

Looking at Rattleback

Mirando la Piedra Celta

Jaime Riera, Enrique Ballester, Damián Ginestar, José Luís Hueso

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

jriera@fis.upv.es, eballest@disa.upv.es, cdginesta@mat.upv.es, jlhueso@mat.upv.es

Abstract

Celtic or Rattleback Stone is a solid that if it is rotated as top exhibits a surprising behaviour. Using a stereoscopic camera and digital monitoring techniques, we capture its movement. According the laws of classical mechanics, justify its evolution “rattling” and emphasize the high didactic potential that have these amazing systems for engineering students.

La Piedra Celta o Rattleback es un sólido que cuando se le hace girar como peonza exhibe un comportamiento sorprendente. Utilizando una cámara estereoscópica y técnicas de seguimiento digital, capturamos su movimiento. De acuerdo con las leyes clásicas de la mecánica, justificamos su evolución “traqueteante”, y destacamos el alto potencial didáctico que para los alumnos de Ingeniería poseen estos sorprendentes sistemas.

Keywords: Celt, Celt stone, Rattleback, Video-analysis, Stereoscopy.

Palabras clave: Celta, Piedra Celta, Rattleback, Video-análisis, Estereoscopia.

1 Introducción

Con el nombre de Piedra Celta, o Celta, se designa a una herramienta prehistórica, posiblemente utilizada como hacha. Algunas de ellas, al girar invertían el sentido de giro. Por ello este nombre fue adoptado para todos los objetos que revierten su giro. Los druidas o sacerdotes celtas, hacían uso de estos “artilugio” en sus ritos. Ajustaban sus predicciones según que el giro de los mismos fuera o no estable, y lo atribuían a extrañas fuerzas mágicas.

Desde el punto de vista de su dinámica podemos decir que se trata de una especie de peonza alargada con forma de barca. Si partiendo del reposo, hacemos descender uno de sus extremos dejándolo libre a continuación, la peonza siempre comienza a girar en el mismo sentido. Si partiendo de nuevo del reposo, la hacemos girar en una superficie horizontal plana aplicándole un par de fuerzas en una dirección determinada, continúa girando en la misma dirección hasta que se consume la energía inicial de giro. Sin embargo, si a esta estructura se le aplica un par de fuerzas inverso al anterior, gira en sentido contrario pero al cabo de poco tiempo comienza a oscilar (cabecear o traquetear). Su movimiento de giro parece inestable, oscilando cada vez más, hasta que se detiene. La oscilación va cesando, comenzando un nuevo giro pero ahora en sentido contrario. El proceso se detiene cuando se consume la energía. Este comportamiento ha hecho que se le conozca también con el nombre de rattleback (hace mención a rattle: traqueteo). En los enlaces siguientes:

<http://politube.upv.es/play.php?vid=57000>

<http://politube.upv.es/play.php?vid=56999>

se puede ver el movimiento de una de tales peonzas en una grabación que hemos realizado a velocidad normal y en otra a 405 imágenes por segundo.

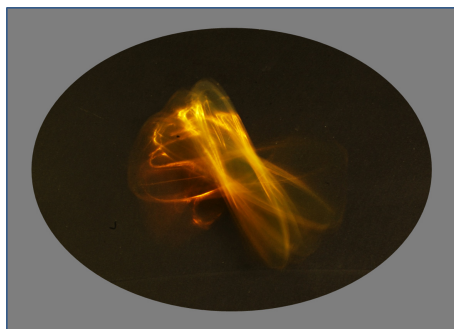


Figura 1: La Piedra Celta en movimiento.

El primer análisis satisfactorio del comportamiento de la Piedra Celta fue escrito por Sir Gilbert Walker en su artículo “On a dynamical top” (1896) (Walker, 1896). Suponía que la Piedra Celta giraba sin deslizar y no tenía en cuenta las fuerzas disipativas, estableciendo un modelo lineal de las ecuaciones de su movimiento. Llegó a la conclusión de que el movimiento completamente estable sólo era posible en un sentido de giro. Esta explicación clásica del comportamiento del Rattleback es incompleta, ya que no refleja los efectos dinámicos globales que explican la transferencia de trayectorias de las proximidades de la solución inestable a la estable.

Tras este estudio inicial, distintos trabajos fueron publicados en revistas educativas. A.D. Moore (Moore, 1972) acuñó el término ya mencionado de Rattleback para la Piedra Celta. Realizó un estudio experimental con cientos de Rattleback buscando la mejor forma para obtener el mejor efecto, concluyendo que: a) la superficie del objeto en contacto con la superficie plana

de la mesa no debe tener simetría esférica (suele ser una forma elipsoidal con dos radios de curvatura) y b) la distribución de masa del objeto debe ser asimétrica con respecto a sus ejes de simetría y, por tanto, los ejes principales del momento de inercia no coinciden con sus ejes de simetría. El primer requisito garantiza que haya un eje natural para el cabeceo y el segundo requisito es necesario para que el cabeceo y el giro estén acoplados. Esta es la clave en el arte de hacer un Rattleback

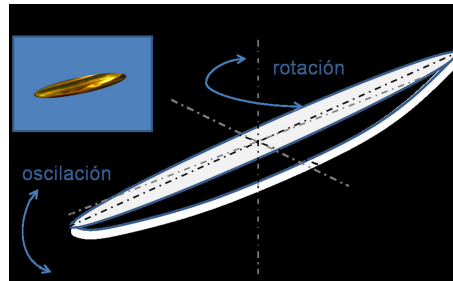


Figura 2: Esquema del movimiento del Rattleback: dos de los ejes de inercia están ligeramente rotados respecto a los de simetría.

El interés en la dinámica de la Piedra Celta creció en la década de los 70 y 80 del siglo pasado, publicándose distintos trabajos. Estos artículos se centraron en la simulación numérica de diferentes modelos de Celta con fuerzas disipativas y en su sentido dinámico. En 1986 Hermann Bondi publicó el clásico “The Rigid Body Dynamics of Unidirectional Spin” en el que propone un modelo analítico más completo para el Rattleback (Bondi, 1986) y simultáneamente Garcia y Hubbard (Garcia & Hubbard, 1986) realizaron un estudio numérico en el que incluyen la disipación de energía por rozamiento. Investigaciones posteriores se han centrado en los aspectos teóricos de la dinámica del Rattleback. Borisov y Mamaev (Borisov & Mamaev, 2003) con técnicas modernas analizan cómo para ciertas energías, la Piedra Celta representa un ejemplo de caos clásico en un sistema conservativo, abriendo nuevas perspectivas al estudio de este sistema. Recientemente Franti (Franti, 2013) ha realizado una revisión sobre el modelo de Bondi y Garcia-Hubbard.

En resumen, la Piedra Celta es un sistema sencillo, pero cuyo comportamiento esconde muchas sorpresas. Por sí solo puede ser utilizado como instrumento motivador en el planteamiento didáctico del problema general del sólido. Este aspecto puede ser potenciado con ayuda de una cámara estereoscópica de media velocidad y técnicas de vídeo-análisis.

En nuestro trabajo planteamos una forma sencilla de aproximarnos al estudio del Rattleback, a través del video-análisis. En el apartado 2 describimos las características del sistema de medida empleado. En el apartado 3 sintetizamos y analizamos los resultados obtenidos: por un lado mostramos la trayectoria de un punto de la superficie de la peonza. Por otro lado, justificamos, de acuerdo con las leyes de la mecánica clásica, su comportamiento. Concluimos, por último, subrayando las características didácticas que tales sistemas presentan en el contexto de la Ingeniería.

2 Diseño del experimento y método de seguimiento

En la Figura 3 se puede ver el montaje experimental desarrollado. El Rattleback se sitúa a 40cm de la cámara. Sobre su superficie se colocaron marcadores blancos para facilitar el seguimiento. La cámara estereoscópica usada en este experimento es una Bumblebee R©BB2-03S2C Stereo

Vision System, con una velocidad de obturación $1/500s$ y frecuencia de muestreo de $48ips$. La longitud focal de la cámara, f , es de 823.73 píxeles, y la distancia entre sus ejes ópticos, B , es de $12.02cm$.

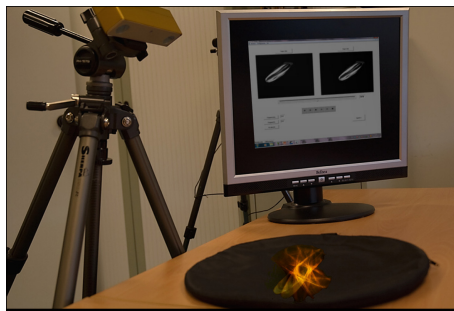


Figura 3: Equipo de medida: la cámara estereoscópica captura el movimiento de la Piedra Celta.

La cámara está conectada al computador por medio de FireWire 400, que también le suministra potencia. El tamaño de la imagen es de 640×480 píxeles. El método de seguimiento utilizado está basado en el flujo óptico (Horn & Schunck, 1981), implementado a través de los algoritmos de Lucas & Kanade (Lucas & Kanade, 1981). El software de seguimiento (Visual Estéreo) ha sido implementado en nuestro laboratorio, habiendo sido utilizado con éxito por los autores en otras aplicaciones (Parrilla, Riera, Torregrosa, & Hueso, 2009) (Riera et al., 2011). En la Figura 4 se puede ver la interfaz de seguimiento de un fotograma. El punto más grueso (rojo en el original) indica el píxel sobre el que se realiza el seguimiento.

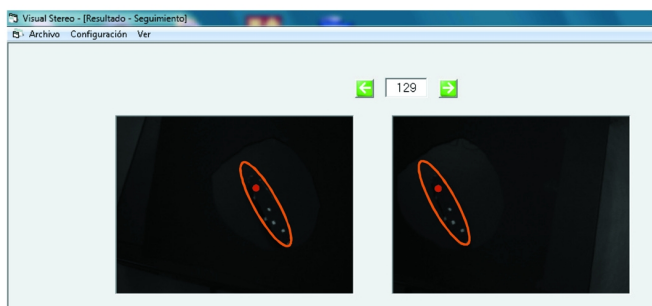


Figura 4: Interfaz de seguimiento del programa Visual Estéreo: fotograma extraído de cada una de las cámaras en un mismo instante (el punto rojo marca el píxel seguido).

La detección y el seguimiento se realiza del modo siguiente: como primer paso, se selecciona el objeto a seguir en el primer fotograma de la cámara izquierda. Este objeto actúa como patrón de reconocimiento de todos los fotogramas de la secuencia izquierda, utilizando los algoritmos mencionados de Lucas & Kanade. Simultáneamente, para cada fotograma calculamos la disparidad, cuyo objetivo es encontrar el punto homólogo en la imagen derecha. Para ello se aplica el método de maximizar la correlación, a través de las transformadas rápidas de Fourier (FFT). En la Figura 5 podemos ver el proceso de seguimiento a lo largo de una secuencia estéreo. De esta forma, podemos conocer la posición del objeto en el tiempo y en el espacio, y realizar el seguimiento tridimensional (Riera, Parrilla & Hueso, 2011)

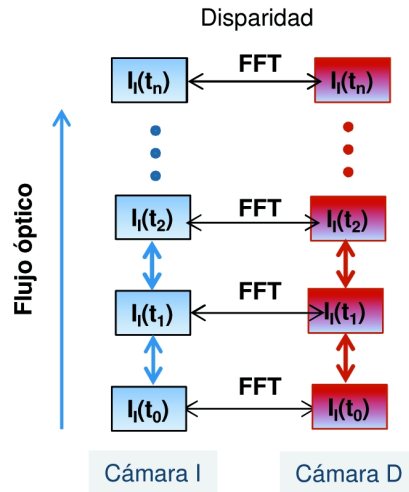


Figura 5: Proceso de seguimiento.

3 Resultados y discusión

3.1 Resultados experimentales

A partir del sistema descrito se ha procedido a registrar el movimiento de una peonza celta, girando en el sentido cuyo movimiento es inestable. De la secuencia grabada, de 6s de duración, se han seleccionado 81 fotogramas, correspondiente a los instantes anteriores y posteriores al cambio del sentido de su giro (algo menos de 2s). En

<http://politube.upv.es/play.php?vid=57063>

puede verse la secuencia seleccionada. El procesamiento de la señal obtenida nos permite obtener las coordenadas (x, y, z) en intervalos de tiempo de 1/48 s de cualquier punto de su superficie. Los puntos $\mathbf{r}(t)$ obtenidos han sido ajustados localmente según el método descrito

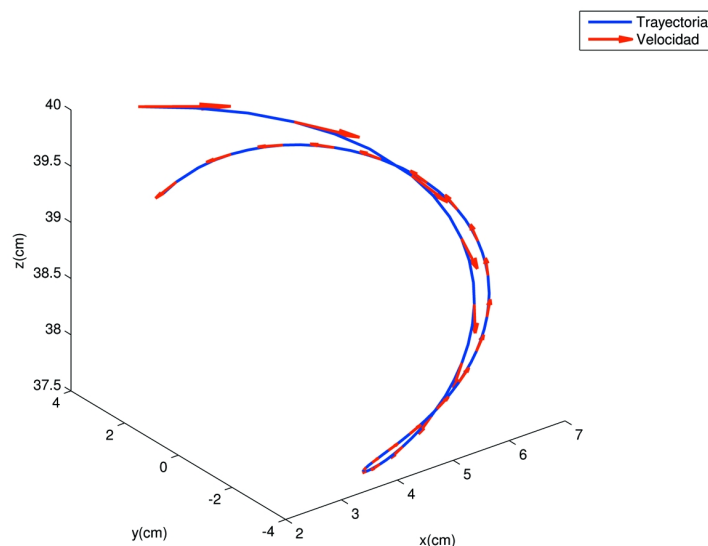


Figura 6: Trayectoria y velocidad de un punto sobre la superficie del rattleback.

por Page (Page, Candelas & Belmar, 2006), lo que nos ha permitido obtener la descripción de la curva $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$, permitiéndonos conocer las características dinámicas de cualquier punto. En la Figura 6, sintetizamos los resultados obtenidos a través de la trayectoria de un punto situado sobre la superficie del Rattleback, en una zona cercana a uno de sus extremos (véase Figura 4). Sobre la citada trayectoria se han superpuesto los vectores velocidad correspondientes a distintos instantes. En la parte inferior de la gráfica se detecta el punto correspondiente al instante en que la velocidad se hace cero y el movimiento se invierte.

Si realizamos el seguimiento de un conjunto de puntos del Rattleback podemos obtener las magnitudes físicas del problema (Page, Candelas, Belmar & De Rosario, 2007) objetivo que no nos hemos planteado en el presente trabajo.

3.2 Bases del comportamiento del Rattleback

Para explicar el comportamiento con asimetría direccional del Rattleback, tenemos que partir de las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido. Presentamos el planteamiento clásico de Bondi (Bondi, 1986), revisado posteriormente por Franti (Franti, 2007).

La segunda ley de Newton, aplicada sobre el Rattleback

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - mg\mathbf{u}, \quad (1)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza ejercida por la mesa sobre la peonza, m la masa del mismo y \mathbf{v} la velocidad de su centro de masas y \mathbf{u} el vector unitario con dirección vertical. Si \mathbf{r} es el vector de posición del punto de contacto de la Celta con la mesa, en el Sistema de Referencia centro de masas (SR)

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0. \quad (2)$$

Si representamos por \mathbf{L} el momento cinético del sistema

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (3)$$

\mathbf{L} lo podemos escribir en SR, como

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

con I el tensor de inercia. Considerando que el eje principal de simetría coincide con el eje de inercia respecto al cual el momento de inercia es I_3 , y que los otros dos ejes de simetría están rotados un pequeño ángulo, δ , la expresión del tensor de inercia en función de los 3 momentos principales de inercia en el centro de masas y el ángulo δ , se puede escribir como

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2(\delta) + I_2 \sin^2(\delta) & (I_1 - I_2) \cos(\delta) \sin(\delta) & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos(\delta) \sin(\delta) & I_1 \sin^2(\delta) + I_2 \cos^2(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Despejando \mathbf{F} en la Ecuación (1) y sustituyendo en Ecuación (2), obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + mg\mathbf{u} \right) = m\mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + g\mathbf{u} \right). \quad (5)$$

La superficie de la celta, la podemos escribir, como

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6)$$

siendo el vector unitario \mathbf{u} perpendicular a la superficie en el punto de contacto con la mesa, que coincide con la dirección vertical

$$\mathbf{u} = \frac{\text{grad}(\Phi(\mathbf{r}))}{|\text{grad}(\Phi(\mathbf{r}))|} \quad (7)$$

3.3 Mirando las ecuaciones del Rattleback: justificación de la reversibilidad

A partir de las ecuaciones anteriores se puede llegar a una ecuación diferencial lineal de alta complejidad. Su ecuación característica es de cuarto grado, y en ella aparecen como variables el módulo la velocidad angular de giro, n , y la frecuencia de la oscilación, σ . Las raíces de la ecuación dependen de la dirección de giro de una manera directa, ya que las raíces están elevadas siempre al cuadrado, excepto en un término en el que ambas están presentes. Por ello, si σ es solución de la ecuación característica para un valor n , la solución para el valor $-n$ será $-\sigma$. A partir de aquí se puede deducir la asimetría del sistema. Por otro lado, es de reseñar que nuestro modelo es totalmente conservativo: la disminución de la amplitud de la oscilación no es causado por la disipación, sino que es una indicación de que la energía fluye entre la oscilación y la rotación. Este puente entre ambas lo proporciona un término de la ecuación característica que depende de la alineación de los ejes de simetría y los de inercia. Si $\delta = 0$, el tensor de inercia queda diagonalizado, y el puente entre la rotación y la oscilación se desvanece.

Esta primera aproximación a la explicación del comportamiento del Rattleback nos da la posibilidad de construir con pocos medios uno de tales dispositivos. Se trataría de conseguir la asimetría por medio de añadir a un cuerpo, con la forma adecuada pero simétrico, pequeñas masas. Hay descritos muchos de ellos, no tan espectaculares como los comerciales, pero en los que se puede conseguir el cambio de sentido de la rotación. Entre los más sencillos para su elaboración se encuentra el Rattleback construido a partir de una cuchara de plástico (cortándola longitudinalmente y seccionándole el mango), lastrada con dos clips. (http://www.youtube.com/watch?v=Yvn81k8_pNU).

4 A modo de conclusión: Potencial didáctico del Rattleback

La confusión que produce la sorpresa es un estado favorable para huir de los preconceptos mal entendidos y volver a ver un fenómeno como si ocurriera por primera vez, permitiendo la asimilación de nuevos conceptos. Cuando se dirige la mirada hacia la rotación de la Piedra Celta, nadie puede quedar indiferente. Tras la sorpresa inicial surge seguidamente la pregunta, ¿por qué? que prepara a la mente para asomarse con mayor o menor profundidad hacia los conceptos del sólido rígido. El empleo de técnicas de seguimiento para “ver” con detalle la riqueza conceptual de este sistema puede ser de gran ayuda en un primer análisis del mismo. Por ello, tanto el Rattleback como la forma de mirarlo a través de la cámara digital, se funden en una herramienta con alto potencial didáctico en la dinámica de los sistemas mecánicos.

Agradecimientos

El presente trabajo se ha realizado con la financiación del Proyecto PAID-SP-2012-0498 del Vicerrectorado de Investigación, Universitat Politècnica de València. Jaime Riera es miembro del Equipo de Innovación y Calidad Educativa de la UPV, E-MACAFI.

Referencias

-  Bondi H. (1986).
The rigid body dynamics of unidirectional spin.
Proc. R. Soc. London Ser A 405 265, London.
-  Borisov A. V., Mamaev I. S. (2003).
Strange attractors in rattleback dynamics.
Physics-Uspekhi 46, 393-403.
-  Franti L. (2013).
On the rotational dynamics of the rattleback.
Cent. Eur. J. Phys. 11(2) 162-172.
-  Garcia A., Hubbard M. (1986).
Spin reversal of the rattleback: theory and experiment.
Proc. R. Soc. London, Ser, A418, 165 London.
-  Horn B., Schunck B. (1981).
Determining optical flow.
Artificial Intelligence, 17, 185-203.
-  Lukas B. D., Kanade T. (1981).
An Iterative Image Registration Technique with Applications to Stereo Vision.
Proceedings of Imaging Understanding Workshop 121-131.
-  Moore A. D. (1972)
Department of Electrical and Computer Engineering, University of Michigan, unpublished paper, (1972).
Citado por H. Richard Crane Phys. Teach., 29, 278-288, 1991.
-  Page A., Candelas P., Belmar F. (2006).
On the use of local fitting techniques for the analysis of physicaldynamic systems.
Eur. J. Phys., 27, 273-279.
-  Page A., Candelas P., Belmar F., De Rosario H. (2007).
*Analysis of 3D rigid-body motion using photogrammetry:
A simple model based on a mechanical analogy.*
Am. J. Phys., 75(1), 56-61.
-  Parrilla E., Riera J., Torregrosa J. R., Hueso J. L. (2009).
Handling occlusion in object tracking in stereoscopic video sequences.
Math. Comp. Model. 50-5/6, 823-830.
-  Riera J., Parrilla E., Hueso J. L. (2011).
Object tracking with a stereoscopic camera: exploring the three-dimensional space.
Eur. J. Phys., 32, 235-244.
-  Walker G. (1896).
On a dynamical top.
Q. J. Pure Appl. Math., 28, 175-185.