

# The warping torsion as a sequence of infinite bending problems

## La torsión alabeada como secuencia de infinitos problemas de flexión

Mario Lázaro, Ignacio Ferrer  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
malana@mes.upv.es, igferbal@mes.upv.es

---

### Abstract

*In the present article, a methodology for teaching modeling problem of mixed torsion for thin-walled open sections. The mathematical analogy of warped twist as a problem of Euler-Bernoulli beams is exploited. In fact, the paper proposes to represent the warped torsion differential equation as a perturbation of the pure torsion or also called the Saint-Venant theory. Thus, it is demonstrated that under certain conditions related to the value of the torsional slenderness the response of a beam is the addition of infinite pure warped problems, that is, infinite bending problems, according to the analogy. We call this the asymptotic torsion analogy.*

*En el presente artículo se presenta una metodología para la enseñanza de la modelización del problema de la torsión mixta en secciones abiertas de pared delgada. Se explota la analogía de la torsión alabeada como un problema de flexión de vigas de Euler-Bernoulli. De hecho, se propone representar la ecuación diferencial de la torsión mixta como una perturbación del problema de la torsión alabeada pura. Así, se demuestra que bajo ciertas condiciones vinculadas al valor de la esbeltez torsional, la respuesta a torsión mixta de una viga es la suma de infinitos problemas de torsión alabeada pura; es decir, infinitos problemas de flexión. Llamamos a esto la analogía asintótica de la torsión.*

---

Keywords: Warping torsion, Uniform torsion, Asymptotic solution, Flexion analogy.

Palabras clave: Torsión alabeada, Torsión uniforme, Solución asintótica, Analogía de la flexión.

## 1 Introducción

La enseñanza del fenómeno de la torsión en las Escuelas Ingeniería se realiza de forma escalonada. En general, en la primera etapa se analiza la torsión de Coulomb en secciones circulares. Mediante el análisis de sus deficiencias se introduce, ya en una segunda etapa, la torsión de Saint-Venant. En las antiguas Escuelas Técnicas de Ingeniería y en sus heredadas Titulaciones de Grado, esta unidad didáctica se quedaba aquí. Sin embargo, en aquellas asignaturas más especializadas de los cuerpos deformables en las Escuelas Técnicas Superiores (las asignaturas comúnmente denominadas “Resistencia de Materiales” y “Cálculo de Estructuras” de las titulaciones de las Ingenierías con gran tradición estructurista, como Caminos, Industrial o Aeronáutica) se estudia un modelo más avanzado: la torsión alabeada o torsión de Vlasov, generada por el fenómeno de la coacción al abeo en secciones abiertas de pared delgada. Las lecciones se centran en la deducción teórica de la expresión del llamado torsor de abeo y de la ecuación diferencial lineal, de tercer orden, que gobierna el giro de las secciones. Dicha ecuación se puede escribir en función de cierto parámetro denominado esbeltez torsional que representa el reparto del torsor total entre el torsor de Saint-Venant y el torsor de abeo. La resolución de la ecuación pone a prueba la formación del alumno en Análisis Matemático, sin embargo, en ocasiones la resolución puramente matemática nos aleja de la interpretación física. Dicha interpretación es, a juicio del autor, uno de los puntos más importantes en la enseñanza esta teoría. Como es sabido, la parte puramente alabeada de la torsión se puede interpretar como un problema de flexión de Euler-Bernoulli pues las ecuaciones que la gobiernan son análogas; es la llamada analogía de la flexión. De hecho, cuando la esbeltez torsional es muy pequeña se puede despreciar la contribución de la torsión de Saint-Venant pudiendo resolver el problema como si se tratara de una viga sometida a cortantes y flectores, que juegan el papel de torsores y bimomentos.

En este artículo proponemos una forma de analizar la torsión mixta usando métodos asintóticos de perturbación numérica. Como resultado, la solución se puede interpretar como una superposición infinita de problemas de flexión. De esta forma la resolución matemática ya no se reduce a una parte del problema alejada de la intuición, sino que contiene en sí misma información relevante sobre la mecánica del problema. Además, como ingrediente adicional se introduce una nueva técnica numérica, la solución asintótica por perturbación, que se escapa del temario habitual de las asignaturas de Cálculo Numérico, permitiendo incluso resolver el problema con características seccionales variables.

## 2 Planteamiento matemático de la torsión mixta.

Cuando los conceptos fundamentales de la torsión uniforme (también llamada torsión de Saint-Venant) están asimilados, surge la siguiente contradicción utilizada habitualmente como punto de partida para introducir la denominada torsión alabeada: si la torsión uniforme no considera tensiones normales pero sí abeos de la sección entonces ¿qué ocurre en las proximidades de los empotramientos? En este apartado describiremos el actual enfoque matemático del problema de la torsión.

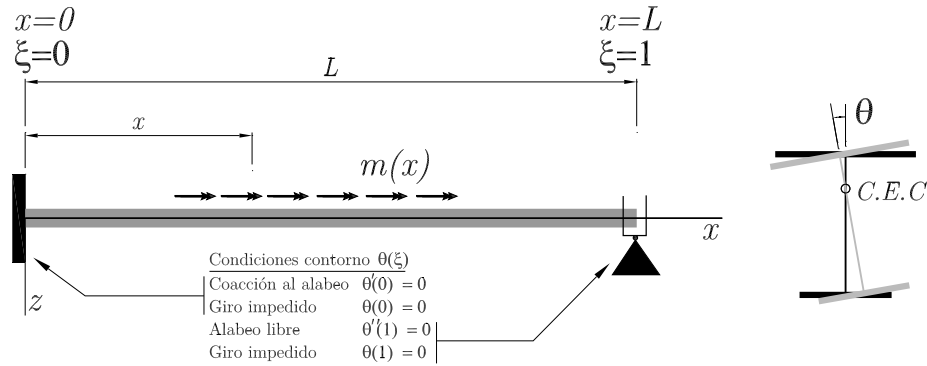


Figura 1: Torsión mixta: variables y condiciones de contorno.

## 2.1 Ecuación diferencial de la torsión

Esta contradicción llevó a diversos autores (Timoshenko, 1953; Vlassov, 1940) por ejemplo, como pioneros en este campo, a estudiar y verificar el fenómeno con experimentación en aquellas estructuras más vulnerables a este fenómeno que son las secciones abiertas de pared delgada en vigas relativamente cortas. Consideremos una viga recta de longitud \$L\$ sometida a un torsor distribuido de magnitud \$m(x)\$ (ver Figura 1). La ecuación general de la torsión mixta es (Megson, 2007; Monleón, 1999):

$$E\Gamma \frac{d^4\theta}{dx^4} - GJ \frac{d^2\theta}{dx^2} = m(x), \tag{1}$$

donde \$\theta(x)\$ es el giro de una sección cualquiera respecto al centro de esfuerzos cortantes, \$E, G\$ son el módulo de Young y el módulo de rigidez a cortante, \$J\$ es el módulo de torsión y \$\Gamma\$ es el módulo de alabeo, \$m(x)\$ es el momento distribuido a lo largo de la viga. La Ecuación (1) se reorganiza introduciendo un parámetro denominado *esbeltez torsional*

$$\lambda = L\sqrt{GJ/E\Gamma}, \tag{2}$$

que mide la proporción entre la rigidez seccional de ambos mecanismos de torsión: la torsión uniforme \$GJ\$ y la torsión alabeada \$E\Gamma\$. La ecuación se hace adimensional haciendo \$x = L\xi\$ e introduciendo la coordenada relativa \$\xi \in [0, 1]\$. Así, la Ecuación (1) se puede escribir como

$$\frac{E\Gamma}{L^4} \left( \frac{d^4\theta}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \right) = m(\xi). \tag{3}$$

La solución general de la ecuación es de la forma

$$\theta(\xi) = \alpha + \beta \sinh(\lambda\xi) + \gamma \cosh(\lambda\xi) + \theta_p(\xi). \tag{4}$$

Donde \$\alpha, \beta, \gamma\$ son constantes de integración a obtener con las condiciones de contorno y \$\theta\_p(\xi)\$ es una solución particular de la ecuación completa. Obtenida la solución en giros los esfuerzos asociados al problema de torsión se obtienen como:

$$\text{Torsor uniforme: } T_J(\xi) = \frac{GJ}{L} \frac{d\theta}{d\xi}. \tag{5}$$

$$\text{Torsor de alabeo: } T_\Gamma(\xi) = -\frac{E\Gamma}{L^3} \frac{d^3\theta}{d\xi^3}. \tag{6}$$

$$\text{Bimomento: } B(\xi) = -\frac{E\Gamma}{L^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2}. \quad (7)$$

El parámetro  $\lambda$  gobierna el reparto del torsor total en cada sección  $T_J + T_T$  entre cada una de sus componentes. En las zonas cercanas a secciones con alabeo coartado es predominante el comportamiento alabeado mientras que en las zonas alejadas el reparto dependerá de la longitud de la viga respecto al radio de giro a torsión  $i_T = \sqrt{E\Gamma/GJ} = L/\lambda$ .

## 2.2 Dominios de la torsión. La analogía de la flexión

En general para el análisis de la torsión de una viga de longitud  $L$  y con condiciones de contorno en los extremos, un criterio para verificar qué mecanismos de torsión son predominantes es el dado por la Tabla 1. Se comprueba que valores bajos de la esbeltez torsional se corresponden a secciones esbeltas (se asume abiertas) en vigas cortas en relación al radio de giro de la sección.

Tabla 1: Dominios de la torsión.

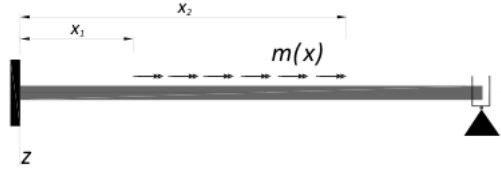
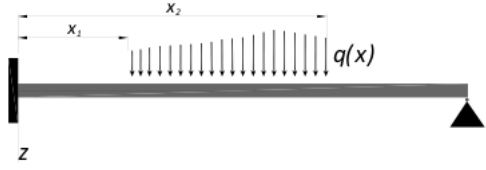
Dominio de la torsión	Esbeltez torsional	Ecuación de la torsión
Alabeada pura	$\lambda = 0$	$E\Gamma\theta^{iv} = m(x)$
Alabeada dominante	$0 < \lambda < 2.0$	$E\Gamma\theta^{iv} - GJ\theta'' = m(x)$
Mixta	$0 \leq \lambda < 5.0$	
Uniforme dominante	$5 \leq \lambda < 10$	
Uniforme pura	$\lambda \rightarrow \infty$	$GJ\theta'' = -m(x)$

A partir de la división presentada en la Tabla 1, obtener la solución de torsión en vigas con esbeltez torsional nula se reduce a resolver una viga a flexión pues la ecuación que gobierna el fenómeno de la torsión alabeada pura,  $E\Gamma\theta^{iv} = m(x)$ , es exactamente igual a la de la flexión en vigas de Euler-Bernoulli,  $EIw^{iv} = q(x)$ : es lo que se denomina *analogía de la flexión*. Básicamente, se trata de traducir condiciones de contorno, fuerzas y variables a un problema análogo de flexión. En la Tabla 2 se muestra la correspondencia entre los dos problemas.

Es obvio que resulta mucho más intuitivo obtener estas variables que los torsores y bimomentos asociados, cuya naturaleza es bastante más complicada de entender. Resulta en general más cómodo trabajar en la obtención de movimientos o en la resolución de vigas hiperestáticas a flexión mediante métodos clásicos como los teoremas de Mohr o los teoremas de Castigliano [Beer et al, 2011], por mencionar alguno. Además el problema de flexión nos ayuda enormemente a interpretar físicamente el problema de la torsión, pues esfuerzos análogos producen tensiones de la misma naturaleza. Esto se puede visualizar con las tensiones normales: En el problema de la flexión se calculan a partir de los flectores, por lo que en el problema de la torsión tienen exactamente la misma expresión pero en función de los bimomentos, tal y como se observa en la Tabla 2. La misma analogía se puede realizar entre tensiones tangenciales, torsores y cortantes. Esta analogía es muy útil pues nos permite predecir a priori las secciones más solicitadas por simple observación de los diagramas de cortantes y flectores de la analogía de la flexión. Esto es especialmente útil cuando tenemos una viga con múltiples apoyos intermedios y diferentes configuraciones de carga.

Nótese que la analogía de la flexión tal y como la hemos presentado no podemos usarla para obtener la respuesta en torsión para el caso general de la torsión mixta  $\lambda \neq 0$ , pues aparece el término de la torsión uniforme. Llegados a este punto nos preguntamos: ¿podríamos generalizar el concepto de analogía de la flexión para problemas con  $\lambda \neq 0$ ? En caso afirmativo, ¿Cuáles

Tabla 2: Correspondencias en la analogía de la flexión.

Torsión alabeada	Analogía flexión plano xz
	
<b>Variabes</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Giro (eje x) <math>\theta(x)</math></li> <li>• Torsor <math>T(x)</math></li> <li>• Bimomento <math>B(x)</math></li> <li>• Alabeo unitario <math>\omega(s)</math></li> <li>• Alabeos <math>u(x, s) = -\omega(s)\theta'(x)</math></li> </ul>	<b>Variabes</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Flecha <math>w(x)</math></li> <li>• Cortante <math>V(x)</math></li> <li>• Flector <math>M(x)</math></li> <li>• Coordenada vertical <math>z(s)</math></li> <li>• Alabeo <math>u(x, s) = -z(s)w'(x)</math></li> </ul>
<b>Fuerzas exteriores</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Momento distribuido <math>m(x)</math></li> </ul>	<b>Fuerzas exteriores</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fuerza distribuida <math>q(x)</math></li> </ul>
<b>Condiciones de contorno</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Empotramiento <math>\theta = 0, \theta' = 0</math></li> <li>• Horquilla <math>\theta = 0, \theta'' = 0</math></li> <li>• Libre <math>\theta'' = 0, \theta''' = 0</math></li> </ul>	<b>Condiciones de contorno</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Empotramiento <math>\theta = 0, \theta' = 0</math></li> <li>• Apoyo simple <math>\theta = 0, \theta'' = 0</math></li> <li>• Libre <math>\theta'' = 0, \theta''' = 0</math></li> </ul>
<b>Ecuaciones</b> $B'(x) = T(x)$ $T'(x) = -m(x)$ $B(x) = -EI\theta''(x)$	<b>Ecuaciones</b> $M'(x) = V(x)$ $V'(x) = -q(x)$ $M(x) = -EIw''(x)$
<b>Tensiones</b> $\sigma_x = \frac{B(x)}{\Gamma}\omega(s)$ $\tau(s) = \frac{T(x)}{t(s)\Gamma} \int_0^s \omega(s) dA$	<b>Tensiones</b> $\sigma_x = \frac{M(x)}{I} z$ $\tau(s) = \frac{V(x)}{t(s)I} \int_0^s z dA$

serían las condiciones de validez de tal generalización?

### 3 Parametrización del problema y la solución asintótica

#### 3.1 La analogía asintótica de la flexión

La clave para poder responder a las preguntas anteriores está en interpretar la Ecuación (3) como una ecuación diferencial dependiendo de un nuevo parámetro llamando  $\varepsilon = \lambda^2$ . La ecuación y las condiciones de contorno se pueden expresar de la forma siguiente

$$\frac{d^4\theta}{d\xi^4} - \varepsilon \frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \mu(\xi), \tag{8}$$

$$\mathbf{A}_0\theta(0) + \mathbf{A}_1\theta(1) = \mathbf{B}, \tag{9}$$

donde  $\mu(\xi) = L^4m(\xi)/EI\Gamma$  representa a los torsos distribuidos pero de forma adimensional,  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}$  son matrices conocidas y  $\theta(\xi) = \{\theta(\xi), \theta'(\xi), \theta''(\xi), \theta'''(\xi)\}^T$ . El giro es ahora una función de dos variables  $\theta(\xi, \varepsilon)$ . El nuevo parámetro  $\varepsilon$  representa una perturbación de la

solución en torsión alabeada ( $\varepsilon = 0$ ) y si esta nueva variable es suficientemente pequeña, las técnicas de solución asintótica (Wasow, 1976) pueden dar una buena estimación de la solución mediante la expansión en series de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$ .

$$\theta(\xi, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = \theta_0(\xi) + \theta_1(\xi)\varepsilon + \theta_2(\xi) \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \quad (10)$$

Las funciones-coeficientes  $\theta_n(\xi)$  verifican

$$\theta_n(\xi) = \left. \frac{\partial^n \theta}{\partial \varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (11)$$

Para su obtención derivamos  $n$  veces respecto a  $\varepsilon$  en la Ecuación (9)

$$\frac{\partial^n \theta^{iv}}{\partial \varepsilon^n} - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^j \varepsilon}{\partial \varepsilon^j} \frac{\partial^{n-j} \theta''}{\partial \varepsilon^{n-j}} = \theta_n^{iv} - \binom{n}{0} \varepsilon \theta_n'' - \binom{n}{1} \theta_{n-1}'' = 0, \quad (12)$$

y particularizando en  $\varepsilon = 0$  obtenemos la ecuación diferencial para obtener la  $n$ -ésima función a partir de la  $n - 1$ , imponiendo condiciones de contorno homogéneas.

$$\theta_n^{iv} = n \theta_{n-1}'', \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_0 \theta_n(0) + \mathbf{A}_1 \theta_n(1) = \mathbf{0}. \quad (14)$$

La función  $\theta_0(\xi)$  se obtiene haciendo  $\varepsilon = 0$  en la Ecuación (9) con las condiciones de contorno originales.

$$\theta_0^{iv} = \mu(\xi), \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_0 \theta_n(0) + \mathbf{A}_1 \theta_n(1) = \mathbf{B}. \quad (16)$$

Las Ecuaciones (13), (14), (15) y (16) definen una sucesión infinita de problemas de flexión de Euler-Bernoulli gobernados por una ecuación diferencial de orden 4 del mismo tipo que la bien conocida

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = \frac{L^4 q(\xi)}{EI}, \quad (17)$$

donde  $q(\xi)$  representa las fuerzas exteriores distribuidas (positivas en la dirección de  $z$ ). De acuerdo a las Ecuaciones (13), (14), (15) y (16) y por comparación directa con la Ecuación (17) se tiene que las fuerzas exteriores del problema  $n$  se obtienen a partir de la segunda derivada de la solución en el problema  $n - 1$ , mientras que para el problema inicial ( $n = 0$ ), la fuerza distribuida exterior es directamente  $\mu(\xi)$ . El proceso se puede repetir tantas veces como se desee siendo necesaria en cada paso la resolución de un problema de flexión del cual se obtienen las flechas  $\theta_n(\xi)$ , los cortantes  $T_n(\xi)$  y los flectores  $B_n(\xi)$ . Nótese que ya usamos la nomenclatura de giros, torsores y bimomentos, pues los resultados nuestro problema original de torsión se pueden expresar como

$$\theta(\xi, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N \theta_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = \theta_0(\xi) + \theta_1(\xi)\varepsilon + \theta_2(\xi) \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + \theta_N(\xi) \frac{\varepsilon^N}{N!} \stackrel{def}{=} \theta_N(\xi, \varepsilon), \quad (18)$$

$$T(\xi, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N T_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = T_0(\xi) + T_1(\xi)\varepsilon + T_2(\xi) \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + T_N(\xi) \frac{\varepsilon^N}{N!} \stackrel{def}{=} T_N(\xi, \varepsilon), \quad (19)$$

$$B(\xi, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N B_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = B_0(\xi) + B_1(\xi)\varepsilon + B_2(\xi) \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + B_N(\xi) \frac{\varepsilon^N}{N!} \stackrel{def}{=} B_N(\xi, \varepsilon), \quad (20)$$

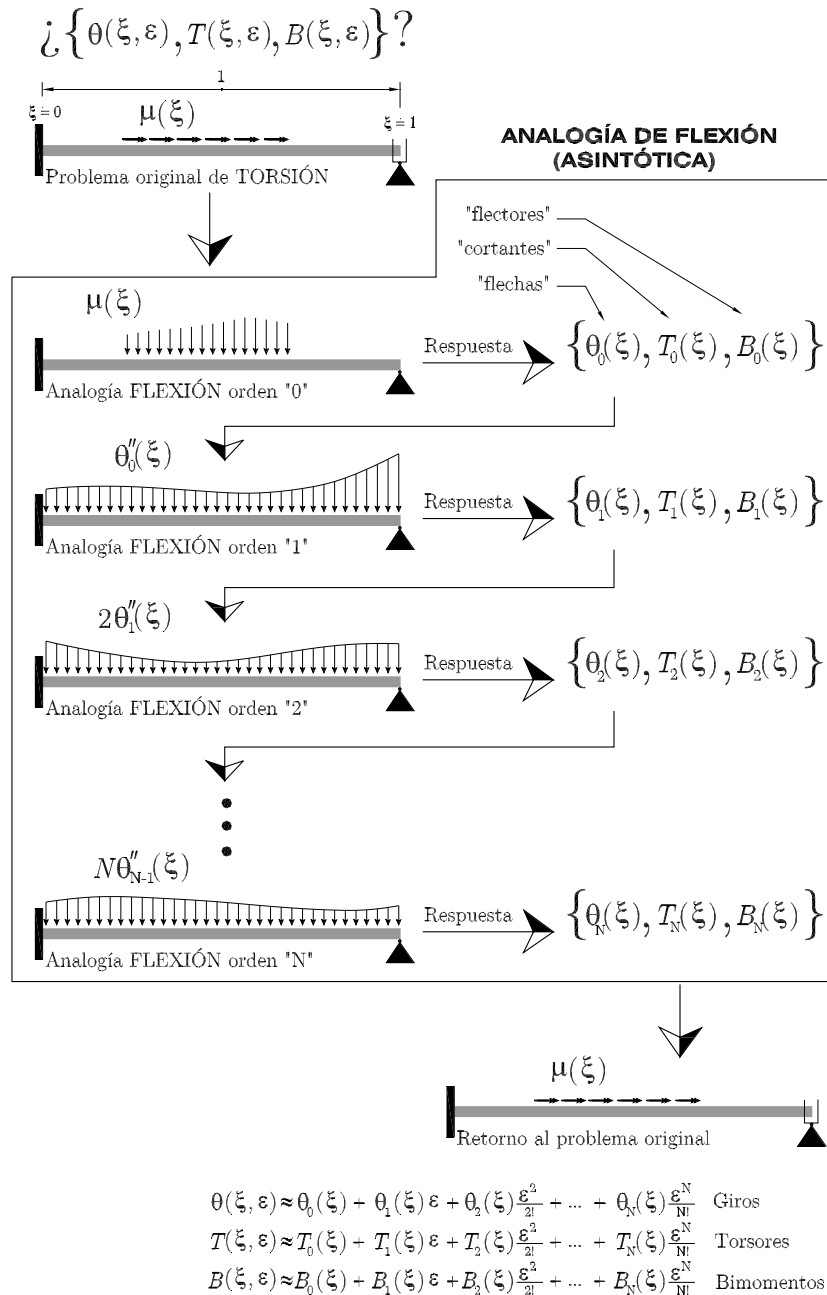


Figura 2: Analogía de flexión asntótica para problemas de torsión mixta. Flujo de cálculo.

donde se ha usado la aproximación asintótica de los  $N$  primeros términos. En la Figura 2 se ha representado esquemáticamente la organización en el cálculo de la respuesta de la viga a torsión mixta a través de la solución de  $N$  problemas de flexión de vigas. En dicha figura se pone de manifiesto la íntima relación entre el comportamiento de la torsión mixta y la flexión de vigas extendiendo esta analogía más allá de la torsión alabeada pura. Sin embargo, llegados a este punto surgen dos cuestiones puramente matemáticas:

1. ¿Siempre se puede garantizar una mayor precisión si se toman más términos?
2. ¿Cuál es el error que cometemos cuando tomamos los  $N$  primeros términos?

En los dos subapartados siguientes se da respuesta a estas preguntas.

### 3.2 Condiciones de convergencia

La cuestión 1 formulada arriba está estrechamente relacionada con la convergencia de la serie de la Ecuación (10). De hecho, asumiendo que la serie es convergente entonces los términos van paulatinamente decayendo hasta hacerse despreciables. De ahí que sea razonable truncar la serie en el término  $N$ . Intuitivamente, para valores pequeños del parámetro  $\varepsilon$  la serie convergerá. Más aún, parece lógico que cuanto más pequeño sea  $\varepsilon$  menos términos tendremos que tomar. Vamos a demostrar que esto en efecto es así, dando además las condiciones necesarias para que así suceda.

Denominemos por  $k$  a la norma de la respuesta (llámese giro o flecha, es indiferente) correspondiente al problema inicial de flexión para  $n = 0$ , es decir

$$\|\theta_0\| = \max_{0 \leq \xi \leq 1} |\theta_0(\xi)| = k. \quad (21)$$

En caso de tener condiciones de contorno no homogéneas, éstas han sido aplicadas para calcular  $\theta_0(\xi)$ . A partir de  $n \geq 1$ , las condiciones de contorno son homogéneas de forma que es fácil comprobar, a partir de las Ecuaciones (13) y (15) que

$$\|\theta_n\| \leq n\|\theta_{n-1}\| \leq n(n-1)\|\theta_{n-2}\| \leq \dots \leq n!\|\theta_0\|. \quad (22)$$

Dado que el dominio de integración es  $0 \leq \xi \leq 1$ . Veamos si la solución en forma de serie es absolutamente convergente pues en tal caso, la serie es convergente y el método asintótico se puede aplicar (Bender and Orszag, 1999). En efecto, la condición necesaria es  $\varepsilon < 1$  pues en tal caso entonces la serie asociada de términos positivos es convergente y está acotada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\theta_n\| \frac{\varepsilon^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\theta_0\| \varepsilon^n = \frac{k}{1-\varepsilon}. \quad (23)$$

### 3.3 Error de truncamiento

Asumiendo entonces que  $\varepsilon = \lambda^2 < 1$  entonces se puede obtener a priori una cota del error de truncamiento al tomar únicamente los  $N + 1$  primeros términos de la serie.

$$\begin{aligned} \|\theta(\xi, \varepsilon) - \theta_N(\xi, \varepsilon)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \theta_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \theta_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\theta_n\| \frac{\varepsilon^n}{n!} \leq \|\theta_0\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon^n = \frac{k \varepsilon^{N+1}}{1-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (24)$$

Este resultado nos permite decidir sobre los términos a calcular una vez calculado el problema inicial ( $n = 0$ ) y conocido el error máximo que estamos dispuestos a asumir. Resaltar el hecho de que  $\varepsilon < 1$ , es una condición necesaria pero no suficiente, es decir bajo esta condición garantizamos los resultados de las Ecuaciones (23) y (24) pero no podemos asegurarlos con rigor matemático cuando  $\varepsilon < 1$ . Esto no significa que la solución sea divergente cuando la esbeltez torsional sea superior a la unidad y de hecho se aprecia en los ejemplos que la solución sigue siendo bastante aproximada en algunos casos para valores por encima de la unidad. Quizá



fuera necesario adoptar otras hipótesis para entender matemáticamente este comportamiento tan satisfactorio, pero ello se escapa de los objetivos del presente artículo. En cualquier caso, en nuestra opinión el éxito del método radica en poder resolver mediante flexión de vigas problemas de torsión alabeada dominante dentro del rango  $0 < \lambda \leq 1$ , más allá de la hipótesis de torsión alabeada pura con  $\lambda = 0$  (ver Tabla 1), dando un nuevo enfoque físico a la resolución matemática mediante la definición de la serie de problemas de flexión.

#### 4 Ejemplo numérico de aplicación

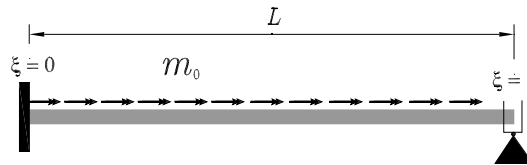


Figura 3: Ejemplo de aplicación.

Como ejemplo de aplicación elegimos el problema de la viga de la Figura 3. Se trata de una viga de longitud  $L$ , sometida a un momento torsor uniforme de valor  $m_0$ . Las condiciones de contorno son:

- En  $x = 0$ , giro y alabeo impedidos.
- En  $x = L$ , giro impedido y alabeo libre.

Asumiendo las características mecánicas de la sección ( $ET, GJ$ ) constantes a lo largo de la viga se puede obtener la solución exacta cuya expresión no se representa aquí por su extensión. La solución aproximada se obtiene siguiendo el esquema descrito en la Figura 2, obteniendo el giro de cada sección, el torsor y el bimomento como

$$\theta(\xi, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N \theta_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = \theta_0(\xi) + \theta_1(\xi)\varepsilon + \theta_2(\xi)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + \theta_N(\xi)\frac{\varepsilon^N}{N!},$$

$$T(\xi, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N T_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = T_0(\xi) + T_1(\xi)\varepsilon + T_2(\xi)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + T_N(\xi)\frac{\varepsilon^N}{N!},$$

$$B(\xi, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N B_n(\xi) \frac{\varepsilon^n}{n!} = B_0(\xi) + B_1(\xi)\varepsilon + B_2(\xi)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots + B_N(\xi)\frac{\varepsilon^N}{N!}.$$

Donde el parámetro  $\mu_0 = L^4 m_0 / ET$ . Soluciones de orden superior son obtenidas empleando el método recursivo propuesto en el artículo en las Ecuaciones (13) y (15). Las soluciones obtenidas son polinomios de grado superior (llegando al grado 12 en el caso de  $\theta_4(\xi)$ ) pues se obtienen como integración de las soluciones previas. Se ha usado el software WOLFRAM MATHEMATICA<sup>®</sup> para obtener los cálculos necesarios de forma simbólica. El resultado se presenta en forma gráfica en la Figura 4, donde se han representado los giros y los bimomentos para diferentes valores de la esbeltez torsional  $\lambda = \{0.5, 0.9, 1.5, 3.0\}$ . Los resultados validan la solución adoptada en el intervalo  $0 < \lambda \leq 1$ , como cabía esperar pues se trata del intervalo de convergencia. Así,

en la práctica no son necesarios muchos términos en la serie cuando nos encontramos en un problema de torsión mixta del tipo “alabeada dominante”. Además, se comprueba que también se obtienen buenas soluciones para valores de la esbeltez torsional mayores que la unidad. Esto podría parecer contradictorio con el hecho de que se haya demostrado en el artículo que la convergencia se da para  $0 < \lambda \leq 1$ . Sin embargo, recordemos que se probó con rigor que en dicho intervalo la solución aproximada por la serie converge, pero no se obtuvo la solución contraria (divergencia) para  $\lambda > 1$ . Lo cual deja abierta la posibilidad de que también se obtengan soluciones satisfactorias para una esbeltez torsional mayor que la unidad, tal y como se comprueba en las gráficas para  $\lambda = 1.5$  o  $\lambda = 3$ .

**Giros**

**Bimomentos**

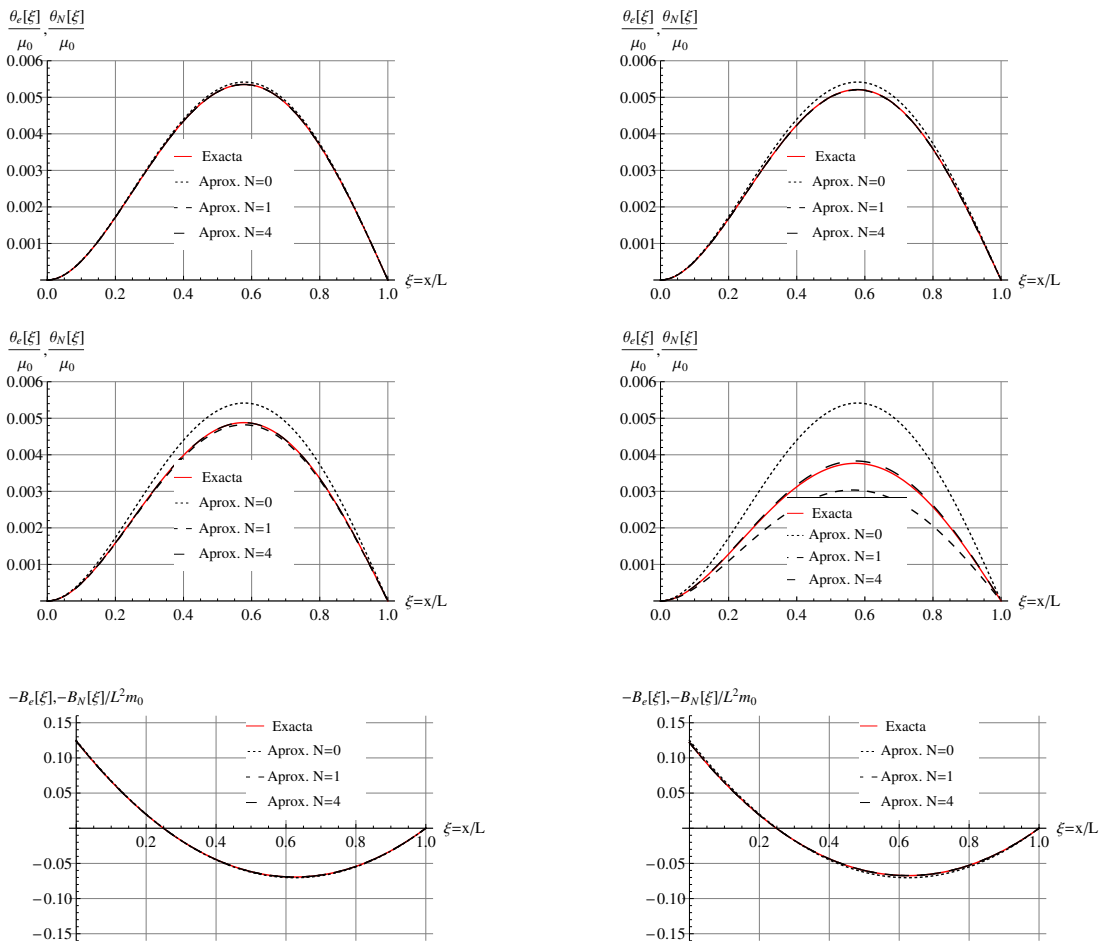









Figura 4: Resultados del análisis asintótico para el ejemplo numérico.

En la Figura 4 se observa por un lado una consecuencia evidente del método de la perturbación homotópica empleado y es que a medida que aumenta el parámetro  $\lambda$  de perturbación disminuye la precisión del resultado. Por otro lado, la elección de más términos en la serie aumenta también la precisión. Así, elegir 4 términos supone aproximar con gran precisión la solución exacta para todas los valores de la esbeltez torsional elegida.

## 5 Conclusiones

La esbeltez torsional permite discutir el reparto del torsor entre el comportamiento uniforme (torsión de Saint-Venant) y el comportamiento alabeado (torsión alabeada). Cuando la esbeltez torsional es estrictamente cero las ecuaciones que gobiernan el problema son exactamente las mismas que las que controlan la flexión de vigas sin deformación por cortante. En este artículo se presenta una metodología de enseñanza de la torsión mixta basada en la analogía entre la torsión alabeada y la flexión de Euler-Bernoulli. La clave del problema está en considerar la ecuación diferencial como una perturbación del problema alabeado cuyo parámetro de perturbación es precisamente el cuadrado de la esbeltez torsional. Como consecuencia, se demuestra que para valores de la esbeltez menores que la unidad la respuesta de la viga a torsión mixta es una serie (entendida como suma infinita) de problemas de torsión alabeada pura, es decir de problemas de flexión, debido a la analogía. Se presenta un ejemplo numérico en el que se visualizan los resultados de la aproximación. Se muestra así mismo que el rango de valores de la esbeltez para los cuales se puede utilizar la solución asintótica puede ser mayor que la unidad dando igualmente buenos resultados.

## Referencias

-  [Timoshenko S. P. \(1953\).](#)  
*History of Strength of Materials.*  
McGraw-Hill.
-  [Vlassov V. Z. \(1940\).](#)  
*Thin walled elastic bars.*  
Moscow.
-  [Megson T. H. G. \(2007\).](#)  
*Aircraft Structures for Engineering Students.*  
Butterworth-Heinemann.
-  [Wasow W. \(1976\).](#)  
*Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.*  
Dover.
-  [Bender C., Orszag S. \(1999\).](#)  
*Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.*  
Springer.
-  [Monleón S. \(1999\).](#)  
*Análisis de vigas, arcos, placas y láminas.*  
Editorial UPV.
-  [Beer F., Jonhston E. R., DeWolf J., Mazurek D. \(2011\).](#)  
*Mechanics of Materials.*  
McGraw-Hill.