



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

# ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGA ARMADA BAJO TENSIÓN DIAGONAL

Autor

**José Catalá Serralta**

Tutor

**José Luis Pérez Aparicio**

**Grado en Ingeniería Aeroespacial**

**Universidad Politécnica de Valencia**

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño**

Valencia - Julio de 2016



ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DE  
VIGA ARMADA BAJO TENSION DIAGONAL

**José Catalá Serralta**

Grado en Ingeniería Aeroespacial  
Universidad Politécnica de Valencia  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Julio de 2016



## *Agradecimientos*

*Gracias a Pedro Patón, por su ayuda al comienzo del trabajo. Gracias a mi tutor, José Luis Pérez, por haberme guiado, enseñado y exigido. Gracias a mis padres, por la educación y el apoyo que siempre me han dado. Por último, gracias a Belén, por estar siempre a mi lado y aguantarme, por ser mi compañera de estudio y vivir conmigo los momentos más duros y los más felices.*



## *Resumen*

El objetivo último de este trabajo es el estudio de vigas armadas que trabajan bajo tensión diagonal, como las que conforman los largueros de un ala. Para ello se sigue un proceso de complejidad creciente que centra la atención en el estudio de placas delgadas, tanto de aluminio como de material compuesto. En primer lugar, se analiza el inicio de pandeo de placas a cortante bajo diversas condiciones de contorno y geometrías. Posteriormente, se estudia el comportamiento a post-pandeo, primero a compresión y después a cortante. Finalmente se aborda el estudio de la viga armada.

El estudio de cada aspecto se lleva a cabo mediante elementos finitos empleando el *software* *Abaqus*<sup>®</sup> y mediante procedimientos analíticos, comparando siempre los resultados que proporcionan ambos métodos. Además, los resultados se contrastan con los modelos aproximados o experimentales que se encuentran en la literatura.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Índice general</b>	<b>II</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y estado actual . . . . .	1
1.2. Objetivos y metodología generales . . . . .	6
1.3. Estructura de la memoria . . . . .	6
<b>2. Bases teóricas</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de placas . . . . .	9
2.2. Materiales Compuestos . . . . .	11
2.3. Condiciones de contorno y funciones de prueba . . . . .	15
<b>3. Inicio de pandeo</b>	<b>17</b>
3.1. Métodos de solución: Ritz y MEF . . . . .	17
3.2. Placa articulada bajo sollicitación cortante . . . . .	20
3.2.1. Evolución de la carga crítica con la relación de aspecto . . . . .	20
3.2.2. Modos de pandeo . . . . .	23
3.3. Placa empotrada bajo sollicitación cortante . . . . .	27
3.4. Comparación con el documento ESDU 71005 . . . . .	31
3.5. Placas de material compuesto . . . . .	34
3.5.1. Placa articulada . . . . .	35
3.5.2. Placa empotrada . . . . .	37
3.6. Placas de elevada relación de aspecto . . . . .	39
<b>4. Post-pandeo de placas a compresión</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Ecuaciones de von Karman . . . . .	46
4.3. Resolución analítica . . . . .	48
4.3.1. Resolución de las ecuaciones de von Karman . . . . .	48
4.3.2. Función de tensiones de Airy . . . . .	53
4.4. Post-pandeo en Abaqus . . . . .	54
4.4.1. Método de Riks modificado . . . . .	56
4.5. Evolución de la deflexión . . . . .	60
4.5.1. Placa de aluminio . . . . .	60
4.5.2. Placa de material compuesto . . . . .	63
4.6. Estudio de las tensiones . . . . .	66
4.6.1. Redistribución de tensiones . . . . .	66
4.6.2. Ancho efectivo . . . . .	69
4.6.3. Pérdida de rigidez compresiva . . . . .	71
4.7. Conclusiones generales . . . . .	72

<b>5. Post-Pandeo en placas a cortante</b>	<b>73</b>
5.1. Introducción . . . . .	73
5.2. Estudio de la deflexión . . . . .	73
5.2.1. Resolución analítica . . . . .	74
5.2.2. Resolución por MEF y comparación de resultados . . . . .	78
5.3. Tensión diagonal pura . . . . .	82
5.4. Estudio del campo de tensiones . . . . .	85
5.5. Conclusiones generales . . . . .	92
<b>6. Viga Armada</b>	<b>93</b>
6.1. Introducción . . . . .	93
6.2. Descripción del modelo . . . . .	94
6.3. Modos de Pandeo . . . . .	96
6.4. Evolución de la deflexión . . . . .	97
6.5. Tensión diagonal pura . . . . .	98
6.6. Tensión diagonal incompleta . . . . .	100
6.7. Análisis de tensiones . . . . .	102
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>109</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	109
7.2. Trabajos futuros . . . . .	111
7.3. Presupuesto . . . . .	112
<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>

## Lista de Símbolos

### Mayúsculas

$A$	—	Sección transversal
$A_d$	—	Constante del material calculada a partir de una combinación de las rigideces a extensión de un material compuesto
$D$	—	Rigidez a flexión de placa isótropa
$E$	—	Módulo de Young de un material isótropo
$E_1$	—	Módulo de Young en la dirección principal de las fibras
$E_2$	—	Módulo de Young en dirección transversal a las fibras
$E_3$	—	Módulo de Young en la dirección del espesor
$F$	—	Función de tensiones de Airy
$G$	—	Módulo de cizalladura de material isótropo
$G_{ij}$	—	Módulo de cizalladura en el plano $i - j$ de una lámina de material compuesto
$K$	—	Coficiente adimensional de carga crítica de pandeo de material isótropo
$\mathcal{K}$	—	Coficiente adimensional de carga crítica de pandeo de material compuesto
$K'$	—	Coficiente adimensional de carga crítica de pandeo utilizado en la norma ES-DU 71005
$L$	—	Parámetro geométrico asociado al patrón de deformación en placas de elevada relación de aspecto
$M$	—	Solicitación de momento por unidad de espesor
$N_{cr}$	—	Carga crítica de pandeo
$N_x$	—	Carga por unidad de espesor aplicada según la dirección del eje $x$
$N_y$	—	Carga por unidad de espesor aplicada según la dirección del eje $y$
$N_{xy}$	—	Carga cortante por unidad de espesor
$P_x$	—	Carga normal de compresión aplicada según la dirección del eje $x$
$P_y$	—	Carga normal de compresión aplicada según la dirección del eje $x$
$P_{xy}$	—	Carga cortante
$\mathcal{P}$	—	Ratio de post-pandeo
$Q$	—	Solicitación cortante por unidad de espesor
$\mathcal{R}$	—	Parámetro geométrico asociado al patrón de deformación en placas de elevada relación de aspecto
$U$	—	Energía interna de la placa debida a la deformación por flexión
$U_i$	—	Condición de contorno en MEF asociada al desplazamiento
$UR_i$	—	Condición de contorno en MEF asociada al giro
$W$	—	Trabajo producido por las fuerzas externas
$X_m$	—	Función de prueba dependiente de la variable $x$
$Y_n$	—	Función de prueba dependiente de la variable $y$

### Minúsculas

$a$	—	Longitud del lado de la placa en la dirección del eje $x$
$b$	—	Longitud del lado de la placa en la dirección del eje $y$
$c$	—	Condición de contorno de empotramiento ( <i>clamped</i> )
$d$	—	Separación entre rigidizadores de la viga armada

## Lista de Símbolos

---

$f$	—	Condición de contorno de lado libre ( <i>free</i> )
$h$	—	Espesor de la placa
$h_c$	—	Canto de la viga (distancia entre alas)
$h_p$	—	Espesor de lámina ( <i>ply</i> )
$k$	—	Factor de tensión diagonal
$m, n$	—	Números enteros pertenecientes a sumatorios de series
$p$	—	Presión transversal a la placa
$r$	—	Relación de aspecto de placa, $a/b$
$ss$	—	Condición de contorno de articulación ( <i>simply supported</i> )
$t$	—	Espesor del alma de la viga armada
$u$	—	Desplazamiento en dirección $x$
$v$	—	Desplazamiento en dirección $y$
$w$	—	Desplazamiento en dirección $z$ , deflexión
$w_{mn}$	—	Coefficientes indeterminados de la deflexión de la placa

## Letras griegas

$\alpha$	—	Ángulo de tensión diagonal
$\beta$	—	Parámetro geométrico asociado al patrón de deformación en placas de elevada relación de aspecto
$\gamma$	—	Deformación inducida por carga cortante cortante
$\varepsilon$	—	Deformación inducida por carga normal
$\theta$	—	Ángulo de orientación de cada lámina
$\kappa$	—	Curvatura de la placa
$\lambda$	—	<i>Load Proportionality Factor</i> , parámetro utilizado en el método de Riks
$\mu$	—	Ratio de rigidez compresiva en post-pandeo de placas a compresión
$\nu$	—	Coefficiente de Poisson de un material isótropo
$\nu_{ij}$	—	Coefficiente de Poisson en el plano $i - j$ de una lámina de material compuesto
$\Pi$	—	Energía potencial de la placa
$\sigma$	—	Tensión normal
$\sigma_c$	—	Tensión normal en la diagonal a compresión
$\sigma_t$	—	Tensión normal en la diagonal tracción
$\tau$	—	Tensión tangencial o cortante
$\varphi$	—	Pendiente de la recta $\sigma_{av} - \sigma_{max}$ en post-pandeo de placas a compresión

## Subíndices

$av$	—	<i>average</i>
$c$	—	Centro de la placa
$cr$	—	Crítico
$F$	—	<i>Flange</i>
$ef$	—	<i>efectivo</i>
$k$	—	Número de capa

---

- $o$  — Plano medio  
 $s$  — Laminado simétrico  
 $U$  — *Upright*

Matrices y vectores

- A** — Matriz de rigideces a extensión de un material compuesto  
**B** — Matriz de rigideces de acople flexión-extensión de un material compuesto  
**D** — Matriz de rigideces a flexión de un material compuesto  
**Q** — Matriz de rigidez reducida  
**S** — Matriz de flexibilidad para tensión plana  
**T** — Tensor de transformación  
 $\mathbf{w}_i$  — Vector que contiene los desplazamientos nodales asociados al modo de pandeo  $i$   
 $\mathbf{w}^*$  — Vector que contiene los desplazamientos nodales que definen la imperfección introducida en MEF

Siglas

- CAE — *Computed Assisted Engineering*  
 CLPT — *Classical Laminated Plate Theory*  
 ESDU — *Engineering Sciences Data Unit*  
 IDT — *Incomplete Diagonal Tension*  
 MEF — Método de los Elementos Finitos  
 NACA — *National Advisory Committee for Aeronautics*  
 PDT — *Pure Diagonal Tension*

## 1.1. Motivación y estado actual

En 1928, H.Wagner comprobó que un alma fina trabajando a cortante en una viga de gran canto con rigidizadores transversales no falla cuando pandea entre dichos rigidizadores sino que forma pliegues diagonales y pasa a funcionar bajo una serie de tensiones diagonales, mientras que los rigidizadores actúan como postes de compresión (ver Fig. 1.1). Este aspecto fue ampliamente estudiado por Paul Kuhn en 1952 mientras trabajaba para NACA y se desarrolla en las notas técnicas 2661 [9] y 2662 [10].

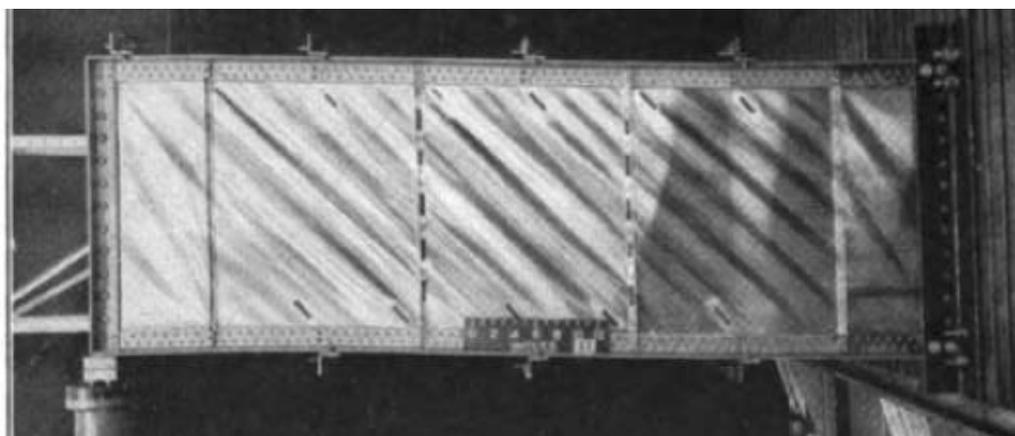


Figura 1.1: Viga bajo tensión diagonal estudiada por Kuhn (NACA) [9].

El uso de “vigas de tensión diagonal”, que pandean a una pequeña fracción de la carga última de diseño, constituye uno de los primeros y más destacados arranques de la práctica en estructuras aeronáuticas a partir de la ingeniería civil y naval. Como ejemplo de vigas de este tipo se encuentran en un avión las que conforman los largueros de las alas (Fig. 1.2) o el cajón de torsión (Fig. 1.3).

Efectivamente, la capacidad a post-pandeo de las placas es notablemente diferente a la de columnas esbeltas. Mientras que un pequeño incremento en la carga crítica en éstas produce un colapso completo, la capacidad de carga de una placa no se agota al pandear, sino que puede soportar cargas considerablemente mayores a la carga crítica. Esta capacidad adicional es de gran importancia práctica en el diseño de estructuras aeronáuticas, ya que permite espesores menores y con ello el ahorro de peso.

Las almas de las vigas de tensión diagonal mencionadas anteriormente son un ejemplo de placa que trabaja a pandeo, pero existen muchos más en la estructura de una aeronave. La piel del ala y del fuselaje son también placas, cuyos bordes son restringidos por larguerillos, que trabajan a pandeo. Se trata por tanto del fenómeno que gobierna el diseño de todos estos tipos de estructuras. La separación entre rigidizadores, que se desea aumentar para disminuir



Figura 1.2: Larguero central del ala de un Boeing 747-8, ejemplo de viga armada bajo tensión diagonal [19].

el peso estructural, quedará determinada por el análisis del pandeo de la estructura.

Por otro lado, existen diversas maneras en las que un panel rigidizado puede pandear: pandeo global del panel, pandeo local de la piel, pandeo de los rigidizadores a modo de columnas, etc. Tanto ante cargas de compresión como de cortante, el modo de pandeo deseado es el pandeo local de la piel (ver Fig. 1.4) de modo que los rigidizadores permanezcan rectos durante el pandeo y soporten la mayoría de la carga a compresión.



Figura 1.3: Cajón de torsión central ('central wing box') de un Airbus A320 [21].

Resulta por tanto evidente la importancia del estudio del inicio de pandeo así como del post-pandeo de placas. Las condiciones de contorno de éstas vendrán determinadas por el tipo de rigidizadores y por su configuración. El estudio de vigas de tensión diagonal constituye un paso más allá, ya que se trata de una estructura más compleja.

En cuanto al análisis de estructuras aeronáuticas, el método de elementos finitos (MEF) ha adquirido una enorme importancia y es habitualmente utilizado por las empresas para el cálculo estructural detallado, permitiendo obtener resultados muy precisos que permiten llegar a etapas muy avanzadas del diseño sin recurrir a ensayos experimentales, reduciendo así los costes.

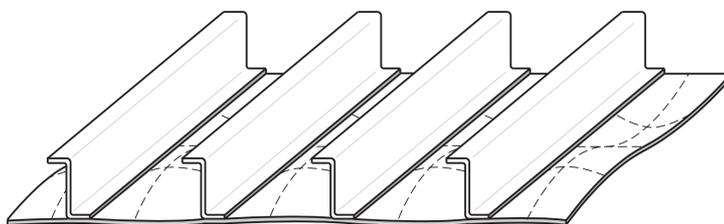


Figura 1.4: Ejemplo de panel rigidizado. Modo de pandeo deseado para los paneles a compresión y cortante: pandeo local de la piel.

Las soluciones analíticas están limitadas a geometrías, cargas y soportes sencillos. Si la complejidad del problema aumenta, abordarlo analíticamente pasa a ser tedioso e incluso imposible. Sin embargo, dichas soluciones son de gran valor ya que permiten obtener un mayor entendimiento de la naturaleza física del problema y de la influencia de las distintas variables, así como obtener tendencias y órdenes de magnitud.

El problema del MEF es el elevado coste computacional que conllevan, lo cual los convierte en inadecuados para etapas de diseño preliminar. En estas etapas tempranas, teniendo en cuenta la gran variedad de casos de carga (maniobras, colisiones, ...) que deben estudiarse, junto a los distintos conceptos de diseño, procesos de fabricación y materiales considerados el número de análisis requeridos es del orden de cientos de millones [2]. Resulta por tanto de interés la utilización de ambos métodos.

Por otro lado, es importante el estudio de las estructuras mencionadas construidas con materiales compuestos. En este trabajo, el término material compuesto se referirá a materiales que consisten en fibras de elevadas propiedades (grafito, vidrio, Kevlar, etc) inmersas en una matriz polimérica (epoxy, bismaleimide, etc).

Las atractivas propiedades de estos materiales, tales como su alto ratio rigidez-resistencia frente al peso, su reducida sensibilidad a cargas cíclicas, elevada resistencia a corrosión y, sobretodo, su capacidad para adaptarse a condiciones de carga específicas para obtener una actuación óptima, los han convertido en perfectos candidatos para el uso en aplicaciones ae-

ronáuticas.

La aplicación de materiales compuestos en aeronaves civiles o militares ha seguido las etapas típicas que toda nueva tecnología atraviesa durante su implementación. Comenzó aplicándose a estructuras secundarias con riesgos mínimos, seguido de un mayor uso en aeronaves pequeñas. La industria de helicópteros fue de las primeras en reconocer el potencial de los materiales compuestos y en utilizarlos en su estructura primaria. Las palas de los rotores principal y de cola ya eran construidas con materiales compuestos en torno a 1960.



Figura 1.5: Beech Starship I, diseñado por Burt Rutan, primer avión comercial con una estructura completamente de materiales compuestos en obtener la certificación de la FAA [22].

En 1970 el uso de materiales compuestos ya era común en helicópteros y planeadores y aparecieron los primeros aviones con una estructura completa de material compuesto, aviones de recreo o acrobáticos. En 1980 aparece el primer avión comercial con una estructura completa de materiales compuestos en obtener la certificación de la FAA, el Beech Starship I, diseñado por Burt Rutan (Fig. 1.5). En este momento se habían desarrollado nuevas técnicas de fabricación y el conocimiento de los materiales compuestos era mucho mayor.

Las aplicaciones a aviones comerciales grandes comenzaron con el estabilizador horizontal del Boeing 737 y continuaron a mayor escala con el Airbus A-320, seguido por el Boeing 777 en los años 90 y por el A-380 ya en el nuevo milenio. El fuselaje y las alas del B-787 (Fig. 1.6) están contruidos completamente con materiales compuestos, de modo que este tipo de materiales alcanzan un porcentaje en peso de más del 50 %. Este avión obtuvo el mayor lanzamiento (mayor número de encargos) de la historia de Boeing, lo cual llevó a Airbus a desarrollar el A-350.

En la Fig. 1.7 puede observarse la creciente tendencia al uso de materiales compuestos en aviación. Se observa un comienzo lento, correspondiente a una etapa en la que el comportamiento de los materiales compuestos no era bien comprendido y se limitaban a aplicaciones de bajo riesgo, seguido de un rápido crecimiento gracias a que la experiencia ganada aporta



Figura 1.6: Boeing 787 Dreamliner, avión comercial con un porcentaje estructural de materiales compuestos de más del 50 % en peso, entrado en servicio en 2008 [20].

método de análisis y herramientas de diseño comprobadas mediante ensayos experimentales. Finalmente, la aplicación de los materiales compuestos ha alcanzado un nivel estable, ya que resulta difícil encontrar nuevas partes que puedan construirse empleando este tipo de materiales y su uso en algunas aplicaciones resulta económicamente prohibitivo.

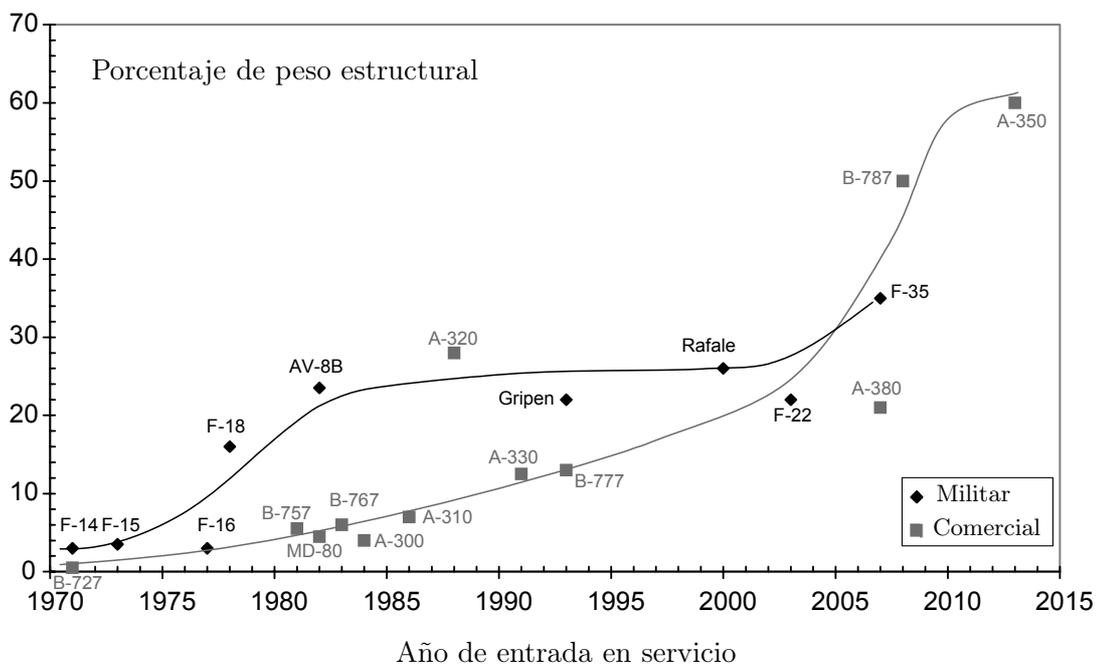


Figura 1.7: Evolución del uso de materiales compuestos en aplicaciones aeronáuticas [2].

Como se puede ver, el empleo de materiales compuestos en construcciones aeronáuticas tiene una enorme importancia en la actualidad y se trata de un campo de investigación abierto.

## 1.2. Objetivos y metodología generales

El objetivo final del trabajo consiste en estudiar un modelo de viga armada que trabaje bajo tensión diagonal. Para ello, se seguirá un proceso de complejidad creciente, estudiando primero el inicio de pandeo de placas, después el post-pandeo, primero a compresión y después a cortante, para terminar finalmente estudiando la viga armada.

Para el análisis de cada aspecto se expondrán las bases teóricas pertinentes para el estudio del problema. Se emplearán los programas informáticos *Matlab*<sup>®</sup> y *Mathematica*<sup>®</sup> para implementar los modelos analíticos. Como programa de MEF se empleará *Abaqus*<sup>®</sup> y se comentará brevemente la metodología necesaria para el análisis de cada aspecto tratado. Los resultados que proporcionan las diferentes metodologías serán comparados, se discutirán los resultados y se expondrán conclusiones.

## 1.3. Estructura de la memoria

- En el Capítulo 2 se realiza un breve repaso de la teoría clásica de placas y de materiales compuestos.
- En el Capítulo 3 se estudia el inicio de pandeo en placas a cortante tanto analíticamente por el método de Ritz como por MEF. Se analizan placas articuladas y empotradas, tanto de aluminio como de material compuesto. Como resultado, se obtiene la evolución de la carga crítica con la relación de aspecto de la placa y los modos de pandeo, que son necesarios para el estudio a post-pandeo.
- En el Capítulo 4 se estudia el post-pandeo de placas a compresión con el objetivo de asentar las bases para el estudio del post-pandeo a cortante. Por un lado, se explica la resolución de las ecuaciones de von Karman, que proporcionan los resultados analíticos. Por otro lado, se detalla la metodología seguida en *Abaqus*<sup>®</sup> así como el algoritmo de Riks que dicho programa implementa. Finalmente, se caracteriza el comportamiento a compresión en régimen de post-pandeo, observando grandes deflexiones fuera del plano, pérdida de rigidez compresiva y redistribución de carga hacia los bordes.
- En el Capítulo 5 se estudia el post-pandeo de placas a cortante de nuevo con las ecuaciones de von Karman y mediante MEF. Por un lado, se analiza la evolución de las deflexiones fuera del plano. Por otro lado, se estudia el campo de tensiones diagonales que se desarrollan en la placa en régimen de post-pandeo. Para ello, se expone la teoría de tensión diagonal pura y se compara con los resultados de MEF.

- En el Capítulo 6 se estudia una viga armada bajo tensión diagonal. Se estudia tanto el inicio de pandeo como el post-pandeo y se analizan con detalle las tensiones primarias que aparecen en la viga, tanto el alma como el los refuerzos. Los resultados de MEF se comparan con los de la teoría de tensión diagonal incompleta, que desarrolla un método semi-empírico ampliamente utilizado en la práctica.
- En el Capítulo 7 se exponen las conclusiones, los posibles trabajos futuros y el presupuesto del trabajo.



## 2.1. Teoría de placas

Las placas son elementos estructurales bidimensionales que combina ligereza con una alta capacidad de soportar cargas. En este trabajo se estudiarán placas planas delgadas rectangulares, como la mostrada en la Fig. 2.1. Se tomará como sistema de referencia un sistema global de coordenadas ubicado en una esquina de la placa y en el plano medio de ésta. Las longitudes de la placa serán  $a$  en dirección  $x$ ,  $b$  en dirección  $y$ .

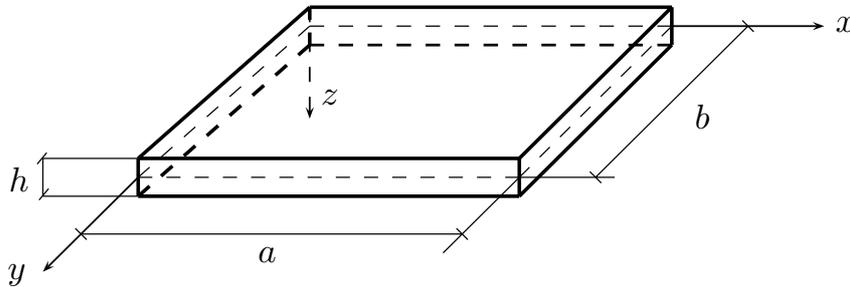


Figura 2.1: Sistema de referencia, plano medio y parámetros que definen la geometría de la placa: lados  $a$ ,  $b$  y espesor  $h$ .

En placas delgadas  $h \ll a, b$ . La teoría clásica se basa en las hipótesis de Kirchhoff, que se resumen a continuación:

1. La deflexión del plano medio es pequeña en comparación con el espesor de la placa  $w \ll t$ . La pendiente de la superficie deflectada es por tanto muy pequeña y su cuadrado es despreciable frente a la unidad.
2. Las líneas rectas y normales al plano medio permanecen rectas y normales a éste durante la deformación y su longitud no se altera, de modo que las deformaciones  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\epsilon_z$  son despreciables.
3. La tensión normal al plano medio  $\sigma_z$  y las tangenciales  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  son pequeñas y pueden despreciarse en las relaciones tensión-deformación.
4. El plano medio permanece inextensible tras la flexión:  $u_0, v_0 \approx \text{cte}$

Estas hipótesis permiten simplificar el problema y tratarlo como bidimensional. Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, las relaciones cinemáticas son las indicadas en la Ec. (2.1), donde se muestra la relación entre deformación y curvatura. La deformación es lineal en  $z$  y nula en el plano medio  $z = 0$ . La cinemática de pequeñas deformaciones será válida para el inicio de pandeo pero no en post-pandeo, como se verá en capítulos posteriores.

$$\epsilon_x = z \kappa_x ; \quad \epsilon_y = z \kappa_y ; \quad \gamma_{xy} = 2 z \kappa_{xy} \quad (2.1)$$

Los desplazamientos en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son  $u$ ,  $v$ ,  $w$  respectivamente y se definen en la Ec. (2.2) junto a las curvaturas  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; & \kappa_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

La Fig. 2.1 muestra un esquema de los esfuerzos en el plano normales  $N_x$ ,  $N_y$  y cortante  $N_{xy}$  con su criterio de signos. En el estudio del pandeo de placas estas solicitaciones serán las relevantes. Su dimensión es de fuerza por unidad de espesor [N/m]. Los esfuerzos normales son positivos a tracción y negativos a compresión.

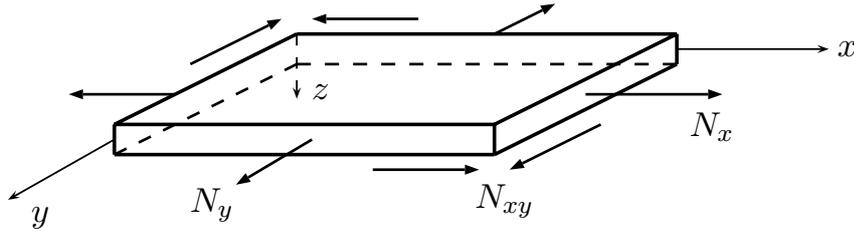


Figura 2.2: Solicitaciones en el plano normales  $N_x$ ,  $N_y$  y cortante  $N_{xy}$  con su criterio de signos.

La variable fundamental es el desplazamiento vertical  $w(x, y)$ , también conocido como deflexión o flecha. El resto de variables (tensiones, deformaciones, resultantes, etc) se expresan en función de  $w$ . A partir de las relaciones cinemáticas descritas Ecs. (2.1) y (2.2) junto con las ecuaciones constitutivas del material y la formulación del equilibrio de fuerzas se obtiene la ecuación diferencial de gobierno [1], que para un material isótropo es:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

donde  $D$  es la rigidez a flexión de la placa y su valor viene dado por la Ec. (2.4). La variable  $p$  representa las cargas transversales (flexión) perpendiculares a la placa. Para el estudio del pandeo sólo se consideran las cargas en el plano y por tanto durante todos los estudios que se llevarán a cabo en este trabajo se considerará que  $p = 0$ .

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.4)$$

## 2.2. Materiales Compuestos

Las placas de materiales compuestos se componen de diferentes láminas de fibras unidireccionales, las cuales forman lo que se denomina un laminado (Fig. 2.3). Se trabajará con compuestos de láminas ortótropas, que contienen tres ejes perpendiculares con propiedades diferentes y tres planos perpendiculares de simetría de las propiedades. Las propiedades de la lámina estarán definidas en sus ejes principales 1 – 2 – 3, donde 1 es la dirección de las fibras, mientras que las del laminado (la placa) deberán definirse en su sistema de referencia  $x - y - z$ .

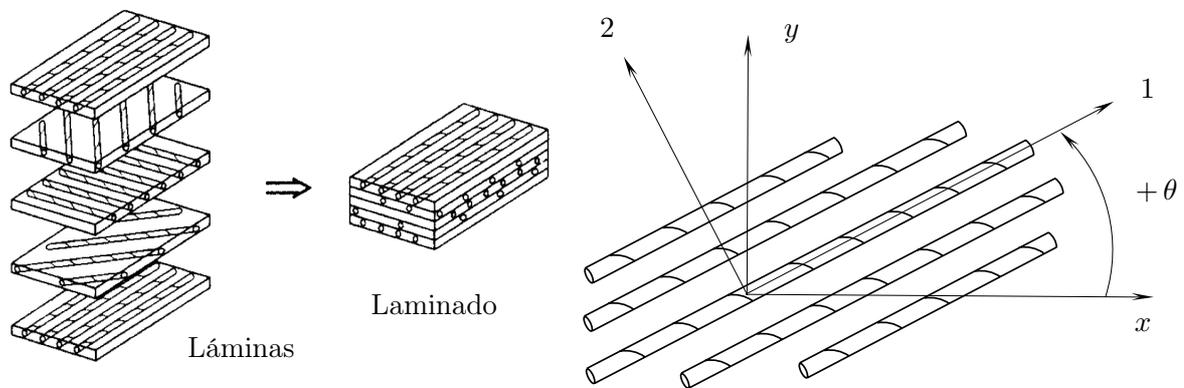


Figura 2.3: Construcción de un laminado a partir de una secuencia de apilamiento de distintas láminas de fibras unidireccionales (izquierda) [5]. Sistema de referencia global del laminado y local de una lámina (derecha).

Mientras que los materiales isotrópicos se definen a través de dos propiedades materiales ( $E$ ,  $\nu$ ) los materiales ortótropos necesitan cuatro propiedades materiales:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ . Estas cuatro constantes junto al espesor  $h_p$  definen las características de una lámina.

A continuación se explicará cómo calcular las propiedades de un laminado junto a la relación entre esfuerzos y deformaciones en materiales compuestos, a partir de la teoría conocida como CLPT (*Classical Laminated Plate Theory*). Para ello es necesario conocer las propiedades de las láminas que lo componen y la secuencia de apilamiento (*layup*), que queda definida a partir de un vector del tipo  $[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\dots]$ .

Según la secuencia de apilamiento los laminados pueden ser de los siguientes tipos:

- Simétrico: secuencia de apilamiento simétrica.
- Equilibrado: para cada lamina con orientación  $+\theta$  existe otra lámina  $-\theta$  de iguales propiedades.
- Cross-ply: únicamente con orientaciones  $0^\circ$  ó  $90^\circ$ .
- Quasi-isotrópico: misma rigidez en todas direcciones del plano  $xy$ .

La matriz de flexibilidad para tensión plana  $\mathbf{S}$  viene definida por la Ec. (2.5):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Se debe definir un sistema de referencia global para el laminado, de modo que la orientación de cada lámina que definida por un ángulo  $\theta$  (Fig. 2.3). El tensor transformación  $\mathbf{T}(\theta)$  viene dado por la Ec. (2.6) y permite transformar las propiedades de la lámina definidas en su sistema de referencia local al sistema global del laminado:

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Se calcula la matriz de rigidez reducida  $\mathbf{Q}$  y para cada lámina se obtiene su transformada según la orientación de ésta,  $\bar{\mathbf{Q}}$ , tal y como se indica en la Ec. (2.7):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1}; \quad \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}(\theta)^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\theta)^{\top^{-1}} \quad (2.7)$$

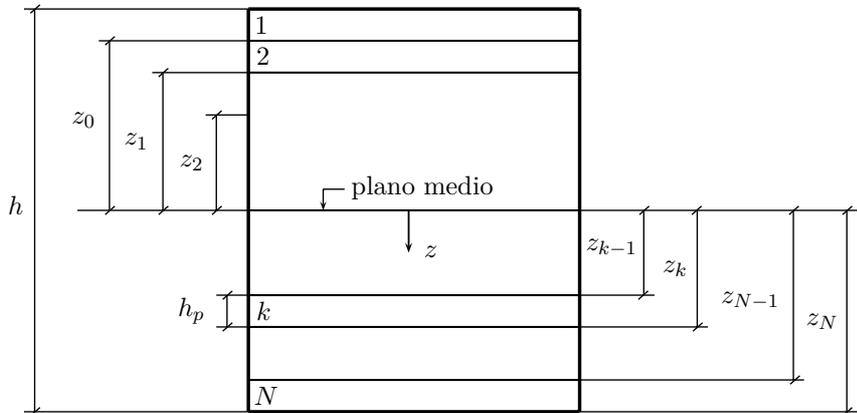


Figura 2.4: Geometría de un laminado de  $N$  láminas,  $k$  indica el número de capa.

La propiedades del laminado viene definidas por la matrices  $\mathbf{A}$  ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$ , cuyos términos se calculan [5] a partir de las expresiones de la Ec. (2.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \sum_{k=1}^N \overline{\mathbf{Q}}_{ij|k} \cdot (z_k - z_{k-1}) ; & \mathbf{B}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{\mathbf{Q}}_{ij|k} \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) ; \\ \mathbf{C}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{\mathbf{Q}}_{ij|k} \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $z_k$  es la distancia del plano medio a la parte superior de la k-ésima capa, tal y como se esquematiza en la Fig. 2.2. Calculados los términos de estas matrices las propiedades del laminado quedan totalmente establecidas. La relación entre esfuerzos y deformaciones en un material compuesto se muestran en la Ec. (2.9). Es importante destacar que en el caso de materiales compuestos existen numerosos acoplamientos entre tensiones y deformaciones que se no se dan en un material isótropo.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ -S- & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Los términos  $A_{ij}$  son las rigideces a extensión,  $B_{ij}$  las de acople flexión-extensión y  $D_{ij}$  las de flexión. Las deformaciones y curvaturas en la Ec. (2.9) no son función de  $z$  sino los valores del plano medio.

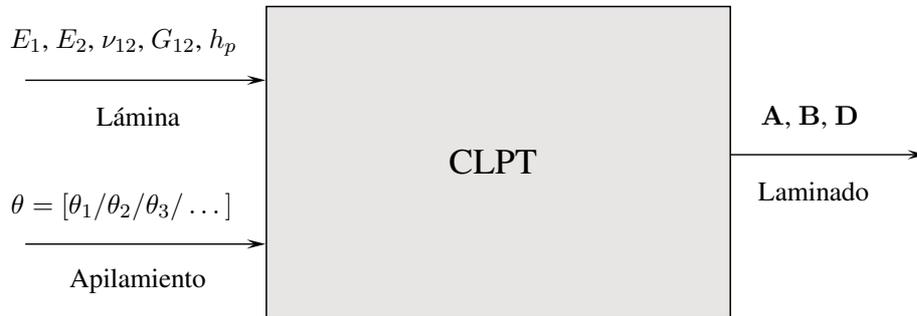


Figura 2.5: Diagrama de bloques del tipo “caja negra” que muestra la relación *inputs-outputs* en el programa que implementa los cálculos de la teoría CLPT.

Para el desarrollo del trabajo, los cálculos descritos se implementan en un fichero *Mathematica* que tiene como *input* las propiedades de la lámina y la secuencia de apilamiento y

como *output* los términos de la matriz que aparecen en la Ec. (2.9), tal y como se esquematiza en la Fig. 2.5. Los resultados que aporta dicho programa han sido validados con los ejemplos numéricos que pueden encontrarse en [2].

Es importante observar que si el orden del apilamiento se modifica la matriz  $\mathbf{A}$  no se ve afectada, mientras que  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  sí cambian. Esto puede resultar importante en el diseño ya constituye un opción para optimizar el laminado sin aumentar el peso. En general las deformaciones y las curvaturas serán los valores que se desconozcan, para calcularlos a partir de las cargas aplicadas basta con invertir la relación mostrada en la Ec. (2.9).

Para un laminado simétrico  $B_{ij} = 0$ . Además, para un laminado formado por láminas ortótropas, simétrico y equilibrado los términos de acoplamiento flexión-torsión pueden despreciarse:  $D_{16}, D_{26} \ll D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$  y además se tiene que  $A_{16} = A_{26} = 0$ . En general se utilizan laminados simétricos y equilibrados, ya que de desacoplan el comportamiento de membrana del de flexión y las deformaciones de las deformaciones a cortante, por lo que los materiales compuestos que se considerarán en este trabajo serán de este tipo, para el cual las relaciones mostradas en la Ec. (2.9) se simplifican a las de la Ec. (2.10):

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

La ecuación de gobierno de placas para un laminado [2] caracterizado por la Ec. (2.10) viene dada por Ec. (2.11):

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

En el caso de un material isótropo, además de  $B_{ij} = 0$  se tienen las relaciones mostradas en la Ec. (2.12):

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} = A; & A_{12} &= \nu A; & A_{16} = A_{26} &= 0; & A_{66} &= \frac{1 - \nu}{2} A \\ D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = D; & D_{12} &= \nu D; & D_{16} = D_{26} &= 0; & D_{66} &= \frac{1 - \nu}{2} D \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como puede verse en la Ec. (2.12) se cumple que  $D_{11} = D_{12} + 2D_{66} = D_{22} = D$  y por tanto la Ec. (2.11) se convierte en la Ec. (2.3) para un material isótropo.

Por último se explican algunas abreviaciones sobre secuencias de apilamiento a través de ejemplos:

$$\begin{aligned} [30/40/50]_s &= [30/40/50/50/40/30] \\ [0/90]_4 &= [0/90/0/90/0/90/0/90] \end{aligned} \tag{2.13}$$

### 2.3. Condiciones de contorno y funciones de prueba

Las condiciones de contorno modelan el tipo de sujeción al que está sometida la placa. Se trata de idealizaciones, en la realidad es difícil que haya articulaciones o empotramientos puros. Su correcta asignación resultará imprescindible a la hora de resolver el problema en elementos finitos y de obtener resultados que se acerquen a la realidad.

Para entender el sentido físico, larguerillos de sección abierta (con baja rigidez a torsión) se modelan como articulaciones, mientras que larguerillos de sección cerrada (con elevada rigidez a torsión) se modelan como un empotramiento (Fig. 2.6).

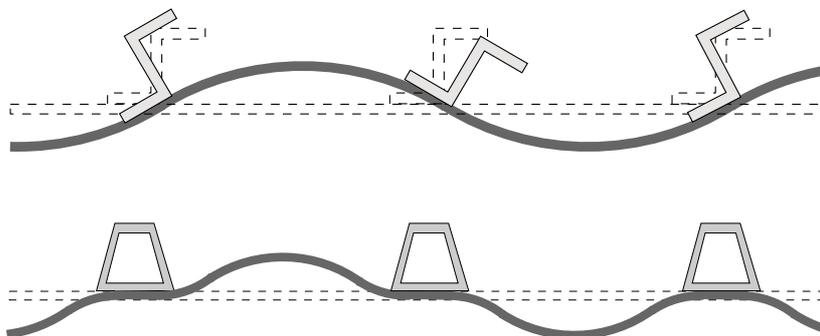


Figura 2.6: Condición de contorno según el tipo de larguerillo. Sección abierta  $\equiv$  articulación (arriba) y sección cerrada  $\equiv$  empotramiento (abajo).

Las condiciones de contorno (C.C.) serán de dos tipos: geométricas, relacionadas con la cinemática del borde, o de fuerza, relacionadas con las acciones (fuerzas y momentos). Las más habituales son: articulación (ss: *simply supported*), empotramiento (c: *clamped*) y lado libre (f: *free*). En la Tabla 2.1 se resumen los aspectos fundamentales de las tres, aunque a lo largo de este trabajo se trabajará fundamentalmente con articulaciones y empotramientos.

En *Abaqus*<sup>®</sup>, los desplazamientos en  $x, y, z$  se denominan  $U1, U2, U3$  y los giros en los respectivos ejes  $UR1, UR2, UR3$ . Para análisis del inicio de pandeo, las articulaciones se modelarán imponiendo  $U3 = 0$  en el borde junto con  $UR3 = 0$ , ya que la articulación siempre es continua a lo largo del borde. Los empotramientos serán modelados imponiendo además que el giro en la dirección perpendicular al borde ( $UR1$  ó  $UR2$  según el caso) sea también nulo. Las condiciones de contorno para análisis a post-pandeo se detallarán más adelante, ya que

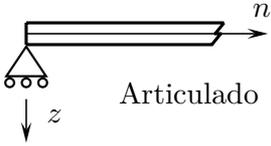
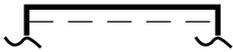
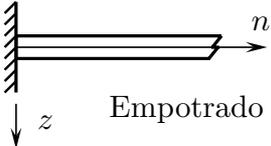
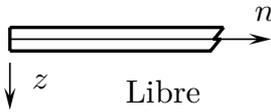
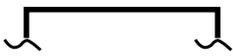
Tipo de Soporte	C.C. Geométrica	C.C. Fuerza	Representación
 Articulado	$w = 0$	$M_n = 0$	
 Empotrado	$w = 0 ; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	—	
 Libre	—	$Q_n = M_n = M_{nt} = 0$	

Tabla 2.1: Aspectos fundamentales sobre las condiciones de contorno ideales.  $Q$  designa la resultante cortante,  $M$  los momentos,  $n$  la dirección normal al borde y  $t$  la tangencial.

su asignación debe ser más minuciosa.

De forma más general, las sujeciones pueden ser de tipo elástico, modelándose a través de muelles tanto extensionales como torsionales. De esta manera, se pueden obtener resultados que constituyen un caso intermedio entre una articulación (con rigidez a torsión nula) y un empotramiento (con rigidez a torsión infinita). La rigidez de dichos muelles puede provenir de una modelización de la estructura, por ejemplo de la rigidez a torsión del larguerillo que constituye el borde, aunque su correcta determinación para obtener resultados realistas no es sencilla.

Finalmente, cabe mencionar que las ecuaciones de gobierno de placas Ecs. (2.3) y (2.11) son ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden. Por ello, es habitual utilizar “funciones de prueba” para  $w$ , que satisfagan las condiciones de contorno, cuya forma habitual es la que se presenta en la Ec. (2.14):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot X_m(x) \cdot Y_n(y) \quad (2.14)$$

La solución se compone así de la superposición de distintas funciones, compatibles con las condiciones de contorno, cuya amplitud depende de los coeficientes  $w_{mn}$ . La resolución del problema consistirá en la obtención de estos coeficientes, ya sea por resolución directa de la ecuación diferencial o por métodos energéticos.

# 3

## *Inicio de pandeo*

En este capítulo se estudiará el inicio de pandeo en placas a cortante, tanto analíticamente mediante el método de Ritz como por MEF a través de *Abaqus*<sup>®</sup>. Se obtendrá la evolución de la carga crítica con la relación de aspecto de la placa y los modos de pandeo, que serán necesarios posteriormente para analizar el post-pandeo. Se estudiarán placas articuladas y empotradas, tanto de aluminio como de material compuesto. Además, los resultados se contrastarán con los del documento ESDU 71005 [7] (*Engineering Sciences Data Unit*). Finalmente, se analizarán placas de elevada relación de aspecto.

### 3.1. Métodos de solución: Ritz y MEF

Para obtener soluciones analíticas se puede utilizar el llamado método de equilibrio [1], que consiste en introducir funciones de prueba y resolver la ecuación diferencial de gobierno Ec. (2.3). Dicho método permite obtener una solución cerrada para una placa articulada a compresión pero dificulta resolver casos más complejos con otras cargas y condiciones de contorno. Los métodos energéticos son preferibles para estos casos y de entre ellos en este trabajo se empleará el método de Ritz.

El método de Ritz se basa en la minimización de la energía potencial  $\Pi$  del sistema:

$$\Pi = U - W \quad (3.1)$$

donde la  $U$  es la energía interna de deformación debida a flexión y  $W$  el trabajo producido por las cargas externas aplicadas. La expresión de  $U$  para un material isótropo [1] en función de  $w$  es la siguiente:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy dx \quad (3.2)$$

El segundo término de la integral se corresponde con el determinante del tensor curvatura (ver Ec. (2.2)) y se denomina curvatura gaussiana. Para placas en las que todos los bordes se mantienen rectos en el plano  $x - y$  (articulados o empotrados) este término integra a cero [1] y por tanto la expresión de la energía se reduce a:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dy dx \quad (3.3)$$

En el caso de un material compuesto [2] de los que se estudian en este trabajo (ver Sección 2.2), no se puede asegurar que el término asociado a la curvatura gaussiana sea nulo, debido a la diferencia de coeficientes elásticos a flexión. La expresión de la energía para estos materiales es:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx \quad (3.4)$$

El trabajo de las fuerzas externas [2] aplicadas en el plano se calcula a partir de la Ec. (3.5) independientemente del tipo de material:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx \quad (3.5)$$

En el caso de una placa sometida únicamente a sollicitación cortante su expresión se simplifica a:

$$W = N_{xy} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dy dx \quad (3.6)$$

La deflexión  $w$  Ec. (2.14) viene dada por la función de prueba elegida según las condiciones de contorno. Por tanto, la energía  $U$  depende únicamente de las condiciones de contorno y no de las cargas aplicadas. Aplicando el principio de mínima energía potencial se obtiene un sistema de  $m \times n$  ecuaciones:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_{ij}} = 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

donde  $w_{ij}$  son los coeficientes de los que depende  $w$ . Dicho sistema puede ser expresado de forma matricial como:

$$\mathbf{M}_{n \times m} (N_{cr}) \cdot \mathbf{w}_{n \cdot m \times 1} = 0 \quad (3.8)$$

donde  $N_{cr}$ , la carga crítica de pandeo, es la incógnita a determinar y las cargas aplicadas se han expresado en función de ésta. Se trata de un problema de autovalores, la carga que determina el inicio de la inestabilidad  $N_{cr}$  es aquella que anula el determinante de la matriz  $\mathbf{M}$ . Los autovalores  $N_{cr}$  tendrán asociados autovectores, que definen los distintos modos de pandeo. La carga crítica de pandeo es el menor de todos los autovalores.

Esta  $N_{cr}$  se presentará adimensionalizada como un factor  $K$ , que para materiales isótropos se calculará a partir de la Ec. (3.9). Se estudiará su evolución con la relación de aspecto de la placa  $r = a/b$  para 2, 4, 9 y 16 términos.

$$K = \frac{b^2 N_{cr}}{\pi^2 D} \quad (3.9)$$

Para materiales compuestos este factor se denominará  $\mathcal{K}$  y en este trabajo se calculará como:

$$\mathcal{K} = \frac{b^2 N_{cr}}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (3.10)$$

Es importante resaltar que en la aplicación de este método no es necesario cumplir las condiciones de contorno de fuerza de manera exacta, sino que éstas se cumplen de manera promediada. A la hora de elegir las funciones de prueba se deberá asegurar que éstas cumplen las condiciones de contorno geométricas únicamente. El interés de estas adimensionalizaciones es que permiten obtener resultados generales de modo que a cualquier placa con una misma relación de aspecto le corresponde un mismo valor de  $K$ . La carga crítica será entonces inversamente proporcional a  $b^2$ , es decir, en dos placas con un mismo valor de  $r$  la de mayor tamaño pandeará ante una carga menor, resultado que no parece intuitivo a priori.

Por otro lado, para materiales isotrópicos los gráficos  $K - r$  son válidos para cualquiera de estos materiales, ver por ejemplo la Ec. (3.18). Para materiales compuestos esto no es así y los resultados sólo serán válidos para el laminado estudiado ya que el factor  $\mathcal{K}$  no será función únicamente de  $r$  sino también de las propiedades materiales, ver por ejemplo la Ec. (3.34).

En cuanto a la metodología seguida en MEF, los diversos análisis necesarios se llevan a cabo gracias a una conexión *Abaqus*<sup>®</sup> - *Matlab*<sup>®</sup>. En primer lugar se realiza una simulación en *Abaqus*<sup>®</sup> con una placa de unas ciertas dimensiones y posteriormente, a través de un *script* en *Matlab*<sup>®</sup> se modifican los archivos *input* de *Abaqus*<sup>®</sup> para establecer el conjunto de valores de  $r$  que se quiere analizar, y se lanzan las diferentes ejecuciones.

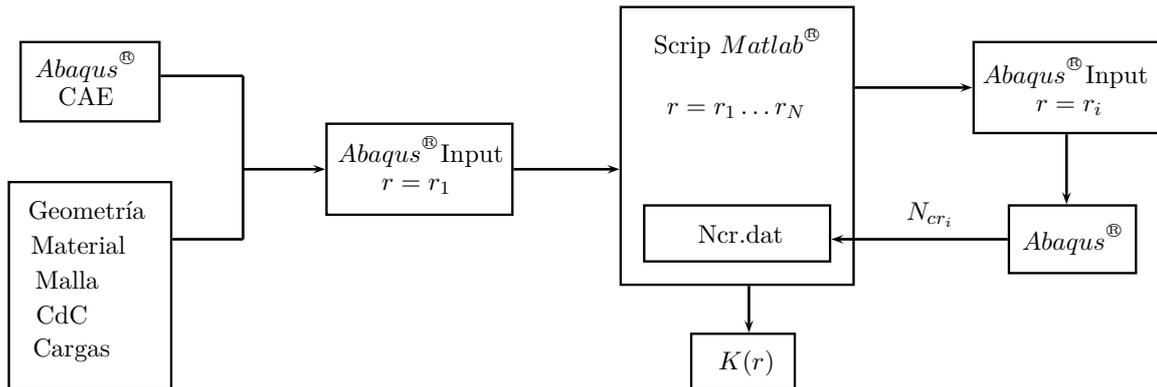


Figura 3.1: Diagrama de bloques de la conexión *Abaqus*<sup>®</sup> - *Matlab*<sup>®</sup> para llevar a cabo las distintas simulaciones necesarias.

### 3.2. Placa articulada bajo sollicitación cortante

La Fig. 3.2 esquematiza el caso de estudio:

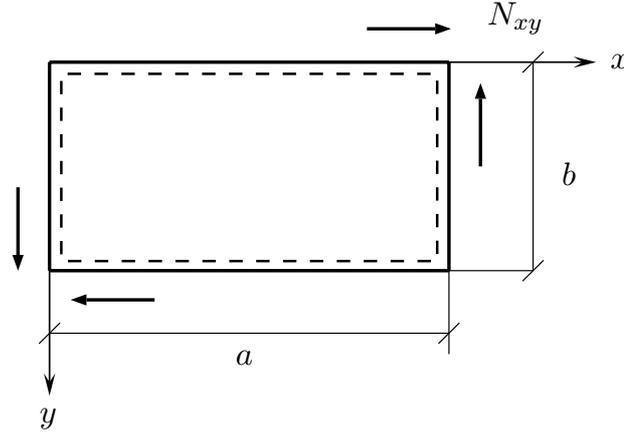


Figura 3.2: Placa articulada bajo sollicitación cortante.

#### 3.2.1. Evolución de la carga crítica con la relación de aspecto

Dado que todos los bordes son articulados se utiliza como función de prueba la Ec. (3.11) [1]. En la práctica no es posible trabajar con infinitos términos, se decide trabajar con 4, 9 y 16.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.11)$$

La energía  $U$  se calcula a partir de la Ec. (3.3). Sustituyendo la expresión de  $w$  e integrando se llega a:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]^2 dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \\ m_1 \neq m_2}} \psi \sin\left(\frac{m_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dx dy \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como se puede observar en la primera expresión, aparece un sumatorio elevado al cuadrado. Esto podría complicar notablemente el resultados; sin embargo, al operar aparecen integrales como las de la Ec. (3.13) función de cuatro contadores que pueden ser iguales o diferentes.

$$\int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{m_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dx dy \quad (3.13)$$

Se puede demostrar que estas integrales son nulas excepto cuando tanto  $m_1 = m_2$  como  $n_1 = n_2$ . Si se reescribe la energía como en la segunda expresión de la Ec. (3.12), donde  $\psi = \psi(m_1, n_1, m_2, n_2)$ , el segundo sumando se anula. La energía admite por tanto una fórmula sencilla en forma de suma infinita que se muestra en la Ec. (3.14) y que es independiente de las cargas aplicadas, pero no de las condiciones de contorno.

$$U = \frac{D \pi^4 a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^2 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2 \quad (3.14)$$

El trabajo  $W$  se calcula a partir de la Ec. (3.6) y dado que aparecen términos cruzados que no se anulan al integrar no es posible obtener una expresión genérica sencilla, sino que se debe integrar el sumatorio con un cierto número de términos. Su expresión ahora sí depende de las cargas y por tanto únicamente es válida para este caso de estudio.

A continuación se detalla el proceso de cálculo de este caso con 4 términos, siendo el proceso a seguir con 9 y 16 análogo. La expresión del trabajo es ahora:

$$W = \frac{32 \pi^2 D K}{9 b^2} (-w_{12} w_{21} + w_{11} w_{22}) \quad (3.15)$$

En la Ec. (3.16) se muestra la energía potencial expresada en función de la carga crítica adimensional  $K$  y de la relación de aspecto  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D \pi^2} \frac{\Delta \Pi}{b^2} = & \frac{\pi^2 (1+r^2)^2}{4 r^3} w_{11}^2 + \frac{\pi^2 (4+r^2)^2}{4 r^3} w_{12}^2 + \frac{32 K}{9} w_{12} w_{21} - \\ & - \frac{32 K}{9} w_{11} w_{22} + \frac{(\pi + 4 \pi r^2)^2}{4 r^3} w_{21}^2 + \frac{4 \pi^2 (1+r^2)^2}{r^3} w_{22}^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir de la minimización de energía según se detalla en la Ec. (3.7) se construye el sistema de ecuaciones:

---

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi^2 (1+r^2)^2}{4r^3} & 0 & 0 & -\frac{32K}{9} \\ & \frac{\pi^2 (4+r^2)^2}{4r^3} & \frac{32K}{9} & 0 \\ & & \frac{\pi^2 (1+4r^2)^2}{4r^3} & 0 \\ -S- & & & \frac{4\pi^2 (1+r^2)^2}{r^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{21} \\ w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

como se puede apreciar se trata de un problema de autovalores. Igualando el determinante a cero se obtienen las expresiones de la carga crítica:

$$K^I = \pm \frac{9\pi^2 (1+r^2)^2}{32r^3}; \quad K^{II} = \pm \frac{9\pi^2 (4+17r^2+4r^4)}{128r^3} \quad (3.18)$$

Las cargas críticas se obtienen por parejas de signo cambiado ya que al cambiar el signo de la sollicitación el problema es el mismo desde el punto de vista de la inestabilidad. A medida que se utilizan más términos se obtienen más expresiones de cargas críticas, para cada valor de  $r$  se debe tomar su valor mínimo. Para el caso de 4 términos se cumple siempre que  $K^I < K^{II}$ , de modo que el factor de pandeo para todo  $r$  es  $K = K^I$ .

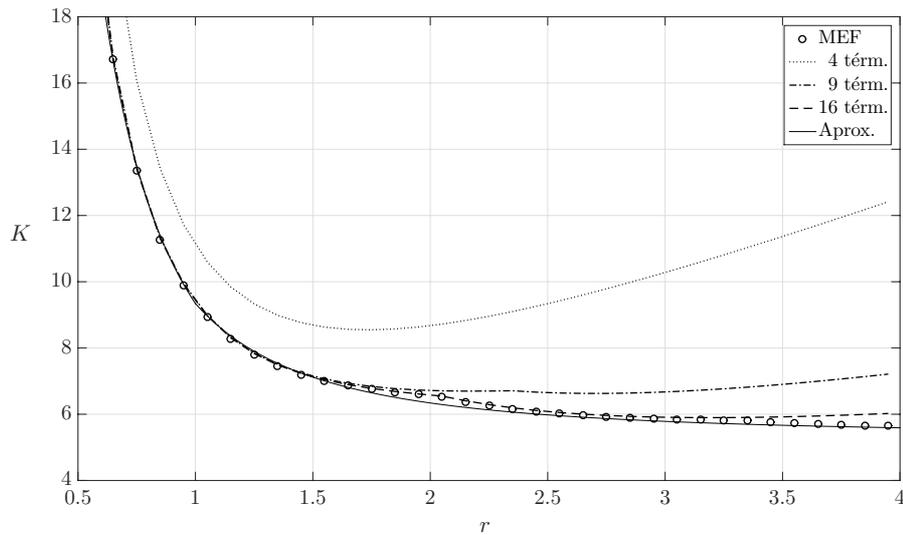


Figura 3.3: Evolución de la carga crítica de pandeo adimensional con la relación de aspecto en placa isótropa articulada sometida a cortante.

En la Fig. 3.3 se muestra la evolución del factor  $K$  con la relación de aspecto  $r$ . Como se puede observar, la solución analítica con 4 términos se aleja mucho de la obtenida mediante MEF; sin embargo, las solución con 9 términos y en especial la de 16 aportan resultados muy similares. Con esta última solución, el error es menor que el 1% para  $r < 3$  y 6% para  $r = 4$ . Se puede apreciar que a medida que aumenta  $r$  se necesitan más términos en la solución analítica para obtener resultados satisfactorios. Por otro lado, a medida que la placa es más esbelta padea bajo cargas menores. Existen ciertos cambios acusados en la evolución de  $K$  que corresponden con cambios de modo de pando.

En la referencia [6] se encuentra una expresión de  $K$  general que se muestra en la Ec. (3.19). Según se explica en [6], se trata de una fórmula que aproxima los mejores resultados teóricos de otros autores para todo el rango de  $r$ .

$$K = \begin{cases} 4.00 + \frac{5.34}{r^2} & r \leq 1 \\ 5.34 + \frac{5.34}{r^2} & r \geq 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

En la Fig. 3.3 se añade la curva correspondiente a este modelo, y como se puede comprobar aporta resultados muy similares a los obtenidos con MEF. Su utilidad es evidente, ya que es una ecuación muy sencilla y que además es única, es decir, no requiere calcular el valor mínimo entre diversas expresiones de  $K$  para cada  $r$ .

Es importante destacar que cuando la condición de contorno es la misma en todos los bordes y la placa está sometida a cortante, la carga crítica en dos placas del mismo tamaño  $a b$  es la misma para una relación  $r$  que para una  $1/r$ . Este aspecto no aparece reflejado en la Fig. 3.3 ya que lo que se representa no es  $N_{cr}$  sino el factor adimensional  $K$ , que es proporcional a  $b^2$ . Para un valor fijo de  $a$  el valor de  $b$  aumenta al disminuir  $r$  y por tanto  $K$  aumenta debido a la adimensionalización, no debido a que  $N_{cr}$  aumente.

### 3.2.2. Modos de pando

En el desarrollo matemático anterior se ha podido comprobar que el inicio de pando es un problema de autovalores: se llega a un sistema de ecuaciones homogéneo cuya solución trivial es siempre  $w_{ij} = 0$ , lo que corresponde con una situación estable en la que las cargas en el plano no producen desplazamientos  $w$  fuera del mismo. Los valores de la carga  $N_{cr}$  que anulan el determinante (autovalores) marcan el punto de inicio de la inestabilidad. Al sustituir sus expresiones en el sistema de ecuaciones, éste pasa a ser indeterminado de modo que no existirán soluciones únicas para  $w_{ij}$  sino sub-espacios vectoriales (modos / autovectores) proporcionales a una constante arbitraria, que se denomina  $\eta$ . En la Ec. (3.20) se muestran las expresiones de estos modos obtenidos con Ritz utilizando 4 términos.

$$\mathbf{w}_1 = \eta \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \eta \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/4 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \eta \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ f(r) \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \eta \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -f(r) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

$$f(r) = \frac{4 + r^2}{1 + 4r^2}$$

Se puede observar que los dos primeros modos no dependen de  $r$  mientras que los modos 3 y 4 sí lo hacen. Es evidente que los modos son simplemente un patrón de deformación y por ello no se incluyen en las figuras valores numéricos de  $w$ . Para estudiar la deformada habría que realizar un análisis de post-pandeo. Las funciones  $w(x, y)$  asociadas a los modos 1 y 3 se muestran en las Ecs. (3.21) y en la Fig. 3.4 se representan gráficamente.

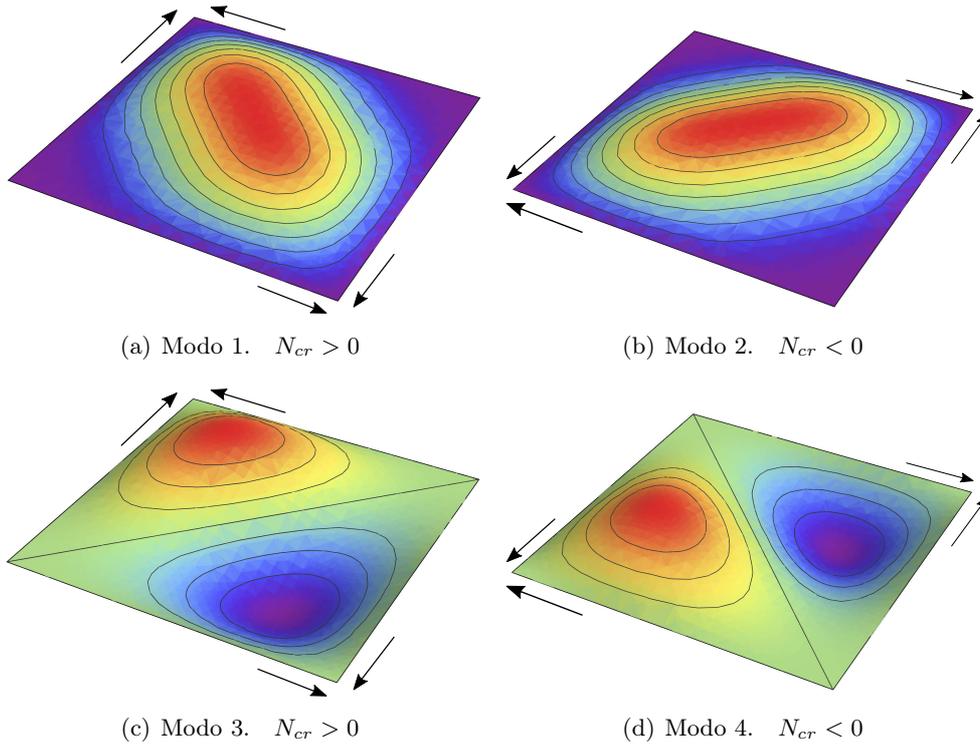


Figura 3.4: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada isótropa bajo sollicitación cortante obtenidos mediante el método de Ritz con 4 términos en *Mathematica*<sup>®</sup>.

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \eta \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \right] \\ w_3(x, y) &= \eta \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + f(r) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como se puede apreciar, de igual manera que las cargas críticas se presentaban por parejas de signo cambiado, Ec. (3.18), los modos se presentan siempre en diagonal y por parejas con un mismo patrón de deformación pero girado  $90^\circ$ , según  $N_{cr}$  sea positivo o negativo.

A continuación se comparan los modos de pandeo de una placa cuadrada mostrando únicamente un modo de cada pareja. En la Fig. 3.5 se muestran los modos de pandeo obtenidos por Ritz con 16 términos y en la Fig. 3.6 los modos obtenidos por MEF para  $N_{cr} > 0$ .

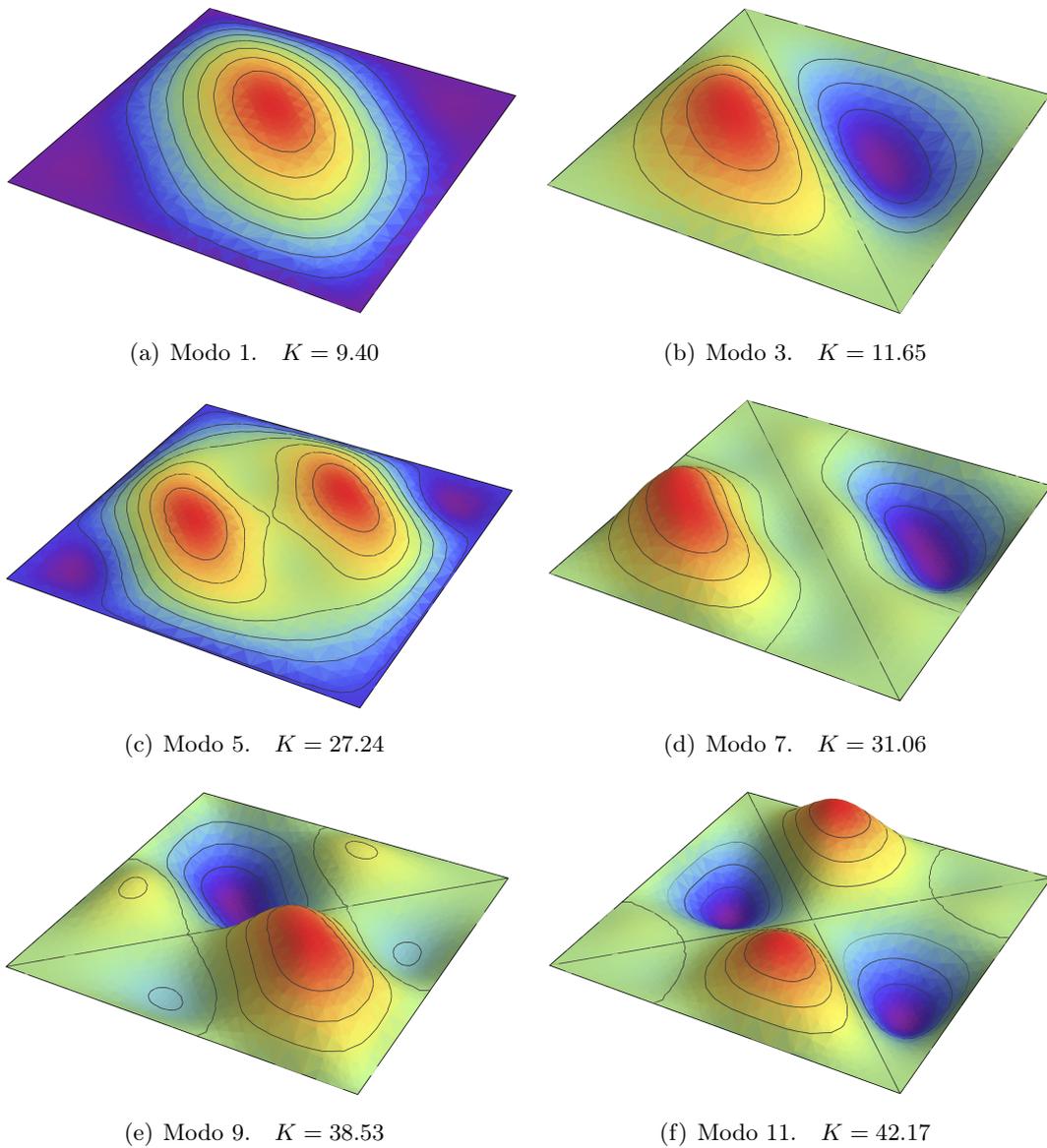


Figura 3.5: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada isótropa bajo sollicitación cortante obtenidos mediante el método de Ritz con 16 términos en *Mathematica*<sup>®</sup>.

Como se puede observar, con 4 términos (Fig. 3.4) ya se logran buenos resultados de los cuatro primeros modos y comparando los modos obtenidos con 16 términos y MEF se comprueba que ambos métodos proporcionan resultados muy similares.

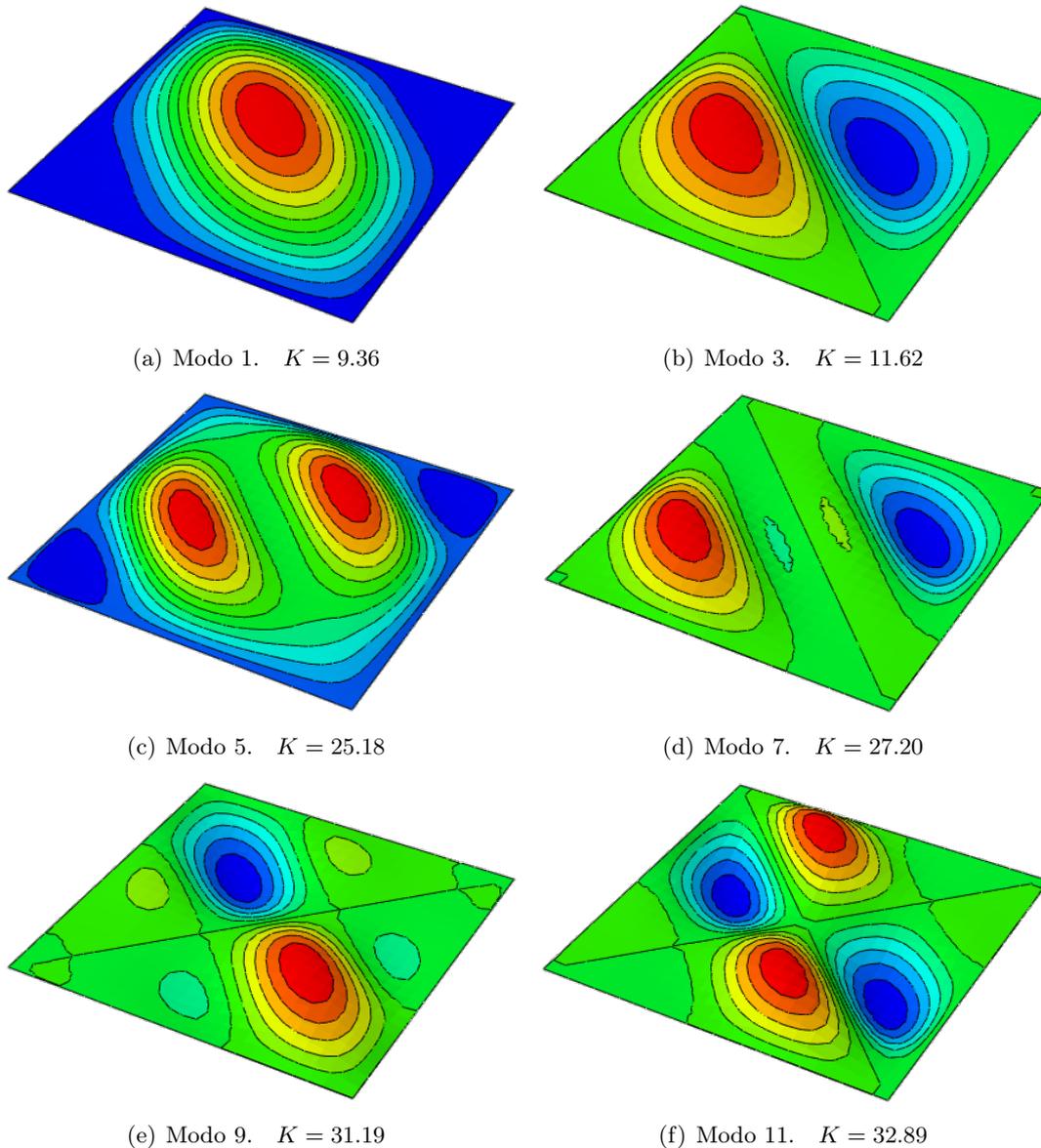


Figura 3.6: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada isótropa bajo sollicitación cortante obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

La obtención de los modos de pandeo es muy importante ya que servirán como punto de partida para de estudiar el post-pandeo en MEF, en general es suficiente obtener las cuatro primeras parejas.

Junto a cada modo se indica el factor de pandeo asociado. Comparando los valores de ambos métodos se puede apreciar que la precisión es menor a medida que los modos son más altos y que el resultado es muy similar hasta el modo 7. Además, se observa que algunos modos tiene valores de  $K$  similares, de manera que al variar  $r$  puede tener lugar un cambio en su orden.

### 3.3. Placa empotrada bajo sollicitación cortante

La Fig. 3.7 esquematiza el siguiente caso de estudio:

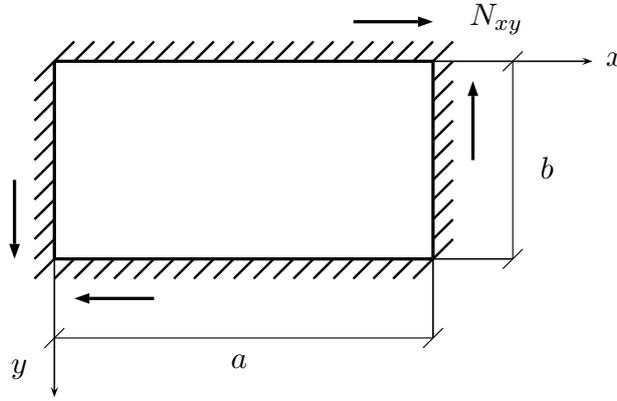


Figura 3.7: Placa empotrada bajo sollicitación cortante.

Para placas empotradas trabajando a flexión, es habitual [1] utilizar la función de prueba que se muestra en la Ec. (3.22):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \right] \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \right] \quad (3.22)$$

Sin embargo esta función no es válida en este caso, ya que la integral del trabajo Ec. (3.6) se anula. Esto es debido a que al operar aparecen siempre términos anti-simétricos del tipo de la izquierda en la Ec. (3.23) multiplicando a términos simétricos del tipo de la derecha, de modo que integran siempre a cero.

$$\sin\left(\frac{m_1\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi y}{b}\right) ; \quad \sin\left(\frac{m_2\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)^2 \quad (3.23)$$

Para clarificar este aspecto se utilizará como ejemplo el término asociado a  $w_{11}^2$ , que se muestra en la Ec. (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2 w_{11}^2}{ab} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = \\ = \frac{32\pi^2 w_{11}^2}{ab} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

El producto de senos al cuadrado es el término simétrico (Fig.3.8 izquierda), el término con argumentos  $2\pi x$ ,  $2\pi y$  es el término anti-simétrico (Fig.3.8 centro) y el producto de ambos es finalmente anti-simétrico (Fig.3.8 derecha).

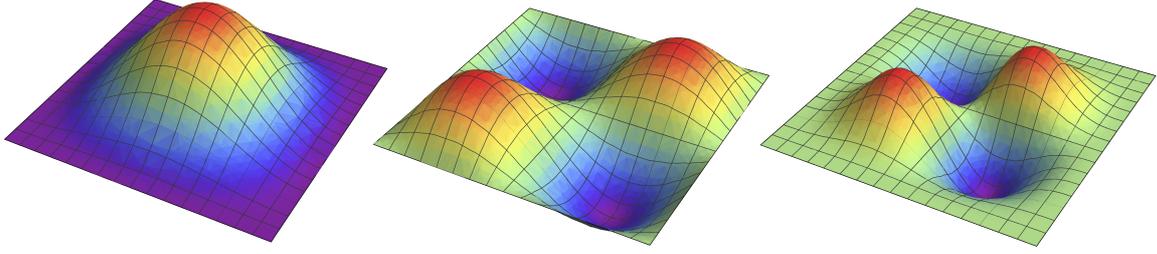


Figura 3.8: Término simétrico (izquierda), anti-simétrico (centro) y producto de ambos (derecha) que aparecen en el integrando del trabajo al emplear la función de prueba de la Ec. (3.22).

En lugar de la Ec. (3.22) es posible utilizar la función de prueba mostrada en la Ec. (3.25) [1].

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \quad (3.25)$$

Para ambas funciones se cumplen las condiciones de contorno (ver Tabla 2.1). La manera de proceder es análoga a la que se ha detallado en la sección anterior para placa articulada. Sustituyendo la Ec. (3.25) en la Ec. (3.3) se llega a:

$$U = \frac{\pi^4 D}{64 a^3 b^3} \left[ 8 (3 a^4 + 2 a^2 b^2 + 3 b^4) w_{11}^2 + (16 a^4 + 40 a^2 b + 123 b^4) w_{12}^2 + \right. \\ \left. + (123 a^4 + 40 a^2 b^2 + 16 b^4) w_{21}^2 + 2 (41 a^4 + 50 a^2 b^2 + 41 b^4) w_{22}^2 \right] \quad (3.26)$$

En este caso no es posible hallar una expresión general para la energía en forma de sumatorio como en la Ec. (3.14) sino que se debe de utilizar un cierto número de términos de  $w$  e integrarla. Esta expresión será válida para cualquier placa empotrada, independientemente de las cargas aplicadas siempre que se utilice como función de forma la Ec. (3.25).

La expresión del trabajo es ahora:

$$W = \frac{512 \pi^2 D K (-w_{12} w_{21} + w_{11} w_{22})}{225 b^2} \quad (3.27)$$

Aplicando la minimización de energía potencial y resolviendo el sistema de autovalores se llega a la siguiente expresión para 4 términos:

$$K^I = \pm \frac{225 \pi^2 \sqrt{123 + 232 r^2 + 346 r^4 + 232 r^6 + 123 r^8}}{4096 r^3} \quad (3.28)$$

$$K^{II} = \pm \frac{225 \pi^2 \sqrt{1968 + 5560 r^2 + 16985 r^4 + 5560 r^6 + 1968 r^8}}{16384 r^3}$$

En la Fig. 3.9 se representa el gráfico  $K - r$  para placa empotrada comparando de nuevos los resultados de Ritz y MEF. Se puede observar que de nuevo los resultados analíticos son satisfactorios y que la convergencia de resultados es análoga al caso articulado. La carga crítica es menor a medida que la placa es más esbelta y sus valores son siempre mayores para placa empotrada que para articulada.

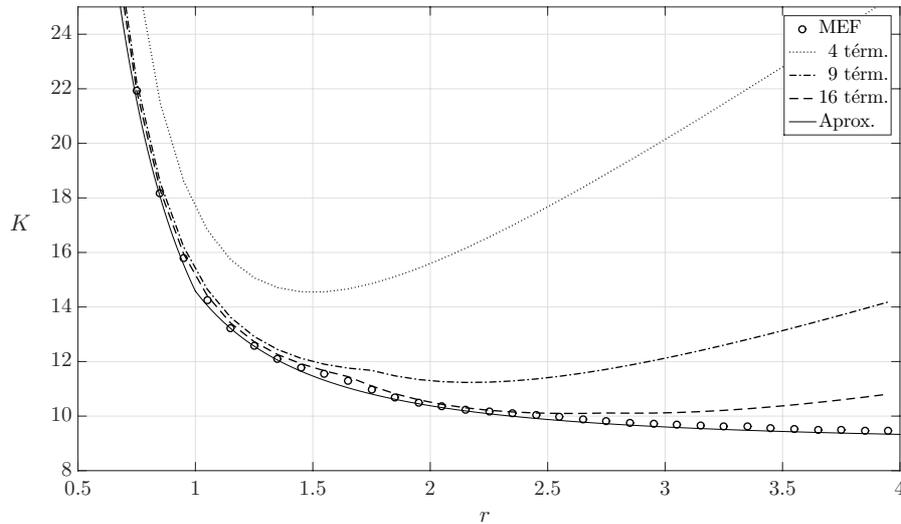


Figura 3.9: Evolución de la carga crítica de pandeo adimensional con la relación de aspecto en placa isótropa empotrada sometida a cortante.

Además, los resultados se comparan con el modelo que se define en [6] para placas empotradas, Ec. (3.29), que de nuevo coincide con mucha precisión con la solución de MEF.

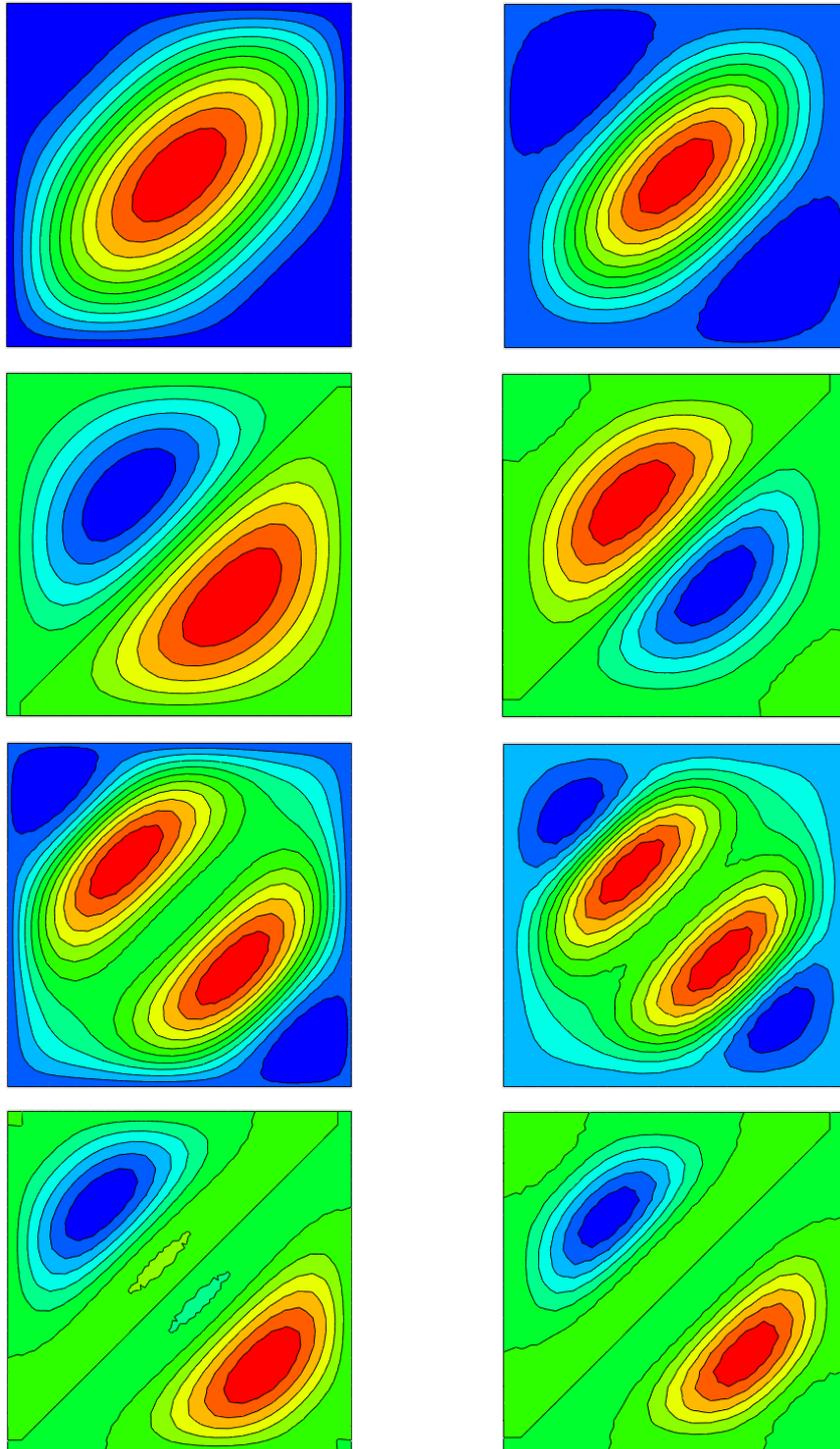


Figura 3.10: Comparación de los modos 1, 3, 5 y 7 en placa cuadrada articulada (columna izquierda) y empotrada (derecha) obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

$$K = \begin{cases} 5.6 + \frac{8.98}{r^2} & r \leq 1 \\ 8.98 + \frac{5.6}{r^2} & r \geq 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Por último se estudian los modos de pandeo. La expresión de los modos obtenidos por Ritz con 4 términos se detalla en la Ec. (3.30):

$$\mathbf{w}_1 = \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ g_1(r) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -g_1(r) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_2(r) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -g_2(r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1(r) = 2 \sqrt{\frac{3 + 2r^2 + 3r^4}{41 + 50r^2 + 41r^4}}; \quad g_2(r) = \sqrt{\frac{123 + 40r^2 + 16r^4}{16 + 40r^2 + 123r^4}} \quad (3.30)$$

En este caso todos dependen de  $r$  y al igual que en placa articulada, los modos que se obtienen con MEF son muy similares a los obtenidos mediante Ritz con 16 términos. Se comparan entonces los modos obtenidos solo con MEF para placa articulada y para empotrada para apreciar la influencia de las condiciones de contorno. Esta comparación se muestra en la Fig. 3.10, donde se observa que los modos son similares aunque con algunas diferencias, especialmente cerca de los bordes. El modo que más cambia es el tercero, ya que la onda se invierte.

### 3.4. Comparación con el documento ESDU 71005

ESDU [23] es una organización de asesoramiento de ingeniería con sede en el Reino Unido. Se fundó como el *Technical Department of the Royal Aeronautical Society* (RAeS) en 1940 para responder a la necesidad crítica de disponer de información fiable, precisa y fácilmente aplicable al diseño de aeronaves. La sociedad reunió a ingenieros de múltiples industrias para compartir y presentar su conocimiento en un formato accesible y de autoridad. Se convirtió en ESDU en 1964 y hoy en día continúa siendo una fuente de información de gran autoridad para el diseño en ingeniería, con una amplia gama de documentos, la mayoría en el campo de la aerodinámica y el diseño estructural que numerosas empresas utilizan.

En las secciones anteriores se ha obtenido la evolución de la carga crítica con la relación de aspecto de placas completamente articuladas y empotradas. Como se podía anticipar, se ha comprobado que la placa empotrada pandea bajo cargas mayores. Sin embargo, entre ambos casos existen diversas combinaciones de condiciones de contorno cuyos resultados proporcionan valores de carga crítica intermedios. En la Fig. 3.12 se muestra el gráfico del documento

ESDU 71005 [7] que recoge varios de estos casos.

Aunque las explicaciones de estos documentos son muy breves, del análisis de estos gráficos pueden extraerse numerosas conclusiones. En primer lugar se puede apreciar que efectivamente los casos estudiados anteriormente corresponden con los dos casos más extremos, i.e. los que proporcionan valores de carga crítica mínimos y máximos.

Por otro lado, y tomando como referencia los esquemas que aparecen en el gráfico de ESDU, cuando la placa está empotrada en los lados verticales su comportamiento se asemeja al totalmente empotrado cuando ésta es muy esbelta, ya que los lados articulados son muy cortos y su influencia pasa a ser despreciable frente a la de los laterales empotrados, que son muy largos.

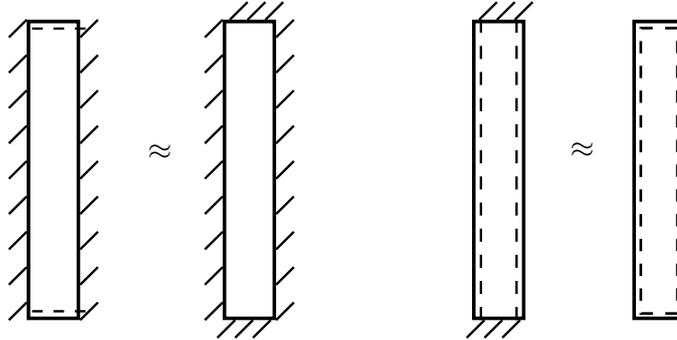


Figura 3.11: Análisis del comportamiento ante diversas condiciones de contorno, placa muy esbelta: lado más largo domina en comportamiento y apoyo de lado corto pierde influencia.

Análogamente, cuando la placa está empotrada en los lados horizontales y articulada en los verticales su comportamiento a medida que aumenta su esbeltez tiende a ser el de la placa totalmente articulada. Esta explicación se esquematiza en la Fig. 3.11. Finalmente, cuando la placa es cuadrada, el resultado que se obtiene es el mismo en ambos casos.

La definición de la carga crítica adimensional del documento ESDU es distinta a la de la Ec. (3.9). Con la notación empleada aquí, su definición es la mostrada en la Ec. (3.31). La notación de los lados  $a$ ,  $b$  también está cambiada.

$$K' = \frac{N_{cr}/h}{E(h/b)^2} \quad (3.31)$$

En la Fig. 3.13 se comparan los datos de los gráficos de la Fig. 3.12 con los resultados obtenidos por MEF utilizando esta nueva definición y estudiando un rango  $0 \leq r \leq 1$ . Nótese que el análisis captura los cambios de modo de pandeo en función de  $r$ . No existen documentos similares para materiales compuestos, por lo que en las siguientes secciones los estudios se llevarán a cabo analíticamente y con MEF.

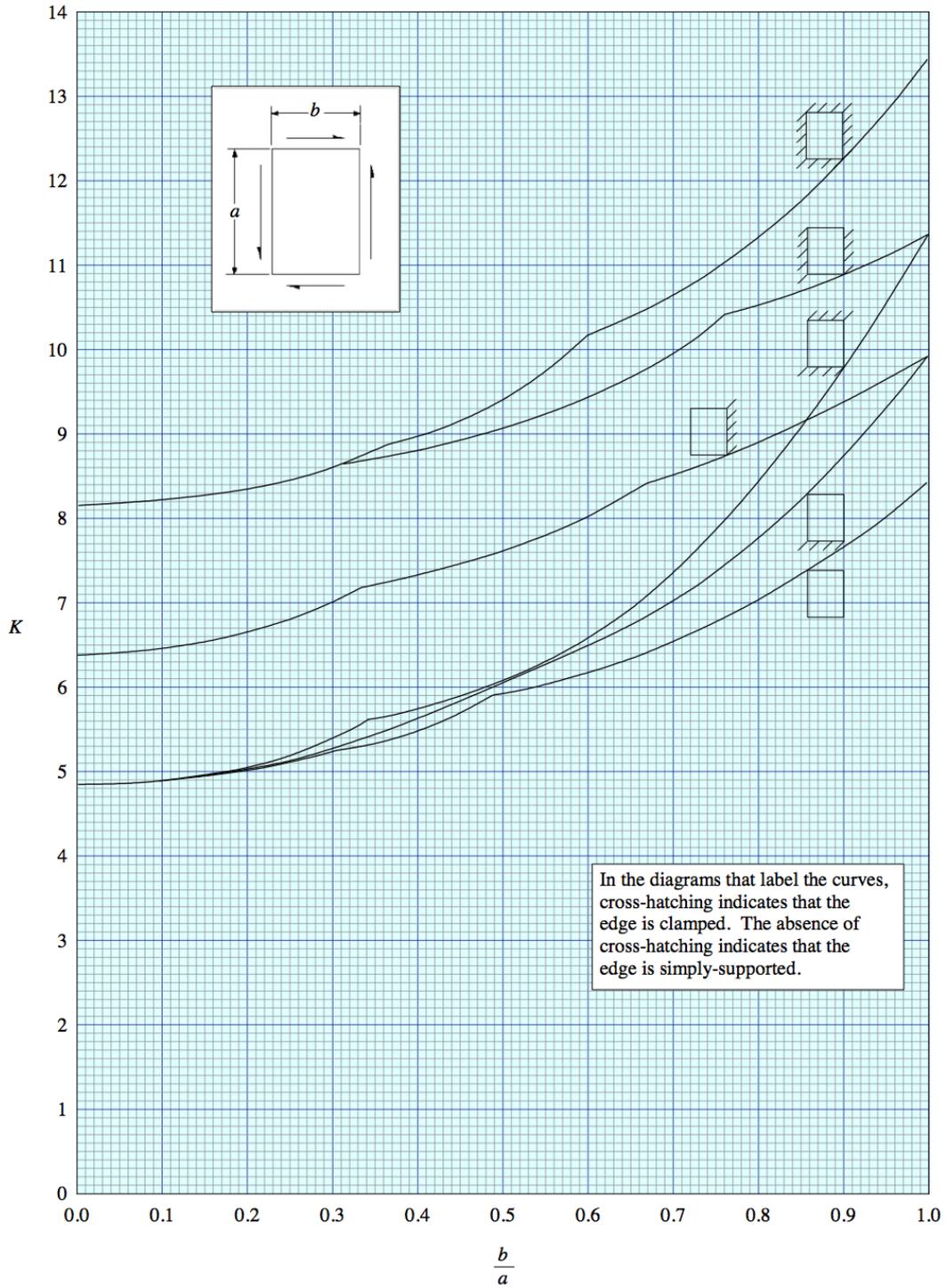


Figura 3.12: Gráfico del documento ESDU 71005 [7]. Variación de la carga crítica de pandeo con la relación de aspecto para diversas condiciones de contorno bajo sollicitación cortante.

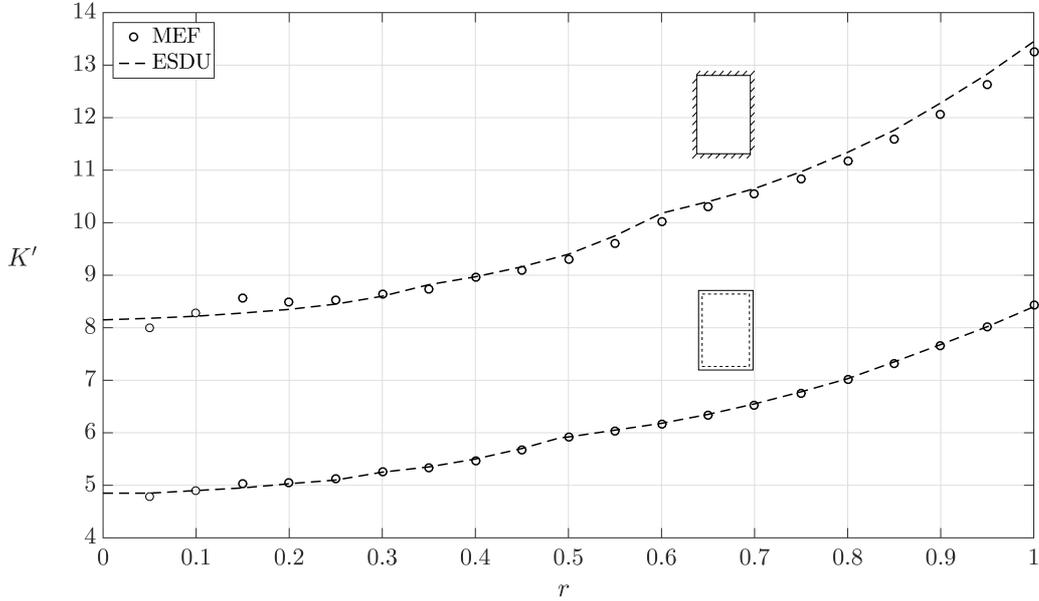


Figura 3.13: Comparación entre resultados obtenidos con MEF y del documento ESDU 71005.

### 3.5. Placas de material compuesto

Los resultados de secciones anteriores son válidos para cualquier material isótropo. Pese a que a la hora de realizar el análisis en MEF se han debido introducir como datos del material  $E$ ,  $\nu$  los resultados finales se muestran en forma adimensional y por tanto son válidos para cualquier material metálico.

AS4D/9310 Graphite/Epoxy		
$E_1$	133.86	[GPa]
$E_2, E_3$	7.706	[GPa]
$G_{12}, G_{13}$	4.306	[GPa]
$G_{23}$	2.76	[GPa]
$\nu_{12}, \nu_{13}$	0.301	
$\nu_{23}$	0.396	

Tabla 3.1: Propiedades del material compuesto utilizado en los análisis.

Sin embargo, en el análisis de placas de material compuesto sí será necesario definir las propiedades del material. Como se ha explicado en la Sección 2.2 para el desarrollo analítico se necesitarán cuatro propiedades de la lámina ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ) y la secuencia de apilamiento. Además, para el análisis por MEF se necesitarán las propiedades  $G_{23}$ ,  $\nu_{23}$ . Las propiedades de la lamina analizada se muestran en la Tabla 3.1, donde se puede observar que las relacionadas

con la dirección de las fibras (dirección 1) tienen el mismo valor. Se considerará un laminado quasi-isotrópico con secuencia de apilamiento [2]:

$$\theta = [(45/-45)_2/0_2/90_2]_s \quad (3.32)$$

con un espesor de  $h_p = 0.25$  mm de modo que el espesor total de la placa es de 4 mm. Para el desarrollo por Ritz se necesitarán las rigideces a flexión. Aplicando el desarrollo de la Sección 2.2 se obtiene:

Rigideces a flexión del laminado [Nm]					
$D_{11}$	270.70	$D_{12}$	152.93	$D_{22}$	207.29
$D_{66}$	163.46	$D_{16}$	23.78	$D_{26}$	23.78

Tabla 3.2: Rigideces del laminado utilizado en los análisis.

Como se puede apreciar, la hipótesis de la Sección 2.2 que despreciaba las rigideces  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  frente a las demás es aplicable a este caso.

### 3.5.1. Placa articulada

En el caso de la placa articulada, se procede de manera análoga a como se ha hecho en la Sección 3.2. Utilizando la Ec. 3.4 la expresión de la energía es ahora:

$$U = \frac{\pi^4}{8 a^3 b^3} \left[ \left( b^4 D_{11} + a^4 D_{22} + 2 a^2 b^2 D^* \right) w_{11}^2 + \left( 16 b^4 D_{11} + a^4 D_{22} + 8 a^2 b^2 D^* \right) w_{12}^2 + \right. \\ \left. + \left( b^4 D_{11} + 16 a^4 D_{22} + 8 a^2 b^2 D^* \right) w_{21}^2 + 16 \left( b^4 D_{11} + a^4 D_{22} + 2 a^2 b^2 D^* \right) w_{22}^2 \right] \quad (3.33)$$

donde  $D^* = (D_{12} + 2 D_{66})$ . La expresión del trabajo es la misma, ya que no depende del tipo de material sino de la carga y de la función de forma, que son idénticas en ambos casos. Aplicando minimización de energía potencial y operando con 4 términos se llega a las siguientes expresiones de carga crítica:

$$\mathcal{K}^I = \frac{9 \pi^2 [D_{11} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) r^2 + D_{22} r^4]}{32 r^3 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (3.34)$$

$$\mathcal{K}^{II} = \frac{9 \pi^2 \sqrt{[16 D_{11} + 8 (D_{12} + 2 D_{66}) r^2 + D_{22} r^4] \{ D_{11} + 8 r^2 [D_{12} + 2 (D_{66} + D_{22} r^2)] \}}}{128 r^3 \sqrt{D_{11} D_{22}}}$$

Estas expresiones coinciden con las de material isótropo, Ec. (3.18), si se utilizan las relaciones de la Ec. (2.12). En la Fig. 3.14 se muestra la evolución de la carga crítica adimensional de acuerdo con la expresión Ec. (3.10). Los resultados obtenidos por Ritz se comparan con los obtenidos mediante MEF.

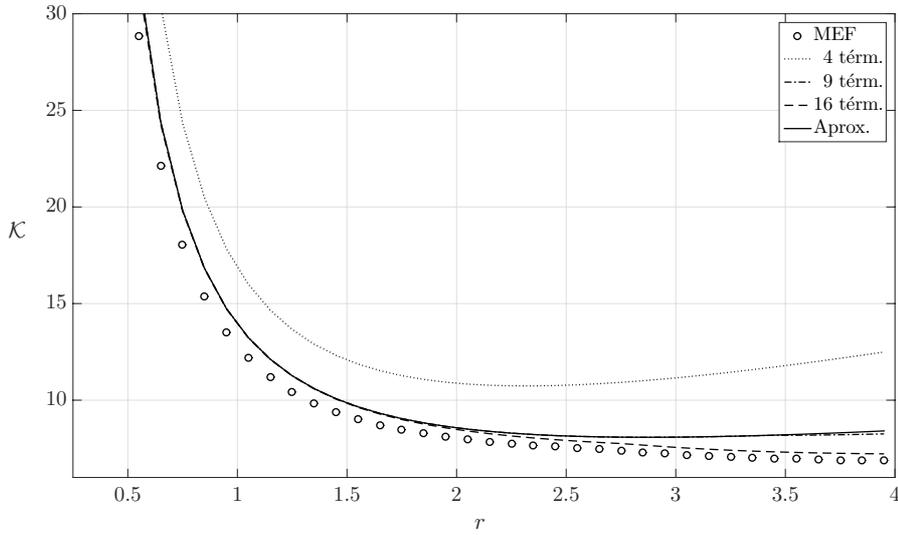


Figura 3.14: Evolución de la carga crítica de pandeo adimensional con la relación de aspecto en placa articulada de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo sometida a cortante.

Las expresiones para 9 y 16 términos obtenidas con Ritz no se muestran ya que tienen expresiones largas y tediosas. Como se puede apreciar, la solución de 16 términos aporta el mejor resultado. Sin embargo, es necesario para cada valor de  $r$  calcular los 16 valores de cargas críticas solución y obtener su valor mínimo. Esto hace imposible que se obtenga una expresión sencilla y general.

En la referencia [2] se utiliza el modelo aproximado que se detalla en la Ec. (3.35):

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{r^3 \sqrt{\frac{14.28}{D_1^2} + \frac{40.96}{D_1 D_3} + \frac{40.96}{D_1 D_3}}}$$

$$D_2 = D_{11} + D_{22} r^4 + 2(D_{12} + 2 D_{66}) r^2 \quad (3.35)$$

$$D_2 = D_{11} + 81 D_{22} r^4 + 18(D_{12} + 2 D_{66}) r^2$$

$$D_3 = 81 D_{11} + D_{22} r^4 + 18(D_{12} + 2 D_{66}) r^2$$

Este modelo se representa también en la Fig. 3.14 y como se puede observar corresponde muy de cerca con la solución de Ritz de 9 términos. El error entre MEF y Ritz en este caso es del orden del 15 %, que es una aproximación aceptable aunque el error es considerablemente mayor que el obtenido al analizar materiales isótropos. En [2] se explica que el error del método aproximado de la Ec. (3.35) es de hasta el 20 % (según  $r$  y las rigideces  $D_{ij}$ ), por tanto la precisión de los resultados obtenidos está dentro de un rango lógico.

### 3.5.2. Placa empotrada

Para la placa empotrada se procede de manera análoga a como se ha hecho en la Sección 3.2. Utilizando la Ec. 3.4 la expresión de la energía es ahora:

$$\begin{aligned}
 U = \frac{\pi^4}{64 a^3 b^3} & \left[ 8 \left( 3 b^4 D_{11} + 3 a^4 D_{22} + 2 a^2 b^2 D^* \right) w_{11}^2 + \left( 16 b^4 D_{11} + 123 a^4 D_{22} + 40 a^2 b^2 D^* \right) w_{12}^2 + \right. \\
 & \left. + \left( 123 b^4 D_{11} + 16 a^4 D_{22} + 40 a^2 b^2 D^* \right) w_{21}^2 + 2 \left( 41 b^4 D_{11} + 41 a^4 D_{22} + 50 a^2 b^2 D^* \right) w_{22}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde de nuevo se ha utilizado  $D^* = (D_{12} + 2 D_{66})$ . Esta expresión se convierte en su análoga para materiales isótropos Ec. (3.26) empleando las relaciones de la Ec. (2.12) y como se apreciar es mucho más extensa. La expresión del trabajo es de nuevo la misma que para material isótropo Ec. (3.27). Aplicando minimización de energía potencial y operando con 4 términos se llega a las siguientes expresiones de carga crítica:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}^I = & \\
 & \frac{225 \pi^2 \sqrt{\left[ 3 D_{11} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) r^2 + 3 D_{22} r^4 \right] \left[ 41 D_{11} + 50 (D_{12} + 2 D_{66}) r^2 + 41 D_{22} r^4 \right]}}{4096 r^3 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \\
 \mathcal{K}^{II} = & \\
 & \frac{225 \pi^2 \sqrt{\left[ 123 D_{11} + 40 (D_{12} + 2 D_{66}) r^2 + 16 D_{22} r^4 \right] \left[ 16 D_{11} + 40 (D_{12} + 2 D_{66}) r^2 + 123 D_{22} r^4 \right]}}{16384 r^3 \sqrt{D_{11} D_{22}}}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

De nuevo las expresiones coinciden con las de material isótropo Ec. (3.28) si se utilizan las relaciones de la Ec. (2.12). En la Fig. 3.15 se muestra el gráfico  $\mathcal{K} - r$  para la placa empotrada comparando lo resultados de Ritz y MEF.

Finalmente, una vez analizadas las placas articulada y empotrada tanto de material isótropo como de compuesto es interesante contrastar los resultados. Se puede apreciar que la

evolución del gráfico  $K - r$  es similar, aunque los valores no pueden ser comparados en un mismo gráfico ya que la adimensionalización y las propiedades materiales son distintas. Los resultados obtenidos por Ritz y por MEF concuerdan en ambos casos, siendo más precisos en el caso de material isótropo.

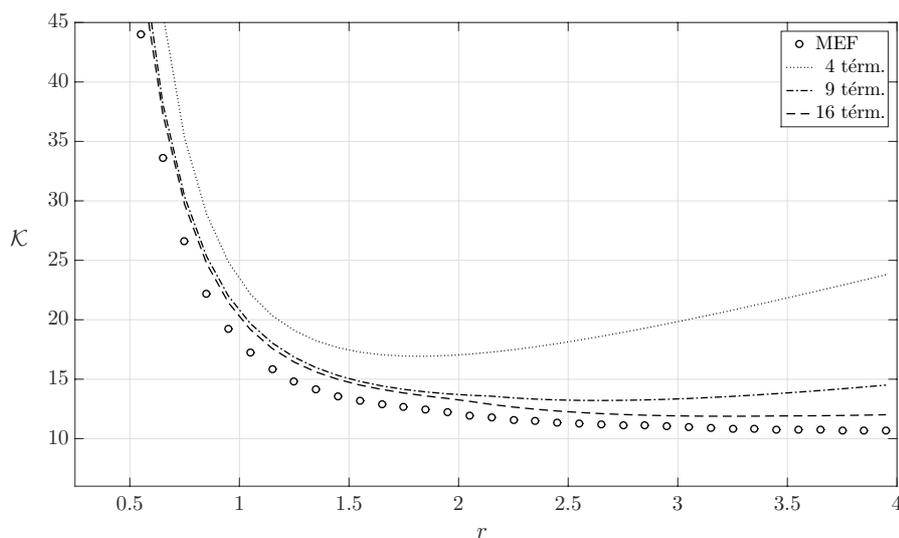


Figura 3.15: Evolución de la carga crítica de pandeo adimensional con la relación de aspecto en placa articulada de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo sometida a cortante.

Es importante recordar que los gráficos  $K - r$  de material isótropo son válidos para cualquier material de este tipo mientras que los obtenidos para material compuesto únicamente son válidos para el laminado analizado. Es comprensible que las diferencias entre ambos métodos sean mayores en el segundo caso, ya que por ejemplo las constantes del material  $G_{23}$ ,  $\nu_{23}$  no intervienen en el caso de Ritz pero sí en MEF.

Por otro lado, la evolución de las soluciones analíticas sí es diferente. Para valores elevados de  $r$  la solución de MEF alcanza un valor aproximadamente constante, fenómeno que será analizado en detalle en la siguiente sección. En el caso de Ritz, para material isótropo la solución diverge, incluso con 16 términos, para  $r$  elevados, mientras que en material compuesto esta divergencia es más lenta y se produce para valores todavía más altos de  $r$  como se verá a continuación.

### 3.6. Placas de elevada relación de aspecto

En las secciones anteriores se ha estudiado la evolución de la carga crítica con la relación de aspecto de la placa. La carga crítica se presentaba adimensionalizada como un factor  $K$  proporcional al cuadrado del lado  $b$ ;  $K \propto b^2$ . Se ha comprobado en otros estudios que para placas muy alargadas la solución de MEF tiende a un valor constante de  $K$  mientras que la solución de Ritz con las funciones de prueba utilizadas necesita cada vez más términos y acaba siempre divergiendo para valores elevados de  $r$ .

Cuando la placa es muy alargada  $a \gg b$  la dimensión del lado mayor deja de influir en el valor de la carga crítica y la placa adopta siempre un mismo modo pandeo, que se esquematiza en la Fig. 3.16. Se repite un mismo patrón que abarca una longitud  $L$  significativamente menor que el lado largo de la placa. Dicho patrón consiste en ondas alternadas inclinadas un ángulo  $\beta$ .

La carga crítica que se obtendrá en esta situación dependerá únicamente del lado  $b$  y será proporcional a  $1/b^2$  y por tanto el factor de pandeo  $K$  será constante.

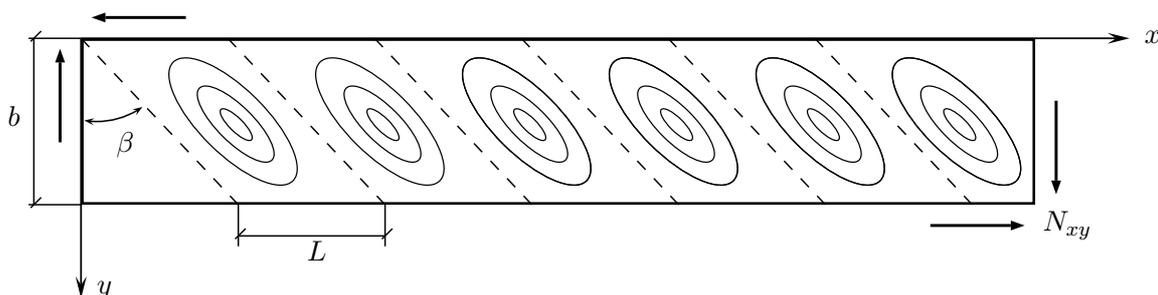


Figura 3.16: Patrón de pandeo en una placa larga rectangular bajo sollicitación de cortante.

La función de prueba de un sólo término que se utilizará para estudiar esta situación [2] es :

$$w = w_o \sin \left[ \frac{\pi y}{b} \right] \sin \left[ \frac{\pi (x - y \tan \beta)}{L} \right] \quad (3.38)$$

Esta expresión representa el patrón de deformación de la Fig. 3.16 y satisface como condiciones de contorno  $w = 0$  en los lados  $y = 0, b$ . Este valor nulo también se verifica en las líneas inclinadas un ángulo  $\beta$  respecto al eje  $y$ , separadas por una distancia  $L$ . En la realidad estas líneas no permanecen completamente rectas, lo que es una aproximación.

Dado que se asume que el patrón de deformación son ondas totalmente idénticas a lo largo de toda la placa, el estudio de la inestabilidad se puede llevar a cabo en una de estas ondas. La energía de deformación se calcula entonces a partir de:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_{y \tan \beta}^{y \tan \beta + L} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.39)$$

llegando a la siguiente expresión:

$$U = \frac{w_o^2 \pi^4 L}{8 b^3} \left[ D_{11} (1 + 6 \tan^2 \beta \mathcal{R}^2 + \tan^4 \beta \mathcal{R}^4) + \right. \\ \left. + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) (\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^4 \tan^2 \beta) \right] \quad (3.40)$$

donde  $\mathcal{R} = b/L$ . El trabajo de las fuerzas externas se calcula a partir de:

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^b \left[ \int_{y \tan \beta}^{y \tan \beta + L} 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx \right] dy = \frac{w_o^2 \mathcal{R} \pi^2}{4} \tan \beta N_{xy} \quad (3.41)$$

Aplicando el principio de mínima energía potencial se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_o} = 0 \implies \\ \frac{2 w_o \pi^4 L}{8 a^3} \left[ D_{11} (1 + 6 \tan^2 \beta \mathcal{R}^2) + \right. \\ \left. + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) (\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^4 \tan^2 \beta + D_{22} \mathcal{R}^4) \right] - \frac{2 w_o \mathcal{R} \pi^2 \tan \beta}{4} N_{xy} = 0 \quad (3.42)$$

Para  $w_o \neq 0$  la carga crítica será el valor de  $N_{xy}$  que satisfaga la ecuación anterior:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{2 \mathcal{R}^2} a^2 \tan \beta \left[ D_{11} (1 + 6 \tan^2 \beta \mathcal{R}^2 + \tan^4 \beta \mathcal{R}^4) + \right. \\ \left. + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) (\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^4 \tan^2 \beta) + D_{22} \mathcal{R}^4 \right] \quad (3.43)$$

Se ha llegado por tanto a una expresión de carga crítica en función de los parámetros  $\beta$  y  $\mathcal{R}$ . Dado que  $N_{cr}$  debe ser la mínima de todas soluciones posibles, los parámetros  $\beta$  y  $\mathcal{R}$  deberán ser tales que minimicen su valor, de modo que se pueden calcular derivando a partir de:

$$\frac{\partial N_{cr}}{\partial \mathcal{R}} = 0 \implies \mathcal{R} = \left[ \frac{D_{11}}{D_{11} \tan^4 \beta + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \tan^2 \beta + D_{22}} \right]^{1/4} \quad (3.44)$$

junto con:

$$\frac{\partial N_{cr}}{\partial \tan \beta} = 0 \implies 3 D_{11} \mathcal{R}^4 \tan^4 \beta + \left[ 6 D_{11} \mathcal{R}^2 + \right. \\ \left. + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \mathcal{R}^4 \right] \tan^2 \beta - \left[ D_{11} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \mathcal{R}^2 + D_{22} \mathcal{R}^4 \right] \quad (3.45)$$

Estas dos ecuaciones deben resolverse simultáneamente para hallar ambos parámetros. Para material compuesto no es posible hallar una expresión analítica cerrada sino que el sistema debe resolverse numéricamente. Para el laminado detallado en la Tabla 3.2 se obtiene:

$$\beta = 39.91^\circ ; \quad \mathcal{R} = 0.73 ; \quad N_{cr} = \frac{18529.2}{b^2} \implies \mathcal{K} = 7.925 \quad (3.46)$$

En la Fig. 3.17 se representa la evolución del factor  $\mathcal{K} - r$  de la placa, y efectivamente en MEF se obtiene un valor constante, como se comentó al principio de la sección. La solución de Ritz con la función de prueba utilizada en la Sección 3.2 diverge mientras que con la función de prueba de sección se obtiene un valor constante que supone una mejor aproximación, con un error de sólo el 12 %.

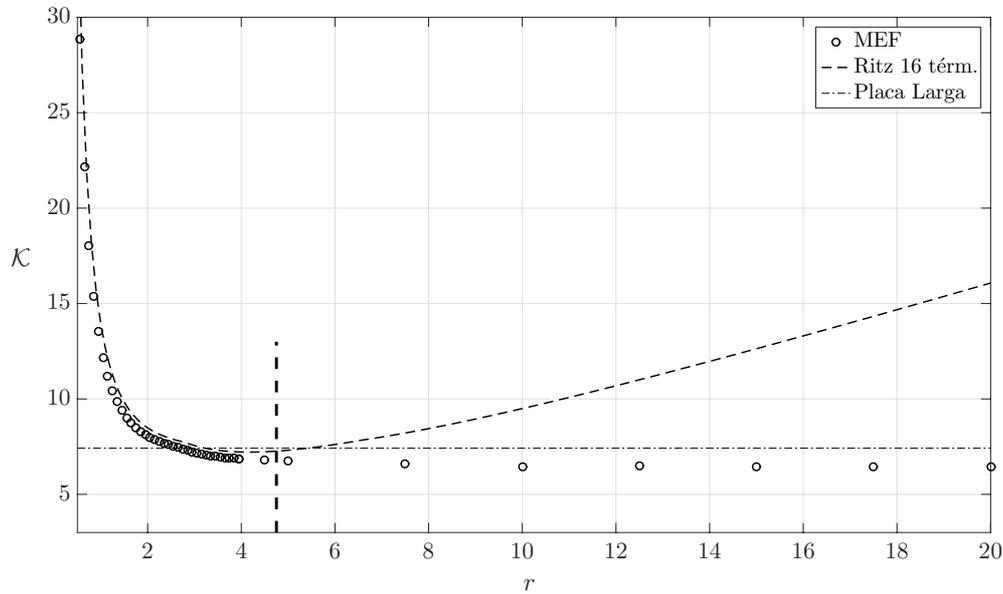


Figura 3.17: Evolución del factor de pandeo  $\mathcal{K}$  para elevadas relaciones de aspecto en placa articulada de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo sometida a cortante.

Particularizando para un material isótropo usando las relaciones de la Ec. 2.12 las ecuaciones se simplifican notablemente. En particular, la Ec. (3.44) se reduce a:

$$\mathcal{R} = \cos \beta \quad (3.47)$$

y haciendo uso de este resultado la Ec. (3.45) permite obtener directamente el valor de  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} = 35.37^\circ \implies \mathcal{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816 \quad (3.48)$$

$$K = 4\sqrt{2} \approx 5.657 \quad (3.49)$$

En la Fig. 3.18 se representa la evolución del factor  $K$  para elevados valores de  $r$ . En este caso el valor de  $K$  con la aproximación para placa muy alargada es mucho más preciso, con un error de sólo el 4%. Además el resultado de la Ec. (3.49) es muy similar al de aproximación de [6], Ec. (3.19), que predice un valor de 5.34 para  $r \rightarrow \infty$ . Utilizando la aproximación de Ritz con 16 términos de la Sección 3.2 para valores  $r < 3.5$  y la hallada en esta sección para  $r > 3.5$  es posible obtener una serie de valores de  $K$  muy precisos para todo el rango  $r$ .

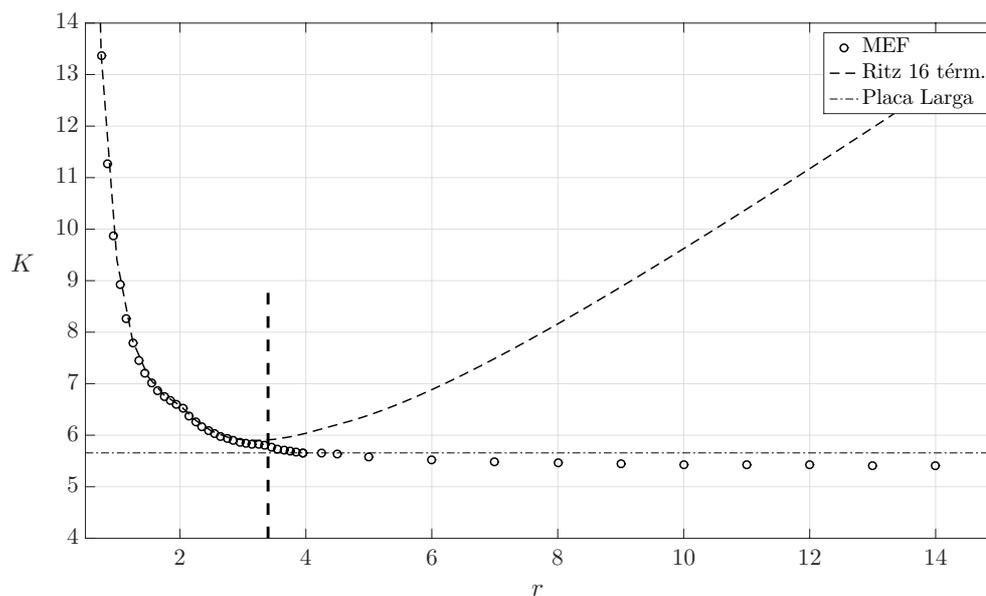


Figura 3.18: Evolución del factor de pandeo  $K$  para elevadas relaciones de aspecto en placa articulada de material isótropo sometida a cortante.

Finalmente, con los valores de  $\beta$  y  $\mathcal{R}$  queda definido el modo de pandeo. En la Fig. 3.20 se representa este primer modo para una placa de aluminio con  $r = 15$  obtenido mediante MEF. Por otro lado, sustituyendo los valores de  $\beta$  y  $\mathcal{R}$  obtenidos con la función de forma de la Ec. (3.38) se obtiene el modo de pandeo que se representa en la Fig. 3.19.

En la Fig. 3.19 se puede observar el patrón de deformación supuesto en el que se suceden una serie de ondas totalmente idénticas, con longitud de  $L = b/\mathcal{R} = 1.225b$ . El lado largo de la placa mide  $a = rb$  por lo que aparecen un total de  $a/L = r\mathcal{R} \approx 12$  semi-ondas.

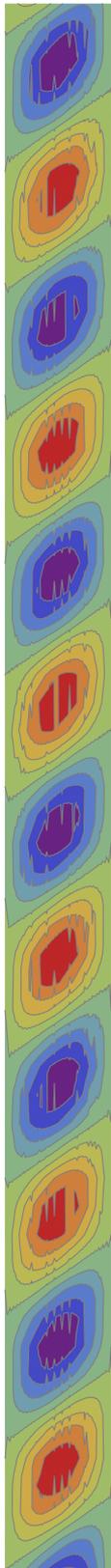


Figura 3.19: Modo de pandeo de placa articulada isotrópica sometida a cortante con una relación de aspecto  $r = 15$  obtenido mediante el método de Ritz aplicado a placas alargadas con *Mathematica*<sup>®</sup>.

Por otro lado, analizando la Fig. 3.20 se puede apreciar que el número de ondas es el mismo y que las ondas no son totalmente idénticas. Cerca de los bordes longitudinales la onda es de menor magnitud, pero en el interior de la placa se pierde este efecto Saint-Venant y las ondas pasan a ser idénticas. Además, se puede comprobar que, como se ha mencionado al comienzo de la sección, las líneas en entre ondas en las que  $w = 0$  no permanecen totalmente rectas.

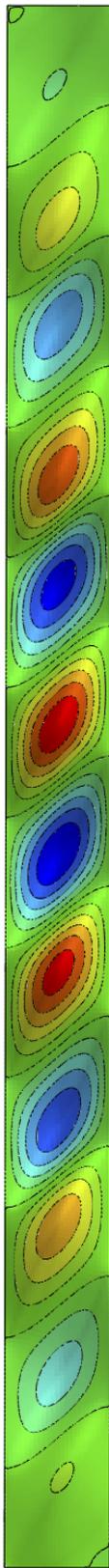


Figura 3.20: Modo de pandeo de placa articulada isotrópica sometida a cortante con una relación de aspecto  $r = 15$  obtenido mediante MEF con *Abaqus*<sup>®</sup>.

Por todo esto, queda comprobado que la aproximación analítica representa fielmente el patrón de deformación lejos de los extremos de la placa y aporta una muy buena aproximación del valor de la carga crítica, especialmente para materiales isotrópicos.



**4.1. Introducción**

En el capítulo anterior se ha estudiado el inicio de pandeo, que consiste en calcular la carga crítica  $P_{cr}$  a la que se produce inestabilidad y a partir de la cual la placa pandea. Para valores de carga  $P$  inferiores a los críticos las cargas en el plano no producen desplazamiento  $w$  fuera del mismo. Sin embargo, una vez la carga supera el valor crítico la placa pandea y se producen estas deflexiones fuera del plano que siguen una evolución altamente no-lineal. Este régimen se conoce como post-pandeo y es muy diferente en placas que en columnas. En la Fig. 4.1 se representa cualitativamente la deflexión central en ambos casos tanto para elementos perfectos como con imperfecciones. Como se puede apreciar, la deflexión en una columna aumenta drásticamente cuando se alcanza la carga crítica debido a que aparecen elevados momentos flectores que pronto conducen al colapso. En una placa, sin embargo, la deflexión aumenta más lentamente con la carga y puede soportar una significativa excursión en el régimen de post-pandeo antes de que los momentos flectores se vuelvan críticos.

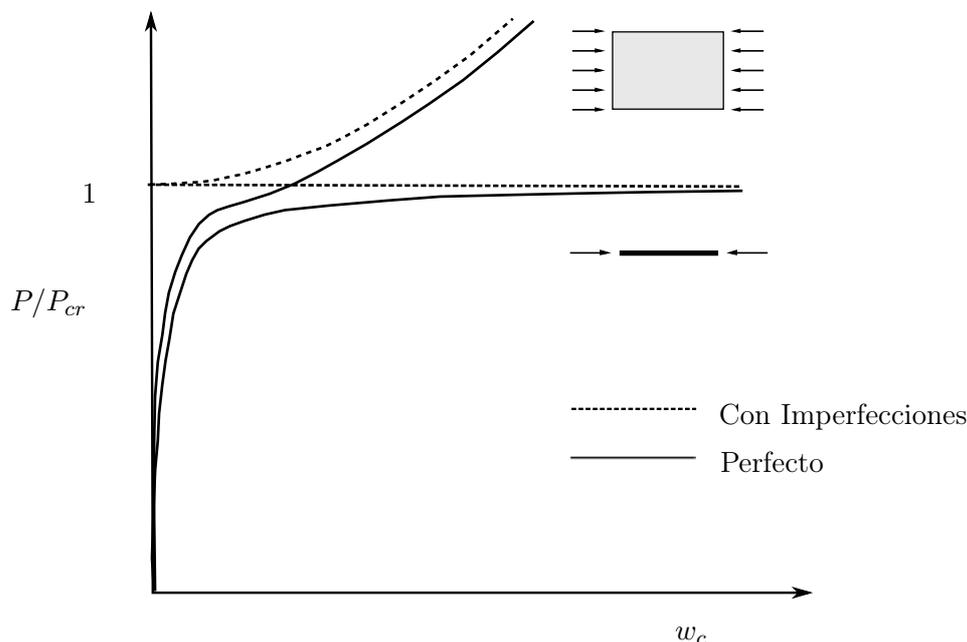


Figura 4.1: Comparación del desplazamiento en el centro  $w_c$  de placas y columnas bajo cargas en el plano en régimen de post-pandeo [6] y entre comportamiento de elementos perfectos y con imperfecciones iniciales.

Esta capacidad a post-pandeo hace de las placas un elemento muy atractivo para el diseño, permitiendo espesores menores y con ello reducción del peso de la estructura. Diseñar a post-pandeo requiere un conocimiento exhaustivo de los diferentes modos de fallo que pueden aparecer (pandeo entre remaches, pandeo de los rigidizadores, abolladura, pandeo global del

panel) siendo algunos de ellos característicos de los materiales compuestos (delaminación, separación piel-rigidizador). En general se desea que ocurra primero el pandeo local de la piel, y por ello este modo de fallo es el que se estudia en este trabajo.

En este capítulo se asentarán las bases para el estudio del post-pandeo de placas. Como procedimiento analítico se utilizarán las ecuaciones de von Karman. La resolución de estas ecuaciones es costosa pero fundamental para entender algunos conceptos como la función de tensiones de Airy. Por ello se analiza una placa articulada a compresión, caso más sencillo que el de placas a cortante y del que además existe información en la bibliografía [2], [8]. Por otro lado, se explicará la metodología en MEF y se compararán los resultados con los analíticos. Todo este trabajo establece las bases para poder estudiar el post-pandeo de placas a cortante en el siguiente capítulo, que como se verá más adelante resulta todavía más complejo. Por simplicidad, se estudiarán placas cuadradas.

## 4.2. Ecuaciones de von Karman

En régimen de post-pandeo se producen grandes deflexiones. Las hipótesis 2 y 3 de Kirchhoff se siguen considerando válidas:

- $\sigma_z$  despreciable frente a las tensiones en el plano
- Secciones planas permanecen planas y normales al plano medio:  $\gamma_{yz}, \gamma_{xz} \approx 0$

Sin embargo ya no se cumple  $w \ll h$  ni que el plano medio permanece inextensible. La cinemática de pequeñas deformaciones deja de ser válida, y dado que  $w \sim h$  se deben conservar los términos de orden cuadrático. Las relaciones cinemáticas de deformaciones en el plano medio, Ec. (2.2), pasan a ser:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xo} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yo} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xyo} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.1}$$

mientras que las curvaturas mantienen su definición de la Ec. (2.2). Estas deformaciones pueden redefinirse directamente a partir de la ley de Hooke, ver Ecs. (2.10), como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xo} &= \frac{A_{22}}{A_d} N_x - \frac{A_{12}}{A_d} N_y \\ \varepsilon_{yo} &= -\frac{A_{12}}{A_d} N_x + \frac{A_{11}}{A_d} N_y \\ \gamma_{xyo} &= \frac{1}{A_{66}} N_{xy}\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde la constante  $A_d$ , que depende únicamente del material, es el determinante de la submatriz de rigideces a extensión  $\mathbf{A}$  que aparece en las Ecs. (2.10).

$$A_d = A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \quad (4.3)$$

A partir de las hipótesis de partida mencionadas, estableciendo el equilibrio diferencial (desarrollo descrito con detalle en [2]) se llega a las ecuaciones de von Karman, que considerando únicamente cargas en el plano corresponden con las Ecs. (4.4) y (4.5). Observando la parte derecha de ambas ecuaciones se aprecia que son claramente no-lineales.

La primera, Ec. (4.4), describe el comportamiento a flexión de la placa (lado izquierdo) y cómo se acopla con el alargamiento (lado derecho).

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.4)$$

La segunda, Ec. (4.5), relaciona el comportamiento de membrana (lado izquierdo) con las curvaturas fuera del plano (lado derecho):

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_d} \left( A_{11} \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{A_{66}} \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} = \\ = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Las solicitaciones  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  se expresan en a partir de la función de tensiones de Airy  $F$ , que se define como:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (4.6)$$

La forma definitiva en la que se empleará la segunda ecuación de von Karman es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_d} \left( A_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2A_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{A_{66}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \\ = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

La resolución analítica consiste en calcular tanto la deformada  $w(x, y)$  como la función de tensiones de Airy  $F(x, y)$ . Las ecuaciones de von Karman son ecuaciones en derivadas parciales

---

no-lineales de cuarto orden y por tanto su resolución es altamente compleja. Para abordar el problema se utilizan funciones de prueba, tanto para  $w$  como para  $F$ , que contienen un cierto número de constantes en su definición. El objetivo es encontrar el valor de dichas constantes de manera que  $w$  y  $F$  satisfagan las ecuaciones. La elección de las funciones de prueba requiere un elevado conocimiento del problema que se decida estudiar y como se explicará más adelante la elección de  $F$  resulta no ser independiente de la de  $w$ .

### 4.3. Resolución analítica

Para explicar la resolución de las ecuaciones y sobre todo la elección de las funciones de prueba (en especial las de la función de Airy) se estudia el problema que esquematiza la Fig. 4.2.

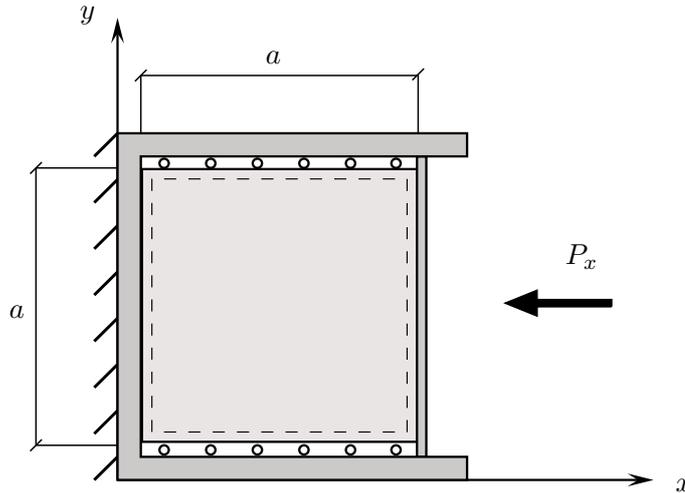


Figura 4.2: Esquema del problema en estudio: placa articulada a compresión con bordes no cargados restringidos a permanecer rectos e inmóviles.

Se trata de una placa cuadrada articulada en todos sus bordes. Además, los bordes no cargados están restringidos de tal manera que permanecen siempre rectos e inmóviles. Las condiciones de contorno por tanto son:

$$\begin{aligned}
 x = y = 0 ; \quad x = y = a &\implies w = 0 \\
 x = 0 &\implies u = 0 \\
 y = 0 ; \quad y = a &\implies v = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

#### 4.3.1. Resolución de las ecuaciones de von Karman

■ **Definición de  $w(x, y)$ ,  $F(x, y)$**

La función de prueba para  $w$  debe elegirse en base a cómo se deforme la placa al pandear y puede desarrollarse en base a ensayos experimentales, al análisis mediante MEF o analíti-

camente estudiando los modos de pandeo. En el caso de una placa cuadrada a compresión el primer modo de pandeo es una semi-onda, que puede definirse como:

$$w = w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (4.9)$$

donde  $w_1$  es el desplazamiento en el centro de la placa y la función cumple las condiciones de contorno de placa articulada. En la Fig. 4.3 se representa gráficamente la anterior  $w$ , los resultados serán satisfactorios siempre que la deformada real sea similar.

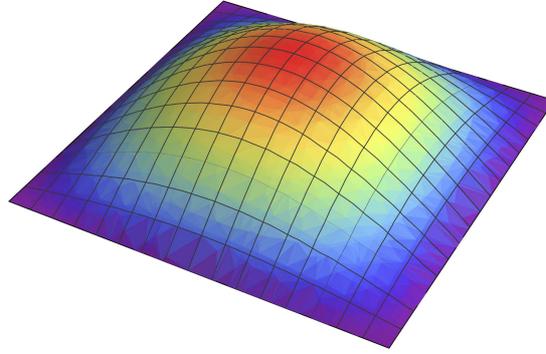


Figura 4.3: Función de prueba empleada para la deflexión  $w$ .

El siguiente paso consiste en elegir la función de Airy, que para este caso de estudio viene dada por la Ec. (4.10). La explicación de por qué se elige esta función se detallará más adelante, una vez se haya esclarecido el proceso que ha de seguirse para resolver las ecuaciones de von Karman.

$$F = -\frac{P_x y^2}{2a} - \frac{P_y x^2}{2a} + C_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \quad (4.10)$$

■ **Identificaciones en la 2ª Ec. de von Karman: cálculo de  $C_1, C_2$**

Introduciendo las expresiones de  $w$  y  $F$  en la segunda ecuación de von Karman, Ec. (4.7), ésta se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{A_{22}}{A_d} C_1 \frac{16\pi^4}{a^4} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + \frac{A_{11}}{A_d} C_2 \frac{16\pi^4}{a^4} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \\ = w_1^2 \frac{\pi^4}{2a^4} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + w_1^2 \frac{\pi^4}{2a^4} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

En ambos lados de la ecuación aparecen únicamente términos en  $\cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ .

Por tanto es posible hallar las constantes  $C_1, C_2$  mediante identificación:

$$C_1 = \frac{A_d}{A_{11}} \frac{w_1^2}{32}; \quad C_2 = \frac{A_d}{A_{22}} \frac{w_1^2}{32} \quad (4.12)$$

Para una mayor simplicidad, se redefinen como:

$$C_1 = c_1 w_1^2; \quad C_2 = c_2 w_1^2 \quad (4.13)$$

Se decide emplear  $c_1$  y  $c_2$  en los desarrollos pero sustituirlas por sus expresiones en los resultados finales.

■ **Cálculo de  $P_y(P_x, w_1)$**

Para que los bordes  $y = 0, a$  permanezcan rectos debe aparecer una fuerza  $P_y$  en ellos que debe expresarse en función de la fuerza  $P_x$  aplicada.

Despejando  $\partial v / \partial y$  de la Ec. (4.1), sustituyendo  $\varepsilon_{y0}$  de su expresión en (4.2) y las sollicitaciones  $N_x, N_y$  en función de  $F$  se llega a:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{A_{12}}{A_d} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{A_{11}}{A_d} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (4.14)$$

Sustituyendo ahora  $w, F$  por sus expresiones e integrando en la superficie de la placa se obtiene:

$$\int_0^a \int_0^a \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \frac{A_{12} P_x - A_{11} P_y}{A_d} - \frac{\pi^2 w_1^2}{8 a} \quad (4.15)$$

Por otro lado, empleando las condiciones de contorno:

$$\int_0^a \int_0^a \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = a [v(x, a) - v(x, 0)] = 0 \quad (4.16)$$

A partir de las Ecs. (4.15) y (4.16) se llega finalmente a:

$$P_y = P_x \frac{A_{12}}{A_{11}} - w_1^2 \frac{\pi^2}{8 a} \frac{A_d}{A_{11}} \quad (4.17)$$

Para materiales isótropos  $A_{12}/A_{11} = \nu$ ,  $A_d/A_{22} = E h$ . La ecuación anterior expresa que la carga  $P_y$  es producida por el efecto Poisson modificado por un término complejo asociado al post-pandeo, ya que como se verá en esta sección  $w_1$  dependerá del ratio de carga de post-pandeo. De nuevo en busca de simplicidad en los desarrollos que siguen  $P_y$ , se define como:

$$P_y = c_p P_x + c_w w_1^2 \quad (4.18)$$

■ **Cálculo del desplazamiento  $u$  en  $x = a$**

Aunque no es necesario para hallar la expresión de  $w_1$ , se calcula el desplazamiento del borde no restringido  $x = a$  en el que se aplica la carga, ya que esta variable se utilizará en la Sección 4.6 cuando se estudie la relación entre tensiones y deformaciones. El proceso a seguir es muy similar al utilizado para el cálculo de  $P_y$ .

Despejando  $\partial u/\partial x$  de la Ec. (4.1), sustituyendo  $\varepsilon_{xo}$  de su expresión en (4.2) y las solicitaciones  $N_x, N_y$  en función de  $F$  se llega a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A_{22}}{A_d} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{A_{12}}{A_d} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (4.19)$$

Sustituyendo ahora  $w, F$  por sus expresiones e integrando en la superficie de la placa se obtiene:

$$\int_0^a \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \frac{a(A_{12} P_y - A_{22} P_x)}{A_d} - \frac{\pi^2 w_1^2}{8} \quad (4.20)$$

Por otro lado:

$$\int_0^a \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = a [u(a, y) - u(0, y)] = a u(a, y) \quad (4.21)$$

A partir de las Ecs. (4.20) y (4.21) se llega finalmente a:

$$u(a, y) = \frac{A_{12} P_y - A_{22} P_x}{A_d} - \frac{\pi^2 w_1^2}{8 a} \quad (4.22)$$

Evidentemente, este desplazamiento tendrá signo negativo ya que la placa se está comprimiendo.

■ **Identificaciones en 1ª Ec. de von Karman: cálculo de  $w_1$**

Tras los cálculos realizados, todas las incógnitas han quedado expresadas en función de  $w_1, P_x$ . Por tanto, sólo falta encontrar la relación entre ambas variables. Sustituyendo las expresiones anteriores en la primera ecuación de von Karman, Ec. (4.4), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 w_1}{a^4} \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) = \\ & = \frac{\pi^4}{a^4} w_1^3 \left[ a(P_x + c_p P_x + c_w w_1^2) + 4\pi^2 c_1 w_1^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \right. \\ & \quad \left. + 4\pi^2 c_2 w_1^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

No es posible identificar en esta expresión por lo que se utiliza la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \left[ \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) \right] \quad (4.24)$$

que aplicada a este caso se concreta en:

$$\sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{2 \pi x}{a} \right) = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{3 \pi x}{a} \right) - \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \right] \quad (4.25)$$

Para la variable  $y$  se usa un proceso análogo. Tras realizar la sustitución, la ecuación resultante presenta unos términos senoidales con argumentos  $\pi x$ ,  $\pi y$  y otros con  $3\pi x$ ,  $3\pi y$ . Siguiendo el mismo razonamiento que en [2], los términos multiplicados por 3 se consideran de un orden superior y se desprecian. La ecuación resultante es entonces:

$$\left[ D_{11} + 2 (D_{12} + 2D_{66} + D_{22}) \right] w_1 = \frac{a}{\pi^2} P_x (1 + c_p) w_1 + \left[ \frac{a}{\pi^2} c_w a - 2 (c_1 - c_2) \right] w_1^3 \quad (4.26)$$

donde despejando  $w_1$  se obtiene:

$$w_1 = \pm \sqrt{\frac{\pi^2 \left[ D_{11} + 2 (D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \right] - a P_x - a c_p P_x}{a c_w - 2 (c_1 + c_2) \pi^2}} \quad (4.27)$$

La Ec. (4.26) tiene como solución  $w_1 = 0$  para  $P < P_{cr}$  y la expresión mostrada en (4.27) para  $P > P_{cr}$ .

#### ■ Expresión de $P_{cr}$

El factor post-pandeo se define como:

$$\mathcal{P} = \frac{P}{P_{cr}} \quad (4.28)$$

Dado que para  $P \leq P_{cr}$  se tiene  $w_1 = 0$ , el valor de la carga crítica puede calcularse a partir de:

$$w_1 = 0 \implies P_{cr} = \frac{\pi^2 (D_{11} + 2 (D_{12} + 2D_{66} + D_{22}))}{a (1 + c_p)} = \frac{\pi^2 (D_{11} + 2 (D_{12} + 2D_{66} + D_{22}))}{a \left( 1 + \frac{A_{12}}{A_{11}} \right)} \quad (4.29)$$

Sustituyendo ahora  $P_x = \mathcal{P} P_{cr}$  y reordenando se llega a la expresión final de  $w_1$ :

$$w_1 = \sqrt{\frac{16 A_{11} A_{22} [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}]}{(A_{11} + 3A_{22}) A_d}} (\mathcal{P} - 1) \quad (4.30)$$

Para un material isótropo, utilizando las relaciones de la Ec. (2.12), la ecuación anterior se simplifica a:

$$w_1 = 4h \sqrt{\frac{\mathcal{P} - 1}{1 - \nu^2}} \quad (4.31)$$

### 4.3.2. Función de tensiones de Airy

La función de Airy utilizada en el estudio anterior es la Ec. (4.10). A continuación se explican los tres aspectos fundamentales que deben tenerse en cuenta para elegirla:

#### 1) Equilibrio de la carga aplicada

Las expresiones de las sollicitaciones son:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{P_x}{a} - \frac{4C_1 \pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \\ N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{P_y}{a} - \frac{4C_2 \pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

El valor medio de las cargas  $P_x$ , en cada sección  $x$ , y  $P_y$ , en cada sección  $y$  se recupera:

$$\int_0^a N_x dy = P_x ; \quad \int_0^a N_y dx = P_y \quad (4.33)$$

La primera igualdad debe cumplirse especialmente en las caras  $x = 0, a$  y la segunda en  $y = 0, a$  donde las sollicitaciones y las cargas aplicadas deben ser equivalente. Los términos encargados de esta equivalencia son los polinómicos, ya que los cosenos tienen valor medio nulo.

#### 2) Reproducción la distribución de tensiones

La expresiones de  $N_x, N_y$  dependen de un valor constante más otro término que varía según una función coseno, cuya forma se detalla en la Fig. 4.4. Gracias a estos dos términos es posible obtener la redistribución de tensiones, Fig. 4.17, que se produce a medida que aumenta el ratio de post-pandeo.

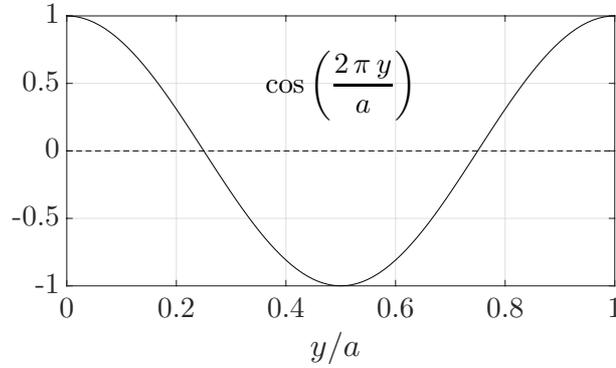


Figura 4.4: Función coseno que permite reproducir la redistribución de tensiones en la placa.

### 3) Identificación en la 2ª ecuación de von Karman

El motivo principal para la elección de  $F$  es la necesidad de identificar coeficientes que multiplican a las funciones iguales en ambos lados, al sustituir las expresiones de  $w$  y  $F$  en la 2ª ecuación de von Karman Ec. (4.7). Una vez establecida la expresión de  $w$ , se debe sustituir en el lado derecho de dicha ecuación (ver lado derecho de la Ec. (4.11)). La función de Airy debe ser tal que al llevar a cabo las derivadas presentes en el lado izquierdo aparezcan las funciones del lado derecho. Proceder de esta manera permite obtener la expresión de las constantes de  $F$  por identificación.

## 4.4. Post-pandeo en Abaqus

A continuación se describe la metodología que debe seguirse para llevar a cabo un análisis de post-pandeo en *Abaqus*<sup>®</sup> y que se esquematiza en la Fig. 4.5.

En primer lugar, se debe realizar un análisis del tipo *Linear Perturbation - Buckle*, igual a los que se realizaban en el capítulo 3 para estudiar el inicio de pandeo en la placa. Se obtiene la carga crítica de inicio de pandeo  $N_{cr}$  y los modos de pandeo. El resultado se exporta a un fichero en el que se almacenan los desplazamientos nodales correspondientes a cada modo.

En segundo lugar, se realiza un análisis no-lineal del tipo *Statics - Riks*, basado en el método de Riks modificado, también conocido como control por longitud de arco. Se introducen unas imperfecciones en la placa a partir de una ponderación de los modos de pandeo obtenidos anteriormente. En general es suficiente con emplear los cuatro primeros modos de pandeo. Los factores de ponderación deben ser un orden inferior al espesor y atribuir una importancia decreciente con el número del modo.

La correcta ponderación de los modos es fundamental para la obtención de resultados satisfactorios. En cada caso de estudio es preciso llevar a cabo diversas simulaciones para apreciar la influencia de las imperfecciones. La Ec. (4.47) muestra valores habituales de los factores de ponderación:

$$\mathbf{w}^* = 1.00 \frac{h}{10} \mathbf{w}_1 + 0.50 \frac{h}{10} \mathbf{w}_2 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_3 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_4 \quad (4.34)$$

donde  $\mathbf{w}^*$  es la imperfección introducida y  $\mathbf{w}_i$  los valores de deflexión nodal asociados al modo  $i$ .

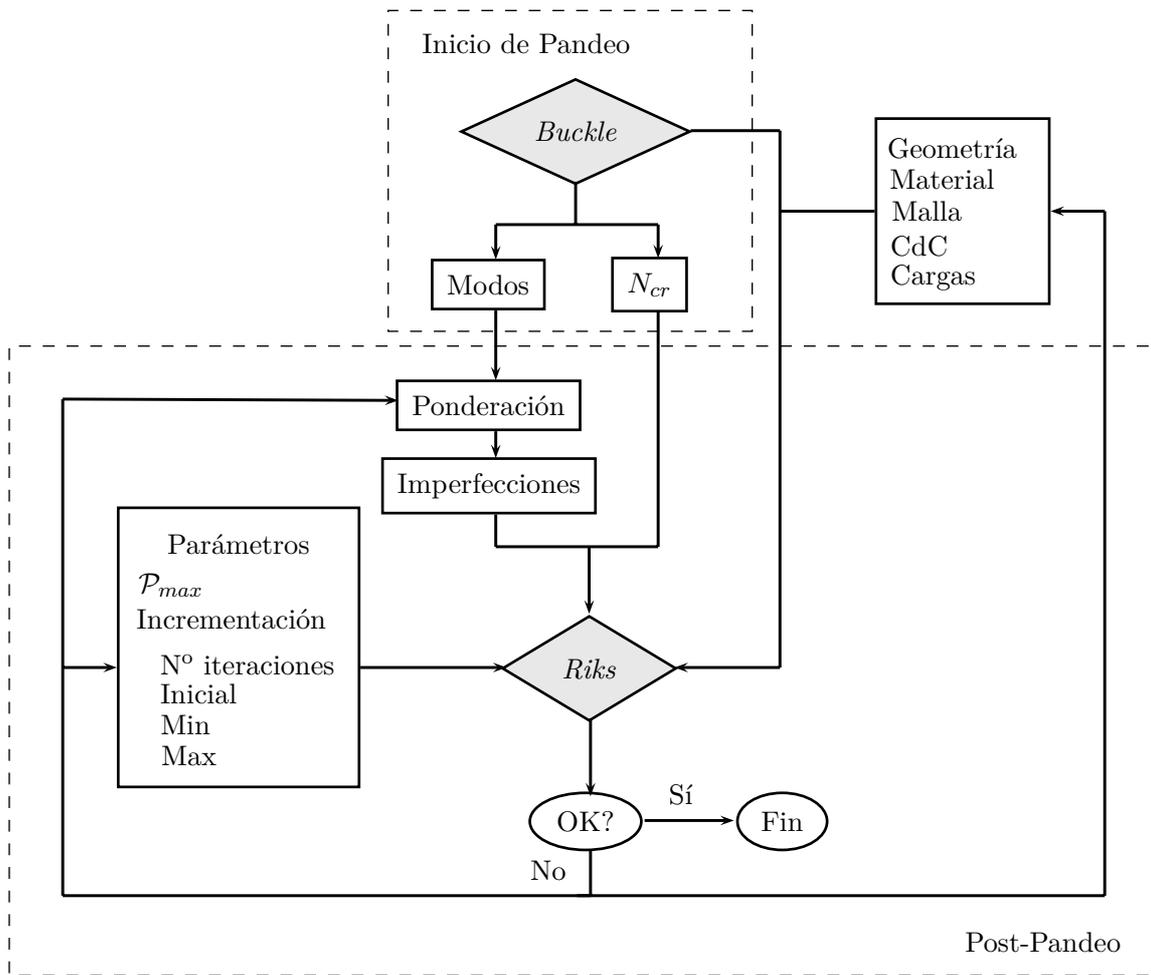


Figura 4.5: Diagrama de flujo del proceso a seguir en *Abaqus*<sup>®</sup> para el análisis del post-pandeo.

El método de Riks, que se explica en la Sección 4.4.1, requiere que se fijen una serie de parámetros que definen la evolución del proceso iterativo. Dichos parámetros se muestran en la Tabla 4.1 juntos con valores habituales utilizados en los análisis.

La longitud de arco estimada determina el orden de magnitud que se utilizará para dicho parámetro. El valor mínimo debe ser suficientemente pequeño, ya que el proceso será abortado si se requiere un valor inferior al fijado como mínimo. Por último, un valor máximo reducido permite forzar a que las iteraciones avancen más paulatinamente obteniendo así una mayor

Incrementación de la longitud de arco	
Máximo nº de incrementos	100
Inicial	0.1
Mínimo	$10^{-10}$
Máximo	5
Longitud de arco estimada	1

Tabla 4.1: Valores habituales de los parámetros que definen la incrementación de la longitud de arco.

densidad de puntos analizados.

Además de estos parámetros es aconsejable fijar un valor máximo del ratio de post-pandeo  $\mathcal{P}$ . En general los resultados son satisfactorios para valores de  $\mathcal{P} < 6$ . Estableciendo este valor como objetivo, el proceso iterativo que sigue *Abaqus*<sup>®</sup> terminará una vez sea alcanzado.

Cuando el método no converge se deben modificar la ponderación de las imperfecciones, las condiciones de contorno o los parámetros que definen la incrementación.

#### 4.4.1. Método de Riks modificado

El método de Riks es un algoritmo efectivo para encontrar soluciones de equilibrio estático no-lineales en problemas inestables, en los que la evolución carga-desplazamiento puede exhibir un comportamiento como el esquematizado en la Fig. 4.6, es decir, en ciertos periodos de la respuesta la carga y/o el desplazamiento pueden decrecer a medida que la solución evoluciona.

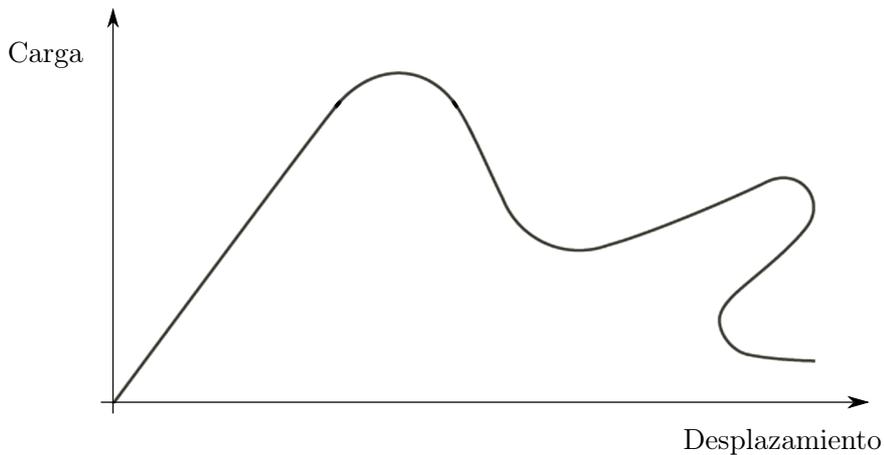


Figura 4.6: Comportamiento típico de respuestas estáticas inestables.

Se asume que la carga es proporcional, i.e. todas magnitudes varían con un único parámetro escalar, que se denominará  $\lambda$ . Además, se asume que la respuesta es razonablemente suave,

sin bifurcaciones repentinas. La esencia del método es que la solución se contempla como el cálculo de un único camino de equilibrio en un espacio definido por las variables nodales y el parámetro de carga (ver Fig. 4.7).

La bases del algoritmo siguen el método de Newton [17], por tanto en cada instante existe un radio de convergencia finito. Partiendo de un punto de equilibrio, se recorre una cierta distancia (limitada por el tamaño de incremento) a lo largo de la recta tangente al camino de equilibrio en dicho punto. Posteriormente, se busca el nuevo punto de equilibrio en el plano que pasa por el punto así obtenido y que es perpendicular a la recta tangente.

A continuación se explica el proceso de cálculo que acompaña al esquema mostrado en la Fig. 4.7 y que se encuentra explicado con detalle en el manual teórico de *Abaqus*<sup>®</sup> [17].

Se considera un modelo de  $N$  grados de libertad con un patrón de cargas aplicadas  $\mathbf{P}^N$ . El parámetro de magnitud de carga se denomina  $\lambda$  (*Load Proportionality Factor*).

En cada instante el estado de carga es  $\lambda \mathbf{P}^N$  y los desplazamientos son  $u^N$ . El espacio solución se escala para que las dimensiones sean similares en ambos ejes. Este espacio modificado se denota por el superíndice “ $\sim$ ”:

$$\text{Carga : } \lambda \tilde{\mathbf{P}}^N ; \quad \tilde{\mathbf{P}}^N = \frac{\mathbf{P}^N}{\bar{P}} ; \quad \text{Desplazamientos: } \tilde{\mathbf{u}}^N = \frac{\mathbf{u}^N}{\bar{u}} \quad (4.35)$$

donde  $\bar{P} = \|\mathbf{P}\| = \sqrt{\mathbf{P}^N \mathbf{P}^N}$  y  $\bar{u}$  es el desplazamiento máximo en la iteración inicial. El camino solución es el conjunto continuo de puntos de equilibrio descritos por el vector  $\{\tilde{\mathbf{u}}^N ; \lambda\}$  en este espacio escalado. El algoritmo se esquematiza en la Fig. 4.7 y se describe a continuación.

Supóngase que la solución se ha desarrollado hasta un cierto punto  $A^o = \{\tilde{u}_o^N ; \lambda_o\}$ . Se construye la matriz de rigidez tangente de la placa  $K_o$  (de dimensiones  $N \times N$  y se despeja el vector  $\mathbf{v}_o^N$  a partir de:

$$\mathbf{K}_o \mathbf{v}_o^M = \lambda \mathbf{P}^N \quad (4.36)$$

El tamaño de incremento (de  $A^0$  a  $A^1$  en la Fig. 4.7) denominado  $\Delta l$  se elige de manera que:

$$\Delta \lambda_o^2 \{\tilde{\mathbf{v}}_o^N ; 1\} (\tilde{\mathbf{v}}_o^N ; 1) = \Delta l^2 \quad (4.37)$$

de donde se deduce que:

$$\Delta \lambda_o = \frac{\pm \Delta l}{\sqrt{\tilde{\mathbf{v}}_o^N \tilde{\mathbf{v}}_o^N + 1}} \quad (4.38)$$

con  $\tilde{\mathbf{v}}_o^N = \mathbf{v}_o^N / \bar{u}$ . El valor inicial de  $\Delta l$  es introducido por el usuario y los sucesivos valores son elegidos por *Abaqus*<sup>®</sup> según la tasa de convergencia.

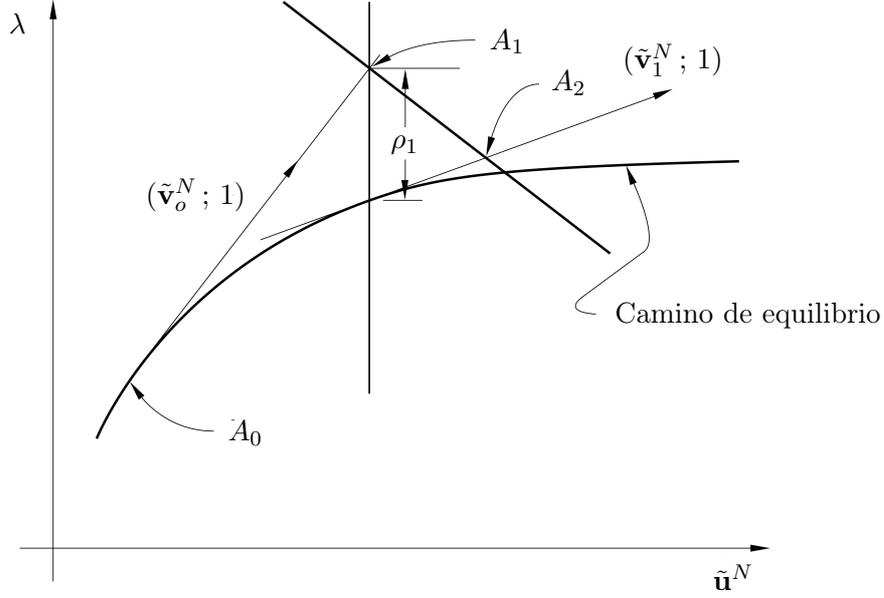


Figura 4.7: Algoritmo de Riks modificado.

De esta manera se tiene el vector  $\{\tilde{\mathbf{v}}_o^N; 1\}$  en la dirección de la tangente y las coordenadas del punto  $A^1$  vienen dadas por:

$$A^1 = \{\tilde{\mathbf{u}}_o^N + \Delta\lambda_o \mathbf{v}_o^N; \lambda_o + \Delta\lambda_o\} \quad (4.39)$$

El siguiente paso es corregir la solución hasta el camino de equilibrio (punto  $A^2$ ) mediante el plano que pasa por  $A^1$  y que es perpendicular a  $\{\tilde{\mathbf{v}}_o^N; 1\}$ . Para conseguirlo, se sigue el siguiente algoritmo iterativo:

Inicialización:  $\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_o$ ;  $\Delta\mathbf{u}_i^N = \Delta\lambda_o \mathbf{v}_o^N$

Para cada iteración  $i$ :

1. Se calcula la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_i$  a partir del vector de fuerzas  $\mathbf{I}^N$ :

$$\mathbf{I}^N = \int_V \boldsymbol{\beta}^N \boldsymbol{\sigma} dV; \quad \mathbf{K}_i = \frac{\partial \mathbf{I}^N}{\partial \mathbf{u}^N} \quad (4.40)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es la matriz de tensiones y  $\boldsymbol{\beta}_N$  un vector relacionado con la tasa de deformación.

2. Se comprueba el equilibrio calculando los valores residuales:

$$\mathbf{R}_i^N = (\lambda_o + \Delta\lambda_i) \mathbf{P}^N - \mathbf{I}^N \quad (4.41)$$

Si las componentes de  $\mathbf{R}_i^N$  son suficientemente pequeñas el incremento ha convergido. En caso contrario, se procede con los siguientes pasos:

3. Se resuelve simultáneamente con dos vectores de carga,  $\mathbf{P}^N$  y  $\mathbf{R}_i^N$ , obteniendo dos vectores de desplazamientos  $\mathbf{v}_i^N$  y  $\mathbf{c}_i^N$ , que se calculan resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{K} \left\{ \mathbf{v}_i^N ; \mathbf{c}_i^N \right\} = \left\{ \mathbf{P}^N ; \mathbf{R}_i^N \right\} \quad (4.42)$$

4. El vector  $(\tilde{\mathbf{v}}_i^N ; 1)$  se escala a través del parámetro  $\mu$ , que habrá que calcular. Posteriormente se le añade al vector  $(\tilde{\mathbf{c}}_i^N ; \rho_i)$  donde  $\rho_i = \mathbf{R}_i^N \mathbf{P}^N / \bar{P}^2$  es la proyección del residuo escalado sobre  $\bar{\mathbf{P}}^N$ .

El vector resultante de la suma anterior permitirá pasar de  $A^i$  a  $A^{i+1}$ . Para ello debe ser perpendicular al vector  $(\tilde{\mathbf{v}}_o^N ; 1)$ ; ergo, imponiendo que el producto escalar sea nulo se llega a la ecuación:

$$\left\{ (\mathbf{0} ; -\rho_i) + (\tilde{\mathbf{c}}_i^N ; \rho_i) + \mu(\tilde{\mathbf{v}}_i^N ; 1) \right\} \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_o^N ; 1 \right\} = 0 \quad (4.43)$$

de donde se obtiene el valor de  $\mu$ :

$$\mu = -\frac{\tilde{\mathbf{c}}_i^N \mathbf{v}_o^N}{\mathbf{v}_i^N \mathbf{v}_o^N + 1} \quad (4.44)$$

El punto solución  $A^{i+1}$  (que corresponde con el punto  $A^2$  en la Fig. 4.7) queda definido entonces por:

$$A^{i+1} = (\mathbf{u}_o^N + \Delta\mathbf{u}_i^N + \mathbf{c}_i^N + \mu \mathbf{v}_i^N ; \lambda_o + \Delta\lambda_i + \mu) \quad (4.45)$$

5. Finalmente se actualizar para la siguiente iteración y se regresa al primer paso.

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1}^N = \Delta\mathbf{u}_i^N + \mathbf{c}_i^N + \mu \mathbf{v}_i^N ; \quad \Delta\lambda_{i+1} = \Delta\lambda_i + \mu ; \quad i = i + 1 \quad (4.46)$$

## 4.5. Evolución de la deflexión

A continuación se estudia cómo varía la deflexión de la placa a medida que aumenta el ratio de carga post-pandeo. Este análisis se realizará tanto para una placa de aluminio como para una de material compuesto, comparando las diferencias entre ambos.

### 4.5.1. Placa de aluminio

Siguiendo la metodología en MEF explicada anteriormente se analiza una placa cuadrada en *Abaqus*<sup>®</sup>. Se comienza analizando una placa de aluminio, con constantes materiales  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$  y dimensiones  $a = 1$  m,  $h = 2$  mm. Las condiciones de contorno, siguiendo el esquema de la Fig. 4.2 para placa articulada con bordes forzados a permanecer rectos e inmóviles, son:  $U3 = UR3 = 0$  en todos los bordes,  $U2 = 0$  en los bordes horizontales y  $U1 = 0$  en el borde vertical izquierdo.

En primer lugar, se analiza el inicio de pandeo en la placa. En la Fig. 4.8 se muestran los cuatro primeros modos de pandeo, que serán los que se utilicen en la ponderación.

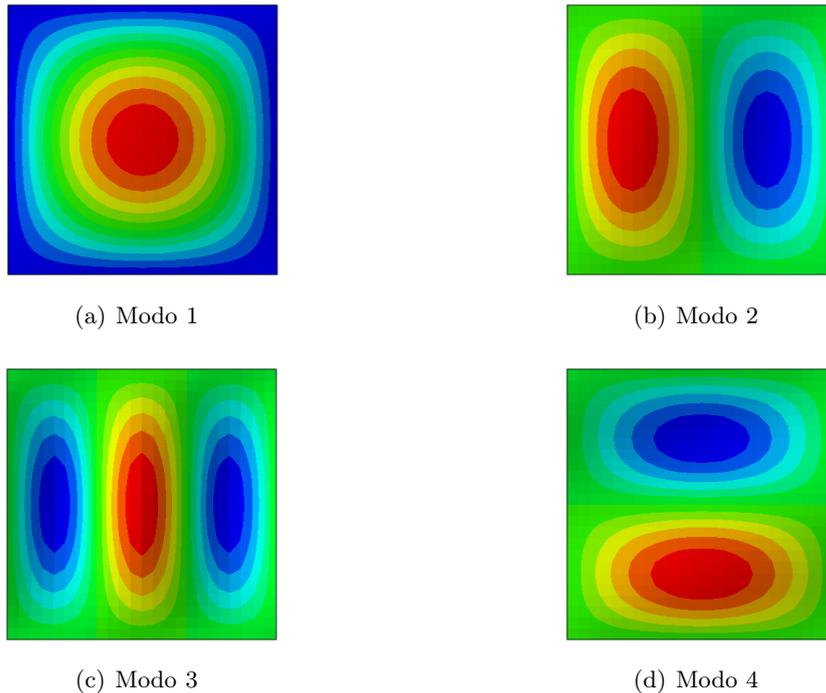


Figura 4.8: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada de aluminio bajo compresión  $N_x$  obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

Tras realizar diversos análisis con diferentes ponderaciones, se decide tomar la siguiente:

$$\mathbf{w}^* = 0.50 \frac{h}{10} \mathbf{w}_1 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_2 + 0.125 \frac{h}{10} \mathbf{w}_3 + 0.125 \frac{h}{10} \mathbf{w}_4 \quad (4.47)$$

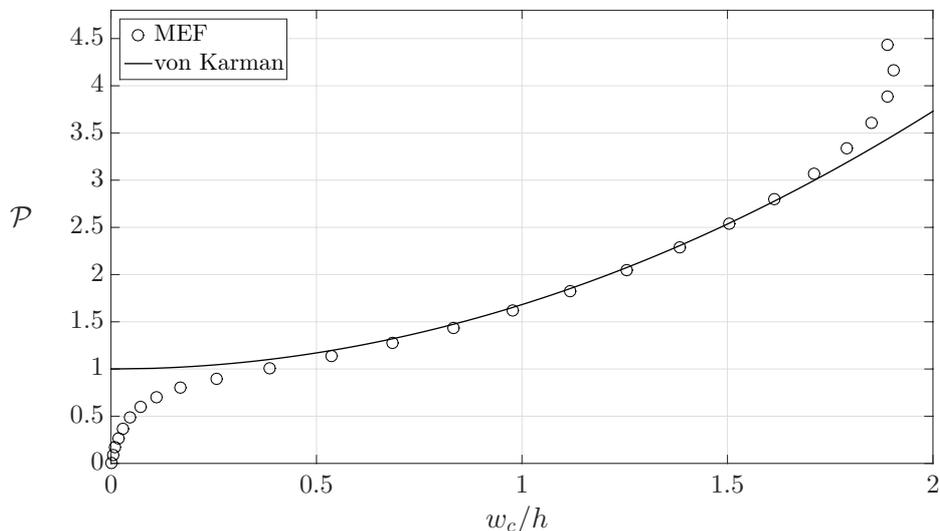


Figura 4.9: Evolución de la deflexión en el centro de la placa de aluminio con el ratio de post-pandeo. Comparación entre solución analítica y MEF.

En la Fig. 4.9 se comparan los resultados obtenidos con las ecuaciones de von Karman y por MEF, que como se puede apreciar son muy similares para  $\mathcal{P} < 3$ . En la solución analítica el desplazamiento  $w$  es nulo siempre que la carga es inferior a la carga crítica  $\mathcal{P} < 1$ , como corresponde a un modelo de placa sin imperfecciones (ver Fig. 4.1). En cambio, en MEF la transición al régimen de post-pandeo no es instantánea sino que se producen desplazamientos antes de que la placa pandee, ya que se trata de un modelo con imperfecciones iniciales que suaviza la respuesta.

Un pequeño incremento por encima de la carga crítica producen deflexiones considerables y a medida que la carga aumenta la deflexión sigue aumentando pero con una tasa de crecimiento siempre decreciente, lo cual es debido al efecto estabilizador de las tensiones de membrana que se desarrollan a medida que el pandeo progresa. Este comportamiento es característico del post-pandeo de placas, sin importar cuáles sean las condiciones de contorno.

Por otro lado, para cargas elevadas ambas soluciones divergen. En la solución de MEF el desplazamiento cesa de aumentar con la carga y pasa a reducirse para  $\mathcal{P} > 4$ . Esto es debido a que en MEF empieza a producirse un cambio de modo: la placa pasa de deformarse como una semi-onda a deformarse como una onda completa. Este comportamiento es irreal, la solución de MEF deja de tener sentido en este rango de valores ya que la carga empieza a disminuir con la longitud de arco, como se muestra en la Fig. 4.10. La evolución de  $\mathcal{P}$  con la longitud de arco debe ser suave y creciente para garantizar resultados realistas. Dado que no se ha conseguido evitar este comportamiento irreal a cargas elevadas mediante la ponderación de imperfecciones se deben introducir modelos de plasticidad [18].

En la Fig 4.11 se representa la deflexión  $w$  para distintos ratios de post-pandeo obtenida

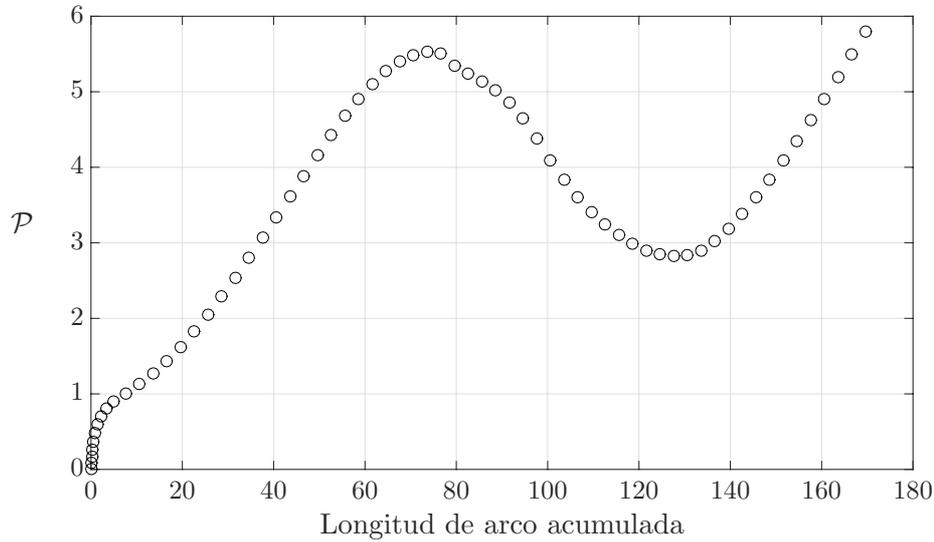


Figura 4.10: Evolución del *load proportionality factor*  $\lambda \equiv \mathcal{P}$  con la longitud de arco acumulada en el análisis del post-pandeo de la placa de aluminio a compresión.

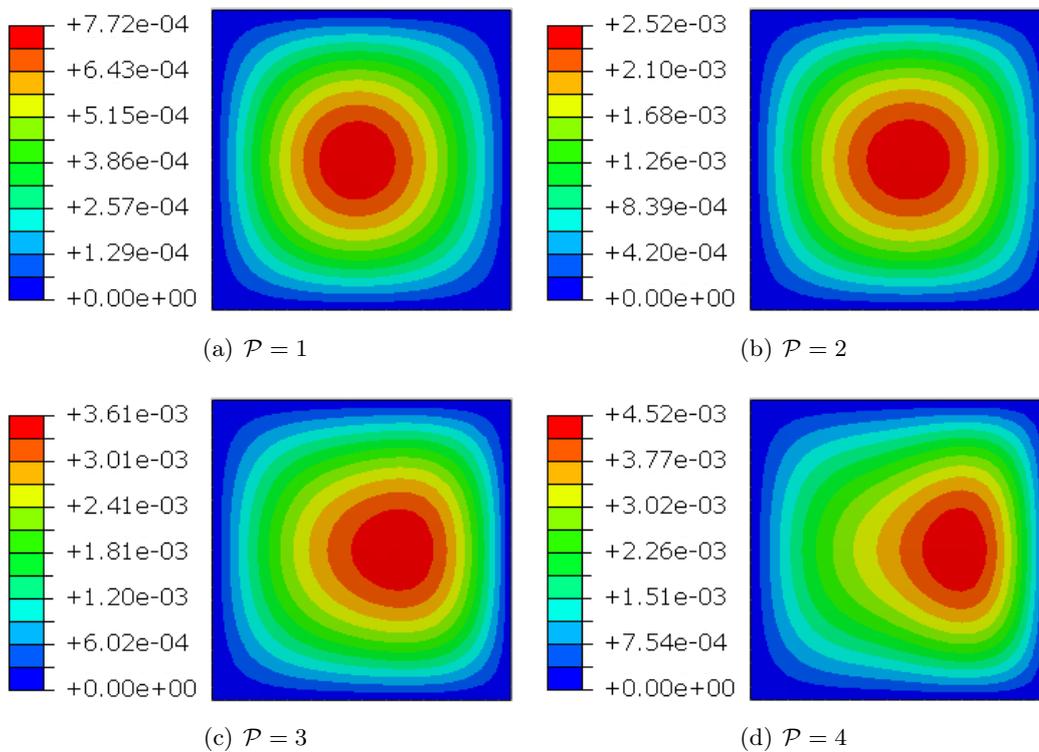


Figura 4.11: Evolución de la deflexión  $w$  en la placa de aluminio a medida que aumenta el ratio de post-pandeo obtenida mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>. Distribución no realista para  $\mathcal{P} \geq 3$ .

por MEF. Como se puede apreciar las primeras coinciden con la función de forma elegida (Fig. 4.3). A medida que  $\mathcal{P}$  aumenta se puede observar cómo  $w$  varía y en  $\mathcal{P} = 4$  la deflexión máxima deja de producirse en el centro desplazándose a la derecha, ya que como se ha comentado para cargas elevadas tiende a deformarse como una onda completa.

#### 4.5.2. Placa de material compuesto

Se considera un laminado similar al estudiado en la Sección 3.5, cuyas propiedades de lámina se recogen en la Tabla 3.1 y secuencia de apilamiento es  $[(45/-45)_2/0_2/90_2]_s$ . En este caso se toma un espesor de lámina  $h_p = 0.15$  mm, de modo que el espesor total es  $h = 2.4$  mm. Para el estudio del post-pandeo se necesitan las rigideces a flexión y también a extensión, aplicando el desarrollo de la Sección 2.2 se obtiene los resultados de la Tabla 4.2.

Rigideces a extensión $[\text{N/m}^{-1}] 10^6$				Rigideces a flexión $[\text{N m}]$			
$A_{11}$	13.46	$A_{12}$	4.17	$D_{11}$	58.47	$D_{12}$	33.03
$A_{22}$	13.46	$A_{66}$	4.46	$D_{22}$	44.78	$D_{66}$	35.31
$A_{16}$	0	$A_{26}$	0	$D_{16}$	5.14	$D_{26}$	5.14

Tabla 4.2: Rigideces del laminado AS4D/9310 quasi-isótropo utilizado en los análisis.

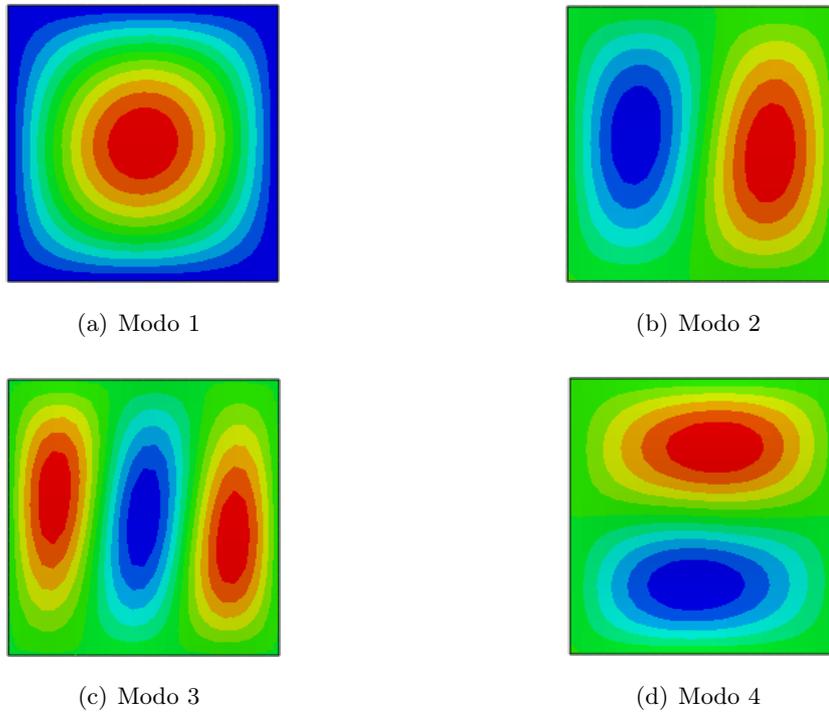


Figura 4.12: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo bajo compresión  $N_x$  obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

El espesor de lámina se ha escogido de manera que las rigideces a flexión del laminado sean similares a las de la placa de aluminio analizada en la sección anterior, según el siguiente criterio:

$$\text{Aluminio: } D = 51.28 \text{ N m ; } \quad \text{Laminado: } \sqrt{D_{11} D_{22}} = 51.17 \text{ N m} \quad (4.48)$$

La ponderación de los modos utilizada es la misma que para la placa de aluminio Ec. (4.47) y en la Fig. 4.12 se representan dichos modos. Como se puede observar, los modos de la placa de material compuesto presentan algunas ligeras diferencias, ya que las ondas se encuentran algo distorsionadas debido a la anisotropía de las propiedades materiales.

En la Fig. 4.13 se compara el resultado analítico, Ec. (4.30), con los resultados obtenidos por MEF. La evolución de ambas curvas es análoga a las de la Fig. 4.9 y los resultados son de nuevo satisfactorios. En el caso de material compuesto la solución de MEF diverge para  $\mathcal{P} = 2.5$ , mientras que para aluminio la divergencia comenzaba a partir de  $\mathcal{P} = 3$ .

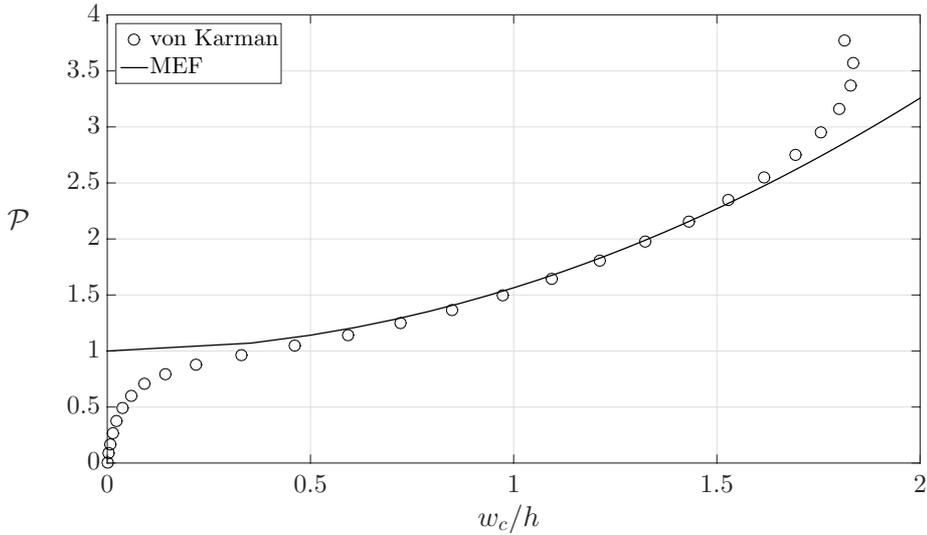


Figura 4.13: Evolución de la deflexión en el centro de la placa de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo con el ratio de post-pandeo. Comparación entre analítico y MEF.

En la Fig. 4.14 se representa la evolución de la deflexión en el conjunto de la placa para varios ratios de post-pandeo que, como se puede apreciar, es muy similar a la de la placa de aluminio.

Por último, en la Fig. 4.15 se comparan los resultados obtenidos en MEF para ambos materiales, adimensionalizando el desplazamiento con el espesor correspondiente a cada caso. Se observa una evolución similar, con valores de deflexión algo mayores en la placa de material compuesto. Los resultados obtenidos para ambos materiales son muy similares, ya que el laminado analizado es quasi-isótropo. Aun conservando las mismas láminas, las posibles secuencias de apilamiento son infinitas y sería posible conseguir laminados cuyo comportamiento sea más diferente del de la placa de aluminio e incluso optimizarlo para estas condiciones de carga.

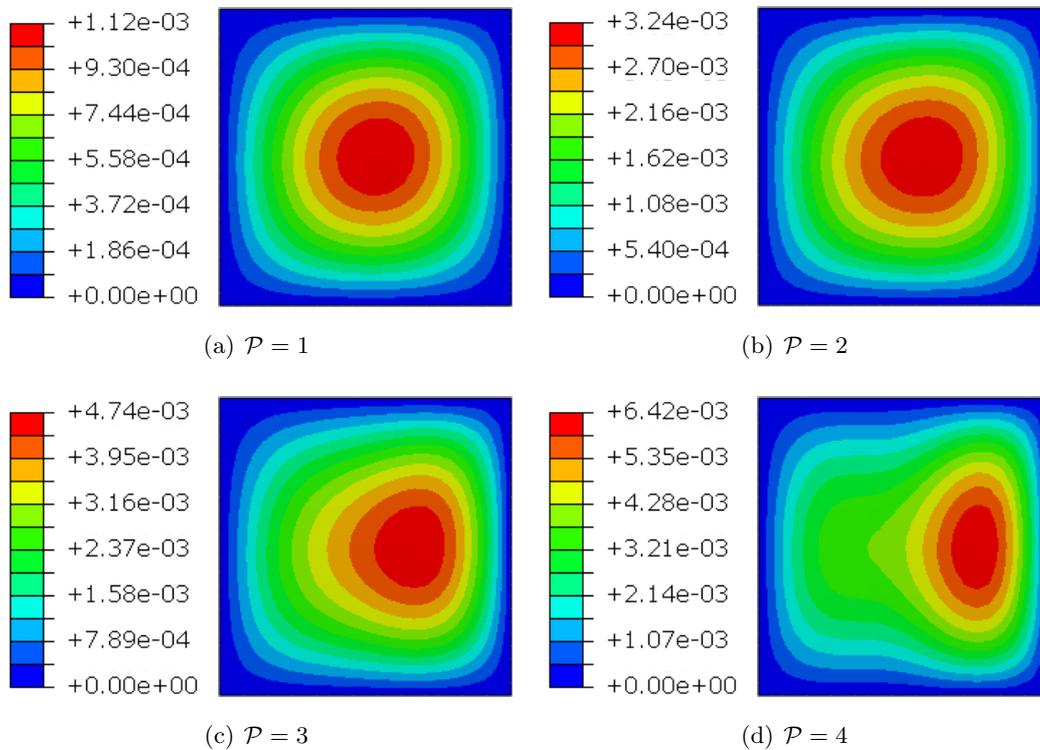


Figura 4.14: Evolución de la deflexión  $w$  en la placa de material compuesto AS4D/9310 con el ratio de post-pandeo obtenida mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup> (no realista para  $\mathcal{P} \geq 2.5$ ).

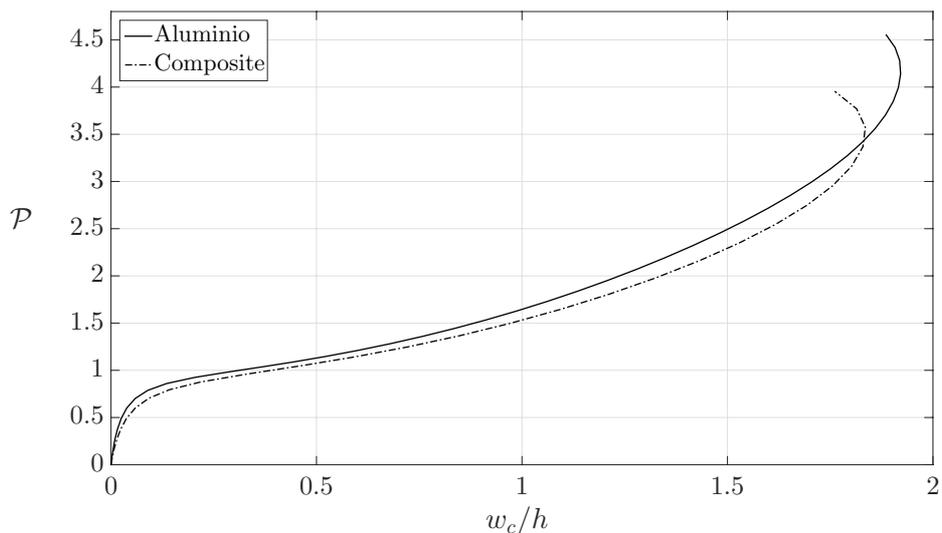


Figura 4.15: Evolución de la deflexión en el centro con el ratio de post-pandeo obtenida mediante MEF. Comparación entre aluminio y material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo.

## 4.6. Estudio de las tensiones

Como se ha podido comprobar la evolución de la deflexión es muy similar para aluminio y material compuesto. Con el campo de tensiones en el plano medio o capa de  $90^\circ$  ocurre lo mismo y por ello este análisis se centrará únicamente en la placa de aluminio.

### 4.6.1. Redistribución de tensiones

Conocida la expresión analítica de la deflexión  $w$  es posible calcular cualquier otra variable en la placa. La sollicitación  $N_x$  se obtiene sustituyendo  $w$  en la definición de  $F$ , Ec. (4.10).

$$N_x = -\frac{P_x}{a} - \frac{A_d}{A_{22}} \frac{w_1}{32} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \quad (4.49)$$

Como se puede apreciar,  $N_x$  depende de  $y$  pero no de  $x$ , de modo que su distribución será la misma en cualquier sección  $x = \text{cte}$ . En la Fig. 4.17 se muestra la evolución de  $\sigma_x$  (equivalente a la de  $N_x$ ) para distintos ratios de post-pandeo. A medida que  $\mathcal{P}$  aumenta la carga se redistribuye hacia los bordes de manera que el centro pierde rigidez. Este fenómeno es cada vez más acusado a medida que la carga aumenta.

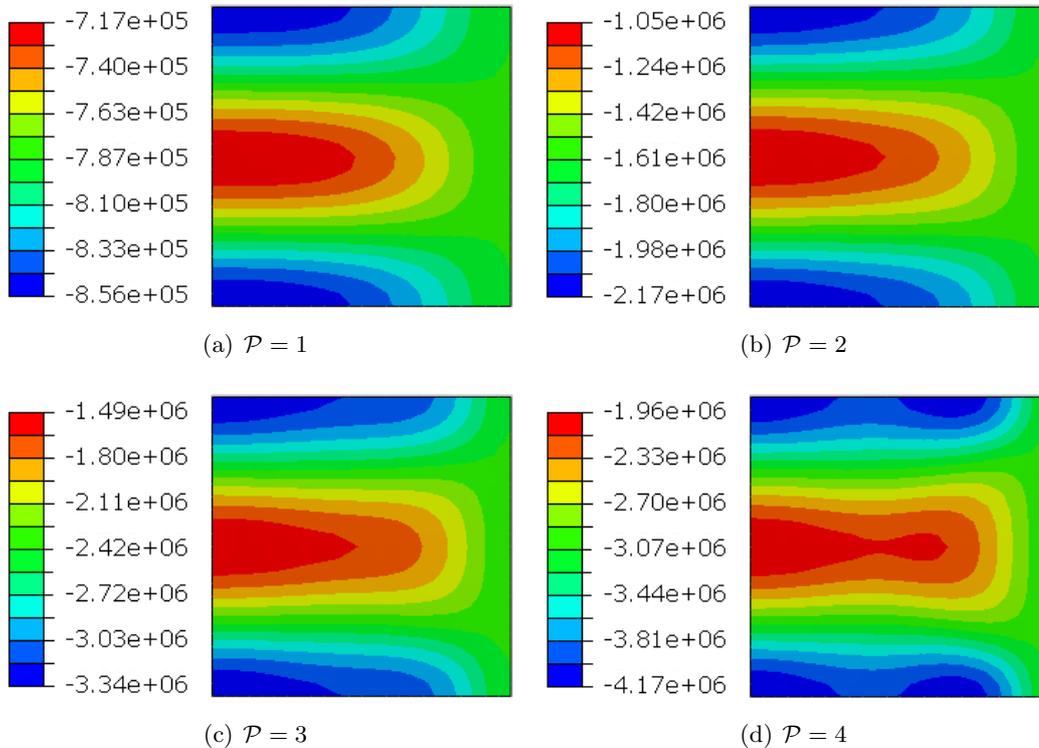


Figura 4.16: Evolución de las tensiones  $\sigma_x$  en el plano medio de la placa de aluminio a medida que aumenta el ratio de post-pandeo obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

En cuanto a la solución de MEF, en la Fig. 4.16 se representan las tensiones  $\sigma_x$  en el plano medio de la placa para varios factores de carga de post-pandeo. Como se puede observar también es constante en  $x$  excepto cerca del borde derecho, en el que se aplica la carga. En este borde el valor de la tensión es uniforme e igual a la tensión media, ya que la carga aplicada también es uniforme. Para obtener la distribución de  $\sigma_x$  a lo largo de  $y$  se estudia la sección  $x/a = 0.1$  cercana al borde izquierdo.

En la Fig. 4.17 se comparan las distribuciones de tensiones obtenidas por ambos métodos. Se puede observar que la solución analítica proporciona resultados muy satisfactorios. Para  $\mathcal{P} = 1$  la carga ya se ha distribuido ligeramente hacia los bordes en el caso de MEF debido a que esta solución corresponde con una placa con imperfecciones iniciales. Para  $\mathcal{P} = 2$  ambas soluciones son prácticamente coincidentes. A medida que  $\mathcal{P}$  aumenta el la diferencia aumenta pero los resultados siguen siendo razonablemente precisos hasta  $\mathcal{P} = 3$ , mientras que para  $\mathcal{P} = 4$  las diferencias ya son notables. La discrepancia en las tensiones está directamente relacionada con la diferencia entre las deflexiones del centro de la placa representada de la Fig. 4.9. En esta figura se observa que ambas soluciones divergen para  $\mathcal{P} > 3$  y por tanto lo mismo sucede con las tensiones.

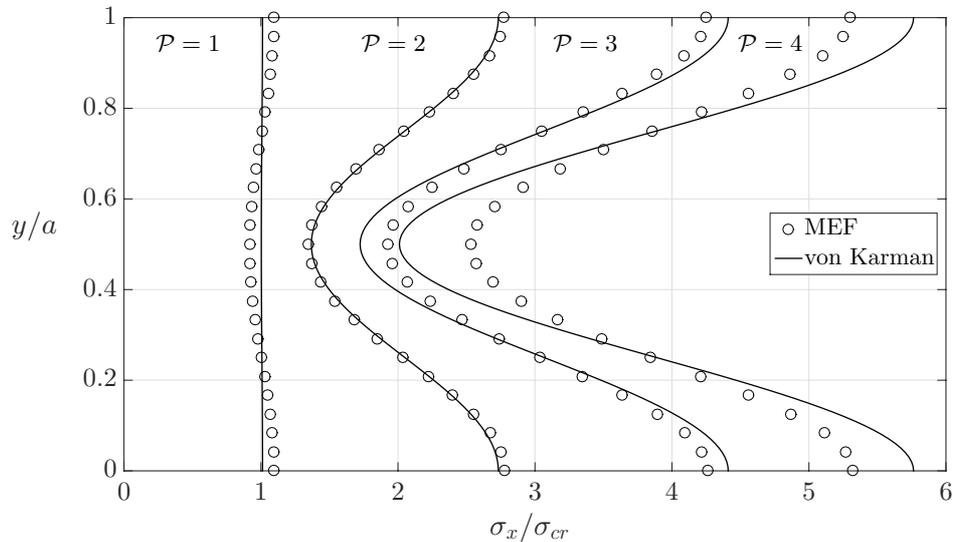


Figura 4.17: Redistribución de tensiones  $\sigma_x$  cerca del borde izquierdo de la placa de aluminio (a lo largo de la vertical  $x/a = 0.10$  m en MEF). Comparación entre solución analítica y MEF.

En la Ec. (4.50) se muestra la relación entre tensiones  $\sigma_x$  y solicitaciones  $N_x$ . Ambas magnitudes son equivalente y siguen la misma distribución.

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} \quad (4.50)$$

Los resultados de la Fig 4.17 se presentan adimensionalizados con el valor crítico y por tanto son válidos para las dos relaciones de la Ec. (4.51).

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr}} = \frac{N_x}{N_{cr}} \quad (4.51)$$

Antes del pandeo, las tensiones medias y máximas son idénticas. Sin embargo, debido a la redistribución de tensiones hacia los bordes la diferencia entre las tensiones máximas que se alcanzan en éstos y las tensiones medias es cada vez mayor. El valor medio de la tensión  $\sigma_{av}$  es:

$$\sigma_{av} = \frac{P_x}{a h} \quad (4.52)$$

Adimensionalizada con el valor crítico, la tensión media corresponde con el factor de carga de post-pandeo:

$$\mathcal{P} = \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{cr}} = \frac{N_x|_{av}}{N_{cr}} = \frac{P_x}{P_{cr}} \quad (4.53)$$

En la Fig. 4.18 se muestra la evolución de tensión máxima alcanzada en los bordes con la tensión media.

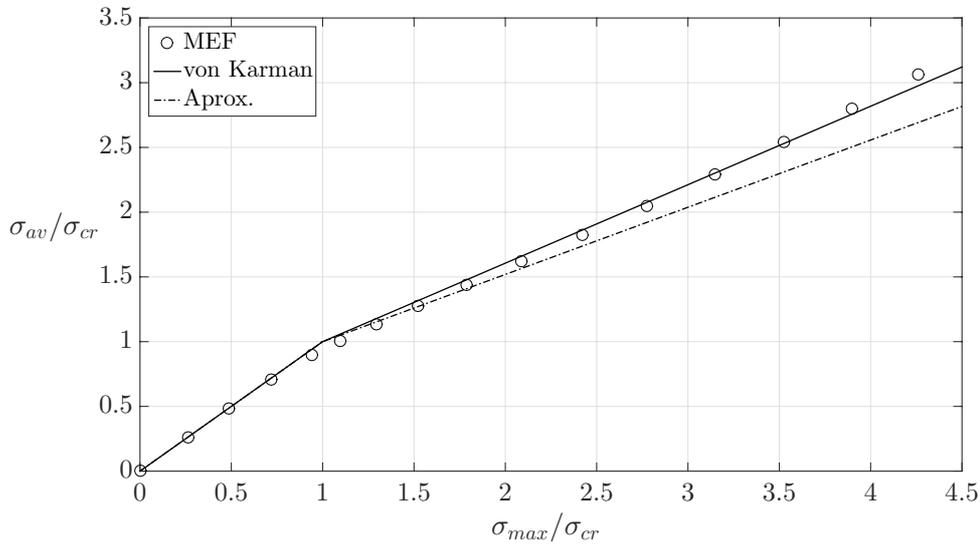


Figura 4.18: Evolución de la relación entre tensiones  $\sigma_x$  medias y máximas. Comparación entre modelo analítico, MEF y modelo aproximado de la referencia [8].

En la referencia [8] se realiza una estimación lineal en el régimen de post-pandeo denominando  $\varphi$  a la pendiente de la recta  $\sigma_{av} - \sigma_{max}$ . En dicha referencia se muestran numerosas expresiones para calcular  $\varphi$  en función de la relación de aspecto de la placa y de sus condiciones de contorno. Este modelo se detalla en la Ec. (4.54):

$$\varphi = \frac{\partial \sigma_{av}}{\partial \sigma_{max}} ; \quad \sigma_{av} = \begin{cases} \sigma_{max} & ; \mathcal{P} \leq 1 \\ \sigma_{max} + \varphi \sigma_{max} & ; \mathcal{P} > 1 \end{cases} \quad (4.54)$$

La expresión de  $\varphi$  para placa articulada con bordes no cargados que permanecen rectos e inmóviles es la indicada en la Ec. (4.55), que para el caso de placa cuadrada da como resultado:

$$\varphi = \frac{(1 + 3r^4) (1 + r^4)}{(3 + r^4) (1 + 3r^4) - 2r^2 [2r^2 - \nu (1 + r^4)]} ; \quad r = 1 \implies \varphi = 0.519 \quad (4.55)$$

En [8] se especifica que esta aproximación es válida para  $\mathcal{P} \leq 2$  y en la Fig. 4.18 se puede comprobar que efectivamente los resultados que proporciona se aproximan con una precisión razonable a la de MEF en este rango. En los modelos analíticos y MEF la pendiente es  $\varphi = 0.64$ .

#### 4.6.2. Ancho efectivo

El término ancho efectivo  $a_{ef}$  es ampliamente usado en el diseño de placas a compresión. Se trata de un modelo simplificado en el que la carga es soportada únicamente en una región cerca de los bordes de modo que en el centro la carga soportada es nula, conservando el valor medio, como se esquematiza en la Fig. 4.19.

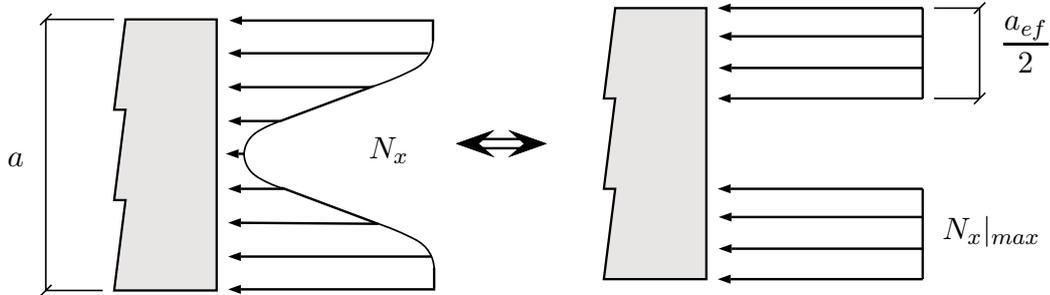


Figura 4.19: Modelo simplificado para distribución de tensiones: concepto de ancho efectivo  $a_{ef}$ .

La figura de la izquierda representa el caso  $\mathcal{P} = 4$  de la Fig.4.17 y en la de la derecha se desprecia  $N_x$  en la zona central resultando en dos escalones constantes. El valor máximo de  $N_x$  aparece en los bordes, y su expresión analítica que se obtiene evaluando la Ec. (4.49) en  $y = 0, a$  es:

$$N_x|_{max} = -\frac{P_x}{a} - \frac{A_d}{A_{22}} \frac{w_1}{32} \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \quad (4.56)$$

donde la expresión de  $w_1$  viene dada por la Ec. (4.30) para materiales compuestos y por la Ec.(4.31) para isótropos. Además para materiales isótropos  $A_d/A_{22} = E h$ .

El ancho efectivo se calcula igualando el valor total de la carga aplicada  $P_x$  en las dos situaciones de la figura anterior:

$$\int_0^a N_x dy = N_x|_{max} a_{ef} = N_x|_{av} a \quad (4.57)$$

de donde se deduce que:

$$\frac{a_{ef}}{a} = \frac{N_x|_{av}}{N_x|_{max}} = \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{max}} \quad (4.58)$$

En la Fig. 4.20 se representa la evolución del ancho efectivo con la tensión máxima, comparando los distintos modelos. Para el caso de placa perfectamente plana el ancho efectivo es igual al de la placa bajo cargas inferiores a la crítica, mientras que para la placa con imperfecciones, que corresponde con el modelo MEF,  $a_{ef}$  llega a reducirse un 5%. Una vez la placa pandea el ancho efectivo se reduce llegando a ser el 70% del de la placa para  $\sigma_{max} = 4\sigma_{cr}$ , que corresponde a  $\mathcal{P} = 2.8$ .

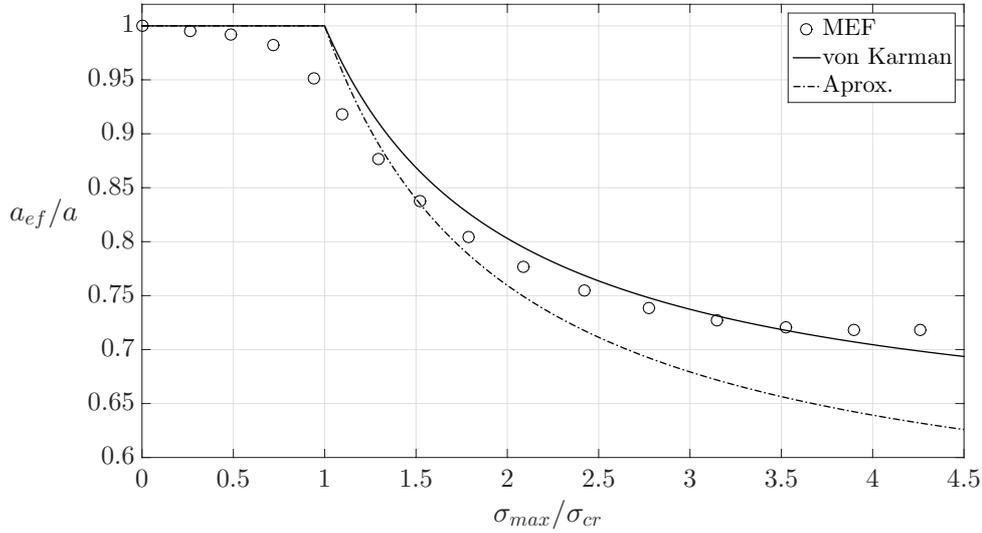


Figura 4.20: Evolución del ancho efectivo con las tensiones  $\sigma_x$  máximas. Comparación entre modelo analítico, MEF y modelo aproximado de la referencia [8].

Según el modelo lineal de [8] el ancho efectivo es:

$$\frac{a_{ef}}{a} = \varphi + (1 - \varphi) \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}} \quad (4.59)$$

Como se observa en la Fig. 4.20 la precisión de este modelo es aceptable en su rango de aplicabilidad  $\mathcal{P} \leq 2$ .

### 4.6.3. Pérdida de rigidez compresiva

Por último se estudia la relación entre tensiones y deformaciones. Se analiza la relación entre la tensión media y la deformación en el borde  $x = a$  que se calcula a partir de la Ec. (4.60).

$$\varepsilon_a = \frac{u(a, y)}{a} \quad (4.60)$$

La expresión analítica del numerador ya ha sido calculada anteriormente en la Ec. (4.22). En la Fig. 4.21 se comparan los resultados que proporcionan los distintos modelos.

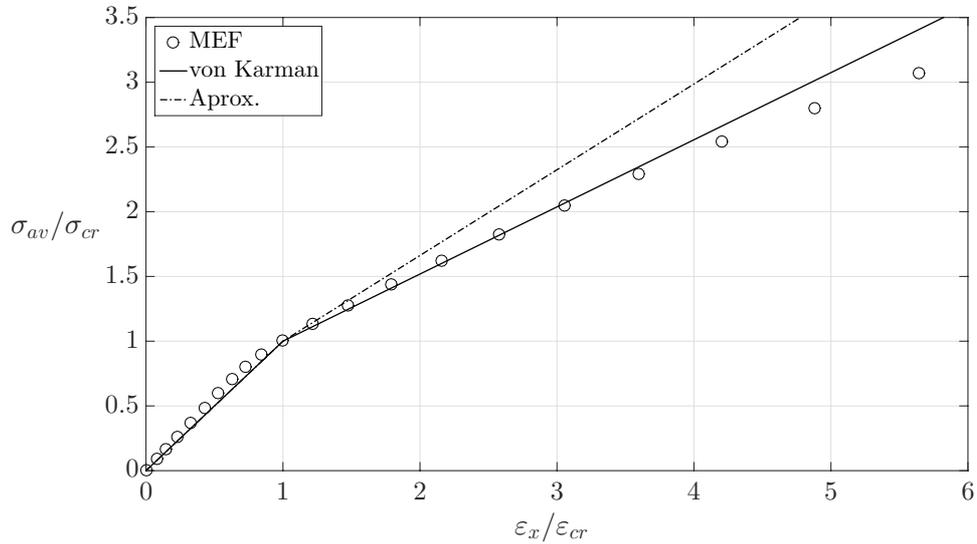


Figura 4.21: Evolución de la relación entre tensiones  $\sigma_x$  medias y deformaciones en el borde  $x = a$ : pérdida de rigidez compresiva. Comparación entre modelo analítico, MEF y modelo aproximado de [8].

En [8] se utiliza de nuevo un modelo lineal, que se describe en la Ec. (4.61)

$$\mu = \frac{\partial E^*}{\partial E} ; \quad \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{cr}} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{cr}} & ; \mathcal{P} \leq 1 \\ \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{cr}} + \mu \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{cr}} & ; \mathcal{P} > 1 \end{cases} \quad (4.61)$$

La expresión de  $\mu$  para placa articulada con bordes no cargados rectos e inmóviles es la indicada en la Ec. (4.62), que para el caso de placa cuadrada da como resultado:

$$\mu = \frac{(1 + r^4)(3r^4 + 1)(1 - \nu^2)}{(3 + r^4)(1 + 3r^4) - [2r^2 - \nu(1 + r^4)]^2} ; \quad r = 1 \implies \mu = 0.662 \quad (4.62)$$

De nuevo los resultados que este modelo aproximado proporcionan son aceptable en su rango de aplicabilidad  $\mathcal{P} \leq 2$ . Como se puede apreciar, la hipótesis de linealidad para la región de post-pandeo es aceptable y el resultado analítico se aproxima con bastante precisión al de MEF. La solución analítica predice  $\mu = 0.512$ , lo que indica que la rigidez compresiva en régimen de post-pandeo es la mitad de la que tenía la placa inicialmente. Esta pérdida de rigidez explica la redistribución de carga que tiene lugar hacia los bordes.

### 4.7. Conclusiones generales

Tras el estudio realizado, se concluye que las principales características del post-pandeo de placas a compresión son:

- Aumento de las deflexiones fuera del plano
- Redistribución de la tensiones del plano medio hacia los bordes
- Pérdida de rigidez compresiva

La solución analítica es sencilla y proporciona resultados muy satisfactorios que concuerdan con un error muy reducido con los obtenidos con MEF. El modelo de [8] es menos preciso, aunque con resultados aceptables dentro del rango  $\mathcal{P} \leq 2$ . A pesar de ello, se trata de un aproximación sencilla, rápida y de gran utilidad ya que además es aplicable a placas de otras relaciones de aspecto.

El estudio realizado en este capítulo se ha limitado al caso de placas con bordes no cargados que permanecen rectos e inmóviles (Fig. 4.22 izquierda). Sin embargo, las condiciones de contorno son muy influyentes en el comportamiento a post-pandeo y son muchos otros los posibles casos que pueden analizarse, por ejemplo en paneles aeronáuticos. Algunos de estos casos se muestran en la Fig. 4.22.

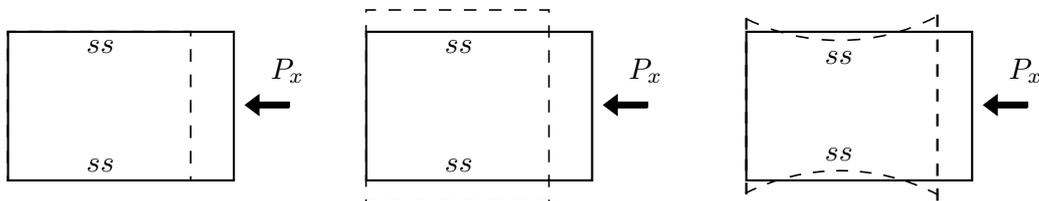


Figura 4.22: Posibles casos de estudio según las condiciones de contorno en los bordes no cargados.

Aun así, el comportamiento en post-pandeo observado está presente en todos estos casos y las principales características descritas arriba son completamente generales.

## 5.1. Introducción

El último paso antes de estudiar las vigas armadas es analizar el post-pandeo de placas sometidas a cortante. En la Fig. 5.1 se muestra un ensayo experimental tomado de la literatura en el que se observa la deformación característica de una placa a cortante en régimen de post-pandeo.

El primer objetivo de este capítulo es estudiar la deflexión de la placa, para ello se emplearán las ecuaciones de von Karman en el estudio analítico y el método de Riks en el de MEF. Ambas metodologías han sido explicadas en el capítulo anterior, donde se han aplicado al estudio de placas a compresión. El segundo objetivo es analizar el campo de tensiones para lo que se explicará el concepto de tensión diagonal, que es la base del estudio de las viga armadas. También se comparará n estas tensiones las obtenidas con MEF.

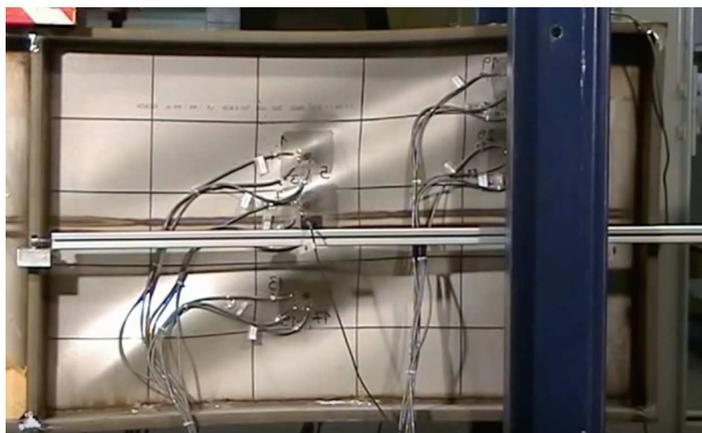


Figura 5.1: Ensayo experimental de un placa metálica a sometida a cortante en régimen de post-pandeo [24].

Se estudiarán los mismos materiales del capítulo anterior, un aluminio  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $h = 2$  mm y el laminado quasi-isótropo de material compuesto AS4D/9310 cuyas características se detallan en la Tabla 4.2 y cuyo espesor total es  $h = 2.4$  mm

## 5.2. Estudio de la deflexión

La Fig. 5.2 esquematiza el caso de estudio. Para la resolución analítica basta con las condiciones de contorno de placa articulada ( $w = 0$  en bordes); sin embargo, para el estudio MEF es necesario imponer alguna restricción al movimiento en  $x$ ,  $y$  para que no aparezcan movimientos de sólido rígido. Por esta razón en MEF se han impuesto las condiciones de contorno esquematizadas en la Fig. 5.2, restringiendo los movimientos en  $x$ ,  $y$  del borde izquierdo

vertical.

### 5.2.1. Resolución analítica

A continuación se resuelven las ecuaciones de von Karman de manera similar a como se hizo en la Sección 4.3.1 para placas a compresión. La función de prueba utilizada para la deflexión  $w$  viene dada por la Ec. (5.1), donde  $w_1$  es la deflexión del centro de la placa. Esta función (ver Fig. 5.3) corresponde con el primer modo de pandeo que se obtiene en el método de Ritz con 4 términos Ec. (3.21) y se escoge porque se asemeja a la deflexión que se observa experimentalmente (Fig. 5.1). Como se verá más adelante también se asemeja a la obtenida en MEF.

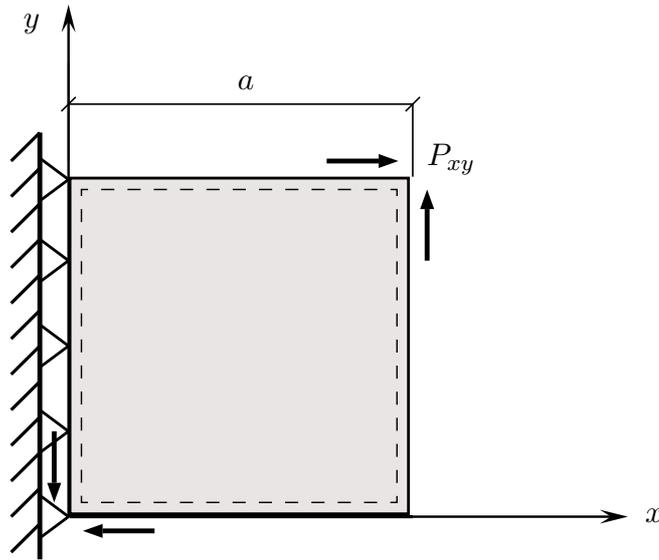


Figura 5.2: Esquema del problema en estudio: placa cuadrada articulada sometida a carga cortante  $P_{xy}$ .

$$w = w_1 \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \right] \quad (5.1)$$

El siguiente paso es desarrollar la función de tensiones de Airy  $F$ . Como se ha explicado en la Sección 4.3.2,  $F$  debe ser tal que permita identificar coeficientes en la segunda ecuación de von Karman Ec. (4.7). Para ello, se deben observar los términos del lado derecho y elegir funciones de prueba para  $F$  que den lugar a estos mismos términos en el izquierdo. Introduciendo la expresión de  $w$  en este lado derecho y operando se llega la Ec. (5.2).

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\pi^4 w_1^2}{2 a^4} \left[ \cos \left( \frac{2 \pi x}{a} \right) + \cos \left( \frac{4 \pi x}{a} \right) + \right. \\ & \left. + \cos \left( \frac{3 \pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{a} \right) + \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{3 \pi y}{a} \right) + \cos \left( \frac{2 \pi y}{a} \right) + \cos \left( \frac{4 \pi y}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

La función  $F$  elegida se detalla en la Ec. (5.3), que como se puede observar depende de un término que garantiza la equivalencia de fuerzas y de seis funciones de valores medios nulos con seis constantes asociadas.

$$\begin{aligned} F = & -\frac{P_{xy} x y}{a} + C_1 \cos \left( \frac{2 \pi x}{a} \right) + C_2 \cos \left( \frac{4 \pi x}{a} \right) + C_3 \cos \left( \frac{3 \pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{a} \right) + \\ & + C_4 \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{3 \pi y}{a} \right) + C_5 \cos \left( \frac{2 \pi y}{a} \right) + C_6 \cos \left( \frac{4 \pi y}{a} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Introduciendo ahora  $F$  en el lado de izquierdo de la segunda ecuación de von Karman se obtiene Ec. (5.4).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_d} \left( A_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2 A_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{A_{66}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \\ & - \frac{\pi^4}{a^4 A_d} \left[ 16 A_{11} C_1 \cos \left( \frac{2 \pi x}{a} \right) + 256 A_{11} C_2 \cos \left( \frac{4 \pi x}{a} \right) + \right. \\ & + \left( 9 A_{12}^2 - 9 A_{11} A_{22} - 81 A_{11} A_{66} + 18 A_{12} A_{66} - A_{22} A_{66} \right) C_3 \cos \left( \frac{3 \pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{a} \right) + \\ & + \left( 9 A_{12}^2 - 9 A_{11} A_{22} - A_{11} A_{66} + 18 A_{12} A_{66} - 81 A_{22} A_{66} \right) C_4 \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{3 \pi y}{a} \right) + \\ & \left. + 16 A_{22} C_5 \cos \left( \frac{2 \pi y}{a} \right) + 256 A_{22} C_6 \cos \left( \frac{4 \pi y}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las constantes  $C_i$  se obtienen identificando términos en ambos lados, i.e. entre las expresiones de las Ecs. (5.2) y (5.4). Dado que todas estas constantes son proporcionales al cuadrado de  $w_1$  se definen las nuevas constantes  $c_i = C_i/w_1^2$ , detalladas en la Ec. (5.5) en donde se puede apreciar que dependen únicamente del material.

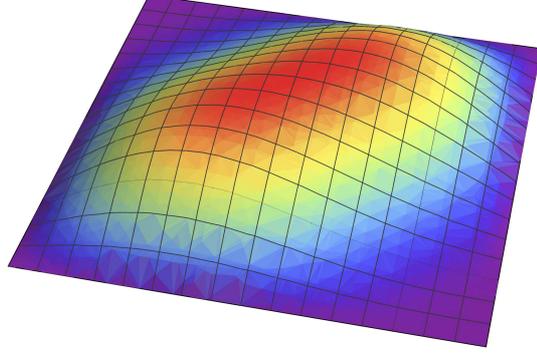


Figura 5.3: Función  $w(x, y)$  utilizada para resolver las ecuaciones de von Karman para placas a cortante y que corresponde con el primer modo de pandeo obtenido por Ritz con 4 términos.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{A_d}{32 A_{11}} ; & c_2 &= \frac{A_d}{512 A_{11}} ; & c_5 &= -\frac{A_d}{32 A_{22}} ; & c_6 &= -\frac{A_d}{512 A_{22}} \\
 c_3 &= -c_4 = -\frac{A_d}{9 A_{12}^2 + 18 A_{12} A_{66} - A_{22} A_{66} - 9 A_{11} (A_{22} + 9 A_{66})}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Una vez definida la función de Airy, las solicitaciones  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  se calculan a partir de la Ec. (4.6). Es necesario comprobar la equivalencia de tensiones, es decir, que el promedio de las tensiones normales es nulo en los bordes:

$$\int_0^a N_x(0, y) dy = \int_0^a N_x(a, y) dy = \int_0^a N_y(x, 0) dx = \int_0^a N_y(x, a) dx = 0 \tag{5.6}$$

y que el de las solicitaciones  $N_{xy}$  coincide con la carga  $P_{xy}$  aplicada:

$$\int_0^a N_{xy}(0, y) dy = \int_0^a N_{xy}(a, y) dy = \int_0^a N_{xy}(x, 0) dx = \int_0^a N_{xy}(x, a) dx = P_{xy} \tag{5.7}$$

Finalmente sólo resta encontrar la relación entre  $w_1$  y  $P_{xy}$  a través de la primera ecuación de von Karman Ec. (4.4). En este caso, a diferencia del de la placa a compresión, no es posible utilizar identificación de términos para hallar dicha relación. Como alternativa, se utiliza un método de minimización de error similar al del método de Galerkin [1], [2]: se multiplican ambos lados de esta ecuación por  $w$  y se integran sobre el área de la placa:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^a \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] w(x, y) dx dy = \\
 = \int_0^a \int_0^a \left[ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] w(x, y) dx dy
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Sustituyendo las expresiones de  $w$ ,  $F$  en la Ec. (5.8) se llega a la Ec. (5.9):

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 w_1^2 \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \right]}{2a^2} = \\ & = \frac{w_1^2 \left[ 32a P_{xy} - 9\pi^4 w_1^2 (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6) \right]}{18a^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Como es habitual, existe una solución trivial:  $w_1 = 0$  para  $P_{xy} < P_{cr}$ . La solución correspondiente al régimen de post-pandeo  $P_{xy} > P_{cr}$  se obtiene despejando  $w_1$  en la Ec. (5.9) y viene dada por la Ec. (5.10):

$$w_1 = \frac{\sqrt{-9\pi^4 \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \right] + 32a P_{xy}}}{3\pi^2 \sqrt{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6}} \quad (5.10)$$

Particularizando esta solución en el punto de inicio del pandeo es posible obtener la expresión de la carga crítica:

$$w_1 = 0 \implies P_{cr} = \frac{9\pi^4 \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \right]}{32a} \quad (5.11)$$

Expresando ahora la carga en función de ratio de post-pandeo  $P_{xy} = \mathcal{P} P_{cr}$  y con la expresión  $P_{cr}$  de la Ec. (5.11) se obtiene la expresión final de  $w_1$ :

$$w_1 = \sqrt{\frac{D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6}} (\mathcal{P} - 1) \quad (5.12)$$

Evaluando los resultados obtenidos para materiales isótropos, la expresión de la carga crítica Ec. (5.11) se transforma en la Ec. (5.13):

$$P_{cr} = \frac{9\pi^4 D}{8a} \quad (5.13)$$

y la de la deformación en el centro en la Ec. (5.14):

$$w_1 = h \sqrt{\frac{6400}{1659(1-\nu^2)}} (\mathcal{P} - 1) \quad (5.14)$$

De igual manera que en placas a compresión se ha llegado a una solución del tipo  $w_1 = k\sqrt{\mathcal{P} - 1}$  donde la constante  $k$  depende de las propiedades materiales y del espesor de la placa.

Además, dado que se ha utilizado como función de prueba la correspondiente al primer modo de pandeo obtenido por Ritz, las expresiones de carga crítica Ec. (5.11) y Ec. (5.13) coinciden con las calculadas en el Capítulo 3 particularizadas para placas cuadradas  $r = 1$  (ver Ecs. (3.18) y (3.34)). El hecho de haber llegado a las mismas expresiones de carga crítica demuestra que los resultados son coherentes y sirve de comprobación.

### 5.2.2. Resolución por MEF y comparación de resultados

Para la resolución en MEF se utiliza la metodología explicada en la Sección 4.4. Las imperfecciones introducidas se definen en base a la ponderación de modos que se detalla en la Ec. (5.15). Es importante destacar que no se utilizan los cuatro primeros modos como en el caso de placas a compresión sino los modos de las cuatro primeras parejas que corresponden con valores de  $P_{xy} > 0$ .

$$\mathbf{w}^* = 1.00 \frac{h}{10} \mathbf{w}_1 + 0.50 \frac{h}{10} \mathbf{w}_3 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_5 + 0.25 \frac{h}{10} \mathbf{w}_7 \quad (5.15)$$

En la Fig. 5.4 y 5.5 se representan los modos de pandeo utilizados en la ponderación para material isotrópico y compuestos respectivamente. Se observa que en el caso de material compuesto los modos presentan algunas diferencias causadas por la anisotropía de las propiedades materiales.

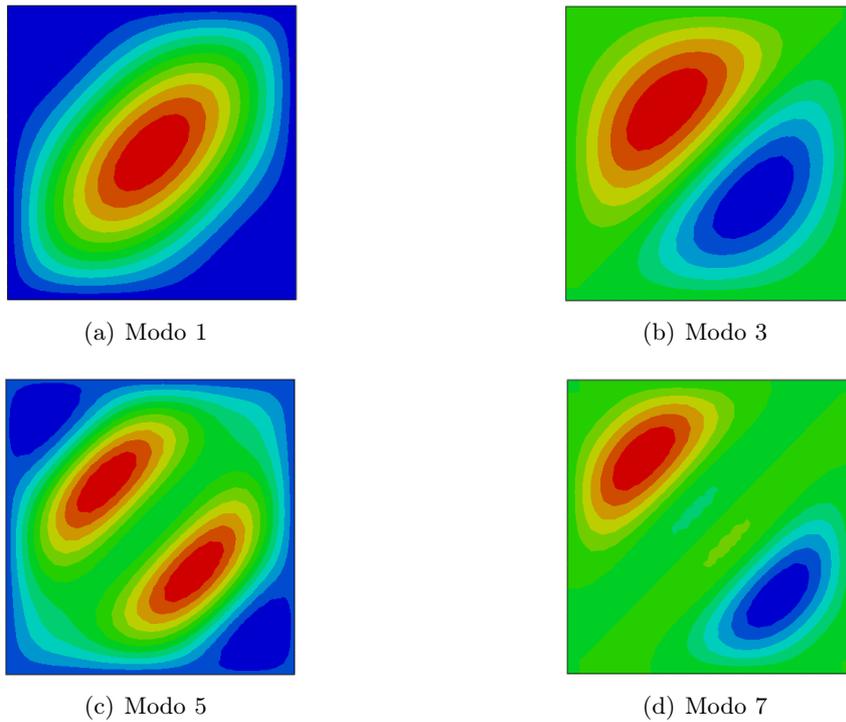


Figura 5.4: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada de material isotrópico a cortante utilizados en la ponderación de imperfecciones obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

En las Fig. 5.6 y 5.7 se representa la evolución de la deformación en el centro con el ratio de carga de post-pandeo. En el intervalo  $0 \leq \mathcal{P} \leq 1$  se observa el comportamiento característico de una placa perfectamente plana en el caso analítico, y de una placa con imperfecciones iniciales en los resultados de MEF (ver Fig. 4.1). El intervalo en el que los resultados de ambos métodos son más similares es  $1 \leq \mathcal{P} \leq 2$  con errores del orden del 10%. A medida que la carga alcanza valores más elevados las diferencias entre ambos métodos se acentúan, siendo el error en la deflexión para  $\mathcal{P} = 3$  del 18% y para  $\mathcal{P} = 4$  del 22% en la placa isotrópica.

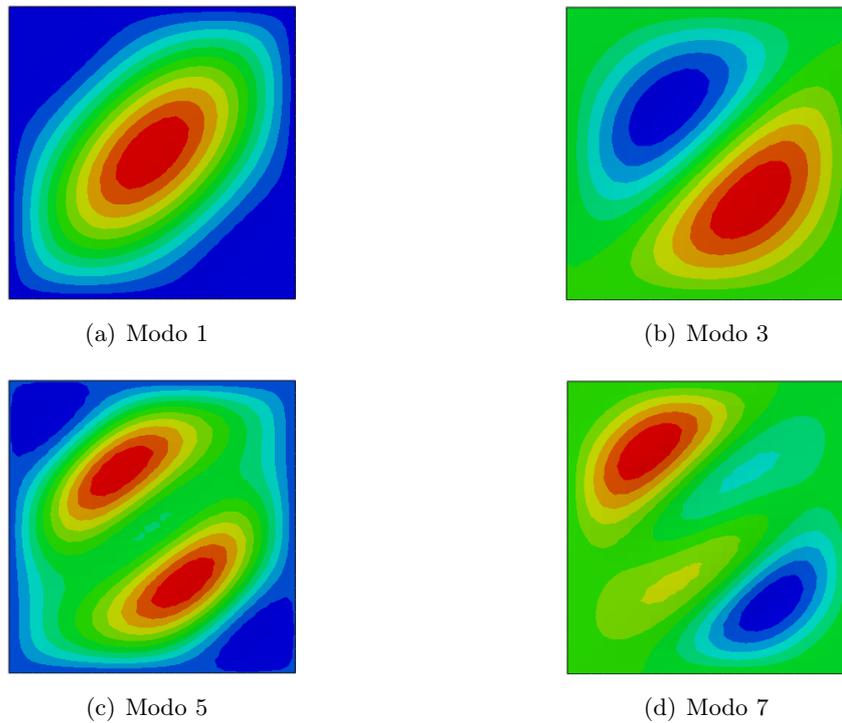


Figura 5.5: Modos de pandeo de placa cuadrada articulada de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo a cortante utilizados en la ponderación de imperfecciones obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

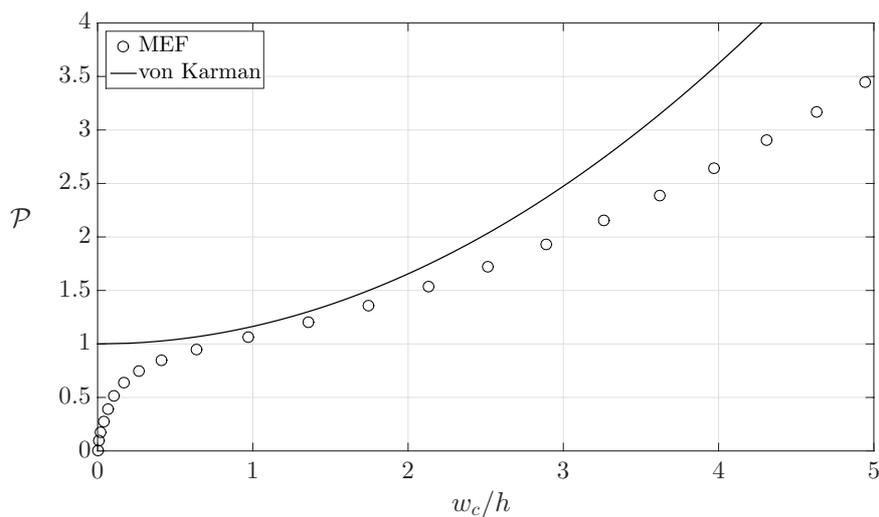


Figura 5.6: Evolución del desplazamiento en el centro de la placa de aluminio con el ratio de post-pandeo. Comparación entre solución analítica y MEF.

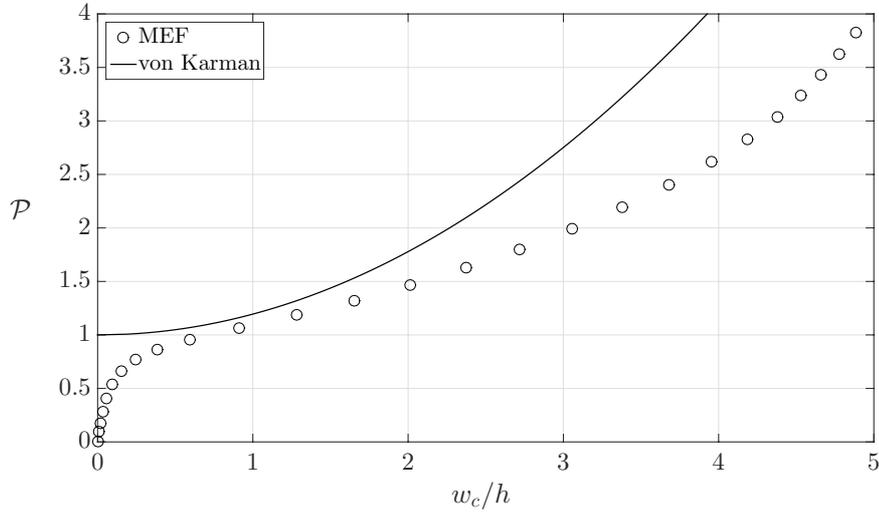


Figura 5.7: Evolución del desplazamiento en el centro de la placa de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo con el ratio de post-pandeo. Comparación entre analítico y MEF.

Además, si se comparan los resultados obtenidos con los de placas a compresión (ver Fig.4.9 y 4.13) se observa que la similitud entre ambos métodos es mucho menor en placas a cortante.

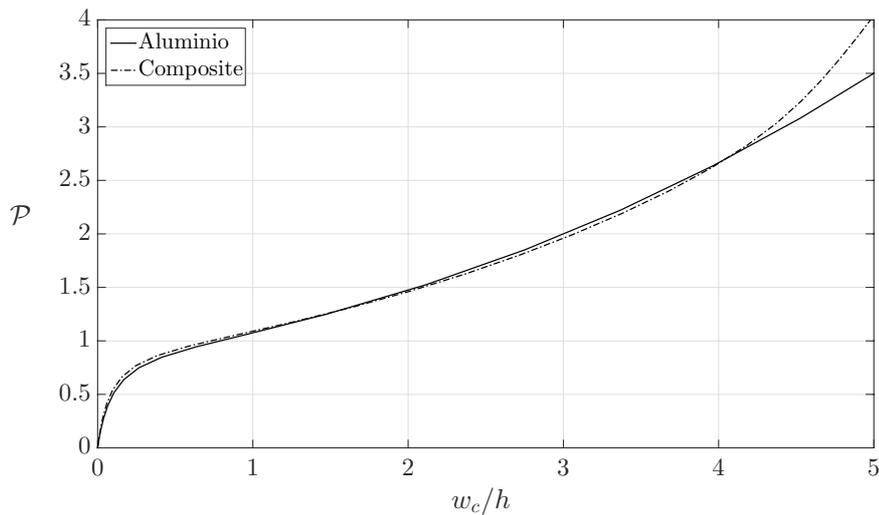


Figura 5.8: Evolución del desplazamiento en el centro de la placa con el ratio de post-pandeo obtenida en MEF. Comparación entre material isótropo y material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo.

Por otro lado, el comportamiento a post-pandeo de cortante sí es similar al de placas a

compresión, con una tasa de crecimiento de la deflexión máxima en el momento de inicio de pandeo y que decrece a medida que la carga aumenta. En la Fig.5.8 se comparan las curvas obtenidas con MEF para ambos materiales. La evolución es prácticamente idéntica para  $\mathcal{P} < 3$  en ambos casos y para  $\mathcal{P} > 3$  la deformación en la placa de aluminio toma valores mayores que la de material compuesto.

Por último en las Fig.5.9 y 5.10 se muestra la evolución de la deformación  $w$  de la placa completa. Como se puede apreciar, la función de prueba utilizada (ver Fig. 5.3) corresponde de cerca con la deflexión de  $\mathcal{P} = 1, \mathcal{P} = 2$ . Sin embargo, para valores más elevados de carga deja de representar con exactitud la deflexión que se obtiene con MEF, lo cual explica por qué la solución analítica no se aproxima con precisión para valores muy elevados de carga. Por otro lado, la deflexión obtenida en MEF se asemeja a la que se observa en el ensayo experimental de la Fig. 5.1. Comparando las deflexiones en material isótropo Fig. 5.9 y compuesto Fig. 5.10 se observa que son muy similares, lo cual es lógico ya que el laminado utilizado es quasi-isótropo.

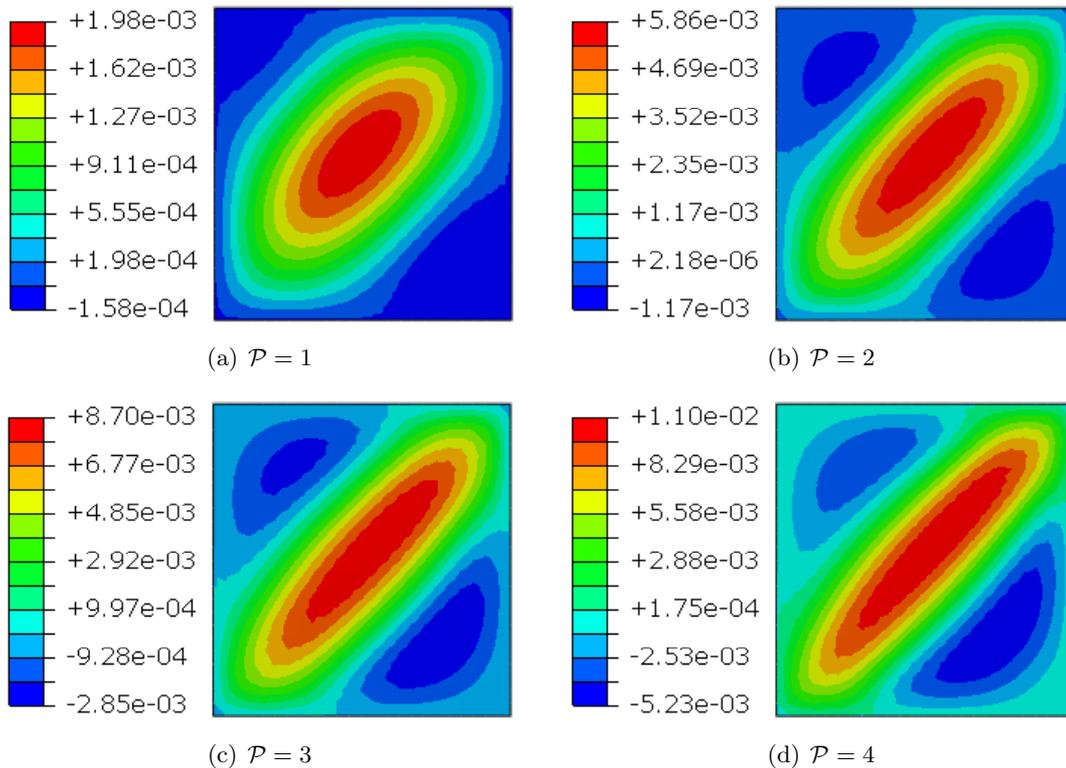


Figura 5.9: Evolución de la deflexión  $w$  de placa de la aluminio con el ratio de post-pandeo  $\mathcal{P}$  obtenida mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

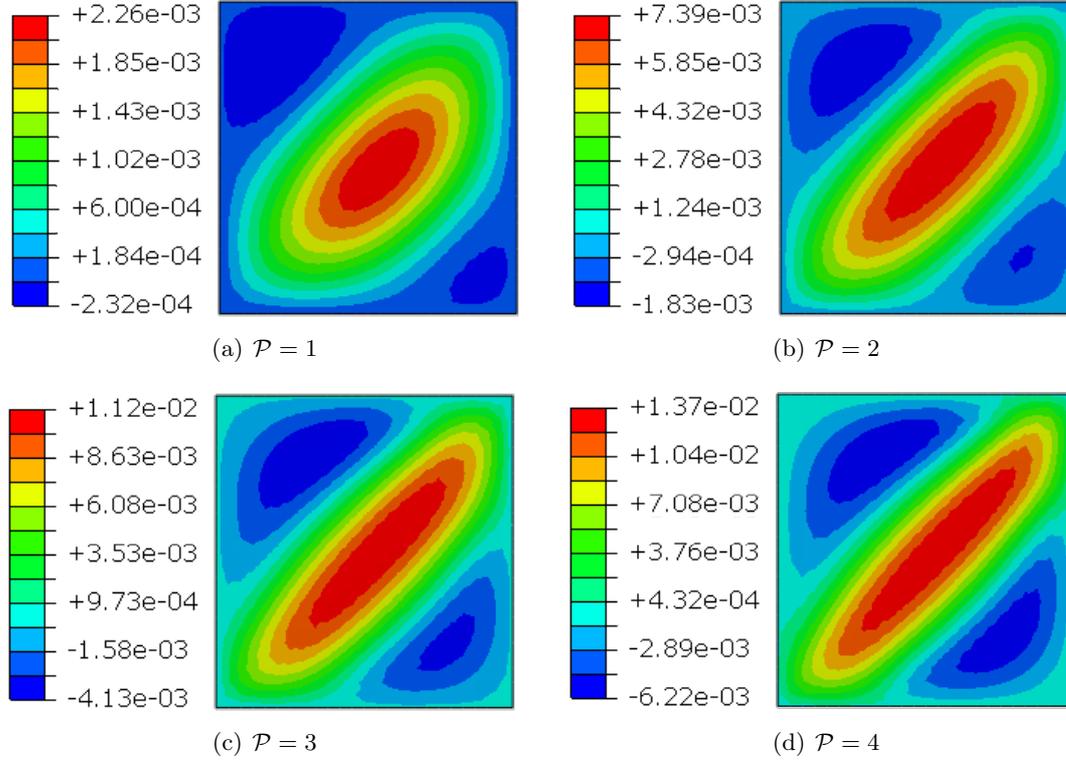


Figura 5.10: Evolución de la deflexión  $w$  de la placa de material compuesto AS4D/9310 quasi-isótropo con el ratio de post-pandeo  $\mathcal{P}$  obtenida mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

### 5.3. Tensión diagonal pura

A continuación se explican los fundamentos de la teoría *Pure Diagonal Tension* PDT. En el caso estudiado la placa se encuentra bajo cortante puro, cuyo valor nominal viene dado por la Ec. (5.16).

$$\tau = \frac{P_{xy}}{a h} \quad (5.16)$$

**Antes del pandeo:**

Cuando la carga cortante es  $P_{xy} < P_{cr}$  la placa no pandeo y el estado de cortante puro equivale a un estado de tensiones biaxial que consiste en una tensión normal de tracción  $\sigma_t$  en la diagonal a  $45^\circ$  (diagonal principal) y otro de compresión  $\sigma_c$  en la diagonal a  $-45^\circ$  (diagonal cruzada). Esto puede derivarse a partir de la rotación del tensor de tensiones mediante la matriz de transformación  $\mathbf{T}(\theta)$ , ya definida en el Capítulo 2 Ec. (2.6) y cuya expresión se repite ahora por comodidad:

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}(45^\circ) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

El sistema original de coordenadas  $x, y$  es girado un ángulo  $\theta$  para pasar a ser el nuevo sistema  $t, c$ . En el sistema de coordenadas  $x, y$  las tensiones normales son nulas  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . Aplicando la transformación con  $\theta = 45^\circ$  se llega al estado bi-axial mencionado:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_c \\ \tau_{tc} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{T}(45^\circ) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

de modo que en el sistema de referencia  $t, c$  las tensiones vienen dadas por la Ec. (5.19) y como se puede observar las tensiones en ambas diagonales son idénticas en valor absoluto. El hecho de que el cortante sea nulo implica que los ejes  $t, c$  son principales. La equivalencia y los sistemas de coordenadas explicados se esquematizan en la Fig. 5.11.

$$\sigma_c = -\tau_{xy}; \quad \sigma_t = \tau_{xy}; \quad \tau_{tc} = 0 \quad (5.19)$$

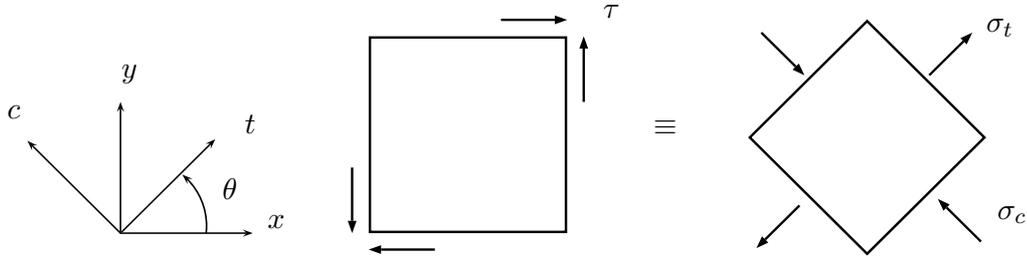


Figura 5.11: Esquivalencia entre el estado de cortante puro en el sistema  $x, y$  y el estado de tensiones biaxial en ejes  $t, c$ .

### Post-Pandeo:

Una vez la placa pandea, se asume que la dirección a compresión no puede soportar esfuerzos mayores al valor crítico, por tanto  $\sigma_c$  permanece constante e igual a  $\tau_{cr}$ . Del nuevo campo de tensiones en los ejes  $t, c$ , que se siguen considerando principales, se conocen las componentes  $\sigma_c = -\tau_{cr}$ ,  $\tau_{tc} = 0$  y la tensión en la diagonal a tracción  $\sigma_t$  es una incógnita a determinar. Por otro lado, en ejes  $x - y$  se conoce el cortante  $\tau_{xy}$  y las tensiones normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ahora son incógnitas. Utilizando la rotación tensorial esta vez de los ejes  $t, c$  a los ejes  $x, y$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(45^\circ) \begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_c \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma_t + \sigma_c}{2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_t - \sigma_c}{2} \quad (5.21)$$

Fijando  $\sigma_c = -\tau_{cr}$  se llega a:

$$\sigma_t = 2\tau_{xy} - \tau_{cr}; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} - \tau_{cr} \quad (5.22)$$

En resumen, el campo de tensión diagonal en la placa queda definido por la Ec. (5.23) y se esquematiza en la Fig. 5.12.

$$\sigma_c = \begin{cases} -\tau_{xy} & ; \tau_{xy} < \tau_{cr} \\ -\tau_{cr} & ; \tau_{xy} > \tau_{cr} \end{cases}; \quad \sigma_t = \begin{cases} \tau_{xy} & ; \tau_{xy} < \tau_{cr} \\ 2\tau_{xy} - \tau_{cr} & ; \tau_{xy} > \tau_{cr} \end{cases} \quad (5.23)$$

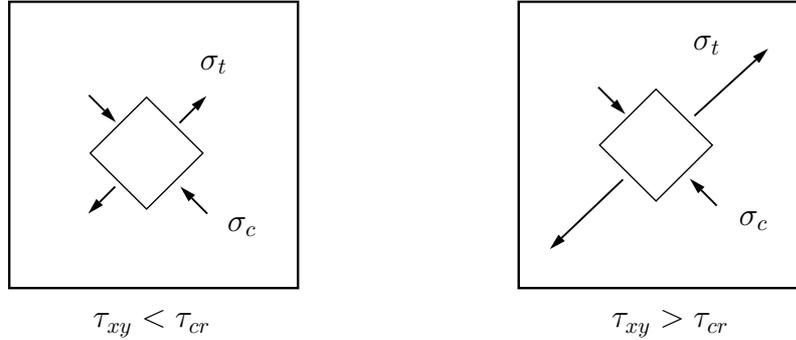


Figura 5.12: Tensión diagonal pura (PDT): campo de tensiones antes del pandeo (izquierda) en el que  $\sigma_t = \sigma_c$  y en régimen de post-pandeo (derecha) en el que  $\sigma_c = \tau_{cr}$ ,  $\sigma_t \gg \sigma_c$ .

La transformación entre cortante puro y un estado biaxial a  $45^\circ$  resulta muy útil para comprender el sentido físico en el estudio de placas a cortante. En la Fig. 5.13 se comparan los dos primeros modos de pandeo a compresión y a cortante. Se puede apreciar que los modos a cortante corresponden con los de compresión girados  $45^\circ$  y además una cierta deformación provocada por la tracción en la otra diagonal.

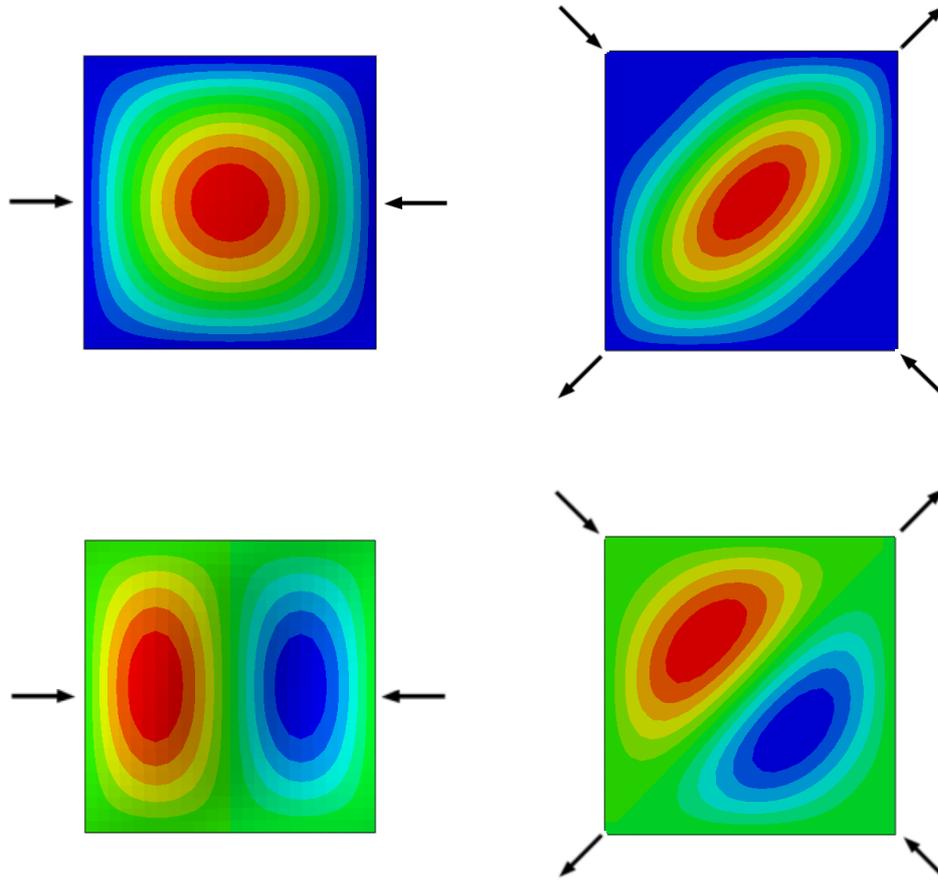


Figura 5.13: Analogía entre modos de pandeo a compresión (columna izquierda) y a cortante (derecha) realizada en base a la equivalencia entre el estado cortante puro y biaxial.

## 5.4. Estudio del campo de tensiones

En el estudio de la deflexión se ha podido comprobar que la placa de aluminio y la del material compuestos analizado presentan un comportamiento similar. Por ello, a continuación se estudia el campo de tensiones únicamente en la placa de aluminio. En la Fig. 5.14 se muestran las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  en el sistema de referencia  $x$ ,  $y$  en el momento de inicio del pandeo  $\mathcal{P} = 1$  y post-pandeo  $\mathcal{P} = 3$  obtenidas mediante MEF.

Para interpretar los valores numéricos es preciso compararlos siempre con el valor crítico, que para la placa analizada es de  $\tau_{cr} = 2.39 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ . Además, se debe centrar la atención en la zona central de la placa y en sus diagonales y no en los bordes, en los que aparecen algunos efectos locales que no son relevantes en este estudio. Analizando con detalle las figuras se observa que las tensiones normales en el momento de inicio de pandeo son muy pequeñas, de un orden inferior a  $\tau_{xy}$ , mientras que este cortante es prácticamente constante en toda la placa y de valor aproximadamente  $\tau_{cr}$ .

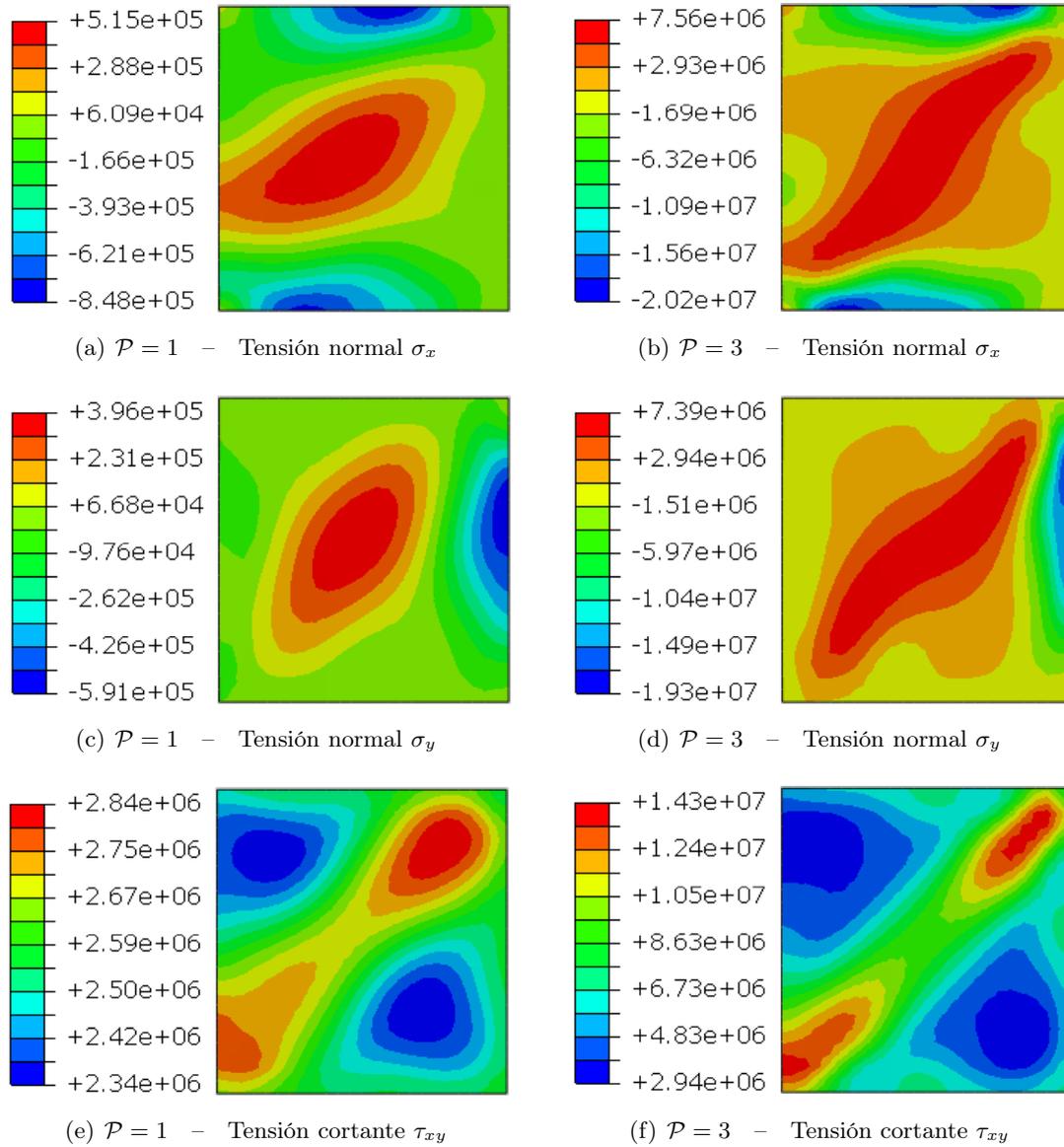


Figura 5.14: Tensiones normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y cortantes  $\tau_{xy}$  en la placa de aluminio en el momento de inicio de pandeo  $\mathcal{P} = 1$  (columna izquierda) y en post-pandeo  $\mathcal{P} = 3$  (derecha) obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

En régimen de post-pandeo  $\mathcal{P} = 3$  las tensiones normales toman un valor ya importante del mismo orden que el cortante. La sollicitación cortante deja de ser uniforme y pasa a tener un patrón diagonal. En la diagonal a  $45^\circ$  el cortante tiene un valor cercano a  $3\tau_{cr}$  uniforme en gran parte de esta diagonal y con valores máximos cerca de las esquinas.

Para analizar de forma cuantitativa estos resultados se analizará el centro de la placa, que

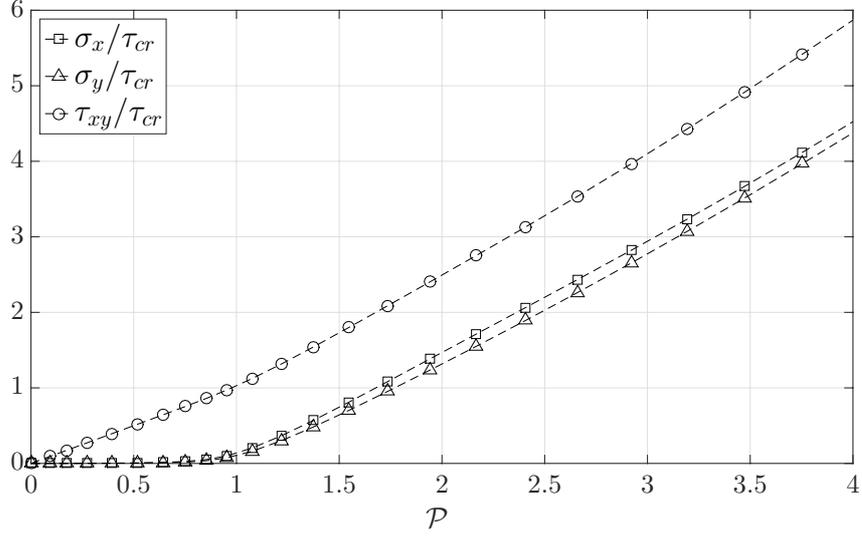


Figura 5.15: Tensiones en el centro de la placa de aluminio en el sistema  $x, y$  en función del ratio de carga de post-pandeo obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

es un punto representativo de la diagonal principal. En la Fig. 5.15 se representan las tensiones en el sistema  $x, y$  en función del ratio de carga de post-pandeo en el centro de la placa adimensionalizadas con el valor crítico. En la fase anterior al pandeo las tensiones  $\sigma_x/\tau_{cr}$ ,  $\sigma_y/\tau_{cr}$  son prácticamente nulas y el cortante es igual a la tensión aplicada  $\tau_{xy} = \mathcal{P} \tau_{cr}$ . Esta situación corresponde con el estado de cortante puro descrito en la sección anterior.

En régimen de post-pandeo las tensiones normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  toman valores muy similares y dejan de ser nulas a ser del mismo orden que el cortante. El cortante por su parte ha dejado de ser uniforme y ya no se cumple  $\tau_{xy} = \mathcal{P} \tau_{cr}$ , sino que los valores en el centro son superiores al cortante aplicado.

La tensión cortante del modelo analítico se calcula a partir de la función de Airy, sustituyendo la expresión de  $w_1$  de la Ec. (5.6) y las expresiones de las distintas constantes  $c_i$ , resultando en la expresión de la Ec. (5.24).

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{a h} = -\frac{1}{a h} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{3 D \pi^2}{4424 a^3 h} \left\langle 1659 \pi^2 \mathcal{P} - 1024 (\mathcal{P} - 1) \left\{ \cos \left[ \frac{\pi (x - 3y)}{a} \right] + \cos \left[ \frac{\pi (3x - y)}{a} \right] + \right. \right. \quad (5.24)$$

$$\left. \left. + \cos \left[ \frac{\pi (x + 3y)}{a} \right] + \cos \left[ \frac{\pi (3x + y)}{a} \right] + \cos \left[ \frac{\pi (x + 3y)}{a} \right] \right\} \right\rangle$$

Particularizando en el centro de la placa  $x = y = a/2$  se obtiene:

$$\tau_{xy}|_c = \frac{3 D \pi^2}{4424 a^3 h} \left[ 1659 \pi^2 \mathcal{P} + 4096 (\mathcal{P} - 1) \right] \quad (5.25)$$

En la Fig. 5.16 se comparan los valores de tensión cortante en el centro obtenidos mediante el modelo analítico y el de MEF. La solución analítica aporta valores ciertamente mayores que la tensión aplicada  $\mathcal{P} \tau_{cr}$  y es una aproximación aceptable en el rango  $\mathcal{P} < 2$  con errores del orden del 10%. A medida que  $\mathcal{P}$  aumenta el error de la aproximación analítica es cada vez mayor, lo cual es lógico ya que el error en las tensiones está directamente relacionado con el error de la deflexión (ver Fig. 5.6) que crece a medida que  $\mathcal{P}$  aumenta.

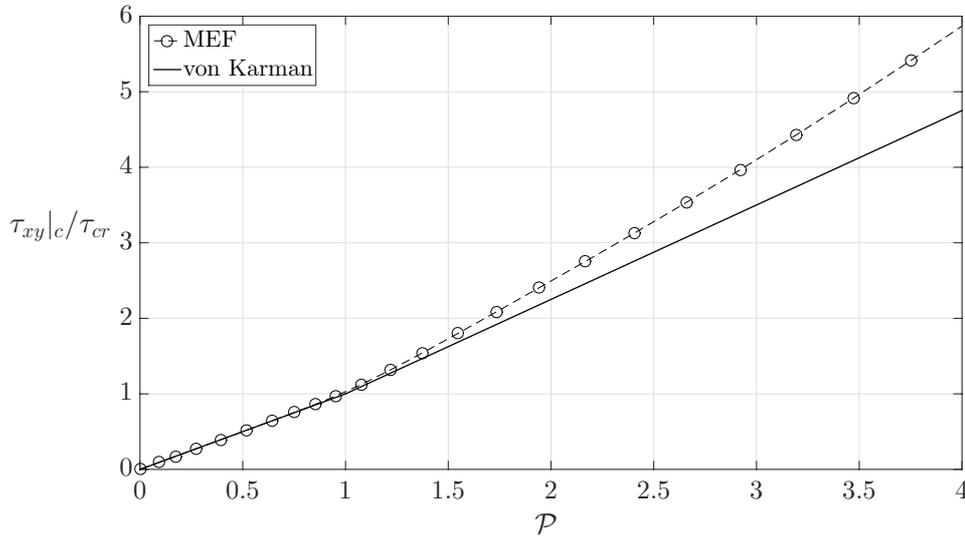


Figura 5.16: Tensión cortante en el centro de la placa de aluminio en el sistema  $x, y$  en función del ratio de carga de post-pandeo. Comparación entre modelo analítico y MEF.

Para analizar el campo de tensiones es más adecuado utilizar el sistema de referencia  $t, c$ . Definiendo este nuevo sistema de referencia en *Abaqus*<sup>®</sup> es posible obtener las tensiones  $\sigma_t$ ,  $\sigma_c$ ,  $\tau_{tc}$ , que se representan en la Fig. 5.17 para  $\mathcal{P} = 1$  y  $\mathcal{P} = 3$ .

En estos gráficos se observa bien definido el campo de tensiones diagonales. En el inicio de pandeo  $\mathcal{P} = 1$  las tensiones de tracción y compresión tienen valores muy similares mientras que el cortante es nulo y uniforme en casi toda la placa. En post-pandeo  $\mathcal{P} = 3$  la tensión de tracción es máxima en la diagonal principal y toma valores mucho mayores que la tensión de compresión. El cortante  $\tau_{tc}$  sigue siendo nulo y uniforme en prácticamente toda la placa.

De nuevo, para realizar un análisis cuantitativo se representan las tensiones en el centro de la placa que como se observa es un punto característico para describir las tensiones en la diagonal.

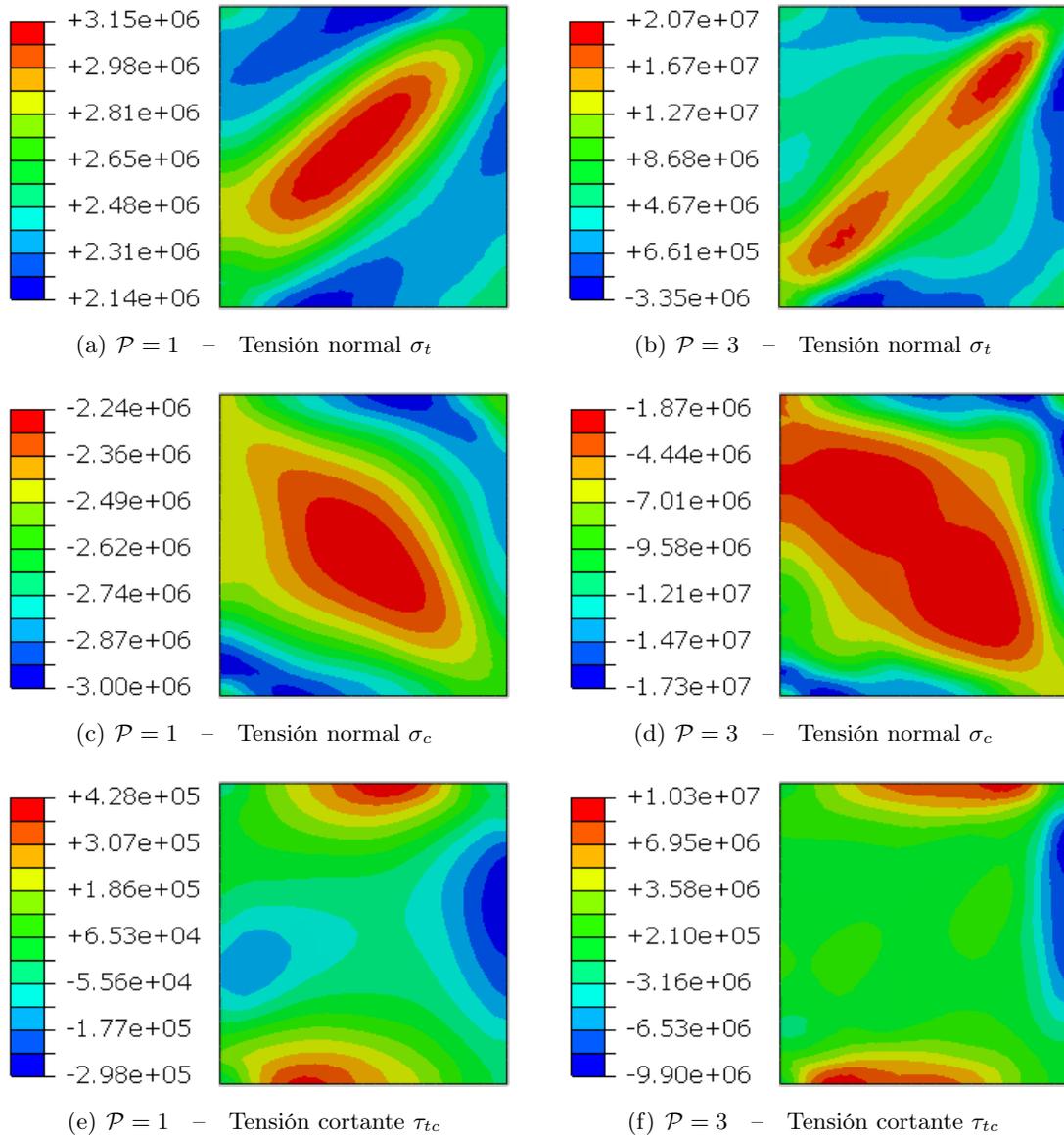


Figura 5.17: Tensiones en el sistema de referencia diagonal  $t, c$  en la placa de aluminio en el momento de inicio de pandeo  $\mathcal{P} = 1$  (columna izquierda) y en post-pandeo  $\mathcal{P} = 3$  (derecha) obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

En la Fig. 5.18 se representan estas tensiones y se observa que la placa sigue un comportamiento muy similar al de la teoría PDT. Antes de pandear, las tensiones  $\sigma_t$  y  $\sigma_c$  son iguales con signo contrario y de valor igual al cortante aplicado  $\mathcal{P} \tau_{cr}$ . En post-pandeo la tensión de compresión es prácticamente constante e igual al valor crítico mientras que la tensión de tracción aumenta con un tasa de crecimiento mayor. La tensión cortante es aproximadamente nula en todo momento, confirmando que efectivamente los ejes  $t, c$  son principales.

Es evidente por tanto que la placa exhibe un comportamiento PDT y que la magnitud de mayor importancia es la tensión en la diagonal a tracción. En la Fig. 5.17 se representa esta variable para distintos factores de carga  $\mathcal{P}$ . Se puede observar que existe una diagonal claramente definida en la que la tensión toma valores elevados que son constantes en una zona cercana al centro de la placa, mientras que alcanza picos cerca de las esquinas.

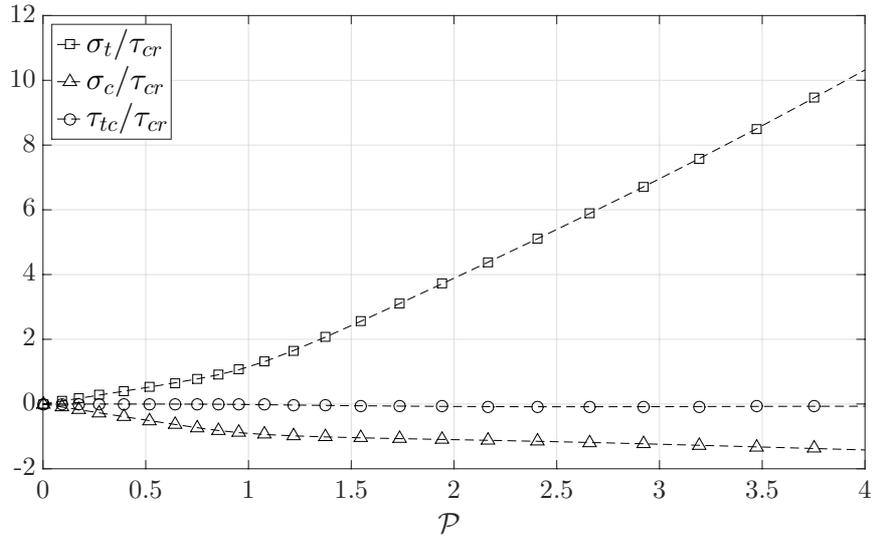


Figura 5.18: Tensiones en el centro de la placa en el sistema diagonal  $t, c$  en función del ratio de carga de post-pandeo.

En la Fig. 5.20 se compara la tensión de tracción  $\sigma_t$  en el centro de la placa obtenida por MEF con los resultados que proporciona la teoría PDT, Ec. (5.23). Se puede observar que esta teoría proporciona resultados muy precisos, sin embargo los valores de  $\tau_{xy}$  con los que se ha aplicado no son los de carga aplicada  $\mathcal{P} \tau_{cr}$  sino los valores de MEF de la Fig. 5.16, que se son más precisos. Por tanto, la teoría PDT describe muy bien el campo de tensiones y es un modelo muy exacto, aunque no es correcto asumir que las tensiones  $\tau_{xy}$  son uniformes en toda la placa. Esta hipótesis de uniformidad es válida para  $\mathcal{P} < 1$  pero no en régimen de post-pandeo, en el que la tensión  $\tau_{xy}$  toma valores mayores al cortante aplicado que pasa a ser un valor medio de tensión.

Para obtener resultados satisfactorios únicamente a través de modelos analíticos se necesita combinar la teoría PDT con otro modelo, como el de las ecuaciones de von Karman, capaz de estimar los valores de  $\tau_{xy}$  con mayor precisión.

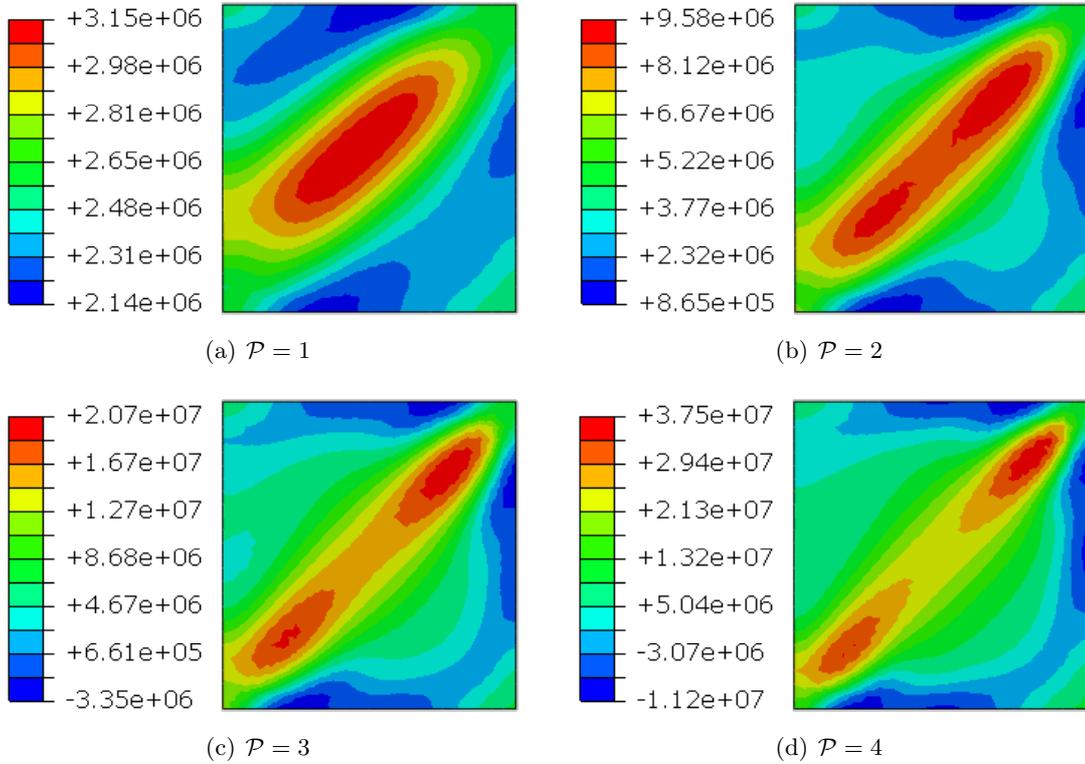


Figura 5.19: Evolución de tensión de tracción  $\sigma_t$  en la diagonal principal de la placa de aluminio con el ratio de post-pandeo  $\mathcal{P}$  obtenida mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

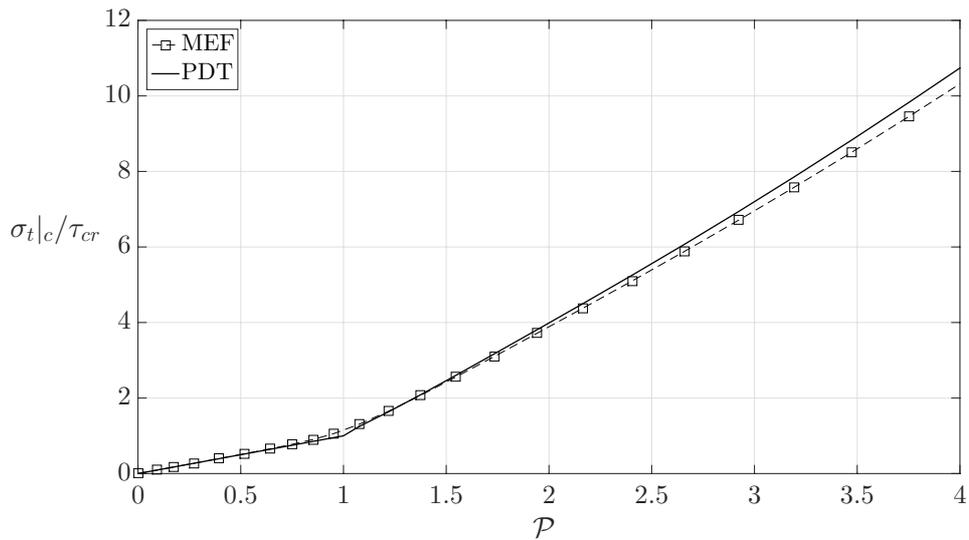


Figura 5.20: Tensión de tracción en la diagonal principal en función del ratio de carga de post-pandeo. Comparación entre MEF y modelo PDT.

## 5.5. Conclusiones generales

El estudio analítico del post-pandeo de placas a cortante mediante las ecuaciones de von Karman resulta mucho más complejo que el de placas a compresión. Como función de prueba se ha empleado la correspondiente al primer modo de pandeo, al igual que se hizo con placas a compresión. Sin embargo, mientras que los resultados analíticos eran muy precisos para compresión, para cortante el error es mayor y la aproximación por von Karman es únicamente válida en un rango  $\mathcal{P} \leq 2$ .

Mientras que la deflexión de las placas a compresión se mantenía similar a la de las funciones de prueba empleadas, la deflexión en cortante pronto adquiere una forma más compleja. Empleando más términos se podrían representar estas formas más complejas y obtener resultados más precisos, aunque la dificultad en cortante también es mayor, debido a que aparecen derivadas parciales cruzadas que no aparecían en compresión. Lo anterior explica por qué no se ha encontrado ninguna referencia sobre placas a cortante estudiadas analíticamente con von Karman.

Por otro lado, el modelo de tensión diagonal pura describe con gran exactitud el campo de tensiones que aparece en la placa. Se ha podido comprobar cómo la diagonal a compresión cede una vez pandea y no es capaz de soportar valores de carga mucho mayores a la crítica, y cómo la tensión se concentra en la diagonal a tracción. Sin embargo, la hipótesis de que el cortante  $\tau_{xy}$  es uniforme en toda la placa e igual al cortante aplicado deja claramente de ser válida en post-pandeo.

## 6.1. Introducción

Una vez estudiado el inicio de pandeo y el post-pandeo de placas se aborda el análisis de la viga armada. Este elemento estructural es ampliamente utilizado en construcción, donde se encuentran vigas armadas tanto de hormigón como de material metálico, por ejemplo en la construcción de puentes Fig. 6.1.



Figura 6.1: Vigas armadas empleadas en la construcción de un puente [24]. Ejemplo de aplicación en el campo de la construcción.

Como se comentó en el Capítulo 1 las vigas armadas son también ampliamente utilizadas también en aeronáutica. En la Fig. 1.1 se muestra una de las vigas analizadas por NACA en 1952 [9], [10], donde se menciona que:

*“ each aircraft contains hundreds of elements that must be designed by consideration of diagonal-tension action ”*

Ejemplo de viga armada son los largueros de las alas e incluso el fuselaje, que correspondería con una viga armada curva. Los estudios desarrollados por Kuhn *et al.* [9], [10] conforman hoy en día, con mínimas modificaciones, las bases para el diseño de vigas armadas en aeronáutica. Estos análisis fueron modificados por Deo *et al* [11], [12] para su aplicación a vigas de materiales compuestos.

La viga armada consiste en una sucesión de paneles que trabajan a cortante en régimen de post-pandeo, de ahí que se hayan estudiado en detalle el inicio de pandeo y el post-pandeo de placas a cortante en capítulos anteriores. Existen numerosos aspectos de estudio, como el fallo por pandeo entre remaches, *crippling*, fallo de los rigidizadores a modo de columna, uniones remachadas, distorsión del campo de tensiones por la flexibilidad de las almas, carga última

o inicio de plasticidad. Los objetivos de este trabajo se limitarán al estudio de las tensiones primarias: las de las direcciones diagonales en alma y las de compresión en los refuerzos.

## 6.2. Descripción del modelo

En la Fig. 6.2 se muestra un esquema de la viga armada analizada. Ésta se compone de tres elementos fundamentales: la piel del alma *web*, los refuerzos transversales o verticales (rigidizadores, *uprights*) y los refuerzos longitudinales u horizontales (alas, *flanges*).

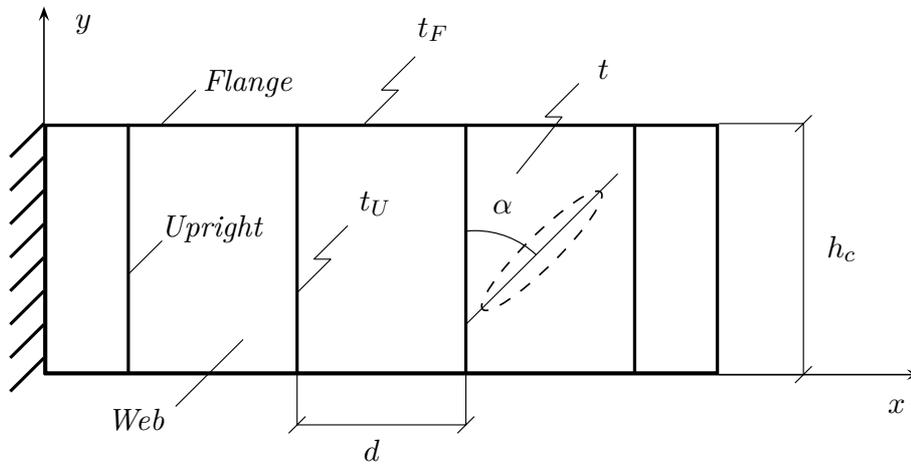


Figura 6.2: Esquema de viga armada: refuerzos verticales (rigidizadores) separados una distancia  $d$ , horizontales (alas) separados una distancia  $h$  y piel (alma).

Se ha considerado que todos los elementos están contruidos con el mismo material, un aluminio de propiedades  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0.3$ . La distancia entre rigidizadores es  $d = 1$  m y el canto de la viga (distancia entre alas)  $h_c = 1.5$  m. El espesor del alma es  $t = 1$  mm, el de los rigidizadores  $t_U = 3$  mm y el de las alas  $t_F = 4$  mm. Como se observa, la notación de subíndices proviene de la denominación anglosajona de los componentes.

La viga analizada tiene una longitud total de 4 m, de modo que contiene dos paneles estrechos de  $0.5 \times 1.5$  m, uno en cada extremo, y tres paneles centrales de  $1 \times 1.5$  m. Los paneles de los extremos son de menor tamaño debido a la concentración de tensiones que se produce en éstos y con el objetivo de que el fallo se produzca en los paneles interiores, que son los que se desea analizar. Las alas son placas de  $0.2 \times 4$  m, con sección transversal  $A_F = 8 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup> y los rigidizadores placas de  $0.1 \times 1.5$  m, de sección  $A_U = 3 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>. En la Fig. 6.3 se muestra el modelo construido en *Abaqus*<sup>®</sup>.

Los distintos elementos han sido modelados utilizando elementos tipo *shell* y las uniones entre componentes, realizadas mediante remaches en la viga real, se han considerado totalmente rígidas ya que como se ha comentado no se desea analizar el pandeo entre remaches ni otros aspectos relacionados con éstos.

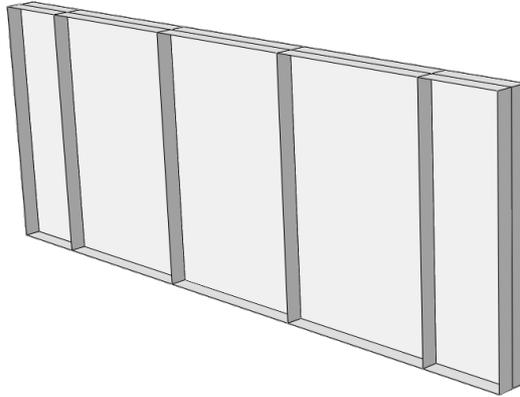


Figura 6.3: Modelo de viga armada tras el ensamblaje de los distintos componentes en *Abaqus*<sup>®</sup>.

Las condiciones de contorno son de viga en voladizo, i.e. de empotramiento en el extremo izquierdo. Respecto a la carga, se han analizados dos tipologías. Por un lado, una carga puntual hacia arriba en el borde libre de la viga y por otro una carga distribuida en los extremos las alas y de los rigidizadores exteriores. Como es sabido, una carga puntual produce una sollicitación cortante constante a lo largo de toda la viga, pero además produce un momento flector, que evoluciona linealmente. Dado que las alas son las encargados de resistir la flexión, los resultados en el alma son idénticos para ambas tipologías, ya que en ambas trabaja a cortante.

Sin embargo, las tensiones en las alas sí son diferentes y por ello, para estudiarlas se emplea la tipología de carga cortante, con el objetivo de aislar los efectos de la flexión. Se procede de esta manera porque, como se verá más adelante, en la teoría IDT las tensiones en las alas se separan en dos partes y se centra la atención en la tensión de compresión debida al cortante.

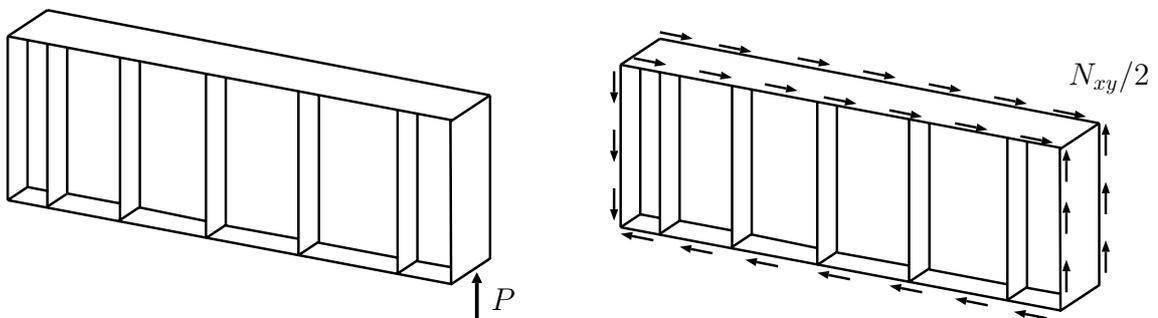


Figura 6.4: Posibles tipologías de carga: carga puntual (izquierda) y carga cortante distribuida (derecha).

### 6.3. Modos de Pandeo

En primer lugar, se realiza un análisis lineal *Buckle* y se obtienen tanto la carga crítica como los modos de pandeo, representados en la Fig. 6.5 para carga cortante. Para ambos tipos de carga, los modos se obtienen por parejas que corresponden a valores de carga positivos y negativos. Se puede observar que la inestabilidad se produce siempre en la piel. La tensión cortante crítica es  $\tau_{cr} = 7.18 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

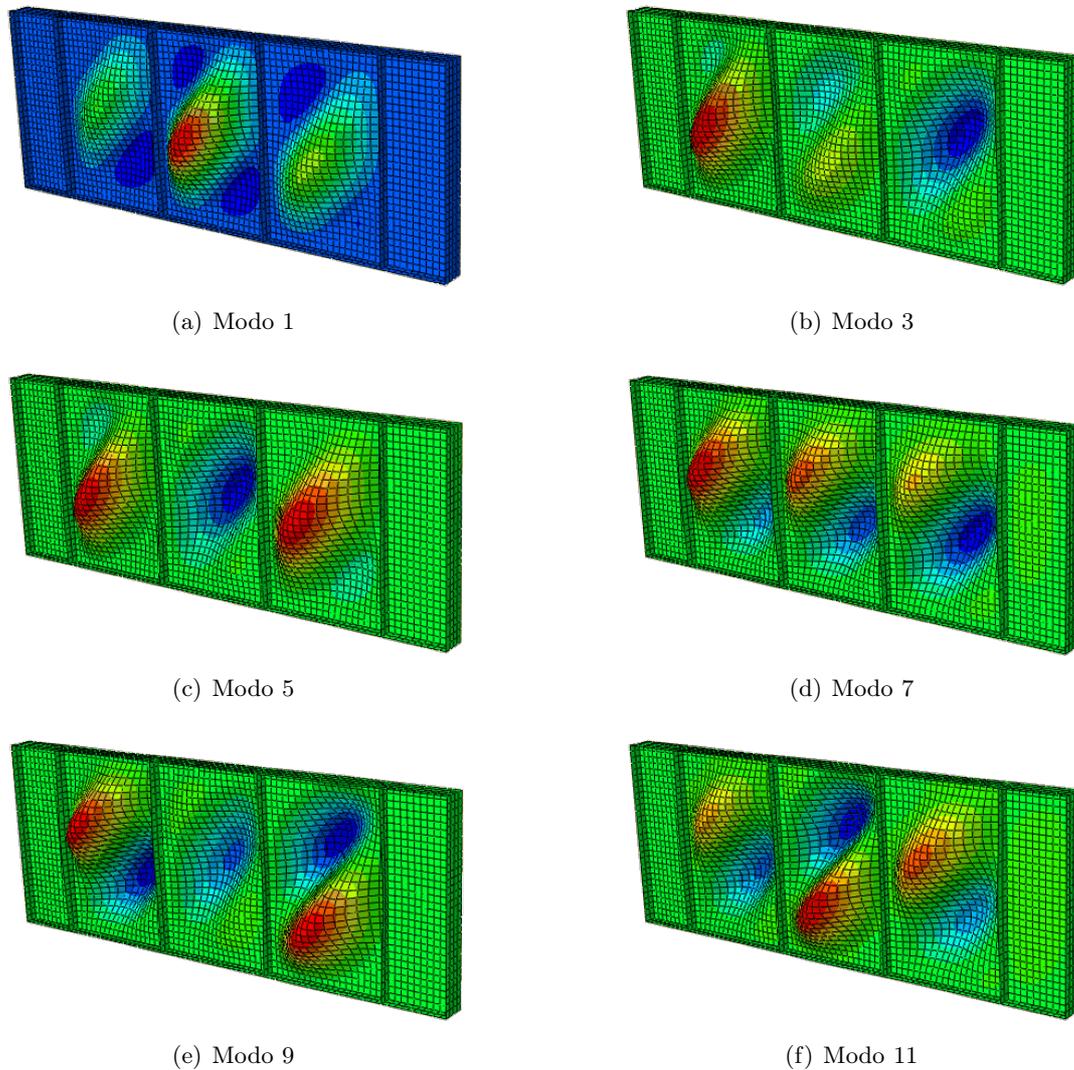


Figura 6.5: Modos de pandeo de la viga armada bajo carga cortante obtenidos mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>.

## 6.4. Evolución de la deflexión

Para el estudio del post-pandeo se emplea el método de Riks y se sigue la metodología explicada en la Sección 4.4. La imperfección inicial se define en base a la ponderación de modos

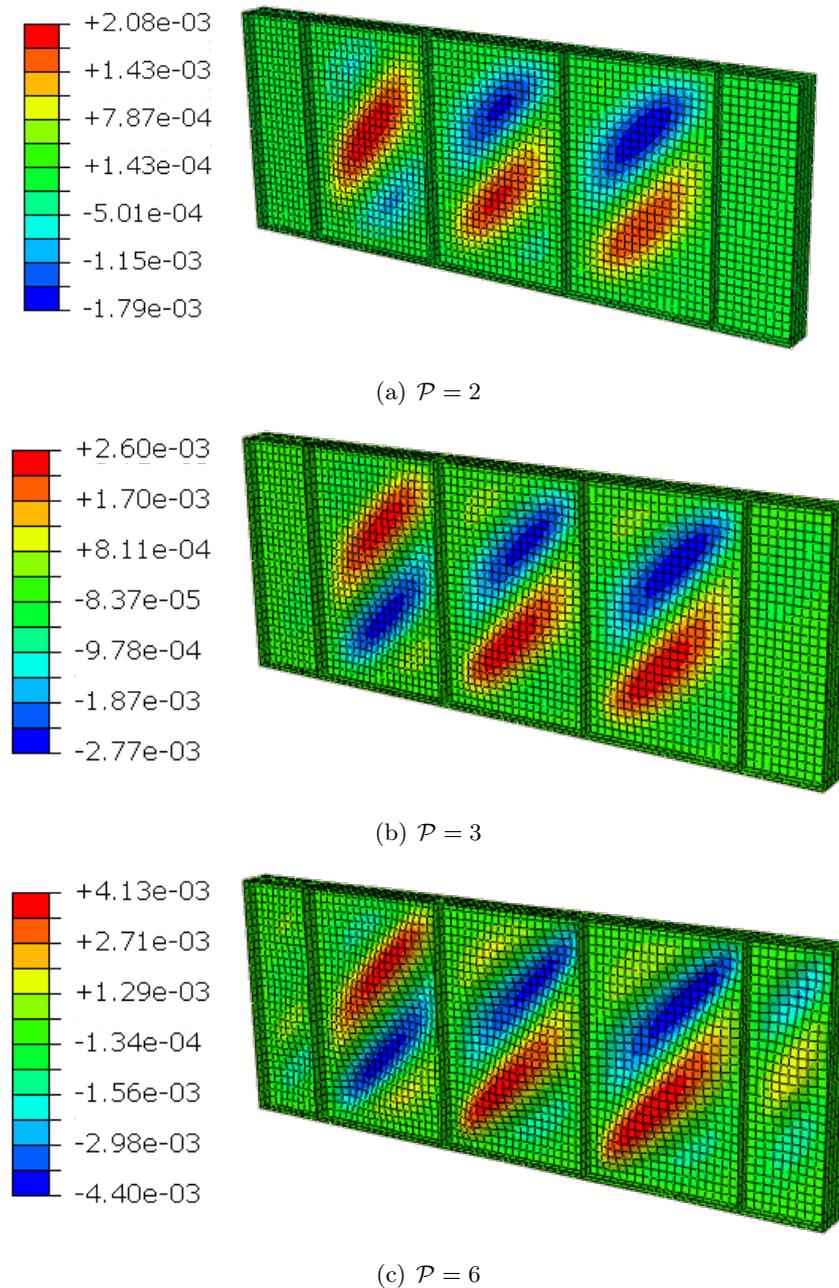


Figura 6.6: Deflexión  $w$  para distintos ratios de carga de post-pandeo obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup>. La deformación se muestra con un factor de escala 20.

que se detalla en la Ec. (6.1).

$$\mathbf{w}^* = \frac{h}{10} \left( 1.00 \mathbf{w}_1 + 0.50 \mathbf{w}_3 + 0.25 \mathbf{w}_5 + 0.125 \mathbf{w}_7 + 0.125 \mathbf{w}_9 + 0.125 \mathbf{w}_{11} \right) \quad (6.1)$$

En la Fig. 6.6 se muestra la deformada de la viga y se representan los valores de deflexión. Se observan claramente definidos los pliegues diagonales característicos, como los del ensayo de NACA de la Fig. 1.1 y en los que posteriormente se estudiarán las tensiones.

### 6.5. Tensión diagonal pura

En el capítulo anterior se explicó la teoría de tensión diagonal pura aplicada al estudio de placas a cortante. A continuación se expone esta misma teoría aplicada al estudio de vigas armadas y que se encuentra descrita con detalle en [9].

Se consideran que alma de la viga está compuesta por bandas diagonales inclinadas un ángulo  $\alpha$  en las que existe una tensión de tracción  $\sigma_t$ , tal y como se muestra en la Fig. 6.7. Dado que la tensión en todas las bandas es la misma, la resultante  $F_D$  se encuentra aplicada en la mitad del canto. La componente horizontal  $F_H$  de esta resultante se equilibra con dos fuerzas compresivas  $F_F$  en las alas de idéntico valor:

$$F_H = P \cot \alpha ; \quad F_F = -\frac{1}{2} F_H \quad (6.2)$$

La tensión de compresión  $\sigma_F$  en las alas es por tanto:

$$\sigma_F = \frac{F_F}{A_F} = -\frac{\tau h_c t}{2 A_F} \cot \alpha \quad (6.3)$$

donde  $\tau = P/(ht)$  es el esfuerzo cortante nominal producido por la carga  $P$ . La fuerza total en las alas es  $M/h + F_F$ , donde  $M/h$  es la tensión producida por el momento flector y  $F_U$  a fuerza debida únicamente a los esfuerzos cortantes, y no a la flexión.

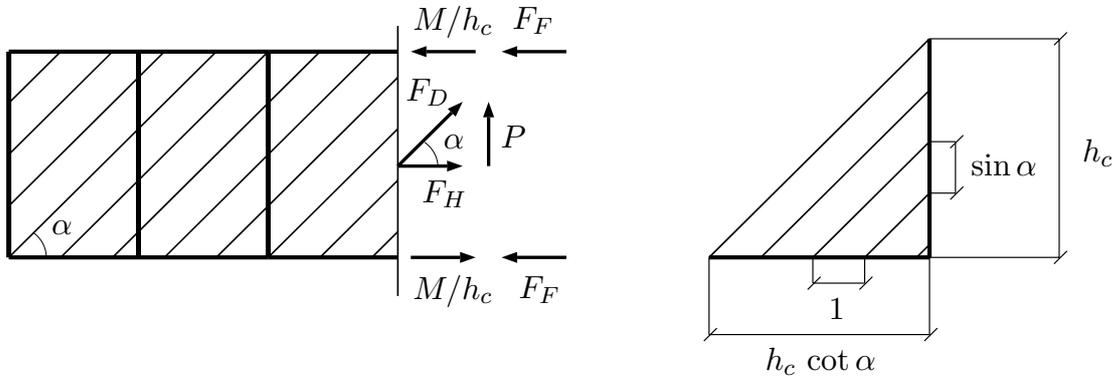


Figura 6.7: Esquema de bandas diagonales y fuerzas que aparecen en la teoría de tensiones primarias de PDT.

La fuerza resultante en la dirección diagonal se calcula en base a la fuerza en cada banda  $\sigma_t t \sin \alpha$  y al número de bandas que afectan al canto de la viga  $h_c \cot \alpha$ , según se esquematiza en la Fig. 6.7.

$$F_D = \sigma_t t \sin \alpha h_c \cot \alpha = \sigma h_c t \cos \alpha \quad (6.4)$$

Por otro lado, a partir del equilibrio estático entre las tensiones diagonales y la fuerza vertical aplicada  $P$ :

$$F_D = \frac{P}{\sin \alpha} \quad (6.5)$$

Igualando las expresiones de las Ecs. (6.4) y (6.5) se obtiene la tensión de tracción diagonal:

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \sigma_t h_c t \cos \alpha \implies \sigma_t = \frac{P}{h_c t \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2\tau}{\sin 2\alpha} \quad (6.6)$$

Los rigidizadores se encuentran bajo compresión, contrarrestando la tensión diagonal que tira de ellos. La fuerza  $F_U$  en cada rigidizador se calcula a partir de la componente vertical de todas las bandas que actúan sobre éste, i.e. un total de  $d$  bandas (ver Fig. 6.8). La componente vertical de  $h_c \cot \alpha$  bandas es  $P$ , por tanto la de  $d$  bandas es:

$$\begin{cases} h_c \cot \alpha \rightarrow P \\ d \rightarrow F_U \end{cases} \implies F_U = \frac{P d}{h_c \cot \alpha} = -P \frac{d}{h_c} \tan \alpha \quad (6.7)$$

De modo que la tensión de compresión en los rigidizadores es:

$$\sigma_U = \frac{F_U}{A_U} = -\frac{\tau d t}{A_u} \tan \alpha \quad (6.8)$$

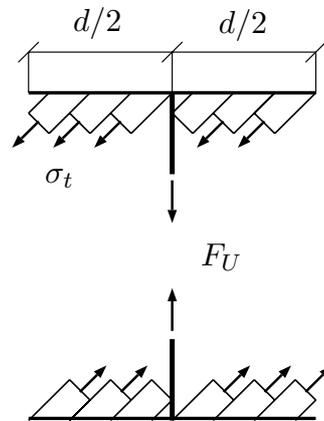


Figura 6.8: Fuerza compresiva en los rigidizadores provocada por las tensiones de tracción diagonales en la piel.

## 6.6. Tensión diagonal incompleta

El caso de tensión diagonal pura es en realidad una idealización y el campo de tensiones en la viga corresponde con un estado intermedio entre el cortante puro y la tensión diagonal pura, por lo que recibe el nombre de *Incomplete Diagonal Tension* IDT (Fig. 6.9). Los desarrollos analíticos se combinan con los resultados experimentales para dar lugar a un método semi-empírico [9].

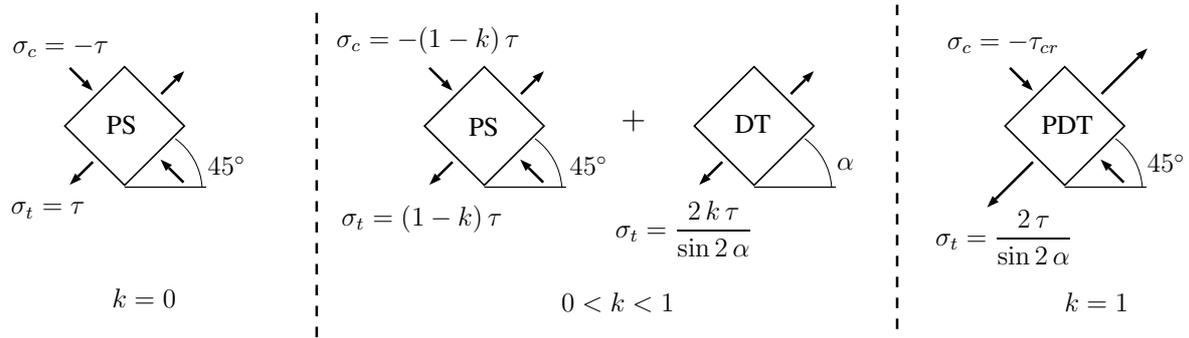


Figura 6.9: Aspectos fundamentales de las tres teorías que definen el campo de tensiones en la viga: *Pure Shear* (izquierda) para  $\mathcal{P} < 1$ , tensión diagonal pura (derecha) para  $\mathcal{P} \gg 1$  y tensión diagonal incompleta, que combinan las dos teorías anteriores, para  $\mathcal{P} > 1$ .

La variable  $k$  es el factor de tensión diagonal y se calcula a partir de la Ec. (6.9), que se obtiene experimentalmente. Como se puede apreciar, depende únicamente del factor de carga. La IDT es una suma de los estados cortante puro y PDT en la que  $k$  pondera el peso de cada una de las teorías. En la Fig. 6.10 se representa para un rango  $1 < \mathcal{P} < 7$ .

$$k = \tanh \left[ 0.5 \log_{10} \left( \frac{\tau}{\tau_{cr}} \right) \right] \quad (6.9)$$

Antes del pandeo el alma se encuentra bajo cortante puro, que como se ha visto en el capítulo anterior es equivalente a un estado biaxial a  $45^\circ$ . Este estado corresponde con un valor de  $k = 0$ . Cuando el campo de tensiones diagonales está completamente desarrollado la tensión en la diagonal a compresión es constante e igual al valor crítico, siendo la tensión en la diagonal a tracción mucho mayor. Este estado  $k = 1$  con  $\alpha = 45^\circ$  corresponde con el descrito en el capítulo anterior. Finalmente, entre ambos estados ideales existe la IDT, combinación de ambos. La IDT asume que la diagonal a compresión tiene cierta capacidad de soportar carga más allá del valor crítico.

Las tensiones  $\sigma_y$  en los rigidizadores y  $\sigma_x$  en las alas vienen dadas por la Ec. (6.10). Como se puede apreciar el factor  $k$  pondera las tensiones de la PDT Ecs. (6.8), (6.3) que se recuperan para  $k = 1$ .

$$\sigma_U = -\frac{k\tau \tan \alpha}{\frac{A_U}{dt} + \frac{1}{2}(1-k)}; \quad \sigma_F = -\frac{k\tau \cot \alpha}{\frac{A_F}{ht} + \frac{1}{2}(1-k)} \quad (6.10)$$

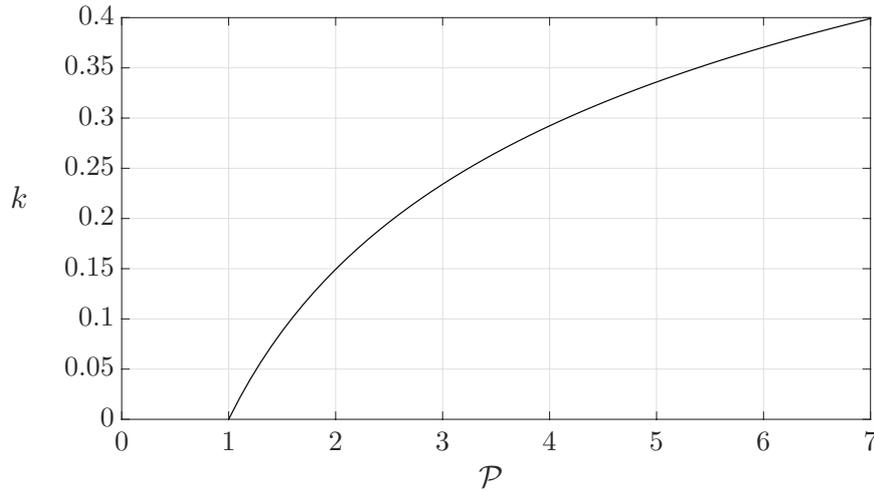


Figura 6.10: Evolución del factor de tensión diagonal  $k$  con el ratio de carga de post-pandeo.

La deformación en rigidizadores y alas es entonces:

$$\varepsilon_U = \frac{\sigma_U}{E}; \quad \varepsilon_F = \frac{\sigma_F}{E} \quad (6.11)$$

Por último, la deformación del alma se calcula aplicando la ley de Hooke con las tensiones diagonales  $\sigma_c$ ,  $\sigma_t$  de la Ec. (6.14) (ver Fig. 6.9) y su expresión es:

$$\varepsilon = \frac{\tau}{E} \left[ \frac{2k}{\sin 2\alpha} + (1-k)(1+\nu) \sin 2\alpha \right] \quad (6.12)$$

Las variables anteriores dependen del ángulo  $\alpha$ , que es a priori desconocido y se calcula a partir de estas variables mediante la Ec. (6.13). Este es el ángulo de inclinación de los pliegues (ver Fig. 6.2) en los que la piel pandea y en los que se desarrollan las tensiones diagonales.

$$\alpha = \arctan \left( \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{\varepsilon - \varepsilon_U}} \right) \quad (6.13)$$

Por tanto, se debe seguir un proceso iterativo para cada valor de carga  $\tau$ , que se implementa en *Matlab*<sup>®</sup>. Se establece un valor inicial de  $\alpha$ , por ejemplo  $\alpha = 40^\circ$ , se calculan tensiones y deformaciones a partir de las Ecs. (6.10) - (6.12) y se calcula  $\alpha$  con la Ec. (6.13). Si la diferencia entre el valor inicial y el calculado no está dentro de la tolerancia fijada se repite

el proceso tomando como valor inicial el  $\alpha$  calculado. En general es suficiente con 5 iteraciones.

En la Fig. 6.11 se representa la evolución de  $\alpha$ . Para vigas bien diseñadas el valor de  $\alpha$  debe estar entre  $38^\circ$  y  $45^\circ$ . Se puede apreciar que inicialmente el valor es de  $45^\circ$  y que disminuye a medida que la carga aumenta, manteniéndose en el rango de valores mencionado. Esto es lógico ya que las dimensiones de la viga tomadas son similares a las de los ensayos experimentales llevados a cabo por NACA [10].

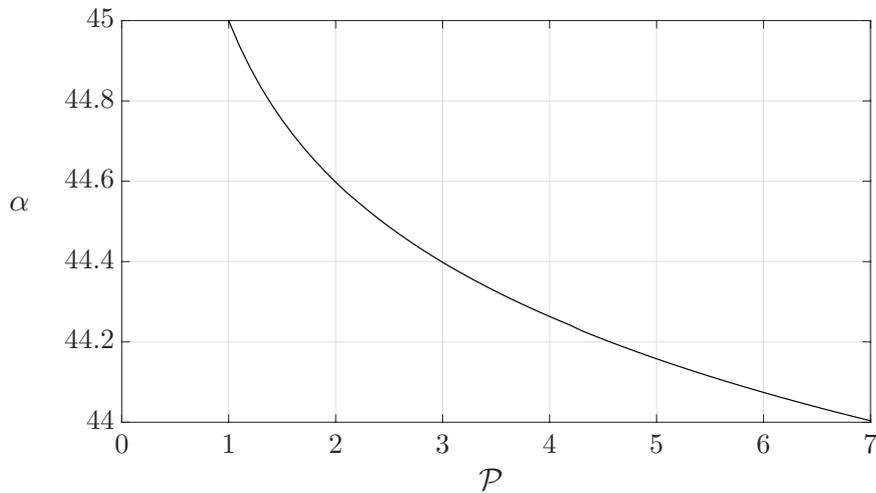


Figura 6.11: Evolución del ángulo de tensión diagonal  $\alpha$  con el ratio de carga de post-pandeo obtenida mediante la implementación del método iterativo de la teoría IDT en *Matlab*<sup>®</sup>.

Finalmente, calculado el valor de  $\alpha$  es posible obtener las tensiones diagonales:

$$\sigma_t = \frac{2k\tau}{\sin 2\alpha} + \tau(1-k)\sin 2\alpha; \quad \sigma_c = -\tau(1-k)\sin 2\alpha \quad (6.14)$$

## 6.7. Análisis de tensiones

Una vez explicado el modelo de MEF y la IDT se comparan los resultados que ambos proporcionan. No es sencillo medir tanto el factor  $k$  como el ángulo  $\alpha$  en MEF, sin embargo sí es posible medir las tensiones primarias en la viga: las tensiones en los refuerzos y las tensiones en las diagonales.

En la Fig. 6.12 se comparan las tensiones en las direcciones diagonales, que en MEF se han medido mediante un sistema de referencia girado  $45^\circ$ , ya que como se puede apreciar en la Fig. 6.11  $\alpha$  no varía mucho de  $45^\circ$ . Los resultados además se comparan con la teoría PDT con  $\alpha = 45^\circ$  desarrollada en el capítulo anterior.

Como se puede observar existe un comportamiento claro de tensión diagonal. Hasta  $\mathcal{P} = 1$  las tensiones en la diagonal a tracción y a compresión son iguales en valor absoluto y de signo contrario, como corresponde a una situación de cortante puro. Una vez la placa pandeo  $\mathcal{P} > 1$

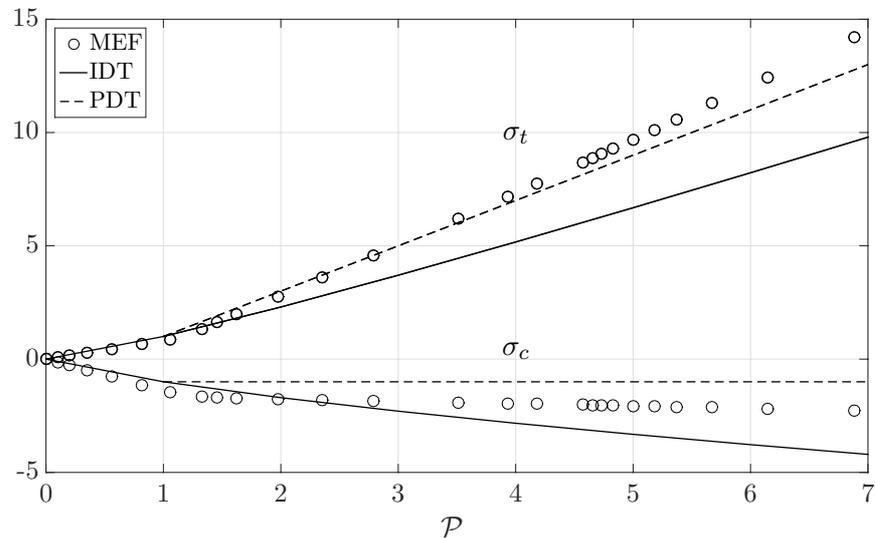


Figura 6.12: Tensiones diagonales. Comparación entre MEF y teorías IDT y PDT.

la diagonal a compresión pierde gran parte de su capacidad de soportar carga. Sin embargo,  $\sigma_c$  sí toma valores mayores al de la carga crítica, de modo que la teoría PDT subestima su valor. Se observa también que IDT estima con precisión el valor de  $\sigma_c$  en el rango  $\mathcal{P} < 3$  mientras que para cargas mayores lo sobreestima.

En cuanto a la tensión de la diagonal a tracción, la teoría IDT predice valores menores a los medidos en MEF, debido a que sobreestima la capacidad de carga de la diagonal a compresión, mientras que la teoría PDT predice esta tensión de tracción con mayor precisión.

Por último se estudian las tensiones primarias en los refuerzos:  $\sigma_x$  en las alas y  $\sigma_y$  en los rigidizadores. La tensión de compresión  $\sigma_y$  en los rigidizadores no es uniforme, sino que alcanza su valor máximo en el punto medio de éstos, como se explica en [9]. La expresión de la Ec. (6.10) corresponde precisamente con este valor máximo. En la Fig. 6.13 se comparan los resultados obtenidos por MEF y con IDT. Como se puede observar, ambos modelos aportan resultados muy similares para  $\mathcal{P} < 5$ , mientras que para valores de carga mayores las diferencias entre ambos aumentan ligeramente.

En la Fig. 6.14 se comparan las tensiones en las alas  $\sigma_F$  obtenidas mediante MEF y con IDT. Como se ha explicado anteriormente, el modelo MEF en el que se miden estas tensiones es el sometido a sollicitación cortante, ya que  $\sigma_F$  es debida únicamente a los esfuerzos cortante, y no a la flexión. De nuevo,  $\sigma_F$  no es constante en todo el ala sino que es mínima a la altura de los rigidizadores y máxima entre ellos. El valor representado en la Fig. 6.14 corresponde con el valor máximo. Como se puede apreciar, ambos métodos aportan resultados similares, aunque la precisión en este caso es menor que para  $\sigma_u$ .

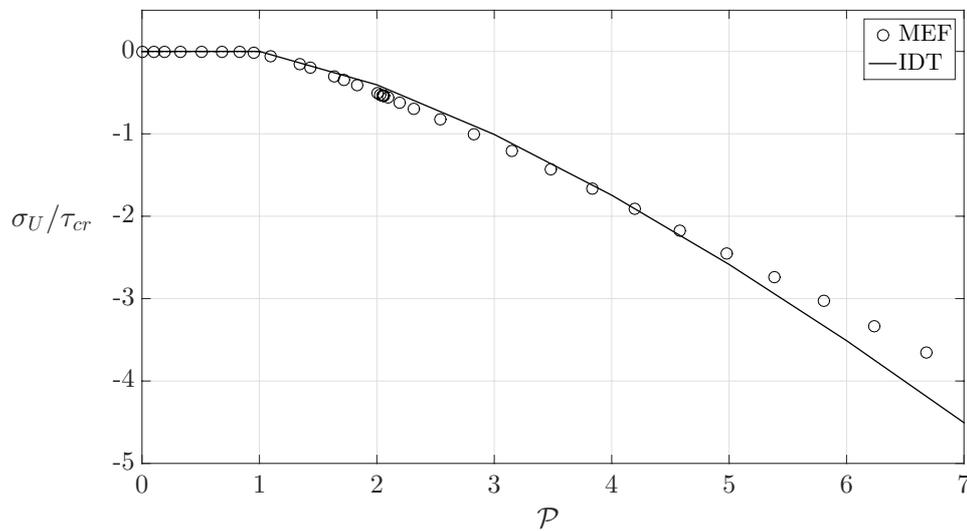


Figura 6.13: Tensiones de compresión en los rigidizadores. Comparación entre MEF y teoría IDT.

Analizando las Fig. 6.13 y 6.14 se puede comprobar que tanto los rigidizadores como las alas no soportan apenas carga mientras que la piel no pandea. Una vez la placa pandea, el alma deja de trabar bajo cortante puro y el campo de tensiones diagonales ejerce esfuerzos sobre rigidizadores y alas que pasan a trabajar a compresión.

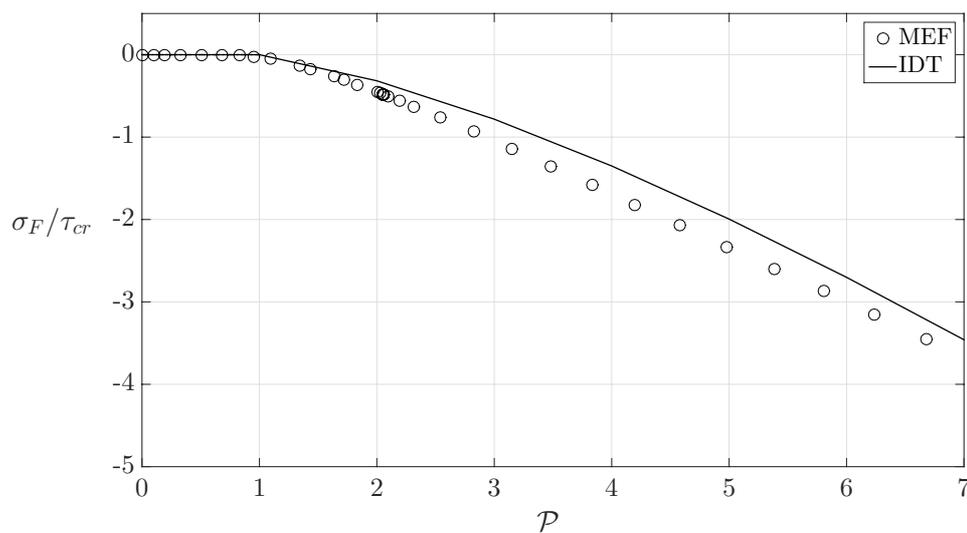


Figura 6.14: Tensiones de compresión en el ala superior. Comparación entre MEF y teoría IDT.

En las Fig. 6.15 y 6.16 se representan las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  respectivamente para un factor de carga  $\mathcal{P} = 3$ . Comparando el campo de tensiones en el alma con el obtenido para placa articulada obtenido en el capítulo anterior (ver Fig. 5.14) se puede observar que son muy similares, lo cual justifica el estudio de placas en capítulos anteriores.

Observando las tensiones  $\sigma_x$  en las alas en la Fig. 6.15 se puede apreciar que efectivamente trabajan a compresión y que existe una distribución que se repite entre rigidizadores, siendo máxima en el punto medio entre ellos como se ha mencionado anteriormente. De igual manera, observando las tensiones  $\sigma_y$  en los rigidizadores en la Fig. 6.15 se puede apreciar que trabajan a compresión y que existe también una distribución que alcanza un valor máximo en el centro.

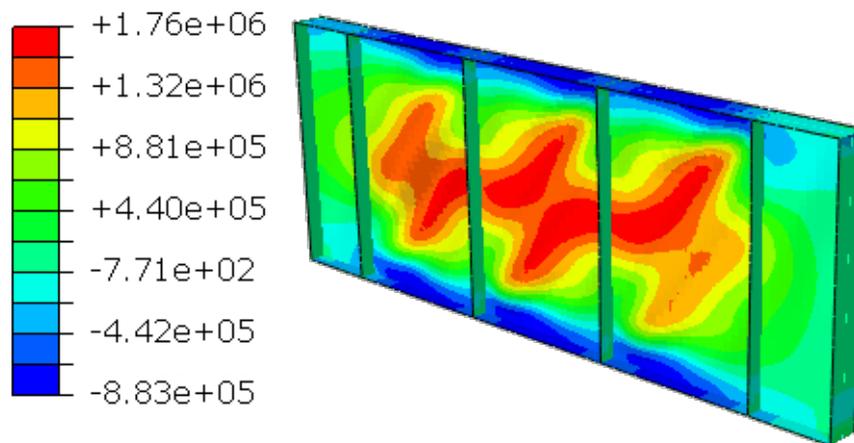


Figura 6.15: Tensiones  $\sigma_x$  para  $\mathcal{P} = 3$  obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup> para viga bajo sollicitación cortante.

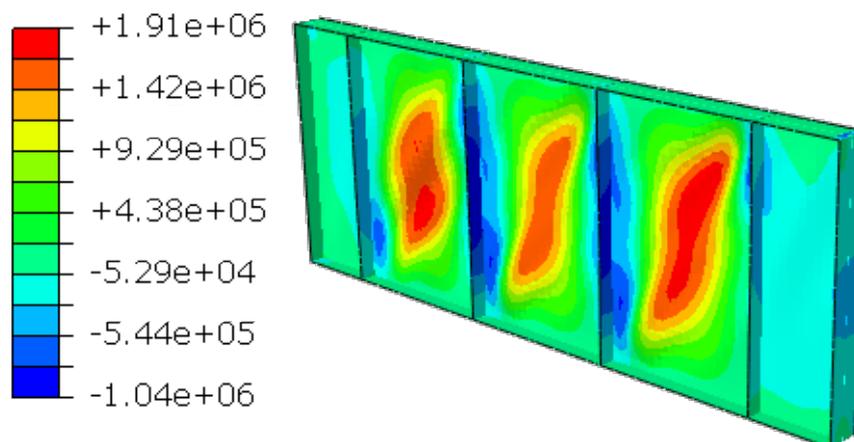


Figura 6.16: Tensiones  $\sigma_y$  para  $\mathcal{P} = 3$  obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup> para viga bajo sollicitación cortante.

Definiendo un sistema de referencia girado  $45^\circ$  respecto al global es posible obtener las tensiones diagonales. En las Fig. 6.17 y 6.18 se representan las tensiones en las diagonales a  $\pm 45^\circ$ . Analizando la Fig. 6.17 se puede apreciar cómo existen claramente definidas diagonales en las que aparecen tensiones de tracción son máximas. Estas diagonales coinciden con aquellas en las que se produce una mayor deflexión en la Fig. 6.6. Por otro lado, en la Fig. 6.18 se observan las diagonales a compresión, con valores de tensión mucho menores que los de la diagonal a tracción. Las tensiones representadas en la Fig. 6.12 se han medido en la zona central de estas diagonales.

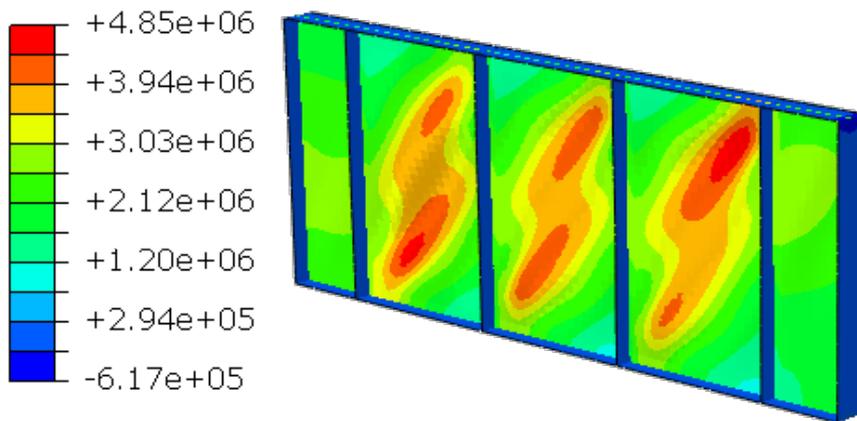


Figura 6.17: Tensiones  $\sigma_t$  en la diagonal a  $45^\circ$  para  $\mathcal{P} = 3$  obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup> para viga bajo sollicitación cortante.

De nuevo, si se compara el campo de tensiones diagonales en el alma de la viga con los obtenidos para placas articuladas en el capítulo anterior (ver Fig. 5.17) se observa que son similares.

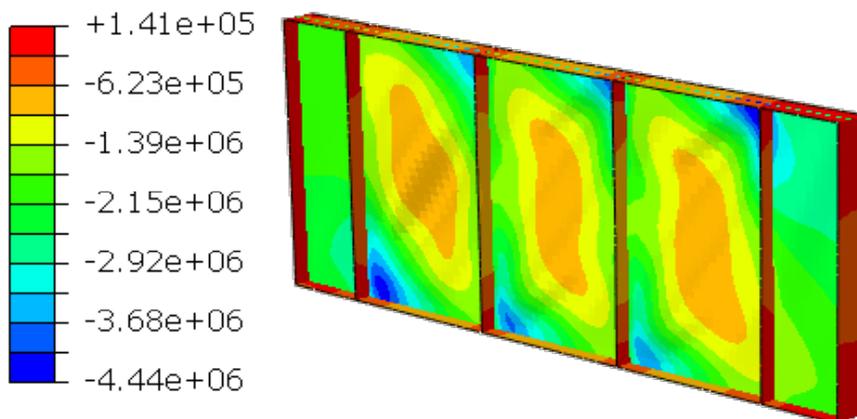


Figura 6.18: Tensiones  $\sigma_c$  en la diagonal a  $-45^\circ$  para  $\mathcal{P} = 3$  obtenidas mediante MEF en *Abaqus*<sup>®</sup> para viga bajo sollicitación cortante.

En la referencia [15] se amplía el método desarrollado por NACA [9] para vigas con espesor muy finos. Los análisis descritos anteriormente se han repetido para la misma con un espesor de alma de 0.5 mm en lugar de 1 mm, obteniendo resultados totalmente análogos en cuanto a tensiones primarias. Sin embargo, para calcular la carga de rotura y estimar el modo de fallo de vigas con espesores muy finos se debería proceder según [15].



## 7.1. Conclusiones

En el presente Trabajo de Final de Grado se ha analizado el inicio de pandeo en placas a cortante para diversas relaciones de aspecto, para materiales isótopos y compuestos y para diferentes condiciones de contorno. A continuación, se ha estudiado el post-pandeo de placas cuadradas articuladas a compresión y a cortante. Finalmente se ha analizado una viga armada de aluminio. Los distintos aspectos han sido siempre estudiados mediante elementos finitos en *Abaqus*<sup>®</sup> comparando los resultados con los de los modelos analíticos existentes así como con métodos aproximados encontrados en libros, documentos ESDU e informes de NACA.

Tras los estudios mencionados, las principales conclusiones que pueden extraerse son las siguientes:

- Es fundamental comprender las bases teóricas y los modelos analíticos para una adecuada interpretación de los resultados obtenidos con MEF, para la detección de errores y la validación de los modelos.
- En cuanto al inicio de pandeo, los resultados obtenidos mediante Ritz y MEF son muy similares. Es posible por tanto obtener expresiones analíticas cerradas para la carga crítica con una precisión muy elevada, aunque para ello deben emplearse al menos nueve términos en Ritz para la deformada.
- Se ha comprendido el documento ESDU 71005 que trata el inicio de pandeo en placas a cortante, y sus gráficos han sido reproducidos con un mínimo error. Se ha comprobado la importante influencia de las condiciones de contorno en el valor de carga crítica.
- Los valores máximos y mínimos de carga crítica tienen lugar en placas empotradas y articuladas respectivamente, que han sido estudiados en detalle. En placas de elevada relación de aspecto la condición en los bordes más cortos pierde su influencia y de esta manera los casos de bordes articulados o empotrados corresponden también con los casos límites de otras combinaciones de condiciones de contorno.
- Una adecuada elección de las funciones de prueba es fundamental para obtener resultados analíticos satisfactorios, tanto en el estudio del inicio de pandeo como del post-pandeo.
- La carga crítica de pandeo se reduce a medida que la placa es más esbelta. Utilizando unas funciones de prueba para placas de baja relación de aspecto y otras para placas más esbeltas se ha logrado obtener resultados analíticos por Ritz que concuerdan muy de cerca con los obtenidos por MEF para cualquier relación de aspecto.
- Las ecuaciones de von Karman, a pesar de su complejidad, permiten obtener soluciones analíticas cerradas con resultados satisfactorios. Empleando funciones de prueba para la deformada de un sólo término basadas en el primer modo de pandeo obtenido por Ritz se han llegado a soluciones analíticas que coinciden muy de cerca con la solución

de MEF. La precisión de estas soluciones es mucho mayor en placas a compresión. Para placas a cortante, la complejidad del método analítico aumenta considerablemente y los resultados son menos precisos, aunque aceptables en ciertos rangos de carga.

- Las funciones de prueba empleadas en la función de tensiones de Airy no son independientes de las de la deflexión, sino que deben elegirse de manera que sea posible la identificación de términos en las ecuaciones de von Karman. Esta metodología de identificación de términos está limitada y para placas a cortante se ha debido emplear un método de minimización de error basado de el método de Galerkin para resolver la primera ecuación de von Karman.
- Se ha conseguido observar el comportamiento característico del post-pandeo de placas a compresión, como las elevadas deflexiones fuera del plano, la pérdida de rigidez compresiva y la consecuente redistribución de tensiones hacia los bordes. Este comportamiento ha sido reproducido tanto por MEF como analíticamente, cuyos resultados coinciden con diferencias mínimas. Además, los resultados de estos dos métodos se han contrastado con los de métodos aproximados expuestos en la literatura con un resultado satisfactorio.
- Se ha observado el campo de tensiones diagonales tanto en placas a cortante como en el alma de la viga armada. Se ha podido comprobar cómo efectivamente la diagonal a compresión agota su capacidad de soportar carga una vez la placa pandea y cómo la diagonal a tracción pasa a soportar la mayor parte de la carga. Las teorías de tensión diagonal pura e incompleta han sido comparadas con los resultados de MEF satisfactoriamente.
- Mientras que es posible obtener conclusiones generales para materiales isótropos, los resultados para material compuesto depende siempre de las propiedades de lámina y de la secuencia de apilamiento. Esto impide obtener resultados generales para compuestos pero es también un reflejo de la gran versatilidad que ofrecen estos materiales.
- Los materiales compuestos permiten adaptar sus propiedades a las condiciones de diseño. La secuencia de apilamiento influye en la carga crítica de pandeo y en el comportamiento a post-pandeo, de modo que es un grado de libertad a tener en cuenta y que posibilita la optimización.
- En el estudio de viga armada no es posible encontrar métodos analíticos precisos y se debe recurrir a métodos semi-empíricos.

## 7.2. Trabajos futuros

Durante la realización del presente trabajo han surgido nuevas ideas y ramas de estudio en las que profundizar, tanto de carácter continuador como transversales al tema principal. Las más destacadas son:

- Estudio de post-pandeo de placas y paneles a compresión con diversas condiciones de contorno en bordes no cargados.
- Estudio de pandeo y post-pandeo en régimen no elástico, introduciendo diversos modelos de plasticidad.
- Estudio de pandeo y post-pandeo de láminas (placas curvas) y de viga armada curva (fuselajes).
- Optimización de un panel de material compuesto: determinación de la secuencia de apilamiento óptima para unas determinadas condiciones de carga.
- Estudio de placas y vigas bajo cargas dinámicas: vibraciones, impactos y fenómenos aeroelásticos.
- Estudio de otros modos de fallo como pandeo entre remaches, *crippling*, o pandeo de los rigidizadores como columnas y en materiales compuestos delaminación o separación piel-rigidizador.
- Modelos experimentales tanto de placas como de viga armada para su comparación con modelos de elementos finitos.
- Viga armada con agujeros en la piel o de canto variable.

### 7.3. Presupuesto

En el siguiente desglose se detalla el coste total de la realización del presente trabajo:

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
220	Horas totales ingeniero	40.00 €	8,800.00 €
20	Búsqueda de información		
20	Formación en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>		
20	Formación teórica		
30	Modelos analíticos en <i>Mathematica</i> <sup>®</sup>		
30	Modelos MEF en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>		
20	Programación en <i>Matlab</i> <sup>®</sup>		
20	Análisis de resultados		
30	Validaciones y depuración de errores		
30	Redacción del informe		
300	Horas totales de servidor (8 núcleos)	5.00 €	1,500.00 €
150	Construcción de modelos analíticos		
150	Análisis MEF		
1	Licencia de <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> académica	1,000.00 €	1,000.00 €
1	Licencia de <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> académica	1,515.00 €	1,515.00 €
1	Licencia de <i>Matlab</i> <sup>®</sup> académica	500.00 €	500.00 €
Coste total (sin IVA)			13,315.00 €
IVA (21 %)			2,796.15 €
<b>Total presupuestado</b>			<b>16,111.15€</b>

El presupuesto total del trabajo asciende a la cantidad de 16,111.15€.

## Bibliografía

- [1] Ventsel, E. and Krauthammer, T., *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. Marcer Dekker, 2001.
- [2] Kassapoglou, C., *Design and Analysis of Composite Structures With Applications to Aerospace Structures*. John Wiley & Sons, 2010.
- [3] Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co., 1989
- [4] Szilard, R., *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical, and Engineering Methods*. John Wiley, 2004.
- [5] Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Franics, 1999.
- [6] Galambos, T. (1998) *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc. U.S.A.
- [7] ESDU 71005 *Buckling of Flat Plates in Shear*.
- [8] Cranfield University, *The Post-Buckled Behaviour of Thin Plates in Compression*
- [9] Kuhn, P., Peterson, J.P. and Levin, L.R., *A Summary of Diagonal Tension Part 1 – Methods of Analysis*, NACA TN 2661, 1952.
- [10] Kuhn, P., Peterson, J.P. and Levin, L.R., *A Summary of Diagonal Tension Part 2 – Experimental Evidence*, NACA TN 2662, 1952.
- [11] Deo R.B., Agarwal, B.L. and Madenci, E., *Design Methodology and Life Analysis of Postbuckled Metal and Composite Panels*, AFWAL-TR-85-3096, vol. I, December 1985.
- [12] Deo, R.B., Kan, H.P. and Bhatia, N.M., *Design Development and Durability Validation of Postbuckled Composite and Metal Panels, Volume III – Analysis and Test Results*, Northrop Corp., WRDC-TR-89-3030, vol. III, November 1989.
- [13] Kuhn, P., *Stresses in Aircraft And Shell Structures*, McGraw-Hill Book Co., 1956
- [14] Megson T.H.G. *Aircraft Structures for engineering students*, Elsevier, 2007
- [15] Tsongas G., Alexander, Ratay T., Robert, *Investigation of Diagonal-Tension Beams with very Thin Stiffened Webs*, Grumman Aerospace Corporation July 1969.
- [16] ESDU 77014 *Flat Planels in Shear. Post-Bukling analysis*.
- [17] DS SIMULIA. *Abaqus 6.11 theory manual*, 2011.
- [18] DS SIMULIA. *Abaqus 6.10 Analysis User's Manual Volume II: Analysis*, 2010.
- [19] <http://www.cnet.com/pictures/where-boeings-next-gen-747-8-comes-to-life-photos/20/>
- [20] <http://www.aircharterservice.com/aircraft-guide/group/boeing-usa/boeing787-800>
- [21] <http://france3-regions.francetvinfo.fr/pays-de-la-loire/loire-atlantique/nantes/video-airbus-la-fabrication-du-caisson-central-de-voilure-nantes-710689.html>

[22] <http://sss.airliners.net/photo/Beech-2000A-Starship/0570651/L/>

[23] <https://www.esdu.com>

[24] <http://www.shellbuckling.com>