot \frac{\text{Jn}(1, s \cdot \sqrt{-j})}{\text{Jn}(0, s \cdot \sqrt{-j})}}{1 - \frac{2}{s \cdot \sqrt{-j}} \cdot \frac{\text{Jn}(1, s \cdot \sqrt{-j})}{\text{Jn}(0, s \cdot \sqrt{-j})}}$$

$$s = \alpha \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot \omega \cdot \rho_0}{R \cdot \phi}}$$

Los resultados obtenidos dependerán de la frecuencia a la que estemos trabajando y los datos de longitud de monolito y resistividad de cada caso. Para la aplicación del intervalo de frecuencias y el paso incremental creamos las siguientes definiciones:

$$kk := 0..315$$

$$\text{frec}_{kk} := 10 \cdot (kk + 1)$$

### 3) Exportación de datos

Para definir la velocidad y la densidad es necesario separar las partes real e imaginaria. Para conseguirlo se deben crear 4 archivos de texto ".txt": uno para Vreal, otro para Vim, otro para Dreal y otro para Dim. Cada archivo contiene 2 columnas, una con el valor de frecuencia y otra con el valor de la variable en cuestión.

De este modo, los archivos ".txt" se generarán de la siguiente manera:

$$\text{TABLA6}_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$\text{TABLA6}_{kk,1} := \text{Re}(c_{m_{kk}})$$

$$\text{TABLA8}_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$\text{TABLA8}_{kk,1} := \text{Im}(c_{m_{kk}})$$

$$\text{TABLA7}_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$\text{TABLA7}_{kk,1} := \text{Re}\left(\frac{\rho_{m_{kk}}}{\phi}\right)$$

$$\text{TABLA9}_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$\text{TABLA9}_{kk,1} := \text{Im}\left(\frac{\rho_{m_{kk}}}{\phi}\right)$$

WRITEPRN("vel\_real\_mono.txt") := TABLA6

WRITEPRN("dens\_real\_mono.txt") := TABLA7

WRITEPRN("vel\_im\_mono.txt") := TABLA8

WRITEPRN("dens\_im\_mono.txt") := TABLA9

## ANEXO II: Cálculo de la matriz de transferencia usando Mathcad

### 1) Introducción

Este anexo tiene como objetivo explicar la creación de las componentes de la matriz de transferencia en Mathcad, para su aplicación sobre el caso 3D-1D, incluido en el subcapítulo 8.4.2, así como de la exportación de los datos para su manejo en Comsol.

Como se explicó en dicho capítulo, se sustituye el monolito por una matriz de transferencia, relacionando la presión y la velocidad en la entrada y la salida de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Las componentes de esta matriz de 4 polos pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (6.12) y (6.13) y dependen de las propiedades del monolito, por lo que se puede escribir tal que:

$$T_m = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_m \cdot L_m) & \frac{j\rho_m c_m \sin(k_m \cdot L_m)}{\phi} \\ \frac{j\phi \sin(k_m \cdot L_m)}{\rho_m c_m} & \cos(k_m \cdot L_m) \end{pmatrix}$$

### 2) Cálculo de las componentes de la matriz de transferencia

Como se puede apreciar en la fórmula anterior, lo único que necesitamos para el cálculo de las componentes de la matriz son la densidad y velocidad específicas (ya calculadas según el Anexo I), el rango de frecuencias (también explicado su procedimiento en el Anexo I), la longitud del monolito (característico de cada caso) y la porosidad (constante para todo el problema y con valor de 0.8).

Por ello, creamos en Mathcad las siguientes 3 matrices:

$$T_{\text{monolit}_{kk}} := \begin{pmatrix} \cos(k_{m_{kk}} \cdot L_2) & j \cdot \rho_{m_{kk}} \cdot c_{m_{kk}} \cdot \sin(k_{m_{kk}} \cdot L_2) \\ \frac{j}{\rho_{m_{kk}} \cdot c_{m_{kk}}} \cdot \sin(k_{m_{kk}} \cdot L_2) & \cos(k_{m_{kk}} \cdot L_2) \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{porodiv}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{poroconv}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi} \end{pmatrix}$$

Finalmente, creamos otra ecuación que nos simplifique las 3 introducidas y nos acerque a la anterior:

$$T_{\text{totalD}_{kk}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \cdot T_{\text{monolit}_{kk}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\phi} \end{pmatrix}$$

### 3) Exportación de datos

De igual manera al Anexo I, y según la ecuación  $T_{total1D_{kk}}$ , buscamos la creación de 8 archivos de texto “.txt”, con un valor real y otro imaginario para cada una de las 4 componentes de la matriz de transferencia. En cada archivo tendremos 2 columnas: una con valores de frecuencia entre 10 y 3200 Hz con un paso incremental de 10 Hz y otra con los valores de la variable en cuestión.

$$A1_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$B1_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$A1_{kk,1} := \text{Re}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{0,0}\right]$$

$$B1_{kk,1} := \text{Re}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{0,1}\right]$$

$$A2_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$B2_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$A2_{kk,1} := \text{Im}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{0,0}\right]$$

$$B2_{kk,1} := \text{Im}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{0,1}\right]$$

$$\text{WRITEPRN}("a\_real.txt") := A1$$

$$\text{WRITEPRN}("b\_real.txt") := B1$$

$$\text{WRITEPRN}("a\_im.txt") := A2$$

$$\text{WRITEPRN}("b\_im.txt") := B2$$

$$C1_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$D1_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$C1_{kk,1} := \text{Re}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{1,0}\right]$$

$$D1_{kk,1} := \text{Re}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{1,1}\right]$$

$$C2_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$D2_{kk,0} := \text{frec}_{kk}$$

$$C2_{kk,1} := \text{Im}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{1,0}\right]$$

$$D2_{kk,1} := \text{Im}\left[\left(T_{total1D_{kk}}\right)_{1,1}\right]$$

$$\text{WRITEPRN}("c\_real.txt") := C1$$

$$\text{WRITEPRN}("d\_real.txt") := D1$$

$$\text{WRITEPRN}("c\_im.txt") := C2$$

$$\text{WRITEPRN}("d\_im.txt") := D2$$