

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

---



**TESIS DOCTORAL**

---

**Modelado de grieta y estimación de vida en  
Fretting Fatiga mediante el Método de los  
Elementos Finitos Extendido X-FEM**

---

*Presentada por:* Mohamad Sabsabi

*Dirigida por:* Dr. Eugenio Giner Maravilla  
Dr. F. Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, Marzo de 2010



TESIS DOCTORAL

**Modelado de grieta y estimación de vida en  
Fretting Fatiga mediante el Método de los  
Elementos Finitos Extendido X-FEM**

que para optar al grado de Doctor Ingeniero Industrial

presenta

Mohamad Sabsabi

Ingeniero Industrial, especialidad Mecánica

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

de la Universidad Politécnica de Valencia

*Dirigida por:* Dr. Eugenio Giner Maravilla  
Dr. F. Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, Marzo de 2010



TESIS DOCTORAL

**Modelado de grieta y estimación de vida en  
Fretting Fatiga mediante el Método de los  
Elementos Finitos Extendido X-FEM**

*Presentada por:* Mohamad Sabsabi

*Dirigida por:* Dr. D. Eugenio Giner Maravilla  
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. \_\_\_\_\_

VOCALES: Dr. D. \_\_\_\_\_

Dr. D. \_\_\_\_\_

Dr. D. \_\_\_\_\_

SECRETARIO: Dr. D. \_\_\_\_\_

En Valencia, a \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2010.



# Resumen

El Método de los Elementos Finitos (MEF) ha sido y es uno de los métodos numéricos más utilizados para la estimación de parámetros caracterizantes en Mecánica de la Fractura. En el caso de la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL), existe una gran cantidad de métodos que permiten estimar el factor de intensidad de tensiones  $K$  (o equivalentemente, la tasa de liberación de energía  $G$ ) a partir de un análisis de elementos finitos (EF). Este tipo de análisis ha permitido estudiar la propagación de grieta en fase II y la estimación de vida.

En los últimos años la aplicación del método de elementos finitos (X-FEM) ha demostrado ser una herramienta muy eficaz para el modelado numérico de grietas en MFEL, donde proporciona beneficios significativos en la elaboración de modelos numéricos de propagación de grietas. Las principales ventajas son que la malla de elementos finitos no necesita ajustarse a los límites de la grieta para modelar la discontinuidad geométrica, y, además, la regeneración de la malla no es necesaria en las simulaciones de crecimiento de la grieta. Por lo tanto, una única malla, que a menudo se genera con facilidad, puede ser utilizada para cualquier longitud de grieta y orientación.

Las aportaciones realizadas en esta Tesis están relacionadas con tres aspectos: el modelado del contacto con fricción de caras de grieta con X-FEM, el modelado de la orientación de propagación en fretting fatiga en casos de contacto completo y la estimación de vida, también en contacto completo. En estos dos últimos casos se ha realizado una correlación con los resultados obtenidos mediante ensayos experimentales.

En ciertos problemas de fatiga se pueden presentar situaciones de contacto entre caras de grieta a lo largo del ciclo, y por tanto, las grietas experimentan procesos de cierre con contacto entre sus caras. En esta Tesis se utiliza una formulación integral para establecer el contacto entre los segmentos de caras de grieta dentro de cada elemento, basada en el método mortár. También se ha hecho uso de la implementación del método X-FEM en el programa ABAQUS, lo que ha permitido incorporar el contacto de caras de grieta en X-FEM mediante restricciones puntuales y mediante el método mortár.

Por otra parte, se ha estudiado la iniciación de grieta en fretting fatiga en condiciones de contacto completo utilizando criterios de fatiga multiaxiales. Se ha simulado la propagación de grieta mediante X-FEM, en sus dos fases I/II, aplicando criterios de orientación tradicionales y otro propuesto en esta Tesis.

Por último, se ha estudiado el efecto de los valores de  $K_I$  obtenidos vía X-FEM comparados con los valores obtenidos analíticamente a la hora de estimar la vida bajo condiciones de fretting en contacto completo, estudiando el efecto de los criterios de fatiga multiaxiales y el efecto de las leyes de propagación en la estimación de vida.

PALABRAS CLAVE: método de los elementos finitos extendido; fretting fatiga; contacto caras de grieta; orientación de grieta; estimación de vida.

# Abstract

The Finite Element Method (FEM) has been and is one of the most used numerical methods for the estimation of characterizing parameters in Fracture Mechanics. In the case of Linear-Elastic Fracture Mechanics (LEFM), a number of procedures exist which allow the evaluation of the stress intensity factor  $K$  (or equivalently, the energy release rate  $G$ ) from a finite element analysis (FE). This analysis has enabled to study crack propagation and life estimation issues.

In recent years the application of Extend Finite Element Method (X-FEM) has proved a very effective tool for numerical modelling of cracks in MFEL, which provides significant benefits in the numerical modelling of crack propagation. The main advantages are that the finite element mesh need not comply with crack boundaries to account for the lack of geometric continuity, and also, mesh regeneration is not necessary in the crack growth simulations. Therefore, a single mesh, which is often generated easily, can be used for any crack length and orientation.

The contributions made in this Thesis are related to three aspects: modelling of crack face contact with X-FEM, modelling of the propagation direction in fretting fatigue with complete contact and life estimation, also in complete contact. In the last two cases, the numerical estimations have been correlated with experimental results.

Some fatigue problems may exhibit situations of contact between crack faces along the cycles, and therefore, cracks experience contact closure processes between their faces. This Thesis will utilize a mortar-based formulation to set the contact between the crack faces. A segmentation of the crack is performed based on the intersection with the underlying mesh. Also, the method X-FEM has been implemented in the program ABAQUS, which has allowed to implement the crack face contact routines in X-FEM through point constraints and by the mortar method.

Moreover, crack initiation in fretting fatigue in complete contact conditions (using multiaxial fatigue criteria) has been studied. We have simulated the crack propagation path in its two phases I/II using X-FEM, through the application of traditional orientation criteria and other criteria proposed in this Thesis.

Finally, the effect of the values of  $K_I$  obtained by X-FEM has been studied. It has been compared with the values obtained analytically for the life estimation in fretting fatigue in conditions of complete contact, also studying the effect of multiaxial fatigue criteria and the effect of propagation laws in the life estimation.

**KEYWORDS:** extended finite element method; fretting fatigue; crack face contact; crack orientation; life estimation.

# Resum

El Mètode dels Elements Finitos (MEF) ha sigut i és un dels mètodes numèrics més utilitzats per a l'estimació de paràmetres caracteritzants en Mecànica de la Fractura. En el cas de la Mecànica de la Fractura elasticolineal (MFEL), hi ha una gran quantitat de mètodes que permeten estimar el factor d'intensitat de tensions  $K$  (o equivalentment, la taxa d'alliberament de energia  $G$ ) a partir d'un anàlisi d'elements finits (EF). Este tipus d'anàlisi ha permès estudiar la propagació de clavill en fase II i l'estimació de vida.

En els últims anys l'aplicació del mètode d'elements finits (X-FEM) ha demostrat ser una ferramenta molt eficaç per al modelatge numèric de clavills en MFEL, on proporciona beneficis significatius en l'elaboració de models numèrics de propagació de clavills. Els principals avantatges són que la malla d'elements finits no necessita ajustar-se als límits de la clavill per a modelar la discontinuïtat geomètrica, i, a més, la regeneració de la malla no és necessària en les simulacions de creixement del clavill. Per tant, una única malla, que a menut es genera amb facilitat, pot ser utilitzada per a qualsevol longitud de clavill i orientació.

Les aportacions realitzades en esta Tesi estan relacionades amb tres aspectes: el modelatge del contacte amb fricció de cares de clavill amb X-FEM, el modelatge de l'orientació de propagació en fretting fatiga en casos de contacte complet i l'estimació de vida, també en contacte complet. En estos dos últims casos se ha realitzat una correlació amb els resultats obtinguts per mitjà de assajos experimentals.

En certs problemes de fatiga es poden presentar situacions de contacte entre cares de clavill al llarg del cicle, i per tant, els clavills experimenten processos de tancament amb contacte entre les seues cares. En esta Tesi s'utilitza una formulació integral per a establir el contacte entre els segments de cares de clavill dins de cada element, basada en el mètode mortar. També s'ha fet ús de la implementació del mètode X-FEM en el programa ABAQUS, la qual cosa ha permès incorporar el contacte de cares de clavill en X-FEM per mitjà de restriccions puntuals i per mitjà del mètode mortar.

D'altra banda, s'ha estudiat la iniciació de clavill en fretting fatiga en condicions de contacte complet utilitzant criteris de fatiga multiaxials. S'ha simulat la propagació de clavill per mitjà de X-FEM, en les seues dos fases I/II, aplicant criteris d'orientació tradicionals i un altre proposat en esta Tesi.

Finalment, s'ha estudiat l'efecte dels valors de  $K_I$  obtinguts via X-FEM amb els valors obtinguts analíticament a la hora d'estimar la vida baix condicions de fretting en contacte complet, estudiant l'efecte dels criteris de fatiga multiaxials i l'efecte de les lleis de propagació en la estimació de vida.

PARAULES CLAU: mètode dels elements finits estés; fretting fatiga; contacte cares de clavill; orientació de clavill; estimació de vida.

*A Victoria.*

*A mis padres.*



## Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mis directores Eugenio Giner y Javier Fuenmayor por su orientación, ayuda y apoyo durante la realización de esta Tesis. Además de dirigirme, gracias a sus amplios conocimientos y experiencia profesional, me han ayudado a abordar el desarrollo de esta Tesis, ampliando mis conocimientos en el campo de los métodos numéricos y su aplicación a fretting fatiga, y formándome en este apasionante mundo de la investigación. Sin ellos no hubiera sido posible.

Quiero agradecer también a todos los profesores del Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales y, en especial, a Carlos Ferrer, Manolo Tur, José Enrique, por sus consejos y ayuda a la hora de abordar los numerosos problemas y dificultades surgidos durante la realización de esta Tesis.

También quiero agradecer a todos mis amigos del CITV, en especial, a Andrés, Rafa, Fede, Ramy, Fares, Manolo, Vicente, Javier Sanfeliu y Rubén por su ayuda, su apoyo y por los agradables momentos que compartimos, en aquellos momentos que los he necesitado. Además, quiero agradecer a mis amigos del ITM, Inma, Oscar y Xavi, por su apoyo, ayuda y su amistad.

A mi amigo y hermano Antoine, por su paciencia, su apoyo y por aguantarme y animarme siempre. A José por sus consejos, su ayuda, su amistad, y su buen carácter, que hace divertidos los buenos y no tan buenos momentos.

A mis tíos, mis primos y primas, que siempre han estado conmigo, dándome su apoyo y ayuda incondicional.

Quiero dedicar esta Tesis a las personas que más quiero en este mundo, a mis padres, que por la distancia, no pueden estar en estos momentos conmigo, pero siempre me apoyan e iluminan mi camino. A mi hermano y mis hermanas, sobrinos y sobrinas, que me han dado la confianza y el cariño para seguir adelante, y a mi novia Vicky, por estar conmigo siempre, ayudándome y dándome su confianza, cariño y amor, y llenando mi vida de felicidad. Gracias de todo corazón.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. Objetivo general . . . . .	3
1.2.2. Objetivos parciales . . . . .	3
1.3. Aportaciones de la Tesis . . . . .	4
1.4. Organización de la Tesis . . . . .	4
<b>I Revisión del estado actual del tema</b>	<b>7</b>
<b>2. Revisión general de métodos de cálculo del F.I.T.</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Métodos aplicables mediante el M.E.F. . . . .	12
2.3. Campo singular en extremo de grieta 2D . . . . .	12
2.3.1. Refinamiento de malla . . . . .	14
2.3.2. Elementos singulares . . . . .	15
2.4. Método de los Elementos Finitos Extendido (X-FEM) . . . . .	16
2.4.1. Introducción . . . . .	16
2.4.2. Funciones de enriquecimiento de extremo de grieta . . . . .	17
2.4.3. Funciones de enriquecimiento Heaviside . . . . .	18
2.5. Métodos locales o directos . . . . .	21
2.6. Método de la función de peso . . . . .	22
2.7. Métodos energéticos o indirectos . . . . .	25
2.7.1. La integral de contorno $J$ . . . . .	25
2.7.2. Relación entre $J$ y $K$ en MFEL . . . . .	27
2.7.3. Método de la Integral de Dominio (EDI) . . . . .	28
2.7.4. Método de la integral integral de interacción $M$ . . . . .	30
<b>3. Revisión general de los métodos aplicados al estudio de iniciación y propagación de fretting fatiga</b>	<b>33</b>
3.1. El problema de fretting fatiga . . . . .	35
3.1.1. Contacto completo . . . . .	36

3.1.1.1.	Contacto completo en adhesión . . . . .	38
3.1.1.2.	Contacto completo en deslizamiento . . . . .	39
3.1.2.	Contacto incompleto (cilíndrico) . . . . .	43
3.2.	Criterios de iniciación de grieta . . . . .	51
3.2.1.	Criterio de máxima amplitud de la tensión tangencial . . . . .	53
3.2.2.	McDiarmid . . . . .	53
3.2.3.	Fatemi-Socie . . . . .	54
3.2.4.	Smith-Watson-Topper . . . . .	55
3.2.5.	Crossland . . . . .	57
3.2.6.	Ruiz . . . . .	57
3.2.7.	MSS (Maximum Shear Stress) . . . . .	58
3.3.	Criterios de orientación en propagación de grieta . . . . .	59
3.3.1.	MTS (Maximum Tangential Stress o “Hoop Stress”) . . . . .	59
3.3.2.	Criterio de Nuismer . . . . .	60
3.3.3.	MTS modificado para propagación bajo carga cíclica (Hourlier) . . . . .	61
3.3.4.	Efecto de la tensión $T$ ( $T$ -stress) . . . . .	63
3.3.4.1.	Criterio MTS generalizado (inclusión del T-stress) . . . . .	64
3.4.	Predicción de vida . . . . .	65
3.4.1.	Modelos basados en la iniciación . . . . .	67
3.4.1.1.	McDiarmid . . . . .	68
3.4.1.2.	Fatemi-Socie . . . . .	68
3.4.1.3.	Smith-Watson-Topper . . . . .	69
3.4.2.	Modelos basados en la propagación de grieta . . . . .	69
3.4.2.1.	Modificación del factor de intensidad de tensiones considerando el efecto del cierre de grieta . . . . .	74
3.4.2.2.	Umbral de crecimiento para grietas largas . . . . .	75
3.4.2.3.	Modificación del umbral para grietas cortas . . . . .	76
3.4.2.4.	Modificación de la longitud de grieta . . . . .	78
3.4.2.5.	Modificación del factor de intensidad de tensiones considerando el efecto de grietas cortas . . . . .	78
3.4.2.6.	Ajuste a datos de ensayos . . . . .	78
3.4.3.	Modelos combinados de iniciación y propagación . . . . .	79
3.4.3.1.	Longitud de iniciación fija . . . . .	79
3.4.3.2.	Longitud de iniciación variable . . . . .	81

## II Implementación y aplicación del método X-FEM en fretting fatiga

87

4.	Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta	89
4.1.	Integral de dominio modificada para el cálculo de $K_{II}$ considerando el contacto en caras de grieta . . . . .	91
4.2.	Implementación X-FEM en el programa ABAQUS . . . . .	93
4.2.1.	Elemento de usuario UEL . . . . .	93
4.2.2.	Formulación <i>shifted</i> . . . . .	94

4.2.3.	Elementos overlay . . . . .	94
4.2.4.	Presentación de los resultados . . . . .	95
4.3.	Contacto de caras de grieta en X-FEM . . . . .	96
4.3.1.	Formulación del problema de contacto sin rozamiento . . . . .	97
4.3.2.	Formulación del problema de contacto con rozamiento de Coulomb . . . . .	98
4.4.	Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta utilizando elementos tipo barra T2D2 (restricciones puntuales) . . . . .	99
4.4.1.	Validación de la implementación . . . . .	100
4.4.1.1.	Solución analítica del problema . . . . .	100
4.4.1.2.	Solución numérica del problema con X-FEM . . . . .	102
4.5.	Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta utilizando planteamiento tipo mortar . . . . .	105
4.5.1.	Ecuaciones de restricción para contacto con X-FEM . . . . .	108
4.5.1.1.	Elementos con cuatro nodos Heaviside . . . . .	109
4.5.1.2.	Elemento de extremo de grieta . . . . .	110
4.5.1.3.	Elementos con nodos Heaviside y de extremo de grieta . . . . .	111
4.6.	Ejemplos numéricos . . . . .	111
4.6.1.	Campo analítico de tensiones y desplazamientos. Solución de Westergaard . . . . .	112
4.6.1.1.	Solución para el modo simétrico (modo I) . . . . .	113
4.6.1.2.	Solución para el modo antisimétrico (modo II) sin fricción en caras de grieta . . . . .	116
4.6.1.3.	Modificación de la solución de Westergaard en modo II para incluir fricción en caras de grieta . . . . .	118
4.6.2.	Convergencia de $K_{II}$ para contacto sin fricción . . . . .	119
4.6.2.1.	Malla uniforme . . . . .	120
4.6.2.2.	Malla no uniforme . . . . .	122
4.6.3.	Convergencia de $K_{II}$ para contacto con fricción . . . . .	123
4.6.3.1.	Malla uniforme . . . . .	124
4.6.3.2.	Malla no uniforme . . . . .	125
4.7.	Simulación del cierre de grieta en condiciones de fretting fatiga . . . . .	126
<b>5.</b>	<b>Análisis del comportamiento de grietas de fretting fatiga y correlación experimental</b> . . . . .	<b>133</b>
5.1.	Introducción . . . . .	135
5.2.	Descripción de los ensayos experimentales . . . . .	136
5.2.1.	Caracterización del material y características de las probetas . . . . .	136
5.2.2.	Ensayos de fretting fatiga . . . . .	139
5.3.	Descripción del modelo numérico . . . . .	140
5.4.	Estudio de iniciación de grieta . . . . .	142
5.4.1.	Aplicación de criterios de iniciación en la superficie de la probeta . . . . .	142
5.4.2.	Planteamiento de Lamacq y Dubourg . . . . .	152
5.4.2.1.	Grietas de iniciación Tipo I (iniciación por tensiones tangenciales) . . . . .	152
5.4.2.2.	Transición de grieta fase I/II . . . . .	152

5.4.2.3. Grietas de iniciación Tipo II (iniciación por tensiones normales) . . . . .	155
5.5. Estudio de propagación de grieta con X-FEM . . . . .	158
<b>6. Estimación de la vida de fatiga a partir de los análisis de X-FEM y correlación experimental</b>	<b>167</b>
6.1. Estimación de vida en contacto cilíndrico . . . . .	169
6.1.1. Resultados obtenidos por Szolwinski y Farris . . . . .	169
6.1.1.1. Descripción del modelo numérico . . . . .	169
6.1.1.2. Cálculo de $K_I$ mediante X-FEM considerando la interacción grieta-contacto . . . . .	173
6.1.2. Resultados obtenidos por Araújo y Nowell . . . . .	174
6.1.2.1. Descripción del modelo numérico . . . . .	175
6.1.2.2. Cálculo de $K_I$ mediante X-FEM considerando la interacción grieta-contacto . . . . .	176
6.1.3. Comparación de los resultados analíticos y numéricos en la estimación de $da/dN$ . . . . .	177
6.2. Estimación de vida en contacto completo . . . . .	178
6.2.1. Resultados experimentales obtenidos por el Grupo . . . . .	178
6.2.1.1. Ensayos de fretting fatiga . . . . .	178
6.2.1.2. Curvas $da/dN$ . . . . .	178
6.2.2. Predicción de vida mediante el método de longitud de iniciación variable . . . . .	181
6.2.2.1. Estimación del FIT . . . . .	182
6.2.2.2. Predicción de vida. Influencia de los coeficientes de la ley de Paris . . . . .	184
6.2.2.3. Influencia de los criterios multiaxiales y de los métodos analíticos y numéricos en la estimación de vida . . . . .	186
6.2.2.4. Influencia de las leyes de propagación en la estimación de vida . . . . .	190
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>197</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	199
7.1.1. Conclusiones generales . . . . .	199
7.1.2. Conclusiones parciales . . . . .	199
7.2. Trabajos futuros . . . . .	201
<b>III Apéndices</b>	<b>203</b>
<b>A. Desarrollo de la integral <math>J_p</math></b>	<b>205</b>
<b>B. Valores de los FITs generalizados y comparación entre los métodos empleados</b>	<b>209</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>211</b>

# Capítulo 1

## Introducción



## 1.1. Motivación

La iniciación y el crecimiento de grietas son temas de investigación en fatiga y en particular en fretting fatiga. En el último caso, el análisis requiere el estudio de las tensiones producidas en la zona de contacto. El problema del fretting fatiga presenta un estado multiaxial de tensiones, en muchos casos con variación no proporcional, y requiere el empleo de criterios de fatiga multiaxial, que en general son los mismos que se usan en fatiga pero adaptados a las particularidades del fretting (RUIZ ET AL., 1984; LYKINS ET AL., 2001A,B). Una de las principales particularidades del fretting es el fuerte gradiente de tensiones. Los criterios de iniciación permiten determinar el lugar de iniciación de grieta. Además, algunos de estos criterios, pueden estimar la orientación con la que crece la grieta, con el objetivo final de estimar la vida del componente.

Por otro lado, en condiciones de fretting las grietas pueden experimentar procesos de cierre con contacto entre sus caras, pudiendo encontrarse en estado de adhesión o deslizamiento con fricción RIBEAUCOURT ET AL. (2007); HILLS Y NOWELL (1994) y originando estados de carga de modo II que pueden ser importantes BOLD ET AL. (1992); WANG ET AL. (1995). Es por ello que el modelado numérico del contacto entre caras de grieta con rozamiento es importante para simular el comportamiento mecánico en estas situaciones.

En definitiva es de interés el modelado numérico para simular la grieta y su orientación desde la iniciación hasta la rotura, de forma que se permita la estimación de vida con mayor precisión y se facilite considerablemente el proceso de diseño.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

El objetivo principal de esta Tesis es modelar el comportamiento de grietas y estimar la vida en problemas de fretting fatiga mediante el método X-FEM. Para ello, se modelará el contacto en caras de grieta, se estudiará la orientación de grieta en su fase de iniciación y propagación, y se realizará la estimación de la vida en contacto completo y contacto cilíndrico. Todo ello, se correlacionará con los resultados obtenidos mediante ensayos experimentales.

### 1.2.2. Objetivos parciales

1. Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta:

Se implementará el método X-FEM en el programa ABAQUS para modelar el contacto en caras de grieta utilizando dos métodos: el primero, basado en una formulación integral para establecer el contacto entre los elementos de caras de

grieta de cada elemento, denominado método mortar, y el segundo, basado en restricciones puntuales, mediante elementos unidimensionales tipo barra de 2 nodos y 2 gdl por nodo, denominados T2D2.

2. Modelado de grieta en fretting fatiga:

Se estudiará la iniciación de grieta en condiciones de contacto completo utilizando los criterios multiaxiales existentes, y se simulará la propagación de grieta mediante X-FEM en sus dos fases, I/II, aplicando los criterios de orientación tradicionales.

3. Estimación de vida:

Se realizará la estimación de vida en condiciones de contacto completo y contacto cilíndrico utilizando el método de longitud de iniciación variable, que se basa en la combinación de la vida de iniciación y de propagación. Se estudiará el efecto de los métodos de cálculo de  $K_I$ , X-FEM y métodos analíticos en la estimación de vida. Además, se analizará el efecto de los criterios de fatiga multiaxiales y el efecto de las leyes de propagación en la estimación de vida.

### 1.3. Aportaciones de la Tesis

Las principales aportaciones realizadas en esta Tesis están relacionadas con los siguientes aspectos:

1. El modelado del contacto con fricción entre caras de grieta mediante el método X-FEM, utilizando para la implementación el método de restricciones puntuales (T2D2) y el método mortar.
2. El modelado de la orientación de grieta, en su fase de iniciación y propagación, en problemas de fretting fatiga en condiciones de contacto completo, con una propuesta de criterio de orientación basado en la mínima variación de la tensión tangencial a lo largo del ciclo.
3. La estimación de vida en problemas de fretting fatiga en condiciones de contacto cilíndrico y completo utilizando el método X-FEM para la estimación del FIT en la fase de propagación teniendo en cuenta la interacción grieta-contacto.
4. La realización de ensayos experimentales en problemas de fretting fatiga en condiciones de contacto completo y su correlación con las predicciones numéricas en cuanto a orientación de grieta y estimación de vida.

### 1.4. Organización de la Tesis

La Tesis está estructurada en dos grandes partes. Esencialmente, la parte I recoge una revisión de los principales métodos de cálculo del FIT, incluyendo la revisión del método X-FEM. También se presenta una revisión de los métodos aplicados al

estudio de iniciación y propagación de grieta en condiciones de fretting fatiga. La parte II consiste en la implementación de X-FEM en el programa ABAQUS, y la implementación del mismo con contacto en caras de grieta a través del método mortar y los elementos tipo barra T2D2. Utilizando ejemplos numéricos, se estudia también la propagación de grieta en fretting fatiga en fase I y II. Asimismo se extienden estos estudios a la estimación de vida y la correlación experimental.

La parte I está formada por los Capítulos 2 y 3. En el Capítulo 2, se clasifican y revisan genéricamente las alternativas que se han utilizado para la evaluación numérica de los FIT. La atención se centra en el método X-FEM y se revisan los fundamentos de sus planteamientos.

El Capítulo 3 está dedicado a una revisión general del problema de fretting fatiga, donde se abordan inicialmente dos tipos de contacto: contacto completo y contacto incompleto cilíndrico. Posteriormente se revisan los criterios que estudian la iniciación de grieta en fretting fatiga, junto con los criterios dedicados a la propagación de grieta en fase II.

Con el Capítulo 4 comienza la parte II de esta Tesis. Se trata de un capítulo que analiza el modelado del contacto en caras de grieta, detallando la modificación de la integral  $J$  considerando el contacto con fricción en caras de grieta. Se implementa el método X-FEM en el programa ABAQUS y se describen sus ventajas. Aprovechando la implementación X-FEM - ABAQUS se presenta la implementación del método X-FEM con contacto en caras de grieta utilizando elementos tipo barra T2D2 y la validación de este método. A continuación se presenta también la implementación de X-FEM con contacto en caras de grieta utilizando el método mortar. Estos planteamientos se aplican a ejemplos numéricos utilizando la solución de Westergaard para calcular el error relativo de  $K_{II}$  considerando la fricción entre caras de grieta. Por último, se estudia el cierre de grieta en condiciones de fretting fatiga.

En el Capítulo 5 se analiza el comportamiento de grietas de fretting fatiga, estudiando el efecto de la carga normal y la carga cíclica en el ángulo de iniciación utilizando los criterios de fatiga multiaxiales. A continuación se modela la propagación de grieta en fase I y II, mediante los criterios de orientación tradicionales y otros propuestos en esta Tesis. Los resultados de este modelado se correlacionan con los obtenidos mediante ensayos experimentales.

El Capítulo 6 trata la estimación de vida de los resultados experimentales obtenidos por Szolwinski y Farris, y por Araújo y Nowell, calculando los FIT mediante X-FEM. Se comparan los resultados analíticos y numéricos para la estimación de vida. A continuación se describen los ensayos del contacto completo realizados durante la Tesis, obteniendo los resultados experimentales de las curvas  $da/dN$ , y comparando los resultados numéricos y experimentales en la estimación de vida para contacto completo.

Por último, en el Capítulo 7 se recogen las conclusiones que se extraen de esta Tesis y se resumen las aportaciones. Se incluye una indicación de los posibles trabajos futuros que continúen la línea de investigación aquí presentada.



## Parte I

# Estado actual del tema



## Capítulo 2

# Revisión general de métodos de cálculo del F.I.T.

### **Resumen del Capítulo:**

*En este capítulo se hace una introducción general a los métodos de cálculo del factor de intensidad de tensiones, profundizando en los métodos aplicables mediante el método de los elementos finitos extendido.*



## 2.1. Introducción

Durante los últimos 50 años se han desarrollado numerosos métodos para la determinación del factor de intensidad de tensiones  $K$ . Desde que Irwin estableció que el valor de  $K$  caracteriza de forma unívoca el estado tensional en el entorno del extremo de una grieta en MFEL, su evaluación ha sido un objetivo prioritario en la aplicación de la Mecánica de la Fractura, lo que ha dado lugar a una gran diversidad de técnicas disponibles. Muchos de los planteamientos iniciales, de carácter analítico, han sido en la actualidad superados por la versatilidad que ofrecen los métodos numéricos. En este capítulo, la atención se centra fundamentalmente en este último tipo de métodos, y en particular, en aquellos relacionados con el empleo del Método de los Elementos Finitos (MEF) y del Método de los Elementos Finitos Extendido (X-FEM).

Una visión global de las bases para la determinación de  $K$  se puede encontrar en la colección de trabajos editada por SIH (1973), muchos de ellos de carácter analítico, y sobre todo, en el excelente libro de ALIABADI Y ROOKE (1991) (con una parte sustancial orientada a la aplicación del método de los elementos de contorno a Mecánica de la Fractura) o el completo resumen de ROOKE (1994).

En la Tabla 2.1 se clasifican los métodos en tres categorías, de acuerdo con el grado de sofisticación que suponen y el tiempo necesario para su aplicación. A la hora de obtener una estimación de  $K$  para geometrías sencillas, la primera opción es recurrir a los manuales y compendios (TADA ET AL., 1985; MURAKAMI, 1987). Los métodos de la categoría II son métodos relativamente simples, capaces de proporcionar una estimación de  $K$  con un coste bajo y que aportan una aproximación a los principios que gobiernan los problemas de fractura. Una descripción de estas técnicas se puede encontrar en ALIABADI Y ROOKE (1991) y en las referencias allí citadas.

CATEGORÍA I	CATEGORÍA II	CATEGORÍA III
Manuales y compendios	Superposición	Método de colocación
	Concentrador de tensiones	<b>Método de elementos finitos</b>
	Distribución local de tensiones	<b>Método de elementos finitos extendido (X-FEM)</b>
	Funciones de Green	Método de elementos de contorno
	Funciones de peso	Método de fuerzas másicas
	Composición de contornos	Método de las funciones de borde
		Método de las líneas
		Técnica alternante
		Método de la dislocación continua

TABLA 2.1: *Métodos generales de evaluación de  $K$* , ALIABADI Y ROOKE (1991).

Los métodos de la categoría III son más elaborados y necesitan en mayor o menor grado de una solución numérica. El método de colocación fue muy utilizado durante los años 60, hasta la generalización del uso del MEF. El MEF por su versatilidad y simplicidad, rápidamente pasó a dominar la disciplina de los métodos numéricos en Mecánica de la Fractura, desde los años 70 hasta nuestros días, en los que se usa ampliamente su variante X-FEM que simplifica enormemente la necesidad de mallado.

Por su parte, el método de los elementos de contorno (MEC o BEM) pronto surgió como una potente alternativa para problemas de la MFEL, por sus menores exigencias en cuanto a discretización. Los métodos de las fuerzas másicas o de las funciones de borde son métodos relacionados en cierto modo con el MEC (ALIABADI Y ROOKE, 1991) mientras que el método de las líneas aplica técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. En lo que sigue se hará una revisión de las principales técnicas aplicables mediante el MEF, distinguiendo entre dos grandes categorías: *métodos locales* y *métodos energéticos*.

## 2.2. Métodos aplicables mediante el M.E.F.

El Método de los Elementos Finitos se ha consolidado durante las últimas cuatro décadas como el método numérico más versátil para el análisis de problemas de la mecánica del sólido. Tras el establecimiento de las bases del método, muy pronto surgieron aplicaciones directas a la Mecánica de la Fractura (WATWOOD, 1969; DIXON Y POOK, 1969). Desde entonces el número de referencias en la literatura acerca de la aplicación del MEF y sus variantes como el X-FEM (MOËS ET AL., 1999) a Mecánica de la Fractura ha crecido de forma imparable.

A lo largo de los últimos 40 años han aparecido periódicamente revisiones de los métodos que permiten aplicar el MEF a Mecánica de la Fractura. La década de los 70 fue especialmente fructífera y pronto surgió la necesidad de “ordenar” la multitud de trabajos aparecidos y que establecieron la mayoría de los métodos disponibles hoy en día. Así se pueden destacar los trabajos de RICE Y TRACEY (1973) y de GALLAGHER (1978). Posteriormente apareció el excelente libro de OWEN Y FAWKES (1983), de carácter introductorio y que incluye detalles acerca de la implementación de la mayoría de los métodos, y la detalladísima revisión editada por ATLURI (1986). RAJU Y NEWMAN (1984) presentaron un completo resumen acerca de la aplicación de métodos numéricos para el análisis de grietas 3D, incluyendo comparaciones en base a ejemplos.

A continuación se hará una revisión de las técnicas habitualmente utilizadas en combinación con el MEF. La Fig. 2.1 esquematiza el contenido de dichos apartados, distinguiendo entre técnicas que permiten modelar adecuadamente el comportamiento singular mediante EF y técnicas que permiten la evaluación del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) como postproceso.

## 2.3. Campo singular en extremo de grieta 2D

Todos los problemas de la Mecánica de Fractura Elástico Lineal (MFEL) se caracterizan por presentar un comportamiento singular en deformaciones y tensiones en el extremo o frente de grieta.

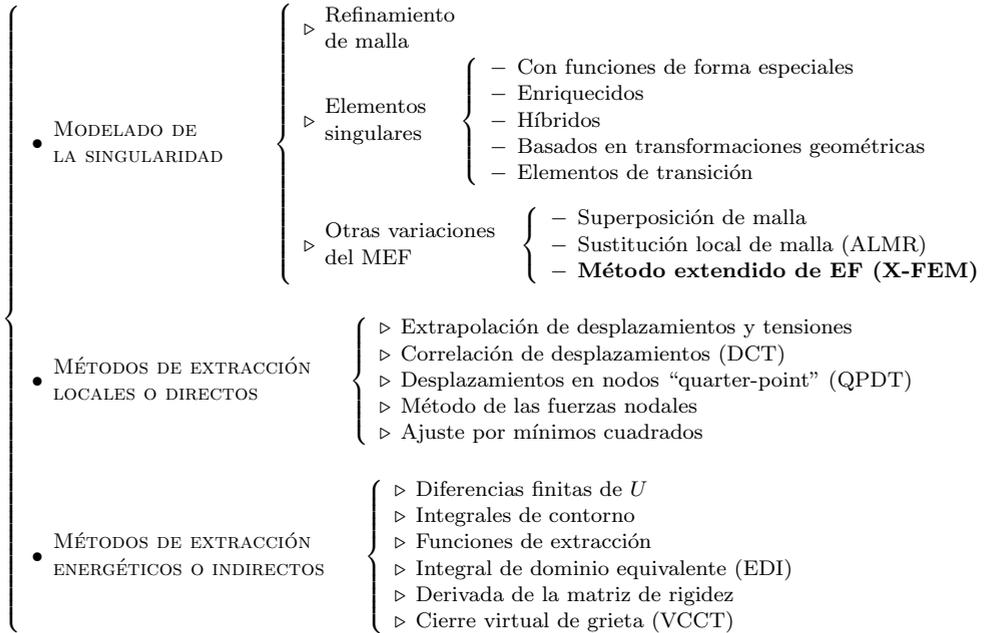


FIGURA 2.1: Algunas técnicas utilizadas en combinación con el MEF para la extracción de los factores de intensidad de tensiones.

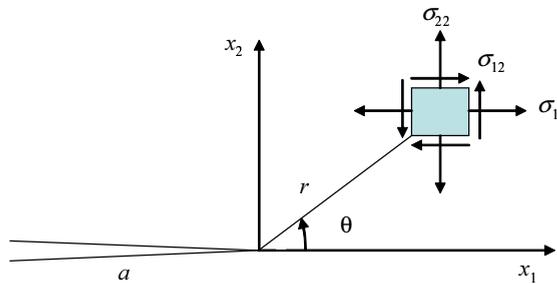


FIGURA 2.2: Notación utilizada en la definición del campo de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.

Las expresiones correspondientes al primer término (término singular) del desarrollo analítico de la solución en tensiones (WILLIAMS, 1952) se pueden encontrar en cualquier texto básico sobre Mecánica de la Fractura (GDOUTOS, 1993; ANDERSON, 1995). De acuerdo con la nomenclatura de la Fig. 2.2, las expresiones para el caso general 2D de un sólido con comportamiento elástico, lineal e isótropo son:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.1a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.1b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.1c)$$

Análogamente, los primeros términos del desarrollo del campo de desplazamientos en puntos cercanos al extremo de grieta son:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \quad (2.2a)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \quad (2.2b)$$

donde  $\mu$  es el módulo de rigidez a cizalladura y  $\kappa$  es una constante que toma los siguientes valores según el tipo de estado tensional (constante de Kolosov):

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en deformación plana} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en tensión plana} \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo  $\nu$  el coeficiente de Poisson. Un estudio detallado de estas expresiones puede encontrarse en EFTIS ET AL. (1977).

Las Ecs. (2.1) y (2.2) son básicas en MFEL y como se observa están descritas en función de los Factores de Intensidad de Tensiones (FITs) como únicos parámetros caracterizantes.

Cuando a finales de los años 60 el MEF comenzó a ser aplicado a problemas de la MFEL, pronto surgió la necesidad de representar correctamente el estado tensional dado por las Ecs. (2.1), ya que la formulación tradicional del MEF no está especialmente indicada para el modelado del comportamiento singular. Así, gran parte de la literatura aparecida durante la década de los 70 dedicó sus esfuerzos a este objetivo.

### 2.3.1. Refinamiento de malla

Históricamente la primera opción para intentar reproducir el comportamiento singular en MFEL fue el uso de mallas extremadamente refinadas en el entorno de grieta (CHAN ET AL., 1970). Aunque este planteamiento no requiere modificación especial en un código estándar de elementos finitos, pronto se comprobó que es poco eficiente: para obtener valores de  $K$  con un error del 5% en un problema 2D mediante el método

de extrapolación de desplazamientos se necesita un número elevado de grados de libertad (en torno a 2000 con elementos lineales, CHAN ET AL., 1970). Obviamente, este inconveniente se agudiza en problemas 3D, siendo difícil alcanzar precisiones menores del 10 % con unos 9000 grados de libertad (LIEBOWITZ Y MOYER, 1989).

### 2.3.2. Elementos singulares

Poco después de las primeras aplicaciones del MEF en Mecánica de la Fractura, surgió un gran número de trabajos relacionados con el desarrollo de elementos específicos que permiten modelar de forma adecuada el comportamiento singular en el entorno del extremo de grieta (ver por ejemplo la excelente revisión de GALLAGHER, 1978). Estos elementos se denominan genéricamente *elementos singulares* y su utilización evita los elevados refinamientos necesarios para modelizar correctamente el comportamiento teórico. Debido al carácter local en la mejora del modelo de EF alcanzable con este tipo de elementos, en esta Tesis no se hará uso de ellos. Sin embargo, la mayoría de las veces su utilización en MFEL es ventajosa, lo que justifica la breve revisión que se incluye a continuación.

De acuerdo con LO Y LEE (1992) los elementos singulares se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Elementos con funciones de forma especiales.
- Elementos híbridos.
- Elementos basados en transformaciones geométricas.

LIEBOWITZ Y MOYER (1989) distinguen además otra clase de elementos singulares:

- Elementos enriquecidos.

Aunque los elementos híbridos presentan una precisión superior a los demás, los elementos singulares basados en una transformación geométrica (p.ej. los elementos tipo “quarter point” QP) son, con diferencia, los más simples de implementar, ofreciendo un rendimiento igual o superior a los elementos con funciones de forma especiales. Con el tiempo se han impuesto sobre los otros tipos y en la actualidad es frecuente su implementación en códigos comerciales de EF. En cualquier caso, todos los tipos mencionados tienen sus ventajas e inconvenientes que pueden hacerlos preferibles en determinados problemas. En CAREY Y ODEN (1983); MICHAVILA Y GAVETE (1988) y OWEN Y FAWKES (1983) pueden encontrarse detalladas revisiones. En esta última referencia se incluye un estudio comparativo de los diversos tipos de elementos singulares aplicados a ejemplos numéricos, incluyendo problemas en modo mixto.

En los análisis realizados en esta Tesis no se utilizarán elementos singulares, ya que el planteamiento X-FEM incorpora un enriquecimiento específico de extremo de grieta, como se describe en el apartado siguiente.

## 2.4. Método de los Elementos Finitos Extendido (X-FEM)

### 2.4.1. Introducción

Como se ha comentado, la correcta determinación de parámetros que caracterizan los campos de desplazamientos y tensiones en las cercanías del frente de grieta, como los FITs, es un aspecto fundamental de análisis ya que establecen las condiciones para el crecimiento de grieta y finalmente el fallo estructural.

Aunque el MEF es robusto y está muy desarrollado, sus características no permiten modelar de manera adecuada el comportamiento de discontinuidades en movimiento (por ejemplo, propagación de grietas). El planteamiento convencional de Elementos Finitos se basa en una estructura de elementos para la construcción de un espacio de aproximación, que necesariamente se debe alinear con la topología de la discontinuidad (ver Fig. 2.3). Esto implica que se deba regenerar la malla a medida que la discontinuidad cambia su geometría durante la propagación de grieta, resultando en mayores costes computacionales y errores inducidos significativos.

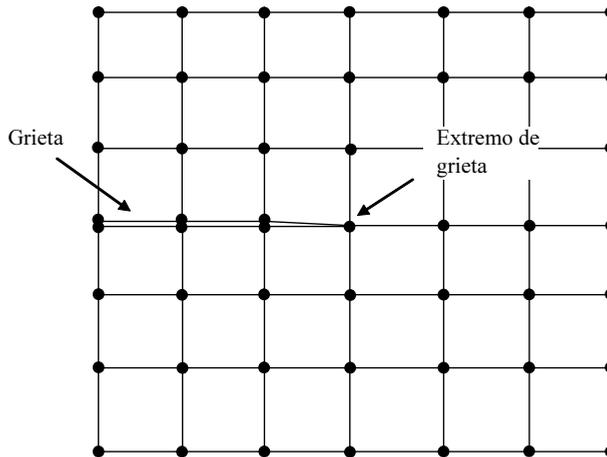


FIGURA 2.3: Ejemplo de una malla de EF, mostrando cómo los elementos se adaptan a la topología de la grieta.

Los métodos que no requieren mallas, como el “Element free Galerkin method”, o métodos sin malla (BELYTSCHKO ET AL., 1994), se empezaron a utilizar en la mecánica computacional para dar solución a problemas que presentaban dificultades con el MEF. No obstante, estas técnicas requieren cálculos computacionales más complejos, relacionados con la generación de funciones representativas y cuadraturas adicionales. Además presentan dificultades para satisfacer las condiciones de contorno de Dirichlet.

La formulación convencional del problema de grietas con el MEF requiere el remallado de la geometría cada vez que la grieta se propague, mientras que el método

de los elementos finitos extendido, X-FEM propuesto por BELYTSCHKO Y BLACK (1999); MOËS ET AL. (1999), sólo utiliza una única malla. Esta malla se extiende al dominio geométrico, *supuesto sin grieta* y puede ser relativamente poco refinada. Además no necesita estar estructurada. El método trata a la grieta como una entidad geométrica totalmente separada<sup>1</sup> y considera su interacción con la malla a través del *enriquecimiento* de la aproximación asociada a los nodos pertenecientes a elementos intersectados por la ubicación geométrica de la grieta. BELYTSCHKO Y BLACK (1999); MOËS ET AL. (1999) proponen el enriquecimiento de la malla de EF convencional mediante la adición de grados de libertad en los nodos de los elementos que están intersectados por la grieta de manera que estos puedan representar la discontinuidad y mejorar la representación de la singularidad del extremo de grieta.

### 2.4.2. Funciones de enriquecimiento de extremo de grieta

Inicialmente, y con el fin de representar las grietas independientemente de la malla, BELYTSCHKO Y BLACK (1999) enriquecieron la aproximación de desplazamientos de elementos finitos de los nodos alrededor del extremo de la grieta y a lo largo de las caras de grieta con unas funciones que aumentan los grados de libertad de estos nodos, tal y como se muestra en la Fig. 2.4.

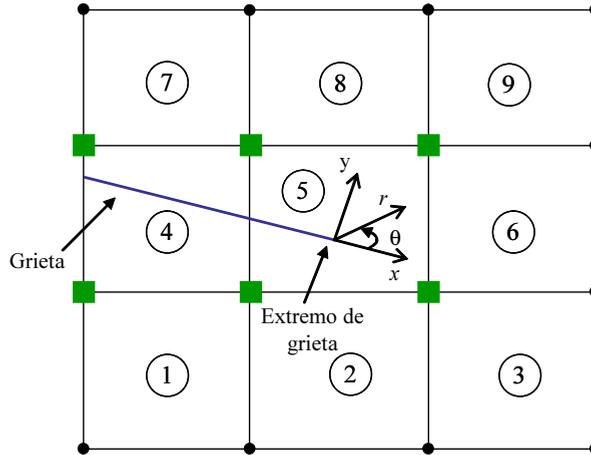


FIGURA 2.4: Representación de los nodos enriquecidos por las funciones del extremo de grieta

La solución aproximada de elementos finitos queda tal y como se muestra en la Ec. (2.4).

$$\mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in \mathcal{K}} \left[ N_i(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 F_l(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{il} \right] \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Su gran ventaja es precisamente el hecho de no incluir la grieta en el mallado.

donde  $\mathcal{I}$  es el conjunto de todos los nodos de la malla (marcados con círculos en negro en la Fig. 2.4) y  $\mathcal{K}$  es el subconjunto formado por los nodos enriquecidos con funciones  $F_l(\mathbf{x})$  (marcados con cuadrados en la Fig. 2.4),  $r, \theta$  son las coordenadas polares locales con el origen en el extremo de grieta. El eje  $x$  está alineado con las caras de grieta, que se asumen que están libres de carga,  $\theta$  es medido en sentido antihorario,  $N(\mathbf{x})$  son las funciones de forma convencionales,  $\mathbf{b}_{il}$  son los grados de libertad añadidos a los nodos marcados con cuadrados en la Fig. 2.4, y  $F_l(\mathbf{x})$  son las funciones tipo extremo de grieta. Estas funciones proceden de la representación del campo asintótico de desplazamientos de extremo de grieta de la MFEL, y vienen dados por la siguiente base:

$$F_l(r, \theta) = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (2.5)$$

Es importante destacar que la función  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  introduce la discontinuidad entre las caras de grieta, cuando se evalúa en  $\theta = -\pi$  y  $\theta = +\pi$ .

### 2.4.3. Funciones de enriquecimiento Heaviside

Para grietas de mayor longitud o no rectas la representación mediante las funciones de extremo de grieta resulta imprecisa en los elementos lejanos. MOËS ET AL. (1999) plantearon una manera complementaria para el enriquecimiento, donde el extremo de grieta es enriquecido de manera análoga a BELYTSCHKO Y BLACK (1999). Además, introdujeron una forma más apropiada de representar la discontinuidad en los elementos que están intersectados a lo largo de la grieta y que no están cerca del extremo. Los nodos de estos elementos intersectados se enriquecen con la función Heaviside  $H(\mathbf{x})$ , marcados con círculos en rojo en la Fig. 2.5.

La función de Heaviside  $H(\mathbf{x})$ , es una función de signo, y viene dada por la siguiente expresión:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \\ -1 & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

En la Fig. 2.6a, la grieta se considera como una curva parametrizada por la coordenada curvilínea  $s$  y el origen de la curva es tomado en uno de sus extremos. Dado un punto  $\mathbf{x}$  del dominio, tomamos  $\mathbf{x}^*$  como el punto mas cercano sobre la grieta. En  $\mathbf{x}^*$ , se construyen los vectores tangenciales y normales a la curva,  $\mathbf{e}_s$  y  $\mathbf{e}_n$ , con la orientación  $\mathbf{e}_n$  tomada de manera tal que  $\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$ , donde el vector unitario  $\mathbf{e}_z$  apunta fuera del papel. En el caso de una grieta poligonal como se indica en la Fig. 2.6b, donde no existe una sola normal y existen dos posibles distancias a cada uno de los segmentos de grieta, se define un cono de normales en el punto  $\mathbf{x}^*$ . En este caso, la función  $H(\mathbf{x}) = 1$  si el vector  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$  pertenece al cono de normales, y -1 si se encuentra en el otro lado.

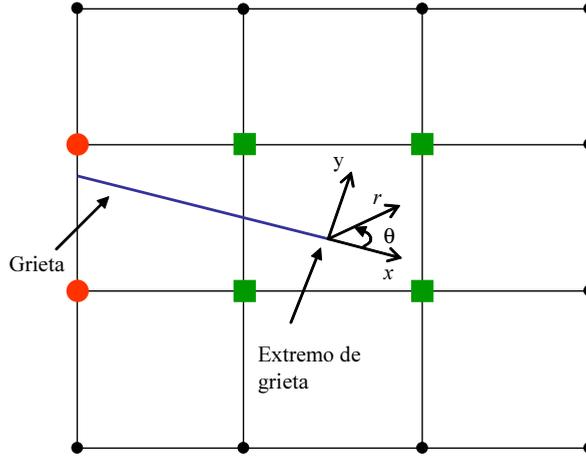


FIGURA 2.5: Representación de los nodos enriquecidos por las funciones de Heaviside marcados con círculos en rojo. Los nodos enriquecidos por las funciones de extremo de grieta están marcados con cuadrados.

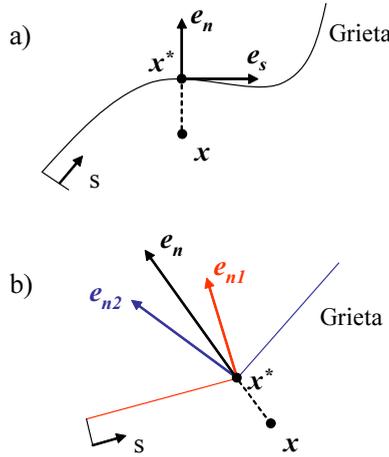


FIGURA 2.6: Coordenadas normal y tangencial para una grieta. (a)  $\mathbf{x}^*$  es el punto más cercano a la grieta desde  $\mathbf{x}$ . El valor de la función discontinua  $H$  es  $-1$  en  $\mathbf{x}$ . (b) En el caso de un vértice se traza un cono de normales para determinar la función.

De manera general, la aproximación de elementos finitos extendida para el caso de una grieta en el caso bidimensional queda (ver Fig. 2.7):

$$\mathbf{u}_{\text{xfem}}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in \mathcal{J}} N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i + \sum_{i \in \mathcal{K}} \left[ N_i(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 F_l(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{il} \right] \quad (2.7)$$

donde  $\mathcal{J}$  es el conjunto de nodos que se enriquecen con la función de discontinuidad

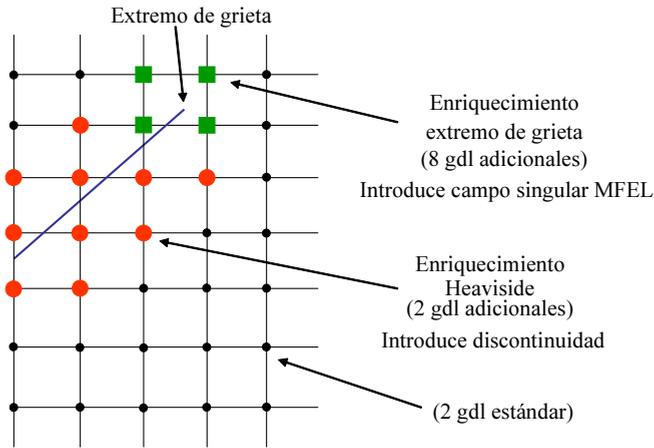


FIGURA 2.7: Malla con X-FEM, mostrando los nodos enriquecidos con las funciones de Heaviside y las de extremo de grieta.

$H(\mathbf{x})$  para elementos divididos por la grieta.

Por tanto, en un problema bidimensional, un nodo estándar tiene 2 grados de libertad, un nodo enriquecido con la función de Heaviside tiene 4, mientras que un nodo enriquecido con la función del extremo de grieta tiene 10 grados de libertad.

En MOËS ET AL. (1999), se indica el enriquecimiento de los nodos en una discretización con una grieta interior. Se enriquecen con funciones representativas del campo de desplazamientos en extremo de grieta los nodos marcados con cuadrados y con funciones de discontinuidad los marcados con círculos (ver la Fig. 2.8).

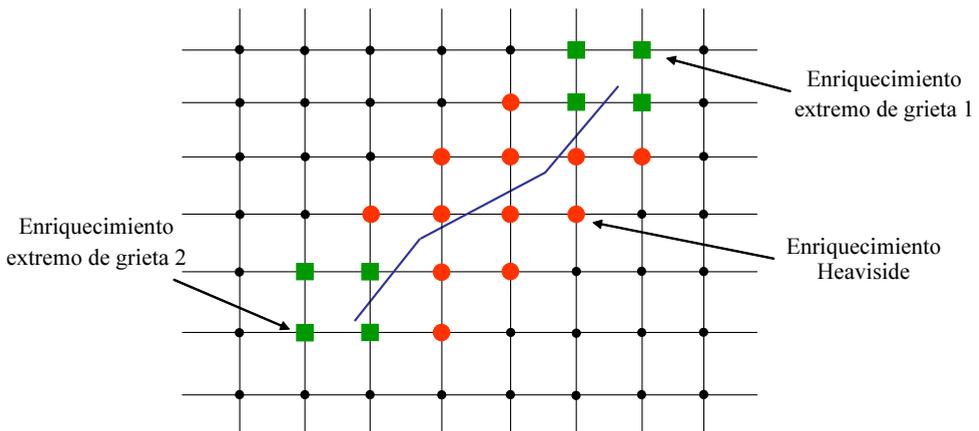


FIGURA 2.8: Malla con una grieta interior. Los círculos son el enriquecimiento de Heaviside, y los cuadrados son el enriquecimiento con funciones de los extremos de grieta.

La aproximación de elementos finitos extendida para el caso de una grieta interior en el caso bidimensional queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{xfem}}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in \mathcal{J}} N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i + \sum_{i \in \mathcal{K}_1} \left[ N_i(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 F_{l,1}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{il,1} \right] \\ & + \sum_{i \in \mathcal{K}_2} \left[ N_i(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 F_{l,2}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{il,2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

siendo  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  el conjunto de los nodos a enriquecer con las funciones de los extremos de grieta correspondientes. Esta formulación de enriquecimiento local es un caso específico del Método de la Partición de la Unidad (MELENK Y BABUSKA, 1996).

El método retiene la mayoría de las ventajas que caracterizan a la formulación habitual del MEF, con las modificaciones apropiadas para la integración numérica (en concreto, subdivisión de los elementos intersectados por la grieta). El método es de especial utilidad en el análisis de propagación de grieta, al evitar el problema de remallado, ofreciendo buenos resultados. En SUKUMAR ET AL. (2000) se presenta la extensión del método a 3D. El planteamiento permite el análisis de otros tipos de comportamiento no isótropos así como problemas no lineales.

De la Ec. (2.7), queda claro que el desplazamiento físico de un nodo enriquecido  $i$ , está dado por los grados de libertad standard más la contribución enriquecida  $H(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}_i$  y/o  $F_l(\mathbf{x}_i) \mathbf{b}_{il}$ . Esto implica que los grados de libertad estándar  $\mathbf{u}_i$  no corresponden al desplazamiento verdadero calculado por X-FEM.

ZI Y BELYTSCHKO (2003) y VENTURA ET AL. (2003) implementaron una variante llamada formulación “shifted” para que el grado de libertad  $\mathbf{u}_i$  calculado via X-FEM sea la solución física del desplazamiento nodal. Esta formulación viene dada por la Ec. (2.9). Con esta formulación, los grados de libertad  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_{il}$  se anulan en los nodos de coordenadas  $\mathbf{x}_i$ , y así no contribuyen en el valor del desplazamiento físico del nodo enriquecido  $i$ . Esta formulación ha sido utilizada en GINER ET AL. (2008).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{ef}}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in \mathcal{J}} N_i(\mathbf{x}) [H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a}_i + \\ & + \sum_{i \in \mathcal{K}} \left[ N_i(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 [F_l(\mathbf{x}) - F_l(\mathbf{x}_i)] \mathbf{b}_{il} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.5. Métodos locales o directos

Como se ha mencionado anteriormente, el objetivo de la aplicación de los métodos numéricos a MFEL es la determinación de los factores de intensidad de tensiones

$K$ . Se denominan *métodos directos* o *locales* a aquellos que permiten obtener una estimación directa de  $K$ , basada en la correcta representación de los campos singulares de deformaciones en la proximidad del extremo o frente de grieta. Por ello estos métodos se utilizan casi exclusivamente en combinación con elementos singulares.

Conviene recordar que cuando se utilizan elementos singulares de tipo enriquecido o de tipo híbrido, la formulación del problema de EF se modifica convenientemente de forma que los FITs se obtienen directamente como incógnitas primarias del problema de EF, tal y como sucede con los desplazamientos nodales. Por ello, el empleo de este tipo de elementos evita la necesidad de un postproceso de los resultados de EF, aunque esto se consigue a costa de modificar el planteamiento tradicional de EF. Por otra parte, es frecuente la utilización de elementos singulares basados en funciones de forma especiales o de elementos singulares tipo QP (pese a que estos elementos necesiten de técnicas de extracción adicionales) ya que su implementación es mucho más simple.

Los métodos locales de postproceso más utilizados son:

1. Extrapolación de desplazamientos y tensiones (CHAN ET AL., 1970).
2. Técnica de correlación de desplazamientos (DCT) (OWEN Y FAWKES, 1983).
3. Técnica de desplazamiento en los nodos “quarter-point” (QPDT) (PU ET AL., 1978).
4. Método de las fuerzas nodales (RAJU Y NEWMAN, 1979, 1984).
5. Ajuste por mínimos cuadrados (JU, 1998).

Una revisión general se puede encontrar en GINER (2001). Como se ha comentado, en esta Tesis no hará uso de estos métodos.

## 2.6. Método de la función de peso

El uso del método de la función de peso “weight function” WF, en Mecánica de la Fractura fue propuesto por BUECKNER (1970), y luego fue generalizado por RICE (1972). En este apartado no se hará una revisión detallada de los aspectos teóricos del método (SIH, 1973), sino un breve resumen de los mismos.

En este método, se utiliza la distribución de la tensión normal a la grieta (en ausencia de ésta) y se combina con la función de peso  $w$ , que está asociada a una geometría dada. El factor de intensidad de tensiones se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$K_I^{WF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a w(s, a) \sigma_n(s) ds \quad (2.10)$$

BUECKNER (1973) desarrolló expresiones alternativas para el cálculo del  $K_I$  basadas en el empleo de una función de peso específica para el caso de una grieta tipo SENT (*Single Edge Notch Tension*). La función de peso propuesta viene dada por la Ec. (2.11).

$$w_{\text{SENT}}(s, a) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left( 1 + m_1 \frac{s}{a} + m_2 \left( \frac{s}{a} \right)^2 \right) \quad (2.11)$$

donde  $a$  es la longitud de grieta y  $s$  es una variable de integración que recorre desde el extremo de grieta hasta la superficie, Fig. 2.9. Los parámetros  $m_1$  y  $m_2$  son funciones que dependen del cociente  $a/W$ , donde  $W$  es el ancho de la placa.

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.6147 + 17.1844 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 8.7822 \left( \frac{a}{W} \right)^6 \\ m_2 &= 0.2502 + 3.2889 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 70.0444 \left( \frac{a}{W} \right)^6 \end{aligned} \quad (2.12)$$

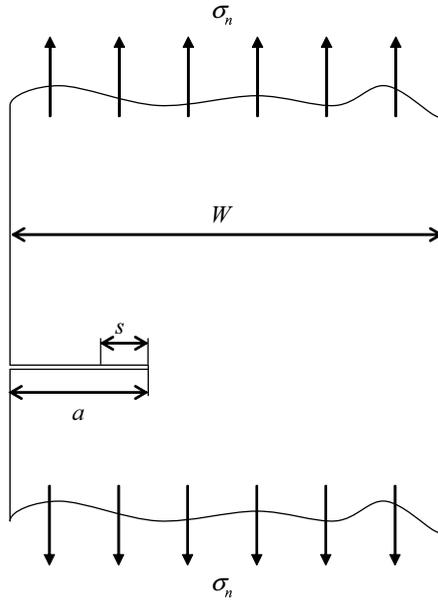


FIGURA 2.9: Esquema de la grieta del modelo SENT.

Con esta función de peso el factor de intensidad de tensiones en modo I se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$K_{\text{I SENT}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a w_{\text{SENT}}(s, a) \sigma_n(s) ds \quad (2.13)$$

Como se ha mencionado anteriormente,  $\sigma_n(s)$  es la tensión normal en la dirección perpendicular al plano de la grieta.

FETT ET AL. (1988) desarrollaron otras funciones de peso para calcular  $K_{\text{I}}$  para una grieta tipo DENT (*Double Edge Notch Tension*). Considerando el caso de la grieta

izquierda de la Fig. 2.10 y una carga simétrica la expresión utilizada para calcular el  $K_I$  viene dada:

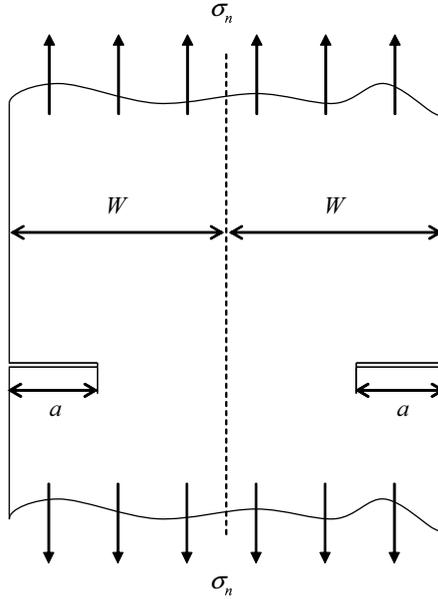


FIGURA 2.10: Esquema de la geometría del modelo DENT.

$$K_{I \text{ DENT}} = \int_0^a w_{\text{DENT}}(s, a) \sigma_n(s) ds \quad (2.14)$$

donde  $w_{\text{DENT}}(s, a)$  es la función de peso y se calcula utilizando la siguiente ecuación:

$$w_{\text{DENT}}(s, a) = \sqrt{\frac{8}{\pi a}} \left\{ \frac{\rho}{2\sqrt{1-\rho}} + \left( \eta + \frac{3}{2} C_1 \rho \right) \sqrt{1-\rho} + \left( \eta C_1 + a \frac{\partial C_1}{\partial a} + \frac{5}{2} C_2 \rho \right) (1-\rho)^{3/2} + \left( \eta C_2 + a \frac{\partial C_2}{\partial a} \right) (1-\rho)^{5/2} \right\} \quad (2.15)$$

donde

$$\eta = 1 + \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} + \frac{-0.561\alpha - 0.41\alpha^2 + 1.413\alpha^3 - 0.76\alpha^4}{1.122 - 0.561\alpha - 0.205\alpha^2 + 0.471\alpha^3 - 0.19\alpha^4} \quad (2.16)$$

$$\alpha = \frac{a}{W} \quad \rho = \frac{s}{a} \quad (2.17)$$

$$C_1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{I_2 - 5I_1} - \left( Q - I_0 - \frac{1}{3}I_1 \right) \quad (2.18)$$

$$C_2 = \frac{1}{I_2 - 5I_1} \left( Q - I_0 - \frac{1}{3}I_1 \right) \quad (2.19)$$

$$I_j = \frac{2}{2j + 3} \quad ; j = 0, 1, 2 \quad (2.20)$$

$$Q = \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\alpha^2} [-\alpha - \ln(1 - \alpha)] (1.2463 - 0.1419\alpha - 0.5067\alpha^2 + 0.9422\alpha^3 - 0.7078\alpha^4) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} [-0.1681 + 0.0669\alpha - 0.00103\alpha^2 + 0.06712\alpha^3 - 0.0632\alpha^4] \quad (2.22)$$

Por otro lado, en TADA ET AL. (1985) se recogen otras expresiones para calcular directamente  $K_I$  a través de factores geométricos:

- Para el caso de una grieta tipo SENT viene dada por la siguiente expresión:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\frac{2W}{\pi a} \cdot \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[ 0.752 + 2.02 \left(\frac{a}{W}\right) + 0.37 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\right)^3 \right] \right] \quad (2.23)$$

donde  $a$  es la longitud de grieta,  $W$  es la anchura de la placa, véase Fig. 2.9.

- Para el caso de una grieta tipo DENT viene dada por la siguiente expresión:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \left[ \frac{1.122 - 0.561 \cdot \left(\frac{a}{W}\right) - 0.205 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.4701 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 0.190 \cdot \left(\frac{a}{W}\right)^4}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{W}\right)}} \right] \quad (2.24)$$

donde  $a$  es la longitud de grieta,  $W$  es la semianchura de la placa, Fig. 2.10.

## 2.7. Métodos energéticos o indirectos

### 2.7.1. La integral de contorno $J$

La evaluación correcta del campo de deformaciones en las inmediaciones de una entalla o grieta con el objetivo de permitir su caracterización suele presentar dificultades, en especial si se considera un comportamiento no lineal del material. Este hecho llevó a RICE (1968) a proponer la conocida integral de contorno  $J$ , originariamente para una entalla en un problema bidimensional, en el que el campo de tensiones sólo depende de dos coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . Por su parte, Cherepanov en 1967

hizo un planteamiento similar al del Rice, aunque fue mucho menos divulgado (ver CHEREPANOV, 1979).

Bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), libre de fuerzas por unidad de volumen y contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas, Rice definió su integral  $J$  según la siguiente ecuación (teniendo en cuenta la disposición de la entalla con arreglo al sistema de referencia mostrado en la Fig. 2.11):

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} d\Gamma \right) \quad (2.25)$$

donde  $\Gamma$  es cualquier camino que rodee el extremo de entalla (cuyo contorno es  $\Gamma_t$ ), recorrido en sentido antihorario,  $W$  es la energía de deformación por unidad de volumen,  $\mathbf{T}$  es el vector de tracciones en el contorno  $\Gamma$  (fuerzas por uds.),  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos y  $d\Gamma$  es un elemento de arco de la curva  $\Gamma$ .

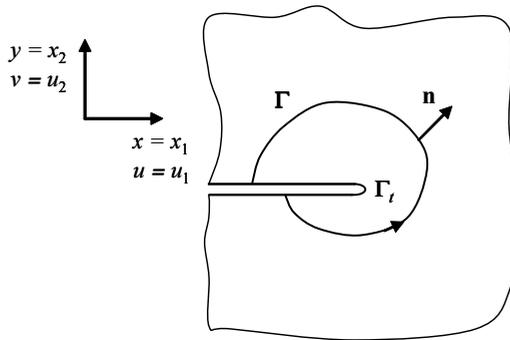


FIGURA 2.11: Entalla en un dominio bidimensional.  $\Gamma$  es cualquier curva que contenga el fondo de entalla  $\Gamma_t$ .

La densidad de energía de deformación  $W$  para el caso elástico (lineal o no) viene dada por la Ec. (2.26).

$$W = W(x, y) = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.26)$$

en la que  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformaciones infinitesimales. Por otra parte, las componentes del vector de tracciones  $\mathbf{T}$  sobre el contorno  $\Gamma$  se definen, en función del vector normal unitario  $\mathbf{n}$  indicado en la Fig. 2.11, como<sup>2</sup>

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.27)$$

<sup>2</sup> RICE (1968) las define en su artículo como  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ , aunque en otros trabajos posteriores utiliza la notación propuesta aquí, Ec. (2.27). En cualquier caso  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Debe remarcar que la Ec. (2.25) está planteada para una entalla del tipo mostrado en la Fig. 2.11 cuyas caras son paralelas al eje  $x$ , resultando evidente que una grieta alineada con dicho eje es un caso límite del mismo problema. Conviene insistir en que, bajo las condiciones antes expuestas, la integral  $J$  dada por la Ec. (2.25) es independiente del camino  $\Gamma$  tomado (RICE, 1968).

### 2.7.2. Relación entre $J$ y $K$ en MFEL

En Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal es conocido que el campo de tensiones en el entorno de la grieta está dominado por la singularidad de tipo  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , donde  $r$  es la distancia al extremo de grieta. Las tensiones del campo elástico bidimensional en coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen en el extremo de grieta vienen dadas por las Ecs. (2.1). Para el modo de carga I, el campo de tensiones está caracterizado únicamente por  $K_I$  a través de ecuaciones del tipo siguiente ( $i, j = 1, 2$ ):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{otros términos acotados} \quad (2.28)$$

donde los términos acotados son despreciables en un entorno de grieta suficientemente pequeño comparado con las dimensiones del problema y con la longitud de grieta. Si se considera una grieta lateral semiinfinita en un dominio infinito con comportamiento elástico lineal, es evidente que estos términos acotados son despreciables para toda distancia finita desde el extremo de grieta. En esta situación se puede evaluar  $J$  tomando un camino *circular*  $\Gamma$  de radio  $r$  desde el extremo de grieta e integrar el campo elástico singular antes mencionado (RICE, 1968). Expresando la Ec. (2.25) en coordenadas polares resulta:

$$J = r \int_{-\pi}^{+\pi} \left( W(r, \theta) \cos \theta - \mathbf{T}(r, \theta) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(r, \theta) \right) d\theta \quad (2.29)$$

Si se tiene en cuenta que el campo de deformaciones viene dado por expresiones del tipo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta, E, \nu) \quad (2.30)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y  $g_{ij}$  son funciones diferentes según se trate de *deformación plana* o *tensión plana*, es inmediato observar la independencia de  $J$  respecto al radio  $r$  del camino tomado tras sustituir en la Ec. (2.29), ya que los términos del integrando son esencialmente productos de tensiones y deformaciones, por tanto se tiene:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \propto \frac{1}{r} \quad (2.31)$$

Llevando a cabo la integración de la Ec. (2.29) resulta

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.32)$$

donde  $E'$  es:

$$E' = \begin{cases} \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en deformación plana} \\ E & \text{en tensión plana} \end{cases} \quad (2.33)$$

Este resultado es generalizable a otros problemas reales de dimensión finita, incluso con pequeña plastificación en el fondo de grieta (*small scale yielding*) siempre que se pueda encontrar una zona lo suficientemente pequeña comparada con las dimensiones del problema y la longitud de grieta, y suficientemente alejada de la zona de plastificación. En otras palabras, una zona donde el campo elástico esté regido por las Ecs. (2.28) con términos acotados despreciables.

La gran ventaja que ofrece la invariancia de  $J$  con respecto al camino tomado es que permite su evaluación lejos de la zona dominada por las Ecs. (2.28), donde el campo elástico (en general, analíticamente desconocido) es estimado con mucha mayor precisión cuando se utilizan métodos numéricos.

La Ec. (2.32) se puede generalizar a otros modos de carga o su combinación:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.34)$$

Dado que la relación entre  $J$  y  $K$  es la misma que la relación entre la tasa de liberación de energía  $G$  y  $K$  (demostrada por Irwin en 1957, ver por ejemplo GDOUTOS (1993), ANDERSON (1995), KANNINEN Y POPELAR (1985), BROEK (1986), etc), este planteamiento prueba la equivalencia  $J = G$  en MFEL. Obviamente existen otras demostraciones directas de la relación entre  $J$  y  $G$  sin necesidad de utilizar el concepto de  $K$ .

### 2.7.3. Método de la Integral de Dominio (EDI)

La evaluación de la integral  $J$  a partir de su definición en forma de integral de contorno, Ec. (2.25), está limitada en la práctica a aquellos problemas bidimensionales en los que se cumplen las condiciones bajo las cuales dicha integral es independiente del camino escogido. Esta propiedad permite su evaluación numérica mediante el MEF en zonas donde las soluciones aproximadas a los campos buscados son más precisas. Sin embargo, la aplicación de  $J$  a problemas más generales (problemas tridimensionales, dinámicos, con efectos térmicos, fuerzas por  $u \cdot v$ , etc.) supone su definición a lo largo de un camino  $\Gamma$  infinitamente cercano al extremo de grieta. Esta formulación no es

apropiada para su estimación numérica mediante MEF debido a (i) la imposibilidad de tomar un camino muy cercano al extremo por limitaciones en la discretización y (ii) el gran error que se comete en la solución aproximada en las cercanías de la singularidad. Con el fin de evaluar  $J$  en zonas alejadas del extremo de grieta, resulta de gran utilidad el teorema de Gauss. Para los casos en los que  $J$  no es independiente del camino, esto implica el cómputo de una integral de contorno junto con una integral de dominio.

Por otra parte, es siempre más compleja y laboriosa la evaluación numérica de una integral de contorno (de línea en 2D o de superficie en 3D) que la integral de dominio asociada (de área en 2D o de volumen en 3D) cuando la solución del problema se estima mediante el MEF. El Método de la Integral de Dominio (*Equivalent Domain Integral Method*, EDI) propuesto por LI, SHIH Y NEEDLEMAN (1985) varía ingeniosamente la formulación de la integral correspondiente de forma que no es necesaria la evaluación de una integral de contorno, sino únicamente una integral de dominio, siempre preferible por su mayor precisión y facilidad de cómputo (especialmente en problemas tridimensionales).

Recordemos que  $J$  es independiente del camino en un problema bidimensional con comportamiento elástico y homogéneo, ausencia de fuerzas por udv. y en caras de grieta. Para el caso de una grieta orientada en dirección  $x_1$  y crecimiento en la misma dirección, y de acuerdo con la denominación y sentido de los caminos empleados en la Fig. 2.12,  $J$  viene dada por la expresión siguiente:

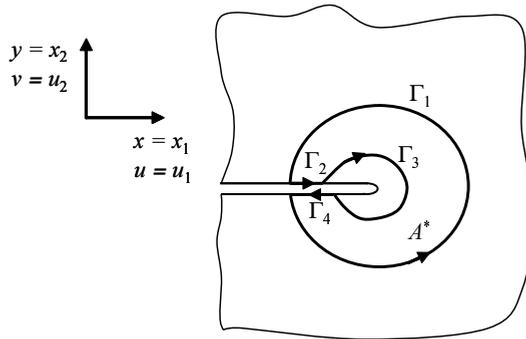


FIGURA 2.12: Camino cerrado  $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  utilizado en la demostración de  $J$  como independiente del camino

$$J = - \int_{\Gamma_3} \left( W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \left( W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i \, d\Gamma \quad (2.35)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal al contorno que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición. Al ser nulas las cargas en caras de grieta, esta integral se puede escribir como extendida al camino cerrado  $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  si el integrando se multiplica por una función arbitraria  $q_1$  que valga la unidad en  $\Gamma_3$  y se anule en  $\Gamma_1$ :

$$J = - \oint_{\Gamma^*} \left( W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) q_1 n_i d\Gamma = - \oint_{\Gamma^*} \Sigma_{1i} q_1 n_i d\Gamma \quad (2.36)$$

donde  $\Sigma_{1i}$  es el tensor de Eshelby y  $q_1$  se define como:

$$q_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.37)$$

Suponiendo que  $q_1$  sea una función suficientemente continua en  $A^*$  se puede aplicar el teorema de Gauss, resultando

$$J = - \int_{A^*} \left( \frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} q_1 + \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right) dA = - \int_{A^*} \Sigma_{1i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.38)$$

ya que  $\frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial x_i} = 0$  en las condiciones anteriormente expuestas. Por tanto,  $J$  se puede calcular a partir de una integral de área como

$$J = \int_{A^*} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.39)$$

#### 2.7.4. Método de la integral integral de interacción $M$

Suponiendo comportamiento elástico lineal y si se consideran dos estados de equilibrio independientes con sus correspondientes campos de desplazamientos  $u_i^{(1)}$  y  $u_i^{(2)}$ , es evidente que la suma de estos dos estados  $u_i^{(1,2)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$  corresponde a un nuevo estado de equilibrio. Aprovechando las propiedades de linealidad de la derivación e integración, CHEN Y SHIELD (1977) aplicaron la definición de integral  $J_k$  dada por BUDIANSKY Y RICE (1973) al campo  $u_i^{(1,2)}$  obteniendo

$$J_k(\mathbf{u}^{(1,2)}) = J_k(\mathbf{u}^{(1)}) + J_k(\mathbf{u}^{(2)}) + M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \quad (2.40)$$

donde  $M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$  incluye los términos cruzados, es decir

$$M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \int_{\Gamma} \left\{ W^{(1,2)} n_k - \sigma_{ij}^{(2)} n_i \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k} - \sigma_{ij}^{(1)} n_i \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_k} \right\} d\Gamma \quad (2.41)$$

siendo  $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ . Si se aplican estas expresiones al caso de la integral  $J$ , es decir,  $k = 1$ , y se denota por simplicidad  $J^{(1)} \equiv J_1(\mathbf{u}^{(1)})$ ,  $J^{(2)} \equiv J_1(\mathbf{u}^{(2)})$  y  $J^{(1,2)} \equiv J_1(\mathbf{u}^{(1,2)})$ , se puede escribir para cada uno de los dos estados de equilibrio:

$$J^{(1)} = \frac{1}{E'} \left[ \left( K_I^{(1)} \right)^2 + \left( K_{II}^{(1)} \right)^2 \right] \quad J^{(2)} = \frac{1}{E'} \left[ \left( K_I^{(2)} \right)^2 + \left( K_{II}^{(2)} \right)^2 \right] \quad (2.42)$$

De la expresión análoga para  $J^{(1,2)}$  y aprovechando la linealidad de los FIT, es inmediato demostrar que:

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (2.43)$$

Por comparación con la Ec. (2.40) se tiene:

$$M_1(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (2.44)$$

A la hora de aplicar el método a un problema bidimensional en modo mixto, con un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^{\text{mixto}}$ , conviene tomar como segundo estado de equilibrio un estado de modo I puro, con campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^{*,I}$  y cuyo  $K_I^*$  sea conocido, por lo que la Ec. (2.44) se reduce a:

$$M_1(\mathbf{u}^{\text{mixto}}, \mathbf{u}^{*,I}) = \frac{2}{E'} K_I K_I^* \quad (2.45)$$

donde  $K_I$  es el FIT desconocido del problema en modo mixto.

Habitualmente suele tomarse como campo auxiliar el campo asintótico en el entorno de grieta, especificando por simplicidad  $K_I^* = 1$ . De esta forma es posible calcular  $K_I$  para el problema en modo mixto a través de la integral  $M_1$  y obtener el correspondiente  $K_{II}$  con ayuda de una de las Ecs. (2.42). También es posible calcular  $K_{II}$  a través de la aplicación de la integral  $M_1$  con un campo  $\mathbf{u}^{*,II}$  asociado a un modo II puro y cuyo  $K_{II}^*$  sea conocido:

$$M_1(\mathbf{u}^{\text{mixto}}, \mathbf{u}^{*,II}) = \frac{2}{E'} K_{II} K_{II}^* \quad (2.46)$$

YAU ET AL. (1980); SHIH Y ASARO (1988) presentaron el mismo planteamiento, denominando la integral  $M_1$  como *integral de interacción*  $I^{(1,2)}$ . Este método es muy utilizado en combinación con nuevas técnicas numéricas, como el método de los elementos finitos extendido (MOËS ET AL., 1999; SUKUMAR ET AL., 2000).



## Capítulo 3

# Revisión general de los métodos aplicados al estudio de iniciación y propagación de fretting fatiga

### **Resumen del Capítulo:**

*En este capítulo se hace una introducción general al problema de fretting fatiga y a la aplicación de los métodos aplicados al estudio de iniciación, propagación, orientación de grieta y predicción de vida.*



### 3.1. El problema de fretting fatiga

El problema de fretting fatiga se caracteriza porque las tensiones que originan y hacen crecer inicialmente las grietas son debidas al contacto entre dos componentes mecánicos. Habitualmente estos componentes en contacto, experimentan desplazamiento relativos de pequeña amplitud, lo que ocasiona un desgaste superficial conocido como fretting-wear. El efecto de tensiones de contacto es análogo al de los concentradores de tensión: las altas tensiones cerca de la superficie hacen que la grieta se inicie. Además, en las primeras fases del crecimiento de grieta estas mismas tensiones, unidas a las globales, provocan un crecimiento más acelerado. La consecuencia es que la vida del componente se ve reducida. En la Fig. 3.1 se muestra esquemáticamente la disposición de las fuerzas en una situación típica de fretting fatiga.

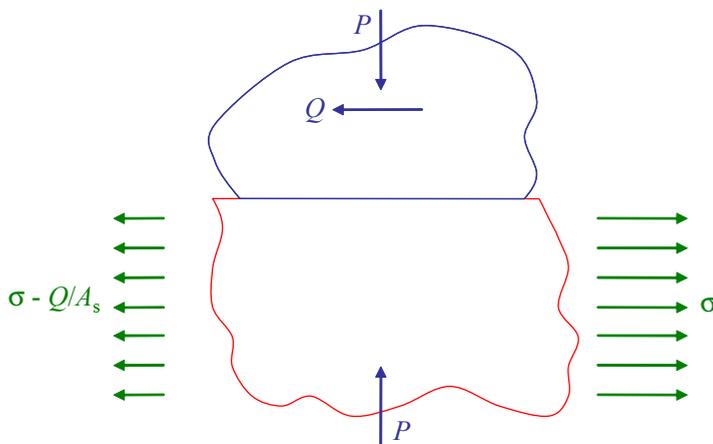


FIGURA 3.1: Esquema de las cargas que aparecen en fretting fatiga, donde  $A_s$  es el área de la sección donde se aplica la tensión  $\sigma$ .

La fuerza  $P$  mantiene en contacto los dos sólidos, y en esta Tesis se asumirá constante. La fuerza tangencial variable,  $Q$ , induce el deslizamiento entre las dos piezas. Generalmente, también existe una tensión global,  $\sigma$ , variable o no, aplicada a uno de los sólidos llamada “bulk”.

En principio, el fretting puede aparecer en cualquier máquina donde haya componentes en contacto, como el caso de los álabes y ejes acanalados de turbinas, y en las uniones cubo-eje (ver Fig. 3.2). Normalmente, es fácil de identificar a posteriori porque se observan marcas en las zonas que han estado en contacto. Éstas pueden tener un polvo característico o tener un aspecto compacto. Además, también pueden presentar un color particular de cada material.

El problema de fretting se aborda desde dos perspectivas distintas:

- **Fretting wear:** Estudia el desgaste de las superficies en contacto entre dos cuerpos sometidos a cargas oscilantes y los efectos asociados.

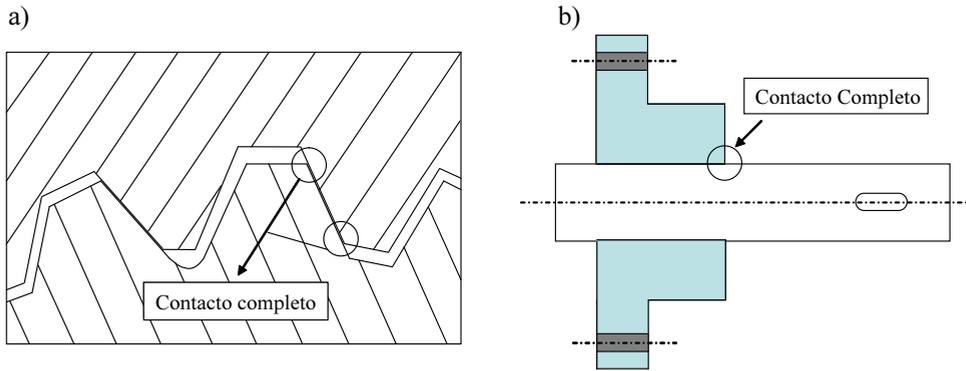


FIGURA 3.2: Ejemplos de sistemas mecánicos sometidos a proceso de fretting fatiga.

- **Fretting fatiga:** Estudia la iniciación y crecimiento de grietas por fatiga, donde además de la tensión aplicada sobre el componente se superponen las tensiones debidas al contacto.

BRYGGMAN Y SÖDERBERG (1986) distinguieron tres regímenes de deslizamiento: deslizamiento elástico, deslizamiento plástico y deslizamiento global. Concluyeron que, esencialmente, el fretting fatiga ocurre en las condiciones de deslizamiento parcial y el fretting wear en deslizamiento global.

Para obtener información sobre la naturaleza del contacto, es útil clasificar los tipos de contacto:

- **Contacto completo.**
- **Contacto incompleto.**

Habitualmente, de forma experimental, se suelen estudiar dos configuraciones de contacto incompleto: cilíndrico (2D) y esférico (3D). A continuación se hará solo un breve resumen del contacto completo y del contacto incompleto cilíndrico en dos dimensiones.

### 3.1.1. Contacto completo

Hay muchos dispositivos mecánicos que involucran contacto completo, donde el fretting fatiga es el principal mecanismo del fallo, véase Fig. 3.2.

Un modelo de contacto completo se muestra en la Fig. 3.3, constituido por un indentador con un determinado ángulo en contacto con otro cuerpo de superficie plana. El indentador está sometido a una carga de compresión constante  $P$ , y al mismo tiempo a una carga tangencial cíclica  $Q$  paralela a la superficie del contacto y/o carga cíclica  $\sigma$  aplicada a la probeta.

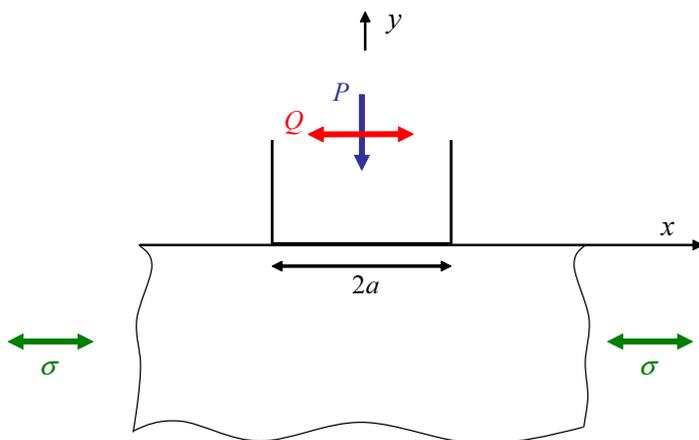


FIGURA 3.3: Esquema de un problema de contacto completo.

Para la configuración de la Fig. 3.3 de un indentador con esquinas a  $90^\circ$  sobre un semiplano infinito, la distribución de presión normal debida a una carga  $P$  por unidad de espesor, y en ausencia de fricción viene dada por la Ec. (3.1).

$$p(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (3.1)$$

En este esquema,  $2a$ , define el ancho de la zona del contacto, Fig 3.3.

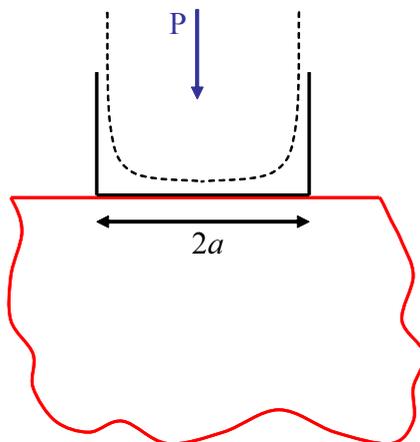


FIGURA 3.4: Distribución de tensiones normal a lo largo de la zona del contacto  $2a$ .

Dicha distribución se muestra con línea discontinua y de forma aproximada en la Fig. 3.4, donde se observa que la tensión tiende a infinito al aproximarse a los bordes del indentador (HILLS ET AL., 1993; HILLS Y NOWELL, 1994).

Muchos autores han estudiado el problema analíticamente, suponiendo distintas hipótesis simplificativas como indentador rígido, semiplano incomprensible, indentador con deslizamiento o adhesión total, o indentador con esquinas redondeadas, etc. (SACKFIELD ET AL., 2001, 2002; MUGADU Y HILLS, 2002B). Otros investigadores han propuesto resolver el problema utilizando un enfoque análogo al de la mecánica de fractura, debido a la similitud del campo de tensiones alrededor de los bordes del modelo de dos grietas laterales en una placa. Este enfoque se denomina “crack like analogue” (GIANNAKOPOULOS ET AL., 2002; CONNER ET AL., 2004).

En fretting es importante conocer las tensiones internas y en la superficie. Existen métodos de la teoría de la Elasticidad que permite el cálculo de las tensiones y los desplazamientos (MUSKHELISHVILI, 1953). HILLS Y NOWELL (1994) desarrollaron estos métodos aplicándolos al problema de contacto completo.

### 3.1.1.1. Contacto completo en adhesión

El trabajo pionero de WILLIAMS (1952) está restringido al análisis de la distribución de tensiones singulares en la vecindad de las esquinas angulares en placas “V-notch” (BARBER, 2002). Cuando el contacto entre los dos cuerpos en las esquinas está en estado de adhesión, la zona alrededor de ésta esquina se comporta como una zona continua (estado monolítico), considerándose como el ángulo “V-notch” de WILLIAMS (1952).

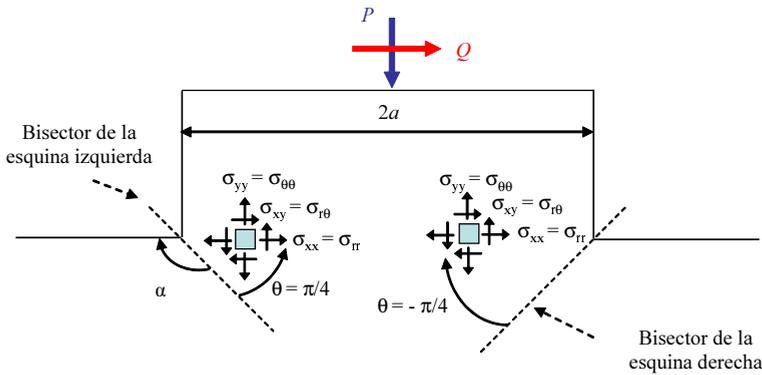


FIGURA 3.5: Para puntos suficientemente cercanos a las esquinas, las tensiones para el contacto en estado de adhesión son las mismas que para “V-notch”.

El campo de las tensiones singulares de WILLIAMS (1952) viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) \end{array} \right\} = K_I^{\text{GSIF}} r^{\lambda_I - 1} \Psi^I(\theta) + K_{II}^{\text{GSIF}} r^{\lambda_{II} - 1} \Psi^{II}(\theta) \quad (3.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo medido desde la línea bisector de cada esquina.

Este campo de tensiones, está dividido en dos partes: una es la solución simétrica con respecto al bisector y otra es la solución antisimétrica.

Las funciones trigonométricas  $\Psi^I(\theta)$ ,  $\Psi^{II}(\theta)$  vienen dadas por:

$$\Psi^I(\theta) = \lambda_I(\lambda_I + 1) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\lambda_I + 1)\theta \frac{\cos(\lambda_I - 1)\alpha}{\cos(\lambda_I + 1)\alpha} - \frac{\lambda_I - 3}{\lambda_I + 1} \cos(\lambda_I - 1)\theta \\ - \cos(\lambda_I + 1)\theta \frac{\cos(\lambda_I - 1)\alpha}{\cos(\lambda_I + 1)\alpha} + \cos(\lambda_I - 1)\theta \\ - \sin(\lambda_I + 1)\theta \frac{\cos(\lambda_I - 1)\alpha}{\cos(\lambda_I + 1)\alpha} + \frac{\lambda_I - 1}{\lambda_I + 1} \sin(\lambda_I - 1)\theta \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

$$\Psi^{II}(\theta) = \lambda_{II}(\lambda_{II} + 1) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\lambda_{II} + 1)\theta \frac{\sin(\lambda_{II} - 1)\alpha}{\sin(\lambda_{II} + 1)\alpha} - \frac{\lambda_{II} - 3}{\lambda_{II} + 1} \sin(\lambda_{II} - 1)\theta \\ - \sin(\lambda_{II} + 1)\theta \frac{\sin(\lambda_{II} - 1)\alpha}{\sin(\lambda_{II} + 1)\alpha} + \sin(\lambda_{II} - 1)\theta \\ \cos(\lambda_{II} + 1)\theta \frac{\sin(\lambda_{II} - 1)\alpha}{\sin(\lambda_{II} + 1)\alpha} - \frac{\lambda_{II} - 1}{\lambda_{II} + 1} \cos(\lambda_{II} - 1)\theta \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

El valor propio  $\lambda_I$  es la solución positiva más pequeña de la ecuación característica, y es denominada solución simétrica, y corresponde a la solución que da lugar a la mayor intensidad de la singularidad:

$$\lambda_I \sin(2\alpha) + \sin(2\lambda_I\alpha) = 0 \quad (3.5)$$

Análogamente, el valor propio  $\lambda_{II}$  es la solución positiva menor de la ecuación característica, denominada solución antisimétrica:

$$\lambda_{II} \sin(2\alpha) - \sin(2\lambda_{II}\alpha) = 0 \quad (3.6)$$

Para calcular por ejemplo  $\sigma_{xx}$  a una distancia  $r$  de la esquina derecha, en el plano de contacto hace falta tomar  $\theta = -45^\circ$  en la Ec. (3.2), y por lo tanto  $\sigma_{xx} = \sigma_{rr}$ , tal y como se muestra en la Fig. 3.5.

### 3.1.1.2. Contacto completo en deslizamiento

La zona del contacto puede exhibir un estado de adhesión, deslizamiento parcial o deslizamiento global. El orden de la singularidad en condiciones de estado de adhesión comentado en el apartado anterior depende solamente del ángulo de los cuerpos, y por lo tanto la distribución del campo de tensiones es única para cada orden de la singularidad  $\lambda$  (GINER ET AL., 2005; BARBER, 2002).

Para condiciones de deslizamiento parcial, el orden de la singularidad depende del coeficiente de fricción entre los dos cuerpos y de las propiedades de los materiales. El estado de tensiones que existe en la zona del final del contacto entre un indentador plano y un semiplano infinito fue analizado por GDOUTOS Y THEOCARIS (1975) y COMNINO (1976) utilizando análisis asintótico, para los casos con adhesión o deslizamiento y para cuerpos de diferentes materiales. MUGADU ET AL. (2002) particularizaron los resultados anteriores para analizar el problema de contacto en condiciones de fretting fatiga. En este apartado se introduce la notación y se presenta de forma resumida la solución del problema con deslizamiento.

Se asume que los dos cuerpos son del mismo material elástico, isótropo y homogéneo. Se utiliza el sistema de referencia definido en la Fig. 3.6 y se define  $\psi$  como el ángulo del indentador.

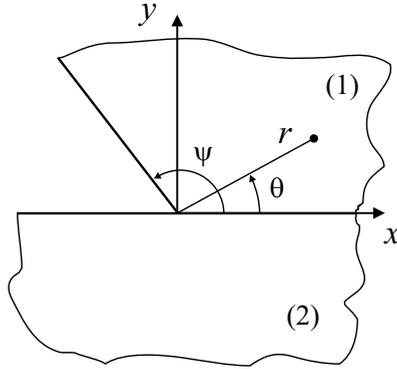


FIGURA 3.6: Configuración del problema de contacto completo con deslizamiento.

Los campos de tensiones  $\sigma^{(1)}$ ,  $\sigma^{(2)}$  y desplazamientos  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  se pueden obtener de las funciones de Airy  $\phi^{(1)}$  y  $\phi^{(2)}$  y cumplen las condiciones de contorno para cada cuerpo, incluyendo las condiciones de contacto. A partir de la función de tensión de Airy, el campo de tensiones se obtiene como:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.7)$$

y el campo de desplazamientos:

$$2G \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \left(1 - \frac{m}{4}\right) \nabla^2 \phi \quad (3.8)$$

$$G \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

donde se ha utilizado la constante  $m$  que toma un valor  $m = 4/(1 + \nu)$  para tensión plana y  $m = 4(1 - \nu)$  para deformación plana. El coeficiente de Poisson del material

es  $\nu$  y el módulo de rigidez transversal es  $G$ . En cada sólido ( $i$ ) la función de Airy satisface la denominada ecuación biarmónica:

$$\nabla^4 \phi^{(i)} = 0 \quad (3.9)$$

La solución general de esta ecuación viene dada por la Ec. (3.10)

$$\phi^{(i)}(r, \theta) = r^{\lambda+1} \left( a^{(i)} s_+ \theta + b^{(i)} c_+ \theta + c^{(i)} s_- \theta + d^{(i)} c_- \theta \right) \quad (3.10)$$

donde se deben calcular los parámetros  $a^{(i)}$ ,  $b^{(i)}$ ,  $c^{(i)}$  y  $d^{(i)}$  de forma que la solución cumpla las condiciones de contorno. Definiendo  $s_+ \theta = \sin(1 + \lambda)\theta$ ,  $s_- \theta = \sin(1 - \lambda)\theta$ ,  $c_+ \theta = \cos(1 + \lambda)\theta$  y  $c_- \theta = \cos(1 - \lambda)\theta$  y observando la Fig. 3.6, las condiciones del contorno del problema de contacto se pueden expresar como:

- Contorno de los cuerpos libre de carga:

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, -\pi) = 0; \quad \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, -\pi) = 0; \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \psi) = 0; \quad \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \psi) = 0 \quad (3.11)$$

- Continuidad de desplazamientos y tensiones en el contacto:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, 0) + \mu \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 0) = 0; \quad \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, 0) + \mu \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = 0 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 0) - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = 0; \quad u_{\theta}^{(2)}(r, 0) - u_{\theta}^{(1)}(r, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde el parámetro  $\mu$  designa el coeficiente de rozamiento. Puede tomar valores positivos, si el deslizamiento del indentador es en sentido positivo del eje  $x$ , o negativo si el indentador desliza en sentido contrario. Aplicando la transformada de Mellin (MUGADU ET AL., 2002; BARBER, 2002) a las ecuaciones (3.11) y (3.12) y considerando las expresiones (3.7), (3.8) y (3.10), se puede obtener un sistema con ocho ecuaciones y ocho incógnitas como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

donde  $v^{(i)} = \left( a^{(i)} \ b^{(i)} \ c^{(i)} \ d^{(i)} \right)^T$

y las submatrices  $[A_{ij}]$  son:

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} (\lambda + 1) \cos(\lambda\pi) & (\lambda + 1) \sin(\lambda\pi) & (1 - \lambda) \cos(\lambda\pi) & (\lambda - 1) \sin(\lambda\pi) \\ \sin(\lambda\pi) & -\cos(\lambda\pi) & -\sin(\lambda\pi) & -\cos(\lambda\pi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$[A_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda + 1)c_+\psi & -(\lambda + 1)s_+\psi & (1 - \lambda)c_-\psi & -(1 - \lambda)s_-\psi \\ s_+\psi & c_+\psi & s_-\psi & c_-\psi \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$[A_{21}] = \begin{bmatrix} -(\lambda + 1) & \mu(\lambda + 1) & (\lambda - 1) & \mu(\lambda + 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ (\lambda + 1) & 0 & (1 - \lambda - m) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[A_{22}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 1) & \mu(\lambda + 1) & (\lambda - 1) & \mu(\lambda + 1) \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -(\lambda + 1) & 0 & (\lambda - 1 + m) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

El sistema de ecuaciones planteado, Ec. (3.13), tiene una solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz es igual a cero. Calculando el determinante y simplificando se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\Delta(\lambda) = \cos(\lambda\pi) (\sin^2 \lambda\psi - \lambda^2 \sin^2 \psi) + 0.5 \sin(\lambda\pi) (\sin 2\lambda\psi + \lambda \sin 2\psi) + \mu\lambda(1 + \lambda) \sin(\lambda\pi) \sin^2 \psi = 0 \quad (3.18)$$

donde se ha omitido el factor  $4m(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\pi$  en  $\Delta(\lambda)$  para la búsqueda de las soluciones de la ecuación característica, Ec. (3.18), ya que corresponden al valor de  $\lambda = -1$ , que no tiene sentido físico. De esta ecuación se obtienen los autovalores  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, \infty$ ). Los autovectores del problema asociados a un autovalor  $\lambda_j$  se calculan sustituyendo el autovalor en la ecuación (3.13) y resolviendo el sistema de ecuaciones indeterminado en función de una constante  $K^C$  de forma que se obtienen los parámetros  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$ ,  $c_j^{(i)}$  y  $d_j^{(i)}$  en función de esta constante. A partir de estos parámetros se pueden definir los campos de desplazamientos y de tensiones. En el caso de los desplazamientos se obtiene:

$$\left\{ u^{(i)}(r, \theta) \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_r^{(i)} \\ u_\theta^{(i)} \end{matrix} \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} K_j^C r^{\lambda_j} \left\{ \Psi_j^{(i)}(\theta, \lambda_j) \right\} \quad (3.19)$$

donde

$$\left\{ \Psi_j^{(i)}(\theta, \lambda_j) \right\} = \frac{1}{2G} \left\{ \begin{matrix} -(\lambda_j + 1)(a_j^{(i)} s_+\theta + b_j^{(i)} c_+\theta) + (m - 1 - \lambda_j)(c_j^{(i)} s_-\theta + d_j^{(i)} c_-\theta) \\ (\lambda_j + 1)(-a_j^{(i)} c_+\theta + b_j^{(i)} s_+\theta) + (\lambda_j - 1 + m)(c_j^{(i)} c_-\theta - d_j^{(i)} s_-\theta) \end{matrix} \right\} \quad (3.20)$$

y en el caso del campo de tensiones:

$$\left\{ \sigma^{(i)}(r, \theta) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(i)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} \\ \sigma_{r\theta}^{(i)} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} K_j^C r^{\lambda_j - 1} \left\{ \Phi_j^{(i)}(\theta, \lambda_j) \right\} \quad (3.21)$$

donde

$$\left\{ \Phi_j^{(i)}(\theta, \lambda_j) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_j(\lambda_j + 1) \left( -a_j^{(i)} s_+ \theta - b_j^{(i)} c_+ \theta \right) + \lambda_j(\lambda_j - 3) \left( -c_j^{(i)} s_- \theta - d_j^{(i)} c_- \theta \right) \\ \lambda_j(\lambda_j + 1) \left( a_j^{(i)} s_+ \theta + b_j^{(i)} c_+ \theta + c_j^{(i)} s_- \theta + d_j^{(i)} c_- \theta \right) \\ \lambda_j(\lambda_j + 1) \left( -a_j^{(i)} c_+ \theta + b_j^{(i)} s_+ \theta \right) + \lambda_j(1 - \lambda_j) \left( -c_j^{(i)} c_- \theta + d_j^{(i)} s_- \theta \right) \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

MUGADU Y HILLS (2002b,a) aplicaron estos estudios a la caracterización de la zona de proceso en un indentador rígido deslizante de ángulo recto en un semiplano elástico. Por otro lado, GINER ET AL. (2005) estudiaron la evolución de la zona del contacto, bajo condiciones de carga tangencial cíclica y deslizamiento parcial dentro de la zona del contacto, utilizando el método de los elementos finitos y calcularon el factor de intensidad de tensiones generalizado extrapolando las tensiones obtenidas por la solución de elementos finitos para el modelo sin grietas a lo largo de un ciclo de carga. En GINER ET AL. (2009c) se propone el cálculo de dicho  $K^C$  mediante una integral de dominio.

### 3.1.2. Contacto incompleto (cilíndrico)

Como su nombre indica, el contacto incompleto cilíndrico es el que se produce entre dos cilindros. En los ensayos de fretting, en particular, uno de los dos cilindros tiene un radio infinito, es decir, se produce el contacto entre un cilindro y un plano, Fig. 3.7. En un ensayo de fretting se aplica una carga normal constante  $P$  que mantiene en contacto los sólidos y posteriormente se aplica la carga variable  $Q$  y la tensión  $\sigma$ . Debido a ellas, se distinguen dos tipos de zonas en la zona del contacto, una en el interior, de tamaño  $2c$ , donde las superficies se mantienen adheridas, y otra, en ambos extremos de la zona de contacto, donde se produce un deslizamiento. Si la tensión axial  $\sigma$  es nula, la zona de adhesión estará centrada respecto a la zona de contacto. Si dicha carga es distinta de cero, la zona de adhesión se desplaza hacia un lateral una distancia  $e$  (excentricidad) (HILLS Y NOWELL, 1994).

En esta geometría, a diferencia de las anteriores, la distribución de tensiones bajo la zona de contacto no presenta singularidades. Esta geometría es una de las más usadas en ensayos de fretting si se desea tener una buena aproximación de las tensiones producidas en el contacto y al mismo tiempo tener la posibilidad de determinarlas analíticamente. Por contra, tiene la desventaja de que existen pocos casos reales de fatiga por fretting en los que aparezca esta geometría en el contacto.

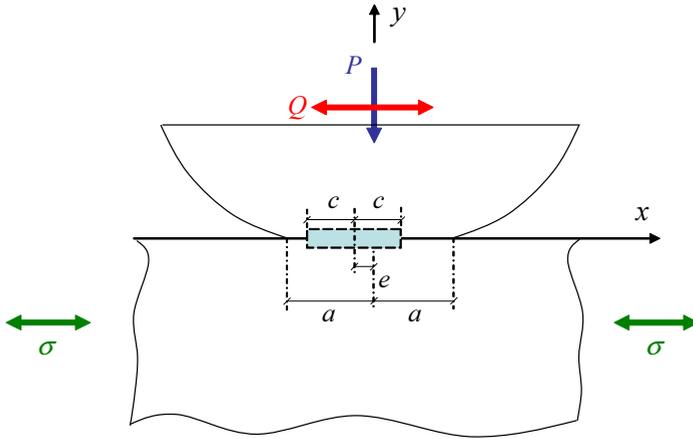


FIGURA 3.7: Contacto cilíndrico con las fuerzas aplicadas; el semiancho de la zona del contacto es  $a$ , el de la zona de adhesión es  $c$  y la excentricidad es  $e$ .

La expresión analítica para el campo de tensiones bajo el contacto en función de las cargas aplicadas en la superficie se puede encontrar en JOHNSON (1985). En función de los valores de  $Q$  y  $\sigma$ , pueden aparecer dos casos muy distintos, uno en el que el deslizamiento se produce en el mismo sentido en todo el contacto y otro en el que los deslizamientos se producen en sentidos contrarios en las dos zonas de deslizamiento existentes (deslizamiento reverso) (HILLS Y NOWELL, 1994; TUR ET AL., 2002).

A continuación se presentan las expresiones de las tensiones normales y tangenciales en la superficie para el primer caso, deslizamiento en el mismo sentido en todo el contacto, que es el más común en los ensayos de fretting. La presión normal viene dada por la Ec. (3.23).

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (3.23)$$

donde  $p_0$  es la máxima tensión normal debido a  $P$  y se calcula utilizando la Ec. (3.24):

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (3.24)$$

El semiancho de la zona de contacto  $a$  (véase Fig. 3.7) queda determinada por la Ec. (3.25).

$$a = \sqrt{\frac{2PR}{\pi} A} \quad (3.25)$$

donde  $R$  es el radio del cilindro, y el parámetro  $A$  es el módulo de Young equivalente para el contacto de materiales similares bajo condiciones de deformación plana (HILLS

Y NOWELL, 1994) y viene dado por la Ec. (3.26).

$$A = 4 \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (3.26)$$

Si se aplica la carga tangencial aparece un deslizamiento cerca de los límites de la zona de contacto y la zona central de tamaño  $2c$  permanece en adhesión. La expresión del semiancho de la zona de adhesión se recoge en la Ec. (3.27).

$$c = a \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu P}} \quad (3.27)$$

Si además en la probeta se aplica la tensión  $\sigma$  y la carga  $Q$ , se producirá una excentricidad  $e$  en la zona de adhesión. HILLS Y NOWELL (1994) trataron este problema como una perturbación de un problema similar al de MINDLIN (1949). A la deformación existente en la probeta le añadieron la producida por dichas cargas, suponiendo que la probeta tiene un tamaño suficiente para considerar deformación plana. En el caso de aplicar una carga  $\sigma$  en la dirección de el eje  $x$ , la distribución de la tensión tangencial en la zona de deslizamiento es:

$$q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad -a < x < -e - c, \quad -e + c < x < a \quad (3.28)$$

mientras que en la zona de adhesión es:

$$q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} - q'(x) \quad |x + e| \leq c \quad (3.29)$$

donde

$$q'(x) = \mu p_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x + e}{c}\right)^2} \quad (3.30)$$

La excentricidad  $e$  de la zona de adhesión viene dada por la expresión (3.31)

$$e = \frac{\sigma a}{4\mu p_0} \quad (3.31)$$

donde  $\sigma$  es la tensión axial en la probeta (tensión "Bulk")(véase Fig. 3.7). En la Fig. 3.8 se muestra la distribución de las tensiones tangenciales y normales a lo largo de la zona del contacto, adimensionalizada con  $p_0$ .

Las siguientes gráficas y su correspondiente análisis y discusión siguen el esquema presentado en NAVARRO (2005). En nuestro caso se ha particularizado esencialmente

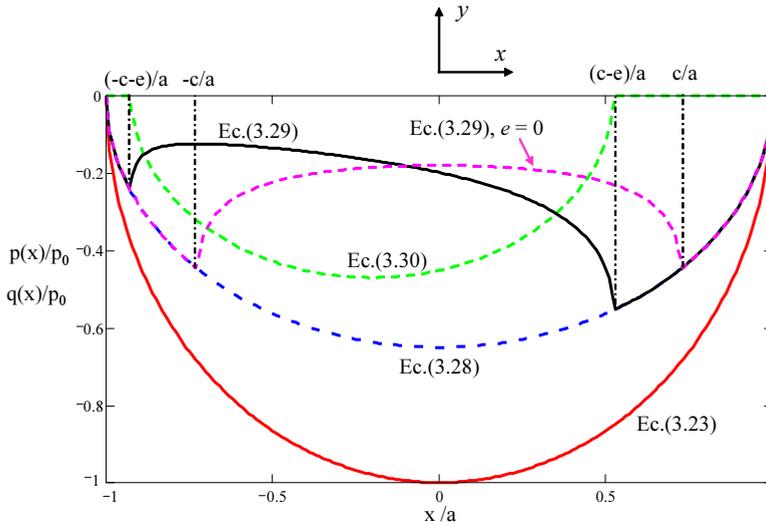


FIGURA 3.8: Distribución de tensiones tangenciales a lo largo de la zona del contacto.

al caso de uno de los ensayos recogidos en SZOLWINSKI Y FARRIS (1998). Este mismo ensayo (junto con otros) será estudiado más adelante respecto a estimación de vida (ver el apartado 6.1.1).

Como material se ha seleccionado una aleación de aluminio Al2024-T351, con módulo elástico  $E=74.1$  GPa y coeficiente de Poisson  $\nu=0.33$  (NAVARRO ET AL., 2008; SZOLWINSKI Y FARRIS, 1998). El coeficiente de rozamiento del par es  $\mu=0.65$ , el radio del cilindro en contacto  $R = 229$  mm, la carga normal  $P=416.772$  N/mm, la carga tangencial  $Q=129.199$  N/mm, de sentido  $-x$ , y la tensión axial en la probeta  $\sigma=81$  MPa, en la dirección  $x$ . Este estado genera una tensión normal máxima debida a  $P$  de  $p_0=155.198$  MPa, Ec. (3.24), y un semiancho de la zona de contacto de  $a=1.709$  mm, Ec. (3.25).

La Fig. 3.9 muestra la distribución de las tensiones  $\sigma_{xx}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , en la dirección de aplicación de la tensión  $\sigma$  (dirección  $x$ ) para cuatro profundidades distintas (HILLS Y NOWELL, 1994).

En ella, se observa que el valor máximo en la superficie se alcanza justo en el límite de la zona de contacto  $x/a = 1$ . Además, se ha comprobado que este valor es aproximadamente 2.9 veces mayor que la tensión axial,  $\sigma$ , aplicada en la probeta. Con esto se comprueba el alto valor de la concentración de tensiones que supone el efecto del fretting. Este hecho es más notable si se tiene en cuenta que la potencial grieta debida a fretting crecerá principalmente debido a esta tensión  $\sigma_{xx}$ . El alto valor de las tensiones no sólo está concentrado en una pequeña región del contacto sino que además disminuye muy rápidamente con la profundidad. A una profundidad igual a la mitad del semiancho de la zona de contacto las tensiones se reducen hasta valores, incluso inferiores a  $\sigma$ . Esta evolución se observa claramente en la Fig. 3.10, donde se

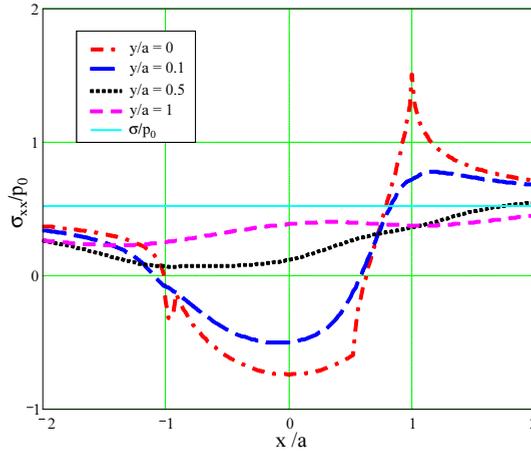


FIGURA 3.9: Distribución de tensiones  $\sigma_{xx}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , para cuatro profundidades distintas.

representa dicha tensión en función de la profundidad para  $x/a = 1$ .

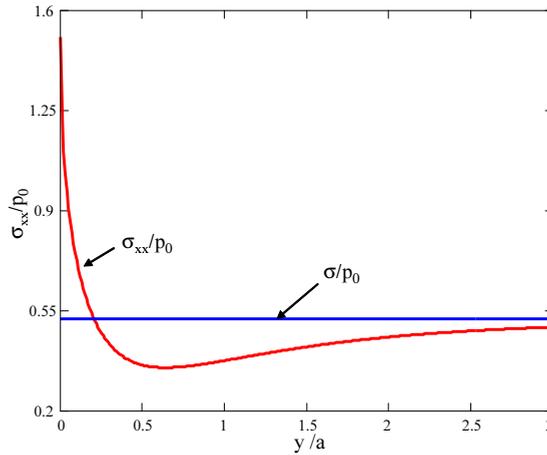


FIGURA 3.10: Distribución de la tensión  $\sigma_{xx}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , en función de la profundidad, cuando  $x/a = 1$ . La línea horizontal representa la tensión axial adimensionalizada,  $\sigma/p_0$ .

En la Fig. 3.11 y la Fig. 3.12 puede observarse que las tensiones  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , no presentan valores tan elevados, y además, su disminución con la profundidad es mucho más lenta.

El valor máximo de  $\sigma_{yy}$  aumenta inicialmente a pequeñas profundidades, y disminuye posteriormente. Este aumento inicial es debido a que la tensión normal en la dirección  $y$  causada por la distribución de tensiones tangenciales es nula en la superficie pero no en el interior.

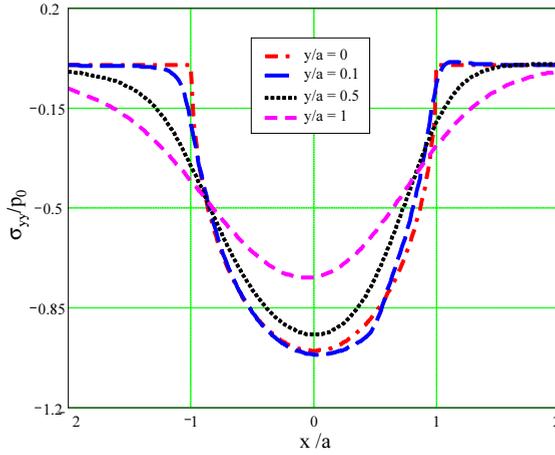


FIGURA 3.11: Distribución de la tensión  $\sigma_{yy}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , para cuatro profundidades distintas.

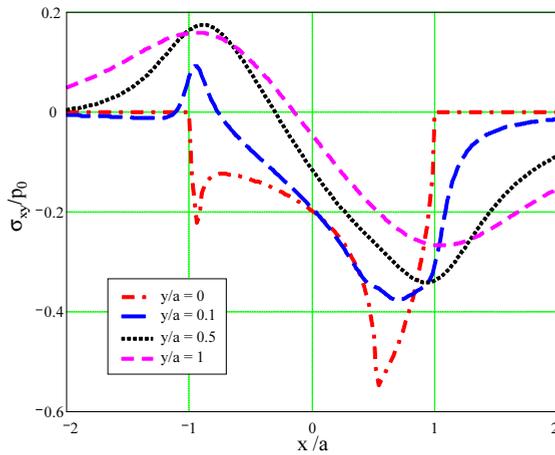


FIGURA 3.12: Distribución de tensiones tangenciales  $\sigma_{xy}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , para cuatro profundidades distintas.

Con estas componentes del tensor de tensiones se puede calcular la tensión de von Mises para las cuatro profundidades estudiadas, Fig. 3.13. Según este parámetro, el punto más desfavorable en la superficie es el límite de la zona de contacto.

Sin embargo, a una profundidad del 10 % del semiancho de la zona de contacto, el valor máximo ha disminuido un 29.4 % y su posición se ha desplazado hacia el interior del contacto. Este hecho tiene sus implicaciones cuando se estudie la posición de iniciación de las grietas.

En las distribuciones de tensiones mostradas se ha supuesto que el deslizamiento se produce en el mismo sentido en toda la zona de deslizamiento, sin embargo no siempre

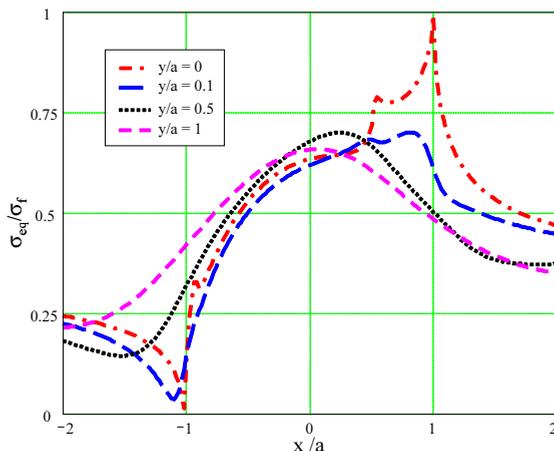


FIGURA 3.13: *Distribución de la tensión equivalente de von Mises para el modelo supuesto en deformación plana, adimensionalizada con el límite de fatiga,  $\sigma_f = 235$  MPa, para cuatro profundidades distintas.*

es así. De las Ecs. (3.27) y (3.31) se puede obtener la condición para que el deslizamiento se produzca en el mismo sentido y, por lo tanto, para que las distribuciones de tensiones mostradas sean válidas. La condición necesaria es que la posición más extrema del límite de la zona de adhesión quede dentro de la zona de contacto  $e + c \leq a$  (HILLS Y NOWELL, 1994). Operando con dichas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\sigma}{\mu p_0} \leq 4 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu P}} \right) \quad (3.32)$$

Si esta condición no se cumple, entonces el problema no tiene solución analítica y se resuelve por medio de ecuaciones integrales (NOWELL Y HILLS, 1987; HILLS Y NOWELL, 1994). No obstante, las Ecs. (3.23), (3.24) y (3.25) siguen siendo válidas. En este caso, aparece un deslizamiento reverso y las tensiones tangenciales en la superficie cambian de sentido. En la Fig. 3.14 se muestra un ejemplo de la distribución de tensiones tangenciales en la superficie para esta situación.

Como se ha comentado anteriormente, se puede obtener la distribución de tensiones y desplazamientos en la zona del contacto, pero para geometrías más complejas o casos de 3D, no hay solución de las integrales utilizadas para calcular las tensiones y desplazamientos. ERDOGAN ET AL. (1973); HILLS ET AL. (1993) han utilizado métodos numéricos para resolver estas ecuaciones.

En los últimos años, los códigos comerciales del método de elementos finitos han experimentando progresos considerables en la aplicación de algoritmos de contacto, y se han utilizado satisfactoriamente para analizar problemas de fretting (HATTORI ET AL., 1983). PETIOT ET AL. (1995) utilizaron el método de los elementos finitos para predecir la nucleación de grieta en contacto cilíndrico. SUM ET AL. (2005) validaron

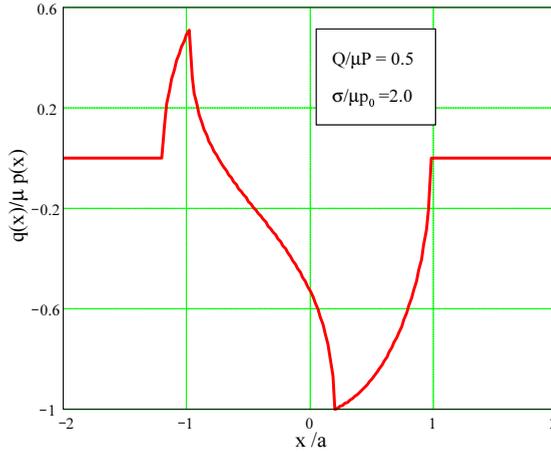


FIGURA 3.14: *Distribución de la tensión tangencial en la superficie en el caso de deslizamiento reverso.*

sus resultados obtenidos por el MEF con resultados analíticos obtenidos por ARAÚJO Y NOWELL (2002).

En las siguientes figuras se compara la distribución de tensiones en la superficie obtenida por el método de los elementos finitos (modelos de elementos finitos utilizados en esta Tesis) y la solución analítica, para el ejemplo anterior (véase Figs. 3.9, 3.11 y 3.12).

En las Figs. 3.15, 3.16 y 3.17, se puede observar que los resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos se aproximan satisfactoriamente a los obtenidos analíticamente, excepto para la distribución de la tensión  $\sigma_{xx}$ . Esto es debido a que la solución analítica del *half-plane* utilizada presenta una desviación en la distribución de la tensión  $\sigma_{xx}$  si el espesor de la probeta es 5 veces mayor que la semianchura de la zona del contacto  $a$ , es decir,  $h/a > 5$  (FELLOWS ET AL., 1995; ARAÚJO Y NOWELL, 2002).

Considerando las correcciones propuestas por FELLOWS ET AL. (1995), se obtiene una mejora de la solución analítica, con lo que se tiene una excelente aproximación de ambas soluciones, tal y como se muestra en la Fig. 3.18.

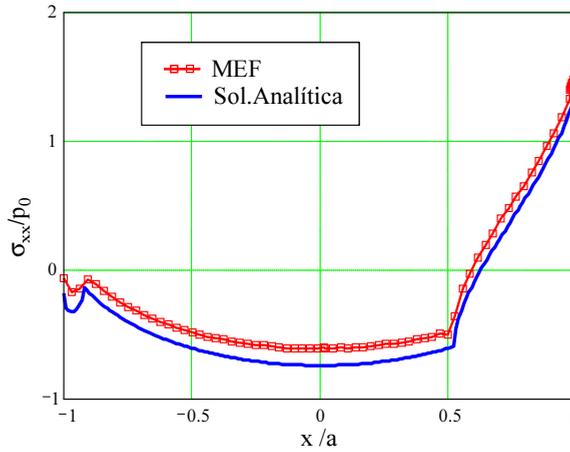


FIGURA 3.15: Comparación de la distribución de la tensión  $\sigma_{xx}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , obtenida mediante el MEF con el modelo numérico utilizado en esta Tesis y la solución analítica.

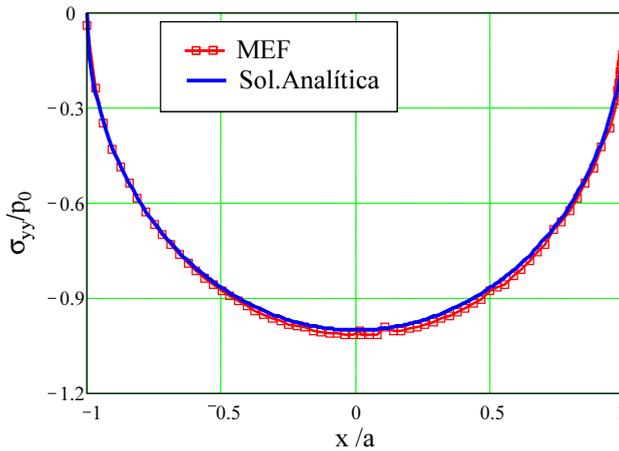


FIGURA 3.16: Comparación de la distribución de la tensión  $\sigma_{yy}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , obtenida mediante el MEF con el modelo utilizado en esta Tesis y la solución analítica.

### 3.2. Criterios de iniciación de grieta

Durante años, los esfuerzos en investigación para abordar el problema de fatiga se han enfocado al estudio del problema uniaxial, dando lugar a un importante conocimiento de la influencia de muchos factores en el proceso de fatiga. En los últimos años dicho esfuerzo se ha dirigido al estudio del problema multiaxial, apoyándose en la necesidad de tener un mejor conocimiento de este fenómeno, dado que la mayoría de los sistemas mecánicos están sometidos en servicio a estados de cargas complejos. Así, se han

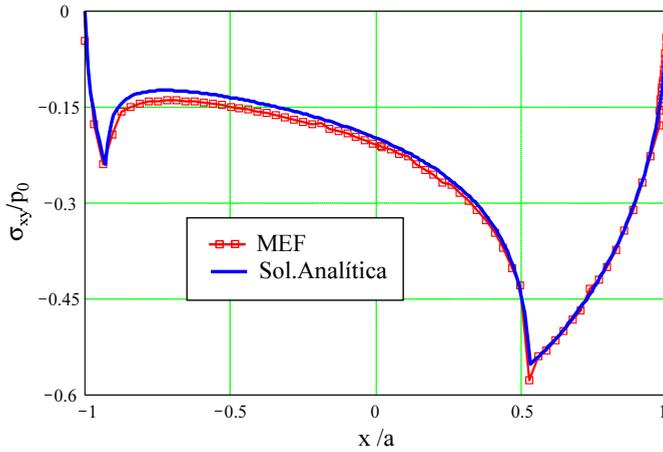


FIGURA 3.17: Comparación de la distribución de tensiones tangenciales  $\sigma_{xy}$ , adimensionalizada con  $p_0$ , obtenido mediante el MEF con el modelo utilizado en esta Tesis y la solución analítica.

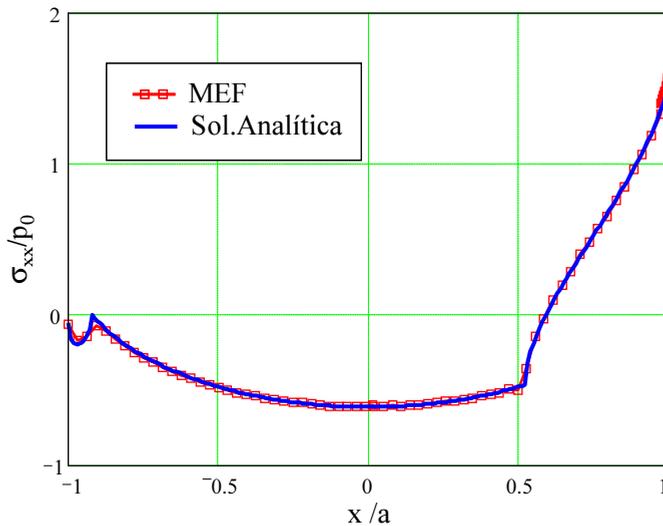


FIGURA 3.18: Comparación de la distribución de la tensión  $\sigma_{xx}$  corregida, adimensionalizada respecto a  $p_0$ , obtenida mediante el MEF con el modelo utilizado en esta Tesis y la solución analítica.

desarrollado múltiples criterios o modelos de iniciación, entre ellos, algunos basados en análisis de tensiones, deformaciones, criterios energéticos, además de los denominados modelos de “plano crítico”.

Los modelos de plano crítico han sido desarrollados a partir de observaciones experimentales de las que se concluye que las grietas se nuclean y crecen inicialmente en

determinados planos específicos, llamados planos críticos (SURESH, 1998).

Entre los criterios multiaxiales existentes se expondrán solamente algunos que representan distintos enfoques. Los parámetros específicos para cada criterio pueden determinar la zona donde se nuclea la grieta. Algunos criterios permiten, además, definir el ángulo de la iniciación de grieta.

### 3.2.1. Criterio de máxima amplitud de la tensión tangencial

Este criterio predice la iniciación de grieta en los planos donde la amplitud de la tensión tangencial es máxima durante todo el ciclo. Físicamente está relacionado con las dislocaciones en estos planos (TANAKA Y MURA, 1981). El círculo de Mohr indica que hay dos planos posibles donde la amplitud de la tensión tangencial es máxima (LYKINS ET AL., 2001B), tal y como se muestran en la Fig. 3.19.

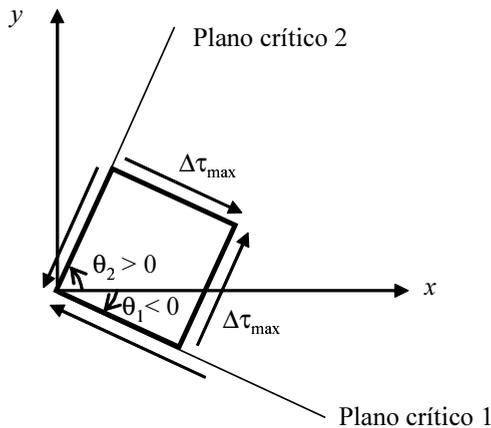


FIGURA 3.19: Esquema de los planos críticos para el criterio de máxima amplitud de tensión tangencial.

LYKINS ET AL. (2001a,b) estudiaron la localización de la iniciación de grieta y su orientación utilizando este criterio, y encontraron coincidencia entre los resultados obtenidos por este criterio y los obtenidos experimentalmente.

### 3.2.2. McDiarmid

Este criterio (MCDIARMID, 1991) fue desarrollado para fatiga multiaxial en los casos donde la iniciación de la grieta está gobernada por las tensiones tangenciales. Este criterio entra dentro de los criterios de “plano crítico” o “criterio de máxima tensión tangencial” (KAROLCZUK Y MACHA, 2005), donde se busca el plano donde las tensiones tangenciales o algún parámetro basado en éstas toma un valor máximo.

El fundamento físico de esta hipótesis es que las grietas tienen una forma normalmente irregular, ya que crecen de manera transgranular a través del material (ver Fig. 3.20).

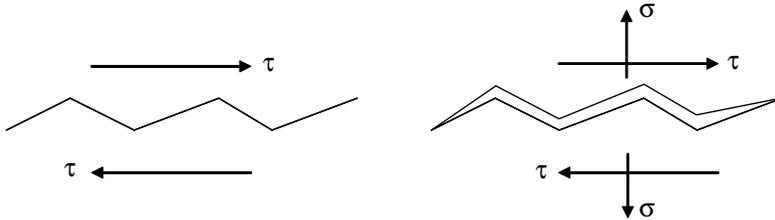


FIGURA 3.20: *Fundamento físico del criterio de McDiarmid, donde se puede ver el efecto de la tensión normal.*

Esto origina la aparición de fuerzas de fricción entre las superficies de la grieta durante los ciclos de carga aplicada. Por tanto, la fuerza conductora del crecimiento de la grieta se ve reducida y, en consecuencia, la vida a fatiga incrementada. Sin embargo, una tensión de tracción perpendicular a las superficies de la grieta tendería a separar estas superficies y reducir las fuerzas de fricción. Así, una tensión normal de tracción al plano de la grieta aumenta la fuerza conductora del crecimiento de ésta y reduce la vida a fatiga (SURESH, 1998).

En este criterio, el plano crítico es aquél donde la tensión equivalente a lo largo del ciclo se hace máxima. La tensión equivalente se define como:

$$\sigma_{eq} = \frac{\Delta\tau_{max}}{2} + \frac{t}{2\sigma_u}\sigma_{max} \quad (3.33)$$

donde  $\Delta\tau_{max}$  es el rango máximo de tensiones tangenciales,  $\sigma_{max}$  es la máxima tensión normal al plano donde  $\Delta\tau_{max}$  es máximo,  $t$  es el límite de fatiga a torsión y  $\sigma_u$  es la tensión de rotura.

Como se observa en la Fig. 3.21, durante todo un ciclo hay dos planos donde  $\Delta\tau$  es máximo. La hipótesis de McDiarmid, es que la grieta se inicia en el plano donde la tensión equivalente es mayor, es decir, si  $\sigma_{eq1} > \sigma_{eq2}$  entonces la grieta se iniciará en la dirección de  $\theta_1$ .

### 3.2.3. Fatemi-Socie

El criterio de FATEMI Y SOCIE (1988) también está enfocado a los materiales donde la grieta se inicia y propaga a causa de las tensiones tangenciales. Este criterio utiliza el rango de las deformaciones tangenciales, incorporando un término que refleja la apertura de la grieta. Este término es la tensión normal máxima perpendicular al plano donde el rango de la deformación tangencial es máximo. El parámetro que define este plano es  $FS$ , cuya expresión viene dada como:

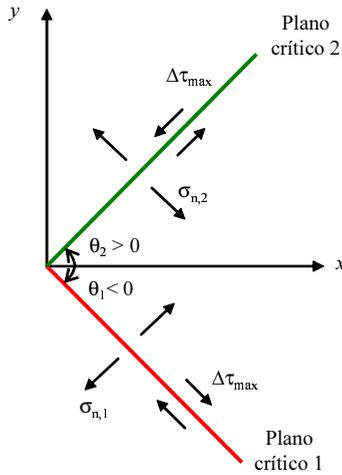


FIGURA 3.21: Esquema del plano crítico para el criterio de McDiarmid.

$$FS = \frac{\Delta\gamma_{\max}}{2} \left( 1 + k \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_y} \right) \quad (3.34)$$

donde  $\Delta\gamma_{\max}$  es el rango de la deformación tangencial máxima durante el ciclo,  $\sigma_{\max}$  es la máxima tensión normal al plano donde se produce el máximo de  $\Delta\gamma_{\max}$  y  $k$  es una constante que depende del material y que se determina a partir de los datos de los ensayos de fatiga uniaxial y de torsión (REIS ET AL., 2005). Según STEPHENS ET AL. (2000), en ausencia de datos experimentales, el valor de  $k$  se puede aproximar a 1. CARPINTERI ET AL. (2003) propusieron la Ec. (3.35) para calcular el valor de  $k$ .

$$k = \frac{\sigma_y}{\sigma'_f} \quad (3.35)$$

donde  $\sigma'_f$  es el parámetro de la ecuación de Basquin,  $\sigma_a = \sigma'_f (2N)^b$ , y  $\sigma_y$  es el límite elástico.

Como puede observarse en la Fig. 3.22, durante todo un ciclo hay dos planos donde  $\Delta\gamma$  es máximo. La hipótesis de Fatemi-Socie, es que la grieta se inicia en el plano donde el parámetro  $FS$  es mayor, es decir, si  $FS_1 > FS_2$  entonces la grieta se iniciará en la dirección de  $\theta_1$ .

### 3.2.4. Smith-Watson-Topper

SMITH ET AL. (1970) consideraron que la grieta crece prácticamente y desde el principio en modo I, es decir, crece perpendicular a la tensión axial. En este caso el parámetro Smith-Watson-Topper (SWT) viene dado por la siguiente ecuación:

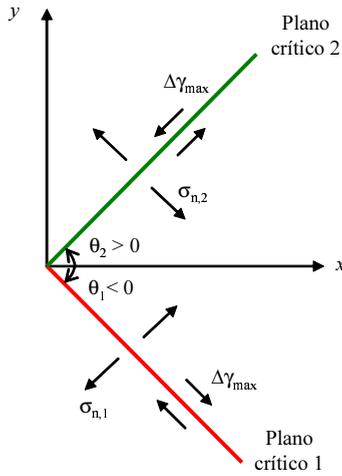


FIGURA 3.22: Esquema del plano crítico para el criterio de Fatemi-Socie.

$$SWT = \sigma_1^{\max} \frac{\Delta \epsilon_1}{2} \tag{3.36}$$

donde  $\Delta \epsilon_1$  es el rango máximo de deformación principal y  $\sigma_1^{\max}$  es la tensión máxima en el plano donde se produce el rango máximo de deformación principal.

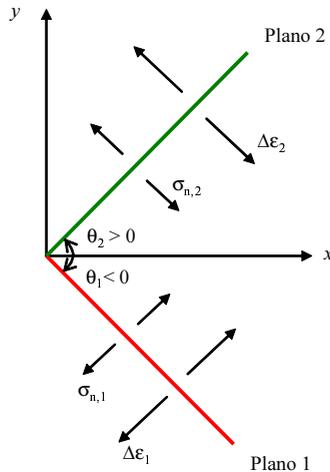


FIGURA 3.23: Esquema del plano crítico para el criterio de SWT.

El plano crítico es aquel donde parámetro SWT es mayor, es decir, si  $SWT_1 > SWT_2$  entonces el plano crítico es el plano 1, y la grieta se iniciará en la dirección de  $\theta_1$ , de acuerdo con la Fig. 3.23

### 3.2.5. Crossland

El criterio de **CROSSLAND** (1956) es diferente a los anteriores en el sentido de que no es de plano crítico sino que es un invariante de las tensiones. Mientras que en los anteriores se busca un valor máximo de las tensiones o deformaciones entre todas las direcciones, el criterio de Crossland solamente necesita calcular las tensiones en una orientación cualquiera y calcular el invariante. Este criterio tiene la ventaja obvia de que necesita un tiempo de computación mucho menor ya que no hay que detectar cuál es la dirección de plano crítico, pero presenta el inconveniente de que se pierde el sentido físico del problema. El parámetro de este criterio es:

$$\text{Cross} = \sqrt{J_{2,a}} + \frac{I_{1,\max}}{3} \left( \frac{3t}{b} - \sqrt{3} \right) \quad (3.37)$$

donde  $J_{2,a}$  es la amplitud del segundo invariante del tensor desviador de tensiones e  $I_{1,\max}$  es el máximo del primer invariante del tensor de tensiones,  $t$  es el límite de fatiga a torsión y  $b$  es el límite de fatiga a flexión.

Este criterio se puede escribir en función de las tensiones en unos ejes cualesquiera  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \text{Cross} = & \sqrt{\frac{1}{6} \left( (\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 \right) + \tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2} \\ & + \frac{\sigma_{x,\max} + \sigma_{z,\max} + \sigma_{z,\max}}{3} \left( \frac{3t}{b} - \sqrt{3} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Debe comentarse que en el caso de que  $t/b = 1/\sqrt{3}$  este parámetro coincide con la tensión equivalente de von Mises escalada por el factor  $1/\sqrt{3}$  ( $\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{3J_{2,a}}$ ).

### 3.2.6. Ruiz

El parámetro de **RUIZ ET AL.** (1984) es uno de los pocos criterios de daño que han surgido específicamente para el fretting. Éste en concreto se originó en el estudio del fretting producido en álabes de turbina. En realidad existen dos versiones de este parámetro. A la primera se le llama “parámetro de daño por fretting” FDP son sus siglas en inglés:

$$\text{FDP} = \tau \cdot \delta \quad (3.39)$$

donde  $\tau$  es la tensión tangencial en el contacto y  $\delta$  es el deslizamiento relativo entre las superficies. El máximo de este parámetro a lo largo de la superficie de contacto durante todo el ciclo, según los autores, marca el punto de mayor daño que será donde se inicie

la grieta. Una vez iniciada la grieta, se define otro parámetro similar que controlará el crecimiento de la misma, el “parámetro de daño por fretting fatiga” (FFDP):

$$\text{FFDP} = \sigma_T \cdot \tau \cdot \delta \quad (3.40)$$

donde  $\sigma_T$  es la tensión normal paralela a la superficie de contacto. Estos parámetros fueron utilizados para detectar los puntos críticos donde más daño se producía, y también para comparar los niveles de daño en distintos ensayos. En cualquier caso, su propia definición restringe su aplicación a la primera fase del crecimiento de la grieta.

### 3.2.7. MSS (Maximum Shear Stress)

Este criterio fue propuesto por OTSUKA ET AL. (1975, 1981) quienes tras ensayar grietas en modo II en aceros observaron que las grietas crecían solamente una distancia muy corta antes de su detención. La propuesta de Otsuka consiste en que la grieta crece en el mismo plano de la máxima tensión tangencial  $\tau_{r\theta}$ .

La tensión tangencial cerca del extremo de grieta viene dada por la Ec. (3.41).

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] \quad (3.41)$$

Derivando la Ec. (3.41) respecto a  $\theta$ , se obtiene:

$$K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[ 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right] = K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 9 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 7 \right] \quad (3.42)$$

El ángulo que cumple la Ec. (3.42), es el ángulo postulado para el crecimiento de grieta (FAANES, 1995).

Generalmente, el estudio de las grietas en fretting está limitado al crecimiento en modo I, y normalmente se simplifica tomando la dirección perpendicular a la superficie, aunque es sabido que no es la dirección real de las grietas en problemas de fretting fatiga (FAANES, 1995).

Los problemas de fretting fatiga, al igual que otros problemas, están sometidos a un estado de carga complejo, y el extremo de grieta en la fase I de la propagación (FORSYTH, 1962) experimenta un modo mixto de apertura de grieta (BOLD ET AL., 1992; WANG ET AL., 1995). Además, en fretting fatiga la variación de las cargas aplicadas es no proporcional y el ratio entre los FITs no permanece constante durante los ciclos de carga (HOURLIER ET AL., 1985; RIBEAUCOURT ET AL., 2007; DUBOURG Y LAMACQ, 2002). En estas condiciones, las grietas generadas tras la fase de nucleación experimentan procesos de cierre de grieta con contacto entre sus caras, donde pueden encontrarse en estado de adhesión o deslizamiento con fricción (HILLS Y NOWELL, 1994).

La evolución no lineal del estado de grieta y su configuración son fuertemente dependientes del coeficiente de fricción considerado entre las caras de grieta e influyen de manera importante en los valores de  $K_{II}$  (DOROGOY Y BANKS-SILLS, 2004).

### 3.3. Criterios de orientación en propagación de grieta

Habitualmente, en fretting fatiga, la grieta se inicia inclinada respecto a la normal de la superficie y hacia la zona del contacto debido a las cargas multiaxiales que dominan la zona. Cuando la grieta se propaga alejándose de la zona del contacto y del efecto del fretting, cambia su inclinación hacia la dirección normal a la dirección de la carga cíclica aplicada. En esta fase, fase II de la propagación (FORSYTH, 1962), la longitud de grieta supera el tamaño de varios granos, y el enfoque que puede presentar el comportamiento de la grieta en esta fase es el enfoque de la Mecánica de Fractura Elástico Lineal. A continuación, se revisan los criterios que estudian la propagación de grieta en fase II.

#### 3.3.1. MTS (Maximum Tangential Stress o “Hoop Stress”)

Este criterio fue definido por ERDOGAN Y SIH (1963), quienes propusieron que la grieta se propaga perpendicularmente a la dirección de la máxima tensión circunferencial cerca del extremo de grieta. Este criterio es equivalente al crecimiento en la dirección en la que  $K_{II} = 0$ .

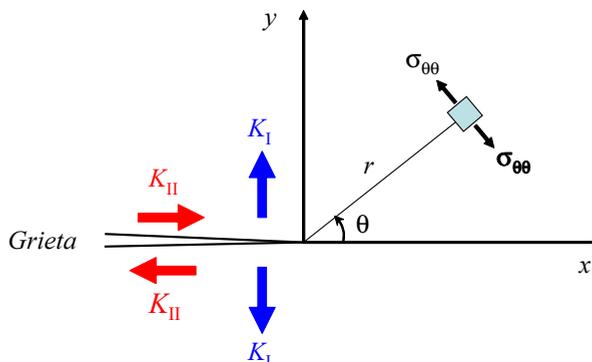


FIGURA 3.24: El extremo de grieta, bajo una carga de modo mixto.

En la cercanía del extremo de grieta, la tensión circunferencial,  $\sigma_{\theta\theta}$  denominada en inglés “tangential stress” o “hoop stress” en función de los campos singulares dominados por los FITs  $K_I$ ,  $K_{II}$  (ver Fig. 3.24), viene dada por:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_{\text{I}} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{\text{II}} \sin \theta \right] \quad (3.43)$$

Para calcular el ángulo de propagación  $\theta_0$  hay que buscar el máximo de  $\sigma_{\theta\theta}$  respecto a  $\theta$ , es decir:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \quad (3.44)$$

Y por tanto:

$$\theta_0 = \pm \arccos \left( \frac{3K_{\text{II}}^2 + \sqrt{K_{\text{I}}^4 + 8K_{\text{I}}^2 K_{\text{II}}^2}}{K_{\text{I}}^2 + 9K_{\text{II}}^2} \right) \quad (3.45)$$

donde el valor positivo del  $\theta_0$  se toma cuando  $K_{\text{II}}$  es negativo, mientras que el valor negativo corresponde a  $K_{\text{II}} > 0$ .

En condiciones de modo II puro ( $K_{\text{I}} = 0$ ) se obtiene un ángulo  $\theta_0 = 70.5^\circ$  (BOLD ET AL., 1992). Los estudios experimentales de ERDOGAN Y SIH (1963) concluyeron que las grietas eventualmente sólo se propagan en modo I (BOLD ET AL., 1992).

### 3.3.2. Criterio de Nuismer

Este criterio (NUISMER, 1975) está basado en una hipotética grieta corta que emana de una grieta larga.

La Fig. 3.25 presenta una grieta típica de longitud  $a$ , con sus FITs  $K_{\text{I}}$ ,  $K_{\text{II}}$ . La hipótesis consiste en suponer una grieta inclinada de longitud  $b$ , que emana de la grieta existente, y en buscar el ángulo que dé el valor máximo de  $k_{\text{I}}$  de esta grieta, siendo  $k_{\text{I}}$  y  $k_{\text{II}}$  los FITs virtuales asociados a la hipotética grieta inclinada  $b$ . Los factores de intensidad de tensiones de la grieta de longitud  $b$  se calculan como:

$$k_{\text{I}} = C_{11}(\theta)K_{\text{I}} + C_{12}(\theta)K_{\text{II}} \quad (3.46a)$$

$$k_{\text{II}} = C_{21}(\theta)K_{\text{I}} + C_{22}(\theta)K_{\text{II}} \quad (3.46b)$$

donde los coeficientes  $C_{ij}(\theta)$  se definen como:

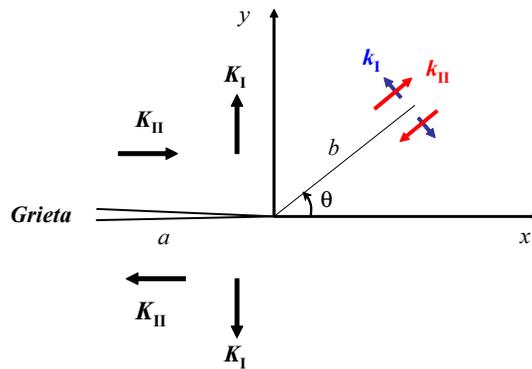


FIGURA 3.25: Un esquema de la grieta típica y sus FITs  $K_I$ ,  $K_{II}$ , y la grieta corta y sus FITs  $k_I$ ,  $k_{II}$ .

$$\begin{aligned}
 C_{11}(\theta) &= \frac{1}{4} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\
 C_{12}(\theta) &= -\frac{3}{4} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 C_{21}(\theta) &= \frac{1}{4} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 C_{22}(\theta) &= \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

El ángulo  $\theta$  que da el valor máximo de  $k_I$  es el ángulo que seguirá la grieta en su propagación según este criterio.

En la Fig. 3.26, se presenta una comparación entre el criterio MTS y el de Nuismer, donde se han representado las Ecs. (3.46) en función del ángulo  $\theta$ , y se ha calculado el ángulo de la propagación de grieta utilizando la Ec. (3.45) del criterio MTS. Se puede observar que el ángulo obtenido por el criterio MTS coincide con el ángulo obtenido por el criterio de Nuismer, ya que los dos criterios son equivalentes a la hipótesis de que la grieta crece en la dirección donde  $k_{II} = 0$  (SURESH, 1998).

### 3.3.3. MTS modificado para propagación bajo carga cíclica (Hourlier)

Este criterio es una extensión del criterio MTS para propagación bajo carga cíclica, y fue definido por HOURLIER ET AL. (1985). Sus autores propusieron tres variaciones del criterio MTS, asumiendo que la grieta se propaga en la dirección que corresponde al valor máximo, durante todo el ciclo, de  $k_1^*(\theta, t)$ ,  $\Delta k_1^*(\theta)$ , o  $\frac{da}{dN}(\theta)$  (LAMACQ ET AL., 1996; RIBEAUCOURT ET AL., 2007). Estos parámetros se calculan en el extremo de

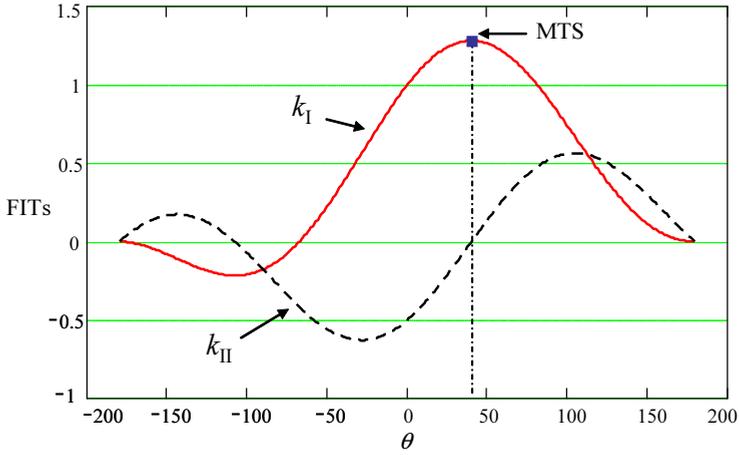


FIGURA 3.26: Comparación entre los criterios MTS y de Nuismer.

una hipotética grieta corta que emane de la existente, utilizando los FITs  $K_I$ ,  $K_{II}$  en el extremo de grieta antes de su extensión. HOURLIER ET AL. (1985) propusieron otras expresiones para calcular el ángulo, vienen dadas por las Ecs. (3.48). Sus resultados coinciden con el criterio de Nuismer cuando se utiliza  $\Delta k_I$ .

$$k_1^*(\theta, t) = G_{11}(\theta)K_I(t) + G_{12}(\theta)K_{II}(t) \quad (3.48a)$$

$$k_2^*(\theta, t) = G_{21}(\theta)K_I(t) + G_{22}(\theta)K_{II}(t) \quad (3.48b)$$

Se define  $\Delta k_1^*(\theta)$  como:

$$\Delta k_1^*(\theta) = \max_t k_1^*(\theta, t) - \min_t k_1^*(\theta, t) \quad (3.49)$$

Los coeficientes  $G_{ij}(\theta)$  vienen dados por las Ecs. (3.50) (RIBEAUCOURT ET AL., 2007).

$$\begin{aligned} G_{11}(\theta) &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{2\pi} L\right) \\ G_{12}(\theta) &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(-\frac{3}{2} \sin \theta\right) \\ G_{21}(\theta) &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right) \\ G_{22}(\theta) &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{2\pi} L\right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

con  $m = \frac{\theta}{180}$  y  $L = \ln\left(\frac{1-m}{1+m}\right) - 2\frac{m}{1-m^2}$

LAMACQ ET AL. (1996) comprobaron en sus aplicación a problemas de fretting fatiga que los ángulos obtenidos con el criterio de  $k_{I \max}^*$  no coinciden con los de  $\Delta k_{I \max}^*$ . Así, la grieta se extiende en la dirección en la que la amplitud de apertura  $\Delta k_1^*$  es máxima, no en la dirección donde se alcanza el máximo de  $k_1^*$ , lo que coincide con lo expuesto por POOK (1980).

### 3.3.4. Efecto de la tensión $T$ ( $T$ -stress)

WILLIAMS Y EWING (1972) encontraron que sus resultados experimentales en modo mixto no coincidían con los resultados predichos por el criterio MTS. Ellos explicaron estas discrepancias debido a la presencia de la tensión  $T$ , que es una tensión constante paralela a la grieta que corresponde al 2º término del desarrollo de WILLIAMS Y EWING (1972).

Los trabajos experimentales de WILLIAMS Y EWING (1972) demostraron que el término no-singular de la serie de expansión de las tensiones cerca del extremo de grieta, tiene una influencia significativa en la fractura frágil para un material elástico lineal sometido a una carga de modo mixto (SMITH ET AL., 2001).

Las tensiones cerca del extremo de grieta, en coordenadas polares, considerando la tensión  $T$  vienen dadas por:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{3}{2} \sin \frac{\theta}{2} - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta + O\left(r^{1/2}\right) \quad (3.51a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] + T \sin^2 \theta + O\left(r^{1/2}\right) \quad (3.51b)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] - T \sin \theta \cos \theta + O\left(r^{1/2}\right) \quad (3.51c)$$

Se utiliza el mismo concepto del criterio MTS, aunque no para  $r \rightarrow 0$  sino a una distancia crítica  $r_c$ <sup>1</sup>, suficientemente cerca al extremo de grieta para poder despreciar los términos  $O\left(r^{1/2}\right)$ , pero donde el efecto de  $T$  sea apreciable.

Muchos autores han propuesto aproximaciones al valor de  $r_c$ :

- RICE Y JOHNSON (1969) consideraron el valor de  $r_c$  como 0.7 veces el radio de la zona plástica de IRWIN (1960) bajo condiciones de deformación plana.
- McMEEKING Y PARKS (1979) obtuvieron que la máxima tensión circunferencial ocurre a una distancia  $r_c$  dada por:

<sup>1</sup>Es un parámetro que depende de las propiedades del material y se asume independiente de la geometría.

$$r_c = \frac{J}{\sigma_y} \quad (3.52)$$

donde  $\sigma_y$  es el límite elástico.

En modo I puro, el término  $T$  desaparece en la expresión de  $\sigma_{\theta\theta}$ , Ec. (3.51b), en el extremo de grieta y a lo largo de la grieta,  $\theta = 0$ . Así, el término  $T$  no tiene influencia en la fractura frágil, porque se supone que la fractura ocurre en el plano de la grieta  $\theta = 0$  (SMITH ET AL., 2001). En condiciones de modo mixto (I+II), la tensión  $T$  contribuye a la tensión tangencial.

LEEVERS Y RADON (1982) propusieron un parámetro adimensional llamado ratio biaxial  $B$ , que normaliza el efecto de la tensión  $T$ , con el factor de intensidad de tensiones en modo I,  $K_I$ . Este parámetro viene dado por la Ec. (3.53).

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} \quad (3.53)$$

Se puede extender la Ec. (3.53) al caso de condiciones de modo mixto, sustituyendo  $K_I$  por  $K_{\text{eff}}$ :

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_{\text{eff}}} \quad (3.54)$$

donde  $K_{\text{eff}}$  es:

$$K_{\text{eff}} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (3.55)$$

### 3.3.4.1. Criterio MTS generalizado (inclusión del T-stress)

Siguiendo el concepto de ERDOGAN Y SIH (1963) por el que la propagación de grieta en la dirección  $\theta_0$  corresponde a la máxima tensión circunferencial, y aplicando la Ec. (3.44) a la Ec. (3.51b) se obtiene:

$$[K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] - \gamma \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 = 0 \quad (3.56)$$

donde

$$\gamma = \frac{16 (T\sqrt{2\pi r_c})}{3} \quad (3.57)$$

El ángulo de propagación  $\theta_0$  será la raíz de la Ec. (3.56). SMITH ET AL. (2001) estudiaron el efecto de la tensión  $T$  en la fractura frágil bajo condiciones de modo

mixto, y los resultados indican que la tensión  $T$  afecta a la fractura. AYATOLLAHI ET AL. (1998) utilizaron el método de elementos finitos para determinar la tensión  $T$ , bajo condiciones de modo I puro y modo mixto, sin necesidad de calcular los factores de intensidad de tensiones, y vieron que el ratio biaxial  $B$  dado por la Ec. (3.54) en modo II es mayor que el obtenido en modo I.

Así, la omisión de la tensión  $T$  puede introducir un error que puede llegar a ser considerable para ciertas situaciones de fatiga (SURESH, 1998):

- Grietas de fatiga cortas.
- Grietas que están sometidas a cargas de modo mixto, donde las tensiones tangenciales en el plano de la grieta son mayores que las de Modo I.
- Grietas cortas inclinadas con un ángulo muy pequeño respecto al campo de tracción.

### 3.4. Predicción de vida

La predicción de vida es aspecto fundamental en el análisis de problemas de fatiga. Cuando se hace referencia a la predicción de vida, se puede hacer alusión a dos aspectos: por un lado, determinar el fallo/no fallo de un componente, y por otro, estimar la vida esperada.

Tradicionalmente en fatiga cuando no hay gradiente, se calculan las tensiones en la superficie y se aplica la relación  $S - N$  o bien  $\epsilon - N$  del material para determinar el número de ciclos hasta la rotura.

En algunos materiales, especialmente en aceros, aparece un nivel de tensiones alternantes por debajo del cual la fatiga no ocurre. Esto se ilustra en la Fig. 3.27, en la que la curva  $S - N$  se aproxima asintóticamente a la amplitud de tensiones  $\sigma_e$ , este valor se denomina límite de fatiga. Para aquellos materiales cuya curva  $S - N$  no tiende a un valor asintótico, tales como aleaciones de aluminio o cobre, se define habitualmente un límite de fatiga para una vida suficientemente grande, como por ejemplo  $10^6$  o  $10^7$  ciclos, Fig. 3.27.

Si los datos  $S - N$  se aproximan a una línea recta en una escala logarítmica - logarítmica, su ecuación viene dada por la ecuación de Basquin:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (3.58)$$

donde  $\sigma'_f$  es el coeficiente de resistencia a fatiga, y  $b$  es el exponente de resistencia a fatiga o el exponente de Basquin (SURESH, 1998). La Ec. (3.58) considera solamente el rango elástico del material, y por tanto, en un ensayo uniaxial:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{E\Delta\epsilon_e}{2} = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (3.59)$$

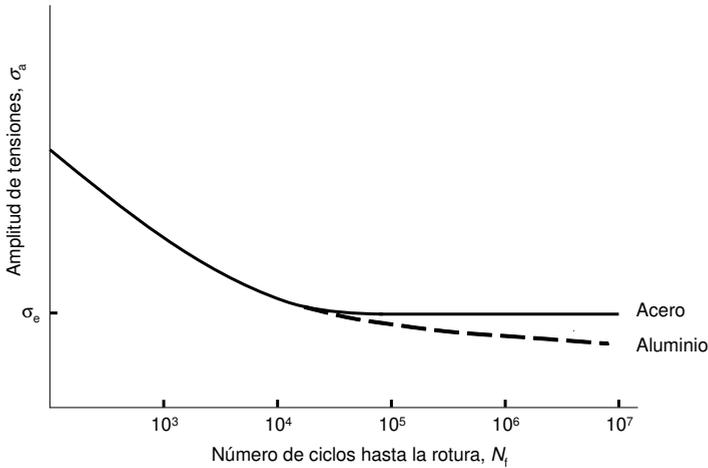


FIGURA 3.27: Diagrama  $S-N$ , variación de la amplitud de tensiones en función del número de ciclos.

donde  $E$  es el módulo de Young.

Generalmente los componentes mecánicos presentan zonas con plastificación localizada, particularmente en las localizaciones de concentración de tensiones. COFFIN (1954) y MANSON (1954) propusieron que la caracterización de la vida está basada en la amplitud de la deformación plástica, y comprobaron que los datos  $\Delta\epsilon_p/2 - N$  se aproximan a una línea recta en una escala logarítmica - logarítmica, cuya ecuación es:

$$\frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (3.60)$$

donde  $\epsilon'_f$  es el coeficiente de ductilidad a fatiga, y  $c$  es el exponente de ductilidad a fatiga.

La amplitud total de deformación  $\Delta\epsilon/2$  se puede expresar como la suma de la amplitud de la deformación elástica  $\Delta\epsilon_e/2$  y la amplitud de deformación plástica  $\Delta\epsilon_p/2$ ,

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} \quad (3.61)$$

De la combinación de la ecuación de Basquin (3.58), (3.59) y la de Coffin-Manson (3.60) se obtiene:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (3.62)$$

La variación de la deformación elástica, plástica y la amplitud de la deformación total se muestra en la Fig. 3.28.

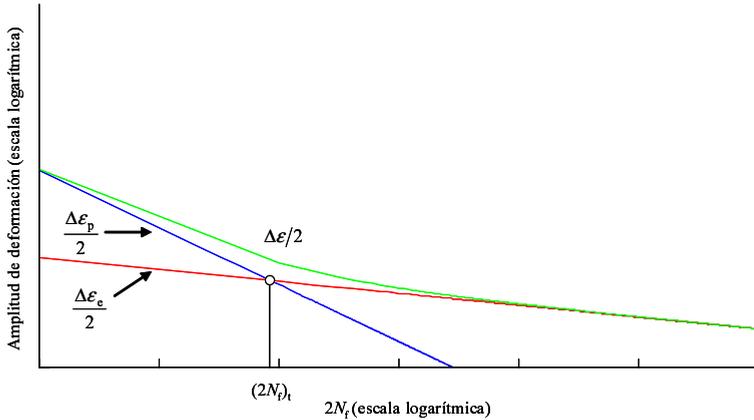


FIGURA 3.28: La amplitud de la deformación total en función del número de evoluciones reversas, se obtiene como superposición de las curvas de la amplitud de la deformación elástica y plástica.

Para vidas de bajo ciclo (LCF), esto es, cuando  $2N_f \ll (2N_f)_t$  entonces la amplitud de la deformación plástica domina más que la amplitud de la deformación elástica. Para vidas de alto ciclo (HCF), es decir, cuando  $2N_f \gg (2N_f)_t$  entonces quien domina es la amplitud de la deformación elástica.

Como se detalla en NAVARRO (2005), a la hora de predecir la vida en fretting se pueden realizar estimaciones suponiendo que todo es iniciación, todo es propagación o una combinación de ambas. La primera tiene la ventaja de que es una aplicación sencilla, pero ignora lo que ocurre a partir de la profundidad en la que se evalúan las tensiones. La segunda tiene la desventaja de que hay que elegir, de forma más o menos arbitraria, una longitud inicial desde donde empieza a propagarse la grieta. La forma de elegirla será basándose en la experiencia y a través de ciertos parámetros como la rugosidad superficial, defectos internos, tamaño de la zona de proceso, etc. En cuanto a los modelos que combinan la iniciación con la propagación, son más completos en el sentido de que incluyen todas las fases del proceso, pero presentan, como dificultad tener que diferenciar las fases de iniciación y propagación, es decir, localizar cuándo acaba una y empieza la otra. La siguiente revisión resume las principales criterios (ver NAVARRO, 2005).

### 3.4.1. Modelos basados en la iniciación

Estos modelos cobran más importancia cuando la fase de iniciación sea mayor que la de propagación y, en cualquier caso, serán más conservadores que el resto porque sólo analizan una parte del crecimiento. En la aplicación de estos modelos hay que destacar dos partes diferenciadas: por un lado la forma en que se calculan las tensiones y por otro lado, cómo se aplican en la obtención del número de ciclos de iniciación.

En cuanto a lo primero, las tensiones se pueden calcular en la superficie del sólido (GIANNAKOPOULOS Y SURESH, 1997) o se puede hacer una media de las tensiones a lo largo de una línea, área o volumen (NAMJOSHI ET AL., 2002). También se puede utilizar la tensión a una profundidad determinada (TAYLOR, 1999).

En cuanto a lo segundo, una vez calculada la tensión, ésta se puede introducir directamente en las ecuaciones (3.58), (3.62) (GIANNAKOPOULOS Y SURESH, 1997), o se puede hacer usando alguno de los muchos criterios de fatiga multiaxial y calcular una tensión equivalente para luego introducirla en dichas ecuaciones (NAMJOSHI ET AL., 2002).

A continuación se representan algunos de los criterios multiaxiales.

#### 3.4.1.1. McDiarmid

La forma de combinar este criterio con la curva deformación-vida, Ec. (3.62), es aplicarlo al caso de ensayos de fatiga sobre probetas sin entalla y ciclo simétrico,  $R = -1$ . En este caso, la tensión equivalente se convierte en:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \frac{t}{2\sigma_u} \frac{\sigma}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{t}{2\sigma_u} \right) = \frac{\Delta\sigma}{2} \cdot f \quad (3.63)$$

donde

$$f = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{t}{2\sigma_u} \right) \quad (3.64)$$

Se combina la tensión equivalente de la Ec. (3.63) con la ecuación de Basquin (3.58) se obtiene:

$$\sigma_{eq} = f \cdot \sigma'_f (2N_f)^b \quad (3.65)$$

Según esta ecuación, la tensión equivalente  $\sigma_{eq}$  ha de obtenerse mediante un cálculo elástico de tensiones (NAVARRO, 2005; NAVARRO ET AL., 2003, 2008; NAVARRO Y DOMÍNGUEZ, 2004).

#### 3.4.1.2. Fatemi-Socie

Al igual que con el criterio anterior, este parámetro se puede aplicar al caso de fatiga simple de ciclo simétrico,  $R = -1$ , y combinarlo con la Ec. (3.62) para un cálculo elástico de tensiones para tener:

$$FS = (1 + \nu) \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \frac{k}{2} (1 + \nu) \frac{\sigma'^2_f}{E\sigma_y} (2N_f)^{2b} \quad (3.66)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. El criterio de Fatemi y Socie, y el de McDiarmid dan resultados similares cuando las tensiones y deformaciones locales son elásticas (NAVARRO ET AL., 2008).

### 3.4.1.3. Smith-Watson-Topper

Como se ha comentado anteriormente, este criterio se basa en la hipótesis de que la grieta crece prácticamente y desde el principio en modo I.

Combinando el parámetro específico de este criterio, Ec. (3.36), con la Ec. (3.59) para un cálculo elástico de tensiones se obtiene:

$$SWT = \sigma_1^{max} \frac{\Delta\epsilon_1}{2} = \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_f)^{2b} \quad (3.67)$$

Este modelo propone que el daño por fatiga no ocurre si  $\sigma_{max} < 0$ . Así, en muchos casos no coinciden los datos obtenidos por este criterio con los datos obtenidos experimentalmente (SURESH, 1998; LYKINS ET AL., 2001B).

Cuando la carga cíclica no es proporcional, como el caso de fretting, es muy complicado aplicar este criterio como resultado de la rotación de las direcciones principales. Así, el parámetro SWT se define como el valor máximo entre todas las direcciones posibles (NAVARRO ET AL., 2008), Ec. (3.68).

$$SWT = \left( \sigma_{max} \frac{\Delta\epsilon}{2} \right)_{max} \quad (3.68)$$

## 3.4.2. Modelos basados en la propagación de grieta

Estos modelos estimarán la vida como un proceso de propagación de una grieta desde una longitud inicial mediante la mecánica de la fractura elástica lineal. Antes de analizar los distintos modelos es necesario definir una serie de parámetros que son comunes a todos ellos.

En primer lugar, hay que determinar el lugar de iniciación de grieta. Para ello se aplica algún criterio de fatiga multiaxial tratando de buscar el punto donde el parámetro característico alcanza el máximo. En fretting fatiga, y para todos los tipos de contacto, contacto completo e incompleto, si se analizan sólo puntos de la superficie, el máximo se encuentra en el límite de la zona de contacto. Si se calculan a una pequeña profundidad del sólido, este máximo se desplaza hacia el interior de la zona de contacto. En el apartado 3.1.2 se ha mostrado la evolución de la tensión equivalente de von Mises en caso de contacto cilíndrico a distintas profundidades. Una vez determinado el punto de iniciación, es necesario elegir una longitud inicial de grieta desde donde

propagarla, y ésta longitud depende del material y se analizará mediante la aplicación de los modelos a ensayos concretos. Otro parámetro que hay que considerar es el camino que sigue la grieta. En el punto de iniciación mantiene una gran inclinación, pero al llegar a una cierta profundidad, la grieta cambia su orientación para crecer casi perpendicularmente a la superficie.

Diferentes caminos se pueden utilizar en la simulación para el recorrido de la grieta. Una posibilidad es suponer dos fases en el crecimiento de la grieta, siendo la primera una grieta inclinada con un ángulo obtenido al aplicar la metodología denominada “crack analogue” (GIANNAKOPOULOS ET AL., 2002) y la segunda fase una grieta perpendicular a la superficie. El punto de transición entre las dos se puede definir usando diferentes criterios, como por ejemplo la longitud de grieta donde el factor de intensidad de tensiones iguale al umbral de crecimiento (GIANNAKOPOULOS ET AL., 2002).

Otra opción es determinar la orientación de la grieta en cada punto calculando la dirección donde  $\Delta\sigma_{\theta\theta}$  es máximo y posteriormente incrementando la grieta en un cierto valor (MUTOH Y XU, 2003). En cualquier caso, la hipótesis más sencilla es considerar que la grieta crece en línea recta, lo cual es cierto para la mayor parte de la vida. Como se comenta en NAVARRO ET AL. (2003); NAVARRO (2005), una vez que estos parámetros se han definido, es necesario calcular el factor de intensidad de tensiones.

Se pueden emplear diversos métodos a la hora de calcular el  $K_I$ , como se ha comentado anteriormente. Si la geometría que se va a analizar es sencilla, se utiliza el método de función de peso (ver apartado 2.6), pero las desventajas de este método son:

- Es válida solamente si  $a/W < 0.5$ , donde  $W$  en el caso de una probeta de fretting es el espesor de la probeta (BUECKNER, 1973).
- Se desprecia el crecimiento en modo II.
- No considera la interacción contacto-grieta (GINER ET AL., 2008).

GINER ET AL. (2009d) estudiaron el efecto de la interacción contacto-grieta en contacto cilíndrico, utilizando el método X-FEM. Demostraron que las grietas de longitudes de orden del tamaño de la zona del contacto, influyen en la distribución de las tensiones y modifican las condiciones del contacto. Además, compararon los resultados del  $K_I$  obtenido por X-FEM con el obtenido por el método de función de peso, y observaron ciertas diferencias, debido (entre otros factores) a que el método de la función de peso asume que la tensión  $\sigma_{Bulk}$  es uniforme, mientras que la tensión no es uniforme en el extremo de la zona del contacto, y las fuerzas axiales aplicadas a la probeta no son iguales en las dos partes (ver Fig. 3.1).

Independientemente de los parámetros escogidos para la definición de la grieta y el cálculo del factor de intensidad de tensiones, es importante definir también la ley del crecimiento de grieta a lo largo de todo el proceso de crecimiento.

Se pueden utilizar diferentes leyes de propagación de grieta para simular este proceso, y también usar los datos experimentales tabulados para el mismo material y diferentes

condiciones (como la relación de tensiones  $R$ , Ec. (3.69), temperatura, etc.) ajustados por una ecuación compleja.

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (3.69)$$

Otra aproximación es usar ecuaciones sencillas que se ajusten a parte de los datos obtenidos en ensayos estándar de velocidad del crecimiento de grietas  $da/dN$  (como la ley de Paris).

Entre las leyes encontradas en la literatura, algunas tienen en cuenta el umbral de crecimiento y otras no. Además, cuando se analiza el crecimiento de grietas pequeñas, algunas leyes modifican el umbral de crecimiento reduciéndolo, y otras introducen una longitud de grieta efectiva en los cálculos del factor de intensidad de tensiones.

El objetivo entonces es encontrar una expresión para la velocidad de crecimiento de grieta, que pueda ser obtenida a partir de la curva básica de Paris (PARIS ET AL., 1961; PARIS Y ERDOGAN, 1963). Como se puede observar en la Fig. 3.29, la grieta crece en un intervalo de  $\Delta K$  limitado (para  $R$  bajos) en el extremo superior por el valor crítico  $K_c$  (la tenacidad a la fractura), y limitado en otro extremo por un valor umbral  $\Delta K_{th}$  por debajo del cual las grietas no se propagan. Dentro de este intervalo se suele distinguir tres regiones:

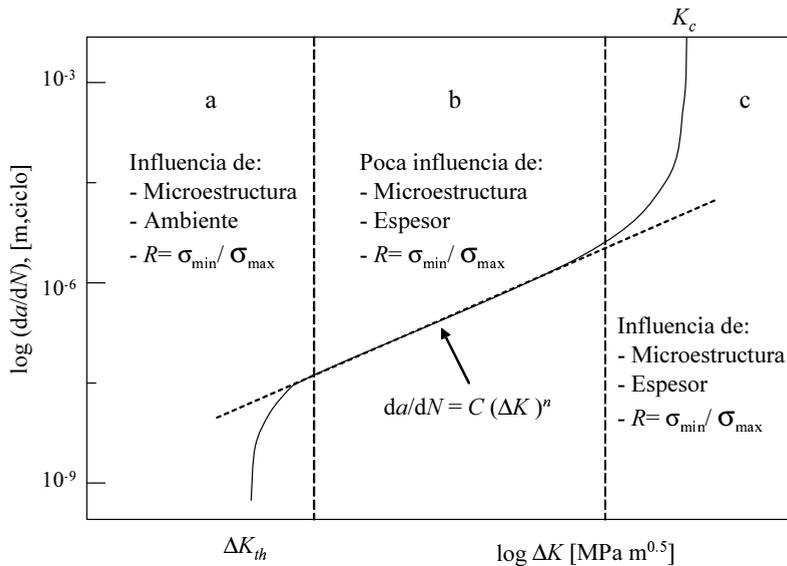


FIGURA 3.29: Forma característica del crecimiento de una grieta por fatiga en función del FIT  $K$  (CAMPBELL ET AL., 1982).

- Región (a): Una primera región donde la velocidad de propagación es pequeña y está muy influida por la microestructura del material, el valor de  $R$  y por las condiciones ambientales.

- Región (b): Una region intermedia donde los factores que influyen en la región (a), tienen poca influencia. En el diagrama log-log de la Fig. 3.29, esta zona se ajusta muy bien a una recta. Ello simplifica mucho el estudio de la propagación de la grieta, utilizándose una relación denominada Ley de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^n \quad (3.70)$$

donde  $C$ ,  $n$  son constantes obtenidas experimentalmente para cada material, y dependen de las condiciones ambientales y del ratio  $R$ .

- Región (c): Una region final en la que el FIT máximo se acerca a la tenacidad de fractura  $K_c$  y la velocidad de propagación de la grieta es elevada. En esta zona, la microestructura y el valor de  $R$  vuelven a cobrar importancia, así como el espesor (deformación o tensión plana) (SURESH, 1998).

Esta ley es muy simple, pero como desventaja no tiene en cuenta el umbral del crecimiento de grieta  $\Delta K_{th}$ , ni el comportamiento de las grietas cortas, ni el efecto del ratio  $R$  (SURESH, 1998). Por todo ello, se aleja bastante de la realidad. Esto no impide que se hagan análisis usando la ley de Paris y buscando el valor de la longitud de grieta inicial que mejor prediga los resultados.

Muchos investigadores han intentado establecer una relación que permita tener en cuenta el efecto del ratio  $R$ , después de la observación de que en la región (c) (ver Fig. 3.29) el valor máximo del factor de intensidad de tensiones  $K_{max}$  se acerca al valor crítico  $K_c$

$$K_{max} = \frac{\Delta K}{(1 - R)} \rightarrow K_c \quad (3.71)$$

Así, los valores de  $\Delta K$ , cuando  $K_{max}$  se acerca a  $K_c$ , son más bajos para valores de  $R$  mayores (ver Fig. 3.30). Notar que sólo para valores bajos de  $R$ ,  $\Delta K$  tiende a coincidir con  $K_{max}$ .

WALKER (1970) estudió este efecto, y propuso la siguiente ecuación, donde se tiene en cuenta el ratio  $R$ :

$$\frac{da}{dN} = C (\overline{\Delta K})^n \quad (3.72)$$

donde  $\overline{\Delta K}$  es el rango efectivo del factor de intensidad de tensiones (LIU, 1998), y viene dado por:

$$\overline{\Delta K} = K_{max} (1 - R)^\gamma \quad (3.73)$$

donde  $\gamma$  es el exponente de Walker y el valor considerado de éste exponente es (DOWLING, 1993):

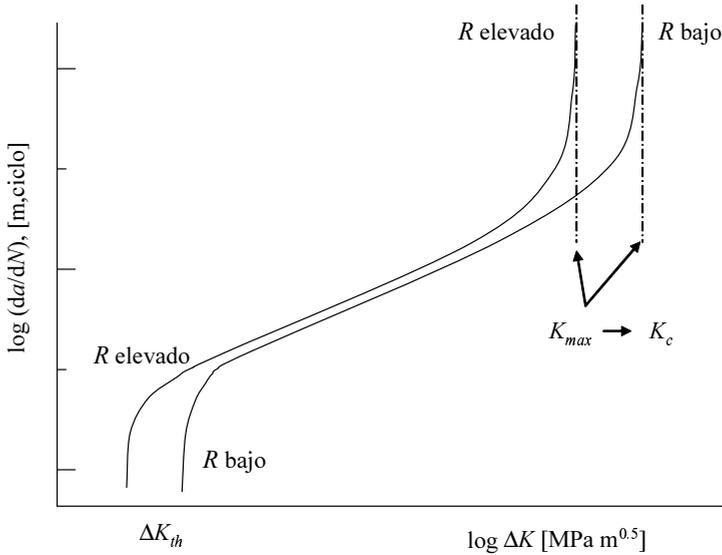


FIGURA 3.30: Una presentación del efecto de  $R$ , en el comportamiento de la propagación de grieta.

$$\gamma = \begin{cases} 0 & R = \{-0.5, -1.0\} \\ 0.42 & R = \{0, 0.1, 0.5, 0.7\} \end{cases} \quad (3.74)$$

El rango del factor de intensidad de tensiones  $\Delta K$  viene dado por la Ec. (3.75).

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} = K_{\max} (1 - R) \quad (3.75)$$

Sustituyendo la Ec. (3.75) en la Ec. (3.73) se obtiene:

$$\overline{\Delta K} = \frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-\gamma}} \quad (3.76)$$

Sustituyendo la Ec. (3.76) en la Ec. (3.72) se obtiene:

$$\frac{da}{dN} = C_{(R=0)} \left( \frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-\gamma}} \right)^{n_{(R=0)}} \quad (3.77)$$

Hay que aclarar que para  $R < 0$ , se supone que la porción de la carga de compresión no tiene efecto al crecimiento de grieta, por lo que se considera que  $\gamma = 0$  cuando  $R < 0$ , y por tanto,  $\overline{\Delta K} = K_{\max}$ , Ec. (3.73). Así, la Ec. (3.77) se aplica para  $R \geq 0$  (DOWLING, 1993).

### 3.4.2.1. Modificación del factor de intensidad de tensiones considerando el efecto del cierre de grieta

ELBER (1970) estudió el fenómeno de cierre de grieta, considerando que el material cerca del extremo de grieta se deforma plásticamente durante la propagación de grieta en fatiga. Considera que durante la descarga de la tensión cíclica, las caras de grieta contactan, y al empezar el ciclo de carga (tracción) las caras no se separan inmediatamente, sino permanecen cerradas durante un intervalo del ciclo.

La hipótesis consiste en que la grieta no se propaga si está cerrada, y por tanto el  $\Delta K$  queda reducido a otro valor efectivo inferior  $\Delta K_{\text{eff}}$ . Es decir, que existe un valor mínimo del factor de intensidad de tensiones  $K_{\text{op}}$ , necesario para producir la reapertura de la grieta.

ELBER (1970) definió el rango del factor de intensidad de tensiones efectivo como:

$$\Delta K_{\text{eff}} = U \cdot \Delta K \quad (3.78)$$

donde el ratio de cierre  $U$  se define como:

$$U = \frac{K_{\text{max}} - K_{\text{op}}}{K_{\text{max}} - K_{\text{min}}} \quad (3.79)$$

Elber mostró que la relación entre  $U$  y  $R$  es lineal, siendo  $R$  la relación de tensiones, Ec.(3.69).

Desde entonces, se han hecho numerosos intentos para determinar, mediante técnicas experimentales, las cargas necesarias para reabrir la grieta en distintos materiales, así como, para analizar los mecanismos físicos de cierre y reapertura de grieta (LIU, 1998; SURESH, 1998).

De las Ecs. (3.78) y (3.79), se puede deducir que para cualquier valor de  $R$ , el valor de  $U$  es  $0 < U \leq 1$ . Físicamente, un valor  $U = 1$  representa que la grieta está totalmente abierta ( $K_{\text{op}} = K_{\text{min}}$ ), mientras que un valor  $U = 0$ , implica que la grieta está totalmente cerrada ( $K_{\text{op}} = K_{\text{max}}$ ).

NEWMAN (1976) definió para una carga cíclica un ratio efectivo  $R_{\text{eff}}$ , dado por la siguiente ecuación:

$$R_{\text{eff}} = \frac{K_{\text{op}}}{K_{\text{max}}} \quad (3.80)$$

Así, al sustituir la Ec. (3.80) en la Ec. (3.79) se tiene:

$$U = \frac{1 - R_{\text{eff}}}{1 - R} \quad (3.81)$$

Sus análisis mediante el método de los elementos finitos, mostraron una reducción del valor del ratio efectivo  $R_{\text{eff}}$  con la disminución del valor de  $R$ .

WONG ET AL. (2000) estudiaron dos métodos para determinar el cierre de grieta y sus efectos bajo condiciones de carga en modo mixto:

- El método de medida de deformación (strain gauge) está basado en el cambio de la deformación durante todo el ciclo. La deformación se mide cerca del extremo de la grieta. Este método puede detectar el cierre de grieta en modo I, pero no en modo II.
- El método de la réplica de la superficie (surface replica) permite la medición de los desplazamientos normales y tangenciales entre las dos caras de la grieta. Este método compara el rango del deslizamiento medido con el teórico.

Así, la forma de considerar el efecto del cierre de grieta es utilizar la siguiente ecuación:

$$\frac{da}{dN} = C_1 (\Delta K_{\text{eff}})^{n_1} \quad (3.82)$$

donde

$$\Delta K_{\text{eff}} = \begin{cases} K_{\text{max}} - K_{\text{op}} & \text{si } K_{\text{min}} < K_{\text{op}} \\ K_{\text{max}} - K_{\text{min}} & \text{si } K_{\text{min}} \geq K_{\text{op}} \end{cases} \quad (3.83)$$

y  $C_1, n_1$  son constantes empíricas obtenidas de la curva  $da/dN$  vs  $\Delta K_{\text{eff}}$  (SURESH, 1998).

### 3.4.2.2. Umbral de crecimiento para grietas largas

El modelo de grieta larga utiliza el valor umbral del crecimiento de grieta largas  $\Delta K_{th\infty}$ , que se puede modelar de diferentes formas. En esta Tesis solo se expondrán dos métodos: el más sencillo es sustituir  $\Delta K$  por  $(\Delta K - \Delta K_{th\infty})$ , donde  $\Delta K_{th\infty}$  es el valor umbral del crecimiento para grietas largas.

De esta forma la ley de crecimiento queda como se muestra en la Ec. (3.84) (ver DONAHUE ET AL., 1972; ANDERSON, 2005).

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K - \Delta K_{th\infty})^n \quad (3.84)$$

El otro consiste en considerar el umbral de grieta según la Ec. (3.85) (ver KLESNIL Y LUKAS, 1972; ANDERSON, 2005).

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K^n - \Delta K_{th\infty}^n) \quad (3.85)$$

De este modo, se mejora el modelo básico de Paris al introducir el valor umbral, pero por contra presenta peores resultados al no tener en cuenta el comportamiento de grietas cortas.

### 3.4.2.3. Modificación del umbral para grietas cortas

Cuando las grietas son cortas la velocidad de crecimiento es mucho más alta que para grietas largas, con el mismo valor de  $\Delta K$ , especialmente para  $\Delta K$  bajos. Pero cuando la grieta crece se encuentra con los bordes de grano que la frenan, para luego acelerarse al traspasarlos. En conjunto, a veces se aprecia una gran disminución de la velocidad en un punto aunque luego aumenta y se aproxima ya al comportamiento de grieta larga (LANKFORD, 1982). Por tanto, para tener en cuenta el comportamiento de grietas cortas, es necesario introducir una constante propuesta por EL HADDAD ET AL. (1979). Esta constante se obtiene del diagrama de KITAGAWA Y TAKAHASHI (1979) (ver Fig. 3.31), donde se representa la tensión umbral para que crezca una grieta frente a la longitud de grieta, y donde para grietas cortas la curva tenderá al límite de fatiga:

$$\Delta\sigma_{th} = \Delta\sigma_{FL} \quad (3.86)$$

donde  $\Delta\sigma_{FL}$  es el límite de fatiga.

Para que una grieta crezca se debe cumplir la siguiente condición:

$$\Delta K = \Delta K_{th} \quad (3.87)$$

Así, se llega a:

$$\Delta K_{th} = Y \Delta\sigma_{th} \sqrt{\pi a} \quad \longrightarrow \quad \Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th}}{Y \sqrt{\pi a}} \quad (3.88)$$

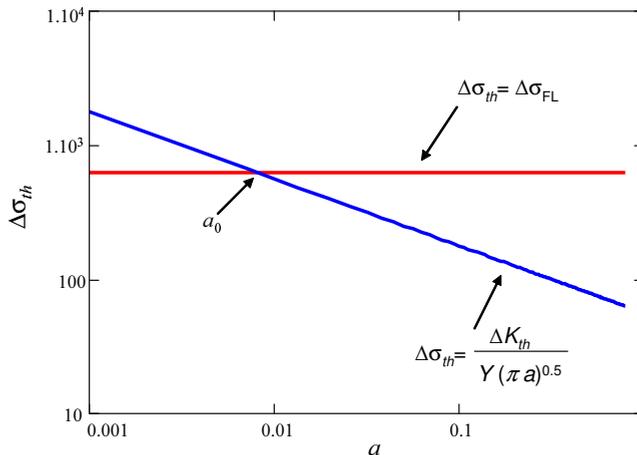


FIGURA 3.31: Distribución de  $\Delta\sigma_{th}$  (diagrama de Kitagawa-Takahashi).

donde  $Y$  es el factor geométrico, y depende del modo de apertura de grieta, tipo de carga aplicada y de la geometría de la pieza que es analizada.

De la intersección de las rectas, Ecs. (3.86) y (3.88), se obtiene un punto que define la constante de El Haddad (EL HADDAD ET AL., 1979; FAANES Y FERNANDO, 1994; NOWELL ET AL., 2006; FOUVRY ET AL., 2008):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th\infty}}{Y\sigma_{FL}} \right)^2 \quad (3.89)$$

Esta constante marca la transición iniciación-propagación, donde se modifica el  $\Delta K_{th\infty}$  disminuyéndolo para tener en cuenta el hecho de que el umbral para grietas cortas es menor, es decir:

$$\Delta K_{th}(a) = \Delta K_{th\infty} \sqrt{\frac{a}{a + a_0}} \quad (3.90)$$

Esta modificación fue propuesta por FAANES Y FERNANDO (1994), quienes utilizaron la siguiente ecuación:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K - \Delta K_{th\infty} \sqrt{\frac{a}{a + a_0}} \right)^n \quad (3.91)$$

Al igual que en el modelo de grietas largas, también se utilizará la siguiente ecuación:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K^n - \left( \Delta K_{th\infty} \sqrt{\frac{a}{a + a_0}} \right)^n \right) \quad (3.92)$$

Otra modificación para el valor umbral del crecimiento de grieta fue desarrollada por VALLELLANO ET AL. (2003), donde se incorpora la distancia típica entre los bordes de grano,  $l_0$  y un parámetro  $f$  para el ajuste del diagrama de Kitagawa-Takahashi. La modificación viene dada por a la Ec. (3.93) (VALLELLANO ET AL., 2003; MUÑOZ ET AL., 2007).

$$\Delta K_{th}(a) = \Delta K_{th\infty} \left( \frac{a^f}{a^f + a_0^f - l_0^f} \right)^{1/2f} \quad (3.93)$$

Por tanto la Ec. (3.85) queda:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K^n - \left( \Delta K_{th\infty} \left( \frac{a^f}{a^f + a_0^f - l_0^f} \right)^{1/2f} \right)^n \right) \quad (3.94)$$

#### 3.4.2.4. Modificación de la longitud de grieta

EL HADDAD ET AL. (1979) utilizaron las ecuaciones de grieta larga, (3.84) y (3.85), pero empleando una longitud de grieta efectiva que viene dada por la siguiente ecuación:

$$a_{ef} = a + a_0 \quad (3.95)$$

Por tanto:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K(a_{ef}) - \Delta K_{th\infty})^n \quad (3.96)$$

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K^n(a_{ef}) - \Delta K_{th\infty}^n) \quad (3.97)$$

#### 3.4.2.5. Modificación del factor de intensidad de tensiones considerando el efecto de grietas cortas

HATTORI ET AL. (2003) incluyeron el efecto de las grietas pequeñas modificando el FIT. Calcularon un  $\Delta K_{efectivo}$  que era igual al  $\Delta K$  original multiplicado por el cociente entre  $\Delta K_{th\infty}$  y  $\Delta K_{th}(a)$ . En realidad lo que se hace es mayorar el FIT cuando la grieta es pequeña.

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K \sqrt{\frac{a+a_0}{a}} - \Delta K_{th\infty} \right)^n \quad (3.98)$$

$$\frac{da}{dN} = C \left( \left( \Delta K \sqrt{\frac{a+a_0}{a}} \right)^n - \Delta K_{th\infty}^n \right) \quad (3.99)$$

#### 3.4.2.6. Ajuste a datos de ensayos

Otra forma de ley de propagación es ajustar una ley compleja a una serie de ensayos realizados en condiciones distintas, como la ley de propagación utilizada en el programa NASA/FLAGRO:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^n (\Delta K - \Delta K_{th})^p}{[(1-R) K_c - \Delta K]^q} \quad (3.100)$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación de la ley de Paris considerando  $p = q = 0$ . Otra fórmula de NASA/FLAGRO, donde se considera el cierre de grieta, viene dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \frac{1-f}{1-R} \right)^n \cdot \Delta K^n \cdot \frac{[\Delta K - \Delta K_{th}]^p}{[(1-R)K_c - \Delta K]^q} \quad (3.101)$$

donde  $f$  es el ratio definido por NEWMAN (1976), Ec. (3.80), que tiene en cuenta el nivel de apertura efectivo.

En resumen, el procedimiento a seguir para predecir la vida utilizando modelos de propagación consta de los siguientes pasos:

- Elegir una longitud de iniciación  $a_i$ .
- Elegir el punto de origen y la orientación de la grieta, mediante un criterio de fatiga multiaxial.
- Calcular la evolución del factor de intensidad de tensiones en función de la longitud de grieta.
- Escoger un modelo de propagación e integrar la ecuación desde la longitud inicial,  $a_i$ , hasta la longitud final,  $a_f$ :

$$N_p = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(a)} \quad (3.102)$$

### 3.4.3. Modelos combinados de iniciación y propagación

Los métodos de iniciación, apartado 3.4.1, tienen el inconveniente de que evalúan las tensiones en una zona cercana a la superficie con lo que ignoran lo que pasa después. Los métodos de propagación, apartado 3.4.2, no modelan correctamente la fase de iniciación, dadas las restricciones de la MFEL cuando la grieta es muy pequeña. En este apartado se considera que el crecimiento de una grieta consta de dos fases, iniciación más propagación.

Si se combinan la iniciación con la propagación, es necesario determinar cuándo acaba una y cuándo empieza la otra. La fase de propagación se calculará usando alguna de las leyes explicadas en el apartado 3.4.2 desde una longitud de grieta que habrá que definir. La fase de iniciación se calculará a partir de las tensiones en la superficie o cerca de ella, aplicando cualquiera de los criterios del apartado 3.4.1. Dicha longitud de iniciación que separa las dos fases de crecimiento puede ser una longitud fija definida a priori o puede ser variable: distinta para cada caso y obtenida como resultado del modelo.

#### 3.4.3.1. Longitud de iniciación fija

SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) y ARAÚJO Y NOWELL (2002) consideran que la fase de iniciación termina cuando la grieta alcanza 1 mm de longitud. Sin embargo, para poder determinar el número de ciclos de iniciación, SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) tienen en

cuenta las tensiones producidas en la superficie, y ARAÚJO Y NOWELL (2002) tienen en cuenta una profundidad de algunas decenas de micras, correspondiente a uno o varios granos.

SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) seleccionaron 1 mm como longitud de iniciación teniendo en cuenta dos consideraciones:

- En los casos analizados de contacto cilíndrico, la mayor parte de los valores del semiancho de la zona de contacto se encontraban alrededor de 1.5 mm. Esto hace que el efecto de la zona de contacto sobre la grieta se puede considerar poco influyente desde una longitud de grieta de 1 mm.
- El tomar 1 mm como la longitud de iniciación coincide con los estudios llevados a cabo por SOCIE ET AL. (1993); SOCIE (1993).

Araújo y Nowell usaron 1 mm basándose en el trabajo de SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) y en el hecho de que hay gran cantidad de datos en la literatura sobre el material usado por ellos para la longitud de iniciación de 1 mm. Es decir, curvas  $\epsilon - N$  donde el criterio para el fallo es tener una grieta de 1 mm. Sin embargo, la información que normalmente aparece en la literatura en relación a la curva  $\epsilon - N$  se refiere a probetas prácticamente sin gradiente de tensiones, cuando, por el contrario, el fretting se caracteriza por la aparición de grandes gradientes. En concreto, los estudios de SOCIE ET AL. (1993) fueron llevados a cabo con probetas tubulares donde la máxima diferencia en las tensiones en el espesor de 2 mm era menor de 2 % para carga axial y menor de 15 % para torsión.

La existencia de un alto gradiente de tensiones producido en fretting en la zona cercana al contacto hace que sea discutible que el estado de tensiones en la superficie o a una distancia de algunas decenas de micras defina el comportamiento hasta profundidades de 1 mm, sin tener en cuenta el estado de tensiones existente entre esas dos profundidades.

La metodología seguida por dichos autores SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) y ARAÚJO Y NOWELL (2002) para estimar la vida se resume en tres pasos:

1. Definir una profundidad de grieta,  $y_p$ , desde donde considerar la propagación y calcular el número de ciclos necesarios para propagar la grieta desde esa profundidad  $N_p(y_p)$  hasta la rotura, aplicando la mecánica de fractura. Esta longitud es el parámetro definido por los autores mencionados anteriormente donde escogían  $y_p$  (1 mm (ARAÚJO Y NOWELL, 2002), 0.380 mm (LYKINS ET AL., 2001B)).
2. Calcular una “vida de iniciación experimental” donde se calcula el número de ciclos de iniciación  $N_i(y_i)$ . Esta profundidad,  $y_i$ , a la que se evalúan las tensiones se toma como cero por unos autores (SZOLWINSKI Y FARRIS, 1998), y como algunas decenas de micras por otros (ARAÚJO Y NOWELL, 2002). Se puede buscar el valor  $y_i$  para el que se obtiene una vida de iniciación igual a la experimental:

$$N_i(y_i) = N_{i\ exp} = N_f - N_p \quad (3.103)$$

donde  $N_f$  es el número de ciclos hasta el fallo obtenido en el ensayo.

3. Por último, representar gráficamente, para cada ensayo, una tensión equivalente empleando un criterio multiaxial y la curva  $\epsilon - N$  del material en fatiga.

### 3.4.3.2. Longitud de iniciación variable

Este método, fue propuesto por SOCIE ET AL. (1979) para componentes con entalla bajo carga uniaxial y ha sido empleado en problemas de fretting fatiga por NAVARRO ET AL. (2003). Se asume que dos mecanismos diferentes actúan en un material sometido a fatiga: iniciación y propagación. Son fenómenos distintos que son tratados separadamente aunque la consecuencia sea la misma, el fallo del material. En cada punto, uno domina al otro.

Para tener en cuenta los dos, se calculan dos curvas en función de la longitud de la grieta, es decir, a lo largo del camino que se supone va a seguir la grieta:

1. La velocidad de crecimiento de grieta debida a mecanismos de iniciación.
2. La velocidad de crecimiento de grieta obtenida a partir de la teoría MFEL.

La primera se obtiene calculando, para cada punto a lo largo del camino de la grieta, el número de ciclos necesario para que se inicie una grieta. Para ello, se calculan las tensiones en cada punto y se obtiene una tensión equivalente usando algún criterio de fatiga multiaxial (ver el apartado 3.4.1). Con esta tensión equivalente y la relación  $\epsilon - N$  de fatiga del material se obtiene el número de ciclos. Posteriormente se calcula la derivada a esta curva,  $da/dN |_i$ . De esta forma se obtiene algo que se puede asemejar a una velocidad de crecimiento por iniciación, Fig. 3.32.

La segunda curva es la velocidad de crecimiento durante la fase de propagación, donde se aplica la MFEL, Fig. 3.33. Se calcula usando la curva experimental del material ( $da/dN |_p - \Delta K$ ) y la curva ( $\Delta K - a$ ) mediante alguno de los métodos explicados en el apartado 3.4.2.

La velocidad de crecimiento por iniciación,  $da/dN |_i$ , decrece con la profundidad y, para los puntos cercanos a la superficie, tiene un valor mayor que la clásica velocidad de crecimiento debido a la mecánica de la fractura,  $da/dN |_p$ , que aumenta con la profundidad. Por lo tanto, una grieta que fuera suficientemente pequeña crecería más rápidamente por iniciación que por propagación. Esto significa que, teniendo una grieta de longitud  $a$ , tardaría menos en iniciarse una grieta en  $a + \Delta a$  que propagarse la grieta existente una distancia  $\Delta a$ .

A una profundidad determinada las dos curvas se cruzan y a partir de ese momento la velocidad de crecimiento por propagación es mayor, Fig. 3.34.

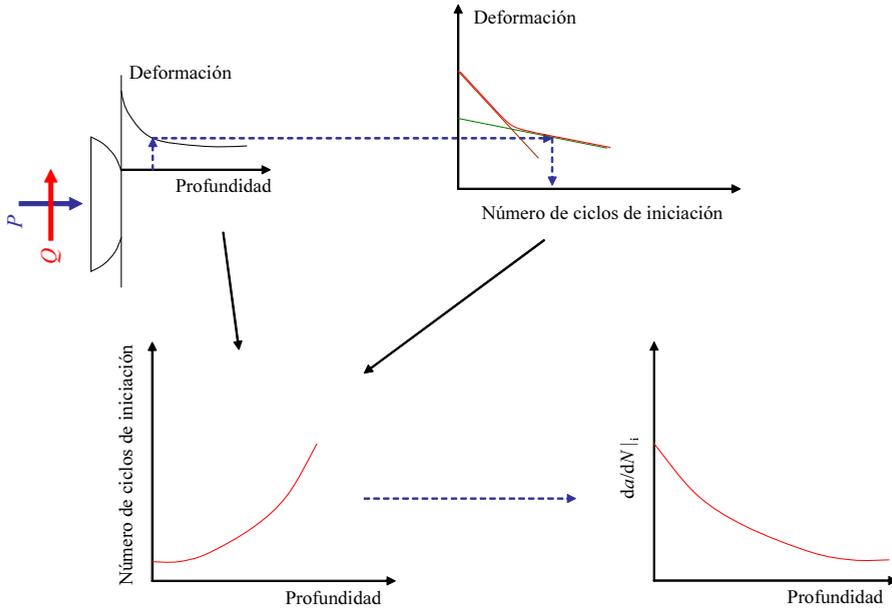


FIGURA 3.32: Obtención de la curva de velocidad de crecimiento por iniciación  $da/dN|_i$  (NAVARRO, 2005; NAVARRO ET AL., 2008).

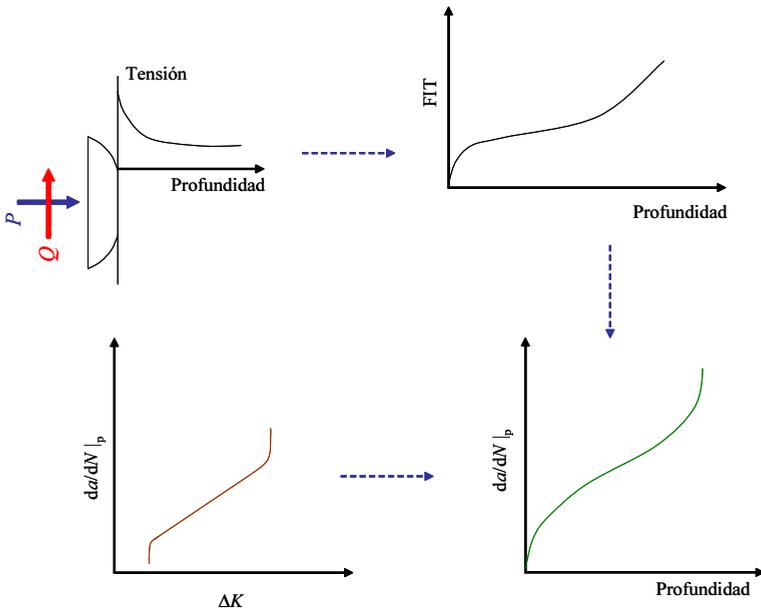


FIGURA 3.33: Obtención de la curva de velocidad de crecimiento por propagación  $da/dN|_p$  (NAVARRO, 2005; NAVARRO ET AL., 2008).

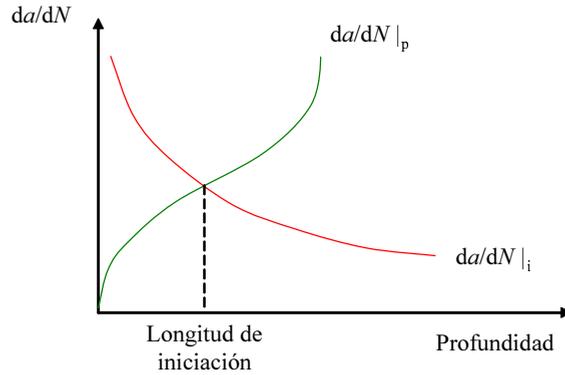


FIGURA 3.34: *Intersección de las curvas de velocidad de crecimiento.*

De acuerdo con SOCIE ET AL. (1979), este punto de intersección determina lo que se denomina “longitud de iniciación”.

La vida de iniciación,  $N_i$ , sería aquélla que se corresponde con la de este punto. La vida de propagación,  $N_p$ , sería el número de ciclos necesarios para propagar la grieta desde esa profundidad hasta la rotura final.

De acuerdo con lo propuesto por NAVARRO ET AL. (2003); NAVARRO (2005), en vez de calcular la vida de la forma explicada se empleará un método numéricamente equivalente pero más sencillo (CHEN, 1979), esto método ha sido utilizado en esta Tesis. Al igual que antes, se calcula el número de ciclos necesarios para iniciar una grieta a lo largo del camino que va a seguir la grieta,  $N_i$ , pero sin calcular la derivada. Por otro lado, para cada punto a lo largo del camino de la grieta, se calcula el número de ciclos necesario para propagar la grieta desde ese punto hasta la rotura,  $N_p$ , usando la teoría de la MFEL. Para ello, es necesario obtener la curva  $(da/dN|_p - \Delta K)$  e integrarla desde cada punto hasta la fractura final. La suma de las curvas  $N_i$  y  $N_p$  proporciona la vida total asociada a cada punto. Se puede decir que el punto más desfavorable de la curva y que proporciona la vida de la probeta es el mínimo de dicha curva tal como muestra la Fig. 3.35.

El punto donde se produce el mínimo también define la longitud de iniciación, donde el crecimiento pasa de estar gobernado por la iniciación a la propagación. Este punto coincide exactamente con el valor calculado usando el procedimiento anterior, Fig. 3.34, como se muestra a continuación. La Fig. 3.35 muestra que

$$N_T = N_i + N_p \quad (3.104)$$

El mínimo de esta curva se puede determinar buscando el punto con pendiente nula. En ese punto se cumple que

$$\frac{dN_T}{da} = 0 = \frac{dN_i}{da} + \frac{dN_p}{da} \quad (3.105)$$

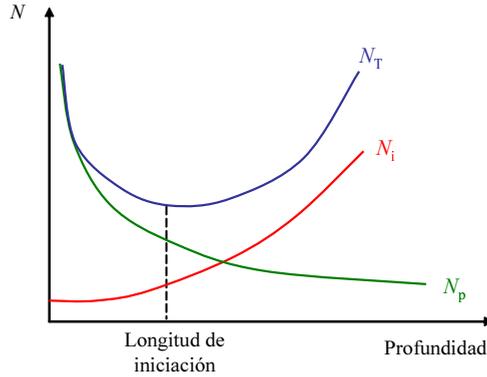


FIGURA 3.35: Curvas de iniciación, propagación y total.

El término  $dN_i/da$  de la Ec. (3.105) es el inverso de  $da/dN|_i$  de la Fig. 3.34. De hecho, esta velocidad se obtiene a partir de  $N_i$  de la Fig. 3.35. Sin embargo, en cuanto al término de propagación, se tiene que  $N_p$  es el número de ciclos de propagación desde un punto hasta la rotura, que, por supuesto, disminuye con la profundidad, Fig. 3.35. Pero,  $N$  en la Fig. 3.34 es el número de ciclos del ensayo, que aumenta con la profundidad y están relacionados por:

$$N_p = N_f - N \quad (3.106)$$

donde  $N_f$  es el número de ciclos hasta el fallo, que para cada ensayo es una constante. Derivando esta ecuación respecto a la longitud de grieta  $a$  se obtiene:

$$\frac{dN_p}{da} = -\frac{dN}{da}|_p \quad (3.107)$$

Sustituyendo la Ec. (3.107) en la Ec. (3.105) se llega a que:

$$\frac{da}{dN}|_i = \frac{da}{dN}|_p \quad (3.108)$$

Es decir, se comprueba que el mínimo de  $N_T$  se produce en el mismo punto donde  $da/dN|_i$  y  $da/dN|_p$  son iguales, por tanto, las dos definiciones de la longitud de iniciación son equivalentes y la vida total obtenida es la misma (NAVARRO ET AL., 2003, 2008).

Un inconveniente de este método es que, aparentemente, presenta una incongruencia en el cálculo de la fase de iniciación. La razón es que la curva  $\epsilon - N$  se obtiene de unos ensayos donde el final de los mismos se define normalmente como la rotura de la probeta. Sin embargo, aquí se usa para estimar la vida de iniciación en un punto concreto, que normalmente se encuentra cerca de la superficie. En la práctica, el error

cometido no es importante si se tiene en cuenta que la curva  $\epsilon - N$  se obtiene para una probeta sin entalla, es decir, sin gradiente de tensiones.

Por último, cabe mencionar una ventaja de este método respecto al de longitud de iniciación fija. En el método anterior es necesario definir dos parámetros,  $y_i$  y  $y_p$ , de forma algo arbitraria y dependiente del grupo de ensayos a analizar, mientras que en este caso no. Incluso la longitud de grieta que separa la iniciación de la propagación no se escoge, se obtiene como resultado de aplicar el método. Esto le da una mayor versatilidad para poder aplicar el modelo a cualquier caso nuevo.



## Parte II

# Implementación y aplicación del método X-FEM en fretting fatiga



## Capítulo 4

# Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta

### Resumen del Capítulo:

*En este capítulo se describe la implementación del método X-FEM en el programa ABAQUS, y también la implementación del contacto en caras de grieta utilizando restricciones puntuales a través de los elementos tipo T2D2, y el planteamiento segmento-segmento, también llamado mortár.*



### 4.1. Integral de dominio modificada para el cálculo de $K_{II}$ considerando el contacto en caras de grieta

En el apartado 2.7.1, se ha explicado que bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), libre de fuerzas por unidad de volumen y contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas, la integral  $J$  se puede calcular como integral de dominio a través de la Ec. (2.39). SHIH ET AL. (1986) definieron otra expresión de la integral  $J$  bajo condiciones cuasiestáticas que incluyen fuerzas por unidad de volumen  $F_i$ , deformaciones tipo  $\varepsilon_{ij}^{*1}$  y fuerzas por uds  $T_i$  aplicadas sobre los tramos  $\Gamma_s$  correspondientes a las caras de grieta ( $\Gamma_s = \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ , véase Fig. 2.12 y Fig. 4.1). Esta expresión viene dada por la Ec. (4.1).

$$J = \int_{A^*} \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial x_1} - F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) q_1 \right] dA - \int_{\Gamma_s} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q_1 d\Gamma \tag{4.1}$$

Así, la integral de dominio  $J$  en un problema bidimensional con comportamiento elástico, en ausencia de fuerzas por unidad de volumen, viene dada por:

$$J = \int_{A^*} \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right] dA - \int_{\Gamma_s} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q_1 d\Gamma \tag{4.2}$$

donde  $T$  es el vector de tracciones en caras de grieta, dado por la Ec. (2.27),  $T_i = \sigma_{ji} n_j$ .

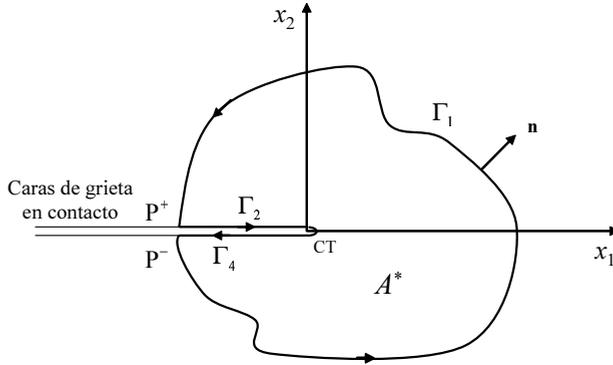


FIGURA 4.1: Dominio  $A^*$  y contorno  $\Gamma$  para la integral  $J$

En el caso de que las tracciones  $T_i$  se deban a las fuerzas de contacto con fricción entre caras de grieta, el segundo término de la Ec. (4.2) se puede interpretar como la energía de disipación por fricción  $J_p$ , donde  $J_p$  es:

<sup>1</sup>Este tipo de deformaciones podrían ser deformaciones térmicas, higroscópicas, etc.

$$J_p = \int_{\Gamma_s} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q_1 d\Gamma \quad (4.3)$$

Dado que  $n_1 = 0$  en  $\Gamma_2, \Gamma_4$ , véase Fig. 4.1 y Fig. A.1 del Apéndice A, y si se define  $\Delta U_1 = u_{1,\Gamma_2} - u_{1,\Gamma_4}$  como el desplazamiento tangencial relativo entre puntos homólogos de las caras de grieta, la Ec. (4.3) se puede escribir como<sup>2</sup>:

$$J_p = \int_{CT}^P \sigma_{12} \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} q_1 dx_1 \quad (4.4)$$

De la Ec. (4.4) se tiene que:

1. Si no hay fricción ( $\mu = 0$ )

$$\sigma_{12} = 0 \implies J_p = 0$$

2. Si la fricción es tal que impide el deslizamiento

$$\Delta U_1 = 0 \quad (\text{adhesión}) \implies J_p = 0$$

Se asume que no existe apertura de grieta en modo I y por tanto  $K_I=0$ . Así, para calcular  $K_{II}$  en modo II puro se debe utilizar la siguiente ecuación:

$$G = J = \frac{K_{II}^2}{E'} = \int_{A^*} \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right] dA - \int_{CT}^P \sigma_{12} \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} q_1 dx_1 \quad (4.5)$$

Si además  $\sigma_{12}$  es constante entre el extremo de grieta (CT) y el punto  $P$ , entonces la integral  $J_p$ , Ec. (4.4), se calcula simplemente como:

$$J_p = \sigma_{12} \int_{CT}^P \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} q_1 dx_1 \quad (4.6)$$

Si no se hubiera aplicado el método EDI, la integral  $J_p$  no incluiría la función  $q$ , escribiéndose como sigue:

$$\begin{aligned} J_p &= \sigma_{12} \int_{CT}^P \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} \cdot dx_1 = \\ &= \sigma_{12} \left[ \Delta U_1(x) \right]_{CT}^P = \\ &= \sigma_{12} \cdot \Delta U_1(x_P) \end{aligned} \quad (4.7)$$

El primér termino de la Ec. (4.2) correspondería en este caso a una integral de contorno.

<sup>2</sup>Ver la demostración detallada en el Apéndice A

## 4.2. Implementación X-FEM en el programa ABAQUS

GINER ET AL. (2008) implementaron el X-FEM en el programa ABAQUS, y aplicaron esta implementación a problemas de fretting fatiga. En GINER ET AL. (2009a) se detalla la implementación empleada, exponiendo las subrutinas de usuario utilizadas. Esta implementación ha permitido modelar diferentes problemas: análisis de múltiples grietas con diferentes orientaciones en problemas 2D y problemas de fretting fatiga. En este apartado se hará un breve resumen de esta implementación.

La Fig. 4.2 muestra un esquema del proceso de análisis utilizado en la implementación. Tras la generación de la malla en el programa ABAQUS, se aplica el método LSM (*Level Set Method*). Este método representa la geometría de la grieta como dos funciones de nivel, que consisten en funciones de distancia con signo<sup>3</sup> para determinar la ubicación de la grieta dentro de la malla. A partir de la ubicación de la grieta, se determinan los nodos y elementos a enriquecer, utilizando elementos standard y de usuario, y se calculan las tensiones y deformaciones del problema mediante el programa ABAQUS. Todo ello permite calcular los FITs de la grieta estudiada mediante los métodos energéticos descritos en el apartado 2.7.

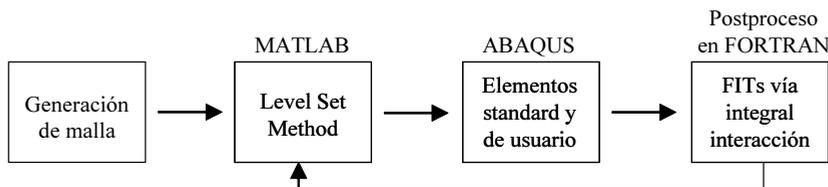


FIGURA 4.2: Esquema del proceso de análisis.

### 4.2.1. Elemento de usuario UEL

El elemento de usuario programado en ABAQUS mediante la rutina UEL admite múltiples grados de libertad por nodo y es utilizado solamente para los elementos enriquecidos. Para estos elementos de usuario se definen las propiedades del material: módulo de Young, y coeficiente de Poisson. Se definen también las subdivisiones de integración y los puntos de integración necesarios para el cálculo, la dimensión física del problema estudiado, y por último, si se trata de un problema de deformación plana o tensión plana.

La principal ventaja del X-FEM es que la topología de la malla y la conectividad se mantienen durante todo el proceso de propagación de grieta. Al igual que el método de los elementos finitos, es necesario realizar las integraciones numéricas para el cálculo

<sup>3</sup>Para una de las funciones level set, el signo positivo o negativo de la función de distancia permite designar la ubicación de los nodos a uno u otro lado de la grieta. Para la otra de las funciones level set, el signo indica la distancia al extremo de grieta.

de la matriz de rigidez de cada elemento. Es importante recordar que los elementos que contienen la grieta tienen campos de desplazamientos discontinuos. Por tanto, estos elementos deben ser divididos en subdominios en los que la grieta es una de las fronteras del subdominio para llevar a cabo la integración numérica, tal y como se muestra en la Fig. 4.3.

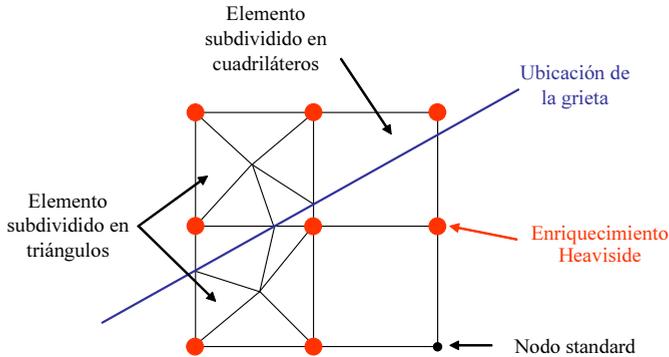


FIGURA 4.3: Esquema de la subdivisión de los elementos intersectados por la grieta para la integración numérica.

Debe mencionarse, que para los elementos que contienen el extremo de grieta, se puede utilizar una integración cuasi-polar, tal y como plantean BÉCHET ET AL. (2005); LABORDE ET AL. (2005).

En esta Tesis, se ha utilizado el cuadrilátero de cuatro nodos como elemento standard. Se han utilizado 7 puntos de integración en subdominios triangulares y 5x5 puntos de integración en los subdominios cuadriláteros y en los subdominios de los elementos que no se subdividen, pero contienen al menos un nodo enriquecido. Para el resto de elementos se han utilizado 2x2 puntos de integración.

#### 4.2.2. Formulación *shifted*

En la implementación de X-FEM en ABAQUS, GINER ET AL. (2009a) utilizaron la formulación *shifted*, definida por la Ec. (2.9). Al implementar esta formulación en ABAQUS, se tiene como ventaja la posibilidad de dibujar el desplazamiento físico de los nodos en los elementos que contienen la grieta, y además, resulta un método conveniente para combinar los elementos de usuario con problemas de contacto en ABAQUS, ya que los nodos enriquecidos contienen su desplazamiento físico en los gdl 1 y 2, que son los que utiliza ABAQUS en sus interacciones de contacto.

#### 4.2.3. Elementos overlay

Los resultados son postprocesados en rutinas externas a ABAQUS, de forma que es posible procesar la información asociada a los elementos enriquecidos. En general,

ABAQUS no permite procesar información generada por elementos de usuario. Por ello, GINER ET AL. (2009a) utilizaron elementos lineales estándar de 4 nodos de muy baja rigidez, denominado elementos tipo “overlay”. Estos elementos están conectados a los nodos de los elementos enriquecidos, por lo que, tienen los mismos grados de libertad 1 y 2. Así, es posible visualizar la deformada del problema, aunque la interpolación dentro de los elementos “overlay” es una interpolación bilineal, y por consiguiente, no se puede captar las discontinuidades locales ni los desplazamientos debido a las funciones tipo Heaviside y extremo de grieta en el interior de los elementos.

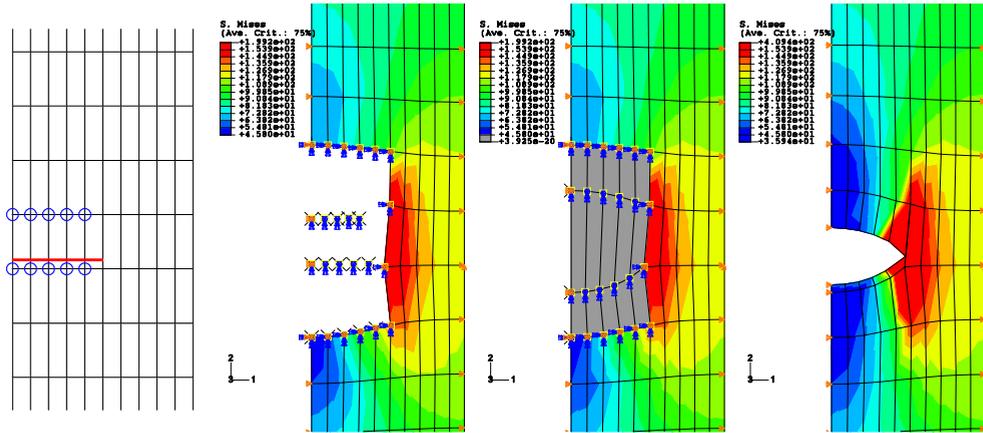
#### 4.2.4. Presentación de los resultados

En la Fig. 4.4 se muestra una parte de una placa finita con una grieta lateral sometida a una carga normal uniforme. Los laterales están restringidos en la dirección  $x_1$ . La ubicación de la grieta y los nodos enriquecidos se muestran a la izquierda de la Fig. 4.4 para dos tipos de enriquecimiento: Fig. 4.4 (a) enriquecimiento de Heaviside, Fig. 4.4 (b), enriquecimiento de Heaviside y de extremo de grieta.

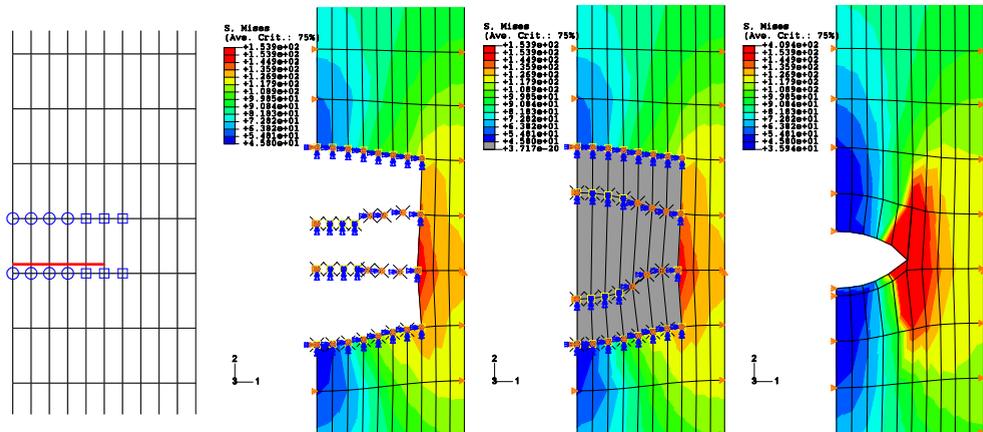
En la misma figura, se presenta para cada tipo de enriquecimiento mostrado, las tensiones de von Mises correspondientes. Además, se muestra, empezando de izquierda a derecha, la solución de los elementos finitos extendido X-FEM sin utilizar la formulación “shifted”, la solución de X-FEM considerando la formulación “shifted” con los elementos “overlay” y la comparación con la solución de los elementos finitos estándar. La utilización de la formulación “shifted” permite representar el verdadero desplazamiento de los nodos, con superposición de elementos que ayudan a visualizar la discretización. El desplazamiento de los nodos enriquecidos se puede comparar con la solución de los elementos finitos estándar, mostrado en la parte derecha de la Fig. 4.4. Debe tenerse en cuenta que para la solución de FE, se incluye una ecuación de restricción para el nodo situado en el extremo de la grieta, a fin de hacer compatible el campo de desplazamiento con el campo de desplazamiento del lado próximo. Para el enriquecimiento de Heaviside, Fig. 4.4 (a), la solución de X-FEM coincide con la de los elementos finitos standard<sup>4</sup>. En la Fig. 4.4 (b), la solución de los elementos finitos extendido no coincide con la de los elementos finitos standard, debido a que se incluye el efecto de las funciones de extremo de grieta.

---

<sup>4</sup>Estrictamente, la distribución de von Mises es un poco diferente cerca de los nodos que pertenecen a los elementos enriquecidos, debido al procedimiento de promedio de ABAQUS, que no tiene en cuenta los resultados verdaderos del elemento de usuario.



a) Enriquecimiento de Heaviside



b) Enriquecimiento de Heaviside y extremo de grieta

FIGURA 4.4: Representación de los elementos enriquecidos en Abaqus. De izquierda a derecha: ubicación de grieta y los nodos enriquecidos; tensión de von Mises sin considerar la formulación “shifted”; tensión de von Mises considerando la formulación “shifted”; comparación con la solución de elementos finitos standard.

### 4.3. Contacto de caras de grieta en X-FEM

A la hora de aplicar la implementación de X-FEM en ABAQUS a problemas de fretting fatiga, se debe considerar el estado de la grieta a lo largo del ciclo de carga, para lo que es necesario el correcto modelado del contacto y cierre de grieta. A continuación se revisa la formulación del problema de contacto. Posteriormente se proponen dos estrategias para establecer el contacto en X-FEM: mediante elementos T2D2 (restricciones puntuales) y mediante el planteamiento segmento-segmento (también denominado mortár). Estos planteamientos aplicados al contacto de cara de grieta en

X-FEM constituyen una de los principales aportaciones de esta Tesis.

### 4.3.1. Formulación del problema de contacto sin rozamiento

La Fig. 4.5 muestra esquemáticamente las dos caras de una grieta,  $\Gamma_c^{(1)}$  y  $\Gamma_c^{(2)}$ , entre las que se puede producir interacción de contacto. Bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, un punto  $\mathbf{x}^{(1)}$  de una cara siempre interacciona con el mismo punto  $\mathbf{x}^{(2)}$  de la otra cara, por lo que se puede definir la distancia entre las caras de la grieta (“gap” normal) como:

$$g_N = (\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}^{(1)} \quad (4.8)$$

donde  $\mathbf{u}^{(i)}$  es el desplazamiento del punto en la cara ( $i$ ) y  $\mathbf{n}^{(1)}$  es el vector normal a la superficie.

El planteamiento del problema de contacto (sin rozamiento) se basa en encontrar el campo de desplazamientos que minimiza la energía potencial total y que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker (WRIGGERS, 2002; LAURSEN, 2002):

$$g_N \geq 0 \quad p_N \geq 0 \quad g_N p_N = 0 \quad (4.9)$$

donde  $p_N$  es la presión en la zona de contacto.

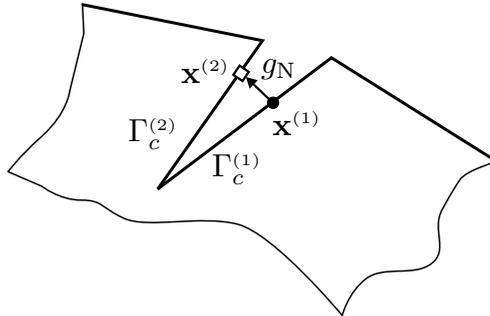


FIGURA 4.5: Contacto en caras de la grieta.

Un planteamiento muy utilizado para resolver el problema de minimización con restricciones de contacto es el método de los multiplicadores de Lagrange, en el cual se añade una incógnita adicional al problema, el campo de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_N$ , que físicamente es la presión necesaria para garantizar que la distancia  $g_N$  es nula si se produce contacto. Desarrollando este planteamiento (WRIGGERS, 2002; LAURSEN, 2002) se obtienen dos ecuaciones: en la primera ecuación, se debe cumplir que el trabajo virtual de las fuerzas internas y externas (incluyendo la presión de contacto) sea nulo, es decir:

$$\delta W^{int}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \delta W^{ext}(\delta \mathbf{u}) - \delta W^c(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad (4.10)$$

donde el último sumando es el trabajo virtual de la presión de contacto, que se calcula como:

$$\delta W^c(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} \delta g_N \lambda_N d\Gamma \quad (4.11)$$

La segunda ecuación es la condición de impenetrabilidad en el contacto, que se expresa de forma integral como:

$$\int_{\Gamma_c^{(1)}} g_N \delta \lambda_N d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \lambda_N \quad (4.12)$$

Además de las Ecs. (4.10) y (4.12) se debe cumplir que la presión de contacto sea de compresión, es decir,  $\lambda_N \geq 0$ .

### 4.3.2. Formulación del problema de contacto con rozamiento de Coulomb

En el caso de que exista rozamiento entre las caras de grieta, el planteamiento mediante multiplicadores de Lagrange divide la superficie de contacto  $\Gamma_c^{(1)}$ , en dos partes: zona de adhesión  $\Gamma_{st}^{(1)}$  y zona de deslizamiento  $\Gamma_{sl}^{(1)}$ .

En la zona de adhesión se introduce una variable adicional, el multiplicador de Lagrange en dirección tangencial  $\lambda_T$ , que es la tensión tangencial de contacto necesaria para imponer las condiciones de adhesión. En la zona de deslizamiento la tensión tangencial de contacto es conocida (en función del signo de deslizamiento relativo, del coeficiente de fricción y la presión de contacto) y por lo tanto se trata como una fuerza externa aplicada.

Para formular el problema con rozamiento se debe añadir un nuevo término a la Ec. (4.10), el trabajo virtual de las fuerzas de rozamiento. Este término se expresa como:

$$\delta W^f(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_{st}^{(1)}} \delta g_T \lambda_T d\Gamma + \int_{\Gamma_{sl}^{(1)}} \delta g_T \text{signo}(g_T) \mu \lambda_N d\Gamma \quad (4.13)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento,  $g_T$  es el deslizamiento relativo definido como:

$$g_T = (\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}) \cdot \mathbf{s}^{(1)} \quad (4.14)$$

y  $\delta g_T$  se obtiene de la ecuación anterior sustituyendo los desplazamientos por sus variaciones. La variable  $\mathbf{s}^{(1)}$  es el vector tangente a la cara de la grieta.

Además de la Ec. (4.13) se debe incluir la ecuación de restricción para garantizar las condiciones de adhesión, similar a las condiciones de contacto de la Ec. (4.12):

$$\int_{\Gamma_{st}^{(1)}} g_T \delta \lambda_T d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \lambda_T \quad (4.15)$$

Esta restricción de adhesión sólo se puede aplicar si se cumple la siguiente condición:

$$|\lambda_T| \leq \mu |\lambda_N| \quad (4.16)$$

#### 4.4. Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta utilizando elementos tipo barra T2D2 (restricciones puntuales)

Inicialmente, el modelado del contacto de caras de grieta en X-FEM se llevó a cabo mediante la aplicación de restricciones puntuales entre los extremos de los lados de los elementos intersectados por la grieta (DOLBOW, 1999) u otros procedimientos basados en estrategias iterativas (RIBEAUCOURT ET AL., 2007).

En esta Tesis, se ha propuesto un nuevo método que se clasificaría como método de restricciones puntuales. La implementación del contacto en caras de grieta en X-FEM se ha llevado a cabo mediante elementos unidimensionales tipo barra (o “truss”) de 2 nodos y 2 gdl por nodo (denominados T2D2 en ABAQUS). En cada punto donde la geometría de la grieta corta el lado de un elemento se crean dos nodos en la misma ubicación (p.ej.  $A$  y  $B$  en la Fig. 4.6).

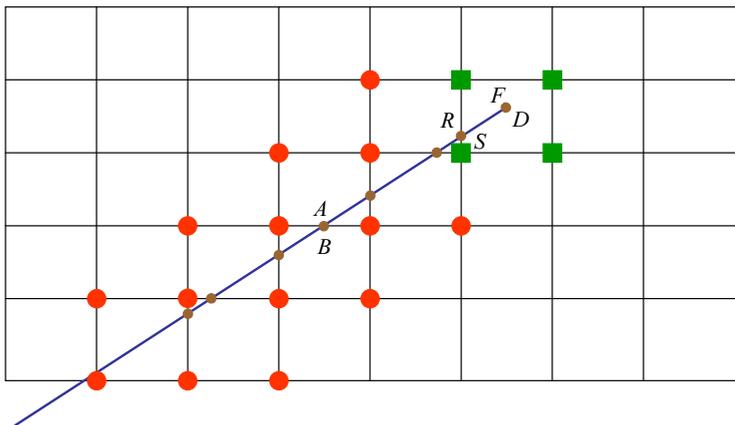


FIGURA 4.6: Nodos adicionales para el contacto de caras de grieta en X-FEM

Los grados de libertad de estos nodos se vinculan a la solución de X-FEM a través de las ecuaciones de restricción, es decir, que para puntos de corte entre dos nodos tipo Heaviside (puntos  $A$  y  $B$  en la Fig. 4.6) se deberá cumplir la Ec. (4.17).

$$\mathbf{u}_A = \sum_{i=1}^2 N_i(\mathbf{x}_A) [\mathbf{u}_i + (H(\mathbf{x}_A) - H(\mathbf{x}_i)) \mathbf{a}_i] \quad (4.17)$$

donde se describe el desplazamiento en el punto  $A$  como interpolación entre los gdl de los nodos del lado asociado. Para puntos de corte entre dos nodos con enriquecimiento de extremo de grieta (puntos  $R$  y  $S$  en la Fig. 4.6) se deberá cumplir la Ec. (4.18).

$$\mathbf{u}_R = \sum_{i=1}^2 N_i(\mathbf{x}_R) \left[ \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^4 (F_j(\mathbf{x}_R) - F_j(\mathbf{x}_i)) \mathbf{b}_i^j \right] \quad (4.18)$$

En las Ecs. (4.17) y (4.18) el sumatorio se extiende a los nodos enriquecidos que pertenecen al lado del elemento intersectado, ya que las funciones de forma del resto de nodos se anulan en dicho lado (propiedad de “soporte compacto” o “compact support”). Para generar las superficies de contacto a lo largo de las caras de grieta, los nodos que definen la cara superior de la grieta (p.ej. nodos  $R$  y  $F$ ) y la cara inferior (p.ej.  $S$  y  $D$ ) se unen mediante elementos unidimensionales de rigidez despreciable.

Con la formulación de las Ecs. (4.17) y (4.18) en la que se resta el valor de las funciones de enriquecimiento en los nodos se garantiza que los gdl estándar  $\mathbf{u}_i$  coinciden con los desplazamientos físicos. Para garantizar que los nodos  $F$  y  $D$  representan adecuadamente el extremo de grieta, se introduce otra ecuación de restricción adicional que iguala sus gdl en el extremo de grieta ( $\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_D$ ).

#### 4.4.1. Validación de la implementación

Para validar la implementación propuesta en esta Tesis, se ha considerado un problema de una placa infinita que contiene una grieta de longitud  $2a$ , en un material elástico lineal, homogéneo e isótropo, sometido a tensiones tangenciales y de compresión (Fig. 4.7 con  $W/a = \infty$ ), en el que existe deslizamiento con rozamiento entre caras de grieta con un coeficiente de fricción  $\mu$ .

##### 4.4.1.1. Solución analítica del problema

La solución analítica de este problema para  $K_{II}$  se puede encontrar en (NEMAT-NASSER Y HORII, 1982; DOROGOY Y BANKS-SILLS, 2004) y viene dada por la Ec. (4.19):

$$K_{II,ex} = \sqrt{\pi a} (\tau - \mu \sigma) \quad (4.19)$$

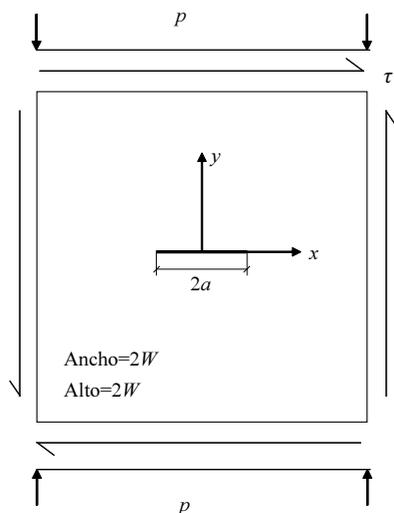


FIGURA 4.7: Grieta sometida a tensiones tangenciales y de compresión.

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre caras de grieta y  $\tau$ ,  $p \equiv \sigma$  son las tensiones aplicadas remotamente. Como se verá más adelante, resulta de interés demostrar esta solución exacta de la forma siguiente:

Se puede aplicar el principio de superposición para las configuraciones de la Fig. 4.8.

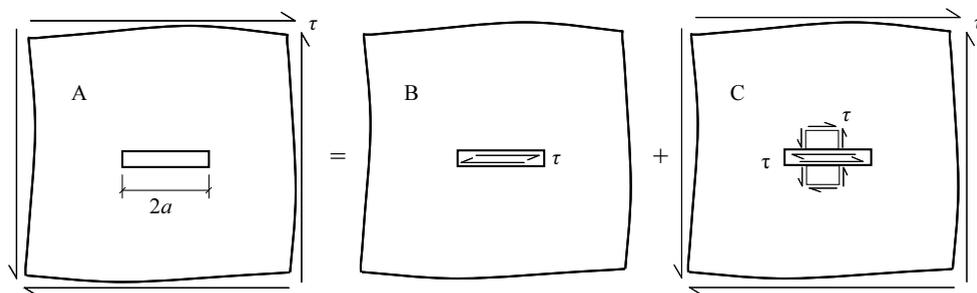


FIGURA 4.8: Principio de superposición,  $K_{II,A} = K_{II,B} + K_{II,C}$ .

Notar que todas las placas de la Fig. 4.8 son infinitamente grandes. Nótese también que en el caso C, la distribución de  $\tau_{xy}$  es uniforme en toda la placa e igual a  $\tau$ .

Dado que la configuración de A es igual a B+C, se cumple por el principio de superposición que:

$$K_{II,A} = K_{II,B} + K_{II,C} \quad (4.20)$$

Como  $K_{II,C} = 0$ , por ser uniforme la distribución de  $\tau$ , por tanto:

$$K_{II,A} = K_{II,B} \quad (4.21)$$

y como

$$K_{II,A} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (4.22)$$

entonces

$$K_{II,B} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (4.23)$$

Para un problema con contacto con fricción en caras de grieta, se puede aplicar el principio de superposición para las configuraciones de la Fig. 4.9.

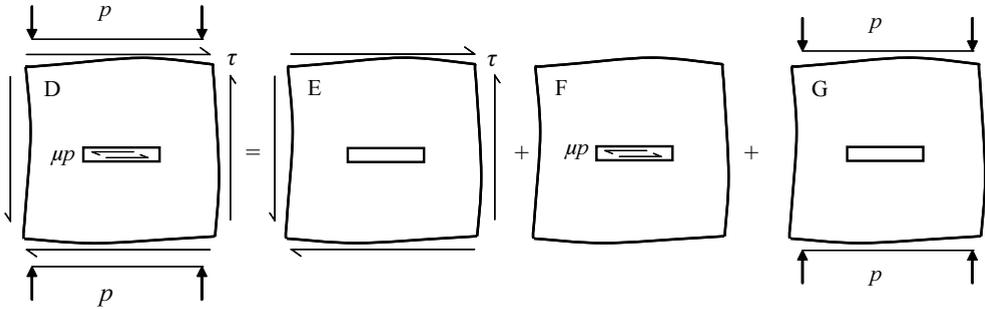


FIGURA 4.9: Principio de superposición para un problema con contacto con fricción en caras de grieta,  $K_{II,D} = K_{II,E} + K_{II,F} + K_{II,G}$ .

Dado que la configuración de D es igual a E+F+G, se cumple por el principio de superposición que:

$$K_{II,D} = K_{II,E} + K_{II,F} + K_{II,G} \quad (4.24)$$

Nótese que  $K_{II,G} = 0$ , por ser una configuración uniforme con grieta cerrada, y por tanto, no produce  $K_I$  ni  $K_{II}$ . Por otro lado  $K_{II,E} = \tau\sqrt{\pi a}$  y  $K_{II,F} = -\mu p\sqrt{\pi a}$ . Así:

$$K_{II,D} = \tau\sqrt{\pi a} - \mu p\sqrt{\pi a} = (\tau - \mu p)\sqrt{\pi a} \quad (4.25)$$

#### 4.4.1.2. Solución numérica del problema con X-FEM

El valor de  $K_{II}$  se ha calculado utilizando la implementación del contacto en caras de grieta en X-FEM. Dado que el extremo de grieta permanece cerrado,  $K_I = 0$ , el valor de  $K_{II}$  se puede calcular a partir de la integral  $J$  aplicando la Ec. (2.34):

$$K_{II,ef} = \sqrt{J \cdot E'} \quad (4.26)$$

donde  $J$  calculada mediante la Ec. (4.2).

Para obtener la solución numérica del problema se ha tomado  $a = 1$ ,  $W/a = 10$ ,  $E = 1$  unidades de presión y  $\nu = 0.333$ . El tamaño mínimo de elemento es  $h_e/a = 0.23$ , y las tensiones aplicadas  $\sigma = 5$  (compresión) y  $\tau = 5$  unidades de presión.

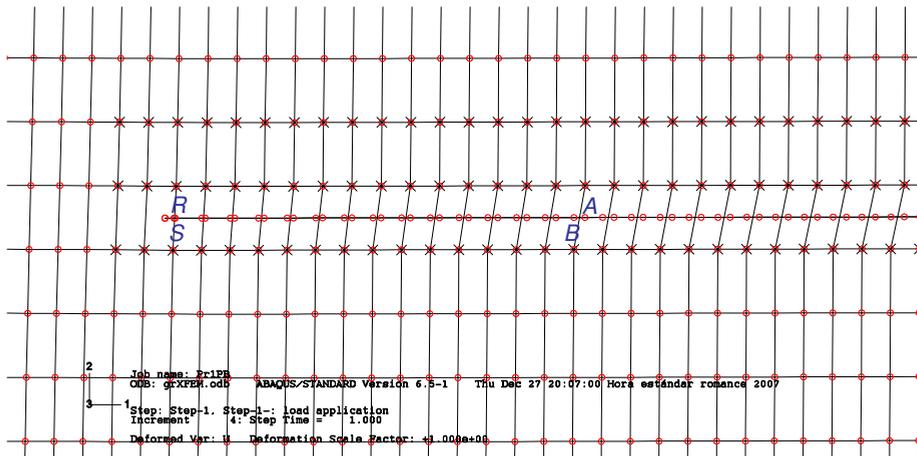


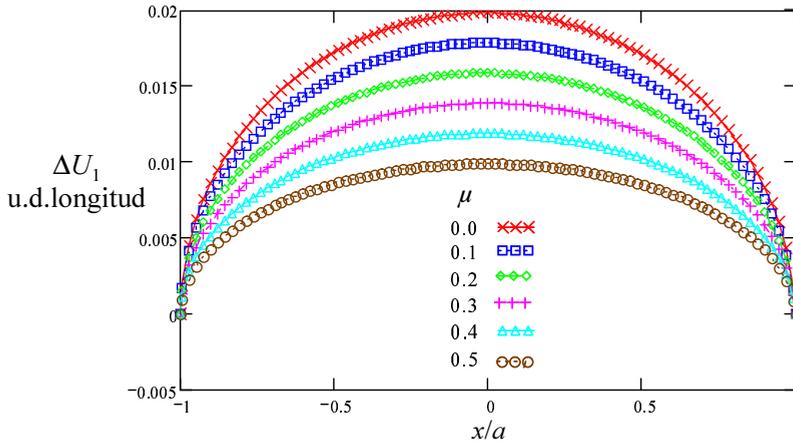
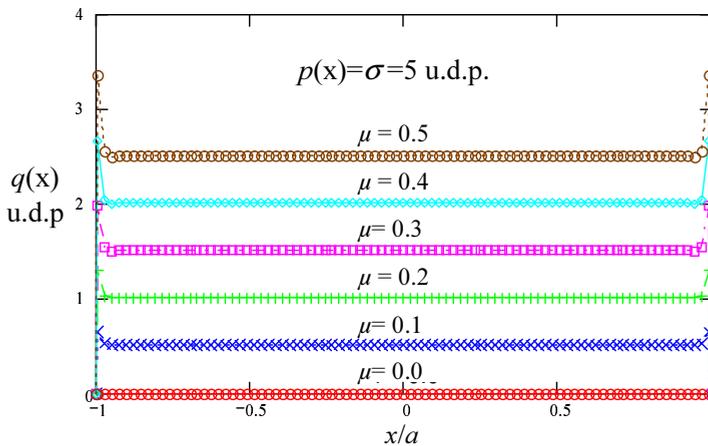
FIGURA 4.10: Malla con XFEM, mostrando el extremo izquierdo de grieta.

La Fig. 4.10 muestra la deformada en el entorno del extremo izquierdo de grieta, donde se aprecia el desplazamiento relativo entre los nodos  $A$  y  $B$  (véase Fig. 4.6). Conviene aclarar que la grieta pasa por la mitad de los elementos.

El problema se ha resuelto tomando como valores del coeficiente de fricción  $\mu = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  y  $0.5$ . La Fig. 4.11 se presenta el efecto del coeficiente de fricción  $\mu$  en el desplazamiento relativo tangencial a lo largo de la grieta, donde puede observarse, como es lógico, la disminución de  $\Delta U_1$  al aumentar el coeficiente de fricción  $\mu$ .

La Fig. 4.12 muestra como aumentan las tensiones tangenciales en caras de grieta al aumentar  $\mu$ . En este problema se observa un valor constante de las tensiones de tracción  $q(x) \equiv \sigma_{12}(x)$  a lo largo de las caras de grieta dado que  $p(x)$  es constante y se cumple que  $q(x) = \mu p(x)$  al estar deslizando todos los puntos de la grieta (como se muestra en la Fig. 4.11) (KIBEY ET AL., 2004). Se observa que la solución de  $q(x)$  es prácticamente constante, como es de esperar, aunque en las cercanías de los extremos de grieta  $x = \pm a$ , se aprecian oscilaciones debidos a las aproximaciones introducidas por la formulación de contacto de restricciones puntuales.

Se ha calculado  $K_{II}$  para los diferentes valores del coeficiente de fricción, a partir de los resultados mostrados en las Figs. 4.11 y 4.12, y utilizando las Ecs. (4.2) y (4.26). Para la función  $q$ , se ha tomado una función plateau con un radio  $r_q/a = 0.5$ . El radio  $r_q$  define los nodos que toman valor  $q = 1$  (nodos interiores a la circunferencia de

FIGURA 4.11: *Desplazamiento relativo tangencial.*FIGURA 4.12: *Distribución de las tensiones tangenciales.*

radio  $r_q$ ) y los nodos que toman valor  $q = 0$  (nodos exteriores a la circunferencia de radio  $r_q$ ). En la Fig. 4.13 se representan los valores del  $K_{II}$  en función del coeficiente de fricción  $\mu$ .

En este caso, los valores de  $K_{II}$  presentados son adimensionales, que se obtienen de dividir los valores por el valor de  $K_{II}$  cuando  $\mu$  es igual a cero. Puede apreciarse que los valores obtenidos por la implementación del X-FEM y la integral  $J$  sin considerar el efecto del contacto en caras de grieta, Ec. (2.39), introducen un error considerable, mientras que los valores obtenidos a partir de la integral  $J$  considerando el efecto del contacto en caras de grieta, e incluyendo el cálculo correcto a través de la integral  $J_p$ , Ec. (4.2), coinciden prácticamente con los valores exactos, Ec. (4.19). Por tanto, se puede concluir que la formulación planteada a través de restricciones puntuales (RP)

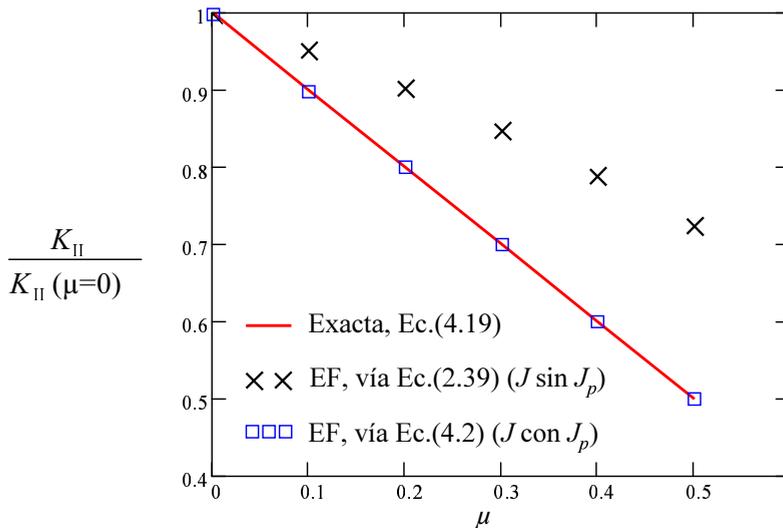


FIGURA 4.13: Problema de referencia. Relación FIT vs.  $\mu$ .

con elementos T2D2 permite aproximar suficientemente el modelado del contacto de caras de grieta con rozamiento y calcular el  $K_{II}$  existente mediante la implementación de X-FEM en ABAQUS.

## 4.5. Implementación X-FEM con contacto en caras de grieta utilizando planteamiento tipo mortario

En los métodos de restricciones puntuales, cuando se utilizan elementos cuyas funciones de interpolación incluyen términos no lineales (p.ej. los cuadriláteros de 4 nodos empleados en el apartado anterior), el uso de estas restricciones no define correctamente el contacto en el interior de los mismos, donde las funciones de interpolación no lineales implican, en general, interpenetración entre caras de grieta. De igual modo, en elementos de extremo de grieta, las funciones no lineales de enriquecimiento ocasionan interpenetración entre sus caras.

El planteamiento tipo mortario consiste en utilizar una formulación integral para establecer el contacto entre los segmentos de caras de grieta dentro de cada elemento. Esta formulación segmento-segmento, basada en el método mortario, exige el cumplimiento de las condiciones de restricción de forma débil, considerando el cumplimiento de las condiciones de contacto a lo largo del segmento de caras de grieta. En KIM ET AL. (2007), se puede encontrar una aplicación del método mortario en el contexto de X-FEM para el estudio de contacto de superficies en general, y en particular para la simulación de procesos de mecanizado por arranque de viruta. Para ello, en KIM ET AL. (2007) se define un mallado independiente de la superficie intermedia de contacto

y se utiliza el método de penalización para resolver el problema.

En TUR (2008) se hace un estudio general del método mortar para el análisis del problema del contacto mediante el MEF. GINER ET AL. (2009b) han implementado el método mortar en X-FEM, para modelar en contacto en caras de grieta teniendo en cuenta los distintos tipos de enriquecimiento presentes en X-FEM (enriquecimiento Heaviside y enriquecimiento de extremo de grieta). Además, han estudiado las condiciones de adhesión y deslizamiento con fricción en caras de grieta.

Con la interpolación del campo de desplazamientos, Ec. (2.9), en función de los valores nodales y de los grados de libertad adicionales para definir el campo singular en el frente de grieta, se pueden evaluar los términos correspondientes al trabajo virtual de las fuerzas externas e internas, que se expresan en forma matricial del siguiente modo:

$$\delta W^{int}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \delta W^{ext}(\delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (4.27)$$

donde  $\mathbf{u}$  debe ser interpretado como el vector que contiene tanto los grados de libertad standard como los de enriquecimiento ( $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ ). El trabajo virtual de las fuerzas de contacto y las ecuaciones de restricción dependen de la interpolación de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_N$  y  $\lambda_T$ . La interpolación del campo de multiplicadores de Lagrange (en dirección normal y tangencial) se define únicamente en función de los valores en los puntos de corte de la grieta con los lados de los elementos. Esta interpolación se puede expresar, en general, del siguiente modo:

$$\lambda_N^h = \sum_{m \in \mathcal{T}} M_m(\mathbf{x}) \lambda_{Nm} \quad (4.28)$$

donde el conjunto  $\mathcal{T}$  es el conjunto de puntos de intersección y  $M_m(\mathbf{x})$  corresponde a la función de interpolación del multiplicador  $\lambda_{Nm}$  ambos asociados con un punto de intersección genérico  $m$ . Considerando la utilización de elementos cuadriláteros de cuatro nodos en la resolución del problema, la función de interpolación  $M_m(\mathbf{x})$  es lineal en todos los segmentos de la grieta, excepto en el segmento que une el último punto de intersección con el extremo de grieta. En este último segmento,  $M_m(\mathbf{x})$  se debe tomar constante para que la interpolación pueda reproducir estados de presión de contacto uniforme. La distribución de las funciones  $M_m(\mathbf{x})$  se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.14, donde los triángulos señalan los puntos de corte de la grieta con los lados de elementos y el hexágono indica el extremo de la grieta. Las variaciones de los multiplicadores  $\delta \lambda_N, \delta \lambda_T$  se interpolan del mismo modo.

La definición del campo de desplazamientos y multiplicadores permite evaluar los términos correspondientes al trabajo virtual de las fuerzas de contacto y rozamiento, Ecs. (4.11) y (4.13), y las ecuaciones de restricción de contacto, Ec. (4.12), y de adhesión, Ec. (4.15). Las integrales que aparecen en estas ecuaciones deben ser evaluadas a lo largo de los segmentos de grieta. Tras la discretización del campo de desplazamientos mediante X-FEM, Ec. (2.9), y del campo de multiplicadores de Lagrange

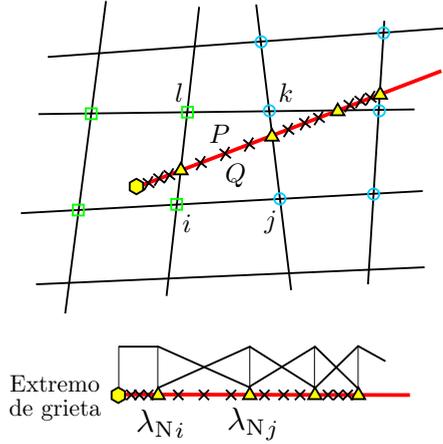


FIGURA 4.14: Intersección de la malla con la grieta e interpolación de los multiplicadores.

mediante la Ec. (4.28), los términos de las Ecs. (4.11) y (4.13) se pueden expresar matricialmente como:

$$\begin{aligned}\delta W^c(\delta \mathbf{u}) &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}_N^T \lambda_N \\ \delta W^f(\delta \mathbf{u}) &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}_T^T \lambda_T\end{aligned}\quad (4.29)$$

y para las ecuaciones de restricción (4.12) y (4.15):

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_c^{(1)}} g_N \delta \lambda_N d\Gamma &= \delta \lambda_N^T \mathbf{C}_N \mathbf{u} \\ \int_{\Gamma_{st}^{(1)}} g_T \delta \lambda_T d\Gamma &= \delta \lambda_T^T \mathbf{C}_T \mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.30)$$

Las matrices  $\mathbf{C}_N$  y  $\mathbf{C}_T$  provienen de realizar las integrales en Ec. (4.30) a nivel de elemento (y su posterior ensamblado) y, como se detallará en el apartado 4.5.1, contienen integrales de productos de las funciones de forma  $N_i(\mathbf{x})$ , funciones de enriquecimiento  $H(\mathbf{x})$  o  $F_l(\mathbf{x})$  y funciones de interpolación del multiplicador  $M_m(\mathbf{x})$ . Si se suponen condiciones de contacto de adhesión en las caras de la grieta, la parte del sistema de ecuaciones global que se obtiene tras el ensamblado es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_N^T & \mathbf{C}_T^T \\ \mathbf{C}_N & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda_N \\ \lambda_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\quad (4.31)$$

En la Ec. (4.31), la última fila corresponde a condiciones de adhesión. En el caso de puntos en condiciones de deslizamiento, lo único que cambia es esta última fila, ya que en su lugar se define el valor del multiplicador de Lagrange en dirección tangencial en función del multiplicador en dirección normal como:

$$\lambda_{T_k} = -\text{signo}(g_{T_k}) \mu |\lambda_{N_k}| \tag{4.32}$$

En esta Tesis, se va a aplicar esta formulación tipo mortar para modelar el contacto de caras de grieta, según la metodología propuesta por GINER ET AL. (2009b). En este caso, el calculo numérico de las integrales de las Ecs. (4.29) y (4.30) se lleva a cabo mediante una integración de Gauss (los puntos de integración están marcados con una cruz en la Fig. 4.14). Esta integración, alternativamente, se podría efectuar de forma analítica (exacta).

### 4.5.1. Ecuaciones de restricción para contacto con X-FEM

La Fig. 4.15 muestra la malla utilizada para explicar el desarrollo de las ecuaciones. Supuesto el contacto en condiciones de adhesión, es necesario desarrollar las integrales de las Ecs. (4.12) y (4.15) a fin de obtener los términos que, a nivel de elemento, contribuyen a las matrices  $C_N$  y  $C_T$ .

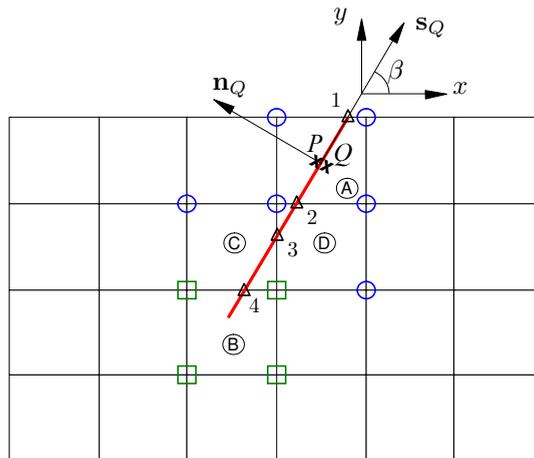


FIGURA 4.15: Malla con distintos tipos de elementos enriquecidos para el planteamiento de las restricciones.

De acuerdo con la Fig. 4.15, la restricción de contacto normal en condiciones de adhesión implica que el “gap” normal entre dos puntos homólogos,  $P$  y  $Q$ , situados en las caras de grieta sea cero. Así, de la Ec. (4.12) se tiene:

$$\int_{\Gamma_c^{(1)}} (\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q \delta \lambda_N d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \lambda_N \tag{4.33}$$

donde  $\mathbf{u}_P$  y  $\mathbf{u}_Q$  están expresados en componentes cartesianas  $\{u_x \ u_y\}^T$ , siendo las componentes del vector unitario normal en  $Q$   $\mathbf{n}_Q = \{-\sin\beta \ \cos\beta\}^T$ . La restricción análoga en dirección tangencial en condiciones de adhesión, de acuerdo con la Ec. (4.15) será:

$$\int_{\Gamma_{st}^{(1)}} (\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{s}_Q \delta\lambda_T \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta\lambda_T \quad (4.34)$$

donde  $\mathbf{s}_Q = \{\cos\beta \ \sin\beta\}^T$ .

#### 4.5.1.1. Elementos con cuatro nodos Heaviside

El elemento A de la Fig. 4.15 es intersectado por la grieta, y sus cuatro nodos son enriquecidos con grados de libertad tipo Heaviside. Se observa que hay dos puntos de intersección con los lados, puntos 1 y 2. El segmento de grieta contenido en el elemento se denotará como  $\Gamma^e$ . Tras sustituir en la Ec. (4.33), la variación virtual del multiplicador por la correspondiente variación interpolada según la Ec. (4.28) a partir de los valores en las intersecciones 1 y 2 resulta:

$$\int_{\Gamma^e} (\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q (M_1(\mathbf{x})\delta\lambda_{N_1} + M_2(\mathbf{x})\delta\lambda_{N_2}) \, d\Gamma = 0, \quad (4.35)$$

es decir, que en cada elemento de este tipo aparecen contribuciones a dos ecuaciones de restricción, una para cada multiplicador  $\lambda_{N_1}$  y  $\lambda_{N_2}$ , ya que estos son incógnitas independientes:

$$\left[ \int_{\Gamma^e} (\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q M_1(\mathbf{x}) \, d\Gamma \right] \delta\lambda_{N_1} = 0 \quad (4.36a)$$

$$\left[ \int_{\Gamma^e} (\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q M_2(\mathbf{x}) \, d\Gamma \right] \delta\lambda_{N_2} = 0 \quad (4.36b)$$

En condiciones de adhesión, se plantean, de forma análoga, contribuciones a otras dos ecuaciones de restricción en dirección tangencial a partir de la Ec. (4.34). Dado que las Ecs. (4.36) se tienen que cumplir para cualquier variación virtual de los multiplicadores  $\lambda_{N_i}$  asociados a los puntos de intersección, las ecuaciones de restricción las constituirán las integrales entre corchetes en la Ec. (4.36) igualadas a cero. Tras sustituir los desplazamientos por su interpolación de X-FEM, Ec. (2.9), (la aproximación para el elemento tipo A de la Fig. 4.15 sólo contiene grados de libertad standard y Heaviside), el término  $(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q$  queda desarrollado como:

$$(u_{yP} - u_{yQ}) \cos \beta - (u_{xP} - u_{xQ}) \sin \beta = \tag{4.37}$$

$$\left[ -2 \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}_P) a_{y,i} \right] \cos \beta + \left[ 2 \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}_P) a_{x,i} \right] \sin \beta$$

donde al evaluar las diferencias  $(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q)$  los términos continuos de la aproximación de la Ec. (2.9) quedan cancelados. Los gdl Heaviside se han definido como  $\mathbf{a}_i = \{a_{x,i} \ a_{y,i}\}^T$ . El signo de la función Heaviside se ha definido de tal forma que  $H(\mathbf{x}_P) = -1$  y  $H(\mathbf{x}_Q) = +1$ . Hay que destacar que para evaluar las funciones de forma se tiene  $\mathbf{x}_P \equiv \mathbf{x}_Q$ , ya que son continuas. El desarrollo de la Ec. (4.37) se sustituye en las dos ecuaciones de restricción, Ec. (4.36), y, análogamente, otras dos ecuaciones quedan planteadas en dirección tangencial a partir de la Ec. (4.34). Así, en total, se deben plantear cuatro ecuaciones de restricción asociadas a los multiplicadores  $\lambda_{N1}$ ,  $\lambda_{N2}$ ,  $\lambda_{T1}$  y  $\lambda_{T2}$ .

Las integrales de la Ec. (4.36) se pueden calcular numéricamente en un sistema local 1D a lo largo del segmento  $\Gamma^e$ , que se supone rectilíneo. Esto exige evaluar las funciones sólo en los puntos de integración, como se ha comentado anteriormente. Las funciones de interpolación del multiplicador utilizadas son lineales, tal y como se muestra en la Ec. (4.38).

$$M_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad ; \quad M_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \tag{4.38}$$

#### 4.5.1.2. Elemento de extremo de grieta

Los cuatro nodos del elemento B de la Fig. 4.15 están enriquecidos con grados de libertad tipo extremo de grieta  $\mathbf{b}_{il}$  asociados a las funciones de extremo de grieta  $F_l$ . En este caso, sólo hay un punto de intersección de la grieta con los lados del elemento (punto 4 en la Fig. 4.15), por lo que la interpolación de los multiplicadores en el interior del elemento sólo se asocia con un multiplicador en dirección normal  $\lambda_{N4}$  y otro en dirección tangencial  $\lambda_{T4}$ . Es por ello que la función de interpolación del multiplicador  $M_4(\mathbf{x})$  se debe tomar constante en este elemento, para que la interpolación pueda reproducir estados de presión de contacto uniforme. Así, La restricción en dirección normal será:

$$\left[ \int_{\Gamma^e} (\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q M_4(\mathbf{a}) d\Gamma \right] \delta \lambda_{N4} = 0 \tag{4.39}$$

La restricción en la dirección tangencial se obtiene de forma análoga.

La aproximación de X-FEM, Ec. (2.9), para el elemento tipo B de la Fig. 4.15 sólo contiene grados de libertad standard y de extremo de grieta, por lo que el “gap” normal  $(\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q) \cdot \mathbf{n}_Q$  se puede escribir como:

$$(u_{yP} - u_{yQ}) \cos \beta - (u_{xP} - u_{xQ}) \sin \beta = \quad (4.40)$$

$$2\sqrt{r_P} \left\{ \left[ -\sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}_P) b_{y,i1} \right] \cos \beta + \left[ \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}_P) b_{x,i1} \right] \sin \beta \right\}$$

donde  $\sqrt{r_P} \equiv \sqrt{r_Q}$  es la distancia del punto en las caras de grieta al extremo de grieta. De nuevo, al evaluar las diferencias ( $\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_Q$ ) los términos continuos de la aproximación de la Ec. (2.9) quedan cancelados. Hay que notar que la única función de enriquecimiento discontinua es  $F_1(r, \theta)$ , Ec. (2.5). Los grados de libertad asociados a esta función para cada nodo  $i$  son  $\mathbf{b}_{i1} = \{b_{x,i1} \ b_{y,i1}\}^T$ .

#### 4.5.1.3. Elementos con nodos Heaviside y de extremo de grieta

Los elementos C y D de la Fig. 4.15 están enriquecidos tanto con grados de libertad tipo Heaviside como con grados de libertad de extremo de grieta (2 nodos en el elemento C y 1 en el D). Al contener dos puntos de intersección de grieta-elemento, el desarrollo de las ecuaciones de restricción es análogo al mostrado en el apartado 4.5.1.1.

En el caso del elemento C, la expresión del “gap” normal en función de los grados de libertad de la interpolación de X-FEM para puntos del segmento  $\Gamma^e$  es:

$$(u_{yP} - u_{yQ}) \cos \beta - (u_{xP} - u_{xQ}) \sin \beta = \quad (4.41)$$

$$\left[ -2\sqrt{r_P} \sum_{i=1}^2 N_i(\mathbf{x}_P) b_{y,i1} - 2 \sum_{i=3}^4 N_i(\mathbf{x}_P) a_{y,i} \right] \cos \beta +$$

$$\left[ 2\sqrt{r_P} \sum_{i=1}^2 N_i(\mathbf{x}_P) b_{x,i1} + 2 \sum_{i=3}^4 N_i(\mathbf{x}_P) a_{x,i} \right] \sin \beta$$

donde se ha supuesto que la numeración local de los nodos en el elemento C es tal que los nodos 1 y 2 son enriquecidos con funciones de extremo de grieta y que los nodos 3 y 4 son nodos Heaviside. Es fácil generalizar esta relación para el “gap” normal en el caso del elemento D.

## 4.6. Ejemplos numéricos

En los estudios numéricos realizados en esta Tesis, se ha comparado la solución obtenida a través del método mortar con la solución dada al utilizar restricciones puntuales con los elementos tipo barra T2D2. Hay que aclarar que en el planteamiento mortar, el multiplicador interpolado representa la presión necesaria para satisfacer la restricción a lo largo del segmento, mientras que en el caso de T2D2, los multiplicadores representan las fuerzas puntuales en cada punto de intersección grieta-elemento.

GINER ET AL. (2009b) estudiaron el efecto de las integraciones numéricas y analíticas en las restricciones del contacto, apartado 4.5.1, concluyendo que al utilizar una integración cuasi-polar en el elemento extremo de grieta con 15x15 puntos de Gauss se obtienen los mejores resultados (menor error). Por tanto, en esta Tesis se va a aplicar la integración cuasi-polar en el elemento extremo de grieta con 15x15 puntos de Gauss.

Con el fin de analizar la convergencia en la estimación de  $K_{II}$  en problemas con contacto de caras de grieta, resueltos mediante X-FEM y los planteamientos de RP y mortar, se ha analizado el siguiente ejemplo numérico. El ejemplo estudiado consiste en una placa infinita sometida a unas tensiones remotas  $\sigma$  y  $\tau$ , tal y como se muestra en la Fig. 4.16.

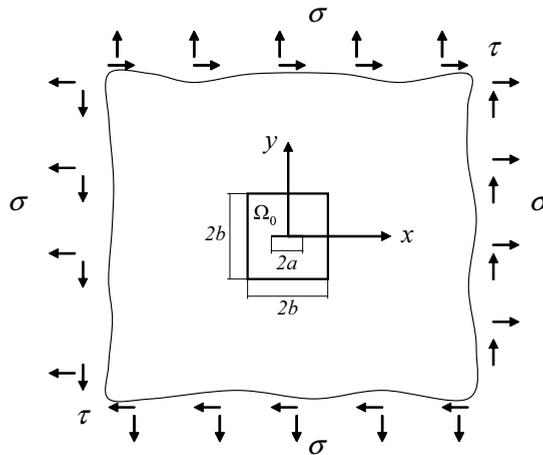


FIGURA 4.16: Placa infinita sometida a tensiones uniformes  $\sigma$  (biaxiales) y  $\tau$  en el infinito con grieta de longitud  $2a$ . Porción finita de dominio  $\Omega_0$  modelable mediante EF.

Como solución analítica se utiliza la solución de Westergaard sin fricción y con fricción.

#### 4.6.1. Campo analítico de tensiones y desplazamientos. Solución de Westergaard

Tradicionalmente, la expresión explícita de los campos analíticos asociados a la solución de Westergaard en puntos alejados del extremo de grieta no ha presentado una especial utilidad. De hecho, no ha sido posible encontrar una referencia que incluya explícitamente las funciones de punto  $(x, y)$  que definen los campos analíticos de tensiones y desplazamientos para este problema. Debido a ello, en GINER (2001) fue necesario deducir dichos campos. En este apartado se representan las expresiones explícitas obtenidas.

En la literatura (BROEK, 1986; TADA ET AL., 1985; GDOUTOS, 1993, etc.) se des-

cribe la aplicación del método semiinverso de Westergaard a la solución del problema de placa infinita cargada biaxialmente representado en la Fig. 4.16. Habitualmente, este planteamiento únicamente se utiliza en estas referencias para deducir las clásicas ecuaciones del campo singular alrededor del extremo de grieta en MFEL, Ecs. (2.1) y (2.2), expresadas en función de un sistema polar de coordenadas cuyo origen coincide con el extremo de grieta  $(x, y) = (a, 0)$  y tras realizar una expansión en serie.

Este método está relacionado con la función de tensión de Airy para problemas elásticos. El planteamiento de Westergaard utiliza funciones analíticas de variable compleja  $Z(z)$ , con  $z = x + iy$  y es aplicable a problemas de fractura donde la grieta de longitud  $2a$  ocupa un segmento rectilíneo del eje  $x$  (TADA ET AL., 1985). Tal y como se ha mencionado, a continuación se utiliza el planteamiento de Westergaard con el fin de obtener expresiones explícitas de los campos de tensiones y desplazamientos en función de  $x, y$  según el sistema de coordenadas de la Fig. 4.16.

#### 4.6.1.1. Solución para el modo simétrico (modo I)

La función de Westergaard para el problema biaxial cargado en  $x$  e  $y$  con una tensión uniforme en el infinito  $\sigma$  y con grieta situada en el segmento  $-a \leq x \leq a$  del eje  $x$  es:

$$Z_I(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (4.42)$$

Se definen  $Z_I'$  y  $\bar{Z}_I$  como:

$$Z_I'(z) = \frac{dZ_I}{dz} = -\frac{\sigma a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \quad (4.43)$$

$$\bar{Z}_I(z) = \int Z_I dz = \sigma \sqrt{z^2 - a^2} \quad (4.44)$$

Estas relaciones entre las funciones y sus derivadas satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann para funciones analíticas<sup>5</sup>. Se puede demostrar que los campos de tensiones vienen dados por:

$$\sigma_x^I = \text{Re } Z_I - y \text{Im } Z_I' \quad (4.45a)$$

$$\sigma_y^I = \text{Re } Z_I + y \text{Im } Z_I' \quad (4.45b)$$

$$\tau_{xy}^I = -y \text{Re } Z_I' \quad (4.45c)$$

y los campos de desplazamientos  $u^I$  y  $v^I$  por:

$$2Gu^I = \frac{\kappa - 1}{2} \text{Re } \bar{Z}_I - y \text{Im } Z_I \quad (4.46a)$$

$$2Gv^I = \frac{\kappa + 1}{2} \text{Im } \bar{Z}_I - y \text{Re } Z_I \quad (4.46b)$$

<sup>5</sup>Las condiciones de Cauchy-Riemann para una función analítica  $Z = \text{Re } Z + i \text{Im } Z$  establecen que  $\text{Re } Z' = \partial \text{Re } Z / \partial x = \partial \text{Im } Z / \partial y$  y que  $\text{Im } Z' = \partial \text{Im } Z / \partial x = -\partial \text{Re } Z / \partial y$  (MARKUSHÉVICH, 1978).

donde  $G$  es, en este contexto, el módulo de rigidez a cizalladura y  $\kappa$  es la constante de Kolosov, definida en la Ec. (2.3).

Las Ecs. (4.45) y (4.46) son únicamente válidas para el caso biaxial en el que la tensión aplicada en  $x$  e  $y$  es la misma. En cualquier otro caso, es necesario la inclusión de ciertos términos constantes. Un análisis detallado del caso más general se puede encontrar en EFTIS ET AL. (1977).

Se puede comprobar que las Ecs. (4.45) satisfacen las preceptivas condiciones de contorno:

$$\sigma_x^I = \sigma_y^I = \sigma \ ; \ \tau_{xy}^I = 0 \quad \text{cuando} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (4.47a)$$

$$\sigma_y^I = 0 \ ; \ \tau_{xy}^I = 0 \quad \text{cuando} \quad y = 0, \ -a \leq x \leq a \quad (4.47b)$$

Con el fin de obtener expresiones explícitas para los campos de tensiones y desplazamientos en función de  $x$  e  $y$  se han utilizado las definiciones siguientes:

$$t = z^2 - a^2 = (x + iy)^2 - a^2 = (x^2 - y^2 - a^2) + i(2xy) = m + in \quad (4.48)$$

donde  $m$  y  $n$  se ha definido como:

$$m = \operatorname{Re} t = \operatorname{Re}(z^2 - a^2) = x^2 - y^2 - a^2 \quad (4.49)$$

$$n = \operatorname{Im} t = \operatorname{Im}(z^2 - a^2) = 2xy \quad (4.50)$$

Hay que notar que  $m, n$  son funciones de las coordenadas de punto  $x, y$ . El conjugado de  $t$  se denotará por<sup>6</sup>  $\bar{t} = m - in$ , y el módulo de  $t$  y de  $\bar{t}$  será:

$$|t| = |\bar{t}| = \sqrt{m^2 + n^2} \quad (4.51)$$

Utilizando esta notación,  $Z_I$ , se puede escribir como:

$$Z_I = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{\sigma z}{\sqrt{t}} = \frac{\sigma}{|t|} (x + iy) \sqrt{\bar{t}} \quad (4.52)$$

La raíz cuadrada de  $\bar{t}$  tiene dos soluciones (MARKUSHÉVICH, 1978):

$$\sqrt{\bar{t}} = \sqrt{m - in} = \begin{cases} \sqrt{|\bar{t}|} \left[ \cos \frac{\phi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right] \\ \sqrt{|\bar{t}|} \left[ \cos \frac{\phi+2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\phi+2\pi}{2} \right] \end{cases} \quad (4.53)$$

donde

---

<sup>6</sup>No debe confundirse con la notación  $\bar{Z}_I$  empleada anteriormente, que indica la función primitiva de  $Z_I$ .

$$\phi = \arg \bar{t} = \arg(m - in) \quad \text{con } \phi \in [-\pi, \pi] \quad (4.54)$$

Diversas comprobaciones realizadas con las expresiones siguientes demuestran que la única solución de  $\sqrt{\bar{t}}$  que tiene sentido físico en el semiplano derecho,  $x \geq 0$ , es la primera de la Ec. (4.53), denominada valor principal de la raíz. Esta solución es la única que satisface las condiciones de continuidad de las tensiones y que converge al estado biaxial puro en la lejanía de grieta. Para el semiplano  $x < 0$  es válida con  $(\phi + 2\pi)$ . Los ejemplos numéricos incluidos a continuación tomarán porciones del dominio  $\Omega_0$  en el semiplano  $x \geq 0$ , por lo que sustituyendo la solución correspondiente en la Ec. (4.52) se tiene:

$$\text{Re } Z_I = \frac{\sigma}{\sqrt{\bar{t}}} \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.55a)$$

$$\text{Im } Z_I = \frac{\sigma}{\sqrt{\bar{t}}} \left( x \sin \frac{\phi}{2} + y \cos \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.55b)$$

Un desarrollo similar para  $Z'_I$  da lugar a las siguientes expresiones para los campos de tensiones como funciones reales de  $x, y$  (recuérdese que  $m, n, |t|$  y  $\phi$  son funciones de  $x, y$ ):

$$\sigma_x^I = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.56a)$$

$$\sigma_y^I = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.56b)$$

$$\tau_{xy}^I = y \frac{a^2 \sigma}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.56c)$$

Análogamente, calculando la parte real e imaginaria de  $\bar{Z}_I$ , los campos de desplazamientos exactos se pueden escribir como:

$$u^I = \frac{\kappa - 1}{4G} \sigma \sqrt{|t|} \cos \frac{\tilde{\phi}}{2} - y \frac{1}{2G} \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left( x \sin \frac{\phi}{2} + y \cos \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.57a)$$

$$v^I = \frac{\kappa + 1}{4G} \sigma \sqrt{|t|} \sin \frac{\tilde{\phi}}{2} - y \frac{1}{2G} \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.57b)$$

donde  $\tilde{\phi}$  se define como:

$$\tilde{\phi} = \arg t = \arg(m + in) \quad \text{con } \tilde{\phi} \in [-\pi, \pi] \quad (4.58)$$

Con el fin de establecer restricciones de desplazamientos en los modelos de EF resulta de interés conocer los desplazamientos exactos  $u^I, v^I$  en los ejes  $x, y$ . Es sencillo demostrar que:

$$u^I = \frac{\kappa - 1}{4G} \sigma \sqrt{x^2 - a^2} \quad ; \quad v^I = 0 \quad \text{si } |x| \geq a, y = 0 \quad (4.59a)$$

$$u^I = 0 \quad ; \quad v^I = \frac{\kappa + 1}{4G} \sigma \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{si } |x| < a, y = 0 \quad (4.59b)$$

$$u^I = 0 \quad ; \quad v^I = \frac{\kappa + 1}{4G} \sigma \sqrt{y^2 + a^2} - \frac{\sigma}{2G} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} \quad \text{si } x = 0, \forall y \quad (4.59c)$$

Por último, debe recordarse que el FIT para este problema en modo I es:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.60)$$

Por lo que en todas las ecuaciones anteriores  $\sigma$  puede ser sustituido por  $K_I/\sqrt{\pi a}$ .

#### 4.6.1.2. Solución para el modo antisimétrico (modo II) sin fricción en caras de grieta

De forma totalmente análoga se puede definir la función de Westergaard para el problema de una placa infinita, con grieta situada en el segmento  $-a \leq x \leq a$  del eje  $x$ , y cargada en el infinito con una tensión tangencial uniforme  $\tau$  (ver Fig. 4.16). Esta función es:

$$Z_{II}(z) = -\frac{i\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (4.61)$$

Los campos de tensiones para este caso vienen dados por:

$$\sigma_x^{II} = 2 \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \quad (4.62a)$$

$$\sigma_y^{II} = y \operatorname{Im} Z'_{II} \quad (4.62b)$$

$$\tau_{xy}^{II} = -\operatorname{Im} Z_{II} - y \operatorname{Re} Z'_{II} \quad (4.62c)$$

y los campos de desplazamientos  $u^{II}$  y  $v^{II}$  por:

$$2Gu^{II} = \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II} \quad (4.63a)$$

$$2Gv^{II} = \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_{II} - y \operatorname{Re} Z_{II} \quad (4.63b)$$

Es sencillo comprobar que las Ecs. (4.62) satisfacen las preceptivas condiciones de contorno:

$$\sigma_x^{\text{II}} = \sigma_y^{\text{II}} = 0 \ ; \ \tau_{xy}^{\text{II}} = \tau \quad \text{cuando} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (4.64a)$$

$$\sigma_y^{\text{II}} = 0 \ ; \ \tau_{xy}^{\text{II}} = 0 \quad \text{cuando} \quad y = 0, \ -a \leq x \leq a \quad (4.64b)$$

GINER (2001) desarrolló las expresiones explícitas para los campos de tensiones y desplazamientos en función de  $x, y$ , asociados al modo II. Con las mismas definiciones y cambios de variable que para el caso de modo I, los campos de tensiones pueden ser expresados como funciones reales de  $x, y$  (recuérdese que  $m, n, |t|$  y  $\phi$  son funciones de  $x, y$ ):

$$\sigma_x^{\text{II}} = \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left[ 2 \left( y \cos \frac{\phi}{2} + x \sin \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.65a)$$

$$\sigma_y^{\text{II}} = y \frac{a^2 \tau}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.65b)$$

$$\tau_{xy}^{\text{II}} = \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.65c)$$

Análogamente, los campos de desplazamientos exactos se pueden escribir como:

$$u^{\text{II}} = \frac{\kappa + 1}{4G} \tau \sqrt{|t|} \sin \frac{\tilde{\phi}}{2} + y \frac{1}{2G} \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.66a)$$

$$v^{\text{II}} = -\frac{\kappa - 1}{4G} \tau \sqrt{|t|} \cos \frac{\tilde{\phi}}{2} - y \frac{1}{2G} \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left( y \cos \frac{\phi}{2} + x \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.66b)$$

En cuanto a los desplazamientos exactos  $u^{\text{II}}, v^{\text{II}}$  a lo largo de los ejes  $x, y$  (útiles a la hora de imponer restricciones a los desplazamientos en los modelos de EF), se tiene:

$$u^{\text{II}} = 0 \ ; \ v^{\text{II}} = -\frac{\kappa - 1}{4G} \tau \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{cuando} \ |x| \geq a, \ y = 0 \quad (4.67a)$$

$$u^{\text{II}} = \frac{\kappa + 1}{4G} \tau \sqrt{a^2 - x^2} \ ; \ v^{\text{II}} = 0 \quad \text{cuando} \ |x| < a, \ y = 0 \quad (4.67b)$$

$$u^{\text{II}} = \frac{\kappa + 1}{4G} \tau \sqrt{y^2 + a^2} + \frac{\tau}{2G} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} \ ; \ v^{\text{II}} = 0 \quad \text{cuando} \ x = 0, \ \forall y \quad (4.67c)$$

Debe recordarse que el FIT para este problema en modo II es:

$$K_{\text{II}} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (4.68)$$

**4.6.1.3. Modificación de la solución de Westergaard en modo II para incluir fricción en caras de grieta**

Se propone en esta Tesis el siguiente planteamiento para obtener la distribución de  $\tau_{xy}$  exacta en el problema de Westergaard con contacto y deslizamiento con fricción en caras de grieta, mediante la aplicación del principio de superposición, como se muestra en la Fig. 4.17.

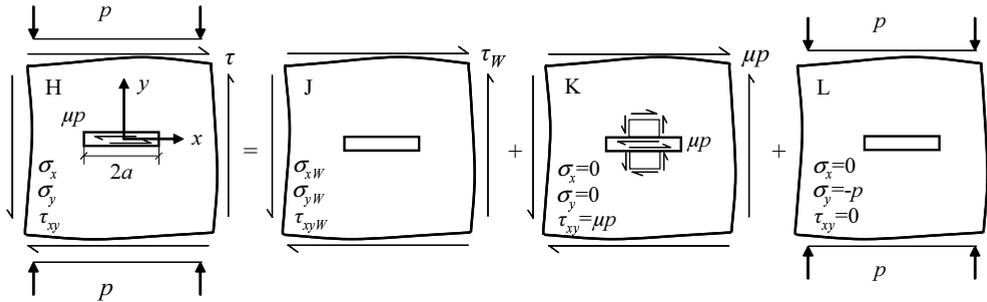


FIGURA 4.17: Principio de superposición para incluir la fricción en la solución de Westergaard.  $K_{II,H} = K_{II,J} + K_{II,K} + K_{II,L}$ .

Nótese que para el caso K, la tensión  $\tau$  es uniforme e igual a  $\mu p$ , por tanto no produce  $K_{II}$ . De igual modo, para el caso L la tensión  $p$  es uniforme de compresión con una grieta cerrada, y por tanto, no produce  $K_I$  ni  $K_{II}$ .

De la simple inspección de las cargas:

$$\tau = \tau_W + \mu p \tag{4.69}$$

$$\tau_W = \tau - \mu p \tag{4.70}$$

Y por superposición se obtiene:

$$K_{II,H} = K_{II,J} + K_{II,K} + K_{II,L} \tag{4.71}$$

Así:

$$(\tau - \mu p)\sqrt{\pi a} = \tau_W\sqrt{\pi a} + 0 + 0 = \tau_W\sqrt{\pi a} \tag{4.72}$$

Por tanto, la tensión  $\tau_W$  de Westergaard que hay que introducir en las ecuaciones es:

$$\tau_W = \tau - \mu p \tag{4.73}$$

Para las ecuaciones de  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  se tendrá:

$$\sigma_x = \sigma_{xW}^{\text{II}} = \frac{\tau_W}{\sqrt{|t|}} \left[ 2 \left( y \cos \frac{\phi}{2} + x \sin \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.74a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yW}^{\text{II}} - p = y \frac{a^2 \tau_W}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) - p \quad (4.74b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xyW}^{\text{II}} + \mu p = \frac{\tau_W}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] + \mu p \quad (4.74c)$$

Estas ecuaciones están deducidas para unos ejes  $(x, y)$  como se muestra en la Fig. 4.17. Si se toman ejes girados en el problema numérico, hay que hacer las correspondientes transformaciones de coordenadas.

#### 4.6.2. Convergencia de $K_{\text{II}}$ para contacto sin fricción

En este apartado se aplica la solución de Westergaard explicada en el apartado 4.6.1.2 combinada con una carga de compresión en dirección horizontal a una placa que contiene una grieta vertical, tal y como se muestra en la Fig. 4.18.

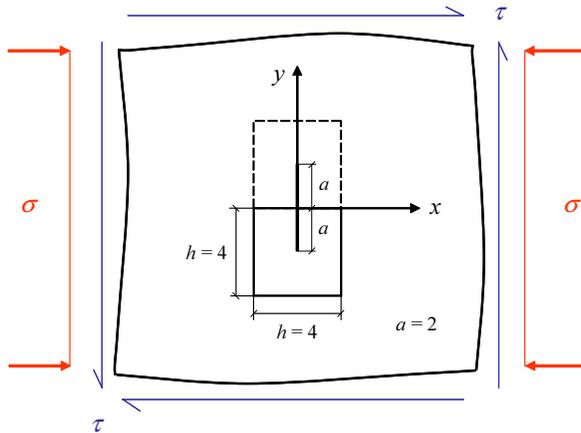


FIGURA 4.18: Placa infinita sometida a tensión de compresión remota uniforme  $\sigma$ , y tensión tangencial remota  $\tau$ . Se indica el subdominio de dimensiones  $4 \times 4$  modelado numéricamente.

La placa está sometida a una carga de compresión uniforme  $\sigma = 1$  [u.d. presión] y una carga tangencial remota uniforme aplicada en el infinito, tal que produce un valor de  $K_{\text{II ex}} = 1$ . Al aplicar la Ec. (4.68) se obtiene un valor de tensión tangencial remota de  $\tau = 0.3989$  [u.d. presión]. Las propiedades del material son:  $E = 10^5$  [u.d. presión],  $\nu=0.3$ . El cálculo se realiza bajo condiciones de deformación plana. El coeficiente de fricción entre las caras de grieta es  $\mu = 0$ .

#### 4.6.2.1. Malla uniforme

Se han utilizado 7 mallas con refinamiento  $h$ -uniforme (véase Fig. 4.19) para calcular el error relativo en función del tamaño de elemento. Además, se comparan los dos enfoques empleados para establecer el contacto entre caras de grieta, mortario y T2D2.

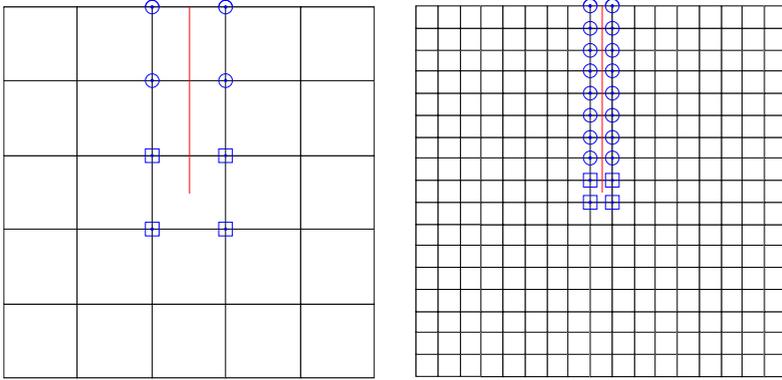


FIGURA 4.19: Primera y tercera malla de una secuencia de 7 mallas con refinamiento  $h$ -uniforme.

En este problema el valor del factor de intensidad de tensiones para el modo I es nulo,  $K_I = 0$ , por lo que se calcula  $K_{II}$  mediante la integral  $J$ .

El error relativo exacto se define por:

$$\eta_{\text{ex}} = \frac{K_{II \text{ ex}} - K_{II \text{ fe}}}{K_{II \text{ ex}}} \quad (4.75)$$

donde  $K_{II \text{ fe}}$  es el valor calculado utilizando la ecuación  $K_{II \text{ fe}} = \sqrt{JE'}$ .

En la Fig. 4.20 se representa el error relativo (en %) para la secuencia de mallas con refinamiento  $h$ -uniforme frente al tamaño de elemento en escalas logarítmicas. Puede observarse que ambos métodos dan prácticamente el mismo error. Se tiene una notable disminución del error al disminuir el tamaño de elemento, desde valores superiores al 6 % para la primera malla, hasta valores próximos al 0.1 % para la última malla.

Se define la velocidad de convergencia de la solución como la variación del error respecto a la variación del tamaño de elemento en escala log-log, es decir, la pendiente de la recta, que viene dada por:

$$v_{(K_{II})} = \left| \frac{\log \eta_{\text{ex}(K_{II})_j} - \log \eta_{\text{ex}(K_{II})_i}}{\log h_j - \log h_i} \right| \quad (4.76)$$

siendo  $i, j$  dos mallas del proceso  $h$ -uniforme.

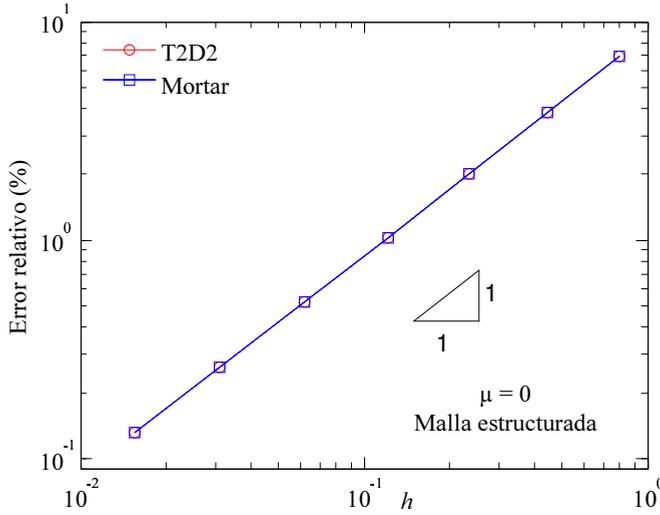


FIGURA 4.20: Error relativo de  $K_{II}$  frente al tamaño de elemento  $h$ . Problema con contacto en caras de grieta sin fricción ( $\mu = 0$ ).

La tendencia de las soluciones muestra que la velocidad de convergencia con respecto al tamaño de elemento es igual a la unidad ( $v_{(K_{II})} = 1$ ). Este valor coincide con el valor teórico esperado para la convergencia en el FIT con elementos lineales. Dado que el problema es singular  $h$ -adaptado uniformemente, el error en norma energética es:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^{\min(p,\lambda)} = Ch^{\lambda=0.5} = Ch^{0.5} \quad (4.77)$$

y el error en el FIT es el mismo que en energía de deformación,  $\|\mathbf{e}_u\|_E \leq C^2h$ , es decir que la velocidad de convergencia es 1 (ver GINER, 2001).

En la Fig. 4.21 se representa la tensión normal al plano de grieta a lo largo de la misma. Como puede observarse, la tensión normal (multiplicador de Lagrange) obtenida mediante el método mortar es exactamente la tensión de compresión aplicada a la placa  $\sigma = 1$ , mientras que la tensión normal (fuerza dividida por el área) para el elemento extremo de grieta, obtenida al aplicar el método T2D2, es mayor que la tensión de compresión aplicada. Esto es debido, como se ha comentado anteriormente, a que en este tipo de elementos las funciones de interpolación incluyen términos no lineales, lo que implica, en general, interpenetración entre caras de grieta. Por tanto, el método mortar permite calcular mucho mejor las tensiones locales a lo largo de la cara de grieta. Este hecho es de vital importancia cuando se analiza el problema con fricción en caras de grieta.

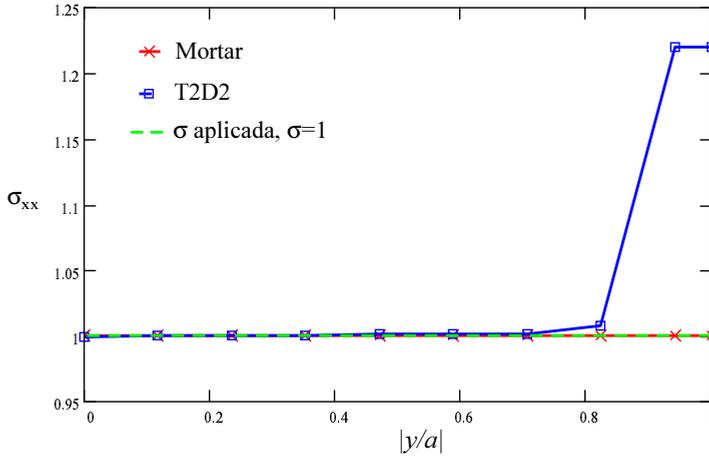


FIGURA 4.21: Tensión normal a la grieta  $\sigma_{xx}$ , a lo largo de la grieta para la malla estructurada N° 3, comparando los dos métodos, mortar y T2D2. Problema con contacto en caras de grieta sin fricción ( $\mu = 0$ )

#### 4.6.2.2. Malla no uniforme

En este caso, se han utilizado 6 mallas no estructuradas para calcular el error relativo en  $K_{II}$  en función del tamaño de elemento, véase Fig. 4.22, y se han comparado los dos enfoques empleados, mortar y T2D2.

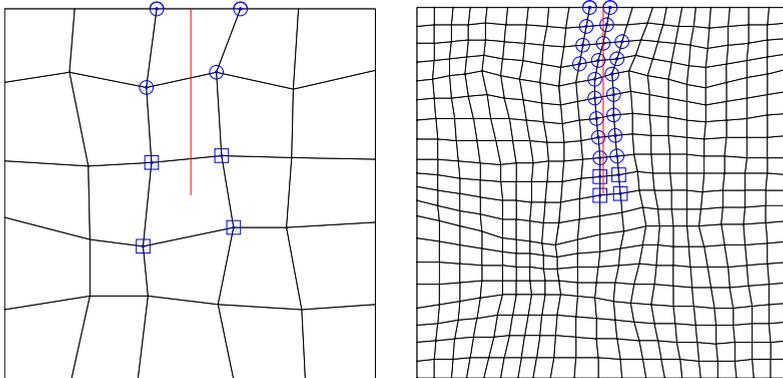


FIGURA 4.22: La primera y la tercera malla de una secuencia de 6 mallas no estructuradas.

En la Fig. 4.23 se representa el error relativo (en %) para la secuencia de mallas frente al tamaño de elemento en escala logarítmica. Se observa que el método T2D2 para las cuatro primeras mallas da valores del error relativo menores que los obtenidos mediante el método mortar. Posteriormente, ambos métodos presentan valores del error similares. A pesar de este mayor error del método mortar en las primeras mallas, pue-

de observarse que su velocidad de convergencia presenta un comportamiento mucho más uniforme. La velocidad de convergencia de la solución, Ec. (4.76), es aproximadamente igual a uno para el método mortar, mientras que la velocidad de convergencia obtenida para el método T2D2 presenta valores variables en cada tramo, sin ninguna tendencia definida, tal y como se muestra en la Fig. 4.23.

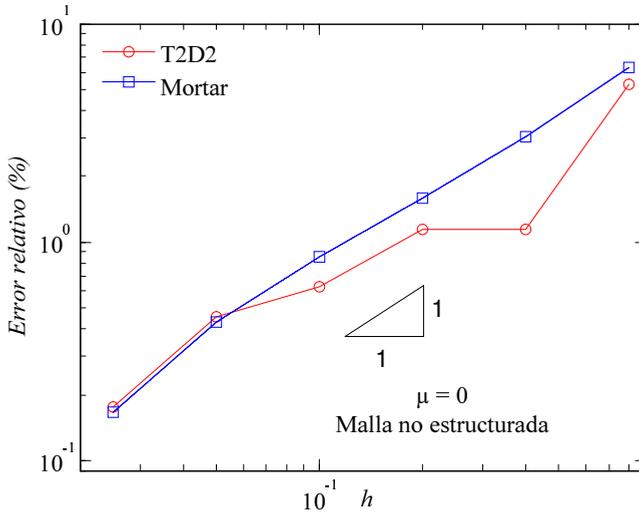


FIGURA 4.23: Error relativo de  $K_{II}$  frente al tamaño de elemento  $h$ . Problema con contacto en caras de grieta sin fricción ( $\mu = 0$ ). Malla no estructurada.

La tensión normal a lo largo de la grieta para el caso estudiado se representa en la Fig. 4.24. Puede observarse que la tensión normal (multiplicador de Lagrange) obtenida mediante el método mortar no es exactamente igual que la tensión de compresión aplicada a la placa  $\sigma = 1$ , pero sus valores están dentro del rango aceptable. Al aplicar el método T2D2 se obtienen valores muy diferentes a la tensión de compresión  $\sigma = 1$ , alcanzándose valores de tensión normal nulos en determinadas posiciones a lo largo de la grieta. Esto es debido, a que en este punto/s no se cumplen las restricciones del contacto, es decir, que en este punto/s la grieta está abierta, y por lo tanto la tensión normal es nula.

### 4.6.3. Convergencia de $K_{II}$ para contacto con fricción

En este caso, se va a aplicar la solución de Westergaard modificada para condiciones de rozamiento explicada en el apartado 4.6.1.3. La placa está sometida a una carga de compresión uniforme  $\sigma = 1$  [u.d. presión] y una carga tangencial uniforme tal que produce un valor de  $K_{II\text{ex}} = 1$ . Según la Ec. (4.19), y conociendo el valor del coeficiente de fricción entre las caras de grieta, que se ha tomado  $\mu = 0.2$ , se obtiene un valor  $\tau = 0.5989$  [u.d. presión]. Las propiedades del material son:  $E = 10^5$  [u.d. presión],  $\nu = 0.3$ . El cálculo se realiza bajo condiciones de deformación plana. Conviene

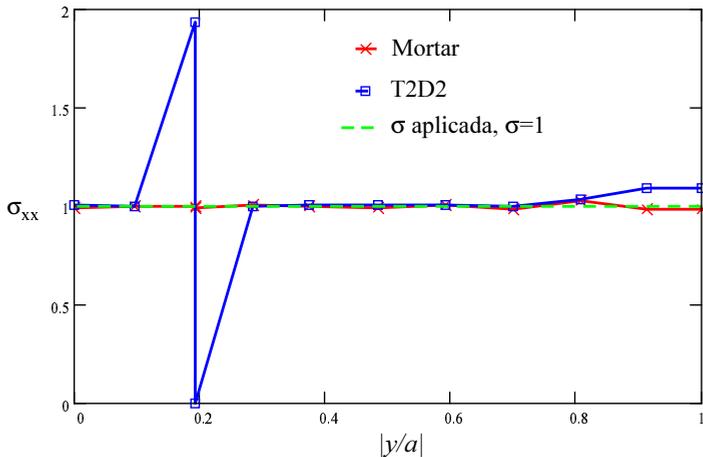


FIGURA 4.24: Tensión normal a la grieta  $\sigma_{xx}$ , a lo largo de la grieta para la malla no estructurada N° 3, comparando los dos métodos, mortar y T2D2. Problema con contacto en caras de grieta sin fricción ( $\mu = 0$ ).

señalar que para hacer la integración en mortar hay que interpolar  $\Delta U_1$  (CSLIP en ABAQUS) a partir de la solución de X-FEM, mientras que en T2D2 sólo hay que evaluar CSLIP desde los nodos que se han añadido.

#### 4.6.3.1. Malla uniforme

Se ha utilizado la secuencia de 7 mallas con refinamiento  $h$ -uniforme mostrada en la Fig. 4.19, para calcular el error relativo en función del tamaño del elemento, y comparar los dos métodos empleados, mortar y T2D2.

Puesto que el coeficiente de fricción entre caras de grieta es  $\mu = 0.2$ , en el cálculo de  $K_{II}$  a través de  $J$  se utiliza la expresión de la integral  $J$  dada en la Ec. (4.5), donde se considera el contacto con fricción en caras de grieta, es decir,  $K_{II} = \sqrt{JE'}$ .

En la Fig. 4.25 se presenta el error relativo (en %) para la secuencia de mallas utilizada frente al tamaño de elemento en escala logarítmica. Se observa que el método mortar da resultados mucho mejores que el método T2D2. Para la primera malla (Fig. 4.19) el método mortar da un error inferior al 8 % mientras que el error obtenido mediante el método T2D2 resulta superior al 11 %. Para la última malla el método mortar reduce el error hasta valores próximos al 0.1 %, mientras que para el método T2D2 se tienen valores todavía superiores al 0.9 %.

Los resultados obtenidos muestran velocidades de convergencia con respecto al tamaño de elemento uniformes para ambos métodos. En el caso del método mortar la velocidad de convergencia respecto al tamaño de elemento es aproximadamente igual a 1, mientras que para el método T2D2 es aproximadamente igual a 0.6. Por tanto el

planteamiento tipo mortar es el que permite un cálculo óptimo de  $K_{II}$  en condiciones de contacto en caras de grieta con rozamiento cuando se utiliza el método X-FEM.

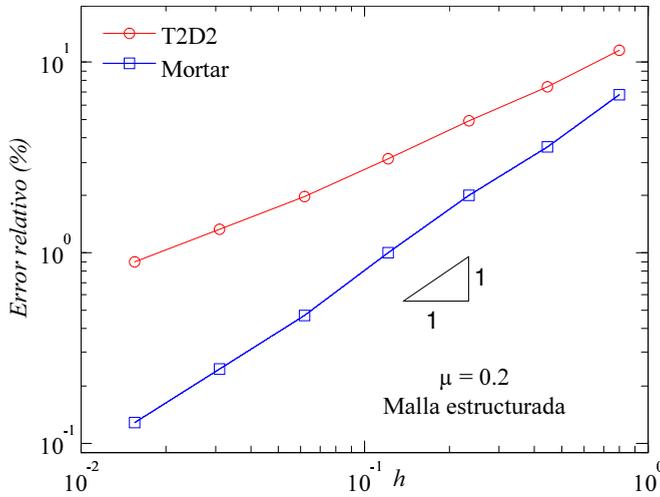


FIGURA 4.25: Error relativo de  $K_{II}$  frente al tamaño de elemento  $h$  con un coeficiente de fricción  $\mu=0.2$  para el contacto en caras de grieta.

La distribución de la tensión normal a la grieta es la misma que la obtenida sin fricción, Fig. 4.21. En este caso, la tensión tangencial a las caras de grieta viene dada por:

$$q(y) = \sigma_{xy} = \mu\sigma_{xx} \quad (4.78)$$

El hecho de que  $\sigma_{xy}$  no está bien calculada de forma local a lo largo de las caras de grieta cuando se utilizan restricciones puntuales (elementos T2D2) hace que el cálculo de  $J_p$  sea más impreciso, afectando al error y a la velocidad de convergencia, como se ha visto en la Fig. 4.25. Por el contrario, el método mortar presenta una gran calidad en la solución de  $\sigma_{xy}$ , lo que permite calcular  $J_p$  con gran precisión y, por tanto,  $K_{II}$ .

#### 4.6.3.2. Malla no uniforme

Para la situación de contacto con fricción ( $\mu=0.2$ ) se ha utilizado la secuencia de 6 mallas no estructuradas mostrada en la Fig. 4.22, para calcular el error relativo en función del tamaño del elemento y comparar los métodos empleados, mortar y T2D2.

En la Fig. 4.26 se representa el error relativo (en %) para la secuencia de mallas frente al tamaño de elemento en escala logarítmica. Se observa, como era de esperar, que el método T2D2 presenta peores resultados que el método mortar: no sólo presenta errores mayores sino que además éstos no convergen. Para el método mortar la velocidad de convergencia respecto al tamaño de elemento presenta un comportamiento mucho más lineal con un valor promedio aproximado a 1.

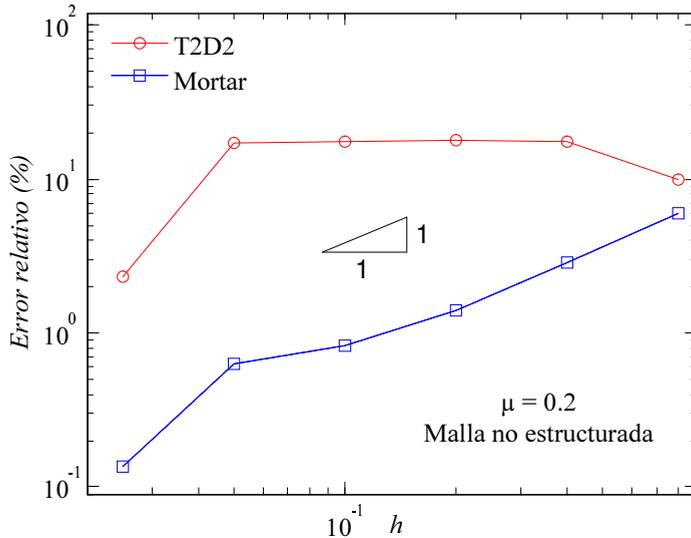


FIGURA 4.26: Error relativo del  $K_{II}$  frente al tamaño de elemento  $h$ . Problema de contacto en caras de grieta con fricción ( $\mu=0.2$ ).

Como para el caso de la malla estructurada, la falta de convergencia cuando se utilizan restricciones puntuales (elementos T2D2) es debida a la mala estimación de las tensiones locales en caras de grieta (ver Fig. 4.24), que hace que la integral  $J_p$  no sea calculada con precisión. Esta precisión es mucho mayor con el planteamiento segmento-segmento (mortar).

## 4.7. Simulación del cierre de grieta en condiciones de fretting fatiga

En condiciones de fretting fatiga, las grietas experimentan procesos de cierre con contacto entre sus caras, con estados de adhesión o deslizamiento con fricción (RIBEAUCOURT ET AL., 2007; HILLS Y NOWELL, 1994), y por lo tanto, se originan estados de carga en modo II que pueden tener especial importancia (BOLD ET AL., 1992; WANG ET AL., 1995). Para simular el proceso de cierre y su influencia se pueden aplicar las técnicas de este capítulo.

Uno de los modelos de fretting analizados en esta Tesis corresponde al problema en condiciones de contacto completo mostrado en la Fig. 4.27. Las dimensiones del modelo son  $h = 2c = 2w = 10$  mm,  $l = 40$  mm. El material utilizado es la aleación de aluminio Al7075-T6, con  $E = 72$  GPa y  $\nu = 0.3$ . Se ha tomado un valor del coeficiente de fricción en el contacto entre indentador y probeta de  $\mu_{int} = 0.8$  (GINER ET AL., 2008; MUTOH ET AL., 2003).

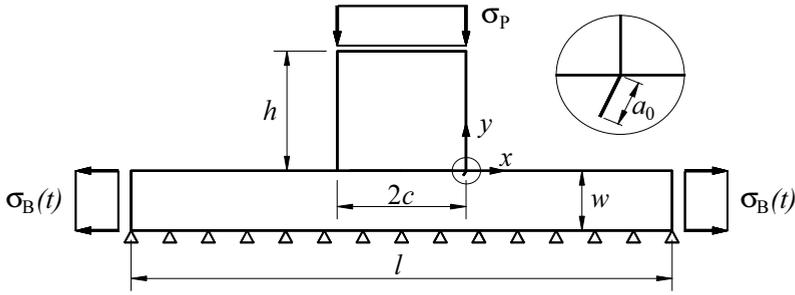


FIGURA 4.27: Modelo de un problema de fretting en contacto completo.

La secuencia de aplicación de las cargas en función del tiempo se muestra en la Fig. 4.28, donde, para el análisis, se han considerado 8 pasos de carga. En el primer paso, se aplica únicamente la carga normal hasta su valor máximo  $\sigma_P = 80$  MPa. A partir del segundo paso se aplica progresivamente la carga cíclica en la probeta, hasta su valor máximo  $\sigma_{B,\max} = 120$  MPa, utilizando un  $R = -1$ .

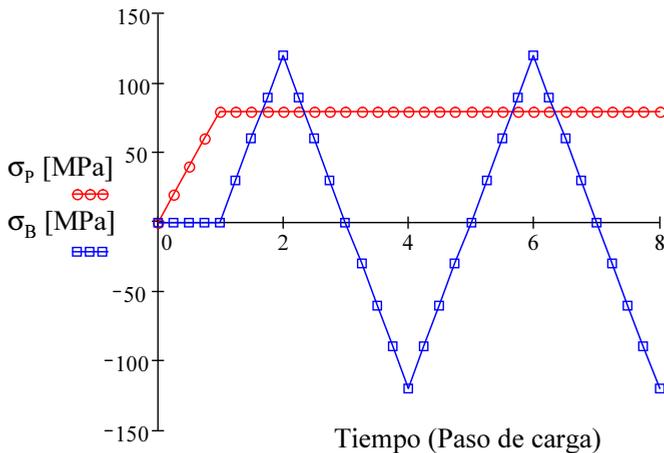


FIGURA 4.28: Evolución de las cargas aplicadas.

Se considera que la zona de nucleación de la grieta está en el extremo de la zona de contacto del indentador, en concordancia con los resultados de MUTOH Y XU (2003), y de acuerdo con la distribución de la tensión equivalente de von Mises mostrada en la Fig. 4.29.

El ángulo de iniciación de la grieta, se determina mediante la resolución numérica del modelo de la Fig. 4.27 (sin grieta), aplicando el criterio del plano crítico de máxima amplitud de la tensión tangencial. Se ha obtenido un ángulo inicial  $\theta = 14^\circ$  medido desde la superficie del contacto del indentador (ver Fig. 4.30). Se ha tomado una grieta de longitud inicial  $a_0 = 0.4$  mm.

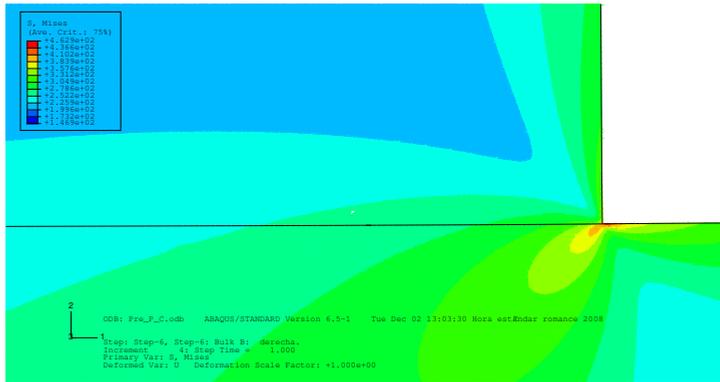


FIGURA 4.29: Distribución de la tensión de von Mises en la zona del contacto, para el caso del Step 6 y el incremento 4.

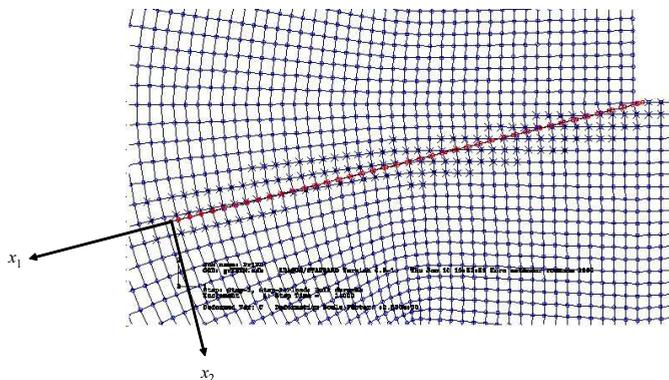


FIGURA 4.30: Detalle de la malla X-FEM, mostrando la grieta inicial.

Dada la dificultad de estimar el valor del coeficiente de fricción  $\mu$  en caras de grieta, se ha estudiado paramétricamente el efecto de  $\mu$  en el valor de  $K_{II}$ , tomando valores  $\mu = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1.0$ .

La Fig. 4.31 muestra la distribución del desplazamiento relativo tangencial a lo largo de la grieta para valores de  $\mu = 0.2$  y  $\mu = 1.0$ , y para un rango de tiempo  $t$  de 6 a 8, en el que se puede considerar que se ha alcanzado condiciones de “shakedown”. La coordenada  $x_1$  está referida al sistema de extremo de grieta mostrado en la Fig. 4.1.

Es importante señalar que las caras de grieta permanecen en contacto durante todo el proceso de carga (no hay apertura en modo I), debido a la configuración de las cargas aplicadas y al bajo ángulo de inclinación de la grieta con respecto al plano de contacto del indentador.

Para un valor bajo del coeficiente de fricción,  $\mu = 0.2$ , Fig. 4.31, se obtiene que el desplazamiento relativo tangencial varía a lo largo del ciclo, es decir, las caras de grieta deslizan en uno y otro sentido. Sin embargo, para coeficientes de fricción mayores,

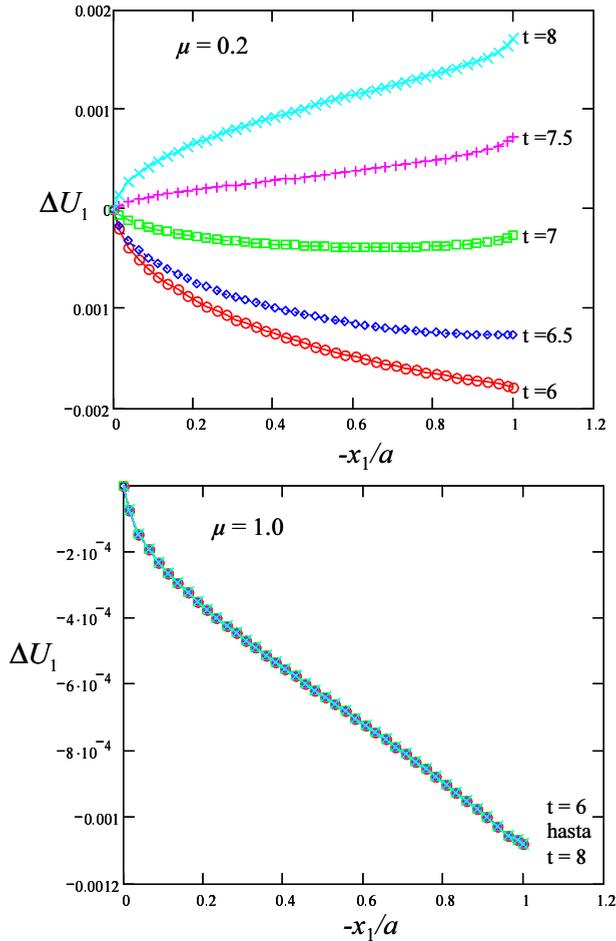


FIGURA 4.31: *Distribución del desplazamiento tangencial a lo largo de la grieta, donde  $x_1$  es un eje local en la dirección de la grieta y medido desde su extremo.*

$\mu = 1.0$ , las caras de grieta experimentan un deslizamiento relativo durante la primera fase de aplicación de la carga en la probeta  $\sigma_B$  ( $t = 1 - 2$ ), que posteriormente permanece constante durante el resto del ciclo. En otras palabras, las caras permanecen en estado de adhesión, aunque reteniendo un estado de deformación que induce un valor de  $K_{II}$  residual en el extremo de grieta.

Se ha calculado la evolución de  $K_{II}$  para los seis valores de  $\mu$  analizados, utilizando<sup>7</sup> las Ecs. (4.2) y (4.26). Se ha tomado un radio de la función  $q$  de  $r_q/a = 0.2375$ , tal que no se excede el dominio de la probeta para este caso. Debe notarse que la Ec. (4.26) sólo permite obtener el valor absoluto de  $K_{II}$ . El signo de  $K_{II}$  ha sido discriminado analizando el desplazamiento tangencial  $\Delta U_1$  en cada incremento (AUDOLY, 2000;

<sup>7</sup>En otros problemas en los que exista además apertura de grieta en modo I en alguna etapa del ciclo, se debería utilizar la correspondiente integral de interacción para calcular  $K_I$  y  $K_{II}$ .

KIBEY ET AL., 2004).

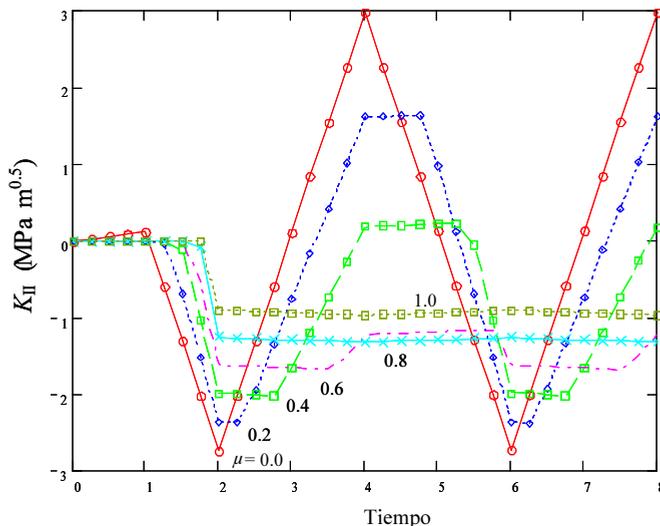


FIGURA 4.32: Evolución de  $K_{II}$  para distintos  $\mu$  en el modelo de contacto completo de la Fig. 4.27.

La Fig. 4.32 muestra la variación de  $K_{II}$  durante el proceso de carga-descarga para la serie de coeficientes de fricción  $\mu$  en caras de grieta. Se observa una variación puramente lineal de  $K_{II}$  con  $\sigma_B$  para el caso  $\mu = 0$ , que cambia a una evolución con tramos rectos para valores  $\mu > 0$ . La extensión de estos tramos aumenta al aumentar el coeficiente de fricción  $\mu$ , lo que se debe a estados de adhesión entre caras de grieta (AUDOLY, 2000). El  $\Delta K_{II}$  efectivo para cada coeficiente de fricción se puede calcular utilizando la siguiente ecuación:

$$\Delta K_{II \text{ eff}} = K_{II \text{ max}} - K_{II \text{ min}} \tag{4.79}$$

En la Fig. 4.33 se presentan los valores máximos y mínimos de  $K_{II}$  en función del coeficiente de fricción  $\mu$ , lo que permite evaluar el  $\Delta K_{II}$  que de alguna manera controla el crecimiento de grieta durante la fase I de propagación. Se puede observar que  $\Delta K_{II}$  disminuye significativamente a medida que  $\mu$  aumenta. Por tanto, para este problema<sup>8</sup>, se tiene que sólo para valores menores de 0.6 se puede apreciar una importancia significativa de  $K_{II}$  en la fase de propagación en modo II.

Para valores de  $\mu$  esperables en la práctica del orden de  $\mu = 0.8 - 1.0$ , se tiene que  $\Delta K_{II} = 0$  bajo la hipótesis de este modelo.

<sup>8</sup>Notar que el ángulo de iniciación es pequeño ( $\theta = 14^\circ$ ), lo que hace que la carga en la probeta  $\sigma_B$  presente una gran componente tangencial respecto al plano de grieta.

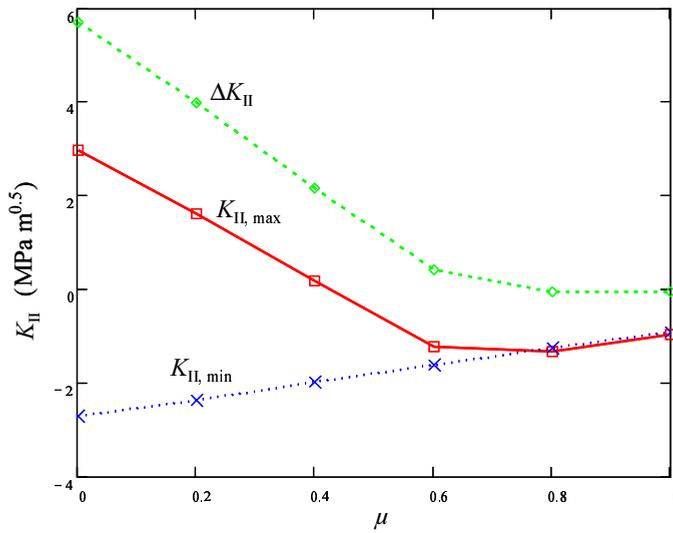


FIGURA 4.33: Relación de  $K_{II}$  vs  $\mu$  en caras de grieta en el modelo de contacto completo de la Fig. 4.27. Se muestra también el rango  $\Delta K_{II}$ , que sólo es significativo para valores de  $\mu < 0.6$ .



## Capítulo 5

# Análisis del comportamiento de grietas de fretting fatiga y correlación experimental

### **Resumen del Capítulo:**

*En este capítulo se estudia la iniciación de grieta en fretting fatiga en contacto completo, así como el modelado de su propagación mediante X-FEM. Se propone para ello un criterio de orientación bajo cargas no proporcionales. Las predicciones en cuanto a orientación de grieta se correlacionan con los resultados obtenidos a partir de ensayos experimentales realizados por el Grupo de Investigación.*



## 5.1. Introducción

Como se ha comentado anteriormente, el problema de fretting fatiga se caracteriza por la existencia de dos componentes en contacto, sometidos a desplazamientos relativos de pequeña amplitud. Es un tipo de fatiga donde las tensiones locales en el borde de la zona del contacto y la carga cíclica aplicada originan y hacen crecer grietas en esta zona (WITTKOWSKY ET AL., 2000). La iniciación y propagación de grieta en fretting fatiga es un fenómeno complicado, debido a los factores que influyen en el comportamiento de las grietas. Estos factores son: la presión del contacto, la amplitud del deslizamiento relativo, las fuerzas tangenciales en la superficie, los materiales empleados, el estado superficial de las superficies en contacto, el coeficiente de fricción y por último las condiciones ambientales.

El problema de fretting fatiga, normalmente, se divide en dos fases (FORSYTH, 1962):

- Fase I: que engloba la iniciación de grieta y su propagación en la zona cercana a la superficie del contacto, donde el campo de tensiones es multiaxial y está dominado por las tensiones del contacto.
- Fase II: que consiste en la propagación de grieta larga, donde la influencia de las tensiones del contacto es poco significativa.

En problemas de fretting fatiga puede observarse que en la zona del contacto donde se producen los pequeños deslizamientos, se inician varias grietas simétricas respecto al centro del contacto. Normalmente, sólo dos grietas principales siguen progresando, mientras que el resto de grietas se detienen. Se puede observar dos tipos de grietas iniciales:

1. Grieta de iniciación tipo I: este tipo de grieta se inicia normalmente con un ángulo pequeño respecto a la superficie de  $15^\circ$  a  $35^\circ$ , y se las denomina grietas “shear mode”, debido a la importancia del modo de cortadura en su generación y propagación inicial.
2. Grieta de iniciación tipo II: este tipo de grietas se inician en una dirección próxima a la perpendicular a la superficie, con un ángulo de  $75^\circ$  a  $90^\circ$ , y se las denomina grietas “tensile mode”, donde los mecanismos que hacen crecer la grieta son de tensiones normales al plano de grieta.

Después de una fase de propagación inicial, ambos tipos de grieta tienden a propagarse en la misma dirección en la fase II (propagación de grieta larga). Este cambio de dirección constituye la transición fase I/II.

En este capítulo se estudia la iniciación de grieta, determinando la posición de la iniciación y su ángulo, además de modelar la propagación de grieta en fase I y fase II.

## 5.2. Descripción de los ensayos experimentales

Los ensayos ha sido realizados en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia. La máquina de fatiga empleada ha sido una máquina servohidráulica Instron 8801, de 100 kN, mostrada en la Fig. 5.1.

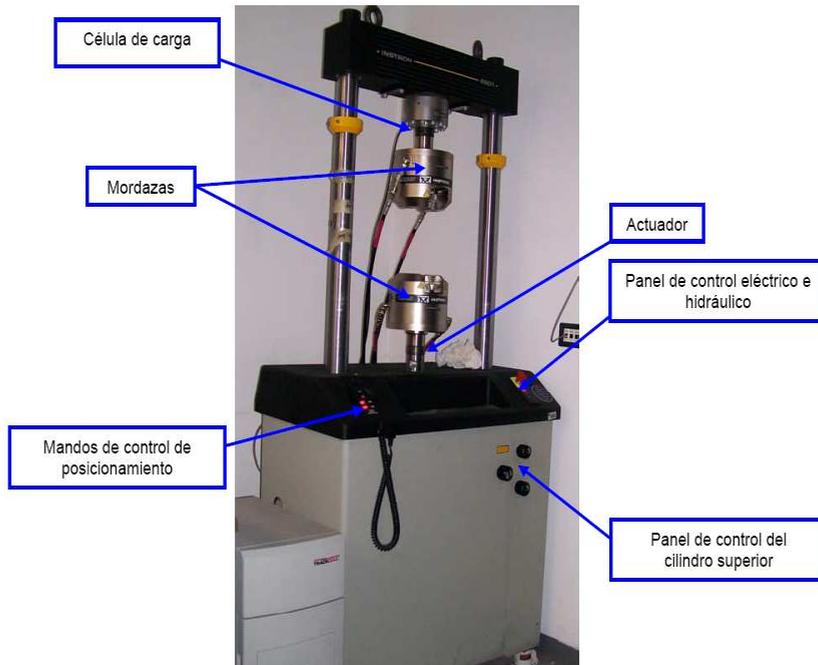


FIGURA 5.1: Máquina servohidráulica Instron 8801 de 100 kN.

El equipo está controlado por un software que utiliza un protocolo GPIB (*General Purpose Interface Bus*) de National Instruments mediante el standard IEEE 488 para controlar la máquina.

Para la realización de los ensayos de fretting fatiga, se utiliza un utillaje apropiado, diseñado en el Grupo, que contiene una célula para medir la carga normal, y los elementos de contacto en este caso de contacto completo. En la Fig. 5.2 y Fig. 5.3 se muestra el montaje empleado para la realización de estos ensayos.

### 5.2.1. Caracterización del material y características de las probetas

El material usado en los ensayos de fretting fatiga es una aleación de aluminio Al7075-T6, cuyas propiedades microestructurales, mecánicas y de fatiga se muestran en la

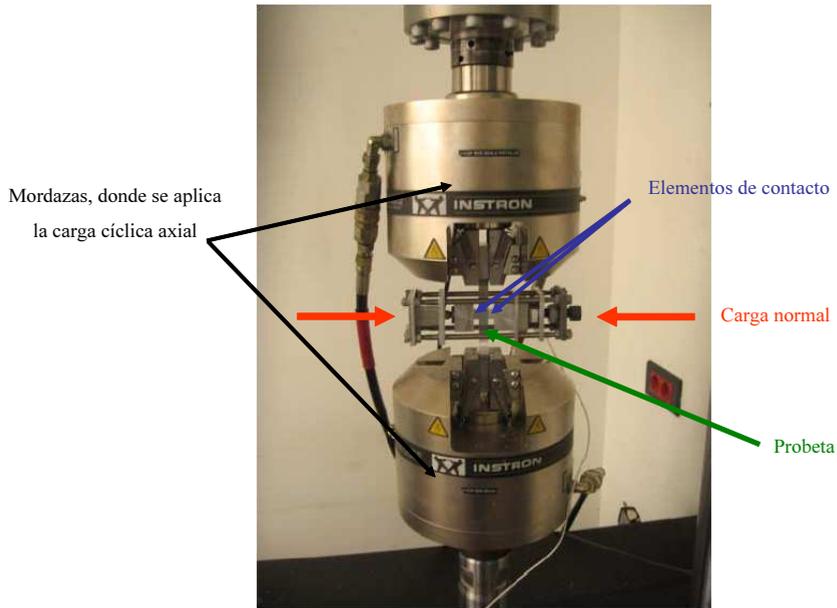


FIGURA 5.2: Montaje de fretting fatiga para contacto completo realizado en el Grupo.

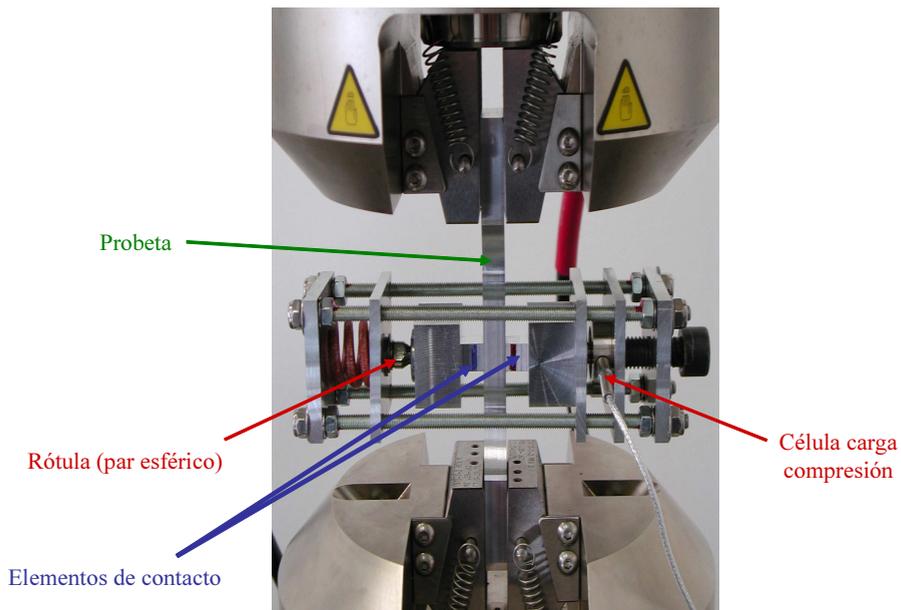


FIGURA 5.3: Detalle del utillaje diseñado en el Grupo, mostrando la célula para medir la carga normal.

Tabla 5.1. Los valores se han caracterizado (excepto  $\Delta K_{th}$  y  $\nu$ ) mediante ensayos

experimentales llevados a cabo en nuestros laboratorios.

Límite elástico	$\sigma_y$	503 MPa	Experimental
Límite de rotura	$\sigma_u$	572 MPa	Experimental
Límite de fatiga	$\sigma_f$	166 MPa ( $10^7$ ciclos)	Experimental
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0.3	-
Tamaño de grano	$D$	10 - 30 $\mu\text{m}$	Experimental
Umbral del crecimiento	$\Delta K_{th}$	2.2 MPa $\sqrt{\text{m}}$	(NAVARRO, 2005)
Coefficiente de resistencia a fatiga	$\sigma'_f$	1485.6 MPa	Experimental
Exponente de resistencia a fatiga	b	-0.1445	Experimental

TABLA 5.1: *Propiedades mecánicas y de fatiga de la aleación Al7075-T6,  $R = -1$*

La probeta empleada en estos ensayos presenta la clásica geometría de hueso de perro. La sección de la probeta es rectangular, y tiene una sección útil de  $5 \times 10$  mm, tal y como se muestra en la Fig. 5.4.

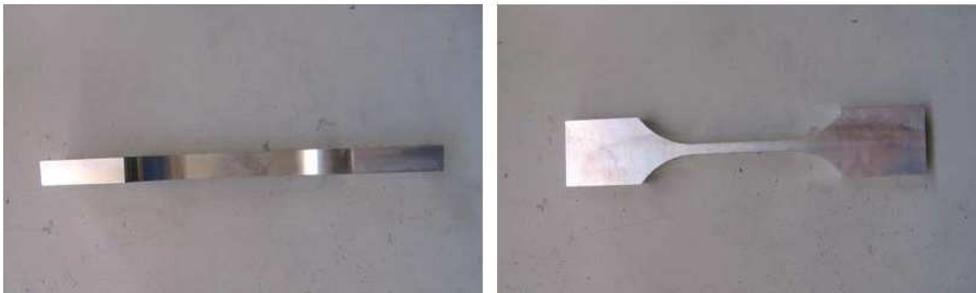


FIGURA 5.4: *Vistas de la probeta de ensayo.*

Todas las probetas provienen del mismo lote de barras rectangulares de la aleación de aluminio Al7075-T6, y han sido mecanizadas mediante CNC.

En la Fig. 5.5 se muestra la microestructura del Al7075-T6 utilizado, obtenida después de la etapa de pulido y ataque químico. Se ha medido un tamaño de grano promedio superior a  $30 \mu\text{m}$  en la dirección de la carga axial aplicada, e inferior a  $\approx 10 \mu\text{m}$  en la dirección perpendicular a la superficie del contacto.

Se han realizado ensayos en condiciones de fatiga sin fretting con  $R=-1$  (denominada “plain fatigue”). En la Fig. 5.6 se representa la tensión alternante frente al número de ciclos. El ajuste de los datos ha permitido determinar la ecuación de Basquin, Ec. (3.58), obteniendo el valor del coeficiente de resistencia a fatiga y exponente de resistencia a fatiga, mostrados en la Tabla 5.1.

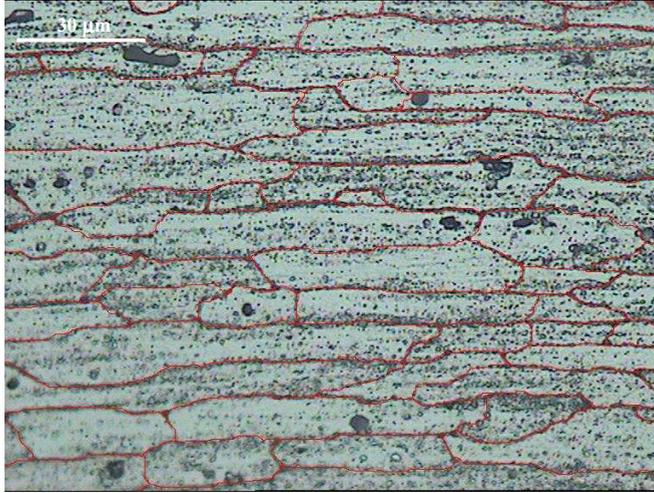


FIGURA 5.5: Micrografía óptica del Al7075-T6.

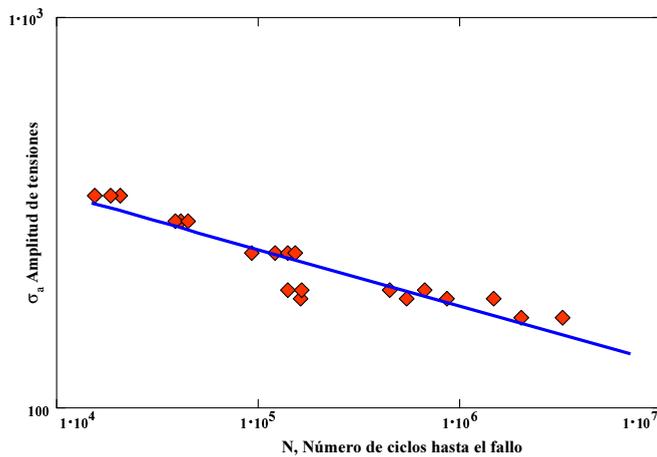


FIGURA 5.6: Curva Tensión - Vida "Plain Fatigue".

### 5.2.2. Ensayos de fretting fatiga

Se realizaron ensayos de fretting fatiga con el utillaje antes comentado (ver Fig. 5.2 y Fig. 5.3). En todos ellos se aplicó una carga normal  $P$  que se mantuvo constante durante el ensayo y una carga cíclica "Bulk" con  $R=-1$ .

La Tabla 5.2 muestra las cargas aplicadas en los ensayos que acabaron en el fallo de la probeta. La tensión axial cíclica aplicada es  $\sigma_{\text{Bulk}}$ , y la carga normal aplicada es  $P$ . Para casi todos los configuraciones de carga se realizaron tres ensayos. Para la Tabla 5.2 se ha escogido el ensayo más representativo de cada configuración.

Ensayo	$P$ (kN)	$\sigma_{\text{Bulk}}$ (MPa)	$N_f$ (ciclos)
1	2	110	105958
2	4	110	92259
3	8	110	82549
4	2	130	64764
5	4	130	47714
6	8	130	43567
7	2	150	35181
8	4	150	32905
9	8	150	25872
10	2	170	24306
11	4	170	27391
12	8	170	23046
13	2	190	12509
14	4	190	9590
15	8	190	8760

TABLA 5.2: *Las cargas y número de ciclos aplicados en los ensayos que terminaron con el fallo de la probeta.*

Después de la ejecución de los ensayos, se realiza la preparación metalográfica de las probetas a fin de observar la orientación de la/s grieta/s generadas y comparar con los resultados numéricos obtenidos.

### 5.3. Descripción del modelo numérico

El modelo de fretting analizado en esta Tesis corresponde al problema en condiciones de contacto completo en 2D. Como la geometría del problema es doblemente simétrica se puede estudiar la mitad de un cuarto, tal y como se muestra en la Fig. 5.7.

Las dimensiones del modelo estudiado son  $h = 10$  mm,  $c = w = 5$  mm,  $l = 20$  mm. La profundidad de la probeta es  $t = 1$  mm. El coeficiente de fricción considerado en el contacto entre indentador y probeta es  $\mu_{int} = 0.8$  (MUTOH ET AL., 2003; GINER ET AL., 2008). Se ha seleccionado la parte superior derecha de la geometría, por lo que, los desplazamientos horizontales de la parte izquierda del modelo considerado están restringidos a través de la restricción de los nodos de esta parte. Del mismo modo, se restringen los desplazamientos verticales de la parte inferior del modelo considerado, tal y como se muestra en la Fig. 5.7.

En la Fig. 5.8 se presenta la malla utilizada en el cálculo y las restricciones aplicadas al modelo numérico, donde se han utilizado elementos cuadriláteros lineales. La Fig. 5.9 es un detalle del borde de la zona del contacto donde se puede observar que el tamaño del elemento utilizado en esta zona es  $0.001 \cdot c$ , es decir, el tamaño del elemento es de una dimensión de  $5 \mu\text{m}$ .

Se han considerado 6 pasos de carga para llevar a cabo el análisis. En el primer paso, se

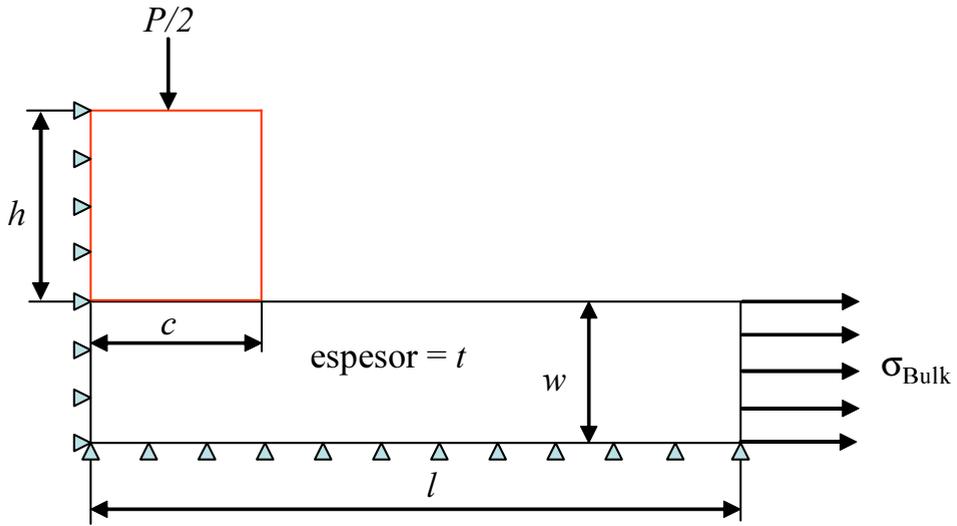


FIGURA 5.7: Esquema del modelo numérico utilizado.

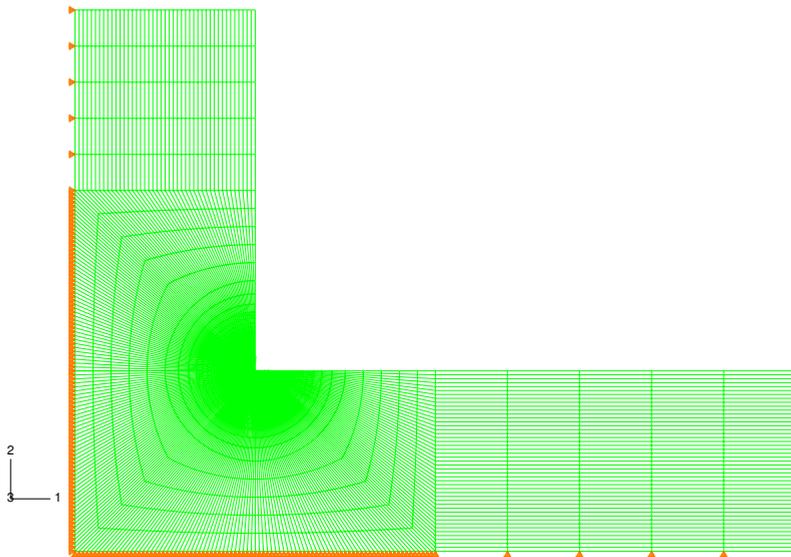


FIGURA 5.8: Mallado del modelo numérico utilizado, donde se puede ver el dominio estudiado y las restricciones por simetría.

aplica únicamente la carga normal hasta su valor máximo  $P_{\text{max}}$ . A partir del segundo paso se aplica progresivamente la carga cíclica en la probeta, hasta su valor máximo  $\sigma_{\text{Bulk,max}}$  con  $R = -1$ , tal y como se muestra en la Fig. 5.10, para uno de los ensayos analizados.

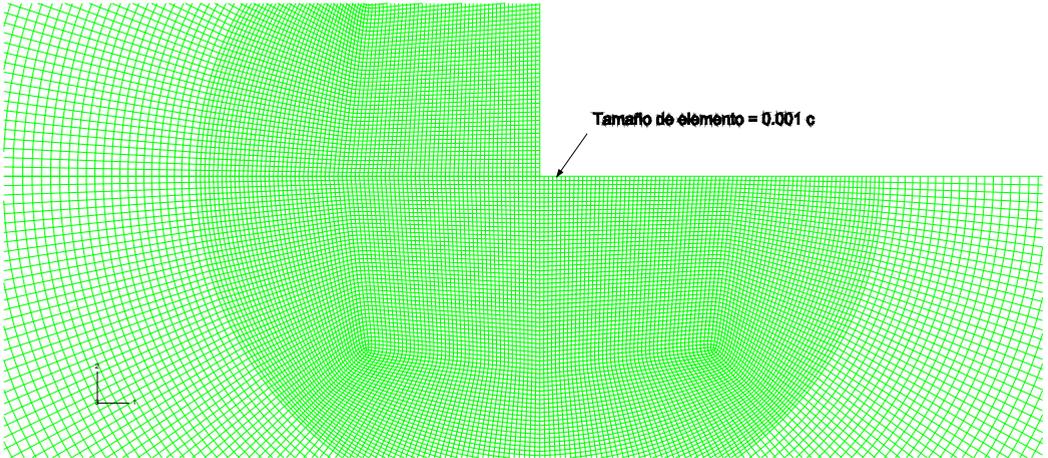


FIGURA 5.9: Detalle de la Fig. 5.8. El tamaño del elemento en las cercanías del extremo de la zona del contacto es  $0.001 \cdot c = 5 \mu\text{m}$ .

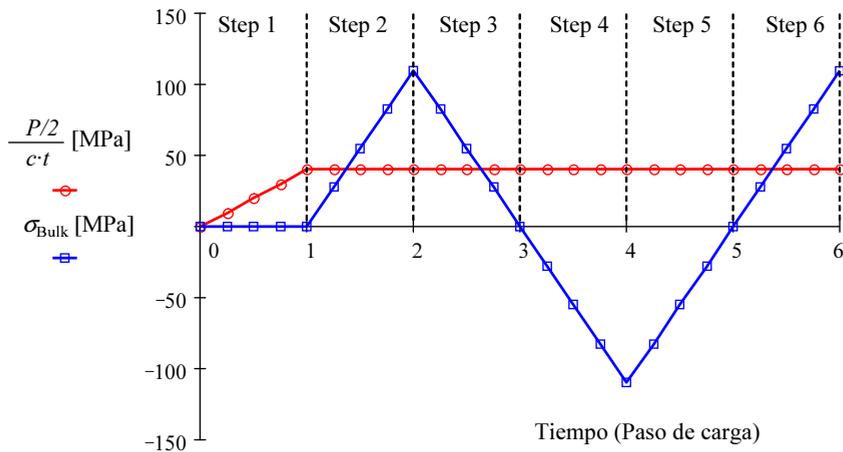


FIGURA 5.10: Evolución de las cargas aplicadas en el modelo numérico para uno de los ensayos analizados.

## 5.4. Estudio de iniciación de grieta

### 5.4.1. Aplicación de criterios de iniciación en la superficie de la probeta

El objetivo de esta sección es estudiar la localización de la iniciación de una grieta en problemas de fretting fatiga en condiciones de contacto completo así como su orientación esperada, utilizando los criterios de fatiga multiaxiales explicados en el apartado 3.2. A continuación se comparan los resultados experimentales con los ob-

tenidos numéricamente.

La metodología utilizada consiste en el cálculo de las tensiones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$  para cada incremento de las cargas aplicadas mediante el método de los elementos finitos para el modelo sin grieta, con  $R = -1$ , a lo largo de la zona del contacto, véase Fig. 5.7. Posteriormente se aplica la Ec. (5.1) para obtener las tensiones transformadas en el sistema 1-2 que está orientado según distintos ángulos  $\theta_i$ . El eje 1 definirá las potenciales posiciones del plano crítico.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_i) & \sin^2(\theta_i) & 2 \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) \\ \sin^2(\theta_i) & \cos^2(\theta_i) & -2 \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) & \cos^2(\theta_i) - \sin^2(\theta_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

donde ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{12}$ ) son las tensiones transformadas calculadas para cada ángulo  $\theta_i$ , para cada plano crítico posible y para cada incremento. Hay que aclarar que el ángulo  $\theta_i$  se mide desde el eje  $x$  en sentido horario, tal y como se muestra en la Fig. 5.11.

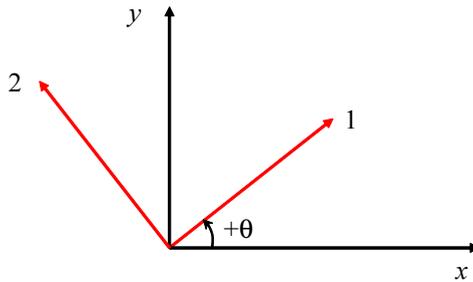


FIGURA 5.11: Esquema que muestra la definición del ángulo  $\theta_i$  utilizada en la Ec. (5.1).

A partir de las tensiones transformadas obtenidas se busca el valor máximo del parámetro específico del criterio multiaxial empleado. La posición que da este valor máximo corresponde a la posición de iniciación de grieta, y el ángulo que da este valor máximo es el ángulo del plano en el que se da dicha iniciación.

Se ha aplicado la metodología explicada anteriormente para determinar la posición de la iniciación de grieta y el ángulo correspondiente, con las condiciones del ensayo 1 de la Tabla 5.2,  $P = 2$  kN y carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110$  MPa.

En las Figs. 5.12, 5.13 y 5.14 se representan las tensiones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ , respectivamente, obtenidas a lo largo de una zona situada a  $100 \mu\text{m}$  del borde del contacto a ambos lados, hacia dentro y hacia fuera del contacto.

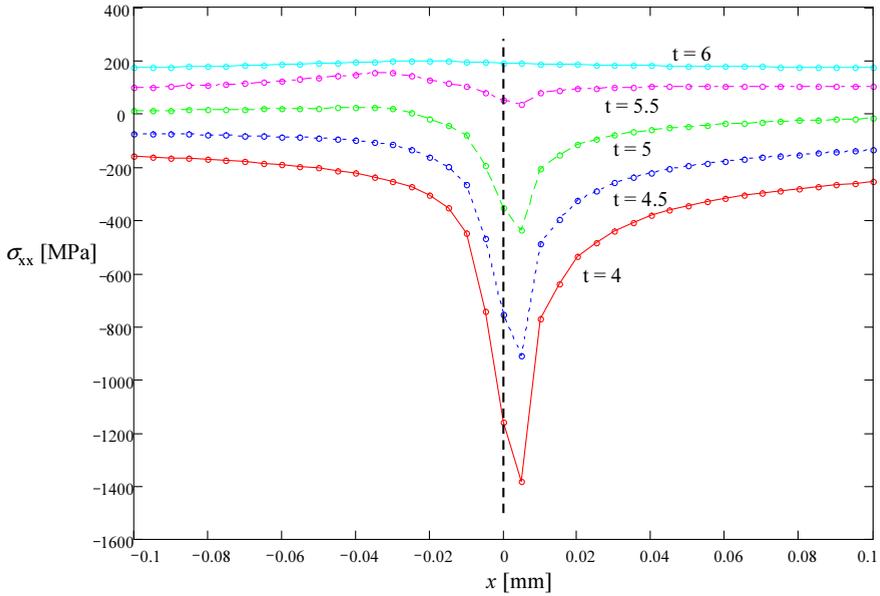


FIGURA 5.12: Distribución de la tensión  $\sigma_{xx}$  a lo largo de una zona situada a  $100 \mu\text{m}$  a ambos lados del borde del contacto.

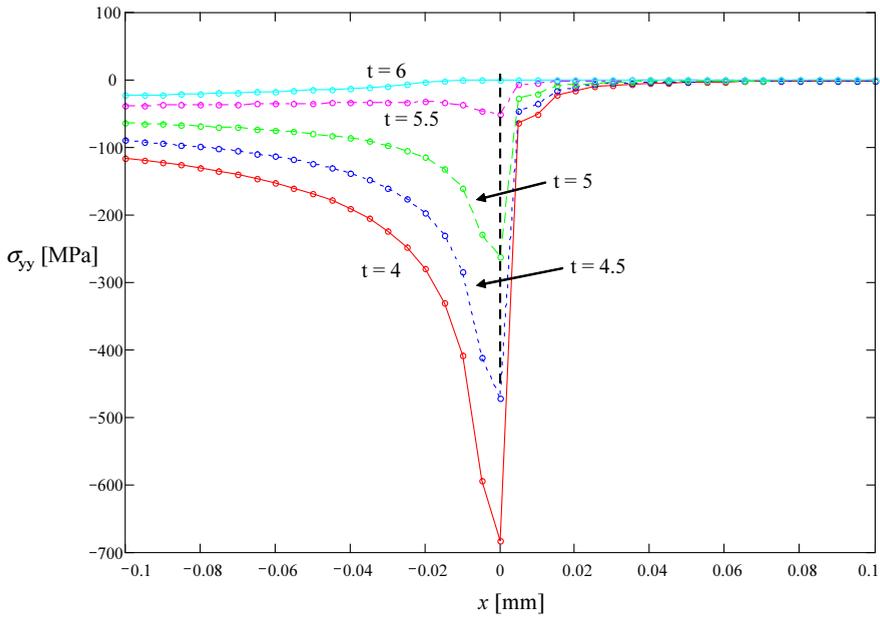


FIGURA 5.13: Distribución de la tensión  $\sigma_{yy}$  a lo largo de una zona situada a  $100 \mu\text{m}$  a ambos lados del borde del contacto.

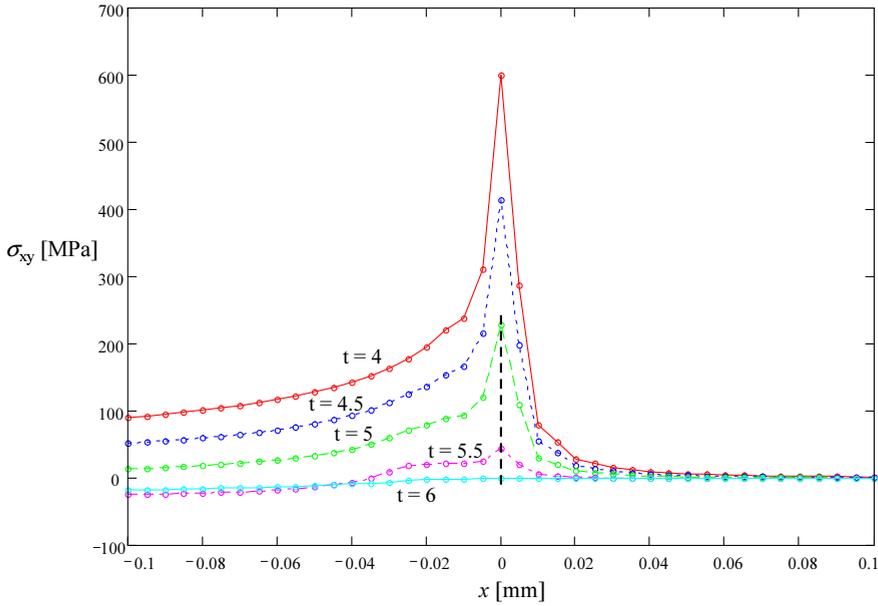


FIGURA 5.14: Distribución de la tensión  $\sigma_{xy}$  a lo largo de una zona situada a  $100 \mu\text{m}$  a ambos lados del borde del contacto.

Se observa que al aumentar  $\sigma_{\text{Bulk}}$  de tracción durante el ciclo (final del ciclo,  $t = 6$ ) las tensiones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$  son más uniformes, debido al despegue en el borde de la zona del contacto, lo que implica que no hay singularidad, tal y como se esquematiza en la Fig. 5.15. Además, para este incremento,  $\sigma_{\text{Bulk}}$  de tracción máxima, el contacto completo se convierte en contacto incompleto, mientras que en otros incrementos, p.ej.  $t \leq 5$ , el comportamiento es de contacto completo, como se esquematiza en la Fig. 5.16.

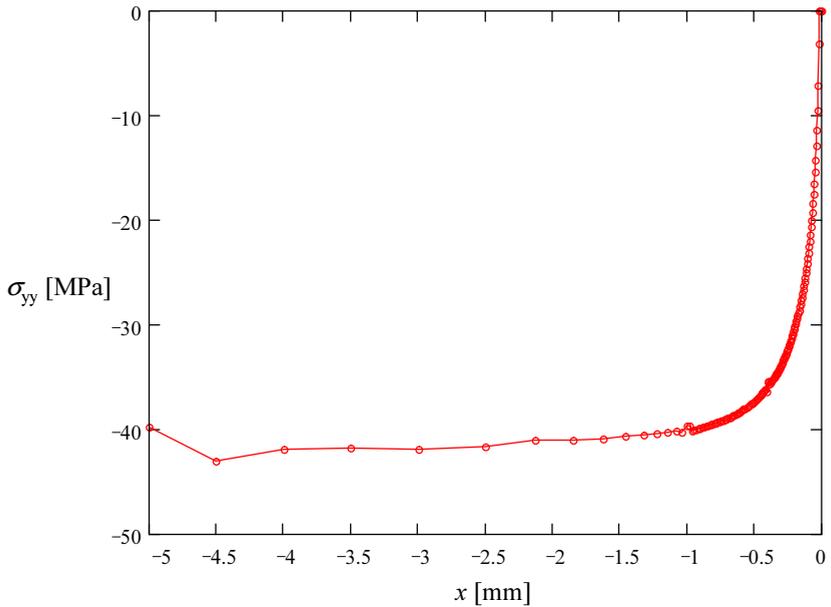
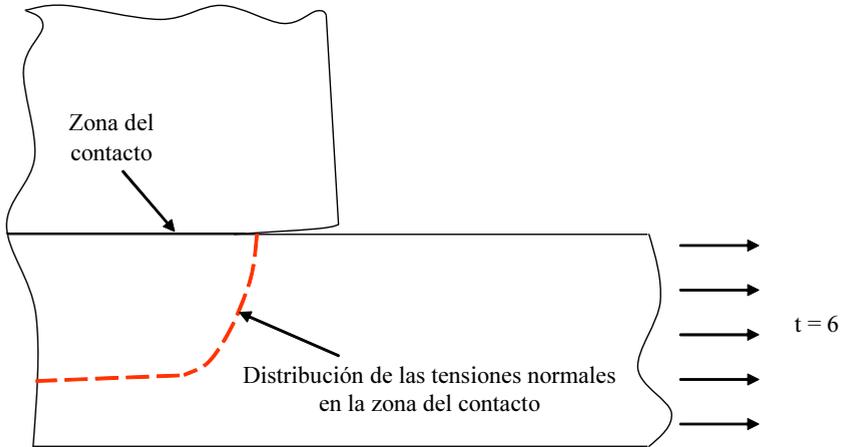


FIGURA 5.15: Despegue en el borde del contacto. Arriba, esquema de la distribución de la tensión  $\sigma_{yy}$  a lo largo de la zona del contacto cuando  $t=6$ . Abajo, solución obtenida numéricamente mediante ABAQUS.

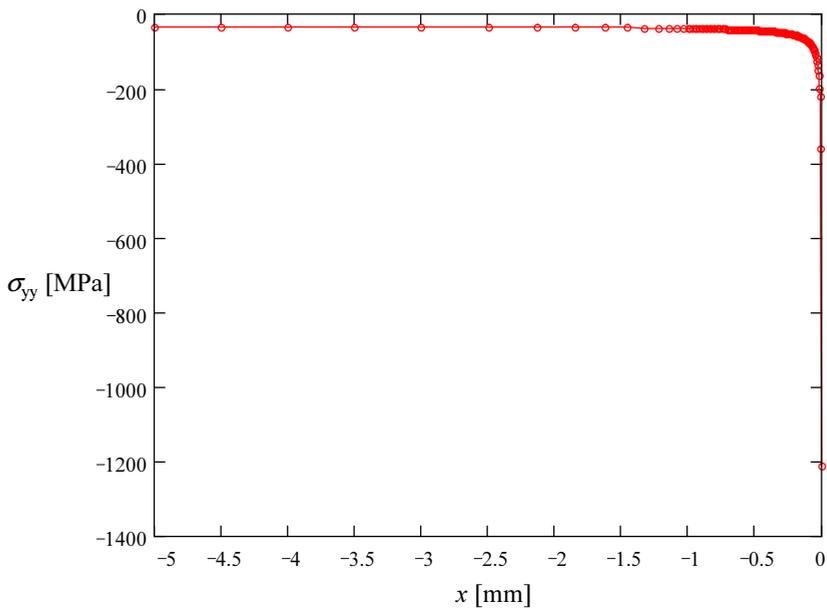
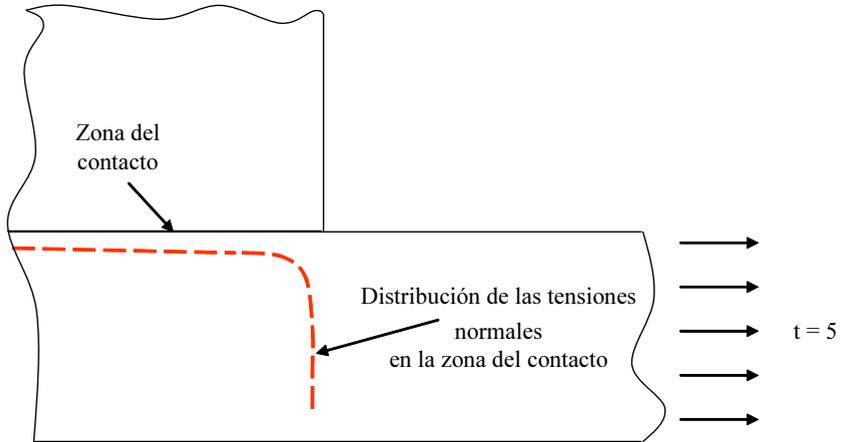


FIGURA 5.16: Arriba, esquema de la distribución de la tensión  $\sigma_{yy}$  a lo largo de la zona del contacto cuando  $t=5$ . Abajo, solución obtenida numéricamente mediante ABAQUS

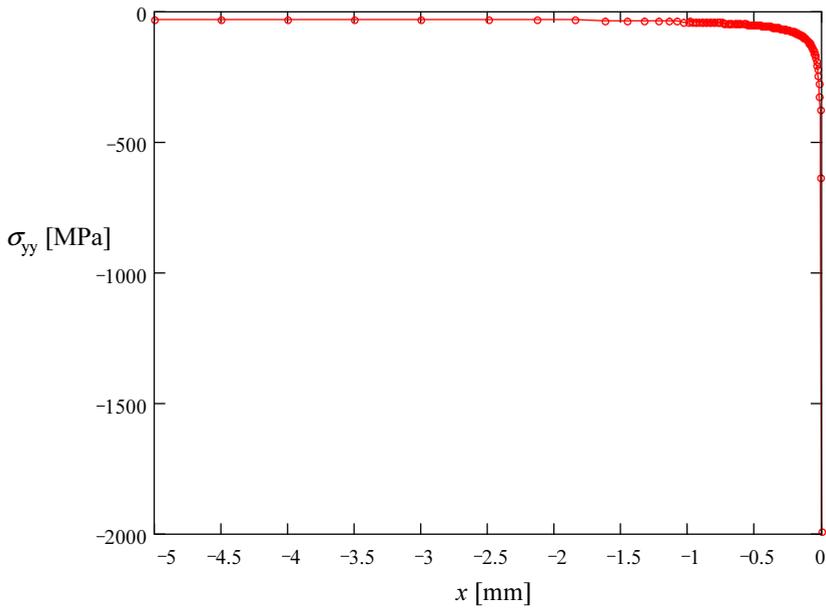
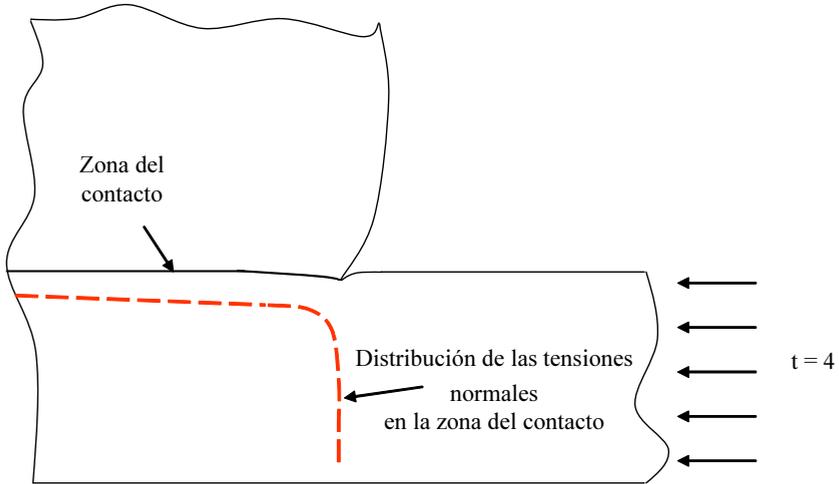


FIGURA 5.17: Enclavamiento en el borde del contacto. Arriba, esquema de la distribución de la tensión  $\sigma_{yy}$  a lo largo de la zona del contacto cuando  $t = 4$ . Abajo, solución obtenida numéricamente mediante ABAQUS.

Cuando  $\sigma_{\text{Bulk}}$  es negativa,  $t = 4$ , se agudizan las diferencias, siendo la tensión  $\sigma_{yy}$  tanto mayor cuanto más cerca está del punto singular, como se muestra en la Fig. 5.17.

Aunque en el caso de contacto completo resulta evidente que el punto más crítico es el extremo de la zona de contacto, se han calculado los parámetros de tensión equivalente de los criterios de fatiga multiaxial a lo largo de la zona situada a  $100 \mu\text{m}$  a ambos lados del borde del contacto. Para dibujar los parámetros de daño en la misma gráfica, se han normalizado estos valores por el valor de cada parámetro de tensión equivalente multiplicándose por el límite de fatiga. En la Fig. 5.18 se muestran los parámetros de tensión equivalente normalizados de los criterios de fatiga multiaxial, donde se aprecia la influencia del punto singular en el entorno de  $x = 0$ .

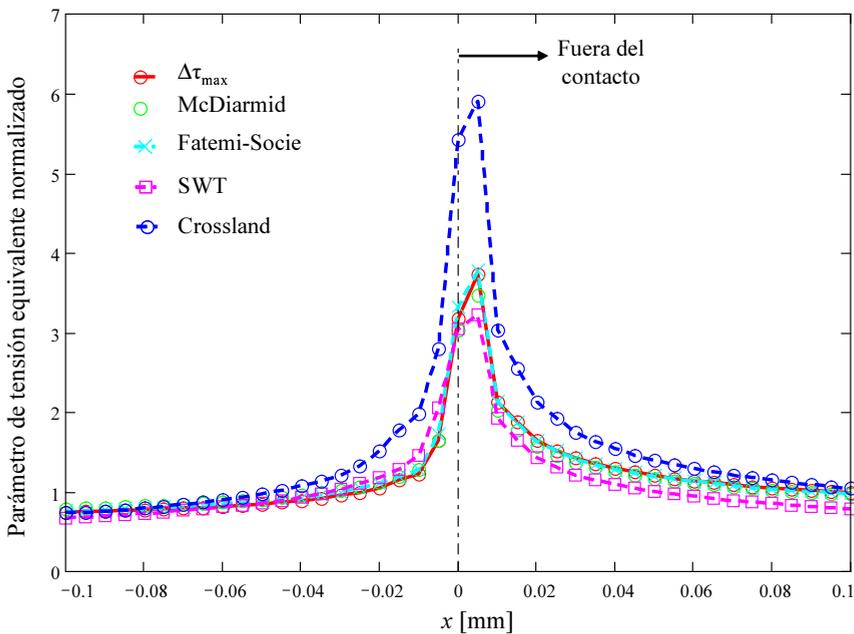


FIGURA 5.18: *Parámetros de tensión equivalente normalizados para cada criterio de fatiga multiaxial a lo largo de la zona estudiada.*

Como puede observarse, la posición de la iniciación sería más probable justo a la derecha del punto singular, es decir, cuando  $x$  está entre 0 y  $5 \mu\text{m}$ , donde los valores de los parámetros de tensión equivalente son máximos. Además, los resultados obtenidos predicen un mayor nivel de daño en la zona situada justo a la derecha del contacto.

En la Fig. 5.19 se representan los ángulos obtenidos a lo largo de la zona estudiada, utilizando los distintos criterios que utilizan el plano crítico. Estos ángulos corresponden a la inclinación de los planos donde se da el máximo valor del parámetro analizado. Como puede observarse al aplicar el criterio de  $\Delta\tau_{\text{max}}$  se obtienen dos planos críticos perpendiculares entre sí, siendo ambos posibles planos para la iniciación de grieta (LYKINS ET AL., 2001B).

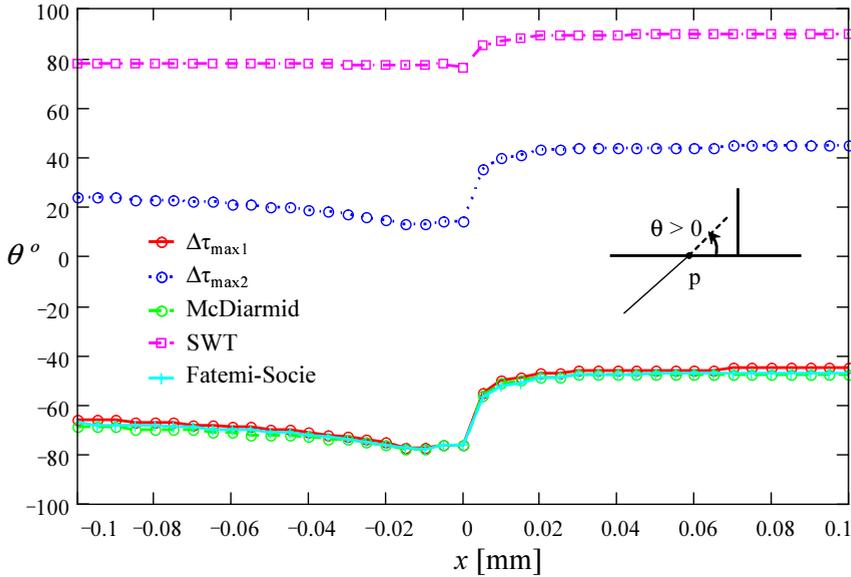


FIGURA 5.19: Ángulos correspondientes al plano donde los distintos criterios de plano crítico alcanzan su valor máximo a lo largo de la zona estudiada.

La diferencia entre ellos es que uno, el situado a ángulos positivos, indica que la grieta se inicia hacia dentro de la zona del contacto, y el otro, el situado a ángulos negativos, indica que la grieta se inicia hacia fuera de la zona del contacto. Otra observación es que fuera de la zona del contacto ( $x > 0$ ), las cargas tienden a ser uniaxiales y por tanto el ángulo del  $\Delta\tau_{\max}$  es aproximadamente  $\pm 45^\circ$ .

Al aplicar los criterios de McDiarmid y Fatemi-Socie se obtiene un valor ligeramente superior para el plano crítico con  $\theta < 0$ , por lo que la dirección de la grieta sería hacia fuera de la zona del contacto, lo que está en contra de la evidencia experimental, que muestra que la grieta crece ligeramente hacia dentro. En la Fig. 5.20 se representa el parámetro de la tensión equivalente del criterio de McDiarmid ( $\sigma_{eq}$ ).

Puede observarse que no hay mucha diferencia en el parámetro  $\sigma_{eq}$  para los dos posibles planos críticos y que la tensión normal al plano  $\theta < 0$  es ligeramente mayor, tal y como se muestra en la Fig. 5.21. Por tanto según este criterio, la grieta siempre se inicia hacia fuera de la zona del contacto. Resultados análogos se tienen al aplicar el criterio de Fatemi-Socie.

Al aplicar el criterio de SWT (un criterio dominado por tensiones normales), se obtiene un plano crítico con ángulo positivo (ver Fig. 5.19), es decir, que la dirección de la iniciación de grieta sería hacia dentro de la zona del contacto, y casi perpendicular a la superficie. Por otra parte, se puede ver que fuera de la zona del contacto ( $x > 0$ ) el ángulo es siempre  $90^\circ$ , debido al estado de tensiones prácticamente uniaxial. Los resultados mediante este criterio dan un ángulo de iniciación superior al obtenido

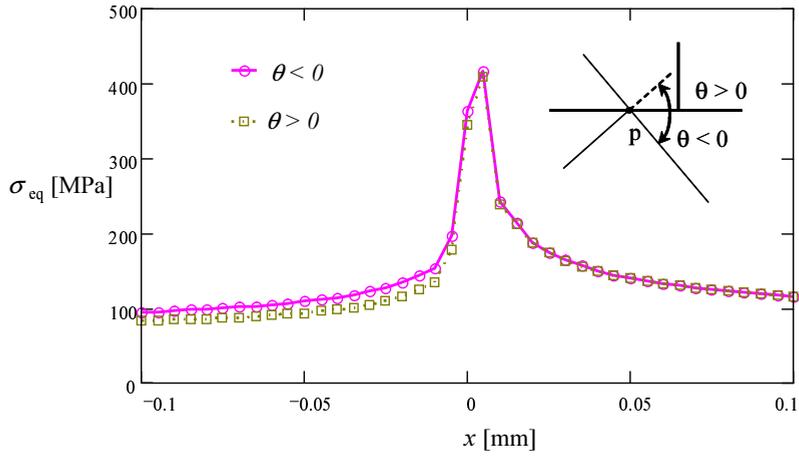


FIGURA 5.20: Tensión equivalente del criterio de McDiarmid para los dos planos críticos.

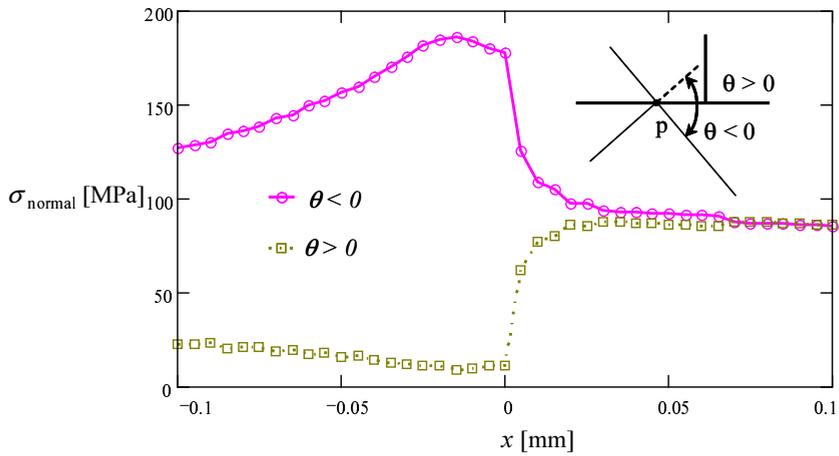


FIGURA 5.21: Tensión normal sobre cada plano crítico en el criterio de McDiarmid.

experimentalmente.

## 5.4.2. Planteamiento de Lamacq y Dubourg

### 5.4.2.1. Grietas de iniciación Tipo I (iniciación por tensiones tangenciales)

Como se ha comentado anteriormente, si se aplica el criterio de  $\Delta\tau_{\max}$ , hay dos posibles planos críticos para que la grieta se inicie paralela a uno de ellos (en la Fig. 5.22 se pueden observar las evoluciones de  $\Delta\tau$  para la posición  $x = 0$ ). LAMACQ Y DUBOURG (1999) explicaron que las grietas de iniciación tipo I (es decir, dominadas por tensiones tangenciales en la iniciación) se inician en la dirección donde se cumple que  $\Delta\tau = \Delta\tau_{\max}$  y a la vez, el valor de la tensión alternante efectiva<sup>1</sup>  $\sigma_a$  de las tensiones normales a este plano es mínimo. La expresión para calcular  $\sigma_a$  viene dada por la Ec. (5.2).

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (5.2)$$

Aplicando este planteamiento en la posición  $x = 0$  se obtienen los resultados mostrados en la Fig. 5.23. Como puede observarse, los ángulos de los dos posibles planos críticos son  $\theta_1 = -75^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ , y los valores de las tensiones  $\sigma_a$  para cada plano son:  $\sigma_a(\theta_1) = 88.4$  MPa,  $\sigma_a(\theta_2) = 6.3$  MPa. Por tanto, al seguir este planteamiento el plano crítico donde se iniciará la grieta tiene un ángulo  $\theta_2 = 15^\circ$ , es decir, que la grieta se inicia hacia dentro de la zona del contacto, tal y como se ha constatado experimentalmente por diversos autores (LAMACQ Y DUBOURG, 1999; WITTKOWSKY ET AL., 2000).

El método de los elementos finitos tiene como limitación la falta de precisión en el entorno de la singularidad, por lo que los resultados anteriores pueden ser cuestionados al tratarse de estimaciones en  $x=0$ . YAMASHITA Y MURA (1983) manifestaron que cuando hay una concentración de tensiones, el valor de las tensiones en un punto no gobierna la fatiga, por lo que se debe considerar un volumen de material bajo estas tensiones elevadas. Por tanto, en esta Tesis se ha aplicado el proceso de cálculo a una región, considerando tres radios  $R = 10, 20$  y  $30 \mu\text{m}$  desde el punto singular y promediando para calcular el ángulo. Con esta metodología se ha obtenido un ángulo de  $22^\circ$ , por lo que no se tienen diferencias considerables entre la aplicación del método directamente en la posición  $x = 0$  y considerando un volumen alrededor de este punto.

### 5.4.2.2. Transición de grieta fase I/II

Para obtener más información acerca de la transición fase I/II para este tipo de grieta, tipo I, se ha estudiado las tensiones a lo largo de la dirección estimada  $\theta = 15^\circ$ , considerando una distancia radial  $r$  de 0 a  $200 \mu\text{m}$ . Se ha utilizando el modelo numérico sin grieta presentado en la Fig. 5.24. Se sigue aquí el planteamiento de LAMACQ Y DUBOURG (1999) por el que se postula que una grieta tipo I (dominada por las

<sup>1</sup>Si hay valores negativos, entonces se toman como 0.

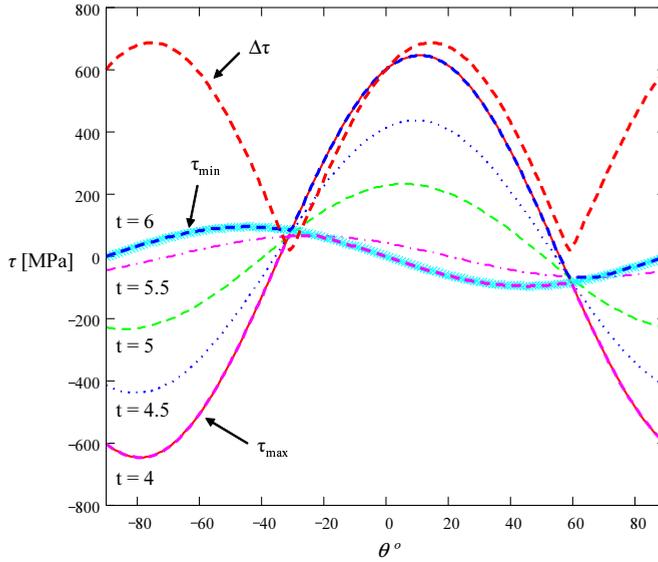


FIGURA 5.22: Evolución de la tensión tangencial a lo largo del ciclo en función del ángulo  $\theta$ .

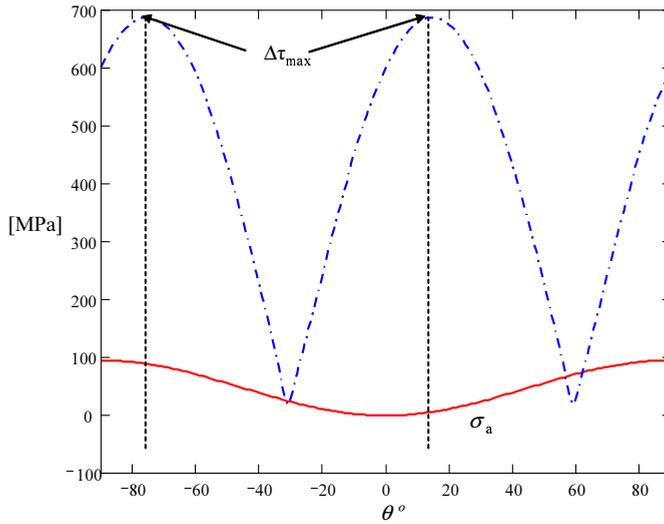


FIGURA 5.23: Tensión alternante efectiva  $\sigma_a$  y  $\Delta\tau$  en función del ángulo, según el planteamiento de LAMACQ Y DUBOURG (1999).

tensiones tangenciales) deja de crecer en modo II para pasar a propagación en modo I (transición fase I/II) cuando las tensiones normales que experimentan en la dirección de iniciación ( $\theta = 15^\circ$  en este caso) pasan a ser de compresión.

En la Fig. 5.25 se representan las tensiones  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$  y  $\Delta\tau$  a lo largo de la distancia

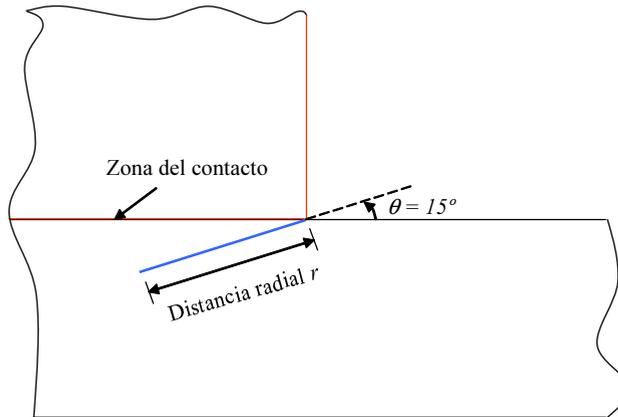


FIGURA 5.24: Esquema de la dirección radial con  $r$  de 0 a 200  $\mu\text{m}$  y para el ángulo estimado de  $\theta = 15^\circ$ .

radial  $r$  de 0 a 200  $\mu\text{m}$  para la dirección  $\theta = 15^\circ$ .

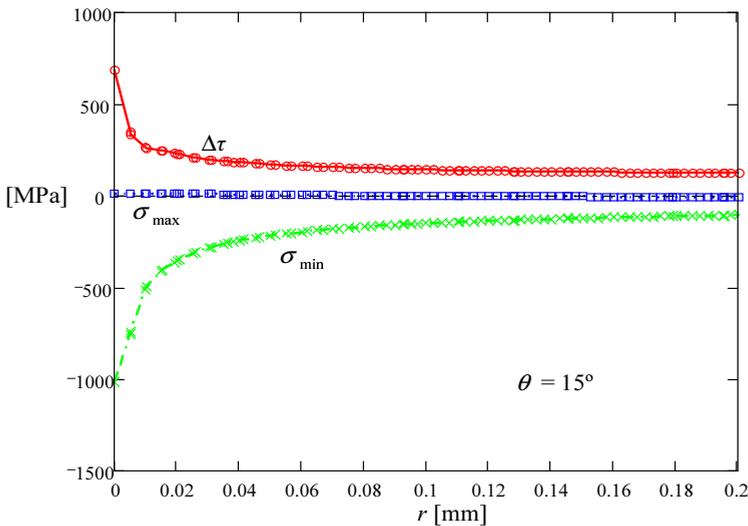


FIGURA 5.25: Evolución de las tensiones  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  y  $\Delta\tau$  a lo largo de la distancia radial  $r$  de 0 a 200  $\mu\text{m}$  para la dirección  $\theta = 15^\circ$ .

Puede observarse que  $\Delta\tau$  (el motor del crecimiento por tangenciales) disminuye rápidamente con la distancia radial. La tensión normal a la dirección de la grieta  $\sigma_{\max}$  comienza a tomar valores negativos (compresión) a una distancia  $r \approx 90 \mu\text{m}$ . Por tanto, a partir de esta distancia, la tensión normal durante todo el ciclo es de compresión y  $\Delta\tau$  se reduce al 50%. De este modo, la grieta o bien se detiene debido a la elevada fricción entre caras de grieta durante todo el ciclo (al ser  $\sigma$  de compresión) o bien cambia de dirección para seguir su propagación. En este punto se produciría

la transición fase I/II, en concordancia con los estudios realizados por LAMACQ Y DUBOURG (1999); DUBOURG Y LAMACQ (2000).

### 5.4.2.3. Grietas de iniciación Tipo II (iniciación por tensiones normales)

Para las grietas de iniciación tipo II, LAMACQ Y DUBOURG (1999) explicaron que la dirección con la que crece la grieta es la dirección en la que el valor del rango efectivo de la tensión normal  $\Delta\sigma_{\text{eff}}$  a esta dirección es máxima y que en esta dirección el valor de  $\Delta\tau$  tiende a su valor mínimo. El rango efectivo de la tensión normal viene dado por:

$$\Delta\sigma_{\text{eff}} = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2} \quad \text{con} \quad \sigma_{\text{min}} = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_{\text{min}} < 0 \quad (5.3)$$

El rango  $\Delta\sigma$  se define simplemente como:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2} \quad (5.4)$$

En la Fig. 5.27 puede observarse que el ángulo que da el valor máximo de  $\Delta\sigma_{\text{eff}}$  es  $90^\circ$ . Sin embargo, en este ángulo el valor de  $\Delta\tau$  obtenido no es el mínimo.

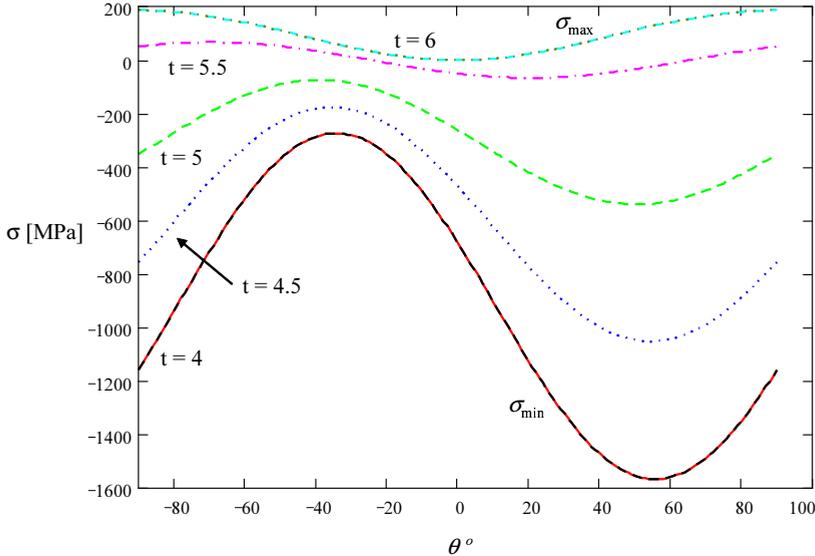


FIGURA 5.26: Evolución de la tensión normal a lo largo del ciclo en función del ángulo  $\theta$ .

Por ello, en esta Tesis se ha propuesto un nuevo planteamiento para determinar la dirección de iniciación de grieta tipo II, que consiste en utilizar el concepto del valor mínimo de  $\Delta\tau$ , en lugar de utilizar el valor máximo de  $\Delta\sigma_{\text{eff}}$ . Este enfoque está basado

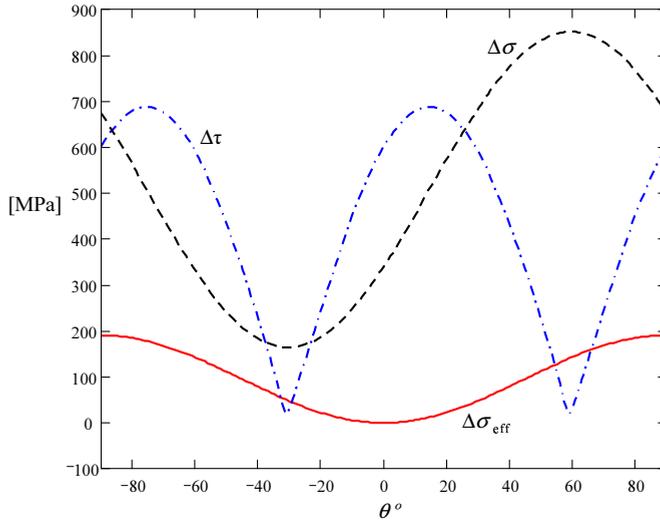


FIGURA 5.27: Amplitud efectiva de la tensión normal  $\Delta\sigma_{\text{eff}}$  y  $\Delta\tau$  en función del ángulo.

en el concepto de la energía necesaria para el crecimiento de grieta, donde se propone que la grieta crece en la dirección donde la energía perdida por fricción es mínima. Por tanto, la iniciación se producirá en la dirección donde se dé una cierta tensión útil de apertura, con mayor energía disponible para crecer con menor disipación. De alguna manera, el criterio propuesto es la extensión para cargas no proporcionales de los criterios clásicos de MFEL que predicen una dirección de crecimiento en la que  $K_{II}$  sea 0.

En la Fig. 5.27 se observan dos ángulos con un valor mínimo de  $\Delta\tau$ . De estos dos ángulos la grieta se iniciará en la dirección donde  $\Delta\sigma_{\text{eff}}$  sea mayor. Así, el ángulo de iniciación de esta grieta tipo II será aproximadamente  $60^\circ$ . Este valor está en concordancia con las observaciones experimentales realizadas en los ensayos de esta Tesis, como se comentará más adelante. En este caso el ángulo de iniciación coincide con el valor máximo de  $\Delta\sigma$ .

Además, se analiza la transición fase I/II (iniciación/propagación) para este tipo de grieta. Para ello, se han estudiado las tensiones a lo largo de las direcciones  $\theta=60^\circ$  y  $75^\circ$ , para una distancia radial  $r$  de 0 a  $200\ \mu\text{m}$ .

En la Fig. 5.28 se representan las tensiones  $\sigma_{\text{max}}$ ,  $\sigma_{\text{min}}$  y  $\Delta\tau$  a lo largo de la distancia radial  $r$  de 0 a  $200\ \mu\text{m}$  para un ángulo  $\theta = 60^\circ$ .

Puede observarse que en la zona inicial, las primeras  $20\ \mu\text{m}$ ,  $\Delta\tau$  presenta valores próximos a cero, lo que confirma el valor obtenido anteriormente: el ángulo de  $60^\circ$  es un ángulo preferente desde el punto de vista del criterio propuesto en esta Tesis de  $\Delta\tau_{\text{min}}$ .

En la Fig. 5.29 se representan las tensiones  $\sigma_{\text{max}}$ ,  $\sigma_{\text{min}}$  y  $\Delta\tau$  a lo largo de la distancia

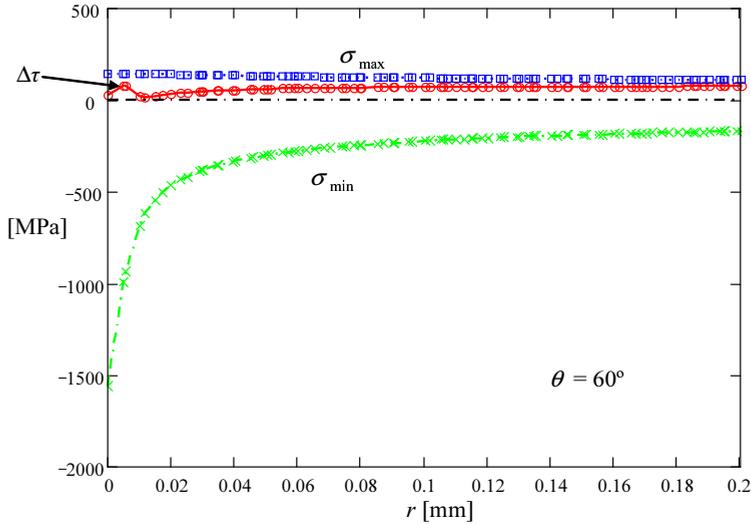


FIGURA 5.28: Evolución de las tensiones  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$  y  $\Delta\tau$  a lo largo de la distancia radial  $r$  de 0 a 200  $\mu\text{m}$  para la dirección  $\theta = 60^\circ$ .

radial  $r$  de 0 a 200  $\mu\text{m}$  para un ángulo  $\theta = 75^\circ$ . Puede observarse que  $\Delta\tau$  es elevado en la zona inicial pero tiende a cero a una cierta distancia. Esto supone que si una grieta se iniciara con un ángulo de  $75^\circ$ , se encontraría en un estado de tensiones de modo mixto. Por tanto, es más probable su crecimiento inicial en un ángulo  $\theta \approx 60^\circ$ , donde  $\Delta\tau$  es mínimo. Posteriormente, la grieta crece según la teoría propuesta, hacia ángulos donde  $\Delta\tau$  sea mínimo, con un mayor  $\Delta\sigma_{eff}$ .

Notar que todos los cálculos anteriores corresponden al ensayo 1 de la Tabla 5.2. La observación de las grietas a partir de los ensayos experimentales realizados, muestran una tipología de iniciación tipo II, es decir, grietas que se inician directamente bajo dominio de tensiones normales. Para las condiciones de carga del ensayo 1,  $P = 2 \text{ kN}$ ,  $\sigma_{Bulk} = 110 \text{ MPa}$ , se observó un ángulo experimental próximo a  $\theta \approx 60^\circ$ , tal y como se muestra en la Fig. 5.30.

En la Fig. 5.31 se muestran los ángulos de iniciación y propagación obtenidos para los ensayos 5, 11 y 15 de la Tabla 5.2. En todos los casos se puede observar un ángulo de iniciación comprendido entre  $60^\circ$  y  $75^\circ$  con ciertas variaciones debido a la influencia de la microestructura del material.

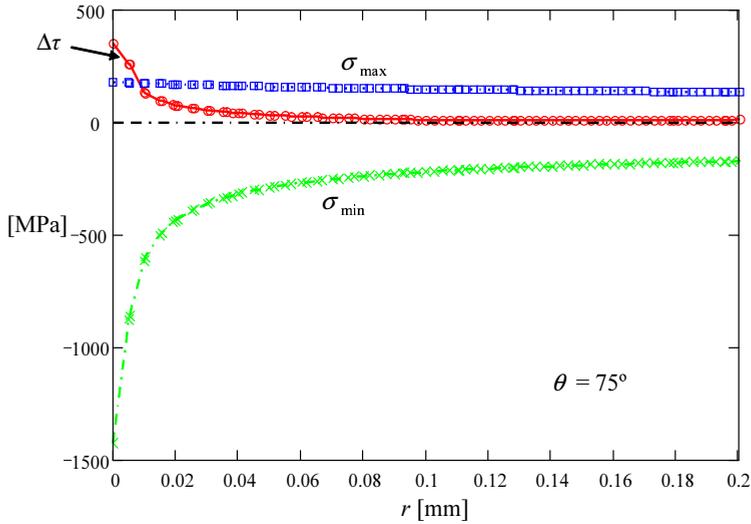


FIGURA 5.29: Evolución de las tensiones  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$  y  $\Delta\tau$  a lo largo de la distancia radial  $r$  de 0 a  $200\ \mu\text{m}$  para la dirección  $\theta = 75^\circ$ .

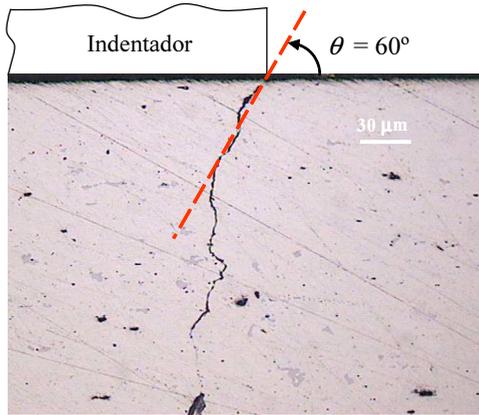


FIGURA 5.30: Micrografía de la grieta inicial obtenida en el ensayo 1,  $P = 2\ \text{kN}$ , con carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110\ \text{MPa}$ .

## 5.5. Estudio de propagación de grieta con X-FEM

En este apartado se simula mediante X-FEM la propagación de grieta desde una grieta inicial hasta una profundidad determinada, aplicando algunos de los diferentes criterios de propagación descritos en el apartado 3.3.

En la Fig. 5.32 se presentan las micrografías de las probetas correspondientes a los ensayos 1, 5, 8 y 15 de la Tabla 5.2, donde se puede observar la orientación de propagación de grieta para las condiciones de carga analizadas. En todos los ensayos realizados

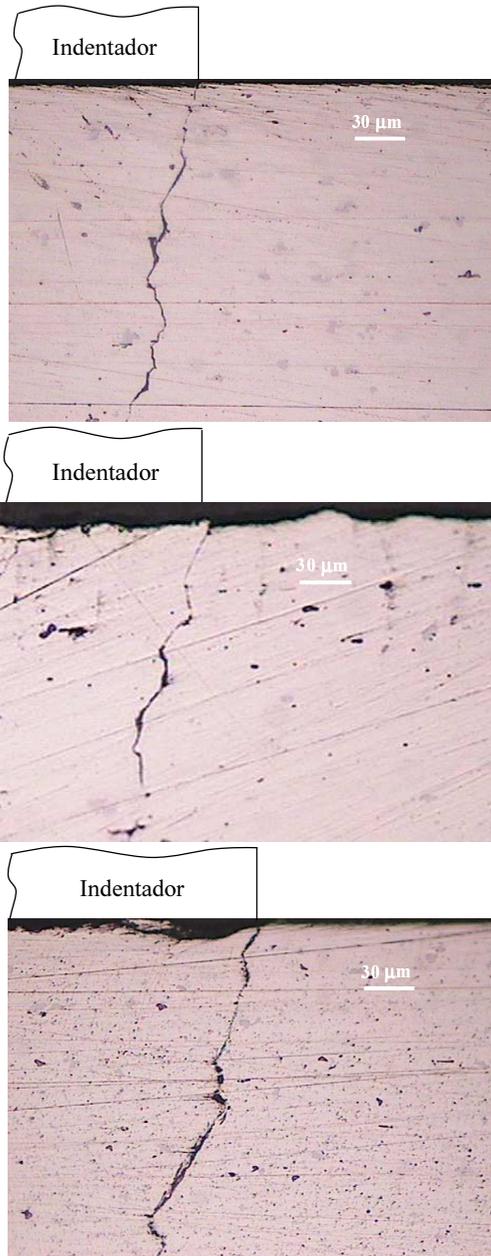


FIGURA 5.31: Grieta inicial de los ensayo 5, 11 y 15 (de arriba abajo) donde puede observarse un ángulo inicial  $\theta \approx 75^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $60^\circ$ .

se obtiene una tendencia similar, con una dirección de propagación de grieta hacia el interior de la zona del contacto.



FIGURA 5.32: Micrografías de las probetas correspondientes a los ensayos 1, 5, 8 y 15 de la Tabla 5.2. Como referencia, la longitud total de la grieta mostrada a la izquierda es aproximadamente 2 mm

Se ha utilizado la geometría mostrada en la Fig. 5.7, considerando 6 pasos de carga

en el análisis y utilizando  $R = -1$ . Como condiciones de carga se han utilizado las condiciones del ensayo 1 de la Tabla 5.2. Se ha considerado una longitud inicial de grieta  $a_0 = 50 \mu\text{m}$ , con un ángulo de iniciación  $\theta_0 = 60^\circ$ , medido desde la superficie del contacto del indentador, Fig. 5.33. Se ha tomado un coeficiente de fricción entre caras de grieta  $\mu = 0.8$ . En la Fig. 5.33 se puede observar la grieta inicial y los elementos enriquecidos de Heaviside y extremo de grieta.

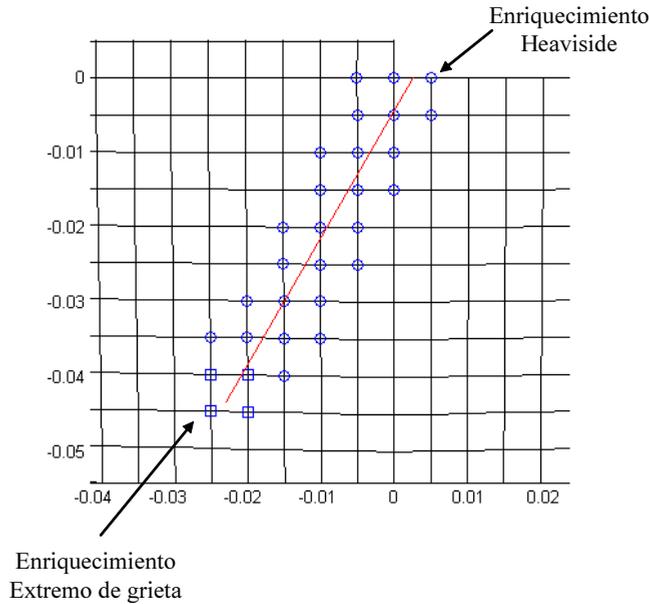


FIGURA 5.33: Grieta inicial estudiada para el ensayo 1,  $P = 2 \text{ kN}$ , y la carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110 \text{ MPa}$ . La longitud inicial es  $50 \mu\text{m}$  y el ángulo inicial es  $60^\circ$ .

En las Fig. 5.34, 5.35 y 5.36 se presentan los incrementos de propagación con los ángulos obtenidos mediante la teoría propuesta. El criterio seguido es analizar el estado tensional en elementos por delante del extremo de grieta y determinar la dirección en la que el campo de tensiones presenta un  $\Delta\tau_{\text{min}}$  a lo largo del ciclo. El crecimiento de la grieta en X-FEM se modela introduciendo un  $\Delta a$  en la dirección determinada y repitiendo el proceso. El ángulo obtenido para el análisis con la grieta inicial es  $17^\circ$  medido desde el plano de grieta en sentido antihorario.

Puede observarse que la trayectoria obtenida numéricamente tiende a coincidir con la obtenida experimentalmente. De esta forma, el criterio propuesto permite simular con X-FEM la propagación de grieta en fretting fatiga.

Los resultados obtenidos contrastan con la aplicación del criterio MTS al estado de  $\sigma_{\text{Bulk}}$  máximo (ver GINER ET AL. (2008)), es decir, que se ha estudiado  $K_{\text{I}}$ ,  $K_{\text{II}}$  sólo para el estado máximo de  $\sigma_{\text{Bulk}}$ , y que como se ha visto en este ejemplo corresponde a una situación de despegue del extremo de contacto, por lo que las tensiones en esta zona prácticamente corresponden a una situación de *plain fatigue* y la grieta crece

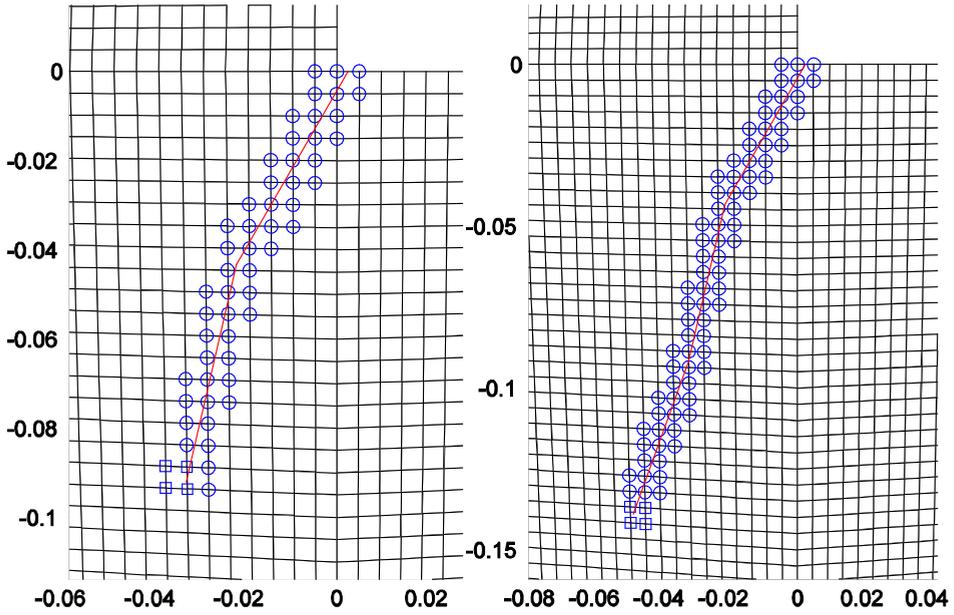


FIGURA 5.34: *El primer y el segundo incremento de la grieta estudiada mostrando el cambio de orientación con respecto al plano de grieta previo.*

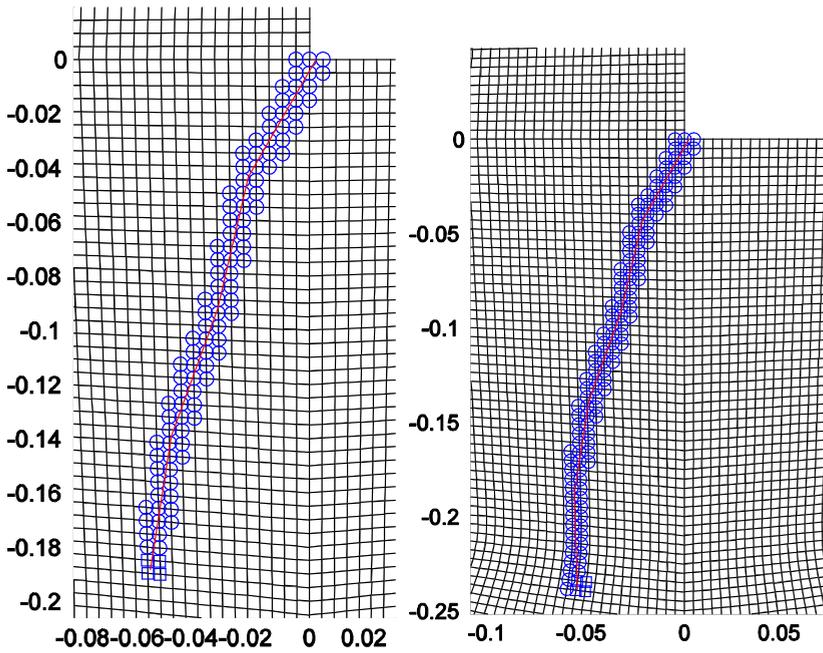


FIGURA 5.35: *El tercer y el cuarto incremento de la grieta estudiada.*

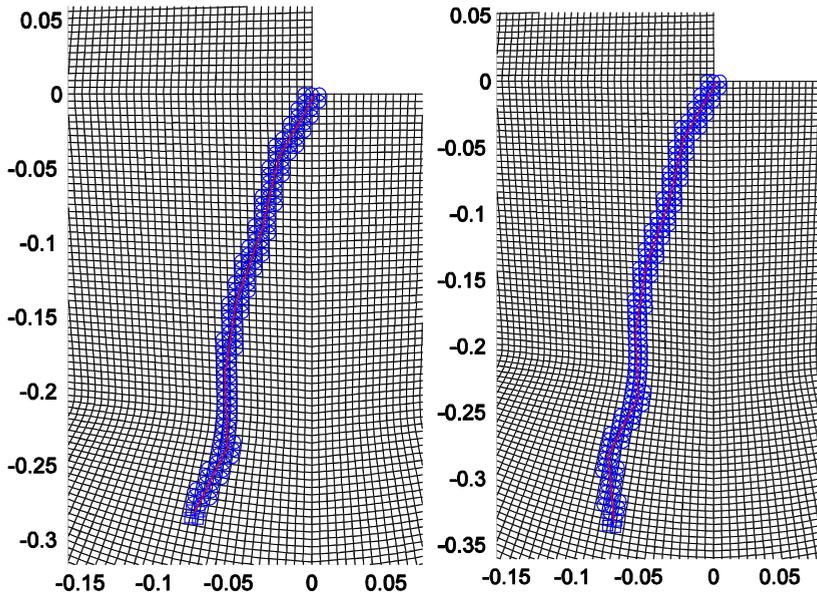


FIGURA 5.36: El quinto y el sexto incremento de la grieta estudiada.

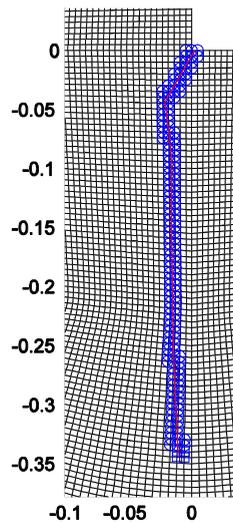


FIGURA 5.37: Orientación de grieta para el ensayo 1,  $P = 2$  kN, y la carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110$  MPa, utilizando el criterio MTS.

normal a la carga  $\sigma_{\text{Bulk}}$ , tal y como se muestra en la Fig. 5.37.

Por último se ha aplicado el criterio de  $\Delta\tau_{\text{min}}$  al caso de carga normal elevada (ensayo 3 de la Tabla 5.2)  $P = 8$  kN, y la carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110$  MPa. Se puede observar

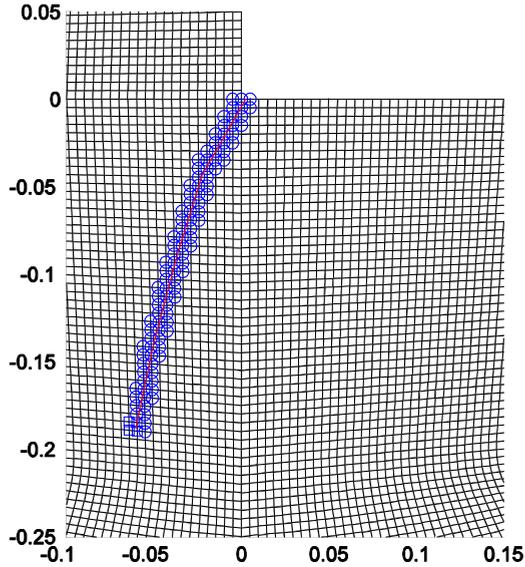


FIGURA 5.38: Orientación de grieta para el ensayo 3,  $P = 8 \text{ kN}$ , y la carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110 \text{ MPa}$ , utilizando el criterio  $\Delta\tau_{\text{min}}$ .

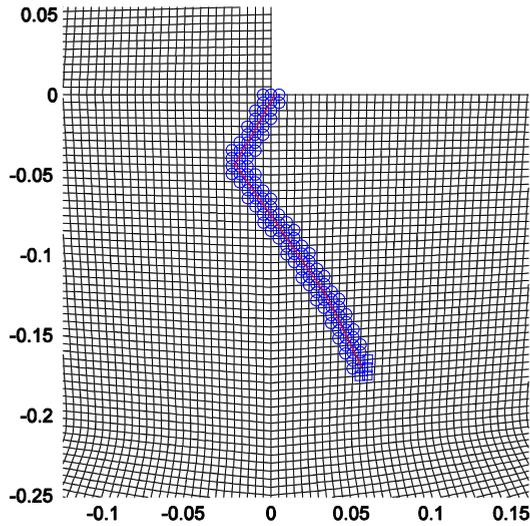


FIGURA 5.39: Orientación de grieta para el ensayo 3,  $P = 8 \text{ kN}$ , y la carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110 \text{ MPa}$ , utilizando el criterio MTS.

en la Fig. 5.38 que la orientación de grieta está en concordancia con los resultados experimentales (la grieta crece hacia el interior del contacto).

En la Fig. 5.39 se representa la orientación de grieta para el ensayo 3,  $P = 8 \text{ kN}$ , y la carga cíclica  $\sigma_{\text{Bulk}} = 110 \text{ MPa}$ , utilizando el criterio MTS, se puede observar que

la predicción no es correcta, es decir, que la grieta se orienta hacia fuera de la zona de contacto, debido a que en el criterio MTS se estudia  $K_I$ ,  $K_{II}$  sólo para el estado máximo de  $\sigma_{\text{Bulk}}$  (ver GINER ET AL. (2008)).



## Capítulo 6

# Estimación de la vida de fatiga a partir de los análisis de X-FEM y correlación experimental

### Resumen del Capítulo:

*Este capítulo se dedica a la estimación de vida de fretting fatiga mediante el método de longitud de iniciación variable. Se estudia la estimación de vida para el caso de contacto cilíndrico, analíticamente y mediante el método X-FEM, y se comparan los resultados obtenidos con los resultados experimentales de SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) y ARAÚJO Y NOWELL (2002). Además se estima la vida para los ensayos realizados para contacto completo, de forma analítica y mediante X-FEM, comparando estos resultados con los obtenidos experimentalmente.*



## 6.1. Estimación de vida en contacto cilíndrico

En este apartado se estudia la estimación de vida de fretting fatiga en contacto cilíndrico mediante el método de longitud de iniciación variable. Se realiza la estimación de vida analíticamente (de forma análoga a lo realizado por NAVARRO ET AL. (2008)) y mediante el método X-FEM, y se comparan los resultados obtenidos con los resultados experimentales de SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) y ARAÚJO Y NOWELL (2002).

### 6.1.1. Resultados obtenidos por Szolwinski y Farris

En la Tabla 6.1 se muestran las condiciones de carga, y el número de ciclos hasta el fallo de algunos de los ensayos experimentales realizados por SZOLWINSKI Y FARRIS (1998) con distintos indentadores cilíndricos de radio  $R$ .

Ensayo	$P$ (kN)	Radio $R$ (mm)	$\sigma_{\text{Bulk}}$ (MPa)	$Q/P$	$N_{\text{fallo}}$ (ciclos)
1 (MAF1a)	5.454	229	111.7	0.43	238000
2 (MAF4x)	5.370	127	88.4	0.35	563946
3 (MAF5a)	7.226	127	101.9	0.31	545489
4 (MAF9x)	6.268	229	85.4	0.32	856524
5 (MAF10x)	5.201	127	115.8	0.52	465000
6 (MAF14x)	5.293	229	81.0	0.31	867330
7 (MAF15x)	5.325	229	82.9	0.26	768364
8 (MAF21x)	7.153	229	97.9	0.24	463324
9 (MAF22x)	6.176	178	84.7	0.27	621442

TABLA 6.1: *Ensayos y resultados obtenidos por SZOLWINSKI Y FARRIS (1998)*

Estos ensayos se realizaron con una aleación de aluminio Al2024-T351, cuyas propiedades se presentan en la Tabla 6.2, según se recogen en NAVARRO ET AL. (2008).

#### 6.1.1.1. Descripción del modelo numérico

Para los cálculos realizados mediante el método de los elementos finitos se ha utilizado un modelo 2D, tal y como se muestra en la Fig. 6.1.

La placa rectangular  $2L \times h$  corresponde a la probeta ensayada, de dimensiones  $L=10$  mm y  $h=6.35$  mm. El radio del cilindro en contacto va cambiando según los valores mostrados en la Tabla 6.2. Los desplazamientos verticales de la parte inferior de la placa están restringidos a través de la restricción de los nodos situados en estas posiciones, Fig. 6.1. Se han utilizado restricciones multipunto (MPC) entre los grados de libertad en  $x$  de los nodos situados en  $x = -L$  para que todos tengan los mismos desplazamientos. Análogamente para los desplazamientos en  $x$  de los nodos en  $x = L$  y para los desplazamientos en  $y$  de los nodos en la parte superior del indentador cilíndrico.

Módulo de Young	$E$	74.1 GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0.33
Límite elástico	$\sigma_y$	310 MPa
Límite de rotura	$\sigma_u$	470 MPa
Límite de fatiga	$\sigma_f$	235 MPa
Coefficiente de fricción	$\mu$	0.65
Coefficiente de resistencia a fatiga	$\sigma'_f$	714 MPa
Tamaño de grano	$D$	50 $\mu\text{m}$
Umbral del crecimiento	$\Delta K_{th}$	2.1 MPa $\sqrt{\text{m}}$
Exponente de resistencia a fatiga	$b$	-0.078
Coefficiente de Ley de Paris ( $R=0$ )	$C$	$6.529 \times 10^{-11} \text{ (m/ciclo) / (MPa m}^{0.5})^n$
Exponente de Ley de Paris ( $R=0$ )	$n$	3.387

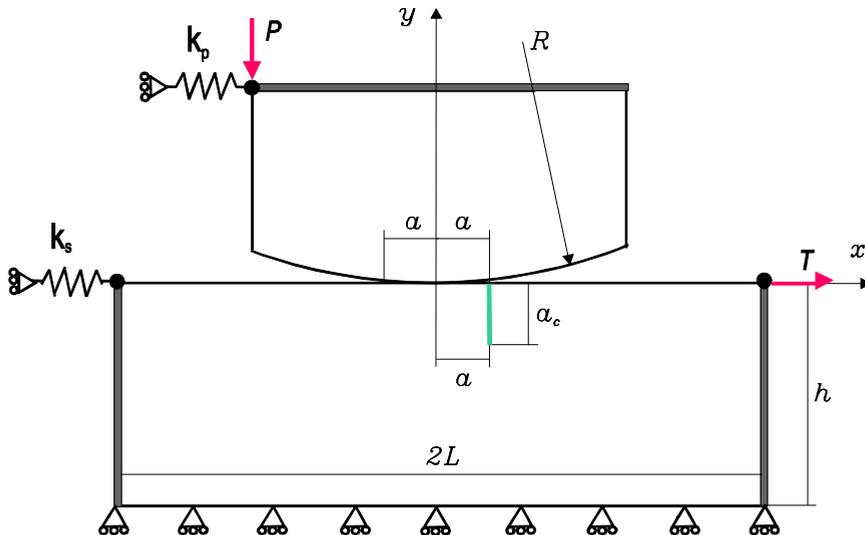
TABLA 6.2: Propiedades mecánicas y de fatiga de la aleación Al2024-T351,  $R = -1$ 

FIGURA 6.1: Geometría del modelo numérico de los ensayos de Szolwinski y Farris.

La aplicación de la fuerza  $T$  produce la tensión  $\sigma_{\text{Bulk}}$  y la carga tangencial inducida  $Q$  ejercida por el resorte  $k_p$ . La carga  $Q$  se transmite a través de la zona del contacto por el rozamiento, y está controlada por la rigidez relativa de los muelles equivalentes  $k_s$  y  $k_p$ .

En el análisis se han considerado 2 pasos de carga: en el primero, se aplica únicamente la carga normal  $P$ , y se ha evitado el movimiento de sólido rígido imponiendo restricciones de los nodos en  $x = -L$  y  $x = L$ . En el segundo, se eliminan estas restricciones y se aplica progresivamente la fuerza  $T$  que genera la tensión  $\sigma_{\text{Bulk}}$  en la probeta,

hasta su valor máximo.

Para determinar la posición de la iniciación de grieta, se ha analizado la zona del contacto mediante el método de elementos finitos sin considerar la presencia de la grieta. Las distribuciones de los campos de tensiones en dicha zona, se muestran en las Figs. 6.2, 6.3 y 6.4.

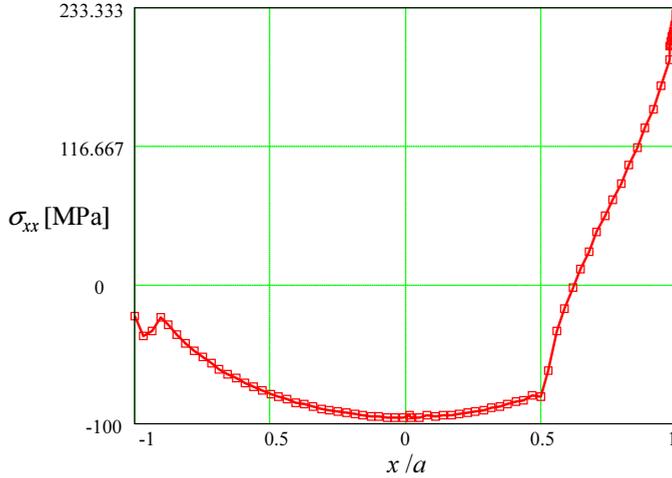


FIGURA 6.2: Distribución de  $\sigma_{xx}$  a lo largo de la zona del contacto obtenida por EF, para el ensayo 5 de la Tabla 6.1.

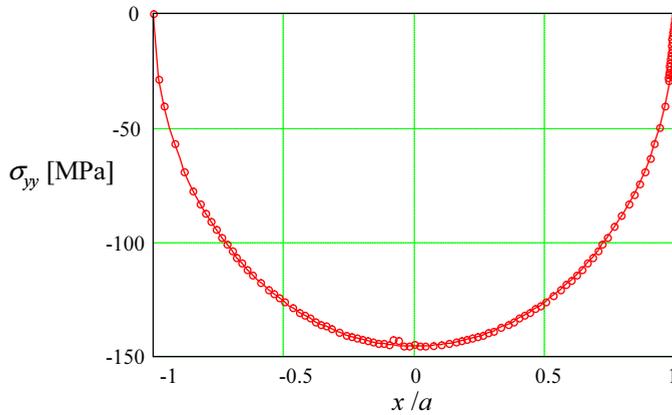


FIGURA 6.3: Distribución de  $\sigma_{yy}$  a lo largo de la zona del contacto obtenida por EF, para el ensayo 5 de la Tabla 6.1.

Como puede observarse, la tensión  $\sigma_{xx}$  es muy elevada en el extremo derecho de la zona del contacto  $x = a$ . Esto hace que esta posición sea especialmente desfavorable.

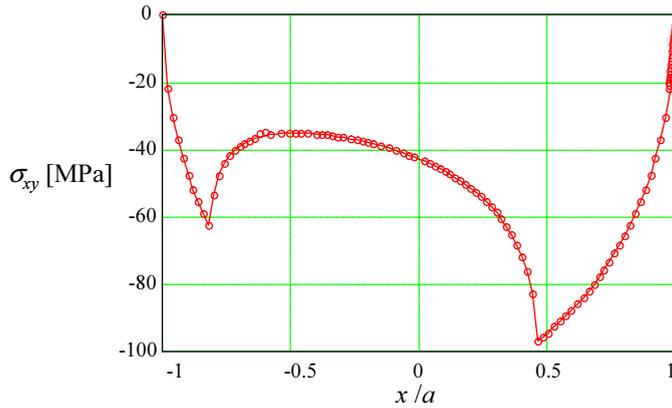


FIGURA 6.4: Distribución de  $\sigma_{xy}$  a lo largo de la zona del contacto obtenida por EF, para el ensayo 5 de la Tabla 6.1.

El análisis de la zona del contacto mediante la aplicación de los criterios multiaxiales descritos en el apartado 3.2, se presenta en la Fig. 6.5.

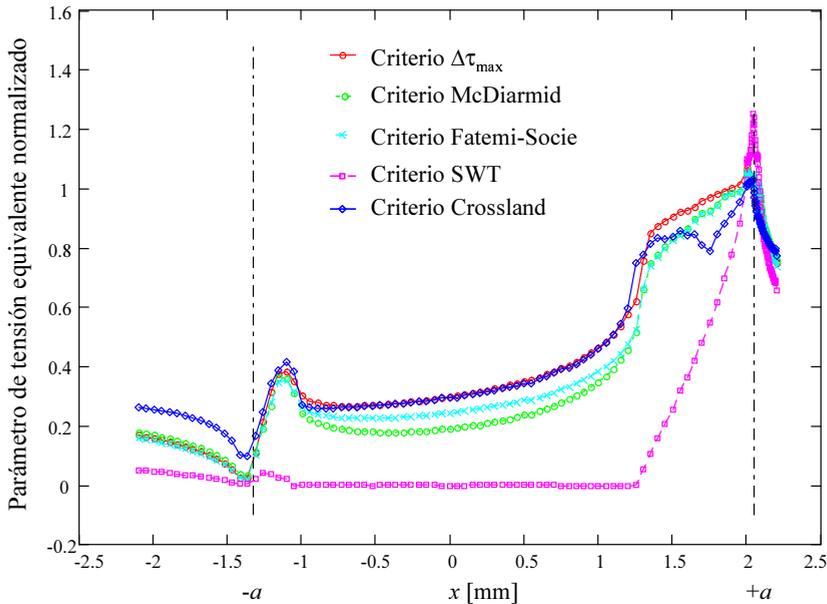


FIGURA 6.5: Valores de los parámetros de tensión equivalente normalizados para cada criterio multiaxial a lo largo de la zona del contacto.

En este caso, los valores máximos de los parámetros de tensión equivalente normalizados de cada criterio muestran claramente que la iniciación de grieta es más probable en el extremo derecho de la zona del contacto  $x = +a$  y en su entorno, en especial en la zona de deslizamiento parcial.

### 6.1.1.2. Cálculo de $K_I$ mediante X-FEM considerando la interacción grieta-contacto

En este apartado se calcula el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  utilizando el método X-FEM y se compara con el método analítico de la función de peso de BUECKNER (1973) y las aproximaciones disponibles en TADA ET AL. (1985) para grietas en placa (sin contacto). Para ello, se ha modelado una grieta vertical respecto a la superficie del contacto posicionada en la zona de iniciación más probable  $x = +a$ . La implementación de X-FEM en ABAQUS permite analizar paramétricamente una longitud de grieta variable con mucha facilidad, gracias a las ventajas que presenta el método, ya que no necesita rehacer la malla para cada longitud de grieta  $a_c$ .

Los valores de  $K_I$  presentados en la Fig. 6.6 se han adimensionalizado con la semianchura  $a$  en lugar de la longitud de grieta  $a_c$ , análogamente a lo presentado por HILLS Y NOWELL (1994).

Se puede observar que los valores de  $K_I$  obtenidos mediante X-FEM para grietas cortas  $a_c/a < 0.32$ , son mayores que los obtenidos por el método de función de peso de BUECKNER (1973) que asume una grieta SENT (Single Edge Notch Tension) tanto considerando excentricidad  $e$ , como sin considerarla (ver apartado 3.1.2), es decir, que al considerar la interacción grieta-contacto, la velocidad de crecimiento  $da/dN$  obtenida para grietas en fase I será mayor que la obtenida en el caso de considerar sólo un problema de fatiga (HILLS Y NOWELL, 1994; GINER ET AL., 2009D).

Los valores  $K_I$  obtenidos mediante X-FEM para grietas cortas  $a_c/a < 0.58$ , también resultan claramente superiores a los obtenidos por las aproximaciones SENT y DENT de TADA ET AL. (1985), que no incluyen contacto del indentador.

Debe aclararse que los valores y rangos de la relación  $a_c/a$  expuestos en la comparación anterior son los obtenidos para el ensayo 5 de la Tabla 6.1. Estos valores varían en función de las condiciones de cada ensayo.

Las diferencias obtenidas entre el método X-FEM y la aproximación analítica de BUECKNER (1973) se deben a la influencia de la grieta en la distribución de tensiones a lo largo del contacto (GINER ET AL., 2009D). Esta interacción grieta-contacto es recogida por el modelo numérico de X-FEM y no puede ser incorporada analíticamente por el método de las funciones de peso de BUECKNER (1973). En el caso de grietas largas, donde esta interacción no es tan notable, la causa de las diferencias entre ambos métodos es debida a la consideración de la tensión  $\sigma_{\text{Bulk}}$  uniforme en la aproximación analítica de BUECKNER (1973). En realidad, esta tensión no es uniforme en la vecindad del contacto, ya que las fuerzas axiales no son iguales a ambos lados del contacto, debido a que parte de la carga axial pasa a carga tangencial a través de los elementos del contacto (ver Fig. 3.1).

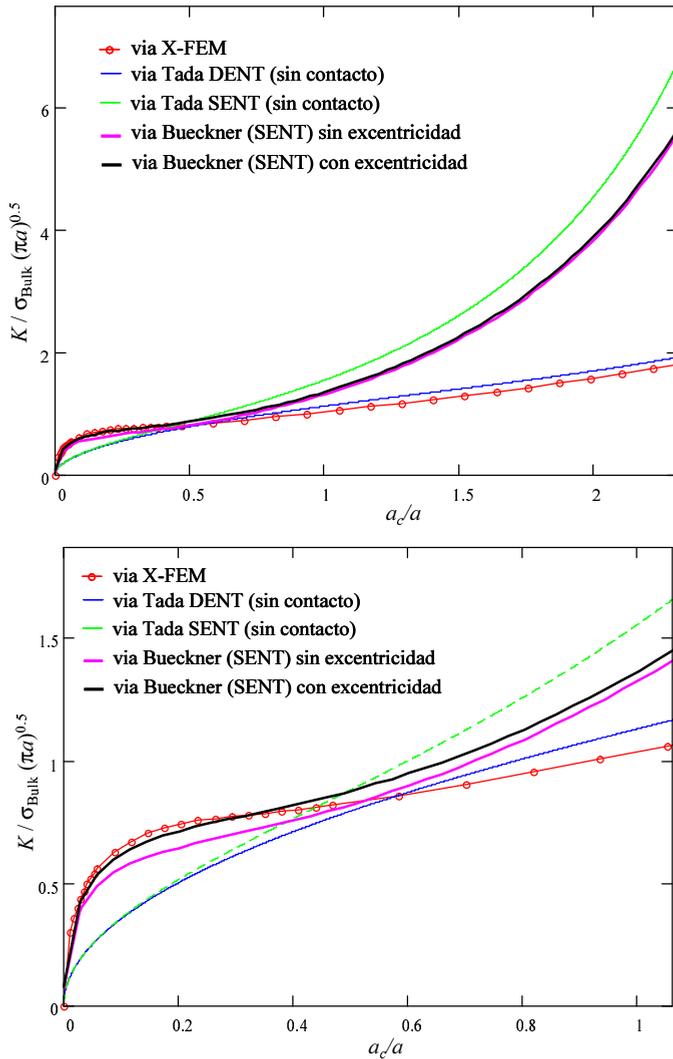


FIGURA 6.6: Comparación de  $K_I$  calculado mediante X-FEM, la función de peso de Bueckner y las aproximaciones de Tada para diferentes longitudes de grieta, para el ensayo 5 de la Tabla 6.1.

### 6.1.2. Resultados obtenidos por Araújo y Nowell

En la Tabla 6.3 se muestran las condiciones de carga, y el número de ciclos hasta el fallo de algunos de los ensayos experimentales realizados por ARAÚJO Y NOWELL (2002) con distintos indentadores cilíndrico de radio  $R$ .

Estos ensayos se realizaron con una aleación de aluminio Al 4%Cu (HE15-TF), cuyas propiedades se recogen en la Tabla 6.4 (NAVARRO ET AL., 2008).

Ensayo	$p_0$ (MPa)	Radio $R$ (mm)	$\sigma_{\text{Bulk}}$ (MPa)	$Q/P$	$N_{\text{falto}}$ (ciclos)
1	157	50	92.7	0.45	1290000
2	157	75	92.7	0.45	670000
3	143	100	92.7	0.45	610000
4	143	50	77.2	0.45	1200000
5	143	100	77.2	0.45	610000
6	120	150	61.8	0.45	1230000

TABLA 6.3: *Ensayos y resultados obtenidos por ARAÚJO Y NOWELL (2002)*

Módulo de Young	$E$	74 GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0.33
Límite elástico	$\sigma_y$	465 MPa
Límite de rotura	$\sigma_u$	500 MPa
Límite de fatiga	$\sigma_f$	124 MPa
Coefficiente de fricción	$\mu$	0.75
Coefficiente de resistencia a fatiga	$\sigma'_f$	1015 MPa
Tamaño de grano	$D$	50-100 $\mu\text{m}$
Umbral del crecimiento	$\Delta K_{th}$	2.1 MPa $\sqrt{\text{m}}$
Exponente de resistencia a fatiga	$b$	-0.11
Exponente de ductilidad a fatiga	$c$	-0.52
Coefficiente de ductilidad a fatiga	$\epsilon'_f$	0.21
Coefficiente de Ley de Paris ( $R=0$ )	$C$	$1.74 \times 10^{-10} (m/\text{ciclo}/(\text{MPa m}^{0.5})^n)$
Exponente de Ley de Paris ( $R=0$ )	$n$	4

TABLA 6.4: *Propiedades mecánicas y de fatiga de la aleación Al 4%Cu (HE15-TF),  $R = -1$* 

### 6.1.2.1. Descripción del modelo numérico

Los cálculos mediante el método de los elementos finitos se han realizado utilizando el modelo 2D mostrado en la Fig. 6.1. En esta serie de ensayos, las dimensiones son  $L = 12.5$  mm y  $h = 6.25$  mm y el radio del cilindro en contacto cambia según lo especificado en la Tabla 6.3. El análisis de las tensiones de contacto y la aplicación de los criterios de iniciación es totalmente análoga al descrito para los ensayos de Szolwinski y Farris en el apartado 6.1.1.1. La localización más probable de iniciación es de nuevo  $x = +a$ .

### 6.1.2.2. Cálculo de $K_I$ mediante X-FEM considerando la interacción grieta-contacto

La Fig. 6.7 muestra los resultados obtenidos para  $K_I$  en función de la profundidad, asumiendo una grieta a  $90^\circ$  con diferentes longitudes  $a_c$ .

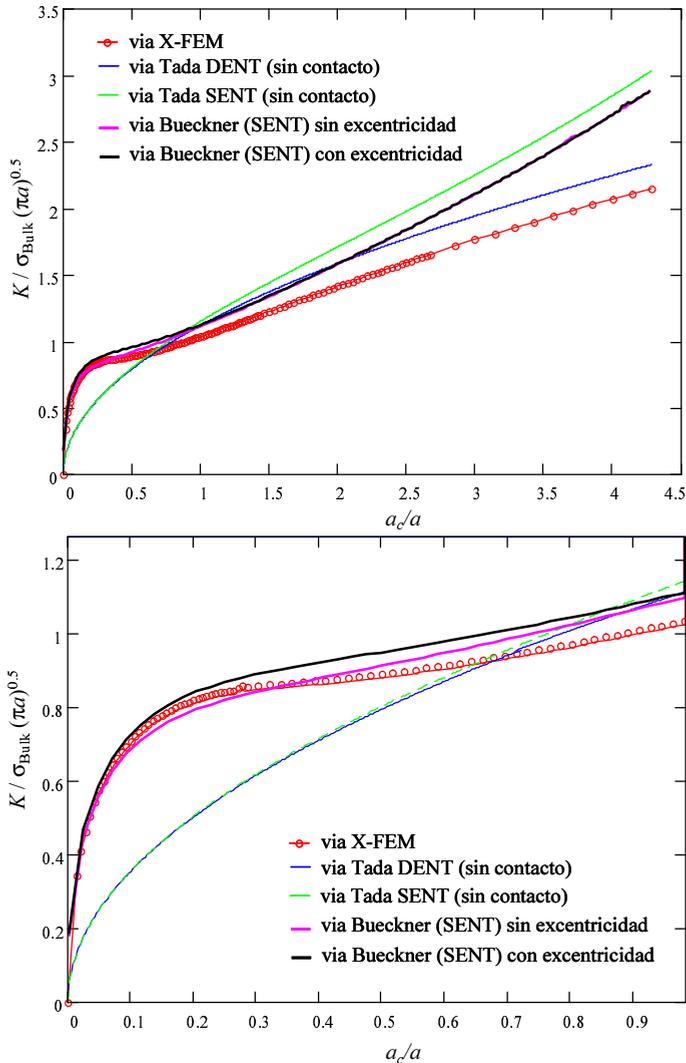


FIGURA 6.7: Valores de  $K_I$  obtenidos via X-FEM para diferentes longitudes de grieta, y comparación entre los métodos utilizados, para el ensayo 4 de la Tabla 6.3.

Como para los análisis mostrados en el apartado 6.1.1.2, se observa que los resultados obtenidos mediante X-FEM para grietas cortas son mayores que los obtenidos por el método de función de peso que asume una grieta SENT (Single Edge Notch Tension) tanto considerando excentricidad  $e$ , como sin considerarla, y para las aproximaciones

SENT y DENT de TADA ET AL. (1985).

Las diferencias obtenidas entre en método X-FEM y la aproximación analítica de BUECKNER (1973) se deben a la influencia de la grieta en la distribución de tensiones a lo largo del contacto (GINER ET AL., 2009D).

### 6.1.3. Comparación de los resultados analíticos y numéricos en la estimación de $da/dN$

El cálculo de la vida de iniciación se realiza empleando solamente la parte elástica de la curva  $\epsilon - N$ , es decir, las Ecs. (3.58) y (3.59). Para ello, se aplica el procedimiento explicado en el apartado 3.4.3.2 y en NAVARRO ET AL. (2003); NAVARRO (2005). Se trata del método de estimación de vida mediante longitud de iniciación variable, donde para el cálculo de la vida de iniciación se ha utilizado el criterio de McDiarmid aunque podrían haberse utilizado cualquiera de los criterio de fatiga multiaxial.

El cálculo de la vida de propagación se ha realizado utilizando la ley de Paris, Ec. (3.70), donde se ha utilizado por un lado, los resultados del FIT obtenidos analíticamente mediante la función de peso de BUECKNER (1973) y por otro los FITs numéricamente calculados vía X-FEM y la aplicación de la integral  $J$  en forma de integral de área.

En la Fig. 6.8 se muestra la vida estimada obtenida mediante X-FEM y la función de peso SENT de BUECKNER (1973), en relación con los resultados experimentales de los ensayos de Szolwinski y Farris, y los ensayos de Araújo y Nowell.

En casi todos los casos se obtiene una mejor estimación de vida mediante X-FEM, aunque el grado de sobreestimación o subestimación respecto a la vida real, varía en función de las condiciones de ensayo. En general, se observa un ligero acercamiento a la línea central, debido a la consideración de la interacción grieta-contacto con el método X-FEM en el cálculo de la vida de propagación.

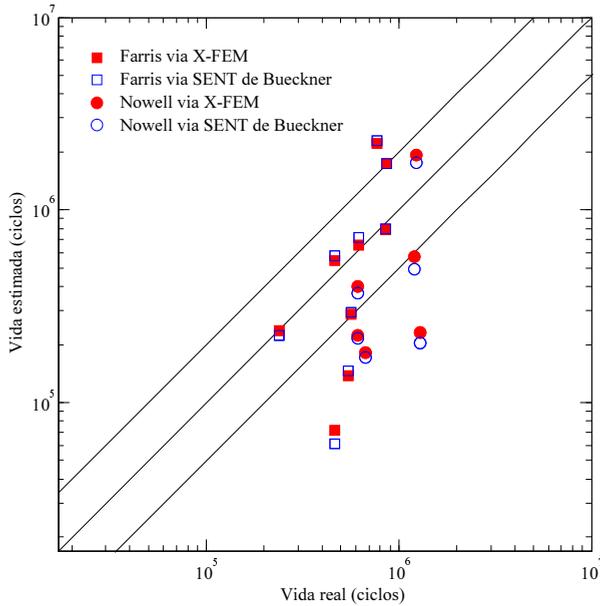


FIGURA 6.8: *Estimación de vida utilizando el método de función de peso SENT y el método X-FEM.*

## 6.2. Estimación de vida en contacto completo

En este apartado se estudia la estimación de vida de fretting fatiga en contacto completo mediante el método de longitud de iniciación variable. Se realiza la estimación de vida en la parte de propagación analíticamente y mediante el método X-FEM. Para la parte de iniciación se han utilizado distintos criterios de iniciación. Se comparan los resultados obtenidos con los resultados de los ensayos experimentales realizados en esta Tesis.

### 6.2.1. Resultados experimentales obtenidos por el Grupo

#### 6.2.1.1. Ensayos de fretting fatiga

Los ensayos de fretting fatiga se han realizado según lo descrito en el apartado 5.2.2. La Tabla 6.5 muestra las cargas aplicadas y las vidas hasta el fallo obtenidas para cada ensayo.

#### 6.2.1.2. Curvas $da/dN$

Se han realizados ensayos  $da/dN$  para determinar la ley de propagación para el material Al7075-T6. Los coeficientes  $C$  y  $n$  de la ley de Paris, Ec. (3.70), se han obtenido

Ensayo	$P$ (kN)	$\sigma_{\text{Bulk}}$ (MPa)	$N_f$ (ciclos)
1	2	110	105958
2	4	110	92259
3	8	110	82549
4	2	130	64764
5	4	130	47714
6	8	130	43567
7	2	150	35181
8	4	150	32905
9	8	150	25872
10	2	170	24306
11	4	170	27391
12	8	170	23046
13	2	190	12509
14	4	190	9590
15	8	190	8760

TABLA 6.5: Cargas y número de ciclos aplicados en los ensayos que terminaron con el fallo de la probeta. Ensayos de contacto completo realizados por el Grupo de Valencia.

a partir de los ensayos de fatiga realizados con probetas CT, para la aleación de aluminio Al7075-T6. Los ensayos se realizaron según la norma ASTM E647.

Las probetas se mecanizaron con arreglo a las dimensiones especificadas por la norma, tal y como se muestra en la Fig. 6.9.

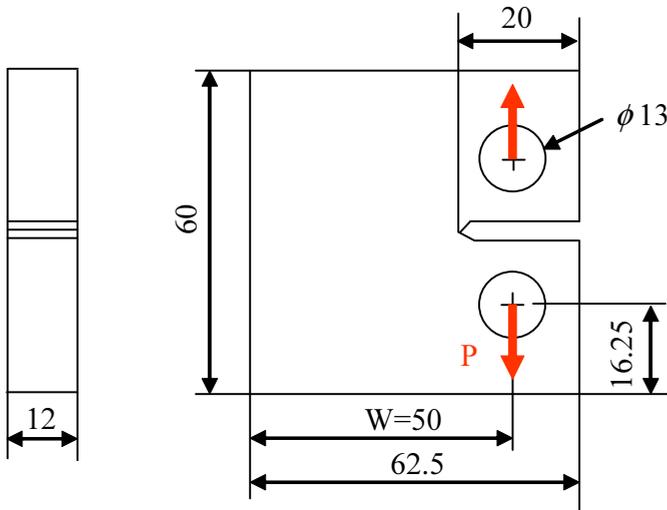


FIGURA 6.9: Dimensiones de la probeta CT utilizada en los ensayos.

Se realizaron ensayos para diferentes valores de  $R$ , utilizando la máquina Instron 8801 ya comentada en el apartado 5.2. Debe aclararse que en este tipo de ensayos no es

recomendable aplicar cargas con  $R < 0$  (ASTM E647; ZHAO Y JIANG, 2008), por lo que se aplican condiciones de carga con  $R \geq 0$ .

En la Fig. 6.10 se muestra el utillaje tipo Clevis utilizado para la realización de los ensayos, donde puede observarse el sistema empleado para medir la longitud de grieta. La longitud de grieta se determina a través de la medida de apertura de grieta y correlación con la flexibilidad de la probeta CT dada por las normas ASTM E399; ASTM E647. Los datos adquiridos de cada ensayo permiten obtener la curva correspondiente a la ley de crecimiento  $da/dN$  y el ajuste de la ley de Paris en su zona central.

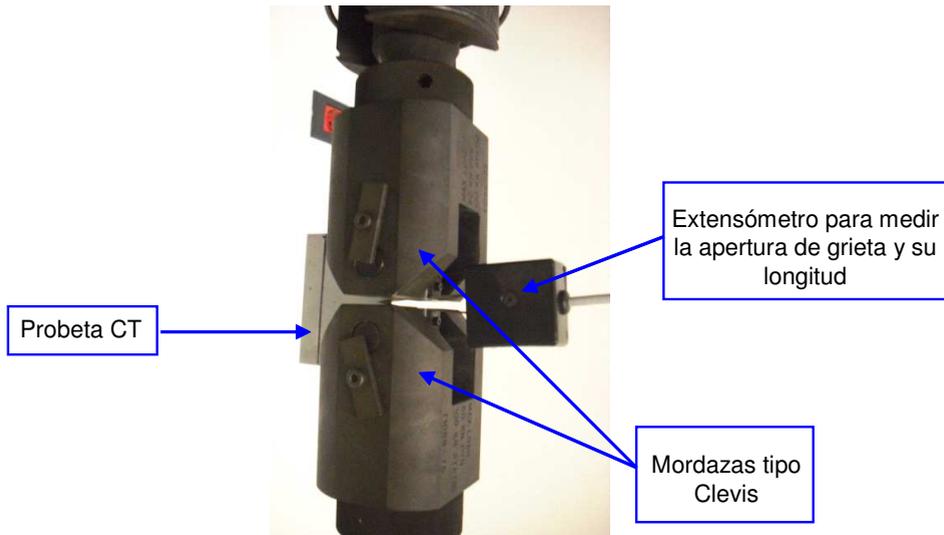


FIGURA 6.10: Montaje de fatiga mostrando la probeta y el aparato que mide la longitud de grieta.

Como se muestra en la Fig. 6.11, las probetas empleadas en los ensayos de fretting fatiga corresponden en rigor a una orientación T-S, es decir, que la grieta se propaga en la dirección S. Dado el espesor disponible (10 mm), no es posible obtener probetas de fatiga con la orientación T-S, satisfaciendo las condiciones geométricas de la norma (véase la Fig. 6.9), por lo que se opta por ensayar probetas con orientación L-T y T-L para obtener el coeficiente  $C$  y el exponente  $n$  de la ley de Paris para este material.

En la Fig. 6.12 se representa la velocidad de crecimiento de grieta  $da/dN$  frente a los valores de  $\Delta K$  de uno de los ensayos realizados con la orientación L-T. Para obtener los coeficientes  $C$  y  $n$ , se ajustan los datos obtenidos para cada ensayo y luego se calcula el valor promedio.

Es importante indicar que las curvas  $da/dN$  registradas sólo se pueden considerar válidas a partir de  $\Delta K \approx 8 \div 9 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$ , ya que el procedimiento seguido en los ensayos no permite determinar correctamente el valor umbral  $\Delta K_{th}$  (véase norma ASTM E647). Los resultados de los ajustes se muestran en la Tabla 6.6.

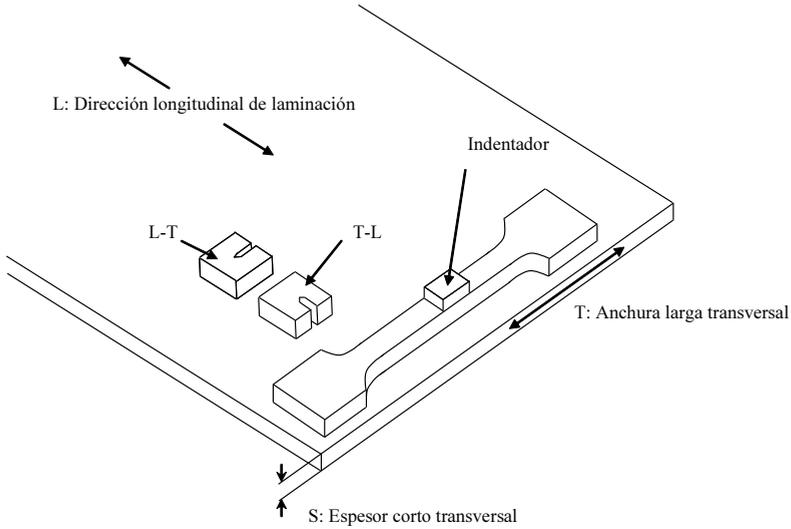


FIGURA 6.11: Denominación de la probeta según su orientación, según la norma ASTM.

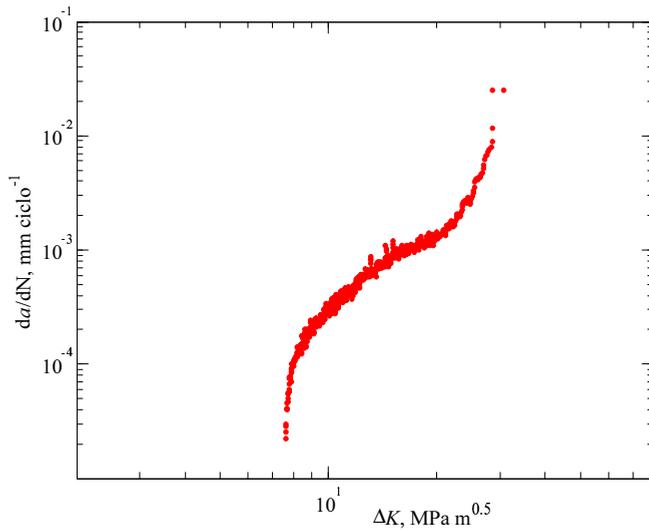


FIGURA 6.12: Velocidad de crecimiento de grieta ( $da/dN$ ) en función de  $\Delta K$ , de uno de los ensayos realizados con la orientación L-T.

### 6.2.2. Predicción de vida mediante el método de longitud de iniciación variable

En esta Tesis se utiliza para la estimación de vida el método de longitud de iniciación variable (ver el apartado 3.4.3.2). Debe aclararse que este método estima vidas infini-

Orientación		L-T	T-L
Coficiente	$C$		
$(m/ciclo / (MPa\sqrt{m})^n)$		$2.824 \cdot 10^{-10}$	$5.968 \cdot 10^{-10}$
Exponente	$n$	2.873	2.613

TABLA 6.6: Ley de Paris de la aleación Al7075-T6,  $R = 0$ , para las orientaciones L-T y T-L

tas en el caso de que la curva de iniciación llega al límite de fatiga a una profundidad para la que el FIT todavía es menor que el umbral del crecimiento.

El cálculo de la vida de iniciación se realiza empleando solamente la parte elástica de la curva  $\epsilon - N$ , es decir, la ecuación de Basquin dada por las Ecs. (3.58) y (3.59).

Según los resultados numéricos y experimentales expuestos en el apartado 5.4.1, Fig. 5.18, la posición de la iniciación de grieta se sitúa en el borde de la zona del contacto  $x = a$ . En cuanto a la orientación de grieta, se va a suponer que la grieta es perpendicular a la superficie.

### 6.2.2.1. Estimación del FIT

Para aplicar las leyes de propagación es necesario calcular el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ . Uno de los problemas que pueden aparecer a la hora de aplicar el método de la función de peso, Ec. (2.13), es que no exista una solución analítica para la tensión normal a la grieta  $\sigma_x$ . En este caso, se puede calcular  $\sigma_x$  según el procedimiento indicado en GINER ET AL. (2008) mediante los factores de intensidad de tensiones generalizados que caracterizan el campo de la singularidad cerca de la esquina del contacto completo asumiendo un estado de adhesión. Se utiliza para ello la solución de WILLIAMS (1952) para el “V-notch”, según las Ecs. (3.2), (3.3) y (3.4). Los valores propios de este problema son  $\lambda_I = 0.5445$ ,  $\lambda_{II} = 0.9085$ , Ecs. (3.5), (3.6).

Los valores de  $K_I^{\text{GSIF}}$  y  $K_{II}^{\text{GSIF}}$  han sido estimados utilizando el método de extrapolación de tensiones de la solución de elementos finitos para el modelo sin grieta. Para ello, se obtienen las tensiones  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  a lo largo de la línea bisector de la esquina de la zona del contacto ( $\theta = 0$  en la Fig. 3.5). En este caso, se ha utilizado la esquina derecha de la Fig. 3.5, para una distancia determinada  $r$ . Los valores de las tensiones se muestran en la Fig. 6.13.

Estas tensiones,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ , son las tensiones  $\sigma_{r\theta}(r, 0)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$  de la Ec. (3.2). Por lo que los  $K_I^{\text{GSIF}}$  y  $K_{II}^{\text{GSIF}}$  se calculan según las siguientes ecuaciones:

$$K_I^{\text{GSIF}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, 0)r^{1-\lambda_I}}{\Psi_{\theta\theta}^I(0)} \quad (6.1)$$

$$K_{II}^{\text{GSIF}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{r\theta}(r, 0)r^{1-\lambda_{II}}}{\Psi_{r\theta}^{II}(0)} \quad (6.2)$$

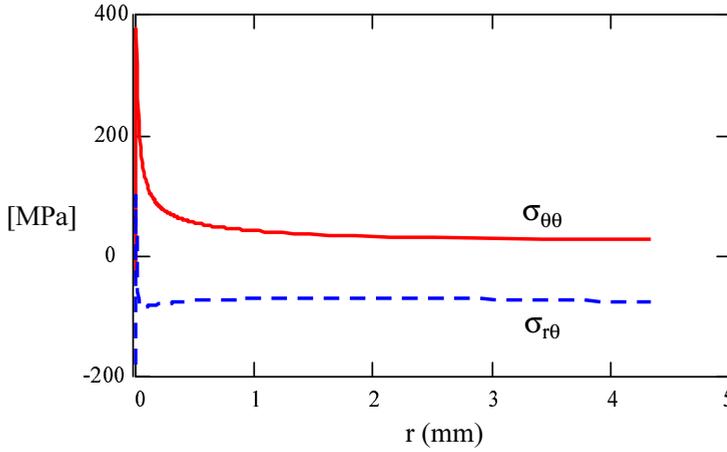


FIGURA 6.13: Distribución de tensiones  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  a lo largo de la línea bisectriz del ángulo de "V-noth".

Así, se obtiene un  $K_I^{\text{GSIF}} = 30.06 \text{ MPa mm}^{1-\lambda_I}$  y un  $K_{II}^{\text{GSIF}} = -148.14 \text{ MPa mm}^{1-\lambda_{II}}$ , para las condiciones del ensayo 1 de la Tabla 5.2<sup>1</sup>. Después de obtener estos valores se aplica la Ec. (3.2) y la correspondiente transformación de coordenadas para obtener la tensión normal a la grieta  $\sigma_x$ , que se utiliza en la Ec. (2.13).

En la Fig. 6.14 se representa la estimación del  $K_I$  para un rango de longitudes de grieta, adimensionalizada con el semiespesor de la probeta  $w$ .

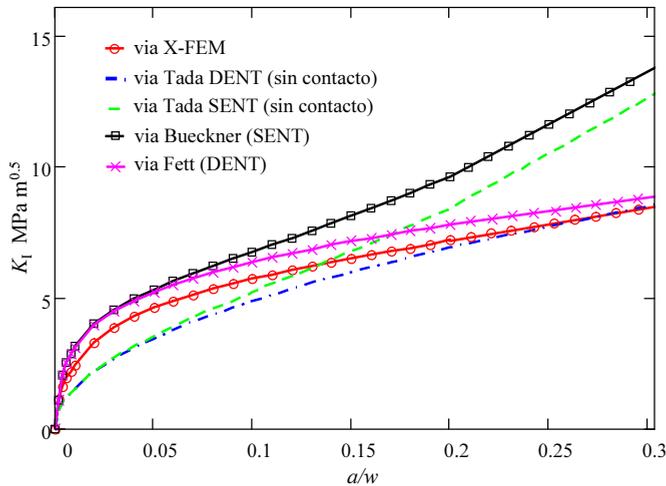


FIGURA 6.14: Comparación de los valores de  $K_I$  para la solución analítica y la de X-FEM, en las condiciones del ensayo 1 de la Tabla 5.2.

<sup>1</sup>El resto de valores de  $K_I^{\text{GSIF}}$  y  $K_{II}^{\text{GSIF}}$  se muestran en la Tabla B.1 del Apéndice B

Se puede observar que los valores de  $K_I$  obtenidos por el método de función de peso SENT de BUECKNER (1973) y DENT de FETT ET AL. (1988) (menos de 0.01 % del semiespesor de la probeta  $w$ ) tienden a coincidir para grietas cortas con los obtenidos mediante X-FEM, debido a que el campo singular de las tensiones domina esta zona. Además, puede observarse que la solución DENT y SENT de TADA ET AL. (1985) no coincide con las soluciones de X-FEM para grietas cortas, mientras que las soluciones DENT de TADA ET AL. (1985) y la de FETT ET AL. (1988) tienden a coincidir con la X-FEM para grietas largas. GINER ET AL. (2008) compararon las soluciones analíticas y de X-FEM obteniendo una tendencia similar, aunque varían los valores de pérdida o comienzo de coincidencia entre los resultados según las cargas aplicadas.

### 6.2.2.2. Predicción de vida. Influencia de los coeficientes de la ley de Paris

En la bibliografía se puede encontrar diferentes valores de los parámetros de la ley de Paris para el aluminio estudiado. Estos juntos con los obtenidos a partir de los ensayos experimentales realizados L-T y T-L se muestran en la Tabla 6.7.

Referencia	Coefficiente $C$ ( $m/ciclo / (MPa\sqrt{m})^n$ )	Exponente $n$
NAVARRO ET AL. (2008)	$8.831 \cdot 10^{-11}$	3.322
NASA/FLAGRO	$4.029 \cdot 10^{-10}$	2.947
Experimental L-T	$2.824 \cdot 10^{-10}$	2.873
Experimental T-L	$5.968 \cdot 10^{-10}$	2.613

TABLA 6.7: *Parámetros de la ley de Paris para la aleación Al7075-T6,  $R = 0$*

Como se aprecia, estos parámetros presentan algunas diferencias, por lo que el empleo de unos u otros afectará a la estimación de vida.

Para la estimación de vida de iniciación se ha aplicado el criterio de McDiarmid a la solución de tensiones obtenida mediante elementos finitos del modelo de contacto completo sin grieta (véase Figs. 5.7, 5.8 y 5.9). Analíticamente, las tensiones del modelo en el punto singular son infinitas, lo que implicaría una vida de iniciación nula. Sin embargo, las tensiones obtenidas numéricamente en esta zona son finitas debido al error de discretización de elementos finitos. Este error compensa de alguna manera la existencia real de plastificación a pequeña escala y, sobre todo, el hecho de que el indentador presenta un cierto redondeo en la esquina, defectos de planitud, etc. no considerados en el modelo. En definitiva, existirá un proceso de iniciación con  $N_i \neq 0$ . Otra forma de interpretar este hecho es que las tensiones de elementos finitos se aproximan, en promedio, a las reales, permitiendo su utilización como el valor promediado en una zona.

Para la estimación de vida de propagación se utiliza la ley de Paris. Es de esperar que en contacto completo, gran parte de la vida transcurra en la fase de propagación, siendo la iniciación relativamente breve. Como se ha comentado en el apartado 6.2.2, la iniciación de grieta se posiciona en el borde de la zona del contacto, considerando

una orientación de grieta perpendicular a la superficie del contacto. El FIT se calcula mediante X-FEM, obteniéndose valores similares a los presentados en la fig. 6.14.

En la Fig. 6.15 se representan las vidas estimadas según los valores de los parámetros  $C$ ,  $n$  considerados (Tabla 6.7). Se observa que la mayor parte de las estimaciones de vida se distribuyen alrededor del valor real, apreciándose una cierta tendencia a sobreestimar la vida con los valores de coeficientes de NAVARRO ET AL. (2008).

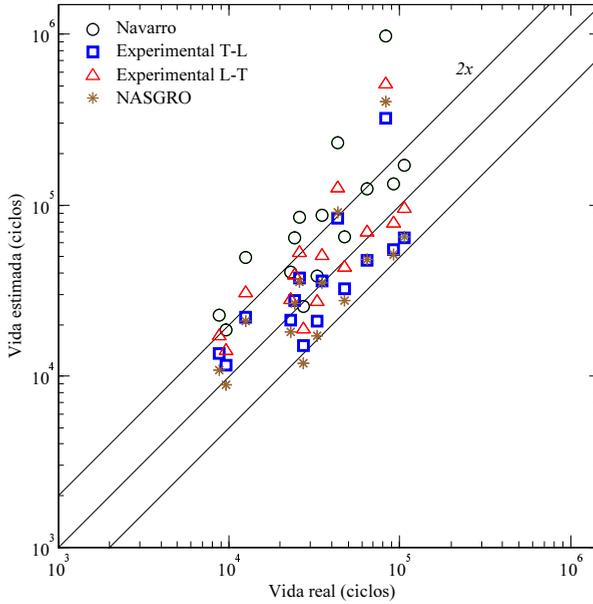


FIGURA 6.15: Vida estimada según datos bibliográficos y resultados experimentales.

Para una determinación más objetiva y resumida de qué opción produce mejores resultados con una menor dispersión es necesario utilizar parámetros estadísticos como se propone en NAVARRO ET AL. (2008). Para ello, en cada ensayo, se calcula el cociente entre la vida estimada y la vida real obtenida experimentalmente,  $S_i$ . A continuación, se calcula el valor medio y la desviación típica de estos cocientes. Dado que las vidas en fatiga se suelen representar por una distribución logarítmica, se calcula la media y la desviación típica sobre los logaritmos de los cocientes entre las vidas estimadas y las reales. Por último, los parámetros mostrados serán los antilogaritmos de dicha media y desviación típica (NAVARRO ET AL., 2008).

Así, los valores medios y su desviación en la estimación de vida se calcularán según la Ec. (6.3).

$$\begin{aligned} \text{Media} &= 10^{\bar{S}} \\ \text{Desv} &= 10^T \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (6.4)$$

$$S_i = \log \left( \frac{N_i \text{ estimada}}{N_i \text{ real}} \right) \quad (6.5)$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2} \quad (6.6)$$

Con estos parámetros un ajuste ideal de la estimación es aquel que produce valores de *Media* = 1 y *Desv* = 1. Aplicando esta metodología a los datos presentados en la Fig. 6.15 se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 6.8.

	NAVARRO ET AL. (2008)	NASA/FLAGRO	Experimental L-T	Experimental T-L
Media	2.33	0.98	1.47	1.06
Desviación	1.91	2.37	1.79	1.74

TABLA 6.8: *Media y desviación de los cocientes entre las vidas estimadas y las reales de la Fig. 6.15*

Como puede observarse, la estimación de vida depende de los coeficientes utilizados en la ley de Paris. En este caso, los mejores resultados de estimación de vida se han obtenido utilizando los parámetros  $C$ ,  $n$  obtenidos a partir de los ensayos experimentales realizados sobre probetas de aluminio A17075-T6 con orientación T-L. Así, en los estudios siguientes de esta Tesis se utilizarán los coeficientes de la ley de Paris obtenidos de los ensayos realizados según dicha orientación T-L.

### 6.2.2.3. Influencia de los criterios multiaxiales y de los métodos analíticos y numéricos en la estimación de vida

En este apartado, se analiza el efecto en la estimación de vida del método de cálculo del FIT, comparando la solución obtenida mediante X-FEM con las soluciones analíticas. Asimismo, se evalúa el efecto en la estimación de vida de los distintos criterios multiaxiales empleados.

En la Fig. 6.16 se presenta la vida estimada obtenida utilizando 3 criterios multiaxiales, y la ley de Paris con los coeficientes experimentales T-L, Ec. (3.70), como ley de propagación, empleando el método de función de peso SENT de BUECKNER (1973) para calcular  $K_I$ .

Puede observarse que los criterios McDiarmid y Fatemi-Socie proporcionan los mismos resultados en la estimación de vida, debido a que el cálculo es elástico, mientras que con el criterio SWT se tiende a obtener vidas estimadas superiores. Es decir, para

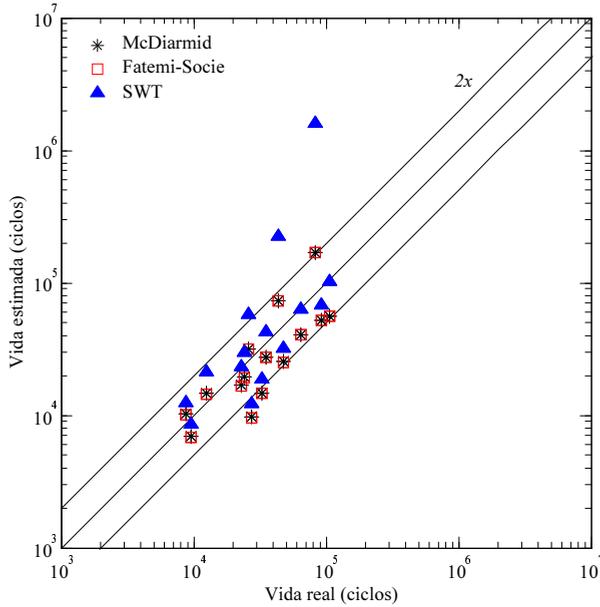


FIGURA 6.16: Vida estimada para 3 criterios multiaxiales de iniciación, utilizando la solución analítica SENT de BUECKNER (1973) para la propagación.

las condiciones de ensayo donde se tienen vidas subestimadas, la solución obtenida mediante el criterio SWT está más proxima a la vida real, mientras que para las condiciones de ensayo donde se sobreestima la vida, este criterio se aleja considerablemente de la vida real.

El valor medio y la de dispersión de los resultados presentados en la Fig. 6.16 se muestran en la Tabla 6.9. Puede observarse que la estimación de vida para los criterios de McDiarmid y de Fatemi-Socie es una estimación conservadora con una subestimación de vida de 21 %. Al utilizar el criterio SWT se obtiene una estimación no conservadora con una sobreestimación del 35 %. Por lo tanto, cuando se utiliza la solución analítica SENT de BUECKNER (1973) no se obtiene una mejora significativa en la estimación de vida para ninguno de los criterios multiaxiales empleados (cuando se comparan con los resultados obtenidos con X-FEM y McDiarmid presentados en el apartado anterior). Este comportamiento es esperable, dada la gran importancia que la estimación de la vida de propagación tiene en los problemas de contacto completo.

	McDiarmid	FS	SWT
Media	0.79	0.79	1.35
Desviación	1.64	1.64	2.57

TABLA 6.9: Media y desviación de los cocientes entre las vidas estimadas y las reales de la Fig. 6.16.

En la Fig. 6.17 se presenta la vida estimada obtenida utilizando 3 criterios multiaxiales

y la ley de Paris con los coeficientes experimentales T-L como ley de propagación, empleando el método de función de peso DENT de FETT ET AL. (1988) para calcular  $K_I$ .

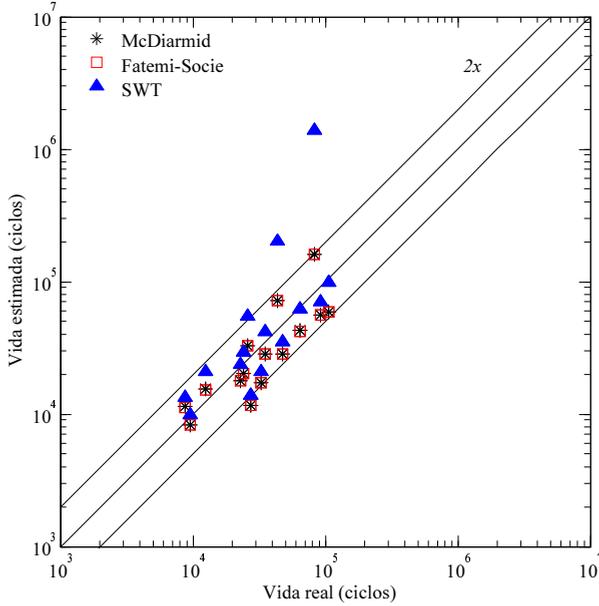


FIGURA 6.17: Vida estimada para 3 criterios multiaxiales de iniciación, utilizando la solución de la función de peso (DENT) de FETT ET AL. (1988) para la propagación.

Como puede observarse, se tienen mejores resultados que los obtenidos mediante la solución de función de peso SENT de BUECKNER (1973), para los 3 criterios multiaxiales, debido a que el método de función de peso DENT de FETT ET AL. (1988) proporciona mejores valores de  $K_I$  para grietas largas, aunque ambas soluciones proporcionan los mismos valores de  $K_I$  para longitudes pequeñas de grieta (ver Fig. 6.14). Esta diferencia se aprecia claramente en las medias y desviaciones obtenidas, que se muestran en la Tabla 6.10. Así, según los resultados obtenidos, se puede concluir que la estimación de vida varía ligeramente según la función de peso SENT o DENT empleada para el cálculo de  $K_I$  proporcionando mejores resultados con la función de peso DENT de FETT ET AL. (1988).

	McDiarmid	FS	SWT
Media	0.85	0.85	1.37
Desviación	1.56	1.56	2.41

TABLA 6.10: Media y desviación de los cocientes entre las vidas estimadas y las reales de la Fig. 6.17

En la Fig. 6.18 se presenta la vida estimada obtenida utilizando 3 criterios multiaxiales, y la ley de Paris con los coeficientes experimentales T-L como ley de propagación,

empleando el método de X-FEM. En este caso, al igual que cuando se emplean las soluciones analíticas, los criterios de McDiarmid y Fatemi-Socie proporcionan idénticos resultados de vida estimada, mientras que con el criterio SWT se obtienen vidas estimadas superiores.

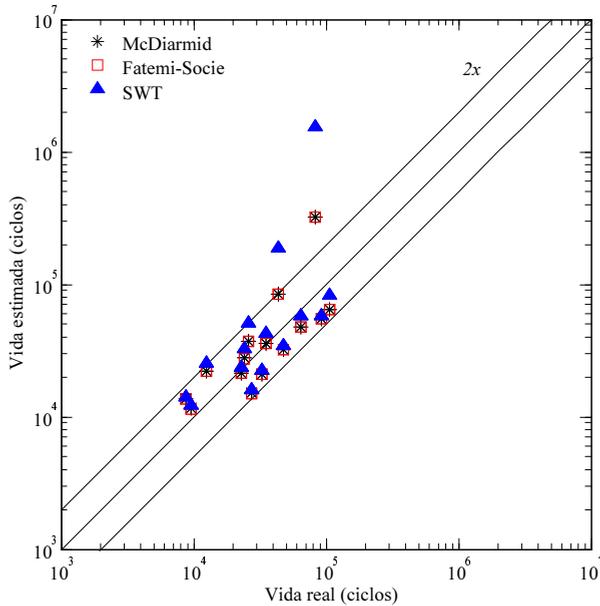


FIGURA 6.18: Vida estimada mediante 3 criterios multiaxiales de iniciación y la solución de X-FEM para la propagación.

Puede observarse que al utilizar la solución de X-FEM, en la mayoría de los ensayos estudiados, se obtienen vidas estimadas más próximas a las vidas reales, para los 3 criterios multiaxiales. Esto se aprecia claramente en los parámetros estadísticos mostrados en la Tabla 6.11. Las medias obtenidas para los criterios de McDiarmid y Fatemi-Socie presentan una mejora notable respecto a las obtenidas mediante la solución de función de peso SENT de BUECKNER (1973), y también respecto a las obtenidas mediante la solución de función de peso DENT de FETT ET AL. (1988). Con el criterio SWT, debido a que proporciona vidas estimadas superiores a las reales, el empleo de X-FEM no mejora la estimación de vida, obteniéndose un valor promedio ligeramente superior a los obtenidos mediante las soluciones analíticas.

	McDiarmid	FS	SWT
Media	1.06	1.06	1.39
Desviación	1.74	1.74	2.46

TABLA 6.11: Media y desviación de los cocientes entre las vidas estimadas y las reales de la Fig. 6.18

De este modo, cuando se utilizan las soluciones analíticas no se puede hablar de un

claro criterio multiaxial óptimo. Sin embargo, cuando se utiliza el método X-FEM, los criterios McDiarmid y Fatemi-Socie proporcionan una vida estimada muy próxima a la vida real. No hay que olvidar que la variabilidad encontrada en la literatura sobre las propiedades de los materiales empleados en los ensayos de fretting puede tener más influencia sobre la estimación de vida en fretting que el uso de un criterio o otro (NAVARRO ET AL., 2008).

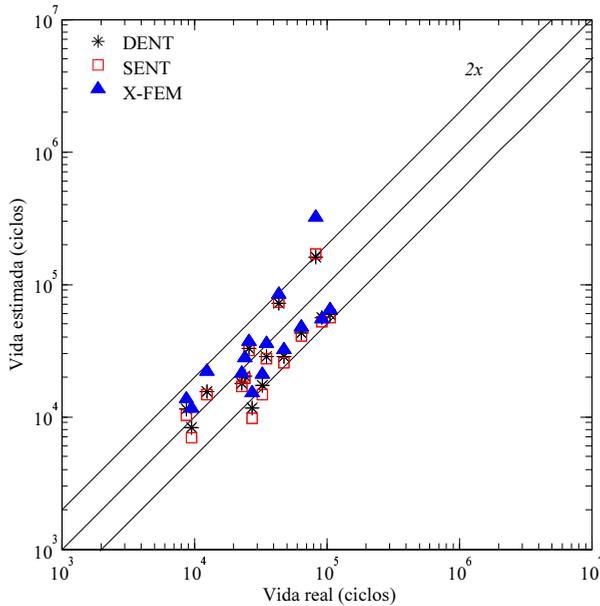


FIGURA 6.19: Comparación entre el X-FEM, la función de peso SENT de BUECKNER (1973), y la función de peso DENT de FETT ET AL. (1988), utilizando el criterio multiaxial McDiarmid. Coincide con los valores obtenidos mediante Fatemi-Socie.

En las Figs. 6.19 y 6.20 se presenta el efecto de los métodos de cálculo de  $K_I$  para los criterios multiaxiales empleados (McDiarmid y Fatemi-Socie coinciden y se representan en una única figura, Fig. 6.19). En ellas, se observa claramente que las soluciones proporcionadas mediante el método X-FEM tienden a ser mejores que las obtenidas mediante los métodos analíticos, ya que el método X-FEM proporciona estimaciones de  $K_I$  más precisos.

#### 6.2.2.4. Influencia de las leyes de propagación en la estimación de vida

En este apartado, se estudia el efecto de distintas leyes de propagación empleadas para el cálculo de la vida de propagación. Para facilitar la presentación de los resultados, se hará referencia a las tres leyes de propagación empleadas, utilizando las abreviaturas mostradas en la Tabla 6.12.

En la Fig. 6.21 se presenta la velocidad de crecimiento de grieta ( $da/dN$ ) frente al rango del factor de intensidad de tensiones,  $\Delta K = K_{\max}$ , para las tres leyes de propa-

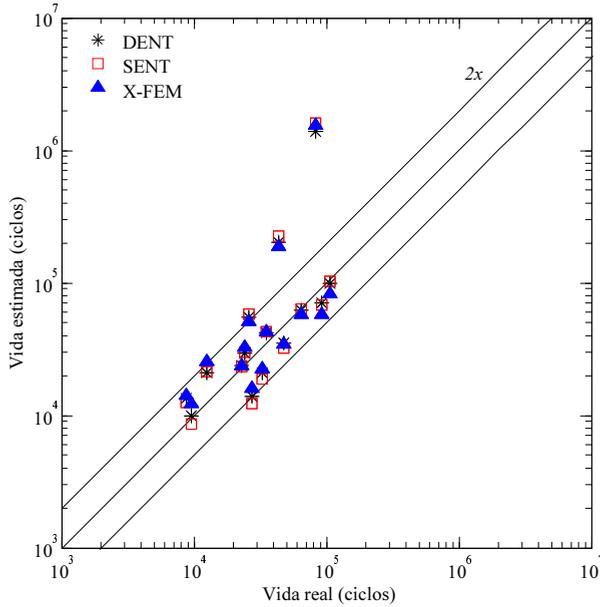


FIGURA 6.20: Comparación entre el X-FEM, la función de peso SENT de BUECKNER (1973), y la función de peso DENT de FETT ET AL. (1988), utilizando el criterio multiaxial SWT.

Abreviatura	Ley de propagación	Ecuación
P	Ley de Paris	(3.70)
MUH	Modificando el umbral con $a_0$	(3.92)
MKH	Modificando el FIT con $a_0$	(3.99)

TABLA 6.12: Abreviaturas utilizadas para referenciar las 3 leyes de crecimiento.

gación utilizadas. Los resultados mostrados corresponden al ensayo 1 de la Tabla 5.2. Se puede observar que la ley MKH presenta una velocidad de crecimiento superior para un amplio rango de  $\Delta K$ , por lo que esta ley estimará vidas inferiores a las calculadas utilizando las otras dos leyes de propagación. Para grietas largas, es decir,  $\Delta K > 7 \text{ MPa m}^{0.5}$ , las tres leyes de propagación proporcionan valores de  $da/dN$  similares, y por tanto, estimarán vidas semejantes.

En la Fig. 6.22 se presentan las curvas de vida de iniciación, propagación y total obtenidas al utilizar las leyes de propagación MKH y P, correspondientes al ensayo 1 de la Tabla 5.2. La vida de iniciación se ha obtenido aplicando el criterio de McDiarmid. Los valores de  $K_I$  utilizados en las distintas leyes de propagación se han calculado mediante X-FEM.

Puede observarse que la curva de iniciación es creciente debido a la disminución de tensiones con el aumento de la profundidad. En la curva de propagación obtenida a partir de la ley P muestra valores de vida superiores a los obtenidos mediante la

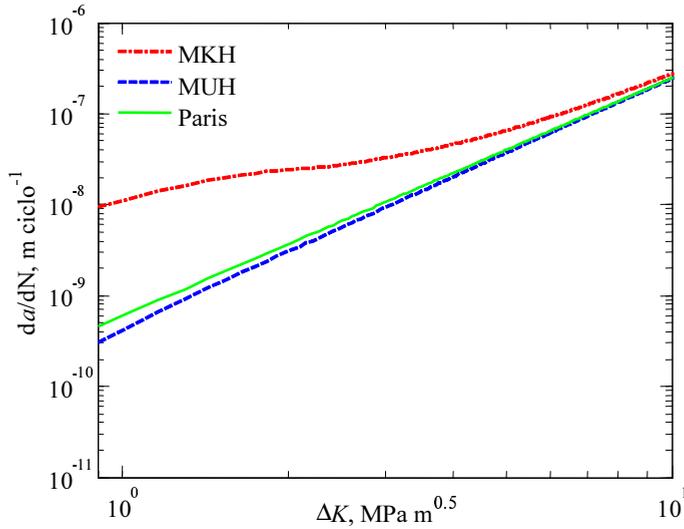


FIGURA 6.21: Velocidad de crecimiento de grieta del Al7075-T6 frente al rango del factor de intensidad de tensiones, para las leyes de propagación empleadas.

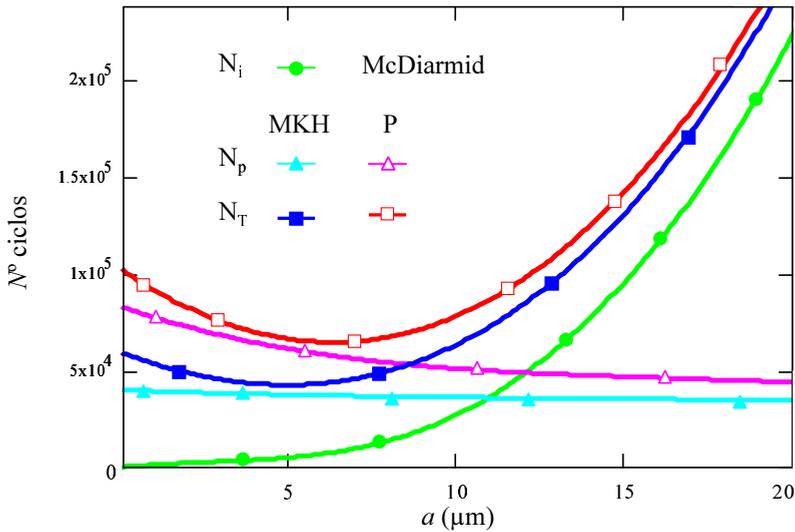


FIGURA 6.22: Ensayo N° 1, curvas de vida de iniciación, propagación y total, utilizando McDiarmid como criterio de fatiga multiaxial para iniciación, y como leyes de propagación P y MKH.

ley MKH, pero presenta una mayor disminución de la vida de propagación con la profundidad. Esto es debido a que la ley P presenta una velocidad de crecimiento de grieta menor que la ley MKH, para grietas cortas, como se observa en la Fig. 6.21.

En la Fig. 6.23 se presentan las curvas de vida de iniciación, propagación y total

obtenidas al utilizar las leyes de propagación MUH y P, correspondientes al ensayo 1 de la Tabla 5.2. Análogamente, la vida de iniciación se obtiene aplicando el criterio de McDiarmid, y los valores de  $K_I$  se calculan mediante X-FEM.

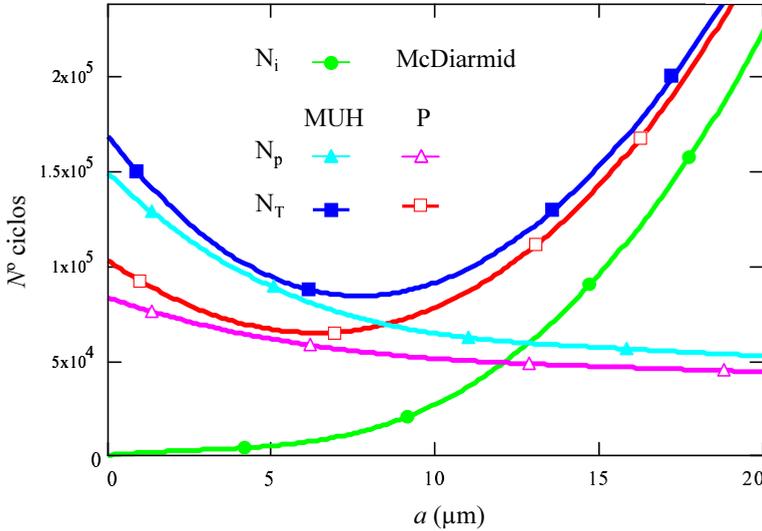


FIGURA 6.23: Ensayo N° 1, curvas de vida de iniciación, propagación y total, utilizando McDiarmid como criterio de fatiga multiaxial para iniciación, y como leyes de propagación P y MUH.

En este caso, se observa que la curva de vida de propagación obtenida mediante la ley P es inferior a la obtenida por la ley MUH, pero muestra una menor disminución con la profundidad. Esto es debido a que la ley P presenta una velocidad de crecimiento de grieta mayor que la ley MUH, para grietas cortas, como se observa en la Fig. 6.21.

Si se analizan las curvas de vida total obtenidas, se obtiene, para la ley P un valor mínimo situado a una profundidad de  $7.5 \mu\text{m}$ . Para las leyes de propagación MKH y MUH, las curvas de vida total presentan su mínimo a una profundidad de  $5.1 \mu\text{m}$  y  $8.9 \mu\text{m}$ , respectivamente.

Las Figs. 6.24 y 6.25 muestran las vidas estimadas obtenidas utilizando las distintas leyes de propagación para los dos criterios multiaxiales (McDiarmid y SWT; Los valores de Fatemi-Socie coinciden con los de McDiarmid). Se observa una clara tendencia a subestimar la vida con la ley MKH, debido a presentar una velocidad de crecimiento mayor que con la ley P. Los resultados con la ley P y MUH presentan unos valores similares y unos valores estimados bastante razonables. Debe mencionarse que la ley P presenta una ventaja respecto a las otras leyes de propagación, al no depender de propiedades como  $\sigma_f$  o  $K_{th}$ .

En la Tabla 6.13 se presentan los valores medios y desviaciones obtenidas de los cocientes entre las vidas estimadas y las vidas reales, para los distintos criterios multiaxiales. Estos parámetros estadísticos se han obtenido utilizando un total de 15 ensayos. De-

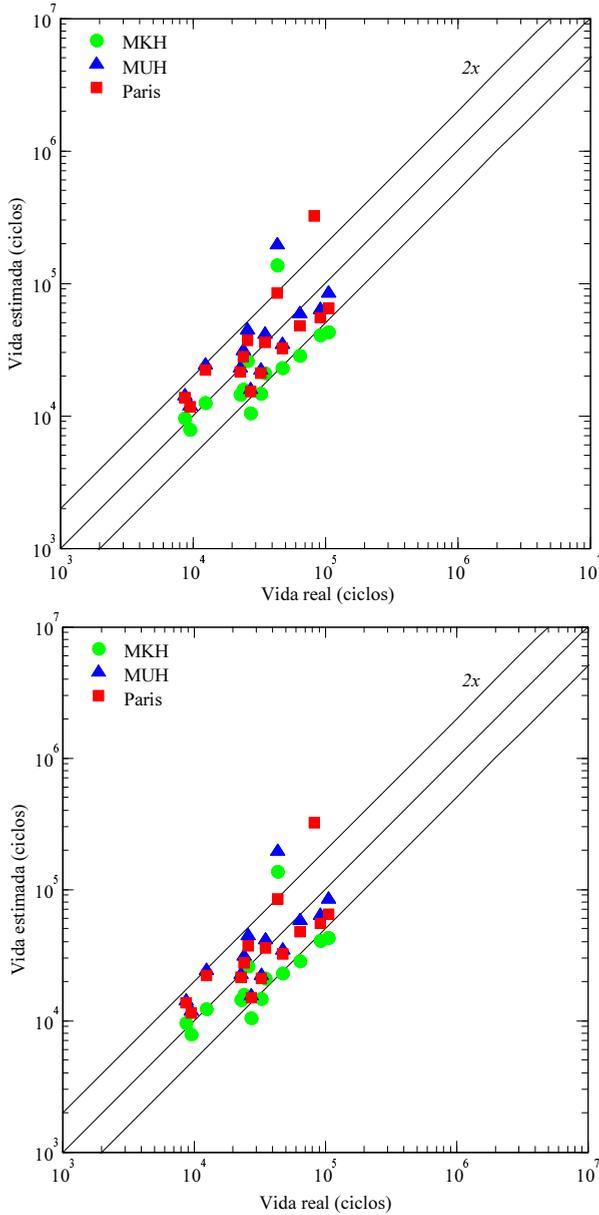


FIGURA 6.24: Estimación de vida con distintas leyes de propagación y McDiarmid (la figura de arriba) como criterio de fatiga multiaxial para iniciación y el método X-FEM para calcular el  $K_I$ . Los resultados con Fatemi-Socie como criterio de iniciación son los mismos.

be recordarse, que a la hora de calcular los parámetros estadísticos, se considera vida infinita cuando la vida viene determinada por la curva de iniciación.

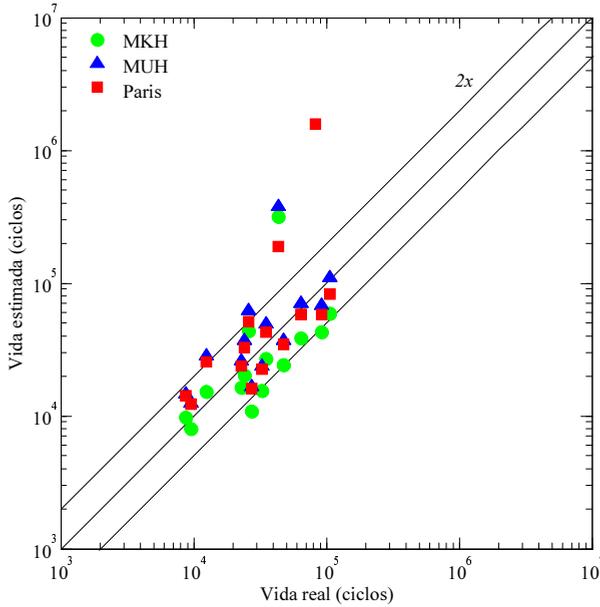


FIGURA 6.25: Estimación de vida con distintas leyes de propagación y SWT como criterio de fatiga multiaxial y el método X-FEM para calcular el  $K_1$ .

Leyes de propagación		Criterios multiaxiales		
		McD	FS	SWT
P	Media	1.06	1.06	1.39
	Desviación	1.74	1.74	2.46
MUH	Media	0.97	0.97	1.16
	Desviación	1.53	1.53	1.73
MKH	Media	0.58	0.58	0.72
	Desviación	1.51	1.51	1.8

TABLA 6.13: Media y desviación obtenidas para las distintas leyes de propagación, en función de los criterios multiaxiales empleados.

Para los tres criterios multiaxiales, las medias y desviaciones de los resultados obtenidos a partir de las leyes MUH y P son bastante similares, aunque con la ley MUH se tiene una ligera mejora de los resultados. No obstante, esta ley tiene la desventaja de proporcionar valores de vida infinita para determinadas condiciones de ensayo (ensayo 3 de la Tabla 6.5). Las medias obtenidas a partir de la ley MKH, para los tres criterios multiaxiales son muy inferiores, por lo que esta ley de propagación es la menos adecuada para la estimación de vida en los ensayos estudiados.

Si se analiza el efecto de los criterios multiaxiales, se tiene que los criterios McDiarmid y Fatemi-Socie proporcionan idénticos resultados, sea cual sea la ley de propagación empleada. Estos criterios, excepto para la ley MKH, dan un valor medio próximo a 1. El criterio SWT, al proporcionar vidas estimadas superiores, sobreestima la vida al utilizar las leyes P y MUH. En el caso de la ley MKH, que subestima la vida, la

aplicación del criterio SWT mejora el valor medio obtenido.

Por tanto, se puede decir que el criterio de McDiarmid o Fatemi-Socie, junto con la ley MUH y una estimación del FIT a través de X-FEM es el que presenta mejores resultados. La utilización de la ley de Paris en lugar de la ley MUH es igualmente aceptable para la serie de ensayos analizada.

En la Tabla 6.14 se muestran los valores promedio de las longitudes de iniciación de grieta, y los porcentajes de vida de iniciación correspondientes, para los diferentes criterios multiaxiales en función de la ley de propagación empleada. Como cabe esperar la vida de iniciación ocupa un porcentaje claramente menor que el de propagación y ronda el 12%. Como se ha explicado anteriormente, se ha asumido que las tensiones no son infinitas junto al extremo de contacto debido al error de discretización de elementos finitos. Pese a la existencia de este error, las tensiones de elementos finitos se aproximan (en promedio) a las reales, permitiendo su utilización como el valor promedio en una zona. Además, este error compensa de alguna manera la pequeña plastificación local que pudiera aparecer y el hecho de que el indentador presentará un cierto redondeo en su esquina, defectos de planitud, etc.

Leyes de propagación		Criterios multiaxiales		
		McD	FS	SWT
P	long. inic. ( $\mu\text{m}$ )	10.8	10.95	9.26
	% iniciación	11.1	11.2	19.56
MUH	long. inic. ( $\mu\text{m}$ )	12.16	12.31	10.83
	% iniciación	12.86	12.77	19.74
MKH	long. inic. ( $\mu\text{m}$ )	8.05	8.06	8.21
	% iniciación	11.75	11.75	24.15

TABLA 6.14: *Valores medios de longitud de iniciación y porcentaje de vida de iniciación, para los diferentes criterios multiaxiales en función de la ley de propagación empleada.*

## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajos futuros



## 7.1. Conclusiones

### 7.1.1. Conclusiones generales

- ✓ Se ha implementado el método X-FEM para analizar el contacto con fricción en caras de grieta. Esta implementación se ha mostrado como una herramienta numérica eficiente, que ha sido validada a través de problemas de referencia.
- ✓ Se ha utilizado la integral  $J$  modificada con una integral de contorno para el cálculo indirecto de  $K_{II}$  presente en grietas cerradas con deslizamiento entre sus caras. La aplicación de esta metodología a un problema de fretting fatiga ha permitido calcular  $\Delta K_{II}$ , variable que rige el crecimiento en modo II.
- ✓ Se han realizado ensayos experimentales de fretting fatiga en contacto completo con material Al7075-T6. Se han obtenido micrografías de la propagación de grieta para las grietas que no alcanzaron la rotura final. También se ha caracterizado a fatiga este material (ley de Basquin) y se ha obtenido la ley de propagación  $da/dN$  para dos orientaciones (L-T y T-L).
- ✓ Para modelar la iniciación y propagación de grieta, se ha propuesto un nuevo criterio, que consiste en utilizar el valor mínimo de  $\Delta\tau$  con un mayor valor de  $\Delta\sigma_{\text{eff}}$ . Este planteamiento se basa en el concepto de que la iniciación de grieta se producirá en la dirección donde se dé una mayor energía disponible para crecer con menor disipación por fricción de caras de grieta en modo II.
- ✓ La aplicación de la teoría propuesta ha permitido modelar adecuadamente la iniciación y propagación de grieta en problemas de fretting fatiga en condiciones de contacto completo.
- ✓ El empleo del método X-FEM para el cálculo de  $K_I$  posibilita una mejor estimación de vida frente al uso de métodos analíticos, en problemas de fretting fatiga tanto en condiciones de contacto completo como contacto cilíndrico.

### 7.1.2. Conclusiones parciales

- Sobre la implementación X-FEM con contacto en caras de grieta:
  - ✓ Se ha realizado un estudio paramétrico del valor de  $K_{II}$  frente al valor del coeficiente de fricción  $\mu$  donde se muestra que  $\Delta K_{II}$  puede alcanzar valores apreciables en un amplio rango de  $\mu$  en condiciones de fretting.
  - ✓ Los resultados obtenidos mediante la aplicación de los dos métodos propuestos, mortar y con restricciones puntuales (utilizando elementos T2D2), para la implementación X-FEM con contacto en caras de grietas, han mostrado:
    - En el caso de no considerar fricción, empleando una malla uniforme, ambos métodos muestran un comportamiento prácticamente idéntico

en la estimación del error relativo de  $K_{II}$ . El método mortar ha permitido obtener una distribución de la tensión normal al plano de grieta prácticamente idéntica a la tensión externa aplicada, mientras que el método T2D2, sobreestima la tensión normal en el elemento extremo de grieta, debido a que las funciones de interpolación incluyen términos no lineales.

- En el caso de no considerar fricción, empleando malla no estructurada, el método mortar presenta un comportamiento más uniforme de la velocidad de convergencia frente al tamaño de elemento. El método mortar ha permitido obtener una distribución de la tensión normal al plano de grieta similar a la tensión externa aplicada, mientras que el método T2D2 proporciona valores anómalos en determinadas posiciones, debido a que no se cumplen correctamente las restricciones del contacto a lo largo de las caras de grieta.
  - En el caso de considerar fricción, empleando tanto malla uniforme como no estructurada, el método mortar permite obtener errores relativos de  $K_{II}$  muy inferiores a los obtenidos mediante el método T2D2, con una velocidad de convergencia del error próxima al valor óptimo. El método T2D2 no presenta convergencia óptima en el caso de considerar fricción, debido a la peor estimación de las tensiones en las caras de grieta.
- Sobre el análisis de la orientación de grieta:
    - ✓ La aplicación de los criterios de fatiga multiaxial da lugar a orientaciones de iniciación de grieta hacia fuera de la zona del contacto, lo que no coincide con los resultados obtenidos experimentalmente.
    - ✓ La aplicación del criterio MTS para predecir la orientación de grieta en su fase de propagación proporciona ángulos que no se ajustan a los obtenidos experimentalmente, para las condiciones de carga estudiadas.
    - ✓ La aplicación del planteamiento propuesto basado en la mínima variación de la tensión tangencial a lo largo del ciclo ha permitido una muy buena simulación de la orientación de grieta en problemas de fretting fatiga en condiciones de contacto completo con el método X-FEM. La coincidencia del modelado obtenido con los resultados experimentales ha permitido validar el enfoque propuesto.
  - Sobre la estimación de vida:
    - ✓ En condiciones de contacto completo, el uso del método X-FEM ha permitido obtener valores medios de vida estimada muy próximos a las vidas reales para los criterios de McDiarmid y Fatemi-Socie, proporcionando valores ligeramente sobreestimados (del orden 6 %).
    - ✓ Se ha analizado el efecto de los criterios multiaxiales de fatiga en la estimación de vida. Los criterios de McDiarmid y Fatemi-Socie han propor-

cionado idénticos resultados, mientras que el criterio SWT sobreestima la vida. Para condiciones de ensayo donde se han obtenido vidas subestimadas, la solución obtenida mediante el criterio SWT está más próxima a la vida real (dada su tendencia a la sobreestimación), mientras que para las condiciones de ensayo donde se sobreestima la vida, este criterio se aleja considerablemente de la vida real.

- ✓ Se ha analizado el efecto de las leyes de propagación en la estimación de vida. La ley de Paris y la ley MUH (modificando el umbral para grietas cortas) proporcionan valores medios de vida estimada similares para los criterios McDiarmid y Fatemi-Socie, mientras que para el criterio SWT la ley de Paris proporciona una mayor sobreestimación. Por tanto, la ley MUH resulta la más adecuada para la estimación de vida para los 3 criterios multiaxiales. Los valores medios de vida estimada obtenidos a partir de la ley MKH (modificando el FIT por efecto de grietas cortas) para los criterios multiaxiales, han resultado muy inferiores a los obtenidos mediante las otras leyes, por lo que, esta ley de propagación se ha mostrado la menos adecuada para la estimación de vida en las condiciones de ensayo estudiadas.

## 7.2. Trabajos futuros

- Realizar un cálculo de tensiones elastoplástico mediante el método X-FEM, para analizar el efecto de la plasticidad en la fase de iniciación de grieta. Este trabajo permitiría evaluar el error cometido al realizar un cálculo elástico lineal, en lugar de un cálculo elastoplástico.
- Realizar la estimación de vida considerando las direcciones de crecimiento de grieta obtenidas mediante la nueva propuesta de criterio de orientación, en lugar de considerar un crecimiento perpendicular a la superficie del contacto.
- Estudiar paramétricamente otros valores de carga normal y carga  $\sigma_{\text{Bulk}}$  en la orientación de grieta y estimación de vida, en condiciones de contacto completo.
- Ampliar el estudio de fretting fatiga en condiciones de contacto completo al caso de carga tangencial  $Q$  aplicada al indentador.
- Ampliar los ensayos experimentales de fretting fatiga a otras condiciones de contacto (otros tipos de indentadores) para analizar la orientación de grieta, y obtener la vida real. Estos datos experimentales permitirían validar los resultados obtenidos numéricamente en otras condiciones.



**Parte III**

**Apéndices**



## Apéndice A

# Desarrollo de la integral $J_p$

De la Ec. (2.27), el vector de tracciones en caras de grieta, se puede escribir como:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

sustituyendo en la Ec. (4.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} J_p &= \int_{\Gamma_2} \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) q_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) q_1 \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_2} \left[ \left( \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{21} \cdot n_2 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \sigma_{12} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] q_1 \, d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_4} \left[ \left( \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{21} \cdot n_2 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \sigma_{12} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] q_1 \, d\Gamma \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Como se puede ver en la Fig. A.1, los vectores normales para cada cara de grieta son:

$$\begin{array}{ll} n_{1,\Gamma_2} = 0 & n_{2,\Gamma_2} = -1 \\ n_{1,\Gamma_4} = 0 & n_{2,\Gamma_4} = +1 \end{array}$$

La Ec. (A.2) queda como:

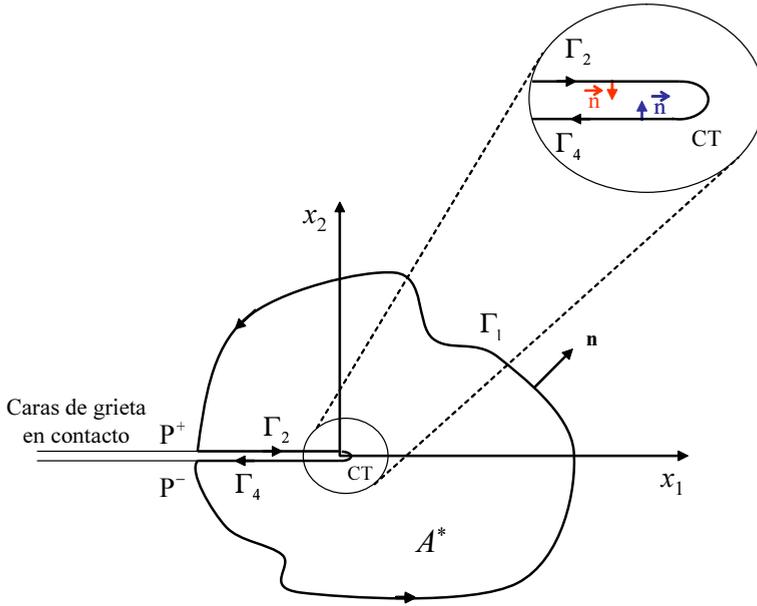


FIGURA A.1: Esquema de los vectores normales para cada cara de grieta.

$$\begin{aligned}
 J_p &= \int_{\Gamma_2} \left( -\sigma_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) q_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \left( \sigma_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) q_1 \, d\Gamma \\
 &= \int_P^{CT} \left( -\sigma_{21} \frac{\partial u_1|_{\Gamma_2}}{\partial x_1} - \sigma_{22} \frac{\partial u_2|_{\Gamma_2}}{\partial x_1} \right) q_1 \, dx_1 + \\
 &+ \int_{CT}^P \left( \sigma_{21} \frac{\partial u_1|_{\Gamma_4}}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2|_{\Gamma_4}}{\partial x_1} \right) q_1 \cdot (-dx_1)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

de donde, cambiando los límites de integración de la primera integral resulta:

$$\begin{aligned}
 J_p &= \int_{CT}^P \left( \sigma_{21} \frac{\partial u_1|_{\Gamma_2}}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2|_{\Gamma_2}}{\partial x_1} \right) q_1 \, dx_1 - \\
 &- \int_{CT}^P \left( \sigma_{21} \frac{\partial u_1|_{\Gamma_4}}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2|_{\Gamma_4}}{\partial x_1} \right) q_1 \, dx_1
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Si las dos caras de la grieta están en contacto con fricción, entonces:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22,\Gamma_2} &= \sigma_{22,\Gamma_4} = p(x) \\
 \sigma_{12,\Gamma_2} &= \sigma_{12,\Gamma_4} = q(x)
 \end{aligned}$$

y si las caras están en contacto entonces:

$$u_{2,\Gamma_2} - u_{2,\Gamma_4} = 0$$

La Ec. (A.4) quedará como:

$$J_p = \int_{CT}^P \sigma_{12} \left[ \frac{\partial(u_{1,\Gamma_2} - u_{1,\Gamma_4})}{\partial x_1} \right] q_1 dx_1 = \int_{CT}^P \sigma_{12} \left[ \frac{\partial(\Delta U_1)}{\partial x_1} \right] q_1 dx_1 \quad (\text{A.5})$$



## Apéndice B

# Valores de los FITs generalizados y comparación entre los métodos empleados

Aplicando la técnica explicada en el apartado 6.2.2 se obtienen los siguientes valores de los FITs generalizados para todos los ensayos de la Tabla 5.2.

$\sigma_{\text{Bulk}}$ (MPa)	Carga normal $P$ (kN)					
	2		4		8	
	$K_{\text{I}}^{\text{GSIF}}$	$K_{\text{II}}^{\text{GSIF}}$	$K_{\text{I}}^{\text{GSIF}}$	$K_{\text{II}}^{\text{GSIF}}$	$K_{\text{I}}^{\text{GSIF}}$	$K_{\text{II}}^{\text{GSIF}}$
110	30.06	-148.14	13.85	-188.66	-13.99	-262.50
130	38.65	-167.20	22.72	-207.63	-9.53	-280.74
150	47.31	-186.08	31.31	-226.42	0.66	-292.10
170	56.06	-204.77	39.95	-244.0	10.14	-310.89
190	64.88	-223.27	48.64	-263.38	19	-329.68

TABLA B.1: Los valores de los FITs generalizados con unidades  $\text{MPa mm}^{1-\lambda_{\text{I}}}$ ,  $\text{MPa mm}^{1-\lambda_{\text{II}}}$ .

A partir de estos valores se puede aplicar el método de la función de peso para calcular  $K_{\text{I}}$ .



# Bibliografía

- ABAQUS. *ABAQUS v6.5*. ABAQUS, Inc. (2004).
- Aliabadi, M. y Rooke, D. *Numerical Fracture Mechanics*. Computational Mechanics Publications: Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, UK (1991).
- Anderson, T. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca Ratón, Florida, 2ª edición (1995).
- Anderson, T. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca Ratón, Florida, 3ª edición (2005).
- Araújo, J. y Nowell, D. The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue. *International Journal of Fatigue*, 24 (2002).
- ASTM E399. *Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness  $K_{Ic}$  of Metallic Materials*. ASTM International (2005).
- ASTM E647. *Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates*. ASTM International (2005).
- Atluri, S. *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam (1986).
- Audoly, B. Asymptotic study of the interfacial crack with friction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(9):1851–1864 (2000).
- Ayatollahi, M., Pavier, M. y Smith, D. Determination of T stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *International Journal of Fracture*, 91:283–298 (1998).
- Barber, J. *Elasticity*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (2002).
- Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N. y Burgardt, B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8):1033–1056 (2005).
- Belytschko, T. y Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620 (1999).
- Belytschko, T., Lu, Y. y Gu, L. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 (1994).

- Bold, P., Brown, M. y Allen, R. A review of fatigue crack growth in steels under mixed mode I and II loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 15 (10):965–977 (1992).
- Broek, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, 4ª edición (1986).
- Bryggman, U. y Söderberg, S. Contact conditions in fretting. *Wear*, 110:1–17 (1986).
- Budiansky, B. y Rice, J. Conservation laws and energy-release rates. *Journal of Applied Mechanics*, 40:201–203 (1973).
- Bueckner, H. A novel principle for the computation of stress intensity factors. *ZAMM*, 50:529–546 (1970).
- Bueckner, H. Weight functions and stress intensity factors. En G. Sih, director, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Páginas 306–307. Noordhoff International Publishing, Leyden, Holanda (1973).
- Campbell, J., Gerberich, W. y Underwood, J. *Application of fracture mechanics for selection of metallic structural materials*. Metals Park, American Society for Metals, Ohio (1982).
- Carey, G. y Oden, J. *Finite Elements: A Second Course*, volumen II de *The Texas Finite Element Series*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1983).
- Carpinteri, A., Freitas, M. y Spagnoli, A. *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*. Elsevier (2003).
- Chan, S., Tuba, I. y Wilson, W. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2:1–17 (1970).
- Chen, F. y Shield, R. Conservation laws in elasticity of the  $J$ -integral type. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 28:1–22 (1977).
- Chen, W. *A model for joining the fatigue crack initiation and propagation analyses*. Tesis Doctoral, University of Illinois, Urbana-Champaign (1979).
- Cherepanov, G. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw-Hill, Nueva York (1979).
- Coffin, L. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 76:931–950 (1954).
- Comminou, M. Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 27:493–499 (1976).
- Conner, B., Suresh, S. y Lindley, T.C. Application of fracture mechanics based life prediction method for contact fatigue. *International Journal of Fatigue*, 26:511–520 (2004).
- Crossland, B. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. En *Proceedings International Conference on Fatigue of Metals*, Páginas 138–149. Institution of Mechanical Engineers, London (1956).
- Dixon, J.R. y Pook, L.P. Stress intensity factors calculated generally by the finite element technique. *Nature*, 224:166–167 (1969).

- Dolbow, J. *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Tesis Doctoral, Northwestern University, USA (1999).
- Donahue, R., Clark, H., Atanmo, P., Kumble, R. y McEvily, A. Crack opening displacement and the rate of fatigue crack growth. *International Journal of Fracture Mechanics*, 8:209–219 (1972).
- Dorogoy, A. y Banks-Sills, L. Shear loaded interface crack under the influence of friction: a finite difference solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(13):1749–1780 (2004).
- Dowling, N. *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall, New Jersey (1993).
- Dubourg, M. y Lamacq, V. Stage II crack propagation direction determination under fretting fatigue loading: a new approach in accordance with experimental observation. En E.C. Hoepfner DW Chandrasekaran V, director, *Fretting fatigue: current technology and practices*, Páginas 436–450. American Society for Testing and Materials ASTM STP 1367 (2000).
- Dubourg, M. y Lamacq, V. A predictive rolling contact fatigue crack growth model: Onset of branching, direction, and growth - role of dry and lubricated conditions on crack patterns. *ASME Journal of Tribology*, 124(4):680–688 (2002).
- Eftis, J., Subramonian, N. y Liebowitz, H. Crack border stress and displacement equations revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 9:189–210 (1977).
- El Haddad, M., Topper, T. y Smith, K. Prediction of non-propagating cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 11:573–584 (1979).
- Elber, W. The significance of fatigue crack closure. En *Damage tolerance in aircraft structures*, Páginas 37–45. American Society for Testing and Materials ASTM STP 486 (1970).
- Erdogan, F., Gupta, G. y Cook, T. Numerical solution of singular integral equations. En G. Sih, director, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Páginas 368–425. Noordhoff International Publishing, Leyden, Holanda (1973).
- Erdogan, F. y Sih, G. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering, Transactions of ASME*, 85:519–525 (1963).
- Faanes, S. Inclined cracks in fretting fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 52(1):71–82 (1995).
- Faanes, S. y Fernando, U. Life prediction in fretting fatigue using fracture mechanics. En T. Lindley y R. Waterhouse, directores, *ESIS 18. Fretting Fatigue*, Páginas 1–25. Mechanical Engineering Publications Limited, London (1994).
- Fatemi, A. y Socie, D. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 11 (3):149–165 (1988).
- Fellows, L., Nowell, D. y Hills, D. Contact stresses in a moderately thin strip (with particular reference to fretting experiments). *Wear*, 185:235–238 (1995).

- Fett, T., Stamm, H. y Walz, G. Weight function for finite strip with double-edge notches. *TAFM*, 10:227–230 (1988).
- Forsyth, P. A two stage process of fatigue crack growth. En *In crack propagation: Proceedings of Cranfield Symposium*, Páginas 76–94. Her Majesty's Stationary Office, London (1962).
- Fouvry, S., Nowell, D., Kubiak, K. y Hills, D.A. Prediction of fretting crack propagation based on a short crack methodology. 75:1605–1622 (2008).
- Gallagher, R. A review of finite element techniques in fracture mechanics. En D. Owen y A. Luxmoore, directores, *Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings 1st Conference*, Páginas 1–25. Pineridge Press, Swansea (1978).
- Gdoutos, E.E. *Fracture Mechanics: an Introduction*. Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda (1993).
- Gdoutos, E.E. y Theocaris, P.S. Stress concentration at the apex of a plane indenter acting on a elastic half-plane). *Journal of Applied Mechanics*, 42 (1975).
- Giannakopoulos, A.E., Lindley, T.C. y Suresh, S. Overview no. 129 - Aspects of equivalence between contact mechanics and fracture mechanics: Theoretical connections and a life-prediction methodology for fretting-fatigue. *Acta Materialia*, 46(9):2955–2968 (2002).
- Giannakopoulos, A.E. y Suresh, S. A three-dimensional analysis of fretting fatigue. *Acta Materialia*, 46 (1997).
- Giner, E. *Estimación del error de discretización en el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones mediante Elementos Finitos*. Tesis Doctoral, Dpto. de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia (2001).
- Giner, E., Hills, D.A. y Fuenmayor, F.J. Complete elastic contact subject to cyclic shear in partial slip. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 131(11):1146–1156 (2005).
- Giner, E., Sukumar, N., Denia, F. y Fuenmayor, F. Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation. *International Journal of Solid and Structures*, 45:5675–5687 (2008).
- Giner, E., Sukumar, N., Tarancón, J. y Fuenmayor, F. An Abaqus implementation of the extended finite element method. 76:347–368 (2009a).
- Giner, E., Tur, M. Tarancón, J. y Fuenmayor, F. Crack face contact in X-FEM using a segment to segment approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10.1002/nme.2813:, (2009b).
- Giner, E., Tur, M. y Fuenmayor, F.J. A domain integral for the calculation of generalized stress intensity factors in sliding complete contacts. *International Journal of Solid and Structures*, 46:938–951 (2009c).
- Giner, E., Tur, M., Vercher, A. y Fuenmayor, F.J. Numerical modeling of crack contact interaction in 2D incomplete fretting contacts using X-FEM. *Tribology International*, 42:1269–1275 (2009d).
- Hattori, T., Nakamura, M., Sakata, H. y Watanabe, T. Fretting fatigue analysis using fracture mechanics. *JSME International Journal*, 31:100–107 (1983).

- Hattori, T., Nakamura, M. y Watanabe, T. Simulation of fretting-fatigue life by using stress singularity parameters and fracture mechanics. *Tribology International*, 36(2):87–97 (2003).
- Hills, D.A., Nowell, D. y Sackfield, A. *Mechanics of Elastic Contacts*. Butterworth-Heinemann, Oxford (1993).
- Hills, D. y Nowell, D. *Mechanics of Fretting Fatigue, Solid mechanics and its applications*, volumen 30. Kluwer Academic Press (1994).
- Hourlier, F., d'Hondt, H., Truchon, M. y Pineau, A. fatigue crack path behavior under polymodal fatigue. En *Multiaxial fatigue*, Páginas 228–248. American Society for Testing and Materials ASTM STP 853, Philadelphia (1985).
- Irwin, G.R. Plastic zone near a crack and fracture toughness. En *Proceedings of the 7th Sagamore Conference*, volumen IV, Páginas 63–78. New York: Syracuse (1960).
- Johnson, K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press (1985).
- Ju, S. Simulating three-dimensional stress intensity factors by the least-squares method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:1437–1451 (1998).
- Kanninen, M. y Popelar, C. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford Engineering Science Series. Oxford University Press, New York (1985).
- Karolczuk, A. y Macha, E. A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials. *International Journal of Fracture*, 134:267–304 (2005).
- Kibey, S., Sehitoglu, H. y Pecknold, D.A. Modeling of fatigue crack closure in inclined and deflected cracks. *International Journal of Fracture*, 129(3):279–308 (2004).
- Kim, T., Dolbow, J. y Laursen, T. A mortared finite element method for frictional contact on arbitrary interfaces. *Computational Mechanics*, 39(3):223–235 (2007).
- Kitagawa, H. y Takahashi, S. Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage. En *In Proceedings of the Second International Conference on Mechanical Behavior of Materials, ASM*, volumen 23, Páginas 627–631. Boston (1979).
- Klesnil, M. y Lukas, P. Influence of strength and stress history on growth and stabilisation of fatigue cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 4:77–92 (1972).
- Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. y Salaün, M. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 (2005).
- Lamacq, V. y Dubourg, M.C. Modelling of initial fatigue crack growth and crack branching under fretting conditions. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 22(6):535–542 (1999).
- Lamacq, V., Dubourg, M. y Vincent, L. Crack path prediction under fretting fatigue: a theoretical and experimental approach. *ASME Journal of Tribology*, 118 (1996).
- Lankford, J. The growth of small fatigue cracks in 7075-T6 aluminum. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 5:233–248 (1982).

- Laursen, T. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer (2002).
- Leevers, P. y Radon, J. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture*, 19(4):311–325 (1982).
- Li, F., Shih, C. y Needleman, A. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(2):405–421 (1985).
- Liebowitz, H. y Moyer, E.T., J. Finite element methods in fracture mechanics. *Computers & Structures*, 31(1):1–9 (1989).
- Liu, A. *Structural life Assessment Methods*. ASM International (Materials Park, OH) (1998).
- Lo, S. y Lee, C. Solving crack problems by an adaptive refinement procedure. *Engineering Fracture Mechanics*, 43(2):147–163 (1992).
- Lykins, C.D., Mall, S. y Jain, V. A shear stress-based parameter for fretting fatigue crack initiation. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 24:461–473 (2001a).
- Lykins, C., Mall, S. y Jain, V. Combined experimental-numerical investigation of fretting fatigue crack initiation. *International Journal of Fatigue*, 23(8):703–711 (2001b).
- Manson, S. Behavior of material under thermal stress. Informe Técnico 1170, National Advisory Commission on Aeronautics. Cleveland: Lewis Flight (1954).
- Markushévich, A. *Teoría de las Funciones Analíticas*, volumen 1. MIR, Moscú (1978).
- McDiarmid, D. A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 14 (4):429–453 (1991).
- McMeeking, R.M. y Parks, D.M. On criteria of J-dominance of crack-tip fields in large-scale yielding. Páginas 175–194. American Society for Testing and Materials ASTM STP 668 (1979).
- Melenk, J. y Babuska, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314 (1996).
- Michavila, F. y Gavete, L. Métodos numéricos para el estudio de singularidades en elasticidad lineal. En J. Oliver, M. Elices, E. Oñate y M. Astiz, directores, *Métodos Numéricos Aplicados a Mecánica de la Fractura*, Páginas 1–25. CIMNE, Barcelona (1988).
- Mindlin, R. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16:259–268 (1949).
- Moës, N., Dolbow, J. y Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150 (1999).
- Mugadu, A. y Hills, D.A. Characterising the process zone in complete fretting contacts using plain fatigue sharp V-notch specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 (2002a).

- Mugadu, A. y Hills, D.A. A generalised stress intensity approach to characterising the process zone in complete fretting contacts. *International Journal of Solid and Structures*, 39 (2002b).
- Mugadu, A., Hills, D.A. y Limmer, L. An asymptotic approach to crack initiation in fretting fatigue of complete contacts. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(3):531–547 (2002).
- Muñoz, S., Navarro, C. y Domínguez, J. Application of fracture mechanics to estimate fretting fatigue endurance curves. 74:2168–2186 (2007).
- Murakami, Y. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press, Oxford (1987).
- Muskhelishvili, N. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Gröningen (1953).
- Mutoh, Y. y Xu, J.Q. Fracture mechanics approach to fretting fatigue and problems to be solved. *Tribology International*, 36(2):99–107 (2003).
- Mutoh, Y., Xu, J.Q. y Kondoh, K. Observation and analysis of fretting fatigue crack initiation and propagation. En S. Kinyon, D. Hoepfner y Y. Mutoh, directores, *Advanced in Basic Understanding and Applications*, Páginas 61–75. American Society for Testing and Materials ASTM STP 1425, West Conshohocken (2003).
- Namjoshi, S., Mall, S., Jain, V. y Jin, O. Effects of process variables on fretting fatigue crack initiation in Ti-6Al-4V. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 37(6):535–547 (2002).
- NASA/FLAGRO. *Fatigue Crack Growth Computer Program*. Johnson Space Center L.B. (1986).
- Navarro, C. *Iniciación y crecimiento de grietas en fatiga por fretting*. Tesis Doctoral, Dpto. de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad de Sevilla, Sevilla (2005).
- Navarro, C. y Domínguez, J. Initiation criteria in fretting fatigue with spherical contact. *International Journal of Fatigue*, 26(12):1253–1262 (2004).
- Navarro, C., García, M. y Domínguez, J. A procedure for estimating the total life in fretting fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 26 (5):459–468 (2003).
- Navarro, C., Muñoz, S. y Domínguez, J. On the use of multiaxial fatigue criteria for fretting fatigue life assessment. *International Journal of Fatigue*, 30 (1):32–44 (2008).
- Nemat-Nasser, S. y Horii, H. Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst. *Journal of Geophysical Research*, 87(B5):6805–6821 (1982).
- Newman, J. A finite element analysis of fatigue crack growth. En *Mechanics of crack growth*, Páginas 281–301. American Society for Testing and Materials ASTM STP 590 (1976).
- Nowell, D., Dini, D. y Hills, D. Recent developments in the understanding of fretting fatigue. 73:207–222 (2006).

- Nowell, D. y Hills, D. Mechanics of fretting fatigue tests. *International Journal of Mechanical Sciences*, 29(5):355–365 (1987).
- Nuismer, R. An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *International Journal of Fracture*, 11 (1975).
- Otsuka, A., Mori, K. y Miyata, T. The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition. 7:429–439 (1975).
- Otsuka, A., Mori, K., Ohshima, T. y Tsuyama, T. Mode II fatigue crack propagation in aluminium alloys and mild steel. En *In Proceedings of the 5th International Conference on Fracture*. Cannes (1981).
- Owen, D. y Fawkes, A. *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge Press, Ltd., Swansea, UK. (1983).
- Paris, P. y Erdogan, F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering, Transactions of ASME*, 85:528–534 (1963).
- Paris, P., Gomez, M. y W.P., A. A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13:9–14 (1961).
- Petiot, C., Vincent, L., Dang Van, K., Maouche, N., Foulquier, J. y Journet, B. An analysis of fretting-fatigue failure combined with numerical calculations to predict crack nucleation. *Wear*, 181-183(1):101–111 (1995).
- Pook, L. The significance of mode I branch cracks for combined failure. Informe Técnico 667, National Engineering Laboratory Report, East Kilbride, Glasgow (1980).
- Pu, S., Hussain, M. y Lorensen, W. The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1727–1742 (1978).
- Raju, I. y Newman, Jr., J. Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 11:817–829 (1979).
- Raju, I. y Newman, Jr., J. Methods for analysis of cracks in three-dimensional solids. *Journal of Aero. Soc. of India*, 36(3):153–172 (1984).
- Reis, L., Li, B., Leite, M. y De Freitas, M. Effects of non proportional loading paths on the orientation of fatigue crack path. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 28:445–454 (2005).
- Ribeaucourt, R., Baietto-Dubourg, M. y Gravouil, A. A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM/LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34):3230–3247 (2007).
- Rice, J. y Johnson, M.A. Inelastic behaviour of solids. Páginas 641–690. McGraw Hill, New York (1969).
- Rice, J. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386 (1968).
- Rice, J. Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solid and Structures*, 8:751–758 (1972).

- Rice, J. y Tracey, D. Computational fracture mechanics. En S. Fenves, N. Perrone, A. Robinson y W. Schnobrich, directores, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Páginas 585–623. Academic Press, New York (1973).
- Rooke, D. The development of stress intensity factors. En R. Waterhouse y T. Lindley, directores, *Fretting Fatigue, ESIS 18*, Páginas 23–58. Mechanical Engineering Publications, Londres (1994).
- Ruiz, C., Boddington, P. y Chen, K. An investigation of fatigue and fretting in a dovetail joint. *Experimental Mechanics*, 24 (3):208–217 (1984).
- Sackfield, A., Mugadu, A. y Hills, D.A. The influence of an edge radius on the local stress field at edge of a complete fretting contact. *International Journal of Solid and Structures*, 39 (2002).
- Sackfield, A., Truman, C.E. y Hills, D.A. The tilted punch under normal and shear load (with application to fretting test). *International Journal of Mechanical Sciences*, 43 (2001).
- Shih, C. y Asaro, R. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I - small scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 55:299–316 (1988).
- Shih, C., Moran, B. y Nakamura, T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of Fracture*, 30:79–102 (1986).
- Sih, G. *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, volumen 1 de *Mechanics of Fracture*. Noordhoff International Publishing, Leyden, Holanda (1973).
- Smith, D., Ayatollahi, M. y Pavier, M. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed mode loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 24:137–150 (2001).
- Smith, R., Watson, P. y Topper, T. A stress strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials JMLSA*, 5:767–778 (1970).
- Socie, D. Critical plane approaches for multiaxial fatigue damage assessment. En *Effects of Environment and Complex Load Histories on Fatigue Life*. Philadelphia (1993).
- Socie, D., Morrow, J. y Chen, W. A procedure for estimating the total fatigue life of notched and cracked members. *Engineering Fracture Mechanics*, 11:851–859 (1979).
- Socie, D., Waill, L. y Dittmer, D. Biaxial fatigue of inconel 718 including mean stress effects. En *Effects of Environment and Complex Load Histories on Fatigue Life*. Philadelphia (1993).
- Stephens, R.I., Fatemi, A., Stephens, R.R. y Fuchs, H.O. *Metal fatigue in engineering, Second Edition*. A Wiley Interscience Publication (2000).
- Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. y Belytschko, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1549–1570 (2000).
- Sum, W., Williams, E. y L, S. Finite element, critical-plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations. *International Journal of Fatigue*, 27(4):403–416 (2005).

- Suresh, S. *Fatigue of Materials, Second Edition*. Cambridge University Press (1998).
- Szolwinski, M. y Farris, T. Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminum alloy. 221:24–36 (1998).
- Tada, H., Paris, P. y Irwin, G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Paris Productions, Inc., St. Louis, Missouri, 2ª edición (1985).
- Tanaka, K. y Mura, T. A dislocation model for fatigue crack initiation. *Journal of Applied Mechanics*, 47 (1981).
- Taylor, D. Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fracture*, 21:413–420 (1999).
- Tur, M. *Modelado de problemas de contacto mediante elementos finitos utilizando técnicas de interacción segmento-segmento*. Tesis Doctoral, Dpto. de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia (2008).
- Tur, M., Fuenmayor, F.J. y Ródenas, J.J. Influence of bulk stress on contact conditions and stresses during fretting fatigue. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 37(6):479–492 (2002).
- Vallellano, C., Domínguez, J. y Navarro, C. On the estimation of fatigue failure under fretting conditions using notch methodologies. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 26:469–478 (2003).
- Ventura, G., Budyn, E. y Belytschko, T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1571–1592 (2003).
- Walker, K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum. En T. Lindley y R. Waterhouse, directores, *Effects of Environment and Complex Load Histories on Fatigue Life*, Páginas 1–14. American Society for Testing and Materials ASTM STP 462, Philadelphia (1970).
- Wang, M., Hu, R., Qian, C. y Li, J. Fatigue crack growth under mode II loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 18(12):1443–1454 (1995).
- Watwood, Jr., V. The finite element method for prediction of crack behaviour. *Nuclear Engineering and Design*, 11:323–332 (1969).
- Williams, J. y Ewing, P. Fracture under complex stress—the angled crack problem. *International Journal of Fracture*, 8(4):441–446 (1972).
- Williams, M. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, 19 (1952).
- Wittkowsky, B., Birch, P.R., Domínguez, J. y Suresh, S. An experimental investigation of fretting fatigue with spherical contact in 7075-T6 aluminum alloy. En E.C. Hoepfner DW Chandrasekaran V, director, *Fretting fatigue: current technology and practices*, Páginas 213–227. American Society for Testing and Materials ASTM STP 1367 (2000).
- Wong, S., Bold, P., Brown, M. y Allen, R. Two measurement techniques for determining effective stress intensity factors. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 23(8):659–666 (2000).

- Wriggers, P. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd. (2002).
- Yamashita, N. y Mura, T. Contact fatigue crack initiation under repeated oblique force. 91:235–250 (1983).
- Yau, J., Wang, S. y Corten, H. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47:335–341 (1980).
- Zhao, T. Zhang, J. y Jiang, Y. A study of fatigue crack growth of 7075-T651 aluminum alloy. *International Journal of Fracture*, 30:1169–1180 (2008).
- Zi, G. y Belytschko, T. New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:2221–2240 (2003).