UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA

# Conjuntos que determinan la acotación uniforme

Tesis Doctoral

Presentada por:
Salvador López Alfonso

Dirigida por:
José Mas Marí & Santiago Emmanuel Moll López

Valencia, 11 de noviembre de 2016

Don José Mas Marí, Catedrático de Universidad de la Universitat Politècnica de València, y Don Santiago Enmanuel Moll López, Profesor Contratado Doctor de la Universitat Politècnica de València

CERTIFICAN

> que la presente memoria "Conjuntos que determinan la acotación uniforme" ha sido realizada bajo nuestra dirección por D. Salvador López Alfonso y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.
>
> Y para que así conste en cumplimiento de la legislación vigente presentamos y apadrinamos ante la Escuela de Doctorado de la Universitat Politècnica de València la referida tesis firmando el presente certificado.

Valencia, septiembre de 2016

Los directores:

José Mas Marí | Santiago Enmanuel Moll López

# Resumen

Dividiremos el resumen de esta Tesis en dos apartados: Antecedentes y resultados.

**Antecedentes**. El clásico teorema de Nikodym (1933) nos dice que en cada subconjunto $M$ de medidas numerablemente aditivas definidas en una $\sigma$-álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$ que estén puntualmente acotadas en cada conjunto de $\mathcal{S}$ sucede que las medidas de $M$ están uniformente acotadas en $\mathcal{S}$, es decir, $\sup\{|\lambda(A)| : \lambda \in M, A \in \mathcal{S}\} < \infty$.

La propiedad de que cada medida numerablemente aditiva definida en una $\sigma$-álgebra es acotada llevó a Dieudonné a demostrar en 1951 el teorema de Nikodym cuando $M$ es un subconjunto de medidas acotadas y finitamente aditivas definidas en la $\sigma$-álgebra $2^\Omega$ de todos los subconjuntos de un conjunto $\Omega$.

En 1954, Grothendieck extendió el teorema de Dieudonné a una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$. Este resultado general se conoce como Teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck.

Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de Nikodym*, propiedad $N$ en breve, si en cada subconjunto $M$ de medidas acotadas, definidas en $\mathcal{A}$, finitamente aditivas y puntualmente acotadas en $\mathcal{B}$ sucede que las medidas de $M$ están uniformemente acotadas en $\mathcal{A}$. El teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck nos dice pues que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $N$.

En 1979, Valdivia mejoró profundamente este resultado al demostrar que si $(\mathcal{B}_m)_m$ es un cubrimiento creciente de una $\sigma$-álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$.

Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad* *fuerte de Nikodym*, propiedad $sN$ en breve, si en cada cubrimiento numerable creciente $(\mathcal{B}_m)_m$ de $\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$. Por el teorema de Valdivia se tiene que cualquier $\sigma$-álgebra tiene la propiedad $sN$.

Si $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ es un cubrimiento numerable creciente de un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ y si $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p,m_{p+1}})_{m_{p+1}}$ es un cubrimiento numerable creciente de $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$, siendo $p$ y cada $m_i$ números naturales, con $1 \leq i \leq p$, se dice que $\{\mathcal{B}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ es una *malla creciente* (*increasing web* en inglés) en $\mathcal{B}$. Si $(n_r)_r$ es una sucesión de números naturales entonces la sucesión de conjuntos $(\mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_r})_r$ es una *cadena infinita* de la malla creciente $\{\mathcal{B}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$.

Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $wN$ o $w(sN)$ si cada malla creciente en $\mathcal{B}$ contiene una cadena infinita formada por conjuntos que tienen la propiedad $N$ o $sN$, respectivamente. Análogamente, si cada malla en $\mathcal{B}$ contiene una cadena infinita formada por conjuntos que tienen la propiedad $wN$ entonces $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w(wN)$.

El teorema de Valdivia relativo a la propiedad $sN$ motivó que Kąkol y López-Pellicer demostrasen en 2015 que cada $\sigma$-álgebra tiene la propiedad $w(sN)$, resultado publicado en [16].

Por otra parte, es bien conocida la existencia de álgebras de conjuntos que no tienen la propiedad $N$. Schachermayer demostró en 1982 que el álgebra $\mathcal{J}([0,1])$ de los subconjuntos medibles Jordan del intervalo $[0,1]$ tiene la propiedad $N$, con lo que dio el primer ejemplo de un álgebra de conjuntos que no es $\sigma$-álgebra y que tiene la propiedad $N$.

En 2013, Valdivia mejoró profundamente el resultado de Schachermayer al demostrar que si $K$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}^k$ se tiene que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ de los subconjuntos Jordan medibles de $K$ tiene la propiedad $sN$. La mejora de Valdivia es el inesperado resultado de que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad fuerte de Nikodym. La sustitución del intervalo $[0,1]$ por $K$ solo exige utilizar técnicas conocidas.

**Resultados**. A continuación se enumeran algunos de los resultados obtenidos en esta Tesis.

1. Se ha probado que las propiedades $wN$, $w(sN)$ y $w(wN)$ son equi-

valentes (Sección 2.6, Proposición 50 y Corolario 51, páginas 51 y 52 respectivamente). Este resultado fue sugerido por el Teorema 2 de [16] que prueba que cualquier $\sigma$-álgebra tiene la propiedad $w(sN)$.

2. La demostración del referido Teorema 2 de [16] utiliza que cualquier $\sigma$-álgebra tiene las propiedades $N$ y $sN$, lo que la hace dependiente de los resultados de Nikodym, Dieudonné, Grothendieck y Valdivia. En nuestro artículo [18], S. López-Alfonso, J. Mas y S. Moll, *Nikodym boundedness property and webs in $\sigma$-álgebras*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 711–722, publicado conjuntamente con los directores de esta Tesis, se presenta una demostración de que cualquier $\sigma$-álgebra tiene la propiedad $wN$ que no depende de las propiedades $N$ y $sN$. Esta demostración se desarrolla en el Teorema 65 de la Sección 3.4 de esta Tesis, páginas 80 a 93, y está dividida en tres apartados para facilitar su exposición.

3. En el Corolario 66, deducido del Teorema 65 y expuesto en la página 88, se prueba que "*casi todas las cadenas infinitas*" contenidas en una malla creciente en una $\sigma$-álgebra están formadas por conjuntos que tienen la propiedad $wN$. El Corolario 67, página 90, proporciona un resultado similar para subconjuntos de una malla creciente determinados por un conjunto de índices que forman un $NV$-árbol, concepto dado en la Definición 52, página 58, utilizado en muchas demostraciones de esta Tesis y cuyo nombre evoca a Nikodym, a Valdivia y a la forma ramificada de los $NV$-árboles.

4. Estos dos corolarios nos han permitido obtener en la Sección 3.5 de la Tesis propiedades fuertes de localización de medidas vectoriales acotadas y finitamente aditivas. Se exponen en las Proposiciones 74, 78, 79, 80 y 81, páginas 97 a 105, y extienden los resultados conocidos de localización de medidas vectoriales acotadas, que se deducen de las propiedades $N$ y $sN$ de las $\sigma$-álgebras, en tanto que en la Tesis se utiliza la propiedad $wN$, que por su equivalencia con la propiedad $w(wN)$ es la propiedad más fuerte de tipo Ni-

kodym que se puede formular en mallas crecientes. El Corolario 66 nos permite obtener la Proposición 68, página 94, que proporciona una malla creciente $\{\mathcal{C}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ en una $\sigma$-álgebra tal que una sucesión de medidas acotadas y finitamente aditivas que sea puntualmente convergente en algún $\mathcal{C}_t$, con $t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s$, es puntualmente convergente en cada conjunto de la $\sigma$-álgebra.

5. Tal vez la aportación principal de esta Tesis pueda ser el Teorema 90, página 122 en el Capítulo 4, donde se prueba que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ de los conjuntos medibles Jordan de un intervalo $k$-dimensional $K$ tiene la propiedad $wN$. Este resultado está publicado en el artículo [19], S. López-Alfonso, *On Schachermayer and Valdivia results in álgebras of Jordan measurable sets*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 799–808. Nuestro resultado mejora los resultados antes citados de Schachermayer y Valdivia en [27] y [30] sobre las propiedades $N$ y $sN$ de $\mathcal{J}([0,1])$ y de $\mathcal{J}(K)$.

6. La demostración de este teorema se expone en la Sección 4.4, entre las páginas 122 y 132, y se desarrolla por reducción al absurdo. Se supone la existencia en $\mathcal{J}(K)$ de una malla creciente sin cadenas infinitas formadas por elementos que tienen la propiedad $N$. Entonces, las propiedades desarrolladas en las secciones 4.2 y 4.3 de la Tesis y dos procesos inductivos nos llevan a la construcción de dos subconjuntos numerables, uno de ellos formado por elementos disjuntos dos a dos del álgebra $\mathcal{J}(K)$ en tanto que el segundo conjunto está formado por medidas finitamente aditivas acotadas definidas en $\mathcal{J}(K)$. Estos dos conjuntos se construyen de forma que las medidas verifican ciertas desigualdades en los mencionados elementos disjuntos de $\mathcal{J}(K)$ que permiten obtener una contradicción.

7. El análisis de la demostración del Teorema 90 nos ha permitido dar una condición suficiente en un álgebra de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ que implica la propiedad $wN$. Se expone en la Proposición 93 de la página 133. Esta condición suficiente la verifican tanto las $\sigma$-álgebras como el álgebra $\mathcal{J}(K)$, por lo que los Teoremas 65 y 90

de la Tesis se podían haber presentado como corolarios de la Proposición 93. Ha parecido más natural seguir el orden cronológico, tal como se ha hecho en la Tesis.

8. En la sección 4.5 del capítulo 4, páginas 133 a 135, se exponen propiedades de localización de medidas vectoriales acotadas y finitamente aditivas definidas en el álgebra $\mathcal{J}(K)$, así como una caracterización de la convergencia puntual para una sucesión de medidas finitamente aditivas acotadas definidas en $\mathcal{J}(K)$. No se han dado las demostraciones por su similitud con las pruebas de las proposiciones análogas en el caso de $\sigma$-álgebras (páginas 94 a 105).

9. En la sección 5.1 del capítulo 5 se considera el problema planteado por Valdivia en 2013 en [30], que consiste en averiguar si el que un álgebra de conjuntos tenga la propiedad $N$ implica o no el tener la propiedad $sN$.

   En la sección 5.2 se traduce la propiedad de Nikodym y este problema de Valdivia al contexto más general de los espacios normados, generalizando lo que sucede en el espacio normado $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, envoltura lineal de las funciones características de los conjuntos de $\mathcal{A}$ provisto con la norma supremo, cuyo dual topológico es el espacio ba$(\mathcal{A})$ de las medidas acotadas y finitamente aditivas definidas en $\mathcal{A}$. Es evidente que un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $N$ si cada subconjunto $M$ de ba$(\mathcal{A})$ tal que las medidas de $M$ estén puntualmente acotadas en el conjunto $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ de las funciones características de los conjuntos de $\mathcal{B}$ verifica que $M$ es un subconjunto acotado del espacio de Banach $(\text{ba}(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma supremo, que se puede sustituir por cualquier otra norma equivalente, como, por ejemplo, la norma polar de la norma del espacio $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, que es la norma variación.

   Utilizando la Definición 100 de la página 139 dada para un espacio normado en [7] se tiene que un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $A$ tiene la propiedad $N$ si el conjunto $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto $DAU$ del espacio normado $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. $DAU$ es la abreviatura de "*subconjunto que determina la acotación uniforme*", versión en castellano del acrónimo inglés *ubd*, formado con iniciales de "*uniform boundedness deciding subset*".

La Proposición 102 de la página 141 de la Tesis caracteriza los subconjuntos $DAU$ de un espacio normado. La Proposición 108 de la página 144 caracteriza los subconjuntos acotados $DAU$ de un espacio normado. Esta proposición aparece en [22] con otro enunciado equivalente y una demostración que nos parece más complicada que la de nuestra Tesis, donde se formula diciendo que un subconjunto acotado $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es $DAU$ si y solo si es $s$-normante, lo que significa que cada cubrimiento numerable creciente $(C_m)_m$ de $C$ contiene un conjunto $C_n$ que es normante.

10. La Tesis termina con los Problemas abiertos 112, 113 y 114 de la página 147, que traducen el referido problema abierto de Valdivia a espacios normados. Estos tres problemas derivan de la pregunta sobre si la propiedad $DAU$ en un subconjunto $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ implica o no que $C$ tenga la propiedad $sDAU$, lo que significa que cada cubrimiento numerable creciente $(C_m)_m$ de $C$ contiene un conjunto $C_n$ que tiene la propiedad $DAU$.

# Resum

Dividirem el resum de la Tesi en dos apartats: Antecedents i resultats.

**Antecedents**. El clàssic teorema de Nikodym (1933) ens diu que en cada subconjunt $M$ de mesures numerablement additives definides en una $\sigma$-àlgebra de conjunts $\mathcal{S}$ que estiguen puntualment fitades en cada conjunt de $\mathcal{S}$ succeeix que aquestes mesures de $M$ estan uniformement fitades en $\mathcal{S}$, es a dir, $\sup\{|\lambda(A)| : \lambda \in M,\, A \in \mathcal{S}\} < \infty$.

La propietat que cada mesura numerablement additiva definida en una $\sigma$-àlgebra és fitada va portar a Dieudonné a demostrar en 1951 el teorema de Nikodym quan $M$ és un subconjunt de mesures fitades i finitament additives definides en la $\sigma$-àlgebra $2^\Omega$ de tots els subconjunts d'un conjunt $\Omega$.

En 1954, Grothendieck va estendre el teorema de Dieudonné a una $\sigma$-àlgebra $\mathcal{S}$ de subconjunts d'un conjunt $\Omega$. Aquest resultat general es coneix com a Teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck.

Un subconjunt $\mathcal{B}$ d'una àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$ té la *propietat de Nikodym, propietat* $N$ en breu, si en cada subconjunt $M$ de mesures fitades, definides en $\mathcal{A}$, finitament additives i puntualment fitades en $\mathcal{B}$ es té que les mesures de $M$ estan uniformement fitades en $\mathcal{A}$. El teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck ens diu doncs que qualsevol $\sigma$-àlgebra $\mathcal{S}$ té la propietat $N$.

En 1979, Valdivia va millorar profundament aquest resultat en demostrar que si $(\mathcal{B}_m)_m$ és un cobriment numerable creixent d'una $\sigma$-àlgebra de conjunts $\mathcal{S}$ existeix un $\mathcal{B}_n$ que té la propietat $N$.

Un subconjunt $\mathcal{B}$ d'una àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$ té la *propietat forta de Nikodym, propietat* $sN$ en breu, si en cada cobriment numerable creixent

$(\mathcal{B}_m)_m$ de $\mathcal{B}$ existeix un $\mathcal{B}_n$ que té la propietat $N$. Pel teorema de Valdivia es té que qualsevol $\sigma$-àlgebra té la propietat $sN$.

Si $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ és un cobriment numerable creixent d'un subconjunt $\mathcal{B}$ d'una àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$ i si $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p,m_{p+1}})_{m_{p+1}}$ és un cobriment numerable creixent de $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$, sent $p$ i cada $m_i$ nombres naturals, amb $1 \leq i \leq p$, es diu que $\{\mathcal{B}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ és una *malla creixent* (*increasing web* en anglès) en $\mathcal{B}$. Si $(n_r)_r$ és una successió de nombres naturals llavors la successió de conjunts $(\mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_r})_r$ és una *cadena infinita* de la malla creixent $\{\mathcal{B}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$.

Un subconjunt $\mathcal{B}$ d'una àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$ té la propietat $wN$ o $w(sN)$ si cada malla creixent en $\mathcal{B}$ conté una cadena infinita formada per conjunts que tenen la propietat $N$ o $sN$, respectivament. Anàlogament, si cada malla en $\mathcal{B}$ conté una cadena infinita formada per conjunts que tenen la propietat $wN$ llavors $\mathcal{B}$ té la propietat $w(wN)$.

El teorema de Valdivia relatiu a la propietat $sN$ va motivar que Kąkol i López-Pellicer demostraren en 2015 que cada $\sigma$-àlgebra té la propietat $w(wN)$, resultat publicat en [16].

D'altra banda, és ben coneguda l'existència d'àlgebres de conjunts que no tenen la propietat $N$. Schachermayer va demostrar en 1982 que l'àlgebra $\mathcal{J}([0,1])$ dels subconjunts mesurables Jordan de l'interval $[0,1]$ té la propietat $N$, amb el que va donar el primer exemple d'una àlgebra de conjunts que no és $\sigma$-àlgebra i que té la propietat N.

En 2013, Valdiva va millorar profundament el resultat de Schachermayer en demostrar que si $K$ és un interval compacte de $\mathbb{R}^k$ es té que l'àlgebra $\mathcal{J}(K)$ dels subconjunts Jordan mesurables de $K$ té la propietat $sN$. La millora de Valdivia és l'inesperat resultat que l'àlgebra $\mathcal{J}(K)$ té la propietat forta de Nikodym. La substitució de l'interval $[0,1]$ per $K$ solament exigeix utilitzar tècniques conegudes.

**Resultats**. A continuació s'enumeren alguns dels resultats obtinguts en aquesta Tesi.

1. S'ha provat que les propietats $wN$, $w(sN)$ i $w(wN)$ són equivalents (Secció 2.6, Proposició 50 i Corol·lari 51, pàgines 51 i 52). Aquest resultat va ser suggerit pel Teorema 2 de [16] que prova que qualsevol $\sigma$-àlgebra té la propietat $w(sN)$.

2. La demostració del referit Teorema 2 de [16] utilitza que qualsevol $\sigma$-àlgebra té les propietats $N$ i $sN$, la qual cosa la fa dependent dels resultats de Nikodym, Dieudonné, Grothendieck i Valdivia. En el nostre article [18], S. López-Alfonso, J. Mas y S. Moll, *Nikodym boundedness property and webs in $\sigma$-álgebras*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 711–722, publicat conjuntament amb els directors d'aquesta Tesi, es presenta una demostració de que qualsevol $\sigma$-àlgebra té la propietat $wN$ que no depèn de les propietats $N$ i $sN$. Aquesta demostració es desenvolupa en el Teorema 65 de la Secció 3.4 d'aquesta Tesi, pàgines 80 a 93, i està dividida en tres apartats per a facilitar la seua exposició.

3. En el Corol·lari 66, deduït del Teorema 65 i exposat en la pàgina 88, es prova que "*quasi totes les cadenes infinites*" contingudes en una malla creixent en una $\sigma$-àlgebra estan formades per conjunts que tenen la propietat $wN$. El Corol·lari 67, pàgina 90, proporciona un resultat similar per a subconjunts d'una malla creixent determinats per un conjunt d'índexs que formen un $NV$-arbre, concepte donat en la Definició 52, pàgina 58, utilitzat en moltes demostracions d'aquesta Tesi i el nom de la qual evoca a Nikodym, a Valdivia i a la forma ramificada dels $NV$-arbres.

4. Aquests dos corol·laris ens han permès obtenir en la Secció 3.5 de la Tesi propietats fortes de localització de mesures vectorials acotades i finitament additives. S'exposen en les Proposicions 74, 78, 79, 80 i 81, pàgines 97 a 105, i estenen els resultats coneguts de localització de mesures vectorials fitades, que es dedueixen de les propietats $N$ i $sN$ de les $\sigma$-àlgebres, mentre que en la Tesi s'utilitza la propietat $wN$, que per la seua equivalència amb la propietat $w(wN)$ és la propietat més forta de tipus Nikodym que es pot formular en malles creixents. El Corol·lari 66 ens permet obtenir la Proposició 68, pàgina 94, que proporciona una malla creixent $\{\mathcal{C}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ en una $\sigma$-àlgebra tal que una successió de mesures fitades i finitament additives que siga puntualment convergent en algun $\mathcal{C}_t$, $t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s$, és puntualment convergent en cada conjunt de la $\sigma$-àlgebra.

5. Tal vegada l'aportació principal d'aquesta Tesi puga ser el Teorema 90, pàgina 122 en el Capítol 4, on es prova que l'àlgebra $\mathcal{J}(K)$ dels conjunts mesurables Jordan d'un interval $k$-dimensional $K$ té la propietat $wN$. Aquest resultat està publicat en l'article [19], S. López-Alfonso, *On Schachermayer and Valdivia results in algebras of Jordan measurable sets*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 799–808. El nostre resultat millora els resultats abans citats de Schachermayer i Valdivia en [27] i [30] sobre les propietats $N$ i $sN$ de $\mathcal{J}([0,1])$ i de $\mathcal{J}(K)$.

6. La demostració d'aquest teorema s'exposa en la Secció 4.4, entre les pàgines 122 i 132, i es desenvolupa per reducció a l'absurd. Es suposa l'existència en $\mathcal{J}(K)$ d'una malla creixent sense cadenes infinites formades per elements que tenen la propietat $N$. Llavors, les propietats desenvolupades en les seccions 4.2 i 4.3 de la Tesi i dos processos inductius ens porten a la construcció de dos subconjunts numerables, un d'ells format per elements disjunts dos a dos de l'àlgebra $\mathcal{J}(K)$ mentre que el segon conjunt està format per mesures finitament additives acotades definides en $\mathcal{J}(K)$. Aquests dos conjunts es construeixen de manera que les mesures verifiquen certes desigualtats en els esmentats elements disjunts de $\mathcal{J}(K)$ que permeten obtenir una contradicció.

7. L'anàlisi de la demostració del Teorema 90 ens ha permès donar una condició suficient en un àlgebra de subconjunts d'un conjunt $\Omega$ que implica la propietat $wN$. S'exposa en la Proposició 93 de la pàgina 133. Aquesta condició suficient la verifiquen tant les $\sigma$-àlgebres com l'àlgebra $\mathcal{J}(K)$, per la qual cosa els Teoremes 65 i 90 de la Tesi es podien haver presentat com a corol·laris de la Proposició 93. Ha semblat més natural seguir l'ordre cronològic, tal com s'ha fet en la Tesi.

8. En la secció 4.5 del capítol 4, pàgines 133 a 135, s'exposen propietats de localització de mesures vectorials fitades i finitament additives definides en l'àlgebra $\mathcal{J}(K)$, així com una caracterització de la convergència puntual per a una successió de mesures finitament

additives fitades definides en $\mathcal{J}(K)$. No s'han donat les demostracions per la seua similitud amb les proves de les proposicions anàlogues en el cas de $\sigma$-àlgebres (pàgines 94 a 105).

9. En la secció 5.1 del capítol 5 es considera el problema plantejat per Valdivia en 2013 en [30], que consisteix a esbrinar si el que una àlgebra de conjunts tinga la propietat $N$ implica o no el tenir la propietat $sN$.

   En la secció 5.2 es tradueix la propietat de Nikodym i aquest problema de Valdivia al context més general dels espais normats, generalitzant el que succeeix amb l'espai normat $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, l'envoltura lineal de les funcions característiques dels conjunts de $\mathcal{A}$ proveït amb la norma suprem, que el seu dual topològic és l'espai $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ de les mesures fitades i finitament additives definides en $\mathcal{A}$. És evident que un subconjunt $\mathcal{B}$ d'una àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$ té la propietat $N$ si cada subconjunt $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ tal que les mesures de $M$ estiguen puntualment acotades en el conjunt $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ de les funcions característiques dels conjunts de $\mathcal{B}$ verifica que $M$ és un subconjunt fitat de l'espai de Banach $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, on $\|\cdot\|$ és la norma suprem, que es pot substituir per qualsevol altra norma equivalent, com, per exemple, la norma polar de la norma de l'espai $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, que és la norma variació.

   Utilitzant la Definició 100 de la pàgina 139 donada per a un espai normat en [7] es té que un subconjunt $\mathcal{B}$ d'una àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$ té la propietat $N$ si el conjunt $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ és un subconjunt $DAU$ de l'espai normat $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. $DAU$ és l'abreviatura de "*subconjunt que determina l'acotació uniforme*", versió en valencià de l'acrònim anglés *ubd*, format amb inicials de "*uniform boundedness deciding subset*".

   La Proposició 102 de la pàgina 141 de la Tesi caracteritza els subconjunts $DAU$ d'un espai normat. La Proposició 108 de la pàgina 144 caracteritza els subconjunts fitats $DAU$ d'un espai normat. Aquesta proposició apareix en [22] amb un altre enunciat equivalent i una demostració que ens sembla més complicada que la de la nostra Tesi, on es formula dient que un subconjunt fitat $C$ d'un espai normat $(E, \|\cdot\|)$ és $DAU$ si i solament si és $s$-normant, la qual cosa significa que cada cobriment numerable creixent $(C_m)_m$ de $C$ conté un conjunt $C_n$ que és normant.

10. La Tesi acaba amb els Problemes oberts 112, 113 i 114 de la pàgina 147, que tradueixen el referit problema obert de Valdivia a espais normats. Aquests tres problemes deriven de la pregunta sobre si la propietat $DAU$ en un subconjunt $C$ d'un espai normat $(E, \|\cdot\|)$ implica o no que $C$ tinga la propietat $sDAU$, la qual cosa significa que cada cobriment numerable creixent $(C_m)_m$ de $C$ conté un conjunt $C_n$ que té la propietat $DAU$.

# Summary


We will divide the summary of the Thesis in two sections: Antecedents and results.

**Antecedents.** The classical Nikodym's theorem (1933) states that each subset $M$ of countably additive measures defined in a $\sigma$-algebra of sets $\mathcal{S}$ that are pointwise bounded in each set of $\mathcal{S}$ has the property that the measures of $M$ are uniformly bounded on $\mathcal{S}$, i.e., $\sup\{|\lambda(A)| : \lambda \in M,\ A \in \mathcal{S}\} < \infty$.

The property that each countably additive measure defined in a $\sigma$-algebra is bounded carried Dieudonné to show in 1951 Nikodym's theorem when $M$ is a subset of bounded finitely additive measures defined in the $\sigma$-algebra $2^\Omega$ of all the subsets of a set $\Omega$.

In 1954, Grothendieck extended Dieudonné's theorem to a $\sigma$-algebra of subsets $\mathcal{S}$ of a set $\Omega$. This general result is called Nikodym-Dieudonné-Grothendieck's theorem.

A subset $\mathcal{B}$ of an algebra of sets $\mathcal{A}$ has *Nikodym's property, property $N$* in brief, if in each subset $M$ of bounded finitely additive measures defined in $\mathcal{A}$ and such that the measures of $M$ are pointwise bounded in $\mathcal{B}$, then these measures are uniformly bounded on $\mathcal{A}$. The Nikodym-Dieudonné-Grothendieck's theorem says us that any $\sigma$-algebra $\mathcal{S}$ of subsets of a set $\Omega$ has the property $N$.

In 1979, Valdivia improved deeply this result by showing that if $(\mathcal{B}_m)_m$ is an increasing covering of a $\sigma$-algebra of sets $\mathcal{S}$ there exists a $\mathcal{B}_n$ that has the property $N$.

A subset $\mathcal{B}$ of a set-algebra $\mathcal{A}$ has *strong Nikodym property, property $sN$* in brief, if each increasing countable covering $(\mathcal{B}_m)_m$ of $\mathcal{B}$ contains a

$\mathcal{B}_n$ that has property $N$. Valdivia's theorem affirms that each $\sigma$-algebra has the property $sN$.

If $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ is an increasing countable covering of a subset $\mathcal{B}$ of a set-algebra $\mathcal{A}$ and if $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p,m_{p+1}})_{m_{p+1}}$ is a increasing countable covering of $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$, with $p$ and each $m_i$ natural numbers, with $1 \leq i \leq p$, then $\{\mathcal{B}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ is an *increasing web* in $\mathcal{B}$. For each sequence $(n_r)_r$ of natural numbers the sequence $(\mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_r})_r$ is an *infinite chain* in the increasing web $\{\mathcal{B}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$.

A subset $\mathcal{B}$ of a set-algebra $\mathcal{A}$ has the property $wN$ or $w(sN)$ if each increasing web in $\mathcal{B}$ contains an infinite chain formed by sets that have the property $N$ or $sN$, respectively. Analogously, if an increasing web in $\mathcal{B}$ contains an infinite chain formed by sets that have the property $wN$ then $\mathcal{B}$ has the property $w(wN)$.

The theorem of Valdivia relative to property $sN$ motivated that Kąkol and López-Pellicer showed in 2015 that each $\sigma$-algebra has the property $w(sN)$, result published in [16].

On the other hand, it is well known the existence of set-algebras that do not have the property $N$. Schachermayer showed in 1982 that the algebra $\mathcal{J}([0,1])$ of the Jordan measurable subsets of the interval $[0,1]$ has the property $N$, with what gave the first example of a set-algebra that is not $\sigma$-algebra and that has the property $N$.

In 2013, Valdiva improved deeply the result of Schachermayer showing that if $K$ is a compact interval of $\mathbb{R}^k$ then the algebra $\mathcal{J}(K)$ of all Jordan measurable subsets of $K$ has property $sN$. Valdivia's improvement is the unexpected property that the algebra $\mathcal{J}(K)$ has the strong Nikodym property. The change of $[0,1]$ by $K$ only demands to use some known techniques.

**Results.** We listed here some obtained results in the Thesis.

1. It has been proved that the properties $wN$, $w(sN)$ and $w(wN)$ are equivalent (Section 2.6, Proposition 50 and Corollary 51, pages 51 and 52). This result was suggested by the Theorem 2 of [16] stating that any $\sigma$-algebra has the property $w(sN)$.

2. The proof of the referred Theorem 2 of [16] uses that any $\sigma$-algebra has the properties $N$ and $sN$, whence his proof depends of Nikodym, Dieudonné, Grothendieck and Valdivia theorems. In our quoted paper [18], S. López-Alfonso, J. Mas and S. Moll, *Nikodym boundedness property and webs in $\sigma$-algebras* RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 711–722, published with the directors of this Thesis, we present a proof of the property that each $\sigma$-algebra has property $wN$ that does not depend on the properties $N$ and $sN$. Our proof is developed in Theorem 65 of the Section 3.4 of this Thesis, pages 80 to 93, and it is divided in three sections to facilitate the exposition.

3. Corollary 66, deduced from Theorem 65 and exposed in the page 86, establishes that "*almost all infinite chains*" contained in an increasing web in a $\sigma$-algebra are formed by sets that have the property $wN$. Corollary 67, page 90, provides a similar result for subsets of an increasing web determined by a group of indexes that form a $NV$-tree, concept given in the Definition 52, page 58, used in many proofs of this Thesis and whose name evokes Nikodym, Valdivia and the branched shape of the $NV$-trees.

4. These two corollaries have allowed us to obtain in Section 3.5 of the Thesis strong properties of localization of bounded finitely additive vector measures given in Propositions 74, 78, 79, 80 and 81, pages 97 to 105. These properties extend the localization known results deduced from properties $N$ and $sN$ of the $\sigma$-algebras, whereas in the Thesis we use the property $wN$, that its equivalence with property $w(wN)$ shows that it is the strongest Nikodym property type for increasing webs. The Corollary 66 allows us to deduce the Proposition 68, page 94, that provides an increasing web $\{\mathcal{C}_t : t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ in a $\sigma$-algebra such that each sequence of bounded finitely additive measures pointwise convergent on some $\mathcal{C}_t$, $t \in \bigcup_s \mathbb{N}^s$, is pointwise convergent in each set of the $\sigma$-algebra.

5. Perhaps the main contribution of this Thesis may be Theorem 90, page 122 in the Chapter 4, where it is proved that the algebra

$\mathcal{J}(K)$ of measurable Jordan subsets of an interval $k$-dimensional $K$ has the property $wN$. This result has been published in the paper [19], S. López-Alfonso, *On Schachermayer and Valdivia results in algebras of Jordan measurable sets*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math **110** (2016) 799–808. Our result improves the previously quoted results of Schachermayer and Valdivia in [27] and [30] on the properties $N$ and $sN$ of $\mathcal{J}([0,1])$ and $\mathcal{J}(K)$.

6. The proof of this Theorem 90 is in Section 4.4, between the pages 122 and 132, and it has been made by contradiction. It supposes the existence in $\mathcal{J}(K)$ of an increasing web without infinite chains formed by elements that have the property $N$. Then, the properties developed in the sections 4.2 and 4.3 of the Thesis and two inductive processes carry us to the construction of two countable subsets, one of them formed by pairwise disjoint elements of the algebra $\mathcal{J}(K)$ whereas the second is formed by finitely additive bounded measures defined in $\mathcal{J}(K)$. These two sets are built up in such a way that the measures verify some inequalities in the mentioned disjoint elements of $\mathcal{J}(K)$ that allow us to obtain a contradiction.

7. From the proof of Theorem 90 we have deduced a sufficient condition in an algebra of subsets of a set $\Omega$ that implies property $wN$. It is given in Proposition 93, page 133. The sufficient condition is verified by $\sigma$-algebras as well as by the algebra $\mathcal{J}(K)$, whence Theorems 65 and 90 of the Thesis could have been presented like corollaries of Proposition 93. It has seemed more natural to follow the chronological order, such as it has been done in the Thesis.

8. Section 4.5 of Chapter 4, pages 133 to 135, present localization properties of bounded finitely additive vector measures defined in the algebra $\mathcal{J}(K)$, as well as a characterization of pointwise convergence for a sequence of bounded finitely additive measures defined in $\mathcal{J}(K)$. The proofs have been omitted by his similarity with the corresponding proofs for $\sigma$-algebras given in pages 94 to 105.

9. Section 5.1 in Chapter 5 deals with Valdivia's problem proposed in 2013 in [30], asking if property $N$ in a set-algebra implies or not property $sN$.

   Section 5.2 translates Nikodym property and this Valdivia problem to the general frame of normed spaces, generalizing what happens in the normed space $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, that is the linear hull of the characteristic functions of the sets of $\mathcal{A}$ endowed with the supreme norm, which topological dual is the space $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ of bounded and finitely additive measures defined in $\mathcal{A}$. It is obvious that a subset $\mathcal{B}$ of a set-algebra has property $N$ if each subset $M$ of $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ such that the measures of $M$ are pointwise bounded in the set $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ of characteristic functions of the sets of $\mathcal{B}$ verifies that $M$ is a bounded subset of the Banach space of $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, where $\|\cdot\|$ is the supreme norm, that can be substituted by any equivalent norm, as, for example, the polar norm of the norm of the space $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, that is the variation norm.

   Using Definition 100 of the page 139 given for a normed space in [7] we get that a subset $\mathcal{B}$ of a set-algebra $\mathcal{A}$ has property $N$ if the set $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ is a $DAU$ subset of the normed space $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. $DAU$ is the abbreviation of "*conjunto que determina la acotación unifome*", Spanish version of the English acronym *ubd*, formed with initials of "*uniform boundedness deciding subset*".

   Proposition 102 of the page 141 of the Thesis characterizes the $DAU$ subsets of a normed space. Proposition 108 of the page 144 characterizes the bounded $DAU$ subsets of a normed space. This proposition appears in [22] with another equivalent formulation and with a prof that seems us more complicated that the one presented in our Thesis, where it is stated that a bounded subset $C$ of a normed space $(E, \|\cdot\|)$ is $DAU$ if and only if it is $s$-norming, what means that each increasing countable covering $(C_m)_m$ of $C$ contains a set $C_n$ that it is norming.

10. The Thesis finishes with the open Problems 112, 113 and 114 in page 147, that translates the referred Valdivia's open problem to

normed spaces. These three problems come from the unknown question about that if the property $DAU$ in a subset $C$ of a normed space $(E, \|\cdot\|)$ implies or not that $C$ has the strong $DAU$ property, in brief $sDAU$, and which means that each increasing covering $(C_m)_m$ of $C$ contains a set $C_n$ which has property $DAU$.

# Agradecimientos

Mi sincero agradecimiento a los directores de esta Tesis, Profesores José Mas Marí y Santiago Emmanuel Moll López.

*A Lupe,*
*Manuel, Enrique y Pablo*

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción.

## 1.1 Álgebras y $\sigma$-álgebras de conjuntos.

$\Omega$ representará un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\Omega$.

**Definición 1** (**Álgebra de conjuntos**). *Un álgebra de conjuntos es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ que verifica:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. *Si* $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$ *se tiene que* $\{A \cup B, \Omega \backslash A\} \subset \mathcal{A}$.

Los elementos de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ se llaman conjuntos $\mathcal{A}$-medibles o simplemente medibles cuando no es posible la confusión con otra álgebra de conjuntos. De la definición se deduce que el conjunto intersección de dos conjuntos $\mathcal{A}$-medibles es $\mathcal{A}$-medible.

**Definición 2** (**$\sigma$-álgebra de conjuntos**). *Una $\sigma$-álgebra de conjuntos es un álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\Omega$ que, adicionalmente, tiene la propiedad de que la unión de una familia numerable de conjuntos $\mathcal{S}$-medibles es un conjunto $\mathcal{S}$-medible.*

Esta definición implica que la intersección de una familia numerable de elementos de una $\sigma$-álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$ es también un elemento de $\mathcal{S}$.

Es habitual utilizar *álgebra* y *$\sigma$-álgebra* por *álgebra de conjuntos* y *$\sigma$-álgebra de conjuntos*, respectivamente, cuando el contexto es claro.

**Ejemplo 3.** *La familia $\mathcal{A}$ formada por el conjunto $\emptyset$, los subconjuntos finitos del conjunto $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ de los enteros positivos y sus complementos es un álgebra $\mathcal{A}$ que no es $\sigma$-álgebra.*

Para demostrar que $\mathcal{A}$ no es $\sigma$-álgebra es suficiente con observar que el conjunto $P$ de los números pares no pertenece al álgebra $\mathcal{A}$ y es unión de una familia numerable de elementos de $\mathcal{A}$. Esta álgebra se llama *el álgebra de los subconjuntos finitos y cofinitos* de $\mathbb{N}$.

**Ejemplo 4.** *La familia de todos los subconjuntos de un conjunto $\Omega$ es una $\sigma$-álgebra, que se representa por $2^{\Omega}$.*

Recordemos las definiciones siguientes que necesitaremos en el ejemplo 5. Sea $M$ un subconjunto de un espacio topológico $(X, \tau)$.

1. $M$ es *raro* si su clausura $\overline{M}$ tiene interior vacío.

2. $M$ es de *primera categoría* si es una unión numerable de conjuntos raros. Por tanto, la unión numerable de conjuntos de primera categoría es un conjunto de primera categoría.

3. $M$ tiene la *propiedad de Baire* si existe un abierto $O$ tal que los conjuntos $M \backslash O$ y $O \backslash M$ son conjuntos de primera categoría.

**Ejemplo 5.** *La familia $\mathcal{S}$ formada por los subconjuntos de $(X, \tau)$ que tienen la propiedad de Baire es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$.*

*Demostración.* La demostración de que la familia $\mathcal{S}$ es una $\sigma$-álgebra es directa pues:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$, ya que el abierto $O := \emptyset$ verifica que $\emptyset \backslash O$ y $O \backslash \emptyset$ son conjuntos de primera categoría, pues $\emptyset \backslash O = O \backslash \emptyset = \emptyset$.

2. Si $A \in \mathcal{S}$ existe un abierto $O_A$ tal que $A \backslash O_A$ y $O_A \backslash A$ son conjuntos de primera categoría. De las igualdades

$$\begin{aligned} &(\Omega\backslash A)\backslash(\Omega\backslash O_A) = O_A\backslash A \\ \text{y} \quad &(\Omega\backslash O_A)\backslash(\Omega\backslash A) = A\backslash O_A \end{aligned}$$

se deduce que los conjuntos $(\Omega\backslash A)\backslash(\Omega\backslash O_A)$ y $(\Omega\backslash O_A)\backslash(\Omega\backslash A)$ son conjuntos de primera categoría. Entonces $\Omega\backslash\overline{O_A}$ es un conjunto abierto que verifica que

$$\begin{aligned} &(\Omega\backslash A)\backslash(\Omega\backslash\overline{O_A}) = \overline{O_A}\backslash A \subset (O_A\backslash A) \cup (\overline{O_A}\backslash O_A) \\ \text{y} \quad &(\Omega\backslash\overline{O_A})\backslash(\Omega\backslash A) = A\backslash\overline{O_A} \subset A\backslash O_A, \end{aligned}$$

por lo que $\Omega\backslash A \in \mathcal{S}$, ya que el abierto $\Omega\backslash\overline{O_A}$ verifica la condición de Baire respecto al conjunto $\Omega\backslash A$.

3. Si $A_n \in \mathcal{S}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un abierto $O_{A_n}$ tal que $A_n\backslash O_{A_n}$ y $O_{A_n}\backslash A_n$ son conjuntos de primera categoría. Si $A := \cup_n A_n$ y $O_A := \cup_n O_{A_n}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &A\backslash O_A = \cup_n(A_n\backslash O_A) \subset \cup_n(A_n\backslash O_{A_n}) \\ \text{y} \quad &O_A\backslash A = \cup_n(O_{A_n}\backslash A) \subset \cup_n(O_{A_n}\backslash A_n). \end{aligned}$$

De las hipótesis de que $A_n\backslash O_{A_n}$ y $O_{A_n}\backslash A_n$ son conjuntos de primera categoría, se deduce que $\cup_n(A_n\backslash O_{A_n})$ y $\cup_n(O_{A_n}\backslash A_n)$ son de primera categoría, luego $A \in \mathcal{S}$ pues $O_A$ es un conjunto abierto y los conjuntos $A\backslash O_A$ y $O_A\backslash A$ son de primera categoría. ∎

## 1.2 Medidas finitamente aditivas.

**Definición 6.** *Una* medida finitamente aditiva $\mu$, *real o compleja, definida en el álgebra $\mathcal{A}$, es una aplicación $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ o $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\mu(\emptyset) = 0$$

*y*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

*para cada par de elementos disjuntos $A$ y $B$ del álgebra $\mathcal{A}$.*

Sea $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ la familia de todas las posibles particiones finitas de $\Omega$ mediante conjuntos $\mathcal{A}$-medibles de un álgebra $\mathcal{A}$.

**Definición 7.** *La* variación $|\mu|$ *de una medida finitamente aditiva $\mu$ definida en $\mathcal{A}$ se define por*

$$|\mu| := \sup \left\{ \sum_{A_i \in F} |\mu(A_i)| : F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \right\}.$$

*Una medida finitamente aditiva $\mu$ es de* variación acotada *si $|\mu| < \infty$.*

El conjunto de medidas finitamente aditivas de variación acotada se representa por $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$.

Sea $B$ un conjunto medible y $\mathcal{F}_B$ la familia de todas las posibles particiones finitas de $B$ mediante conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$.

**Definición 8.** *La* variación en $B$, *$|\mu|(B)$, de una medida finitamente aditiva $\mu$ definida en $\mathcal{A}$ es*

$$|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{A_i \in F} |\mu(A_i)| : F \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \right\}. \tag{1.2.1}$$

Por tanto,

$$|\mu| = |\mu|(\Omega).$$

Es bien conocido que el espacio $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ provisto con la norma variación, $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, es un espacio de Banach y que si $\{B_1, B_2\}$ es una partición de $B$ en dos subconjuntos medibles

$$|\mu|(B) = |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2)$$

luego si $|\mu|(B) = \infty$ existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $|\mu|(B_i) = \infty$. Por tanto, la igualdad $|\mu|(B) = \infty$ implica que para cada número $h > 0$ existe una partición $\{C_1, C_2\}$ de $B$ en conjuntos medibles tales que

$$|\mu(C_i)| > h, \quad i = 1, 2,$$

pues de $|\mu|(B) = \infty$ se deduce la existencia en $B$ de un subconjunto medible $C_1$ tal que

$$|\mu(C_1)| > h + |\mu(B)|$$

por lo que el conjunto $C_2 = B \backslash C_1$ verifica que

$$|\mu(C_2)| = |\mu(B \backslash C_1)| > |\mu(C_1)| - |\mu(B)| > h.$$

Las desigualdades

$$|\mu(C_i)| > h, \quad i = 1, 2$$

y la igualdad $|\mu|(B) = |\mu|(C_1) + |\mu|(C_2)$ nos permiten concluir que si $|\mu|(B) = \infty$ y $h > 0$ existen en $B$ dos subconjuntos disjuntos $\{B_1, B_1'\}$ tales que $\mu(B_1) > h$, $|\mu|(B_1') = \infty$, ya que de $|\mu|(C_1) + |\mu|(C_2) = \infty$ se deduce que $|\mu|(C_1) = \infty$ o $|\mu|(C_2) = \infty$. Por tanto podemos suponer que $|\mu|(C_2) = \infty$ y entonces $B_1 = C_1$ y $B_1' = C_2$ verifican que $\mu(B_1) > h$ y que $|\mu|(B_1') = \infty$.

Esta observación y una inducción directa proporcionan la Proposición 9.

**Proposición 9.** *Si $\mu$ es una medida finitamente aditiva definida en un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y $B$ es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $|\mu|(B) = \infty$, existe en $B$ una sucesión $(B_n)_n$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que $|\mu(B_n)| > n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Si $\{B_1, B_2, \ldots, B_m, B_m'\}$ es una partición de $B$ en conjuntos medibles, tales que

$$|\mu(B_n)| > n,$$

si $1 \leqslant n \leqslant m$, y

$$|\mu|(B_m') = \infty,$$

existe una partición $\{B_{m+1}, B_{m+1}'\}$ de $B_m'$ en dos conjuntos medibles tales que

$$\mu(B_{m+1}) > m + 1,$$

y
$$|\mu|\left(B'_{m+1}\right)=\infty.$$

De esta observación se deduce un sencillo razonamiento inductivo que prueba esta proposición. ∎

**Definición 10.** *Una* medida $\mu$*, real o compleja, definida en un álgebra* $\mathcal{A}$*, es una medida finitamente aditiva tal que, además, para cada sucesión* $(A_n)_n$ *de elementos del álgebra* $\mathcal{A}$ *disjuntos dos a dos y tales que* $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$ *se verifica que*
$$\mu(\cup_n A_n)=\sum_n \mu(A_n).$$

Entonces también se dice que $\mu$ es una *medida numerablemente aditiva*, si bien se utiliza preferentemente la palabra *medida*.

**Corolario 11.** *La variación de una medida* $\mu$ *definida en una* $\sigma$*-álgebra* $\mathcal{S}$ *es finita.*

*Demostración.* Si $|\mu|(\Omega)=\infty$ se deduce de la Proposición 9 la existencia de una sucesión $(B_n)_n$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que $|\mu(B_n)|>n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Por ser $\mathcal{S}$ una $\sigma$-álgebra se tiene $\cup_n B_n\in\mathcal{S}$ y al ser $\mu$ una medida se verifica la igualdad
$$\mu(\cup_n B_n)=\sum_n \mu(B_n)$$

que es una contradicción, ya que la serie $\sum_n \mu(B_n)$ no es convergente, pues $|\mu(B_n)|>n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. ∎

## 1.3 Los espacios $(L(\mathcal{A}),\|\cdot\|)$ y $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}),|\cdot|)$.

El *dual topológico* de un espacio localmente convexo $E(\tau)$ es el espacio vectorial $E'$ formado por las formas lineales continuas definidas en $E(\tau)$. En particular, el *dual topológico* de un espacio normado $(X,\|\cdot\|)$ es el conjunto $X'$ de todas las formas lineales continuas definidas en $X$. Una forma lineal $f$ definida en $(X,\|\cdot\|)$ es continua si y solo si la imagen

$f(B_X)$ de la bola abierta $B_X$ de radio 1 y centro el vector nulo es un conjunto acotado. Por tanto, $f \in X'$ si y solo si

$$\sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| < 1\} < \infty.$$

En esta igualdad se puede sustituir $B_X$ por la bola cerrada

$$\overline{B}_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\},$$

puesto que

$$\sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| < 1\} = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Se tiene pues que $X'$ es el conjunto de todas las formas lineales definidas en $X$ y que están uniformemente acotadas en la bola unidad $B_X$. Para cada $f \in X'$ la expresión

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| < 1\}$$

define una norma en $X'$, llamada *norma dual* o *norma polar* de la norma $\|\cdot\|$. El nombre *norma polar* se justifica posteriormente por la igualdad (1.5.2).

Es bien conocido que $(X', \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

En lo sucesivo se utilizará *dual* como abreviación de *dual topológico.*

Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$. Se representa por $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ al espacio normado, real o complejo, generado por las funciones características $e_C$, para cada $C \in \mathcal{B}$, provisto con la norma supremo, que denotamos por $\|\cdot\|$.

$(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ es isométrico al subespacio de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ generado por las funciones características $\{e_C : C \in \mathcal{B}\}$. Por tanto, $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ se identifica con dicho subespacio de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.

También, de forma natural se identifican las formas lineales definidas en $L(\mathcal{A})$ con las medidas finitamente aditivas definidas en el álgebra $\mathcal{A}$, pues a cada *forma lineal* $\mu$ definida en $L(\mathcal{A})$ se le asocia una *medida finitamente aditiva*, que también se representa por $\mu$ y que está definida por las igualdades

$$\mu(A) := \mu(e_A)$$

para cada $A \in \mathcal{A}$. Recíprocamente, a cada *medida finitamente aditiva* $\mu$ definida en $\mathcal{A}$ se le hace corresponder la forma lineal definida en $L(\mathcal{A})$, que se representa por la misma letra $\mu$ y está determinada por las igualdades

$$\mu(e_A) := \mu(A) \tag{1.3.1}$$

para cada $A \in \mathcal{A}$.

Esta biyección determina además una correspondencia biunívoca entre las formas lineales continuas definidas en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ y las medidas finitamente aditivas de variación acotada definidas en el álgebra $\mathcal{A}$, ya que la variación de una medida finitamente aditiva $\mu$ coincide con el supremo de los valores $|\mu(f)|$ cuando $f \in B_{L(\mathcal{A})}$, es decir

$$|\mu| = \sup\{|\mu(f)| : f \in B_{L(\mathcal{A})}\} = \sup\{|\mu(f)| : f \in \overline{B}_{L(\mathcal{A})}\}, \tag{1.3.2}$$

siendo $B_{L(\mathcal{A})}$ la bola abierta $\{f \in L(\mathcal{A}) : \|f\| < 1\}$ ($\overline{B}_{L(\mathcal{A})}$ la bola cerrada $\{f \in L(\mathcal{A}) : \|f\| \leqslant 1\}$) de radio 1 y centro el vector nulo del espacio $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, pues

(*i*) Si $F := \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ y $\mu(A_i) \neq 0$, para cada $A_i \in F$, se tiene que la función

$$g = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|\mu(A_i)|}{\mu(A_i)} e_{A_i}$$

pertenece a $L(\mathcal{A})$, $\|g\| = 1$ y

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mu(A_i)| &= \left|\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|\mu(A_i)|}{\mu(A_i)} \mu(A_i)\right| \\ &= \left|\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|\mu(A_i)|}{\mu(A_i)} \mu(e_{A_i})\right| = |\mu(g)|\,,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}|\mu| &= \sup\{\sum_{A_i \in F} |\mu(A_i)| : F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}\} \\ &\leqslant \sup\left\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{A}), \|f\| \leqslant 1\right\}.\end{aligned}$$

*(ii)* Para cada $f \in L(\mathcal{A})$, con $\|f\| \leqslant 1$, existe una partición $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ formada por conjuntos $\mathcal{A}$-medibles tal que $f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i e_{A_i}$, con $|c_i| \leqslant 1$, por lo tanto de

$$|\mu(f)| = \left| \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i \mu(e_{A_i}) \right| \leqslant \left| \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i \mu(A_i) \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mu(A_i)|$$

se deduce que

$$\begin{aligned} &\sup\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{A}),\ \|f\| \leqslant 1\} \\ &\qquad \leqslant \sup \left\{ \sum_{A_i \in F} |\mu(A_i)| : F \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \right\} = |\mu| \,. \end{aligned}$$

Por tanto, de la igualdad (1.3.2) se deduce que existe una isometría entre:

- el espacio de Banach $(L(\mathcal{A})', \|\cdot\|)$, formado por el dual del espacio $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, provisto con la norma dual definida por

$$\|\mu\| := \sup\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{A}),\ \|f\| \leqslant 1\},$$

- y el espacio $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ de las medidas finitamente aditivas de variación acotada definidas en el álgebra $\mathcal{A}$ con la norma variación.

Esta isometría está definida por la biyección que a cada medida finitamente aditiva $\mu$ definida en el álgebra $\mathcal{A}$ le hace corresponder la forma lineal $\mu$ definida por (1.3.1) y nos permite identificar el espacio de Banach $(L(\mathcal{A})', \|\cdot\|)$ con el espacio $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, al que nos referiremos en lo sucesivo como el dual de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ provisto con la norma polar, omitiendo la mención explícita de la norma cuando se utilice la norma dual o polar.

La referida isometría justifica la nomenclatura $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ para representar al conjunto de medidas finitamente aditivas de variación acotada definidas en un álgebra $\mathcal{A}$, pues $b$ y $a$ son las iniciales de las palabras inglesas *bounded* y *additive* y de (1.3.2) se deduce que $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ si y solo $\mu$ es una medida *aditiva* tal que la forma lineal $\mu$ definida por dicha media verifica que el conjunto

$$\left\{\mu(f) : f \in B_{L(\mathcal{A})}\right\}$$

es *acotado*.

También veremos en la sección 1.4 que el conjunto $\{\mu(f) : f \in B_{L(\mathcal{A})}\}$ es acotado, si y solo si, la medida finitamente *aditiva* $\mu$ está acotada en el álgebra $\mathcal{A}$, es decir que el conjunto

$$\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

sea *acotado*, lo que también justifica la utilización de la inicial $b$ de la palabra *bounded* para referirnos a las medidas aditivas de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$.

Si $B \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{A} : A \subset B\}$ se tiene que $\mathcal{B}$ es un álgebra de subconjuntos de $B$. La igualdad (1.3.2) es un caso particular de la siguiente igualdad

$$|\mu|(B) = \sup\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{B}),\ \|f\| \leqslant 1\}, \tag{1.3.3}$$

que se puede demostrar directamente siguiendo los pasos de la demostración de (1.3.2), de lo que resulta que el dual de $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$, provisto con la correspondiente norma dual, es el espacio de Banach $(\mathrm{ba}(\mathcal{B}), |\cdot|(B))$ formado por las medidas finitamente aditivas definidas en $\mathcal{B}$ con la norma variación en $B$.

El espacio $(\mathrm{ba}(\mathcal{B}), |\cdot|(B))$ es isométrico al cociente de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ respecto a la relación de equivalencia $\mu_1 \sim \mu_2$ definida por la igualdad $\mu_1(B) = \mu_2(B)$, para cada $B \in \mathcal{B}$, ya que $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ es isométrico a un subespacio de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ y, por el teorema de Hahn-Banach, cada forma lineal continua definida en $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ admite una extensión lineal y continua a $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ que conserva la norma.

## 1.4 Normas equivalentes en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ y en $\mathrm{ba}(\mathcal{A}, |\cdot|)$

Es muy sencillo probar que la aplicación de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ en $\mathbb{R}$ que a cada $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ hace corresponder

$$\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\}$$

es una norma en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$.

Se llama *norma supremo* y es sencillo demostrar directamente que es una norma equivalente a la *norma variación* $|\cdot|$. No obstante, la equivalencia entre las normas supremo y variación en $\mathrm{ba}(\mathcal{A}, |\cdot|)$ también es consecuencia de las tres propiedades siguientes:

1. El funcional de Minkowski de $\mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$ define una norma en $L(\mathcal{A})$, que es equivalente a la norma supremo $\|\cdot\|$ en $L(\mathcal{A})$. Se demuestra dicha equivalencia en [29, Proposiciones 1 y 2] y, por completitud, se facilita aquí una demostración en la Proposición 12, donde las inclusiones de (1.4.1) son la equivalencia de dichas normas.

2. La norma dual en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ de la norma definida en $L(\mathcal{A})$ por el funcional de Minkowski de $\mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$ es la norma supremo en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$, pues es obvio que

$$\begin{aligned}\sup\{|\mu(f)| : f \in \mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})\} &= \\ = \sup\{|\mu(e_A)| : A \in \mathcal{A}\} &= \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\}.\end{aligned}$$

3. Además, según se ha probado, la norma dual de la norma supremo en $L(\mathcal{A})$ es la norma variación, pues vimos en (1.3.2) que

$$|\mu| = \sup\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{A}), \|f\| \leqslant 1\}.$$

Por tanto de la equivalencia de las normas en $L(\mathcal{A})$ definidas por el supremo y por el funcional de Minkowski de $\mathrm{absco}\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ se deduce la equivalencia entre las correspondientes normas polares en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$, que son las normas variación y supremo, respectivamente. Esta propiedad se formaliza en el Corolario 13.

**Proposición 12.** *La bola unidad cerrada* $\overline{B}_{L(\mathcal{A})} := \{f \in L(\mathcal{A}) : \|f\| \leqslant 1\}$ *del espacio normado* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ *verifica que*

$$4^{-1}\overline{B}_{L(\mathcal{A})} \subset \operatorname{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}) \subset \overline{B}_{L(\mathcal{A})}. \tag{1.4.1}$$

*Demostración.* Vamos a demostrar la primera inclusión por inducción.

Dados dos elementos disjuntos $A_1$ y $A_2$ del álgebra $\mathcal{A}$ y dos números reales $c_1$ y $c_2$ de módulo menor o igual a $2^{-1}$ se tiene que la desigualdad $|c_1| + |c_2| \leqslant 1$ implica que

$$c_1 e_{A_1} + c_2 e_{A_2} \in \operatorname{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}).$$

Supongamos, como hipótesis de inducción, que $n \geqslant 2$ y que las combinaciones lineales $c_1 e_{A_1} + c_2 e_{A_2} + \cdots + c_n e_{A_n}$ correspondientes a $n$ elementos disjuntos $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ del álgebra $\mathcal{A}$ y con coeficientes reales $c_i$ tales que $|c_i| \leqslant 2^{-1}$, verifican que

$$c_1 e_{A_1} + c_2 e_{A_2} + \cdots + c_n e_{A_n} \in \operatorname{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}).$$

Entonces si $z := c_1 e_{A_1} + c_2 e_{A_2} + \cdots + c_n e_{A_n} + c_{n+1} e_{A_{n+1}}$ es una combinación lineal de $n+1$ elementos disjuntos $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$, $A_{n+1}$ del álgebra $\mathcal{A}$ con coeficientes reales de módulo menor o igual que $2^{-1}$ se tiene que $n+1 \geqslant 3$, por lo que podemos suponer que $c_1 c_2 > 0$ y que $|c_1| < |c_2|$.

Por la hipótesis de inducción se tienen las relaciones

$$z_1 := c_2 e_{A_2} + \cdots + c_n e_{A_n} + c_{n+1} e_{A_{n+1}} \in \operatorname{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$$

y

$$z_2 := c_2 e_{A_1 \cup A_2} + \cdots + c_n e_{A_n} + c_{n+1} e_{A_{n+1}} \in \operatorname{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$$

De las igualdades

$$z = (1 - c_1 c_2^{-1}) z_1 + c_1 c_2^{-1} z_2$$

y

$$\left|1 - c_1 c_2^{-1}\right| + \left|c_1 c_2^{-1}\right| = 1$$

se deduce que

$$z \in \mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}).$$

Finalmente, si $w := (c_1 + id_1)e_{A_1} + (c_2 + id_2)e_{A_2} + \cdots + (c_n + id_n)e_{A_n}$ es una combinación lineal con coeficientes complejos de módulo menor o igual que $4^{-1}$, siendo los conjuntos $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ elementos disjuntos dos a dos del álgebra $\mathcal{A}$, se tiene, por lo que terminamos de demostrar, que:

$$w_1 := 2c_1 e_{A_1} + 2c_2 e_{A_2} + \cdots + 2c_n e_{A_n} \in \mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$$

y

$$w_2 := 2d_1 e_{A_1} + 2d_2 e_{A_2} + \cdots + 2d_n e_{A_n} \in \mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}),$$

pues los módulos de los coeficientes $2c_i$ y $2d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, son menores o iguales que $2^{-1}$. Por tanto

$$w = 2^{-1}w_1 + i2^{-1}w_2 \in \mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}),$$

puesto que $|2^{-1}| + |i2^{-1}| = 1$.

La demostración de la segunda inclusión

$$\mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\}) \subset \overline{B}_{L(\mathcal{A})}$$

es consecuencia de que cada $e_A \in \overline{B}_{L(\mathcal{A})}$ y de que la bola unidad $\overline{B}_{L(\mathcal{A})}$ es absolutamente convexa. ∎

De la equivalencia en $L(\mathcal{A})$ de la norma supremo $\|\cdot\|$ y de la norma definida por el funcional de Minkowski del conjunto $\mathrm{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$ se deduce el corolario siguiente.

**Corolario 13.** *En* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *son equivalentes las normas variación y supremo. Para cada* $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *se tiene*

$$4^{-1}\,|\mu| \leqslant \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} \leqslant |\mu|$$

*Demostración.* La Proposición 12 nos dice que en $L(\mathcal{A})$ las normas normas supremo y funcional de Minkowski de $\text{absco}(\{e_C : C \in \mathcal{A}\})$ son equivalentes.

Por tanto también son equivalentes en $\text{ba}(\mathcal{A})$ las correspondientes normas duales, que son las normas variación y supremo, equivalencia que se puede deducir de aplicar la definición de norma dual a la norma supremo y a la norma definida por funcional de Minkowski de $\text{absco}(\{e_A : A \in \mathcal{A}\})$ en $L(\mathcal{A})$, pues entonces de las inclusiones de (1.4.1) se deduce directamente que

$$4^{-1}\,|\mu| \leqslant \sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} \leqslant |\mu|\,. \quad \blacksquare$$

La equivalencia de las normas en $L(\mathcal{A})$ definidas por el supremo y por el referido funcional de Minkowski nos permite utilizarlas indistintamente en el estudio de propiedades topológicas de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, pues las propiedades topológicas son invariantes frente a la equivalencia de normas. Lo mismo es aplicable a las respectivas normas duales en $\text{ba}(\mathcal{A})$, que son las normas variación y supremo.

Sea $B \in \mathcal{A}$, si aplicamos el Corolario 13 al álgebra $\mathcal{B}$ formada por los subconjuntos de $B$ que pertenecen al álgebra $\mathcal{A}$, es decir

$$\mathcal{B} := \{C : C \in \mathcal{A},\ C \subset B\},$$

se obtiene el siguiente corolario para cada medida $\mu \in \text{ba}(\mathcal{A})$.

**Corolario 14.** *Sea $B$ un elemento de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$. Para cada $\mu \in \text{ba}(\mathcal{A})$ se tiene que*

$$4^{-1}\,|\mu|\,(B) \leqslant \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{A},\ C \subset B\} \leqslant |\mu|\,(B) \tag{1.4.2}$$

*Demostración.* Se puede hacer la demostración siguiendo la realizada en el Corolario 13. También se puede obtener de dicho corolario y de la ya citada propiedad de que por el teorema de Hahn-Banach cada forma lineal continua definida en $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\||_{L(\mathcal{B})})$ tiene una extensión lineal continua a $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ que conserva la norma. $\blacksquare$

## 1.5 Polaridad.

Salvo contraindicación explícita, los conjuntos polares se considerarán siempre en el par dual $\langle L(\mathcal{A}), \mathrm{ba}(\mathcal{A})\rangle$. Recordemos que si $M \in L(\mathcal{A})$ y $P \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ los *conjuntos polares* $M^\circ$ y $P^\circ$ se definen por

$$M^\circ := \{\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{A}) : |\mu(f)| \leqslant 1,\ f \in M\} \quad \text{y}$$
$$P^\circ := \{f \in L(\mathcal{A}) : |\mu(f)| \leqslant 1,\ \mu \in P\}.$$

Estos conjuntos polares se llaman *polares absolutos* en [17, Capítulo 4, 20.8], donde en la definición de conjunto polar se prescinde del módulo. En lo sucesivo seguiremos la definición dada con módulo, por ser la utilizada por la mayoría de los autores, según puede verse en [10, 13, 14, 15, 24], entre otros.

Esta será nuestra única discrepancia con la notación de Köthe en [17], por lo que dado un espacio localmente convexo $E(\tau)$ se tiene que su dual débil $E'(\tau_s(E))$ es el espacio vectorial de todas las formas lineales continuas definidas en $E$ provisto con la topología $\tau_s(E)$ de la convergencia puntual en $E$. El dual débil $E'(\tau_s(E))$ se representa también por $E'(\sigma(E', E))$, y a la topología $\sigma(E', E) = \tau_s(E)$ se le llama la topología débil en $E'$ definida por el par dual $\langle E', E\rangle$. También se dice que $\tau_s(E)$ es la topología débil* en $E'$.

En particular, la topología $\tau_s(L(\mathcal{A}))$ en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ coincide con la topología $\tau_s(\mathcal{A})$ de la convergencia puntual en $\mathcal{A}$, ya que el $\tau_s(L(\mathcal{A}))$-límite de una red $(\mu_i \in \mathrm{ba}(\mathcal{A}) : i \in I)$ es $\mu$ si y solo si

$$\lim_{i \in I} \mu_i(A) = \mu(A),$$

para cada $A \in \mathcal{A}$. Análogamente, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ se tiene que $\tau_s(\mathcal{B})$ es la topología en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ de la convergencia puntual en $\mathcal{B}$.

Las *envolturas convexa* y *absolutamente convexa* de un subconjunto $M$ de un espacio vectorial topológico son, respectivamente, los conjuntos $\mathrm{co}(M)$ y $\mathrm{absco}(M)$ formados por todas las combinaciones convexas que se pueden formar con los elementos de $M$ y por todas las combinaciones convexas de los elementos del conjunto $\cup\{sM : |s| = 1\}$, respectivamente.

El conjunto $\cup\{sM : |s| \leqslant 1\}$ se llama la *envoltura equilibrada* del conjunto $M$, por lo que la envoltura absolutamente convexa de un conjunto es la envoltura convexa de su envoltura equilibrada.

Un conjunto $M$ se dice que es convexo, absolutamente convexo o equilibrado si coincide con su envoltura convexa, absolutamente convexa o equilibrada. Por tanto, $M$ es equilibrado si se verifica la igualdad

$$M = \cup\{sM : |s| \leqslant 1\}. \tag{1.5.1}$$

De las definiciones de norma dual y de conjunto polar se deduce que en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ se tiene que

$$(B_E)^\circ = (\overline{B}_E)^\circ = \overline{B}_{E'} \tag{1.5.2}$$

donde, como se indicó, $B_E$ ($\overline{B}_E$) es la bola abierta (cerrada) de centro el vector nulo y radio 1 en $(E, \|\cdot\|)$ y $\overline{B}_{E'}$ es la bola cerrada de centro el vector nulo y radio 1 en el dual $(E', \|\cdot\|)$ provisto con la normal dual de la norma de $(E, \|\cdot\|)$. La relación (1.5.2) justifica que a la *norma dual* se le llame también *norma polar*.

Del teorema de Hahn-Banach se deduce que

$$(B_{E'})^\circ = (\overline{B}_{E'})^\circ = \overline{B}_E$$

donde $(B_{E'})^\circ$ y $(\overline{B}_{E'})^\circ$ son, respectivamente, los polares en $(E, \|\cdot\|)$ de los bolas abierta y cerrada, $B_{E'}$ y $\overline{B}_{E'}$, de centro el vector nulo y radio 1 del dual $(E', \|\cdot\|)$ provisto con la normal dual. De estas igualdades se deduce la Proposición 15.

**Proposición 15.** *Sea $C$ un subconjunto absolutamente convexo y cerrado de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ y sea $A$ un subconjunto de su dual topológico $(E', \|\cdot\|)$ provisto con la norma dual. Se tiene que:*

1. *$A$ es acotado en $(E', \|\cdot\|)$ si y solo si su polar $A^\circ$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$.*

2. *$C$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$ si y solo si su polar $C^\circ$ es un subconjunto acotado de $(E', \|\cdot\|)$.*

*Demostración.* Si $A$ es un subconjunto acotado de $(E', \|\cdot\|)$ existe un número $r > 0$ tal que

$$A \subset rB_{E'},$$

por lo que tomando polares se tiene que

$$A^\circ \supset (rB_{E'})^\circ = r^{-1}(B_{E'})^\circ = r^{-1}\overline{B}_E,$$

lo que prueba que $A^\circ$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$.

Recíprocamente, si $A^\circ$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$ existe un número $s > 0$ tal que

$$A^\circ \supset sB_E.$$

Al tomar polares en esta inclusión se deduce que

$$A^{\circ\circ} \subset (sB_E)^\circ = s^{-1}(B_E)^\circ = s^{-1}\overline{B}_{E'},$$

lo que prueba que $A^{\circ\circ}$ es acotado. De esta propiedad y de la inclusión $A \subset A^{\circ\circ}$ se deduce que $A$ es acotado.

Si $C$ es un subconjunto absolutamente convexo y cerrado de $(E, \|\cdot\|)$ se tiene que

$$C = C^{\circ\circ} = (C^\circ)^\circ$$

(ver [17, Capítulo 4, 20.8.(5)]), por lo que si $C$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$ se tiene que $C^\circ$ es un subconjunto de $(E', \|\cdot\|)$ cuyo polar $(C^\circ)^\circ$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$. Por el apartado 1 se tiene que $C = (C^\circ)^\circ$ es un entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$ si y solo si $C^\circ$ es un subconjunto acotado de $(E', \|\cdot\|)$, lo que prueba el apartado 2. ∎

# Capítulo 2

# Algunas propiedades de acotación.

## 2.1 Notas históricas sobre el Teorema *NDG*. La propiedad $N$.

El clásico teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck, denominado *Nikodym boundedness theorem* en [4, página 14] y *Nikodym-Grothendieck boundedness theorem* en [3, página 80]) afirma que *si* $\mathcal{S}$ *es una* $\sigma$*-álgebra de subconjuntos de un conjunto* $\Omega$ *y* $M$ *es un subconjunto de* $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ *puntualmente acotado en cada* $C \in \mathcal{S}$ *entonces* $M$ *es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$.

Para simplificar utilizaremos "*puntualmente acotado en* $\mathcal{S}$" por "*puntualmente acotado en cada* $C \in \mathcal{S}$" y *NDG* como abreviatura de los tres nombres Nikodym-Dieudonné-Grothendieck.

Si $M$ es un subconjunto de $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ puntualmente acotado en $\mathcal{S}$ se tiene que $M$ está puntualmente acotado en cada $f \in L(\mathcal{S})$, pues si $f \in L(\mathcal{S})$ existe un subconjunto finito $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ de $\mathcal{S}$ y $r$ escalares $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, tales que $f$ es combinación lineal de las funciones características

$e_{A_i}$ de los conjuntos $A_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, con coeficientes $\lambda_i$, es decir

$$f = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i e_{A_i},$$

por lo que el teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck admite la siguiente formulación equivalente:

**Teorema 16** (Formulación equivalente del teorema *NDG*)**.** *Si $M$ es un subconjunto de* $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ *puntualmente acotado en cada $f \in L(\mathcal{S})$, entonces $M$ es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$.

Esta reformulación recuerda un resultado anterior y **más débil** que el Teorema *NDG*, que se deduce al aplicar el *teorema de acotación uniforme de Banach-Steinhaus* al espacio de Banach $(\widetilde{L(\mathcal{S})}, \|\cdot\|)$ obtenido al hallar la completación de $(L(\mathcal{S}), \|\cdot\|)$, y que nos dice:

**Teorema 17** (Teorema de Banach-Steinhaus en $(\widetilde{L(\mathcal{S})}, \|\cdot\|)$)**.** *Si $M$ es un subconjunto de* $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ *puntualmente acotado en cada $f$ de $\widetilde{L(\mathcal{S})}$ entonces $M$ es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$.

Este resultado se deduce por la aplicación directa del teorema de Banach-Steinhaus y es mucho más débil que el teorema *NDG* debido a que, además de la acotación puntual de $M$ en cada $f$ de $L(S)$, se exige que $M$ sea acotado puntualmente en cada $f \in \widetilde{L(\mathcal{S})} \backslash L(\mathcal{S})$ para poder deducir la tesis de la acotación de $M$ en $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$.

Esta observación justifica que Dunford y Schwartz escribieran en [6, página 309] que el teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck es un "*striking improvement of the Banach-Steinhaus theorem of uniform boundedness*".

**Teorema 18** (El teorema *NDG* como teorema de acotación uniforme)**.** *Si $\mathcal{S}$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y $M$ es un subconjunto de* $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$*, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$M$ está puntualmente acotado en cada conjunto de $\mathcal{S}$.*

2. *M es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$.

3. $\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M,\, C \in \mathcal{S}\} < \infty$.

*Demostración.* $1 \Longrightarrow 2$ es el enunciado del teorema *NDG*.

$2 \Longrightarrow 3$ es consecuencia de que en $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ las normas variación y supremo son equivalentes.

$3 \Longrightarrow 1$ es obvio. ∎

El teorema *NDG* fue obtenido inicialmente por Nikodym en [21], quien demostró el siguiente teorema:

**Teorema 19** (Formulación de Nikodym)**.** *Sea $M$ un conjunto de medidas definidas en una $\sigma$-álgebra $S$. La acotación puntual de $M$ en $S$ implica que*

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M,\ C \in \mathcal{S}\} < \infty.$$

Por tanto Nikodym obtuvo el Teorema *NDG* para subconjuntos $M$ particulares de $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$, pues si $\mu$ es una medida definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ se tiene por el Corolario 11 que la medida $\mu$ tiene variación finita, por lo que $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{S})$, lo que implica que

$$M \subset \mathrm{ba}(\mathcal{S}).$$

Dieciocho años más tarde, Dieudonné demostró en [5] el siguiente teorema:

**Teorema 20** (Formulación de Dieudonné)**.** *Si $2^\Omega$ es la $\sigma$-álgebra de todos los subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y $M$ es un subconjunto del espacio de Banach $(\mathrm{ba}(2^\Omega), |\cdot|)$ entonces la acotación puntual de $M$ en cada subconjunto de $\Omega$ implica que $M$ es un subconjunto acotado del espacio $(\mathrm{ba}(2^\Omega), |\cdot|)$.*

Dieudonné demostró el Teorema *NDG* en el caso particular de que $\mathcal{S}$ es la $\sigma$-álgebra de todos los subconjuntos de un conjunto $\Omega$.

El caso general para una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y para un subconjunto cualquiera $M$ del espacio $\mathrm{ba}(2^\Omega)$ se debe a Grothendieck (ver información adicional en [1, 2, 12, 27]).

El teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck fue mejorado profundamente por Valdivia al probar en ([29, Teorema 2]) que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la siguiente propiedad:

**Teorema 21** (Valdivia ([29, Teorema 2]))**.** *En cada cubrimiento creciente* $\cup_m \mathcal{B}_m$ *de una* $\sigma$*-álgebra* $\mathcal{S}$ *existe un* $\mathcal{B}_n$ *tal que cada subconjunto* $M$ *de* $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ *que sea puntualmente acotado en cada conjunto* $B$ *perteneciente a* $\mathcal{B}_n$ *tiene la propiedad de que* $M$ *es acotado en* $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$.

La Definición 46 de la propiedad $sN$ procede de este teorema, siguiendo la costumbre habitual en Matemáticas de transformar las tesis de muchos teoremas importantes en definiciones. A su vez la propiedad $sN$ motiva la Definición 48 de la propiedad $wN$, que veremos que es la propiedad más fuerte de acotación tipo *NDG* (ver Corolario 51).

El objetivo de este capítulo es exponer una prueba del teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck, en el Teorema 43, que junto a ciertos resultados previos de dualidad nos llevarán a los Teoremas 65 y 90 en los dos capítulos siguientes de esta tesis. El primero de ellos establece que cualquier $\sigma$-álgebra de conjuntos tiene la propiedad $wN$. El Teorema 90 nos dice que el álgebra $J(K)$ de los conjuntos Jordan medibles en un intervalo compacto $K$ de $\mathbb{R}^k$ también tiene la propiedad $wN$, lo que supone una mejora profunda del siguiente teorema de Valdivia.

**Teorema 22.** *Sea* $\mathcal{J}(K)$ *el álgebra de los subconjuntos Jordan medibles de un intervalo compacto* $K := \prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *de* $\mathbb{R}^k$*. En cada cubrimiento creciente* $\cup_m \mathcal{B}_m$ *de* $\mathcal{J}(K)$ *existe un* $\mathcal{B}_n$ *que tiene la propiedad* $N$ *(ver Definición 23).*

## 2.2 La propiedad $N$.

**Definición 23** (**Propiedad** $N$)**.** *Se dice que un subconjunto* $\mathcal{B}$ *de un álgebra* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de un conjunto* $\Omega$ *tiene la* propiedad de Nikodym, propiedad $N$ *en breve, si cada subconjunto* $M$ *de* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *que sea puntualmente acotado en* $\mathcal{B}$ *verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. *$M$ es acotado en* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

2. *$M$ es acotado en* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *provisto con la norma supremo, es decir*

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M,\, C \in \mathcal{A}\} < \infty$$

3. *$M^\circ$ es un entorno del origen en* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.

La equivalencia entre las propiedades 1 y 2 se deduce del Corolario 13 y la equivalencia entre las propiedades 1 y 3 se dio en la Proposición 15.

Esta definición, dada en [27, Definición 2.4] y en [30, Definición 1], nos dice que un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ tiene la *propiedad de Nikodym* si verifica la tesis del teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck cuando hay acotación puntual en $\mathcal{B}$, es decir que los subconjuntos $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ puntualmente acotados en $\mathcal{B}$ son uniformemente acotados en $\mathcal{A}$. Nos permite enunciar con más comodidad el Teorema 21 de Valdivia en la siguiente forma:

**Teorema 24** (Valdivia ([29, Teorema 2]))**.** *En cada cubrimiento creciente $\cup_m \mathcal{B}_m$ de una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$.*

La siguiente Proposición 25 nos dice que en la Definición 23 podemos suponer que el subconjunto $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ es $\tau_s(\mathcal{A})$-cerrado y absolutamente convexo.

**Proposición 25.** *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ tiene la* propiedad de Nikodym *si y solo si $\mathcal{B}$ tiene la siguiente propiedad:*

(P1) *cada subconjunto $M$ de* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *que sea* $\tau_s(\mathcal{A})$*-cerrado, absolutamente convexo y puntualmente acotado en $\mathcal{B}$ verifica que $M$ es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{B}$ es un subconjunto de un álgebra $\mathcal{A}$ que verifica (P1) y que $M'$ es un subconjunto de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ tal que

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M'\} = K_C < \infty,$$

para cada $C \in \mathcal{B}$.

Sea $M := \overline{\text{absco}(M')}^{\tau_s(\mathcal{A})}$ la $\tau_s(\mathcal{A})$ clausura de la envoltura absolutamente convexa de $M'$. Es evidente

$$M' \subset M$$

y que para cada $C \in \mathcal{B}$

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M\} = \sup\{|\mu(C)| : \mu \in M'\} = K_C < \infty.$$

Por tanto, si se verifica la propiedad (P1) se tiene que $M$ es un subconjunto acotado de $(\text{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

Entonces la inclusión $M' \subset M$ nos asegura que $M'$ es también un subconjunto acotado de $(\text{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, lo que prueba que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $N$.

El recíproco es obvio. ∎

Para facilitar la caracterización de la propiedad $N$ por propiedades localmente convexas recordaremos la definición de espacio tonelado.

**Definición 26.** *Un espacio localmente convexo $E(\tau)$ es tonelado si cada subconjunto $M$ contenido en su dual $E'$ y que sea puntualmente acotado en $E$ tiene la propiedad de que su polar $M^\circ$ es un entorno del origen en $E(\tau)$.*

En particular, de esta definición y de la Proposición 15 se deduce la siguiente caracterización de espacio normado tonelado.

**Corolario 27.** *Un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es tonelado si y solo si cada subconjunto $M$ de $E'$ que sea puntualmente acotado en $E$ tiene la propiedad de que $M$ es un subconjunto acotado del espacio de Banach $(E', \|\cdot\|)$ provisto con la norma dual.*

*En particular, un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $N$ si y solo si el espacio normado $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ es tonelado.*

*Demostración.* Es suficiente con recordar que un subconjunto $M$ del dual $(E', \|\cdot\|)$ es acotado si y solo si su polar $M^\circ$ es entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$ (Proposición 15) ∎

La última parte de este corolario es un caso particular de la Proposición 28.

Recordemos que si $\mathcal{B}$ es un subconjunto de un álgebra $\mathcal{A}$ y $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ es el subespacio de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ generado por la envoltura lineal de las funciones características de los elementos de $\mathcal{B}$ provisto con la norma supremo, entonces los duales de $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ y de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ provistos con la norma dual son los espacios $(L(\mathcal{B})', \|\cdot\|)$ y $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

Por el teorema de Hahn-Banach, cada $\mu \in L(\mathcal{B})'$ admite una extensión lineal $\tilde{\mu}$ a $L(\mathcal{A})$ que conserva la norma, por lo que cada $\mu \in L(\mathcal{B})'$ es la restricción a $\mathcal{B}$ de una medida $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ cuya variación $|\tilde{\mu}|$ verifica que

$$|\tilde{\mu}| = \sup\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{B}),\ \|f\| \leqslant 1\}.$$

Por tanto, $(L(\mathcal{B})', \|\cdot\|)$ es isométrico al cociente de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ respecto a la relación definida por la coincidencia en $\mathcal{B}$, lo que es una propiedad bien conocida en espacios normados, que ya se expuso en el párrafo siguiente a (1.3.3) en el caso particular de que $\mathcal{B}$ era el álgebra de los conjuntos $\mathcal{A}$-medibles contenidos en un conjunto $B \in \mathcal{A}$.

**Proposición 28.** *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $N$ si y solo si $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ es un subespacio tonelado y denso de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{B}$ es un subconjunto del álgebra $\mathcal{A}$ y que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $N$. Sea $M$ un subconjunto del dual $L(\mathcal{B})'$ de $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ tal que

$$\sup\{|\mu(e_C)| : \mu \in M\} = K_C < \infty,$$

para cada $C \in \mathcal{B}$. Se ha indicado que, por el teorema de Hahn-Banach, para cada $\mu \in M$ existe $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ tal que

$$\tilde{\mu}(C) = \mu(e_C)$$

para cada $C \in \mathcal{B}$ y

$$|\tilde{\mu}| = \sup\{|\mu(f)| : f \in L(\mathcal{B}),\ \|f\| \leqslant 1\}. \tag{2.2.1}$$

Por tanto $\widetilde{M} := \{\tilde{\mu} : \mu \in M\}$ es un subconjunto de ba$(\mathcal{A})$ que verifica que:

$$\sup\{|\tilde{\mu}(C)| : \tilde{\mu} \in \widetilde{M}\} = K_C < \infty,$$

para cada $C \in \mathcal{B}$, por lo que, al tener $\mathcal{B}$ la propiedad $N$, se deduce que $\widetilde{M}$ es un subconjunto acotado de $(\text{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, luego

$$\sup\{|\tilde{\mu}| : \mu \in M\} < \infty$$

y, sustituyendo 2.2.1 se obtiene que

$$\sup\{|\mu(f)| : \mu \in M,\ f \in L(\mathcal{B}), \|f\| \leqslant 1\} < \infty$$

lo que prueba que $M$ es un subconjunto acotado de $(L(\mathcal{B})', \|\cdot\|)$, provisto con la norma dual. El Corolario 27 implica que $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ es un espacio tonelado.

Además, de la definición de polar se deduce que para cada $C \in \mathcal{B}$ el conjunto $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}^\circ$ verifica que

$$\sup\left\{ |\mu(C)| : \mu \in \{e_B : B \in \mathcal{B}\}^\circ \right\} \leqslant 1,$$

y por tener $\mathcal{B}$ la propiedad $N$ se deduce que $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}^\circ$ es un subconjunto acotado de $(\text{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$. La Proposición 15 implica que

$$\{e_C : C \in \mathcal{B}\}^{\circ\circ}$$

es un entorno de 0 en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. Además, por [17, Capítulo 4, 20, 8 (5)]

$$\{e_C : C \in \mathcal{B}\}^{\circ\circ} = \overline{\text{absco}\{e_C : C \in \mathcal{B}\}}.$$

Al ser $\overline{\text{absco}\{e_C : C \in \mathcal{B}\}}$ un entorno de 0 en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ se tiene que $L(\mathcal{B})$ es un subespacio denso de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.

Vamos a demostrar el recíproco. Supongamos $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ es un espacio tonelado y denso en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ y que $M$ es un subconjunto ba$(\mathcal{A})$ tal que

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M\} = K_C < \infty,$$

para cada $C \in \mathcal{B}$. Entonces la tonelación de $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$ implica que el conjunto $\{\mu|_{L(\mathcal{B})} : \mu \in M\}$, formado por las restricciones de los elementos de $M$ a $L(\mathcal{B})$, es un subconjunto acotado en $(L(\mathcal{B})', \|\cdot\|)$, provisto con la norma dual de $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$. Por tanto, el polar de $\{\mu|_{L(\mathcal{B})} : \mu \in M\}$ en $L(\mathcal{B})$ es un entorno del origen en $(L(\mathcal{B}), \|\cdot\|)$. Es inmediato que el polar de $\{\mu|_{L(\mathcal{B})} : \mu \in M\}$ en $L(\mathcal{B})$ es el conjunto

$$M^\circ \cap L(\mathcal{B}),$$

donde $M^\circ$ es el polar de $M$ en $L(\mathcal{A})$. La densidad de $L(\mathcal{B})$ en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ implica que $\overline{M^\circ \cap L(\mathcal{B})}$ es un entorno del origen en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, lo que junto a la inclusión $\overline{M^\circ \cap L(\mathcal{B})} \subset M^\circ$ nos permite deducir que $M^\circ$ es también un entorno del origen en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. Por el Corolario 15 se deduce que $M^{\circ\circ}$ es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, lo que junto a la inclusión trivial $M \subset M^{\circ\circ}$ permite afirmar que $M$ es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, lo que prueba que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $N$ (ver Definición 25). ∎

## 2.3 Subconjuntos profundamente no acotados de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

Vamos a exponer unos resultados sobre ciertos subconjuntos no acotados en $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ con la propiedad de que *muchos* de sus subconjuntos heredan la no acotación. Por esta propiedad se les llama *profundamente no acotados*, *pr no acotados* en breve.

Lo expuesto en esta sección se necesitará en la obtención de los teoremas tipo Nikodym que vamos a desarrollar, como se verá en los Teoremas 43, 65 y 90. Al final de la sección se exponen el Corolario 39, que suministra dos ejemplos importantes de conjuntos profundamente no acotados, y la Proposición 40 que establece que si $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ es un subconjunto del álgebra $\mathcal{A}$ que es una partición finita del conjunto $B$ y si $M$ es un subconjunto de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ que es $B$-profundamente no acotado, existe algún $C_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, tal que $M$ es $C_i$-pr no acotado.

En lo sucesivo abreviaremos casi siempre $B$-profundamente no acotado por $B$-pr no acotado.

La demostración de la Proposición 33 es directa y aparece en [16, Proposición 3], donde se indica que es una propiedad conocida. Para hacer este trabajo auto-contenido indicamos una demostración sencilla, que, además, se simplifica descomponiéndola en varios resultados previos y conocidos.

**Lema 29.** *Sea $V$ un subconjunto de un espacio vectorial $E$ y sea*

$$v_0 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} h_i v_i$$

*una combinación lineal de $r$ vectores $v_1, v_2, \dots$ y $v_r$ de $V$. Si $h := 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |h_i|$ se tiene que*

$$h^{-1} \operatorname{absco}(\{v_0\} \cup V) \subset \operatorname{absco}(V) \subset \operatorname{absco}(\{v_0\} \cup V)$$

*Demostración.* Si $x \in \operatorname{absco}(\{v_0\} \cup V)$ entonces $x$ es una combinación absolutamente convexa de vectores de $\{v_0\} \cup V$, por lo que existen $s+1$ escalares $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ y $\lambda_s$ y $s$ vectores $w_1, w_2, \dots$ y $w_s$ de $V$ tales que

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant s} |\lambda_j| \leqslant 1$$

y

$$x = \lambda_0 v_0 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \lambda_j w_j.$$

Por tanto

$$h^{-1} x = h^{-1} \left( \lambda_0 v_0 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \lambda_j w_j \right) = h^{-1} \left( \lambda_0 \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} h_i v_i + \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \lambda_j w_j \right)$$

es una combinación absolutamente convexa de los vectores $v_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ y $w_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, pues

$$h^{-1} \left( |\lambda_0| \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |h_i| + \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} |\lambda_j| \right) \leqslant h^{-1} \left( \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |h_i| + 1 \right) = 1$$

y entonces $h^{-1} x \in \operatorname{absco}(V)$, de lo que se deduce la primera inclusión. La segunda inclusión es trivial. ∎

Este lema nos asegura que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\Omega$, $\mathcal{Q} := \{e_{Q_i} : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ es un subconjunto finito del conjunto $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ de funciones características de los elementos del álgebra $\mathcal{A}$ y si $W$ es un subconjunto de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ tal que

$$\operatorname{span}\big\{\mathcal{Q} \cup W\big\} = \operatorname{span}\big\{\{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\} \cup W\big\},$$

lo que equivale a que el vector $e_{Q_1}$ pertenece a la envoltura lineal de $W \cup \{e_{Q_i} : 2 \leqslant i \leqslant r\}$, es decir

$$e_{Q_1} = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} k_j w_j + \sum_{2\leqslant i\leqslant r} h_i e_{Q_i},$$

entonces si

$$h := 1 + \sum_{1\leqslant j\leqslant s} |k_j| + \sum_{2\leqslant i\leqslant r} |h_i|$$

se tiene que

$$h^{-1}\operatorname{absco}(\mathcal{Q} \cup W) \subset \operatorname{absco}(\{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\} \cup W) \subset \operatorname{absco}(\mathcal{Q} \cup W).$$

En particular, si $W$ es el polar de un subconjunto $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ y el vector $e_{Q_1}$ pertenece a la envoltura lineal de $M^\circ \cup \{e_{Q_i} : 2 \leqslant i \leqslant r\}$, entonces existe un vector $w \in M^\circ$ tal que

$$e_{Q_1} = h_1 w + \sum_{2\leqslant i\leqslant r} h_i e_{Q_i}$$

y para el escalar

$$h := 1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant r} |h_i|$$

se verifica que

$$\begin{aligned} h^{-1}\operatorname{absco}(\mathcal{Q} \cup M^\circ) &\subset \operatorname{absco}(\{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\} \cup M^\circ) \\ &\subset \operatorname{absco}(\mathcal{Q} \cup M^\circ). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

**Lema 30.** *Si $M$ es un subconjunto de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{Q} := \{e_{Q_i} : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ es un subconjunto finito del conjunto $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ se tiene que*

$$\operatorname{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}) \subset (M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ \subset 2\operatorname{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}). \tag{2.3.2}$$

*Demostración.* En general, por [17, Capítulo 4, 20. 8. (10)] y por [17, Capítulo 4, 20. 8. (5)] se tienen las igualdades

$$(M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ = \overline{\text{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}^{\circ\circ})}$$

y

$$\mathcal{Q}^{\circ\circ} = \overline{\text{absco}\, \mathcal{Q}}.$$

En este caso, al ser $\mathcal{Q}$ un conjunto finito se tiene que $\text{absco}\, \mathcal{Q}$ es un subconjunto compacto de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, por lo que

$$(M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ = \overline{\text{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}^{\circ\circ})} = \overline{\text{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})}.$$

De esta relación se deduce la primera inclusión de (2.3.2), es decir

$$\text{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}) \subset (M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ.$$

Para demostrar la segunda inclusión de (2.3.2) observamos que si

$$x \in (M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ = \overline{\text{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})}$$

entonces $x$ es el límite en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ de una sucesión

$$\left( x_n = \lambda_0^n m_0^n + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i^n e_{Q_i} \right)_n$$

tal que

$$m_0^n \in M^\circ \quad \text{y} \quad \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_i^n| \leqslant 1,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por compacidad se puede suponer, tomando una subsucesión adecuada, que $\text{lím}_k\, \lambda_i^{n_k} = \lambda_i$, para cada $0 \leqslant i \leqslant r$, por lo que:

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_i| = \text{lím}_k \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_i^{n_k}| \leqslant 1$$

y

$$x = \lim_{k \to \infty} \left( \lambda_0^{n_k} m_0^{n_k} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i^{n_k} e_{Q_i} \right) = \lim_{k \to \infty} \left( \lambda_0^{n_k} m_0^{n_k} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i e_{Q_i} \right).$$

De la última igualdad se deduce que la sucesión $(\lambda_0^{n_k} m_0^{n_k})_k$ es convergente, siendo su límite

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_0^{n_k} m_0^{n_k}) = x - \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \lambda_i e_{Q_i} := m_0$$

Además, $m_0 \in M^\circ$, ya que $M^\circ$ es un subconjunto cerrado del espacio $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ y cada $\lambda_0^{n_k} m_0^{n_k} \in M^\circ$, pues $|\lambda_0^{n_k}| \leqslant 1$ y el conjunto $M^\circ$ es equilibrado. Por tanto

$$x = m_0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \lambda_i e_{Q_i} \in 2\,\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})$$

puesto que

$$1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant r} |\lambda_i| \leqslant 1 + 1 = 2.$$

de lo que se deduce la segunda inclusión de (2.3.2) ∎

**Corolario 31.** *Sea $M$ un subconjunto de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ y sea $\mathcal{Q} := \{e_{Q_i} : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ un subconjunto finito del conjunto $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$. Si el vector $e_{Q_1}$ pertenece a la envoltura lineal de $M^\circ \cup \{e_{Q_i} : 2 \leqslant i \leqslant r\}$ se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})$ *es un entorno de cero en* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.
2. $\mathrm{absco}(M^\circ \cup \{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\})$ *es un entorno de cero en* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.
3. $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ *es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.
4. $M \cap \{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\}\}^\circ$ *es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

*Si, adicionalmente, el conjunto $M$ es absolutamente convexo y $\tau_s(\mathcal{A})$-cerrado se tiene que existe $h \geqslant 1$ tal que*

$$M \cap \mathcal{Q}^\circ \subset M \cap \{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\}\}^\circ \subset h(M \cap \mathcal{Q}^\circ). \qquad (2.3.3)$$

*Demostración.* De (2.3.1) se deduce la equivalencia de las condiciones 1 y 2.

Por la Proposición 15 se tiene que $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ si y solo si su polar $(M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ$ es entorno de cero en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, lo que por (2.3.2) equivale a que $\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})$ sea entorno de cero, lo que prueba la equivalencia de las condiciones 1 y 3.

Este mismo razonamiento sustituyendo $\mathcal{Q}$ por $\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\}$ nos proporciona la equivalencia de las condiciones 2 y 4.

Finalmente, de la hipótesis de que $e_{Q_1}$ pertenece a la envoltura lineal de $M^\circ \cup \{e_{Q_i} : 2 \leqslant i \leqslant r\}$ y de (2.3.1) se deduce la existencia de un $h > 1$ tal que

$$h^{-1}\,\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}) \subset \mathrm{absco}(M^\circ \cup \{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\}) \subset \mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}).$$

Tomando polares se obtiene que

$$\left\{h^{-1}\,\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})\right\}^\circ \supset \left\{\,\mathrm{absco}(M^\circ \cup \{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\})\right\}^\circ \supset \left\{\,\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})\right\}^\circ$$

y aplicando [17, Capítulo 4, 20. 8. (9)] resulta que

$$h(M^{\circ\circ} \cap \mathcal{Q}^\circ) \supset M^{\circ\circ} \cap \{\mathcal{Q}\backslash\{e_{Q_1}\}\}^\circ \supset M^{\circ\circ} \cap \mathcal{Q}^\circ$$

de lo que se deduce (2.3.3) cuando $M$ es absolutamente convexo y $\tau_s(\mathcal{A})$-cerrado, pues entonces, por [17, Capítulo 4, 20. 8. (5)], $M^{\circ\circ} = M$. ∎

Aplicando reiteradamente este corolario se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 32.** *Sea* $M$ *un subconjunto de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, *sea* $\mathcal{Q} := \{e_{Q_i} : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ *un subconjunto finito del conjunto* $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ *y sea* $\mathcal{Q}'$ *un subconjunto maximal de* $\mathcal{Q}$ *formado por vectores linealmente independientes tales que* $\mathrm{span}\{M^\circ\} \cap \mathrm{span}\{\mathcal{Q}'\} = \{0\}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})$ *es un entorno de cero en* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.

2. $\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}')$ *es un entorno de cero en* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.

3. *$M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

4. *$M \cap \{\mathcal{Q}'\}^\circ$ es un subconjunto acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

La Proposición 15 nos dice que un subconjunto $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ es no acotado si y solo si su polar $M^\circ$ no es entorno de cero en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. La proposición siguiente caracteriza cuándo ciertos subconjuntos del no acotado $M$ heredan la propiedad de la no acotación.

**Proposición 33.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\Omega$, $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ el conjunto de funciones características de los elementos de $\mathcal{A}$ y $M$ un subconjunto no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$. *Las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *Para cada subconjunto finito $\mathcal{Q}$ de $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ se tiene que $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es un subconjunto no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

2. *Para cada subconjunto finito $\mathcal{Q}$ de $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ de funciones linealmente independientes tales que* $\mathrm{span}\{M^\circ\} \cap \mathrm{span}\{\mathcal{Q}\} = \{0\}$ *se tiene que $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es un subconjunto no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

3. *$M^\circ$ no es un entorno de* $0$ *en* $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$ *o la codimensión de* $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ *en $L(\mathcal{A})$ es infinita.*

*Demostración.* Es obvio que la condición 1 implica la condición 2. De la equivalencia entre las condiciones 3 y 4 del Corolario 32 se deduce que si no se verifica la condición 1 tampoco se verifica la condición 2.

Si no se verifica la condición 2 existe un subconjunto finito $\mathcal{Q}$ de funciones linealmente independientes de $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ tales que

$$\mathrm{span}\{M^\circ\} \cap \mathrm{span}\{\mathcal{Q}\} = \{0\}$$

y $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$. Por la Proposición 15 se tiene que

$$(M \cap \mathcal{Q}^\circ)^\circ = \mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})$$

es un entorno de cero en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, lo que implica que la codimensión de $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ en $L(\mathcal{A})$ es el cardinal de $\mathcal{Q}$ y que $M^\circ$ es un entorno de 0 en $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$, por lo que no se verifica la condición 3.

Si no se verifica la condición 3 sucede que $M^\circ$ es un entorno de 0 en $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$ y que la codimensión de $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ en $L(\mathcal{A})$ es finita, por lo que existe un subconjunto finito $\mathcal{Q}$ de $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ de funciones linealmente independientes tales que

$$\mathrm{span}\{M^\circ\} \cap \mathrm{span}\{\mathcal{Q}\} = \{0\} \quad \text{y} \quad L(\mathcal{A}) = (\mathrm{span}\{M^\circ\}) \oplus (\mathrm{span}\{\mathcal{Q}\}).$$

Entonces $\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q})$ es entorno de cero en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$, lo que implica que

$$(\mathrm{absco}(M^\circ \cup \mathcal{Q}))^\circ = M^{\circ\circ} \cap \mathcal{Q}^\circ$$

es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, por lo que su subconjunto $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es también un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$, lo que prueba que no se verifica la condición 2. ∎

En la Proposición 35 se determina un caso particular de subconjuntos $M$ no acotados de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ que verifican las condiciones equivalentes de la Proposición 33. En su demostración necesitamos utilizar el conocido Lema 34.

**Lema 34.** *Sea $F$ un subespacio vectorial denso en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Para cada $r > 0$ se tiene que*

$$\{f \in X : \|f\| < r\} \subset \overline{\{f \in F : \|f\| < r\}}. \tag{2.3.4}$$

*En particular, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos, $M$ es un subconjunto de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ tal que*

$$L(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{span}\{M^\circ\}}$$

*se tiene que $M^\circ$ es un entorno de 0 en $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$ si y solo si $M^\circ$ es un entorno de 0 en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.*

*Demostración.* Si $g \in X = \overline{F}$ y $\|g\| < r$, entonces para cada número natural $n > (r - \|g\|)^{-1}$ existe $f_n \in F$ tal que

$$\|f_n - g\| < n^{-1}$$

de lo que se deduce que

$$g = \lim_n f_n$$

y que

$$\|f_n\| < \|g\| + \|f_n - g\| < \|g\| + n^{-1} < \|g\| + r - \|g\| = r,$$

lo que prueba que $g \in \overline{\{f \in F : \|f\| < r\}}$. Por tanto se verifica la inclusión (2.3.4).

La parte no trivial del caso particular es consecuencia de las siguientes observaciones:

1. Si $M^\circ$ es un entorno de 0 en $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$ existe un $r > 0$ tal que
$$\{f \in \mathrm{span}\{M^\circ\} : \|f\| < r\} \subset M^\circ.$$
Además, por ser $M^\circ$ cerrado en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ se tiene que
$$\overline{\{f \in \mathrm{span}\{M^\circ\} : \|f\| < r\}} \subset M^\circ.$$

2. Si, además $L(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{span}\{M^\circ\}}$, se deduce aplicando (2.3.4) con $X := L(\mathcal{A})$ y $F := \mathrm{span}\{M^\circ\}$ que
$$\{f \in L(\mathcal{A}) : \|f\| < r\} \subset \overline{\{f \in \mathrm{span}\{M^\circ\} : \|f\| < r\}}.$$

3. Por tanto
$$\{f \in L(\mathcal{A}) : \|f\| < r\} \subset M^\circ,$$
lo que prueba que $M^\circ$ es un subconjunto cerrado de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. ∎

**Proposición 35.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\Omega$, $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ el conjunto de funciones características de los elementos de $\mathcal{A}$ y $M$ un subconjunto no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ *tal que* $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ *es un subconjunto denso de* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. *Para cada subconjunto finito $\mathcal{Q}$ de $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ se tiene que $M \cap \mathcal{Q}^\circ$ es un subconjunto no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

*Demostración.* Al ser $M$ un subconjunto no acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ se tiene por la Proposición 15 que su conjunto polar $M^\circ$ no es entorno de 0 en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. Entonces, al ser $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ denso en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ se tiene por el Lema 34 que $M^\circ$ tampoco es entorno de 0 en $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$. Por tanto $M$ verifica la propiedad 3 de la Proposición 33, por lo que $M$ también verifica la propiedad 1 de dicha Proposición 33. ∎

Por la equivalencia entre las normas variación y supremo en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ se tiene que $M \cap \mathcal{Q}^{\circ}$ es un subconjunto no acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

$$\sup\{|\mu| : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ}\} = \infty.$$

o

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ},\ C \in \mathcal{A}\} = \infty,$$

donde $|\mu| := |\mu|(\Omega)$ es la variación de $\mu$ en $\Omega$.

Las desigualdades de (1.4.2) permiten generalizar esta equivalencia sustituyendo $\Omega$ por un elemento $B$ distinto del conjunto vacío y perteneciente a un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$, pues si $M$ es un subconjunto del espacio de Banach $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ y si $\mathcal{Q}$ es un subconjunto finito de $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ se verifica que

$$\sup\{|\mu|(B) : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ}\} = \infty \tag{2.3.5}$$

si y solo si

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ},\ C \in \mathcal{A},\ C \subset B\} = \infty, \tag{2.3.6}$$

donde $|\mu|(B)$ es la variación de la medida $\mu$ en $B$, considerada en (1.2.1) y (1.3.3). Esta equivalencia y la Proposición 33 motivan la definición siguiente, introducida en [16, Definición 1].

**Definición 36.** *Sea $B$ un conjunto no vacío perteneciente a un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$. Un subconjunto $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ es $B$-profundamente no acotado si para cada subconjunto finito $\mathcal{Q}$ de funciones características de elementos de $\mathcal{A}$ se verifica que*

$$\sup\{|\mu|(B) : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ}\} = \infty.$$

De $|\mu|(B) \leqslant |\mu|(\Omega) = |\mu|$ se deduce que:

$$\sup\{|\mu|(B) : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ}\} \leqslant \sup\{|\mu| : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^{\circ}\} \leqslant \sup\{|\mu| : \mu \in M\}$$

por lo que para un subconjunto $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ se tiene que

$$\begin{aligned} M \text{ es } B\text{-pr no acotado} &\implies M \text{ es } \Omega\text{-pr no acotado} \\ &\implies M \text{ es no acotado en } (\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|) \end{aligned}$$

La Definición 36 simplifica el enunciado de las Proposiciones 33 y 35 según el formato de la Proposición 37.

**Proposición 37.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y sea $M$ un subconjunto no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

1. *$M$ es $\Omega$-pr no acotado si y solo si $M^\circ$ no es un entorno de* $0$ *en* $(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|)$ *o la codimensión de* $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ *en $L(\mathcal{A})$ es infinita.*

2. *Si* $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ *es denso en* $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ *entonces el conjunto no acotado $M$ es $\Omega$-pr no acotado.*

El Corolario 39 describe dos casos en que $\mathrm{span}\{M^\circ\}$ es denso en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. Ambos se utilizarán con frecuencia para asegurar que ciertos subconjuntos de no acotados de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ son pr no acotados. En la demostración del Corolario 39 se utiliza la Proposición 28 y el conocido Lema 38.

**Lema 38.** *Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y sea $M$ un subconjunto de* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$. *$M$ es $\mathcal{B}$-puntualmente acotado si y solo si $L(\mathcal{B}) \subset \mathrm{span}\{M^\circ\}$. En particular, $M$ es $\mathcal{A}$-puntualmente acotado si y solo si* $\mathrm{span}\{M^\circ\} = L(\mathcal{A})$.

*Demostración.* Un subconjunto $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ es $\mathcal{B}$-puntualmente acotado si para cada $C \in \mathcal{B}$ existe un $n_C \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M\} < n_C,$$

luego de $n_C^{-1} e_C \in M^\circ$ se deduce que

$$L(\mathcal{B}) = \mathrm{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nM^\circ = \mathrm{span}\{M^\circ\}$$

Recíprocamente, de la inclusión

$$L(\mathcal{B}) \subset \mathrm{span}\{M^\circ\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nM^\circ$$

se deduce que para cada $C \in \mathcal{B}$ existe $n_C \in \mathbb{N}$ tal que $e_C \in n_C M^\circ$, por lo que

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in M\} \leqslant n_C < \infty,$$

luego $M$ es un subconjunto de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ que está $\mathcal{B}$-puntualmente acotado.

En particular, $M$ es $\mathcal{A}$-puntualmente acotado si y solo si

$$L(\mathcal{A}) \subset \operatorname{span}\{M^\circ\},$$

lo que unido a la inclusión $\operatorname{span}\{M^\circ\} \subset L(\mathcal{A})$ prueba que $M$ es $\mathcal{A}$-puntualmente acotado si y solo si

$$L(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{M^\circ\}. \quad \blacksquare$$

**Corolario 39.** *Sea $M$ un subconjunto no acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ y sea $\mathcal{B}$ un subconjunto del álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$.*

1. *Si $M$ es puntualmente $\mathcal{A}$-acotado entonces $M$ es $\Omega$-pr no acotado.*

2. *Si $M$ es puntualmente $\mathcal{B}$-acotado y si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $N$ entonces $M$ es $\Omega$-pr no acotado.*

*Demostración.* Hemos visto en el Lema 38 que $M$ es puntualmente $\mathcal{A}$-acotado si y solo si $\operatorname{span}\{M^\circ\} = L(\mathcal{A})$ y que $M$ es puntualmente $\mathcal{B}$-acotado si y solo si $L(\mathcal{B}) \subset \operatorname{span}\{M^\circ\}$. Además, por la Proposición 28 si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $N$ entonces $\overline{L(\mathcal{B})} = L(\mathcal{A})$. Por tanto, en los dos casos de este corolario sucede que $\overline{\operatorname{span}\{M^\circ\}} = L(\mathcal{A})$, por lo que el corolario se deduce de la Proposición 37. $\blacksquare$

La Proposición 40 se deduce de [30, Proposición 3]. Se presenta a continuación una demostración simplificada con la notación que estamos utilizando, que es diferente de la empleada en [30], con lo que, además de simplificar la demostración, se pretende evitar esfuerzos de adaptación.

**Proposición 40.** *Supongamos que el subconjunto $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ del álgebra $\mathcal{A}$ es una partición finita del conjunto $B$ y que $M$ es un subconjunto $B$-pr no acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$. Existe $C_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, tal que $M$ es $C_i$-pr no acotado.*

*Demostración.* Podemos suponer $q = 2$. Entonces $B = C_1 \cup C_2$ y si la proposición fuese falsa existirían dos subconjunto finitos $\mathcal{Q}^i$, $i = 1, 2$, de funciones características de elementos de $\mathcal{A}$ tales que

$$\sup\{|\mu|(C_i) : \mu \in M \cap (\mathcal{Q}^i)^\circ\} < H_i,$$

$i \in \{1, 2\}$, lo que junto a la igualdad $|\mu|(B) = |\mu|(C_1) + |\mu|(C_2)$ implica que el conjunto finito $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^1 \cup \mathcal{Q}^2$ verificaría que

$$\begin{aligned}
\sup_{\mu \in M \cap \mathcal{Q}^\circ} \{|\mu|(B)\} &\leqslant \sup_{\mu \in M \cap \mathcal{Q}^\circ} \{|\mu|(C_1)\} + \sup_{\mu \in M \cap \mathcal{Q}^\circ} \{|\mu|(C_2)\} \\
&\leqslant \sup_{\mu \in M \cap (\mathcal{Q}^1)^\circ} \{|\mu|(C_1)\} + \sup_{\mu \in M \cap (\mathcal{Q}^2)^\circ} \{|\mu|(C_2)\} \\
&< H_1 + H_2.
\end{aligned}$$

Esta desigualdad es una contradicción, pues al ser $M$ un subconjunto $B$-pr no acotado de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ se tiene que

$$\sup\{|\mu|(B) : \mu \in M \cap \mathcal{Q}^\circ\} = \infty. \quad \blacksquare$$

## 2.4 Teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck.

Para demostrar el Teorema 43 necesitamos el Corolario 42, deducido por aplicación reiterada de la Proposition 41. Esta proposición está motivada por la Proposición 8 de [16], si bien se han eliminado del subconjunto $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ las condiciones de ser convexo y $\tau_s(\mathcal{A})$-cerrado.

No hemos podido eliminar del conjunto $M$ la condición de ser equilibrado, por no haber podido demostrar que si $B$ es un elemento del álgebra $\mathcal{A}$ y si $r > 1$ se tiene que el ser $M$ un conjunto $B$-pr no acotado implica que $rM$ es $B$-pr no acotado. Esta propiedad es cierta cuando $B = \Omega$, puesto que:

Si $\lambda$ es un escalar no nulo se tiene que $M$ es $\Omega$-pr no acotado si y solo si $\lambda M$ es $\Omega$-pr no acotado, siendo esta equivalencia consecuencia directa de la condición 1 de la Proposición 37, ya que la igualdad

$$(\mathrm{span}\{M^\circ\}, \|\cdot\|) = (\mathrm{span}\{(\lambda M)^\circ\}, \|\cdot\|)$$

implica que:

1. $M^\circ$ es un entorno de 0 en span$\{M^\circ\}$ si y solo si $(\lambda M)^\circ = \lambda^{-1}M^\circ$ es un entorno de 0 en span$\{(\lambda M)^\circ\}$,

2. y que las codimensiones de span$\{M^\circ)$ y de span$\{(\lambda M)^\circ\}$ en $L(\mathcal{A})$ son iguales.

**Proposición 41** ([16, Proposición 8])**.** *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\Omega$, que $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$, que $M$ un subconjunto equilibrado y $B$-pr no acotado de* $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ *y que $\alpha$ es un número real positivo. Existe una partición $\{Q_{r+1}, B\backslash Q_{r+1}\} \subset \mathcal{A}$ de $B$ y existe una medida finitamente aditiva $\mu_{r+1} \in M$ tales que:*

*1. $M$ es $(B\backslash Q_{r+1})$-pr no acotado,*

*2. $\sum_{1\leqslant j\leqslant r} |\mu_{r+1}(Q_j)| \leqslant 1$, $|\mu_{r+1}(Q_{r+1})| > \alpha$ y $|\mu_{r+1}(B\backslash Q_{r+1})| > \alpha$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{Q} = \{e_{Q_1}, e_{Q_2}, \ldots, e_{Q_r}, e_B\}$. De la condición de equilibrado se deduce que $M \subset rM$, por lo que $rM$ es $B$-pr no acotado y entonces se tiene que

$$\sup\{|\mu(D)| : \mu \in rM \cap \mathcal{Q}^\circ,\ D \subset B,\ D \in \mathcal{A}\} = \infty.$$

Por tanto existe $P_1 \subset B$, con $P_1 \in \mathcal{A}$, y $\mu \in rM \cap \mathcal{Q}^\circ$ tales que $|\mu(P_1)| > r(1+\alpha)$. Entonces $\mu_{r+1} = r^{-1}\mu \in M$, $|\mu_{r+1}(P_1)| > 1+\alpha$ y, para cada $f \in \mathcal{Q}$, $|\mu_{r+1}(f)| = r^{-1}|\mu(f)| \leqslant r^{-1}$. Por tanto

1. $\sum_{1\leqslant j\leqslant r} |\mu_{r+1}(Q_j)| \leqslant r^{-1}r = 1$ y $|\mu_{r+1}(B)| \leqslant r^{-1} \leqslant 1$, lo que junto a $|\mu_{r+1}(P_1)| > 1+\alpha$ permite deducir que el conjunto $P_2 := B\backslash P_1$ verifica que
$$|\mu_1(P_2)| \geqslant |\mu_1(P_1)| - |\mu_1(B)| > 1 + \alpha - 1 = \alpha.$$

2. Por la Proposición 40 existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $M$ es $P_i$-pr no acotado.

Para terminar la demostración es suficiente con elegir $Q_{r+1} := P_1$ si $M$ es $P_2$-pr no acotado, o bien $Q_{r+1} := P_2$ si $M$ es $P_1$-pr no acotado. De esta forma se obtiene que:

1. $M$ es $(B \backslash Q_{r+1})$-pr no acotado,
2. $\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} |\mu_{r+1}(Q_j)| \leqslant 1$, $|\mu_{r+1}(Q_{r+1})| > \alpha$ y $|\mu_{r+1}(B \backslash Q_{r+1})| > \alpha$. ∎

La aplicación reiterada de la Proposición 41 produce el Corolario 42. Obsérvese que en la aplicación reiterada de la Proposición 41 no se utiliza la desigualdad $|\mu_{r+1}(B \backslash Q_{r+1})| > \alpha$ obtenida en el punto 2 de dicha Proposición 41.

**Corolario 42.** *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\Omega$ y que $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ formado por elementos disjuntos dos a dos. Sea $M$ un subconjunto equilibrado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ que es $B$-pr no acotado. Dado un número real positivo $\alpha$ y un número $q \geqslant 1$ existe una partición finita*

$$\{Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_{r+q}, B \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant q} Q_{r+i}\}$$

*de $B$ formada por elementos de $\mathcal{A}$ y un subconjunto $\{\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots, \mu_{r+q}\}$ de $M$ tal que para cada $i$, con $1 \leqslant i \leqslant q$:*

1. *$M$ es $(B \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant q} Q_{r+i})$-pr no acotado y*
2. *para cada $i$, con $1 \leqslant i \leqslant q$,*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} |\mu_{r+i}(Q_j)| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad |\mu_{r+i}(Q_{r+i})| > \alpha.$$

*Demostración.* La Proposición 41 proporciona $Q_{r+1} \subset B$, con $Q_{r+1} \in \mathcal{A}$, y una medida $\mu_{r+1} \in M$ tales que $\{Q_1, \ldots, Q_r, Q_{r+1}, B \backslash Q_{r+1}\}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ formado por elementos disjuntos dos a dos que verifica que

1. $M$ es $(B \backslash Q_{r+1})$-pr no acotado,

2. $\sum_{1\leqslant j\leqslant r} |\mu_{r+1}(Q_j)| \leqslant 1$ y $|\mu_{r+1}(Q_{r+1})| > \alpha$.

Al repetir este razonamiento con $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\backslash Q_{r+1}\}$ y $M$ se obtiene $Q_{r+2} \subset B\backslash Q_{r+1}$, con $Q_{r+2} \in \mathcal{A}$, y una medida $\mu_{r+2} \in M$ tales que $\{Q_1, \ldots, Q_r, Q_{r+1}, Q_{r+2}, B\backslash(Q_{r+1} \cup Q_{r+2})\}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ formado por elementos disjuntos dos a dos de manera que

1. $M$ es $(B\backslash(Q_{r+1} \cup Q_{r+2}))$-pr no acotado,
2. $\sum_{1\leqslant j\leqslant r} |\mu_{r+2}(Q_j)| \leqslant 1$ y $|\mu_{r+2}(Q_{r+2})| > \alpha$.

Es evidente que con otras $q - 2$ repeticiones de este razonamiento se obtiene la demostración del corolario. ∎

Ya se tienen todos los elementos para presentar una prueba del teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck para una *σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto* $\Omega$, que tiene una estructura generalizable tanto para obtener propiedades más fuertes que la dada en el teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck, como para obtener la versión de dicho teorema en ciertas álgebras, como se verá, respectivamente, en los capítulos tres y cuatro de esta tesis.

**Teorema 43** (**Nikodym-Dieudonné-Grothendieck**). *Cualquier σ-álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $N$.*

*Demostración.* La demostración utiliza el método de reducción al absurdo y se divide en cuatro apartados. En el primero se determina un subconjunto equilibrado $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$ que es $\Omega$-pr no acotado y $\mathcal{S}$-puntualmente acotado. Le siguen dos apartados con dos inducciones. Finalmente, en el apartado cuarto se obtiene una contradicción.

1. (**Determinación del subconjunto** $M$) Si suponemos que $\mathcal{S}$ no tiene la propiedad $N$, entonces por la Proposición 25 existe en $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$ un subconjunto equilibrado $M$ que es $\mathcal{S}$-puntualmente acotado y que no es acotado en $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$. Por el Corolario 39, caso 1, se deduce que

$$M \text{ es } \Omega\text{-pr no acotado.}$$

2. (**Inducción primera**) Aplicando el Corolario 42 con el conjunto $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\}$ reducido a $\{B = \Omega\}$, es decir $r = 0$, y con $\alpha = q = 1$ se deduce que existen $Q_1 \in \mathcal{S}$ y $\mu_1 \in M$ tales que
$$|\mu_1(Q_1)| > 1$$
y que $M$ es $(\Omega \backslash Q_1)$-pr no acotado. Supongamos que se han obtenido $n$ subconjuntos disjuntos dos a dos $Q_1, \ldots, Q_n$ pertenecientes a la $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ y $n$ medidas $\mu_r \in M$, $1 \leqslant r \leqslant n$, tales que para cada $r$, con $1 < r \leqslant n$, se verifica que:
$$|\mu_r(Q_r)| > r,$$
$$|\mu_r(Q_1)| + |\mu_r(Q_2)| + \cdots + |\mu_r(Q_{r-1})| \leqslant 1$$
y que
$$M \text{ es } (\Omega \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant r} Q_i)\text{-pr no acotado.}$$

Aplicamos de nuevo el Corolario 42 al conjunto
$$\{Q_1, \ldots, Q_n, \Omega \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i\},$$
con $B := \Omega \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i$, $r = n$, $\alpha = n + 1$ y $q = 1$ y se obtiene un elemento $Q_{n+1} \in \mathcal{S}$, tal que
$$Q_{n+1} \subset \Omega \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i,$$
y una medida $\mu_{n+1} \in M$ que verifican que
$$|\mu_{n+1}(Q_{n+1})| > n + 1$$
$$|\mu_{n+1}(Q_1)| + |\mu_{n+1}(Q_r)| + \cdots + |\mu_{n+1}(Q_n)| \leqslant 1$$
y, además
$$M \text{ es } (\Omega \backslash \cup_{1 \leqslant i \leqslant n+1} Q_i)\text{-pr no acotado.}$$

Por tanto, se obtiene por inducción una sucesión $(Q_n)_n$ de elementos de $\mathcal{S}$ disjuntos dos a dos y una sucesión $(\mu_n)_n$ de elementos de $M$ tales que $|\mu_1(Q_1)| > 1$ y que para cada $n > 1$ se verifica que
$$|\mu_n(Q_n)| > n$$
y
$$|\mu_n(Q_1)| + |\mu_n(Q_2)| + \cdots + |\mu_n(Q_{n-1})| \leqslant 1.$$

3. (**Inducción segunda**) Con una nueva inducción vamos a determinar una sucesión creciente $(j_n)_n$ que, además de verificar para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$|\mu_{j_n}(Q_{j_n})| > j_n$$
y
$$|\mu_{j_n}(Q_{j_1})| + |\mu_{j_n}(Q_{j_2})| + \cdots + \left|\mu_{j_n}(Q_{j_{n-1}})\right| \leqslant 1$$
para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, satisface que la variación de cada medida $\mu_{j_n}$ en el subconjunto $\cup_{m>n} Q_{j_m}$, $n = 1, 2, \ldots$ es menor que 1, es decir:
$$|\mu_{j_n}| \left(\cup_{m>n} Q_{j_m}\right) < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Definimos $j_1 := 1$. Entonces la relación $\mu_{j_1} \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ implica que $|\mu_{j_1}|(\Omega) < \infty$, por lo que existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_{j_1}|(\Omega) < s_1$. Sea
$$\{N_u^1,\ 1 \leqslant u \leqslant s_1\}$$
una partición de $\{m \in \mathbb{N} : m > j_1\}$ en $s_1$ subconjuntos de cardinal infinito y definimos
$$Q_u^1 := \cup\{Q_t : t \in N_u^1\}, \quad 1 \leqslant u \leqslant s_1.$$

De
$$\sum\{|\mu_{j_1}|(Q_u^1) : 1 \leqslant u \leqslant s_1\} < s_1$$
se deduce que existe $u'$, con $1 \leqslant u' \leqslant s_1$, tal que
$$|\mu_{j_1}|(Q_{u'}^1) < 1.$$

Entonces se define
$$N^{(1)} := N_{u'}^1 \quad \text{y} \quad Q^1 := Q_{u'}^1$$
y se tiene que
$$N^{(1)} \subset \{m \in \mathbb{N} : m > j_1\}$$
y
$$|\mu_{j_1}|(Q^1) < 1.$$

Supongamos que en las primeras $l$ etapas de este proceso inductivo se han obtenido la sucesión finita

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_l$$

de números naturales y la sucesión decreciente

$$N^{(1)} \supset N^{(2)} \supset \cdots \supset N^{(l)}$$

de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tales que para cada $w \in \mathbb{N}, \ 1 \leqslant w \leqslant l$,

$$N^{(w)} \subset \{n \in \mathbb{N} : n > j_w\}$$

y la variación de la medida $\mu_{j_w}$ en el conjunto $Q^w := \cup\{Q_t : t \in N^{(w)}\}$ verifica la desigualdad

$$|\mu_{j_w}|\,(Q^w) < 1.$$

Por la hipótesis de inducción el primer elemento $j_{l+1}$ de $N^{(l)}$ verifica que

$$j_l < j_{l+1}$$

y la relación $\mu_{j_{l+1}} \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ implica que $\left|\mu_{j_{l+1}}\right|(\Omega) < \infty$, por lo que existe $s_{l+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\mu_{j_{l+1}}\right|(\Omega) < s_{l+1}$. Si

$$\{N_r^{l+1}, \ 1 \leqslant r \leqslant s_{l+1}\}$$

es una partición de $\{m \in \mathbb{N}^{(l)} : m > j_{l+1}\}$ en $s_{l+1}$ subfamilias infinitas y disjuntas dos a dos se tiene que los subconjuntos

$$Q_r^{l+1} := \bigcup\{Q_t : t \in N_r^{l+1}\}, \quad 1 \leqslant r \leqslant s_{l+1},$$

verifican que

$$\sum \left\{\left|\mu_{j_{l+1}}\right|(Q_r^{l+1}) : 1 \leqslant r \leqslant s_{l+1}\right\} < s_{l+1},$$

por tanto se deduce que existe $r'$, con $1 \leqslant r' \leqslant s_{l+1}$, tal que el conjunto $Q_{r'}^{l+1} := \cup\{Q_t : t \in N_{r'}^{l+1}\}$ verifica que

$$\left|\mu_{j_{l+1}}\right|(Q_{r'}^{l+1}) < 1.$$

Se definen entonces $N^{(l+1)} := N_{r'}^{l+1}$ y $Q^{l+1} := Q_{r'}^{l+1}$ y se tiene que

$$N^{(l+1)} \subset \{m \in \mathbb{N} : m > j_{l+1}\}$$

y que

$$\left|\mu_{j_{l+1}}\right|(Q^{l+1}) < 1.$$

Por inducción se obtiene pues una sucesión estrictamente creciente $(j_n)_n$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión decreciente $(N^{(n)})_n$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tales que

$$j_2 \in N^{(1)} \subset \{m \in \mathbb{N} : m > j_1\}$$

y

$$j_{n+1} \in N^{(n)} \subset \{m \in N^{(n-1)} : m > j_n\},$$

para cada $n > 1$, de manera que los conjuntos $Q^n := \cup\{Q_t : t \in N^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, son elementos de $\mathcal{S}$ que verifican

$$|\mu_{j_n}|(Q^n) < 1, \tag{2.4.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. La inclusión $j_s \in N^{(s-1)} \subset N^{(n)}$, cuando $n < s$, implica que

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,\ldots,n\}} Q_{j_s} \subset Q^n,$$

por lo que de la bien conocida desigualdad $|\mu(Q)| \leqslant |\mu|(Q)$ y de (2.4.1) se deduce que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\mu_{j_n}\Big(\bigcup_{n<s} Q_{j_s}\Big)\right| \leqslant |\mu_{j_n}|\Big(\bigcup_{n<s} Q_{j_s}\Big) \leqslant |\mu_{j_n}|(Q^n) < 1.$$

4. (**La contradicción**) La sucesión $(\mu_{j_n})_n$ está contenida en $M$, por lo que el apartado primero implica que la sucesión $(\mu_{j_n})_n$ está puntualmente acotada en cada elemento de la $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$, y, en particular, está acotada en $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} Q_{j_s}$ ya que, por definición de $\sigma$-álgebra,

$\bigcup_{s\in\mathbb{N}} Q_{j_s}$ es un elemento de $\mathcal{S}$. Existe pues una constante finita $K$ tal que

$$\left|\mu_{j_n}\Big(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} Q_{j_s}\Big)\right| < K$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que contradice que para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned}\left|\mu_{j_n}\Big(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} Q_{j_s}\Big)\right| &\geqslant \left|\mu_{j_n}(Q_{j_n})\right| - \left|\mu_{j_n}\Big(\bigcup_{s<n} Q_{j_s}\Big)\right| - \left|\mu_{j_n}\Big(\bigcup_{n<s} Q_{j_s}\Big)\right| \\ &> j_n - 2.\end{aligned}$$

De esta contradicción se deduce que cada subconjunto equilibrado y $\mathcal{S}$-puntualmente acotado $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ es acotado en $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$. De esta propiedad y de la Propiedad (P1) de la Proposición 25 se deduce que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ tiene la propiedad $N$. ∎

## 2.5 Propiedades de tipo $N$ en álgebras de conjuntos.

La pregunta natural de si las álgebras de conjuntos tienen la propiedad $N$ tiene, en general, contestación negativa, pues en [4, Capítulo I, 3, Ejemplo 5] se prueba que el álgebra $\mathcal{A}$ de los subconjuntos finitos y cofinitos de $\mathbb{N}$, descrita en el Ejemplo 3, no tiene la propiedad $N$. En efecto:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la medida $\varepsilon_n : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ definida por $\varepsilon_n(F) = 1$, si $n \in F$, y $\varepsilon_n(F) = 0$, si $n \notin F$, es de variación acotada, pues

$$\sup\{|\varepsilon_n(F)| : F \in \mathcal{A}\} = 1.$$

2. El conjunto numerable de medidas $\{\mu_n := n(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está puntualmente acotado, pues:

- Si $F$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ existe un $n_0$ tal que para cada $n > n_0$ sucede que $\mu_n(F) = n(\varepsilon_{n+1}(F) - \varepsilon_n(F)) = n(0 - 0) = 0$. Por tanto $\{\mu_n(F) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito.
- Si $F$ es un subconjunto cofinito de $\mathbb{N}$ existe un $n_0$ tal que para cada $n > n_0$ sucede que $\mu_n(F) = n(\varepsilon_{n+1}(F) - \varepsilon_n(F)) = n(1 - 1) = 0$. Por tanto $\{\mu_n(F) : n \in \mathbb{N}\}$ es también un conjunto finito.

3. Pero el conjunto de medidas $\{\mu_n := n(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}$ no está uniformemente acotado, puesto que

$$\begin{aligned}\sup\{|\mu_n(F)| : F \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}\} \\ &\geqslant \sup\{|\mu_n(\{n\})| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{n : n \in \mathbb{N}\} = \infty.\end{aligned}$$

No obstante hay álgebras de conjuntos que tienen la propiedad $N$. Por ejemplo, Schachermayer demostró el siguiente teorema:

**Teorema 44** (Schachermayer [27, Corolario 3.5])**.** *El álgebra $\mathcal{J}(I)$ de los subconjuntos medibles Jordan contenidos en el intervalo $I := [0,1]$ tiene la propiedad $N$.*

Una generalización interesante de este teorema aparece en [8, Corolario]. Valdivia mejoró profundamente este teorema de Schachermayer con su Teorema 45, comentado anteriormente en el Teorema 22.

**Teorema 45** (Valdivia ([30, Teorema 2]))**.** *Sea $\mathcal{J}(K)$ el álgebra de los subconjuntos Jordan medibles de un intervalo compacto $K := \prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ de $\mathbb{R}^k$. En cada cubrimiento creciente $\cup_m \mathcal{B}_m$ de $\mathcal{J}(K)$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$.*

La tesis de los Teoremas 24 y 45 de Valdivia motivaron la introducción en [18] de la siguiente Definición 46:

**Definición 46** (**Propiedad** $sN$)**.** *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad fuerte de Nikodym, propiedad $sN$ en breve, si en cada cubrimiento creciente $\cup_m \mathcal{B}_m$ de $\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$.*

Por tanto, los Teoremas 24 y 45 de Valdivia nos dicen que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de conjuntos y el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tienen la propiedad $sN$.

Hay una forma natural de definir propiedades más fuertes que la propiedad $sN$. Por ejemplo, *una subfamilia $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$, i.e., $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, tiene la propiedad $s(sN) = s^2N$ si en cada cubrimiento creciente $\cup_m \mathcal{B}_m$ de $\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $sN$.*

Obsérvese que si $\mathcal{B}$ es una subfamilia de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $s^2N$ y $\{\mathcal{B}_{m_1} : m_1 \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento creciente de $\mathcal{B}$ entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}_{n_1}$ tiene la propiedad $sN$, por lo que si $\{\mathcal{B}_{n_1,m_2} : m_2 \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento creciente de $\mathcal{B}_{n_1}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}_{n_1,n_2}$ tiene la propiedad $N$. Esta propiedad caracteriza la propiedad $s^2N$, pues si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no tiene la propiedad $s^2N$, existe un cubrimiento creciente $\{\mathcal{B}_{m_1} : m_1 \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{B}$ tal que para cada $m_1 \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{B}_{m_1}$ no tiene la propiedad $sN$, por lo que cada $\mathcal{B}_{m_1}$ admite un cubrimiento creciente $\{\mathcal{B}_{m_1,m_2} : m_2 \in \mathbb{N}\}$ tal que cada $\mathcal{B}_{m_1,m_2}$ no tiene la propiedad $N$.

La definición de la propiedad $s^2N$ involucra dos etapas: En la primera se considera un cubrimiento creciente $\{\mathcal{B}_{m_1} : m_1 \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{B}$, y en la segunda etapa se trabaja con un cubrimiento creciente $\{\mathcal{B}_{m_1,m_2} : m_2 \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{B}_{m_1}$, para cada $m_1 \in \mathbb{N}$. La utilización de una cantidad numerable de etapas lleva a la consideración de la propiedad $wN$, que se apoya en el bien conocido concepto de *malla creciente* (*increasing web*, en inglés), que se recuerda en la Definición 47 (ver [17, Capítulo 7, 35.1]).

**Definición 47** (Malla creciente)**.** *Una* malla creciente *en un conjunto $A$ es una familia $\mathcal{W} := \{A_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_s N^s\}$ de subconjuntos de $A$ tales que*

$$(A_{m_1})_{m_1}$$

*es un cubrimiento creciente de $A$ y*

$$(A_{m_1,m_2,\ldots,m_p,m_{p+1}})_{m_{p+1}}$$

*es un cubrimiento creciente de $A_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$, para cada $p, m_i \in N$, con $1 \leqslant i \leqslant p+1$.*

Cada sucesión $(m_p)_p$ de números naturales determina una sucesión decreciente $(A_{m_1,m_2,\ldots,m_p})_p$ de elementos de $\mathcal{W}$, que se llama una *cadena infinita* (*strand* en inglés) *de la malla creciente* $\mathcal{W}$.

**Definición 48** (**Propiedad** $wN$)**.** *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de Nikodym para mallas (*web Nikodym property *en inglés, abreviada en lo sucesivo por propiedad $wN$) si para cada malla creciente $\{\mathcal{B}_t : t \in \cup_s N^s\}$ en $\mathcal{B}$ existe una cadena infinita $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p})_p$ tal que cada $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ tiene la propiedad $N$.*

La caracterización de la propiedad $sN$ con propiedades localmente convexas de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ dada en [30, Teorema 3] sugiere de forma natural la caracterización de la propiedad $wN$ con propiedades localmente convexas de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$. Esta caracterización es sencilla si se utilizan los resultados obtenidos en [9] y [20] y si se siguen los desarrollos indicados en estos dos artículos.

## 2.6 Generalización de la propiedad $wN$

La propiedad $wN$ tiene una generalización natural sustituyendo la propiedad $N$ por una propiedad $\mathfrak{P}$, como se indica a continuación.

**Definición 49** (**Propiedad** $w\mathfrak{P}$)**.** *Sea $\mathfrak{P}$ una propiedad que se verifica en ciertos subconjuntos de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$. Un subconjunto $\mathcal{B}$ del álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$ si cada malla creciente $\{\mathcal{B}_t : t \in \cup_s N^s\}$ en $\mathcal{B}$ tiene una cadena infinita $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p})_p$ formada por elementos $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ que tienen la propiedad $\mathfrak{P}$.*

De esta definición se deduce que la propiedad $w\mathfrak{P}$ implica la propiedad $\mathfrak{P}$, pues si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$ se tiene que la malla creciente $\{\mathcal{B}_t : t \in \cup_s N^s\}$ en $\mathcal{B}$, con $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ para cada $t \in \cup_s N^s$, contiene una cadena infinita $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p})_p$ formada por elementos $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ que tienen la propiedad $\mathfrak{P}$, por lo que $\mathcal{B}$ (que es igual a cada $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$) tiene la propiedad $\mathfrak{P}$. Se tiene pues que

$$w\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{P}.$$

Análogamente se define *la propiedad $s\mathfrak{P}$, resultando que un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $s\mathfrak{P}$ si para cada cubrimiento creciente $\{\mathcal{B}_m : m \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{B}_m$ que tiene la propiedad $\mathfrak{P}$.*

La propiedad $w\mathfrak{P}$ es una propiedad muy fuerte y la repetición del método utilizado en su definición no produce una propiedad más fuerte, pues en la Proposición 50 se prueba que las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $w(w\mathfrak{P})$, denominada propiedad $w^2\mathfrak{P}$, son equivalentes. Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $w^2\mathfrak{P} = w(w\mathfrak{P})$ si cada malla creciente $\{\mathcal{B}_t : t \in \cup_s N^s\}$ en $\mathcal{B}$ tiene una cadena infinita $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p})_p$ tal que cada $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$. Esta propiedad es equivalente a la equivalencia de las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $s(w\mathfrak{P})$ en un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$, debido a que si $(\mathcal{B}_m)_m$ un cubrimiento creciente de un subconjunto $\mathcal{B}$ que tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que también tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$, como se expondrá en la Proposición 50.

**Proposición 50.** *Las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $s(w\mathfrak{P})$ son equivalentes en un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$. Por tanto las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $w^2\mathfrak{P}$ son equivalentes.*

*Demostración.* Sea $(\mathcal{B}_m)_m$ un cubrimiento creciente de un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$.

Si cada $\mathcal{B}_m$ no tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$ entonces, para cada número natural $m_1$, existe una malla creciente

$$\mathcal{W}_{m_1} := \{\mathcal{B}^{m_1}_{m_2,\ldots,m_p} : (m_2,\ldots,m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

en $\mathcal{B}_{m_1}$ tal que cada cadena infinita $(\mathcal{B}^{m_1}_{n_2,\ldots,n_p})_{p>1}$ en $\mathcal{W}_{m_1}$ contiene un conjunto $\mathcal{B}^{m_1}_{n_2\ldots n_p}$ que no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$. Si $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} := \mathcal{B}^{m_1}_{m_2m_3\ldots m_p}$ se tiene que

$$\mathcal{W} := \{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1,m_2,\ldots,m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

es una malla creciente en $\mathcal{B}$ sin cadenas formadas por conjuntos con la propiedad $\mathfrak{P}$, por lo que $\mathcal{B}$ no tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$.

Por tanto, si $(\mathcal{B}_m)_m$ es un cubrimiento creciente de un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$ se tiene que existe un $\mathcal{B}_n$ que también tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$, lo que demuestra la implicación $w\mathfrak{P} \Longrightarrow s(w\mathfrak{P})$.

Para demostrar la implicación recíproca es suficiente con suponer que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $s(w\mathfrak{P})$ y considerar el cubrimiento creciente $(\mathcal{B}_m = \mathcal{B})_m$, pues la propiedad $s(w\mathfrak{P})$ nos garantiza que existe un $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}$ que tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$.

De esta propiedad se deduce fácilmente la equivalencia entre las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $w^2\mathfrak{P}$, pues si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P} = s(w\mathfrak{P})$ y $\mathcal{W} := \{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$ es una malla creciente en $\mathcal{B}$ se tiene, en particular, que $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ es un cubrimiento creciente de $\mathcal{B}$, por lo que existe $n_1$ tal $\mathcal{B}_{n_1}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P} = s(w\mathfrak{P})$. Entonces, dado que $(\mathcal{B}_{n_1,m_2})_{m_2}$ es un cubrimiento creciente de $\mathcal{B}_{n_1}$, se deduce que existe $n_2$ tal $\mathcal{B}_{n_1,n_2}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$. Con una sencilla inducción se obtiene una cadena infinita $(\mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_p})_p$ tal que cada $\mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_p}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$, luego $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w^2\mathfrak{P}$. Por tanto

$$w\mathfrak{P} \Longrightarrow w^2\mathfrak{P}.$$

Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w^2\mathfrak{P}$ se tiene que la malla creciente $\{\mathcal{B}_t : t \in \cup_s N^s\}$ en $\mathcal{B}$, con $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ para cada $t \in \cup_s N^s$, contiene una cadena infinita $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p})_p$ tal que cada $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$, por lo que $\mathcal{B}$ (que es igual a cada $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$) tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$, lo que prueba que

$$w^2\mathfrak{P} \Longrightarrow w\mathfrak{P},$$

luego las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $w^2\mathfrak{P}$ son equivalentes. ∎

**Corolario 51.** *Las propiedades $w\mathfrak{P}$, $s(w\mathfrak{P})$, $w(s\mathfrak{P})$ y $w^2\mathfrak{P}$ son equivalentes en un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$. En particular se tiene que las propiedades $wN$, $s(wN)$, $w(sN)$ y $w^2N$ son equivalentes en un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$.*

*Demostración.* En la Proposición 50 se demostró la equivalencia entre las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $s(w\mathfrak{P})$, así como la equivalencia entre las propiedades $w\mathfrak{P}$ y $w^2\mathfrak{P}$, lo que unido a la implicación trivial $s\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{P}$ nos proporciona la cadena

$$w^2\mathfrak{P} = w(w\mathfrak{P}) \Longrightarrow w(s\mathfrak{P}) \Longrightarrow w\mathfrak{P} \Longleftrightarrow w^2\mathfrak{P},$$

de la que se deduce el resto de equivalencias. El caso particular se obtiene sustituyendo $\mathfrak{P}$ por $N$. ∎

El objetivo de los dos próximos capítulos es obtener las Teoremas 24 y 45 de Valdivia sustituyendo la propiedad $sN$ por la propiedad $wN$, que este Corolario 51 establece su equivalencia con propiedades "*aparentemente más fuertes*", como las propiedades $w(sN)$ y $w^2N$.

Por tanto el Teorema 24 de que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $sN$ quedará contenido como caso particular del resultado de que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $wN$, que veremos en el Teorema 65 del capítulo 3.

En el Teorema 90 del capítulo 4 se probará que si $K$ es un intervalo compacto $k$-dimensional se tiene que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$, que contiene como caso particular al Teorema 45.

Es de justicia agradecer, sinceramente, el trabajo del profesor Valdivia, cuyos teoremas 24 y 45 han inspirado gran parte del trabajo de esta tesis.

# Capítulo 3

# La propiedad $wN$ en $\sigma$-álgebras.

## 3.1 Introducción y recordatorio.

Recordemos, muy brevemente, algunos resultados del capítulo anterior, con la finalidad de facilitar la lectura de este capítulo.

El teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck (Teorema 43) dice que cada $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ tiene la propiedad $N$, es decir que cada subconjunto $M$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$ puntualmente acotado en $\mathcal{S}$ es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$, lo que significa que

$$\sup\{|\mu| : \mu \in M\} < \infty.$$

De la equivalencia de las normas variación y supremo en $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ (ver Corolario 13) se deduce que el teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck afirma que para cada subconjunto $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ la acotación puntual en $\mathcal{S}$, i.e.,

$$\sup\{|\mu(B)| : \mu \in M\} < \infty,$$

para cada $B \in \mathcal{S}$, implica que

$$\sup\{|\mu(B)| : B \in \mathcal{S}, \mu \in M\} < \infty,$$

lo que nos dice que si un subconjunto $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ es **puntualmente acotado** en $\mathcal{S}$ entonces $M$ está **uniformemente acotado** en $\mathcal{S}$.

La mejora profunda de Valdivia al probar que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $sN$ (ver Definición 46 y [29, Teorema 2]) consiste en demostrar que para cada cubrimiento creciente $\cup_m \mathcal{B}_m$ de una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$, es decir para cada subconjunto $M$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ se tiene que la acotación puntual en $\mathcal{B}_n$, es decir que se verifique que

$$\sup\{|\mu(B)| : \mu \in M\} < \infty,$$

para cada $B \in \mathcal{B}_n$, implica que

$$\sup\{|\mu(B)| : B \in \mathcal{S}, \mu \in M\} < \infty,$$

Por tanto, Valdivia debilitó la hipótesis exigida en el Teorema $NDG$ al sustituir $\mathcal{S}$ por el subconjunto $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{S}$. Así demostró que existe un número natural $n$ tal que si $M$ es un subconjunto de $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$ que está **puntualmente acotado** en $\mathcal{B}_n$ entonces $M$ está **uniformemente acotado** en $\mathcal{S}$.

Muy recientemente, Kąkol y López-Pellicer han considerado la propiedad $\mathfrak{P} := sN$ y han demostrado que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $w(sN)$ ([16, Teorema 2]). Por nuestro Corolario 51 se tiene la equivalencia

$$wN \Longleftrightarrow w(sN), \tag{3.1.1}$$

por lo que lo demostrado por Kąkol y López-Pellicer es que cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $wN$.

Esta observación nos sugirió elaborar una prueba de que cada $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ tiene la propiedad $wN$ que fuese independiente de las propiedades $N$ y $sN$ de las $\sigma$-álgebras de conjuntos y que, además, fuese relativamente sencilla.

Esta prueba se expone en el Teorema 65 y se utilizan las propiedades elementales de espacios normados expuestas en el capítulo anterior y unas propiedades sencillas de ciertos árboles de índices, llamados indistintamente árboles $NV$ o $NV$ árboles en honor a Nikodym y Valdivia, que se introdujeron en nuestro artículo [18, Definición 1]. Estos árboles $NV$ son un caso particular y muy intuitivo de los *increasing trees* considerados en [16, Definición 2], lo que facilita su utilización.

La elaboración de esta demostración para el Teorema 65 es el objetivo de este capítulo, que, en parte, sigue nuestro artículo [18], donde en el Teorema 1 se obtiene una prueba de la propiedad $wN$ en $\sigma$-álgebras, que, con la información recopilada, creemos que es la primera prueba independiente de que una $\sigma$-álgebra tenga propiedades del tipo $N$ o $sN$.

## 3.2 Árboles $NV$. Definición y propiedades.

Todos los elementos y conjuntos que vamos a considerar en este apartado están contenidos en el conjunto $\cup_s \mathbb{N}^s$ de sucesiones finitas de números naturales. Algunas de las definiciones siguientes son bien conocidas y se dan para evitar faltas de precisión y malentendidos. Como es habitual, el cardinal de un conjunto $C$ se denota por $|C|$.

La *longitud* de un elemento $t = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ de $\cup_s \mathbb{N}^s$ es el número natural $p$ y la *sección de longitud* $i$ de $t$ es

$$t(i) := (t_1, t_2, \dots, t_i), \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Por convenio,

$$t(i) := \emptyset \quad \text{para cada } i > p.$$

Para cada número natural $m$ la sección $T(m)$ de un subconjunto $T$ de $\cup_s \mathbb{N}^s$ es el subconjunto de $\mathbb{N}^m$ definido por

$$T(m) := \{t(m) : t \in T\}.$$

El *producto* $u = t \times s$ de dos elementos $t = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ y $s = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ de $\cup_s \mathbb{N}^s$ es el elemento

$$u := (u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+q}) \in \mathbb{N}^{p+q}$$

tal que $u_j := t_j$, para $1 \leqslant j \leqslant p$ y $u_{p+j} := s_j$, para $1 \leqslant j \leqslant q$. Se dice que el producto $t \times s$ es una *extensión* de $t$ y si, adicionalmente, $t \times s \in U$ diremos que *$t \times s$ es una extensión de $t$ en $U$*.

Análogamente, el producto $T \times U$ de dos subconjuntos $T$ y $U$ de $\cup_s \mathbb{N}^s$ es

$$T \times U := \{t \times u : t \in T,\ u \in U\}.$$

Si $t = (t_1)$ se simplifican $t$, $T \times \{t\}$ y $\{t\} \times T$ escribiendo $t_1$, $T \times t_1$ y $t_1 \times T$, respectivamente.

Una sucesión $(t^n)_n$ de elementos $t^n = (t_1^n, t_2^n, \ldots, t_n^n, \ldots) \in T$, $n \in \mathbb{N}$, es una *cadena infinita en* $T$ si

$$\emptyset \neq t^n(n) = t^{n+1}(n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $(t^n)_n$ es una cadena infinita si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$ la longitud de $t_n$ es mayor o igual a $n$ y $t^{n+1}$ es una extensión de la sección $t^n(n)$.

Un subconjunto no vacío $U$ de $\cup_n \mathbb{N}^n$ *domina a* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s$ si $U$ contiene $p$ elementos

$$t^1 = (t_1^1, t_2^1, \ldots) \quad \text{y} \quad t^i = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i^i, t_{i+1}^i, \ldots), \quad 1 < i \leqslant p,$$

tales que $t_i < t_i^i$, para cada $1 \leqslant i \leqslant p$. Obsérvese que el elemento $t$ puede no pertenecer a $U$.

*$U$ domina a un subconjunto $V$ de* $\cup_s \mathbb{N}^s$ si $U$ domina a cada $t \in V$. Por brevedad diremos que $U$ *es dominante* si $U$ domina a $U$, lo que sucede si y solo si se verifica que

$$|U(1)| = \infty$$

y para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in U$ y cada $i < p$ se tiene que

$$\left|\{n \in \mathbb{N} : t(i) \times n \in T(i+1)\}\right| = \infty.$$

La Definición 52 introduce una clase de subconjuntos dominantes de $\cup_n \mathbb{N}^n$. Ya se indicó que son un caso particular de los *árboles crecientes* considerados en [16, Definición 2].

**Definición 52.** *Un árbol NV es un subconjunto* dominante $T$ *de* $\cup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^s$ *sin cadenas infinitas y tal que cada* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ *verifica estas dos condiciones:*

1. *La longitud de cada extensión de* $t(p-1)$ *en* $T$ *es* $p$ *y*

2. $\{t(i) : 1 \leqslant i \leqslant p\} \cap T = \{t\}$.

Es evidente que un subconjunto $T$ de $\mathbb{N}$ es un árbol $NV$ si y solo si $|T| = \infty$. Entonces se dice que $T$ es un *árbol $NV$ trivial*. Por tanto, un subconjunto infinito $T$ de $\cup_s \mathbb{N}^s$ es un árbol $NV$ trivial si y solo si $T = T(1)$.

Los conjuntos

$$\mathbb{N}^i, \quad i \in \mathbb{N} \backslash \{1\},$$

y

$$\cup\{(i) \times \mathbb{N}^i : i \in \mathbb{N}\}$$

son árboles $NV$ no triviales.

Es inmediato que el producto de un número finito de árboles $NV$ es un árbol $NV$.

**Proposición 53.** *Si $T$ es un árbol $NV$ y si $\{B_u : u \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$ es una malla creciente en $B$, entonces $B = \cup\{B_t : t \in T\}$.*

*Demostración.* Al ser $T$ un subconjunto dominante de $\cup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^s$ se tiene que

$$|T(1)| = \infty$$

y para cada $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in T$ y cada $i < p$

$$\Big|\{n \in \mathbb{N} : u(i) \times n \in T(i+1)\}\Big| = \infty.$$

Por tanto, al ser $\{B_u : u \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$ una malla creciente en $B$ se tiene que:

1. $(B_{u(1)})_{u \in T}$ es un cubrimiento creciente de $B$,

2. y que para cada $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in T$ y cada $i < p$, se tiene que la sucesión $(B_{u(i)\times n})_{u(i)\times n \in T(i+1)}$ es un cubrimiento creciente de $B_{u(i)}$.

Supongamos que existiese

$$b \in B \backslash \bigcup\{B_t : t \in T\} = \Big(\bigcup\{B_{t(1)} : t \in T\}\Big) \backslash \bigcup\{B_t : t \in T\}.$$

Entonces existiría un elemento $v^1 = (v_1, v_2', \ldots) \in T$ tal que

$$b \in B_{v^1(1)} \backslash \bigcup\{B_t : t \in T\} = B_{v_1} \backslash \bigcup\{B_t : t \in T\},$$

de lo que se deduce que

$$v^1(1) = v_1 \in T(1) \backslash T,$$

por lo que $v^1 = (v_1, v_2', \cdots, v_{p'}')$, con $1 < p'$.

Al ser $(B_{v_1 \times n})_{v_1 \times n \in T(2)}$ un cubrimiento creciente de $B_{v_1}$ se tiene que

$$b \in B_{v_1} \backslash \bigcup \{B_t : t \in T\} = \Big( \bigcup_{v_1 \times n \in T(2)} B_{v_1 \times n} \Big) \backslash \bigcup \{B_t : t \in T\}$$

de lo que se deduce la existencia de $v^2 = (v_1, v_2, v_3'', \ldots, v_{p''}'') \in T$, con $2 < p''$ tal que

$$b \in B_{v^2(2)} \backslash \bigcup \{B_t : t \in T\} = B_{v_1, v_2} \backslash \bigcup \{B_t : t \in T\},$$

luego

$$v^2(2) = (v_1, v_2) \in T(2) \backslash T.$$

Con una inducción, que por su sencillez se omite, se determina una sucesión $(v^n)_n$ de elementos de $T$ y una sucesión $(v_n)_n$ de números naturales tales que

$$b \in B_{v^m(m)} \backslash \bigcup \{B_t : t \in T\} = B_{v_1, v_2, \ldots, v_m} \backslash \bigcup \{B_t : t \in T\}$$

con

$$(v_{1,} v_2, \ldots, v_m) = v^m(m) \in T(m) \backslash T,$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, lo que implica la contradicción de que $(v^m)_m$ es una cadena infinita contenida en $T$. En consecuencia, $B = \cup \{B_t : t \in T\}$. ∎

**Lema 54.** *Sea $S$ un subconjunto dominante contenido en un NV árbol $T$. Entonces $S$ es un árbol NV.*

*Demostración.* Es suficiente con observar que la propiedad de no tener cadenas infinitas así como las condiciones 1 y 2 de la Definición 52 se heredan en los subconjuntos de $T$. ∎

De este sencillo lema se deduce la propiedad siguiente:

**Proposición 55.** *Sea $T$ un árbol $NV$. Supongamos que $(S_n)_n$ es una sucesión de subconjuntos de $T$ tales que cada $S_{n+1}$ domina a $S_n$. Entonces $\cup_n S_n$ es un árbol $NV$.*

*Demostración.* Si $t \in \cup_n S_n$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t \in S_m$. Por hipótesis $S_{m+1}$ domina a $S_m$, luego, en particular, $S_{m+1}$ domina a $t$. Por lo tanto $\cup_n S_n$ domina a $t$, lo que demuestra que $\cup_n S_n$ es un conjunto dominante contenido en $T$. Dado que $T$ es un árbol $NV$ se deduce por el Lema 54 que $\cup_n S_n$ es también un árbol $NV$. ∎

Del Lema 54 y de la Proposición 7 de [16] se deduce la Proposición 56 con una demostración sencilla, detallada y limitada a los árboles $NV$, que creemos simplifica la lectura de esta tesis, evitando adaptar la notación utilizada en [16].

**Proposición 56.** *Sea $T$ un árbol $NV$ y sea $U$ un subconjunto de $T$. Si $U$ no contiene un árbol $NV$, entonces $T\backslash U$ contiene un árbol $NV$.*

*Demostración.* De la hipótesis sobre $U$ se deduce que $U$ no contiene un subconjunto dominante.

Para demostrar esta proposición es suficiente con probar que $T\backslash U$ contiene un subconjunto dominante, lo que es obvio si $T$ es un árbol $NV$ trivial, pues entonces $U$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, lo que implica que $|T\backslash U| = \infty$.

Por tanto haremos la demostración suponiendo que $T$ es un árbol $NV$ no trivial. La demostración se divide en dos partes. La primera es una inducción para determinar un conjunto $W$, que va a ser la unión de una familia de conjuntos $\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$ obtenida por inducción. En la parte segunda comprobaremos que el conjunto $W$ obtenido es un conjunto dominante contenido en $T\backslash U$.

**Parte primera de la demostración: Inducción para determinar el conjunto $W := \cup\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$.**

Dado que, por hipótesis, el subconjunto $U$ no contiene ningún subconjunto dominante se tiene que existe $m'_1 \in T(1)$ tal que para cada $n \geqslant m'_1$ el conjunto

$$\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : n \times v \in U\}$$

no contiene ningún subconjunto dominante. Definimos $Q_1 := \emptyset$ y $Q'_1 := \{n \in T(1)\backslash T : m'_1 \leqslant n\}$.

Supongamos que para cada $j$ tal que $2 \leqslant j \leqslant i$ se han obtenido en $T(j)$ dos subconjuntos disjuntos $Q_j$ y $Q'_j$ tales que

$$\begin{aligned} Q_j &\subset T\backslash U \\ Q'_j &\subset T(j)\backslash T \end{aligned}$$

y que para cada $t \in Q_j \cup Q'_j$ se tiene que

$$t(j-1) \in Q'_{j-1}$$

y que

$$A_{t(j-1)} := \{n \in \mathbb{N} : t(j-1) \times n \in Q_j \cup Q'_j\}$$

es un conjunto infinito que cumple estas propiedades:

1. Si $t \in Q_j$ se tiene que $t(j-1) \times A_{t(j-1)} \subset Q_j$ y entonces se define $S_{t(j-1)} := A_{t(j-1)}$ y $S'_{t(j-1)} := \emptyset$.

2. Si $t \in Q'_j$ entonces sucede que $t(j-1) \times A_{t(j-1)} \subset Q'_j$ y que el conjunto $\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times v \in U\}$ no contiene ningún subconjunto dominante. En este segundo caso se definen $S_{t(j-1)} := \emptyset$ y $S'_{t(j-1)} := A_{t(j-1)}$.

De estas dos propiedades se deduce que para cada $j$ tal que $1 < j \leqslant i$ se verifica

$$\begin{aligned} Q_j &= \cup\{t(j-1) \times S_{t(j-1)} : t(j-1) \in Q'_{j-1}\} \subset T\backslash U \\ Q'_j &= \cup\{t(j-1) \times S'_{t(j-1)} : t(j-1) \in Q'_{j-1}\} \subset T(j)\backslash T, \end{aligned}$$

y, por la hipótesis de inducción, se tiene que para cada $t \in Q'_i(\subset T(i)\backslash T)$ el conjunto

$$\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times v \in U\}$$

no contiene ningún subconjunto dominante. Además, este conjunto verifica la inclusión

$$\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times v \in U\} \subset T_t := \{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times v \in T\},$$

donde $T_t$ es un árbol $NV$. Por tanto, pueden suceder dos casos:

*i.* Que $T_t$ sea un árbol $NV$ trivial, y entonces se tiene que

$$\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times v \in U\} = \{v \in \mathbb{N} : t \times v \in U\}$$

es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, ya que no contiene ningún subconjunto dominante. Por tanto, existe $m_{i+1} \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto infinito

$$S_t := \{n \in \mathbb{N} : m_{i+1} \leqslant n, t \times n \in T\}$$

es igual a

$$S_t := \{n \in \mathbb{N} : m_{i+1} \leqslant n, t \times n \in T(i+1)\}$$

y verifica que

$$t \times S_t \subset T \backslash U.$$

En este caso se define

$$S'_t := \emptyset.$$

*ii.* Que $T_t$ sea un árbol $NV$ no trivial, y en este caso existe $m'_{i+1} \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto infinito

$$S'_t := \{n \in \mathbb{N} : m'_{i+1} < n, t \times n \in T(i+1)\}$$

verifica que $t \times S'_t \subset T(i+1) \backslash T$, de manera que para cada $t \times n \in t \times S'_t$ el conjunto

$$\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times n \times v \in U\}$$

no contiene ningún conjunto dominante. Ahora se define

$$S_t := \emptyset.$$

Se termina la inducción observando que

$$Q_{i+1} := \cup\{t \times S_t : t \in Q'_i\} \subset T \backslash U,$$
$$Q'_{i+1} := \cup\{t \times S'_t : t \in Q'_i\} \subset T(i+1) \backslash T$$

y que para cada $t \in Q_{i+1} \cup Q'_{i+1}$ se tiene que

$$t(i) \in Q'_i$$

y que

$$A_{t(i)} := \{n \in \mathbb{N} : t(i) \times n \in Q_{i+1} \cup Q'_{i+1}\}$$

es un conjunto infinito que cumple estas propiedades:

1. Si $t \in Q_{i+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} S_{t(i)} &= A_{t(i)}, \\ S'_{t(i)} &:= \emptyset \quad \text{y} \\ t(i) \times S_{t(i)} &\subset Q_{i+1}. \end{aligned}$$

2. En tanto que si $t \in Q'_{i+1}$ entonces

$$S'_{t(i)} := A_{t(i)}, t(i) \times A_{t(i)} \subset Q'_{i+1}$$

y el conjunto

$$\{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t \times v \in U\}$$

no contiene ningún subconjunto dominante. En este segundo caso se define

$$S_{t(i)} := \emptyset.$$

**Parte segunda de la demostración: Comprobación de que $W := \cup\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto dominante contenido en $T \backslash U$.**

La hipótesis de que $T$ no contiene cadenas infinitas implica que para cada $(t_1, t_2, \ldots, t_i) \in Q'_i$ existen $q \in \mathbb{N}$ y $(t_{i+1}, \ldots, t_{i+q}) \in \mathbb{N}^q$ tales que

$$(t_1, t_2, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+q}) \in Q_{i+q},$$

luego, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{j>i} Q_j(i) = Q'_i.$$

Esta igualdad implica que

$$W := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$$

es un subconjunto de $\cup_{s\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^s$ que para cada $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ verifica

$$\begin{aligned} W(k) &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j(k) = \left(\bigcup_{j<k} Q_j(k)\right)\bigcup(Q_k)\bigcup\left(\bigcup_{j>k} Q_j(k)\right) \\ &= \emptyset \cup Q_k \cup Q'_k. \end{aligned}$$

Las igualdades $W(1) = Q'_1$ y $W(k) = Q_k \cup Q'_k$, $k = 1, 2, \ldots$, implican que $W$ es un subconjunto dominante de $\cup_s\mathbb{N}^s$, pues

1. $|W(1)| = |Q'_1| = \infty$,

2. y si $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in W\backslash W(1)$, entonces $1 < p$, $(t_1, t_2, \ldots, t_i) \in Q'_i$, si $1 < i < p$, y $(t_1, t_2, \ldots, t_p) \in Q_p$, por lo que $S'_{t(i-1)}$ y $S_{t(p-1)}$ son dos subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ que verifican las relaciones

$$t(i-1) \times S'_{t(i-1)} \subset Q'_i \subset W(i)$$

y

$$t(p-1) \times S_{t(p-1)} \subset Q_p \subset W.$$

Dado que el conjunto dominante $W$ está contenido en el $NV$ árbol $T$ se tiene por el Lema 54 que $W$ es un árbol $NV$, que por construcción está contenido en $T\backslash U$, pues $W := \cup\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$ y $Q_j \subset T\backslash U$, para cada $j \in \mathbb{N}$. ∎

En la definición siguiente supondremos que $\mathfrak{P}$ es una propiedad que se verifica en una familia de subconjuntos de un conjunto $A$.

**Definición 57.** *Se dice que $\mathfrak{P}$ es una propiedad hereditaria creciente en un conjunto $A$ si cuando $B$ es un subconjunto de $A$ que verifica la propiedad $\mathfrak{P}$ se tiene que la relación $B \subset C \subset A$ implica que $C$ también verifica la propiedad $\mathfrak{P}$.*

**Proposición 58.** *Sea $\mathfrak{P}$ una propiedad hereditaria creciente en un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$. Las propiedades $s\mathfrak{P}$ y $w\mathfrak{P}$ son también hereditarias crecientes en $\mathcal{A}$.*

*Demostración.* Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $s\mathfrak{P}$ y $\cup_m \mathcal{C}_m$ es un cubrimiento creciente de $\mathcal{C}$ se tiene que existe $\mathcal{C}_n$ tal que $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{B}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$, pues $\cup_m(\mathcal{C}_m \cap \mathcal{B})$ es un cubrimiento creciente de $\mathcal{B}$. Al ser la propiedad $\mathfrak{P}$ hereditaria por crecimiento se deduce que $\mathcal{C}_n$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$, luego $\mathcal{C}$ tiene la propiedad $s\mathfrak{P}$, lo que demuestra que la propiedad $s\mathfrak{P}$ es hereditaria creciente.

Finalmente, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$ y

$$\{\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

es una malla creciente en $\mathcal{C}$, entonces

$$\{\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} \cap \mathcal{B} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

es una malla creciente en $\mathcal{B}$, por lo que existe una sucesión $(n_i)_i$ tal que cada $\mathcal{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_i} \cap \mathcal{B}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Por tanto cada $\mathcal{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_i}$ tiene también la propiedad $\mathfrak{P}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad $w\mathfrak{P}$, pues $(\mathcal{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_i})_i$ es una cadena infinita en $\mathcal{C}$ formada por conjuntos que tienen la propiedad $\mathfrak{P}$. Por tanto $w\mathfrak{P}$ es también una propiedad hereditaria creciente. ∎

**Corolario 59.** *Las propiedades $N$, $sN$ y $wN$ son hereditarias crecientes en un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$.*

*Demostración.* Por la proposición anterior es suficiente con demostrar que la propiedad $N$ es hereditaria creciente. Supongamos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $N$. Esto significa que si $M$ es un subconjunto de ba$(\mathcal{S})$ puntualmente acotado en $\mathcal{B}$ se tiene que $M$ es un subconjunto acotado de $(\text{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$, lo que trivialmente implica que cada subconjunto $M$ de ba$(\mathcal{S})$ que sea puntualmente acotado en $\mathcal{C}$ cumple que $M$ es un subconjunto acotado de $(\text{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$, ya que la acotación puntual en $\mathcal{C}$ implica la acotación puntual en $\mathcal{B}$. Esto prueba que $N$ es una propiedad hereditaria creciente. ∎

La proposición siguiente describe una propiedad de gran interés por su aplicación a álgebras que no tengan la propiedad $w\mathfrak{P}$, siendo $\mathfrak{P}$ una propiedad hereditaria creciente.

**Proposición 60.** *Sea $\mathfrak{P}$ una propiedad hereditaria creciente en un conjunto $A$ y sea $\mathcal{B} := \{B_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : p, m_1, m_2, \ldots, m_p \in \mathbb{N}\}$ una malla creciente en $A$ que no contiene cadenas infinitas formadas por conjuntos con la propiedad $\mathfrak{P}$. Entonces puede suceder que:*

1. *$B_{m_1}$ no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ para cada $m_1$ perteneciente al NV árbol trivial $T = \mathbb{N}$.*

2. *O que existe un NV árbol no trivial $T$ tal que para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ sucede que*
$$t(p-1) \times \mathbb{N} \subset T$$
$$B_t \textit{ no tiene la propiedad } \mathfrak{P},$$
*y para cada $1 \leqslant i < p$ se tiene que*
$$B_{t(i)} \textit{ tiene la propiedad } \mathfrak{P}.$$

*Demostración.* Si cada $B_{m_1}$, $m_1 \in \mathbb{N}$, no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ la proposición es obvia con $T := \mathbb{N}$.

Por tanto haremos la demostración suponiendo que existe $m_1' \in \mathbb{N}$ tal que $B_{m_1'}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$. La demostración se divide en dos partes. La primera es una inducción para determinar un conjunto dominante $T := \cup\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ se tiene que $B_t$ no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ y, además, si $p > 1$ se tiene que $B_{t(i)}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, p-1$. En la parte segunda comprobaremos que el conjunto $T$ es un $NV$ árbol.

**Parte primera de la demostración: Inducción para determinar el conjunto dominante** $T := \cup\{Q_i : i \in \mathbb{N}\}$.

El que $B_{m_1'}$ tiene la propiedad hereditaria creciente $\mathfrak{P}$ implica que $B_{t_1}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ para cada $t_1 \geqslant m_1'$. Entonces escribimos $Q_1 := \emptyset$ y $Q_1' := \{t_1 \in \mathbb{N} : t_1 \geqslant m_1'\}$.

Supongamos que para cada $j$, con $2 \leqslant j \leqslant i$, se han obtenido por inducción dos subconjuntos disjuntos $Q_j$ y $Q'_j$ de $\mathbb{N}^j$ tales que cada

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_j) \in Q_j \cup Q'_j$$

verifica estas tres propiedades:

1. La sección $t(j-1) = (t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}) \in Q'_{j-1}$.

2. Si $t \in Q_j$ se tiene que el conjunto $B_t$ no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$,

$$S_{t(j-1)} := \{n \in \mathbb{N} : t(j-1) \times n \in Q_j \cup Q'_j\} = \mathbb{N}$$

   y $t(j-1) \times S_{t(j-1)} = t(j-1) \times \mathbb{N} \subset Q_j$. En este caso definimos

$$S'_{t(j-1)} = \emptyset.$$

3. Si $t \in Q'_j$ sucede que el conjunto $B_t$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$,

$$S'_{t(j-1)} := \{n \in \mathbb{N} : t(j-1) \times n \in Q_j \cup Q'_j\}$$

   es un subconjunto co-finito de $\mathbb{N}$ tal que $t(j-1) \times S'_{t(j-1)} \subset Q'_j$. Entonces se define

$$S_{t(j-1)} := \emptyset.$$

Se tiene pues que para cada $j$ tal que $1 < j \leqslant i$,

$$Q_j := \cup\{t \times S_t : t \in Q'_{j-1}\}$$

y

$$Q'_j := \cup\{t \times S'_t : t \in Q'_{j-1}\}.$$

Para el índice $i$ se tiene por construcción que si $t := (t_1, t_2, \ldots, t_i) \in Q'_i$ entonces $B_{t_1,t_2,\ldots,t_i}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ y dado que $(B_{t_1,t_2,\ldots,t_i,n})_n$ es un cubrimiento creciente de $B_{t_1,t_2,\ldots,t_i}$, se pueden presentar estos dos casos:

1. Que $B_{t_1,t_2,\ldots,t_i,n}$ no tenga la propiedad $\mathfrak{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y entonces se define

$$S_{t_1,t_2,\ldots,t_i} := \mathbb{N}$$

   y

$$S'_{t_1,t_2,\ldots,t_i} := \emptyset.$$

2. O bien que exista $m'_{i+1} \in \mathbb{N}$ tal que $B_{t_1,t_2,\ldots,t_i,m'_{i+1}}$ tenga la propiedad $\mathfrak{P}$. Al ser esta propiedad hereditaria creciente se tiene que $B_{t_1,t_2,\ldots,t_i,m'_{i+1}}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ para cada $n \geqslant m'_{i+1}$. En este caso definimos
$$S_{t_1,t_2,\ldots,t_i} := \emptyset$$
y
$$S'_{t_1,t_2,\ldots,t_i} := \{n \in \mathbb{N} : m'_{i+1} \leqslant n\}.$$

Completamos esta etapa del proceso inductivo escribiendo
$$Q_{i+1} := \cup\{t \times S_t : t \in Q'_i\}$$
y
$$Q'_{i+1} := \cup\{t \times S'_t : t \in Q'_i\}.$$

Por construcción se tiene que los conjuntos $Q_{i+1}$ y $Q'_{i+1}$ son disjuntos y cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_i, t_{i+1}) \in Q_{i+1} \cup Q'_{i+1}$ verifica estas tres propiedades:

1. La sección $t(i) = (t_1, t_2, \ldots, t_i) \in Q'_i$.

2. Si $t \in Q_{i+1}$ entonces el conjunto $B_t$ no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$,
$$S_{t(i)} := \{n \in \mathbb{N} : t(i) \times n \in Q_{i+1} \cup Q'_{i+1}\} = \mathbb{N}$$
y $t(i) \times S_{t(i)} = t(i) \times \mathbb{N} \subset Q_{i+1}$, en tanto que
$$S'_{t(i)} = \{n \in \mathbb{N} : t(i) \times n \in Q'_{i+1}\} = \emptyset.$$

3. Si $t \in Q'_{i+1}$ entonces $B_t$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$,
$$S'_{t(i)} = \{n \in \mathbb{N} : t(i) \times n \in Q_{i+1} \cup Q'_{i+1}\}$$
es un subconjunto co-finito de $\mathbb{N}$ tal que $t(i) \times S'_{t(i)} \subset Q'_i$, mientras que
$$S_{t(i)} := \{n \in \mathbb{N} : t(i) \times n \in Q_{i+1}\} = \emptyset$$

Por tanto, $Q_{i+1}$ y $Q'_{i+1}$ verifican las propiedades indicadas para $Q_j$ y $Q'_j$, reemplazando $j$ por $i+1$, con lo que se concluye el proceso inductivo.

Para terminar la primera parte de la demostración observamos que si $(t_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y si cada $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Q'_n$ se obtendría que todos los conjuntos de la cadena infinita $(B_{t_1,t_2,\ldots,t_n})_n$ tendrían la propiedad $\mathfrak{P}$, lo que es absurdo. De esta observación y de la propiedad de que cada

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in Q'_k$$

tiene una extensión

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}) \in Q_{k+1} \cup Q'_{k+1}$$

se deduce que, para cada $k \in \mathbb{N}$, sucede que cada

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in Q'_k$$

tiene existe una extensión

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+q}) \in Q_{k+q},$$

por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{k<j} Q_j(k) = Q'_k,$$

de lo que se deduce que el conjunto

$$T := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$$

es un subconjunto de $\cup_{s\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^s$ que, para $k = 1$, verifica que

$$T(1) = Q_1 \bigcup \left( \bigcup_{1<j} Q_j(1) \right) = \emptyset \bigcup Q'_1 = Q'_1$$

en tanto que, para cada $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(k) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j(k) &= \left( \bigcup_{j<k} Q_j(k) \right) \bigcup (Q_k) \bigcup \left( \bigcup_{j>k} Q_j(k) \right) \\ &= \emptyset \cup Q_k \cup Q'_k. \end{aligned}$$

De las igualdades $T(1) = Q'_1$ y $T(k) = Q_k \cup Q'_k$, $k = 2, 3, \ldots$, se deduce que:

1. $|T(1)| = |Q'_1| := |\{t_1 \in \mathbb{N} : t_1 \geqslant m'_1\}| = \infty$,

2. y si $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ entonces $p > 1$,

$$\begin{aligned} t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) &\in Q_p \qquad \text{y} \\ t(i) = (t_1, t_2, \ldots, t_i) &\in Q'_i, \end{aligned}$$

   para cada $i < p$, por lo que

$$\begin{aligned} t(1) &\in Q'_1 = T(1) \\ t(i-1) \times S'_{t(i-1)} &\subset Q'_i \subset T(i), \ \text{si } 1 \leqslant i < p, \\ t(p-1) \times S_{t(p-1)} &= t(p-1) \times \mathbb{N} \subset Q_p \subset T \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

   siendo
$$|Q'_1| = |S'_{t(i-1)}| = |S_{t(p-1)}| = \infty,$$
   lo que demuestra que $T$ es un conjunto dominante, tal que, por construcción, para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ el conjunto $B_t$ no tiene la propiedad $\mathfrak{P}$ en tanto que $B_{t(i)}$ tiene la propiedad $\mathfrak{P}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, p-1$, puesto que $t \in Q_p$ y $t(i) = (t_1, t_2, \ldots, t_i) \in Q'_i$, si $1 \leqslant i < p$.

**Segunda parte de la demostración: Comprobación de que $T$ es un $NV$ árbol.**

1. $T$ no contiene cadenas infinitas, pues si $(t^n)_n$ fuese una sucesión de elementos de $T$ tal que

$$\emptyset \neq t^n(n) = t^{n+1}(n)$$

   para cada $n \in \mathbb{N}$, se tendría que $\emptyset \neq t^{n+1}(n+1)$ implica que

$$t^{n+1}(n) \in Q'_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si se define $u^n := t^{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(u^n := t^{n+1})_n$ es una cadena infinita tal que

$$u^n(n) \in Q'_n.$$

Si $(s_p)_p$ es la sucesión de números naturales tal que

$$(s_1, s_2, \ldots, s_p) := u^p(p)$$

se tiene que $(B_{s_1,s_2,\ldots,s_n})_n$ es una cadena infinita de $\mathcal{B}$ formada por conjuntos que tienen la propiedad $\mathfrak{P}$, lo que es una contradicción.

2. Para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ se tiene por (3.2.1) que

$$t(p-1) \times \mathbb{N} \subset Q_p \subset T,$$

de lo que se deduce que la longitud de cada extensión de $t(p-1)$ en $T$ es $p$. Además $t \in Q_p$ y $t(i) = (t_1, t_2, \ldots, t_i) \in Q'_i$, si $1 \leqslant i < p$, por lo que

$$\{t(i) : 1 \leqslant i \leqslant p\} \cap T = \{t(p)\} = \{t\}.$$

Por tanto, $T$ es un árbol $NV$. ∎

## 3.3 Conjuntos $\Omega$-profundamente no acotados y árboles $NV$.

El objetivo de esta sección es el Corolario 64, que es la parte esencial del primer proceso inductivo que se utiliza en la demostración del Teorema 65, donde se da la primera prueba directa de que cualquier $\sigma$-álgebra de conjuntos tiene la propiedad $wN$, sin utilizar otras propiedades de tipo Nikodym más débiles de las $\sigma$-álgebras.

El Corolario 64 es muy similar a la Proposición 10 de [16], si bien en esta tesis se presenta después de las Proposiciones 61, 62 y 63, que, además de simplificar la comprensión del Corolario, suponen la preparación natural a la obtención del Teorema 90, donde se demuestra que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$, que es el resultado original que se nos propuso como uno de los objetivos principales de esta tesis.

Cuando corresponde se hace referencia a resultados de [16, Proposición 10], por lo que algunas de las demostraciones de esa sección se podían haber evitado. No obstante, se ha optado por incluir todas las demostraciones por completitud y para evitar, como mínimo, el esfuerzo de adaptación de notación. Además, creemos que se aportan simplificaciones significativas en las demostraciones que presentamos.

**Proposición 61** ([16, Proposición 4]). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\Omega$ y supongamos que $(\mathcal{B}_m)_m$ es una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathcal{A}$ tales que*

$$\mathcal{B}_m \textit{ no tiene la propiedad } N\textit{, para cada } n \in \mathbb{N} \textit{ y}$$

$$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \cup_m \mathcal{B}_m\}} = L(\mathcal{A}).$$

*Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geqslant n_0$ existe en* $\operatorname{ba}(\mathcal{A})$ *un subconjunto equilibrado $M_m$ que tiene estas dos propiedades:*

1. *$M_m$ es $\Omega$-pr no acotado en* $(\operatorname{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$.

2. *$M_m$ es puntualmente acotado en $\mathcal{B}_m$.*

*Esta proposición se verifica, en particular, si $\cup_m \mathcal{B}_m = \mathcal{A}$ o si $\cup_m \mathcal{B}_m$ tiene la propiedad $N$.*

*Demostración.* Dividiremos la demostración en dos casos:

1. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ la codimensión de $\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\}}$ en $L(\mathcal{A})$ es infinita, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que el conjunto equilibrado
$$M_m := (\operatorname{absco}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\})^\circ$$
es puntualmente acotado en $\mathcal{B}_m$ y, por [17, 20.8.(5)],
$$M_m^\circ = \overline{\operatorname{absco}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\}},$$

por lo que de

$$\operatorname{span} M_m^\circ = \operatorname{span} \overline{\operatorname{absco}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\}} \subset \overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\}}$$

se deduce que $\operatorname{span}\{M_m^\circ\}$ tiene codimensión infinita en $L(\mathcal{A})$. Por la condición 1 de la Proposición 37 se deduce que $M_m$ es $\Omega$-pr no acotado en $(\operatorname{ba}(A), |\cdot|)$. En este caso se tiene probada la proposición con $n_0 = 1$.

2. Supongamos que existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que la codimensión de

$$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_p\}}$$

en $L(\mathcal{A})$ sea el número finito $q > 0$. Entonces de la hipótesis

$$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \cup_m \mathcal{B}_m\}} = L(\mathcal{A})$$

se deduce que

$$\operatorname{span}\{e_C : C \in \cup_m \mathcal{B}_m\} \not\subset \overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_p\}},$$

por lo que existe

$$D \in \mathcal{B}_{p+m_1}, \quad m_1 \in \mathbb{N},$$

tal que $e_D \notin \overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_p\}}$, lo que implica que la codimensión de

$$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_{p+m_1}\}}$$

en $L(\mathcal{A})$ es menor o igual a $q-1$. Repitiendo $q$ veces este razonamiento se obtiene un número natural $n_0$ tal que

$$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_{n_0}\}} = L(\mathcal{A}),$$

por lo que

$$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\}} = L(\mathcal{A}) \quad \text{para cada } m \geqslant n_0.$$

Fijemos un valor de $m \geqslant n_0$. De la Proposición 25 y de que $\mathcal{B}_m$ no tiene la propiedad $N$ se deduce que existe en $(\operatorname{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$

un subconjunto equilibrado $M_m$ no acotado en $(\mathrm{ba}(A), |\cdot|)$ y que es puntualmente acotado en $\mathcal{B}_m$. Por el Lema 38 se tiene que

$$\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\} \subset \operatorname{span} M_m^\circ$$

por lo que de

$$L(\mathcal{A}) = \overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \mathcal{B}_m\}} \subset \overline{\operatorname{span} M_m^\circ} \subset L(\mathcal{A})$$

se deduce que

$$\overline{\operatorname{span} M_m^\circ} = L(\mathcal{A})$$

y entonces la condición 2 de la Proposición 37 implica que $M_m$ es Ω-pr no acotado en $(\mathrm{ba}(A), |\cdot|)$, lo que prueba la proposición.

Esta proposición se verifica trivialmente en los dos casos siguientes:

- Si $\cup_m \mathcal{B}_m = \mathcal{A}$, pues entonces

  $$\operatorname{span}\{e_C : C \in \cup_m \mathcal{B}_m\} = L(\mathcal{A}),$$

  luego

  $$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \cup_m \mathcal{B}_m\}} = L(\mathcal{A}).$$

- Si la $\cup_m \mathcal{B}_m$ tiene la propiedad $N$, pues por la Proposición 28 se tiene que

  $$\overline{L(\cup_m \mathcal{B}_m)} = L(\mathcal{A}),$$

  luego

  $$\overline{\operatorname{span}\{e_C : C \in \cup_m \mathcal{B}_m\}} = L(\cup_m \mathcal{B}_m) = L(\mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

El caso particular $\cup_m \mathcal{B}_m = \mathcal{A}$ de esta Proposición 61 es el Teorema 1 de [30].

**Proposición 62.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos y sea*

$$\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : p, m_1, m_2, \ldots, m_p \in \mathbb{N}\}$$

*una malla creciente en $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}$ no contiene cadenas infinitas formadas por elementos con la propiedad $N$ entonces existe un $NV$ árbol $T$ tal que para cada $t \in T$ existe en $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ un subconjunto equilibrado $M_t$ que tiene estas dos propiedades:*

1. *$M_t$ es $\Omega$-pr no acotado en* $(\mathrm{ba}(A), |\cdot|)$.

2. *$M_t$ es puntualmente acotado en $\mathcal{B}_t$.*

*Demostración.* Si cada uno de los conjuntos de la sucesión creciente $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ no tiene la propiedad $N$, aplicando la Proposición 61 en el caso $\cup_{m_1}\mathcal{B}_{m_1} = \mathcal{A}$, se deduce la existencia de $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m_1 \geqslant n_1$ existe en $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ un subconjunto equilibrado $M_{m_1}$ que es $\Omega$-pr no acotado y puntualmente acotado en $\mathcal{B}_{m_1}$. Por tanto, se cumple la proposición con el $NV$ árbol trivial $T := \{m_1 \in \mathbb{N} : m_1 \geqslant n_1\}$.

Si alguno de los conjuntos de la sucesión $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ tiene la propiedad $N$ entonces por el caso 2 de la Proposición 60 existe un $NV$ árbol no trivial $T_1$ tal que para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T_1$ sucede que

$$t(p-1) \times \mathbb{N} \subset T_1$$

$$\mathcal{B}_t \text{ no tiene la propiedad } N,$$

y

$$\mathcal{B}_{t(i)} \text{ tiene la propiedad } N,$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Aplicando la Proposición 61 a la sucesión creciente $(\mathcal{B}_{t(p-1)\times m_p})_{m_p}$, lo que es posible debido a que su unión

$$\bigcup_{m_p} \mathcal{B}_{t(p-1)\times m_p} = \mathcal{B}_{t(p-1)}$$

tiene la propiedad $N$, se deduce la existencia de $n_p(t) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $t(p-1) \times m$, con $m \geqslant n_p(t)$ existe en $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ un subconjunto equilibrado $M_{t(p-1)\times m}$ que es $\Omega$-pr no acotado en $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ y puntualmente acotado en $\mathcal{B}_{t(p-1)\times m}$. Por tanto el $NV$ árbol $T$ obtenido al suprimir de $T_1$ los elementos $t(p-1) \times \{1, 2, \ldots, n_p(t) - 1\}$, para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T_1$, verifica la proposición. ∎

**Proposición 63** ([16, Proposiciones 9 y 10]). *Sean $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\}$ un subconjunto de elementos disjuntos dos a dos de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$, $T$ un árbol $NV$ y $\{M_t : t \in T\}$ una familia de subconjuntos equilibrados de* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *que son $B$-pr no acotados. Entonces para cada subconjunto finito $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$ de $T$ y para cada número real positivo $\alpha$ existen:*

- *una partición* $\{Q_{r+1}, B\backslash Q_{r+1}\}$ *de* $B$ *formada por elementos del álgebra* $\mathcal{A}$*,*
- *una medida* $\mu_1 \in M_{t^1}$ *y*
- *un* $NV$ *árbol* $T_1$ *contenido en* $T$ *tal que* $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset T_1$*,*

*que verifican:*

1. $\sum\{|\mu_1(Q_i)| : 1 \leqslant i \leqslant r\} \leqslant 1$ *y* $|\mu_1(Q_{r+1})| > \alpha$*,*
2. *los conjuntos de* $\{M_t : t \in T_1\}$ *son* $(B\backslash Q_{r+1})$*-pr no acotados.*

*Demostración.* Supongamos que $t^j := (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j)$, para $1 \leqslant j \leqslant k$, y sea

$$q := 2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j.$$

Al aplicar el Corolario 42 a $B$, $\alpha$, $q$ y $M_{t^1}$ se obtiene:

- Una partición $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ de $B$ formada por elementos de $\mathcal{A}$
- y un conjunto de medidas $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\} \subset M_{t^1}$ tales que para $k = 1, 2, \ldots, q$,

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_k(Q_i)| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad |\lambda_k(C_k)| > \alpha. \tag{3.3.1}$$

**Ahora vamos a aplicar reiteradamente la Proposición 40 a la partición** $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ **de** $B$ **para seleccionar un árbol** $NV$ **contenido en** $T$**.** Esta proposición implica que si $M$ es un subconjunto de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ que es $B$-pr no acotado existe $i_M \in \{1, 2, \ldots, q\}$ tal que $M$ es $C_{i_M}$-pr no acotado. Además algo parecido sucede para una familia $\{M_u : u \in U\}$ de subconjuntos de $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ que sean $B$-pr no acotados cuando $U$ es un árbol $NV$, pues si

$$V_i := \{u \in U : M_u \text{ es } C_i\text{-pr no acotado}\},$$

para $1 \leqslant i \leqslant q$, se tiene que $U = \cup_{1 \leqslant i \leqslant q} V_i$ y, entonces la Proposición 56 asegura que existe $i_0$, con $1 \leqslant i_0 \leqslant q$, tal que $V_{i_0}$ contiene un subconjunto $U_{i_0}$ que es un árbol $NV$. Por tanto:

– Al ser $T$ un árbol $NV$ y $\{M_t : t \in T\}$ una familia de subconjuntos de ba$(\mathcal{A})$ que son $B$-pr no acotados se deduce que existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, q\}$ y que existe un $NV$ árbol $T_{i_0}$, contenido en $T$, tales que los conjuntos de

$$\{M_t : t \in T_{i_0}\} \text{ son } C_{i_0}\text{-pr no acotados.}$$

– Para cada $t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0}$, con $1 \leqslant j \leqslant k$, el conjunto $M_{t^j}$ es $B$-pr no acotado, por lo que existe $C_{i^j}$, con $i^j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, tal que

$$\text{cada } M_{t^j} \text{ es } C_{i^j}\text{-pr no acotado}$$

– Además, si para $p_j > 1$ sucede para cada sección $t^j(m-1)$ de $t^j$, con $2 \leqslant m \leqslant p_j$, que el conjunto

$$W_m^j := \{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t^j(m-1) \times v \in T\}$$

es un árbol $NV$ y que

$$\{M_{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times w} : w \in W_m^j\}$$

es una familia de subconjuntos de ba$(\mathcal{A})$ que son $B$-pr no acotados, por lo que existe $i_m^j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ y un $NV$ árbol $V_m^j$ contenido en $W_m^j$ tal que los conjuntos de la familia

$$\{M_{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times v} : v \in V_m^j\} \text{ son } C_{i_0}\text{-pr no acotados.}$$

Por construcción, el subconjunto $T_1$ del $NV$-árbol $T$ formado por la unión los subconjuntos seleccionados en los tres pasos anteriores, es decir, $T_{i_0}$ y los conjuntos

$$\{t^j\} \cup \{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times V_m^j : 2 \leqslant m \leqslant p_j\},$$

cuando el índice $j$ verifica estas dos condiciones

$$1 \leqslant j \leqslant k \qquad \text{y} \qquad t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0},$$

es un conjunto dominante de $T$, luego por el Lema 54 se deduce que $T_1$ es un árbol $NV$, que contiene a $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$.

**Para terminar la demostración vamos a determinar $Q_{r+1}$ y $\mu_1$, seleccionando uno de los conjuntos de la partición $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ de $B$ y una de las medidas del conjunto** $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$, para lo que formamos el conjunto

$$D := C_{i_0} \cup [\cup\{C_{i^j} \cup C_{i^j_m} : 2 \leqslant m \leqslant p_j,\ t^j \notin T_{i_0},\ 1 \leqslant j \leqslant k\}].$$

y observamos que, por la construcción realizada, los conjuntos de $\{M_t : t \in T_1\}$ son $D$-pr no acotados, pues cada $M_t$ es pr no acotado respecto a alguno de los conjuntos cuya unión es $D$. Al ser menor o igual a $q-1$ el número de los conjuntos cuya unión es $D$ se deduce que existe $C_h$, $1 \leqslant h \leqslant q$, tal que $D \subset B \backslash C_h$, luego

$$\text{los conjuntos de } \{M_t : t \in T_1\} \text{ son } B\backslash C_h\text{-pr no acotados.}$$

Por tanto, considerando $k := h$ en (3.3.1) se deduce esta proposición, definiendo $Q_{r+1} := C_h$ y $\mu_1 := \lambda_h$. ∎

**Corolario 64** ([16, Proposición 10])**.** *Sea $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\}$ un subconjunto de elementos disjuntos dos a dos de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$ y $\{M_t : t \in T\}$ una familia de subconjuntos absolutamente convexos de* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *que son $B$-pr no acotados y cuyo conjunto de índices $T$ es un árbol $NV$. Sea, además, $\alpha$ un número real positivo y $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$ un subconjunto finito de $T$. Entonces existen:*

- *una partición $\{Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_{r+k}, B\backslash \cup_{1\leqslant j\leqslant k} Q_{r+j}\}$ de $B$ formada por elementos del álgebra $\mathcal{A}$,*
- *$k$ medidas $\mu_j \in M_{t^j}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, y*
- *un $NV$ árbol $T^*$ contenido en $T$ tal que $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset T^*$,*

*que verifican:*

1. *$\sum\{|\mu_j(Q_i)| : 1 \leqslant i \leqslant r\} \leqslant 1$ y $|\mu_j(Q_{r+j})| > \alpha$, para cada $1 \leqslant j \leqslant k$,*

*2. los conjuntos de* $\{M_t : t \in T^*\}$ *son* $(B \backslash \cup_{1 \leqslant j \leqslant k} Q_{r+j})$*-pr no acotados.*

*Demostración.* Es suficiente con aplicar $k$ veces la Proposición 63 utilizando, sucesivamente, los subconjuntos finitos

$$\begin{aligned} &\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}, \\ &\{t_2, t_3, \ldots, t_1\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{y} \\ &\{t_k, t_1, \ldots, t_{k-1}\}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.4 La propiedad $wN$ en $\sigma$-álgebras.

El objetivo de esa sección es probar el Teorema 65 que nos dice que en cada malla creciente definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ existe una cadena infinita formada por conjuntos que tienen la propiedad $wN$.

Al combinar este Teorema con nuestra Proposición 50 se obtiene en el Corolario 66 que, hablando sin precisión, "*casi todas*" las cadenas infinitas de una malla creciente en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ están formadas por conjuntos que tienen la propiedad $wN$.

Una propiedad análoga se obtiene en el Corolario 67 con subconjuntos de mallas crecientes obtenidos al seleccionar los conjuntos de la malla cuyos índices pertenecen a un $NV$-árbol.

En la demostración del Teorema 65 se utiliza la sucesión

$$(i_n)_n := (1, 1, 2, 1, 2, 3, \ldots),$$

formada por las primeras componentes de la sucesión

$$\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), \ldots\}$$

obtenida al escribir los elementos de $\mathbb{N}^2$ siguiendo el orden diagonal.

**Teorema 65.** *Sea* $\mathcal{S}$ *una* $\sigma$*-álgebra de subconjuntos de un conjunto* $\Omega$*.* $\mathcal{S}$ *tiene la propiedad* $wN$*.*

*Demostración.* Haremos la demostración por reducción al absurdo, suponiendo que existe una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ que tiene una malla creciente $\{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : p, m_1, m_2, \ldots, m_p \in \mathbb{N}\}$ sin cadenas infinitas formadas por conjuntos con la propiedad $N$.

Entonces la Proposición 62 implica la existencia de un $NV$ árbol $T$ tal que para cada $t \in T$ existe un subconjunto equilibrado $M_t$ de $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ que tiene estas dos propiedades:

$$\begin{aligned} &M_t \text{ es } \Omega\text{-pr no acotado y} \\ &M_t \text{ es puntualmente acotado en } \mathcal{B}_t. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

**La primera etapa de esta demostración es un proceso inductivo** que determina:

- Un árbol $NV$ numerable, $\{t^i : i \in \mathbb{N}\}$, que es un subconjunto de $T$,
- una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(k_j)_j$, con $k_1 = 1$,
- una familia $\{B_{i,j} : (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \leqslant k_j\}$ formada por elementos disjuntos dos a dos de la $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$,
- y una familia de medidas $\{\mu_{i,j} \in M_{t^i} : (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \leqslant k_j\}$.

de manera que para cada $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, con $i \leqslant k_j$, se tienen las desigualdades:

$$\sum_{s,v} \{|\mu_{i,j}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v,\ 1 \leqslant v < j\} < 1 \quad \text{para cada } j > 1,$$

y

$$|\mu_{i,j}(B_{i,j})| > j \quad \text{para cada } j \geqslant 1$$

Para comenzar la inducción se selecciona un elemento $t^1 \in T$ y se aplica el Corolario 64 en el caso trivial de que el subconjunto $\{Q_1, \ldots, Q_r, B\}$ del álgebra $\mathcal{A}$ es $\{B\}$, con $B := \Omega$, y $\alpha = 1$. Se obtiene $B_{11} \in \mathcal{S}$, $\mu_{11} \in M_{t^1}$ y un $NV$ árbol $T_1$, tales que:

1. $|\mu_{11}(B_{11})| > 1$,
2. los conjuntos de $\{M_t : t \in T_1\}$ son $(\Omega \backslash B_{11})$-pr no acotados,
3. y $\{t^1\} \subset T_1$.

Terminamos el primer paso de la inducción definiendo

$$\begin{aligned} k_1 &:= 1, \\ S^1 &:= \{t^1\} \qquad \text{y} \\ B^1 &:= B_{11}. \end{aligned}$$

Supongamos que en las siguientes $n-1$ etapas del proceso inductivo se han obtenido

$$\begin{aligned} n \text{ números naturales}, &\ \ k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n, \\ n \text{ árboles } NV, &\ \ T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots \supset T_n, \\ &\{t^1, t^2, \ldots, t^{k_n}\} \subset T_n, \\ \text{las medidas } &\ \{\mu_{i,j} \in M_{t^i} : 1 \leqslant i \leqslant k_j, 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ \text{y el subconjunto } &\{B_{i,j} : 1 \leqslant i \leqslant k_j, 1 \leqslant j \leqslant n\} \subset \mathcal{S} \end{aligned}$$

tales que

$$B_{i,j} \cap B_{k,l} = \emptyset, \text{ si } (i,j) \neq (k,l),$$

de manera que para cada $1 < j \leqslant n$ se define

$$\begin{aligned} B^j &:= \cup\{B_{s,v} : s \leqslant k_v, 1 \leqslant v \leqslant j\} \\ S^j &:= \{t^i : i \leqslant k_j\} \subset T_j \end{aligned}$$

y se tiene:

1. Para cada $i \leqslant k_j$ y $1 < j \leqslant n$,

$$\sum_{s,v}\{|\mu_{i,j}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v, 1 \leqslant v < j\} < 1,$$

2. si $1 \leqslant j \leqslant n$ se tiene que
$$|\mu_{i,j}(B_{i,j})| > j$$
y los conjuntos de
$$\{M_t : t \in T_j\}$$
son $(\Omega \backslash B^j)$-pr no acotados,

3. y para cada $1 < j \leqslant n$ se tiene que el conjunto
$$S^j \text{ es dominante respecto a } S^{j-1}.$$

Para terminar el proceso inductivo seleccionamos un subconjunto
$$\{t^{k_n+1}, \ldots, t^{k_{n+1}}\} \subset T_n$$
de manera que
$$S^{n+1} = \{t^i : i \leqslant k_{n+1}\} \text{ sea dominante respecto a } S^n.$$

Al aplicar el Corolario 64 a:

- La familia de la $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ formada por $\Omega \backslash B^n$ y por los elementos $B_{s,v}$, con $s \leqslant k_v$ y $1 \leqslant v \leqslant n$,
- la familia $\{M_t : t \in T_n\}$ de subconjuntos equilibrados de ba$(\mathcal{A})$ que, por el proceso inductivo, son $\Omega \backslash B^n$-pr no acotados,
- y al número $\alpha = n + 1$ y al subconjunto finito $S^{n+1}$ de $T_n$,

se obtiene
$$\begin{array}{c}
\text{un } NV \text{ árbol } T_{n+1} \subset T_n \\
\text{las medidas } \mu_{i,n+1} \in M_{t^i},\ i \leqslant k_{n+1}, \\
\text{y los conjuntos } B_{i,n+1} \in \mathcal{A},\ i \leqslant k_{n+1},
\end{array}$$
tales que cada $B_{i,n+1} \subset \Omega \backslash B^n$ y $B_{i,n+1} \cap B_{i',n+1} = \emptyset$ si $i \neq i'$, de manera que si
$$B^{n+1} := B^n \cup \{\cup_{1 \leqslant i \leqslant k_{n+1}} B_{i,n+1}\}$$
se tiene que:

1. Para cada $i \leqslant k_{n+1}$

$$\sum_{s,v}\{|\mu_{i,n+1}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v,\ 1 \leqslant v < n+1\} < 1$$

y

$$|\mu_{i,n+1}(B_{i,n+1})| > n+1,$$

2. los conjuntos de la familia

$$\{M_t : t \in T_{n+1}\}$$

son $(\Omega \backslash B^{n+1})$-pr no acotados, y

$$S^{n+1} \subset T_{n+1}.$$

Con ello termina el proceso inductivo, pues aplicando la Proposición 55 se deduce que el subconjunto numerable $\{t^i : i \in \mathbb{N}\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} S^n$ de $T$ es un árbol $NV$, pues $S^{n+1}$ es dominante respecto a $S^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

**La segunda etapa de esta demostración es un nuevo proceso inductivo para determinar una sucesión $(j_n)_n$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que junto con la sucesión $(i_n)_n := (1,1,2,1,2,3,\ldots)$ tiene la propiedad de que para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que**

$$\sum_m \{|\mu_{i_n,j_n}(B_{i_m,j_m})| : n < m\} < 1.$$

Este segundo proceso inductivo está basado en la observación de que si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, la medida acotada $\mu_{i,j} \in \mathrm{ba}(\mathcal{S})$ verifica la desigualdad

$$|\mu_{i,j}|(\Omega) < s \in \mathbb{N},$$

y si

$$\{N_u, 1 \leqslant u \leqslant s\}$$

es una partición de un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ en $s$ subconjuntos infinitos disjuntos se tiene que los conjuntos

$$B_u := \cup\{B_{s,v} : s \leqslant k_v, v \in N_u\} \in \mathcal{S},$$

con $1 \leqslant u \leqslant s$, verifican la desigualdad

$$\sum_u \{|\mu_{i,j}|(B_u) : 1 \leqslant u \leqslant s\} \leqslant |\mu_{i,j}|(\Omega) < s,$$

por lo que existe $u'$, con $1 \leqslant u' \leqslant s$, tal

$$|\mu_{i,j}|(B_{u'}) < 1,$$

luego

$$\sum_{s,v} \{|\mu_{i,j}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v,\ v \in N_{u'}\} \leqslant |\mu_{i,j}|(B_{u'}) < 1.$$

Para hacer la inducción se elige $j_1 = 1$ y se aplica la observación anterior a $(i_1, j_1) = (1, 1)$ y al conjunto infinito $\mathbb{N}_{i_1 j_1} := \mathbb{N} \backslash \{j_1\}$, con lo que se obtiene un subconjunto infinito $N^{(1)} \subset \mathbb{N} \backslash \{1\}$ tal que

$$\sum_{s,v} \{|\mu_{i_1,j_1}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v,\ v \in N^{(1)}\} < 1.$$

Supongamos que, por inducción, se ha obtenido:

- Una sucesión finita creciente $1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_n$ de números naturales.

- Una sucesión finita decreciente de subconjuntos infinitos y decrecientes $N^{(1)} \supset N^{(2)} \supset \cdots \supset N^{(n)}$ de números naturales tales que

  $$j_1 \in \mathbb{N} \backslash N^{(1)},$$

  $$j_l \in N^{(l-1)} \backslash N^{(l)}$$

  para $2 \leqslant l \leqslant n$, y

  $$\sum_{s,v} \{|\mu_{i_l,j_l}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v,\ v \in N^{(l)}\} < 1 \qquad (3.4.2)$$

  para $1 \leqslant l \leqslant n$, donde $i_l \leqslant k_{j_l},\ \ l \in \mathbb{N}$, pues,

– de $(i_n)_n = (1, 1, 2, 1, 2, 3, \dots)$ se deduce, por construcción, que $i_l \leqslant l$, para cada $l \in \mathbb{N}$,

– por ser la sucesión $(j_n)_n$ creciente se tiene que $l \leqslant j_l$

– y, además, al ser la sucesión $(k_n)_n$ creciente tenemos que $j_l \leqslant k_{j_l}$,

por lo que los subíndices $(i_l, j_l)$ de $\mu_{i_l j_l}$ en 3.4.2 verifican la obligada relación $i_l \leqslant k_{j_l}$.

Entonces si $j_{n+1}$ es el primer elemento de $N^{(n)}$ se tiene, por la observación indicada al comenzar esta inducción, que existe un subconjunto infinito $N^{(n+1)} \subset N^{(n)} \backslash \{j_{n+1}\}$ tal que

$$\sum_{s,v} \left\{ \left| \mu_{i_{n+1}, j_{n+1}}(B_{s,v}) \right| : s \leqslant k_v,\ v \in N^{(n+1)} \right\} < 1,$$

con lo que se completa la inducción.

**La tercera etapa de la demostración se reduce a obtener una contradicción después de seleccionar algunos de los conjuntos obtenidos**. Los dos procesos inductivos anteriores nos han proporcionado una sucesión

$$(B_{i_n,j_n} \in \mathcal{S},\ \mu_{i_n,j_n} \in M_{t^{i_n}})_n,$$

tal que

$$B_{i_m,j_m} \bigcap B_{i_n,j_n},\ \text{si } m \neq n,$$

$$\sum_s \{|\mu_{i_n,j_n}(B_{i_s j_s})| : s < n\} < 1 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

$$|\mu_{i_n,j_n}(B_{i_n,j_n})| > j_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_m \{|\mu_{i_n,j_n}(B_{i_m,j_m})| : n < m\} < 1 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

y

$$\{t^1, t^2, \dots, t^m, \dots\} \quad \text{es un árbol } NV,$$

por lo que la Proposición 53 implica que

$$\mathcal{S} = \bigcup \{\mathcal{B}_{t^m} : m \in \mathbb{N}\}.$$

De esta igualdad y de la relación

$$H := \bigcup \{B_{i_s,j_s} : s = 1, 2, \ldots\} \in \mathcal{S}$$

se deduce la existencia de un $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$H \in \mathcal{B}_{t^r}. \tag{3.4.3}$$

Por otra parte, la sucesión

$$(i_n)_n = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, \ldots) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, \ldots)$$

contiene infinitos términos iguales al número natural $r$, por lo que existe una sucesión estrictamente creciente $(n_p)_p$ tal que $i_{n_p} = r$, para cada $p \in \mathbb{N}$, lo que implica que

$$\{\mu_{i_{n_p},j_{n_p}} : p \subset \mathbb{N}\} = \{\mu_{r,j_{n_p}} : p \subset \mathbb{N}\} \subset M_{t^r}. \tag{3.4.4}$$

Por (3.4.1) se tiene que para cada $t \in T$ el conjunto $M_t$ está puntualmente acotado en $\mathcal{B}_t$. En particular, $M_{t^r}$ está puntualmente acotado en $\mathcal{B}_{t^r}$, luego de (3.4.3) y de la inclusión (3.4.4) se deduce que

$$\sup\left\{\left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(H)\right| : p \in \mathbb{N}\right\} < \infty. \tag{3.4.5}$$

Por otra parte, para cada $p > 1$ el conjunto $H$ es la unión de los conjuntos

$$C_p := \cup_s\{B_{i_s,j_s} : s < n_p\}$$

$$B_{i_{n_p},j_{n_p}}$$

y

$$D_p := \cup_s\{B_{i_s,j_s} : n_p < s\}$$

que, por la construcción realizada, verifican las desigualdades:

$$\left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(C_p)\right| < 1,$$

$$\left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(B_{i_{n_p},j_{n_p}})\right| > j_{n_p} > n_p$$

y

$$\left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(D_p)\right| < 1,$$

de lo que se deduce la desigualdad

$$\left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(H)\right| > -\left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(C_p)\right| + \left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(B_{i_{n_p}j_{n_p}})\right| - \left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}\right|(D_p) > j_{n_p} - 2$$

que implica que

$$\lim_p \left|\mu_{i_{n_p},j_{n_p}}(H)\right| = \infty,$$

en contradicción con (3.4.5). ∎

El siguiente Corolario 66 afirma que si un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $wN$ y

$$\{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

es una malla creciente en $\mathcal{B}$, "*casi todos*" los conjuntos de la malla tienen la propiedad $wN$.

**Corolario 66.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto $\Omega$, sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$ que tiene la propiedad $wN$ y sea*

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

*una malla creciente en $\mathcal{B}$. Existen*

- *un número natural $q_1$*
- *y una sucesión de funciones $q_i(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1})$, $i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, con valores en $\mathbb{N}$, tales que $q_i(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1})$ está definida cuando existen $n_j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j$, tales que*

$$p_1 = q_1 + n_1 - 1$$

*y para $2 \leqslant j < i$*

$$p_j = q_j(p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}) + n_j - 1$$

*tales que la familia $\mathcal{C}$ formada por los $\mathcal{B}_{p_1,p_2,\ldots,p_h}$, tales que*

$$\begin{aligned} & p_1 = q_1 + n_1 - 1, \\ & p_2 = q_2(p_1) + n_2 - 1, \\ & \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ & p_h = q_h(p_1, p_2, \ldots, p_{h-1}) + n_h - 1 \end{aligned}$$

*con $(n_1, n_2, \ldots, n_h) \in \cup_s \mathbb{N}^s$ es el subconjunto de $\mathcal{B}$ formado por todos los conjuntos de $\mathcal{M}$ que tienen la propiedad $wN$.*

Si

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n_1} &:= \mathcal{B}_{q_1+n_1-1} \\ \mathcal{C}_{n_1,n_2} &:= \mathcal{B}_{q_1+n_1-1,q_2(p_1)+n_2-1} \\ \ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_p} &:= \mathcal{B}_{q_1+n_1-1,q_2(p_1)+n_2-1,\ldots,q_h(p_1,p_2,\ldots,p_{h-1})+n_h-1} \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C}$ es la malla creciente

$$\mathcal{C} := \{\mathcal{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_p} : (n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

y, en lo sucesivo, diremos que $\mathcal{C}$ es la malla creciente contenida en $\mathcal{M}$ formada por los conjuntos que tienen la propiedad $wN$.

*Demostración.* Por la Proposición 50 con $\mathfrak{P} = N$ se tiene que las propiedades $wN$ y $s(wN)$ son equivalentes en $\mathcal{B}$. Por tanto existe un primer elemento $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{B}_{q_1} \text{ tiene la propiedad } wN.$$

Sea $p_1 := q_1 + n_1 - 1$, con $n_1 \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 59

$$\mathcal{B}_{p_1} \text{ tiene la propiedad } wN,$$

luego por la Proposición 50 y por la igualdad

$$\mathcal{B}_{p_1} = \cup_{m_2} B_{p_1 m_2}$$

existe un primer número natural $q_2(p_1)$ tal que

$$\mathcal{B}_{p_1,q_2(p_1)} \text{ tiene la propiedad } wN.$$

Sea $p_2 := q_2(p_1) + n_2 - 1$, con $n_2 \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 59

$$\mathcal{B}_{p_1,p_2} \text{ tiene la propiedad } wN$$

y, de nuevo por la Proposición 50 y por la igualdad

$$\mathcal{B}_{p_1,p_2} = \cup_{m_3} \mathcal{B}_{p_1,p_2,m_3}$$

existe un primer número natural $q_3(p_1, p_2)$ tal que

$$\mathcal{B}_{p_1,p_2,q_3(p_1,p_2)} \text{ tiene la propiedad } wN.$$

Por su sencillez se omite la formalización del proceso inductivo que proporciona la demostración. ∎

Las mismas ideas de la demostración del Corolario 66 nos permiten obtener el Corolario 67.

**Corolario 67.** *Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ tal que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad $wN$. Si $\{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \cup_{s\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^s\}$ es una malla creciente en $\mathcal{B}$ y $T$ es un $NV$ árbol se tiene que el subconjunto $T'$ de $T$ definido por*

$$T' := \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in T : \mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_p} \textit{ tiene la propiedad } wN\}$$

*es un $NV$ árbol.*

*Demostración.* Los Corolarios 59 y 51 nos dicen que la propiedad $wN$ es creciente y equivalente a la propiedad $s(wN)$ en

$$\mathcal{B} = \bigcup_{m_1} \{\mathcal{B}_{m_1} : m_1 \in T(1)\}.$$

Por tanto, si $m_1'$ es el primer elemento de $T(1)$ tal que $\mathcal{B}_{m_1'}$ tiene la propiedad $wN$ se tiene que el conjunto

$$\{n_1 \in T(1) : \mathcal{B}_{n_1} \text{ tiene la propiedad } wN\}$$

es igual al conjunto
$$\{n_1 \in T(1) : m'_1 \leqslant n_1\}$$
pudiendo suceder uno de los dos siguientes casos:

1. $m'_1 \in T$. Entonces se define
$$W^1 := \{n_1 \in T : m'_1 \leqslant n_1\} \quad \text{y} \quad W'^1 := \emptyset,$$
y, por convenio, $W^2 = W'^2 := \emptyset$.

2. $m'_1 \in T(1)\backslash T$. En este caso escribimos
$$W^1 := \emptyset \quad \text{y} \quad W'^1 := \{n_1 \in T(1) : m'_1 \leqslant n_1\}.$$

Para cada $n_1 \in W'^1$ se tiene que
$$\mathcal{B}_{n_1} = \bigcup_{m_2} \{\mathcal{B}_{n_1,m_2} : (n_1, m_2) \in T(2)\}.$$

Aplicando de nuevo los Corolarios 59 y 51 a esta igualdad se deduce la existencia de un primer número natural $m'_2(n_1)$ tal que
$$(n_1, m'_2(n_1)) \in T(2) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{n_1 m'_2(n_1)} \text{ tiene la propiedad } wN.$$

Resulta pues que el conjunto
$$\{(n_1, n_2) \in T(2) : \mathcal{B}_{n_1 n_2} \text{ tiene la propiedad } wN\}$$
es igual al conjunto
$$\{(n_1, n_2) \in T(2) : m'_2(n_1) \leqslant n_2\},$$
pudiendo suceder uno de los siguientes casos:

1. $(n_1, m'_2(n_1)) \in T$. En este caso se define
$$W_{n_1} := \{(n_1, n_2) \in T : m'_2(n_1) \leqslant n_2\} \quad \text{y} \quad W'_{n_1} := \emptyset.$$

2. $(n_1, m'_2(n_1)) \notin T$. Ahora escribimos

$$W_{n_1} := \emptyset \quad \text{y} \quad W'_{n_1} := \{(n_1, n_2) \in T(2) : m'_2(n_1) \leqslant n_2\}.$$

Entonces se define

$$W^2 := \cup\{W_{n_1} : n_1 \in W'^1\}$$

y

$$W'^2 := \cup\{W'_{n_1} : n_1 \in W'^1\}.$$

Si $W'^2 = \emptyset$, entonces se conviene que $W^3 = W'^3 := \emptyset$.

Cuando $W'^2 \neq \emptyset$ se considera para cada $(n_1, n_2) \in W'^2$ la igualdad

$$\mathcal{B}_{n_1,n_2} = \bigcup_{m_3} \{\mathcal{B}_{n_1,n_2,m_3} : (n_1, n_2, m_3) \in T(3)\},$$

que junto a los Corolarios 59 y 51 nos asegura la existencia de un primer número natural $m'_3(n_1, n_2)$ tal que

$$(n_1, n_2, m'_3(n_1, n_2)) \in T(3)$$

y

$$\mathcal{B}_{n_1,n_2,m'_3(n_1,n_2)} \text{ tiene la propiedad } wN.$$

Entonces el conjunto

$$\{(n_1, n_2, n_3) \in T(3) : \mathcal{B}_{n_1,n_2,m_3} \text{ tiene la propiedad } wN\}$$

es igual al conjunto

$$\{(n_1, n_2, n_3) \in T(3) : m'_3(n_1, n_2) \leqslant n_3\},$$

y para cada $(n_1, n_2) \in W'^2$ pueden suceder los mismos dos casos de antes, según que el elemento $(n_1, n_2, m'_3(n_1, n_2))$ pertenezca o no a $T$.

1. Si $(n_1, n_2, m'_3(n_1, n_2)) \in T$ entonces se define

$$W_{n_1,n_2} := \{(n_1, n_2, n_3) \in T : m'_3(n_1, n_2) \leqslant n_3\} \quad \text{y} \quad W'_{n_1 n_2} := \emptyset.$$

2. Cuando $(n_1, n_2, m'_3(n_1, n_2)) \notin T$ se escribe

$$W_{n_1,n_2} := \emptyset \quad \text{y} \quad W'_{n_1,n_2} := \{(n_1, n_2, n_3) \in T(3) : m'_3(n_1, n_2) \leqslant n_3\}.$$

Igual que se hizo antes se define

$$W^3 := \cup\{W_{n_1,n_2} : (n_1, n_2) \in W'^2\}$$

y

$$W'^3 := \cup\{W_{n_1,n_2} : (n_1, n_2) \in W'^2\}.$$

Cuando $W'^3 = \emptyset$ entonces escribimos $W^4 = W'^4 := \emptyset$.

Si $W'^3 \neq \emptyset$ se repite el proceso anterior en cada $(n_1, n_2, n_3) \in W'^3$, aplicando los Corolarios 59 y 51 a la igualdad

$$\mathcal{B}_{n_1,n_2,n_3} = \bigcup_{m_4}\{\mathcal{B}_{(n_1,n_2,n_3,n_4)} : (n_1, n_2, n_3, m_4) \in T(4)\}.$$

Se omite la formalización del paso $n$ al paso $n+1$ del proceso inductivo por su sencillez.

Por la construcción realizada se tiene que el conjunto

$$T' := \cup_{n\in\mathbb{N}} W^n$$

coincide con

$$T' := \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in T : \mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_p} \text{ tiene la propiedad } wN\}.$$

Con el mismo razonamiento utilizado en el final de la primera parte de la demostración de la Proposición 60 se demuestra que $T'$ es un subconjunto dominante del $NV$ árbol $T$, luego el Lema 54 implica que $T'$ es un $NV$ árbol. ∎

En lo sucesivo diremos que $T'$ es el $NV$ árbol contenido en $T$ determinado por los subíndices de los conjuntos $B_t$, $t \in T$, que tienen la propiedad $wN$.

## 3.5 Aplicaciones

En esta sección se obtienen algunas aplicaciones del Teorema 65 y de los Corolarios 66 y 67 primero a medidas finitamente aditivas escalares y luego a medidas finitamente aditivas vectoriales.

**Proposición 68.** *Sea $\mathcal{S}$ una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$, sea*

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_i} : (m_1, m_2, \ldots, m_i) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

*una malla creciente en $\mathcal{S}$ y sea*

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i} : (m_1, m_2, \ldots, m_i) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

*la malla creciente formada por los conjuntos de $\mathcal{B}$ que tienen la propiedad wN. Cada sucesión $(\mu_r)_r$ de* ba$(\mathcal{S})$ *que sea puntualmente convergente en $\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i}$, para algún elemento de $\mathcal{C}$, es puntualmente convergente en $\mathcal{S}$.*

*Demostración.* La existencia de $\mathcal{C}$ queda asegurada por el Corolario 66.

Sea

$$(\mu_r)_r \text{ una sucesión en } \mathrm{ba}(\mathcal{S})$$

que es puntualmente convergente en $\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i}$, siendo $\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i} \in \mathcal{C}$.

Entonces la sucesión

$$(\mu_r)_r$$

es $\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i}$ puntualmente acotada. Por la Definición 23 se tiene que la propiedad $N$ de $\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i}$ implica que $\{\mu_r : r \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto acotado del espacio de Banach $(\mathrm{ba}(\mathcal{S}), |\cdot|)$, por lo que $\{\mu_r : r \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de ba$(\mathcal{S})$ que es relativamente compacto respecto a la topología $\tau_s(\mathcal{S})$, por lo que al menos tiene un punto adherente $\nu \in \mathrm{ba}(\mathcal{S})$.

Si $\xi$ es otro punto adherente de la sucesión $(\mu_r)_r$ se tiene por la condición de convergencia puntual en $\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i}$ que

$$\nu|_{L(\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i})} = \xi|_{L(\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i})}.$$

Esta igualdad y la Proposición 28 aseguran que $L(\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i})$ es un subespacio denso de $(L(\mathcal{S}), \|\cdot\|)$, por lo que se deduce que

$$\nu = \xi.$$

Por lo tanto la sucesión $(\mu_r)_r$ tiene un único punto $\tau_s(\mathcal{S})$-adherente $v$ en ba$(\mathcal{S})$, lo que unido a la $\tau_s(\mathcal{S})$-compacidad relativa del conjunto $\{\mu_r : r \in \mathbb{N}\}$ implica que $\nu$ es el $\tau_s(\mathcal{S})$-límite de la sucesión $(\mu_r)_r$ en ba$(\mathcal{S})$. ∎

**Definición 69.** *Una* medida vectorial acotada finitamente aditiva $\mu$ *definida en un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$ con valores en un espacio vectorial topológico $E(\tau)$ es una aplicación $\mu\colon \mathcal{A} \to E$ tal que $\mu(\mathcal{A})$ es un subconjunto acotado de $E$ y*

$$\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C)$$

*para cada par de subconjuntos disjuntos $B$, $C \in \mathcal{A}$.*

Utilizando (1.4.1) es inmediato demostrar que la acotación de $\mu(\mathcal{A})$ equivale a la continuidad de la aplicación lineal

$$\mu : (L(\mathcal{A}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

definida por $\mu(e_B) := \mu(B)$, para cada $B \in \mathcal{A}$.

**Definición 70.** *Un espacio localmente convexo $E(\tau)$ es un espacio $(LF)$ o un espacio $(LB)$ si es, respectivamente, el límite inductivo de una sucesión creciente $(E_m(\tau_m))_m$ de espacios de Fréchet o de Banach.*

Entonces la topología relativa $\tau_{m+1}|_{E_m}$ inducida en $E_m$ es menos fina que $\tau_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Se dice que $(E_m(\tau_m))_m$ *es una sucesión que define $E(\tau)$ con pasos $E_m(\tau_m)$*, $m \in \mathbb{N}$, y se escribe

$$E(\tau) = \sum_m E_m(\tau_m).$$

Si $\tau_{m+1}|_{E_m} = \tau_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $E(\tau)$ *es un espacio $(LF)$-estricto*, o *$(LB)$-estricto*.

De [17, Proposición 19.4(4)] se deduce que si $\mu\colon \mathcal{A} \to E(\tau)$ es una medida vectorial acotada finitamente aditiva con valores en un espacio $(LF)$-estricto $E(\tau) = \sum_m E_m(\tau_m)$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\mathcal{A})$ es un subconjunto acotado en el paso $E_n(\tau_n)$. Cuando $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra se deduce de [29, Teorema 4] que este resultado de localización es válido si $E(\tau) = \sum_m E_m(\tau_m)$ es un espacio $(LF)$, sin necesidad de imponer la condición *estricto* al límite inductivo. Este resultado de Valdivia motiva la Proposición 15 de [16], generalizada en nuestra Proposición 9 de [18] mediante la introducción de los $p$-límite inductivos introducidos en la Sección 3 de [18] y cuya definición, motivada por [17, Capítulo 7, 35.1], se recuerda a continuación. Esta definición y nuestro Corolario 66 permiten obtener la Proposición 74, que contiene y generaliza a todos los resultados citados en este párrafo.

**Definición 71.** *Una familia*

$$\{B_{m_1,m_2,\ldots,m_i} : (m_1, m_2, \ldots, m_i) \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p}\mathbb{N}^s\}$$

*de subconjuntos de un conjunto $A$ es una $p$-malla creciente en $A$ si*

1. $(B_{m_1})_{m_1}$ *es un cubrimiento creciente de $A$ y*

2. $(B_{m_1,m_2,\ldots,m_i,m_{i+1}})_{m_{i+1}}$ *es un cubrimiento creciente de $B_{m_1,m_2,\ldots,m_i}$, para cada $m_j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant i < p$.*

**Definición 72.** *Un espacio localmente convexo $E(\tau)$ es el $p$-*límite inductivo de la $p$-malla creciente

$$\mathcal{E} := \{E_t(\tau_t) : t \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p}\mathbb{N}^s\}$$

de espacios localmente convexos *si*

$$E(\tau) = \sum_{m_1} E_{m_1}(\tau_{m_1})$$

*y si para cada $t = (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \mathbb{N}^p$ y cada $1 \leqslant i < p$ se tiene que*

$$E_{m_1,m_2,\ldots,m_i}(\tau_{m_1,m_2,\ldots,m_i}) = \sum_{m_{i+1}} E_{m_1,m_2,\ldots,m_i,m_{i+1}}(\tau_{m_1,m_2,\ldots,m_i,m_{i+1}}).$$

Entonces $\mathcal{E}$ es una $p$-malla creciente que define $E(\tau)$ con pasos $E_t(\tau_t)$, $t \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p}\mathbb{N}^s$.

**Definición 73.** *Un espacio localmente convexo $E(\tau)$ es un espacio p-(LF) (o p-(LB)) si $E(\tau)$ está definido por una p-malla creciente*

$$\mathcal{E} := \{E_t(\tau_t) : t \in \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant p} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que cada $E_t(\tau_t)$, con $t \in \mathbb{N}^p$, es un espacio de Fréchet (o de Banach).*

Se dice entonces que $\mathcal{E}$ es una *p*-($LF$) (o *p*-($LB$)) malla creciente que define $E(\tau)$.

La Proposición 9 de nuestro artículo [18] es un caso particular de la siguiente Proposición 74.

**Proposición 74.** *Sea $\mu$ una medida vectorial acotada finitamente aditiva definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\Omega$ con valores en un espacio vectorial topológico $E(\tau)$. Si $\mathcal{M}$ es una malla creciente en $E$ se tiene que los conjuntos de $\mathcal{M}$ cuyas antiimágenes por $\mu$ tienen la propiedad $N$ determinan una malla creciente*

$$\{E_t : t \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

*en $E$, tal que si $\tau_t$ es una topología en $E_t$ más fina que la topología relativa $\tau|_{E_t}$ inducida por $\tau$ y tal que $E_t(\tau_t)$ es un espacio p-(LF), entonces cada p-(LF) malla creciente $\mathcal{W}$ que define $E_t(\tau_t)$ contiene una malla creciente*

$$\{F_v(\tau_v) : v \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant p} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que $\mu(\mathcal{S})$ es un subconjunto acotado en cada $F_v(\tau_v)$, con $v \in \mathbb{N}^p$.*

*Demostración.* La antiimagen mediante $\mu$ de la malla creciente $\mathcal{M}$ en $E$ es una malla creciente $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{S}$. Por el Corolario 66 los conjuntos de $\mathcal{M}'$ que tienen la propiedad $wN$ determinan una malla creciente en $\mathcal{S}$. Por tanto, los conjuntos de $\mathcal{M}$ cuya antiimagen por $\mu$ tienen la propiedad $wN$ forman una malla creciente en $E$ que representamos por $\{E_t : t \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$.

Supongamos que $E_t$ provisto con la topología $\tau_t$ verifica las hipótesis de esta Proposición y que $\mathcal{W}$ es una $p$-($LF$) malla creciente que define $E_t(\tau_t)$. La antiimagen mediante $\mu$ de la malla creciente $\mathcal{W}$ es una malla creciente $\mathcal{W}'$ en $\mu^{-1}(E_t)$. Dado que $\mu^{-1}(E_t)$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$ que tiene la propiedad $wN$ se tiene por el Corolario 66 que los conjuntos de $\mathcal{W}'$ que tienen la propiedad $wN$ determinan una malla creciente en $\mu^{-1}(E_t)$. Por tanto, los conjuntos de $\mathcal{W}$ cuya antiimagen por $\mu$ tiene la propiedad $wN$ es una $p$ malla creciente en $E_t$ que representamos por

$$\{F_v : v \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p}\mathbb{N}^s\}$$

y que tiene estas dos propiedades:

1. $\mu^{-1}(F_v)$ tiene la propiedad $wN$ para cada $v \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p}\mathbb{N}^s$.

2. $F_v$ admite una topología $\tau_v$ tal que $F_v(\tau_v)$ es un espacio de Fréchet y la topología $\tau_v$ es más fina que la topología relativa $\tau|_{F_v}$ inducida por $\tau$, para cada $v \in \mathbb{N}^p$.

Por la Proposición 28 se tiene que el espacio $(L(\mu^{-1}(F_v)), \|\cdot\|)$ es tonelado y denso en $(L(\mathcal{S}), \|\cdot\|)$.

De la continuidad de la aplicación

$$\mu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

y de que la topología $\tau_v$ es más fina que la topología relativa $\tau|_{F_v}$ se deduce que la aplicación

$$\mu|_{L(\mu^{-1}(F_v))}\colon (L(\mu^{-1}(F_v)), \|\cdot\|) \longrightarrow F_v(\tau_v)$$

tiene gráfica cerrada.

Al ser $(L(\mu^{-1}(F_v)), \|\cdot\|)$ tonelado y denso en $(L(\mathcal{S}), \|\cdot\|)$ y ser $F_v(\tau_v)$ un espacio de Fréchet se deduce de [28, Teoremas 1 y 14] que dicha aplicación

$$\mu|_{L(\mu^{-1}(F_v))}\colon (L(\mu^{-1}(F_v)), \|\cdot\|) \longrightarrow F_v(\tau_v)$$

tiene una extensión continua

$$\nu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow F_v(\tau_v). \tag{3.5.1}$$

La continuidad de la inmersión de $F_v(\tau_v)$ en $E(\tau)$ implica que la aplicación

$$\nu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

es una aplicación continua que, por construcción, verifica que

$$\nu(f) = \mu(f)$$

para cada $f \in L(\mu^{-1}(F_v))$. Por tanto, de que las aplicaciones continuas

$$\mu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

$$\nu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

coincidan en el subespacio denso $L(\mu^{-1}(F_v))$ se deduce la igualdad

$$\mu = \nu,$$

lo que junto a la continuidad de la aplicación $v$ indicada en (3.5.1) nos permite concluir que $\mu(\mathcal{S}) = \nu(\mathcal{S})$ es un subconjunto acotado de $F_v(\tau_v)$. ∎

Para generalizar la proposición anterior consideraremos un $NV$ árbol $T$ y el conjunto $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} T(s)$ formado por la unión de todas las secciones de $T$, que coincide con el conjunto

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}} T(s) := \{t(i) : t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T,\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

de todas las secciones de los elementos de $T$.

**Definición 75.** *Si $T$ es un $NV$ árbol se tiene que una familia*

$$\{B_{t(i)} : t(i) \in \bigcup_{s\in\mathbb{N}} T(s)\}$$

*de subconjuntos de un conjunto $A$ es una $NV$*-malla creciente en $A$ *si se verifican estas dos condiciones:*

*1. $(B_{m_1})_{m_1\in T(1)}$ es un cubrimiento creciente de $A$,*

2. *y para cada* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ *y para cada* $i$ *tal que* $1 \leqslant i < p$ *se verifica que*

$$(B_{t(i)\times m_{i+1}})_{t(i)\times m_{i+1}\in T(i+1)}$$

*es un cubrimiento creciente de* $B_{t(i)}$.

**Definición 76.** *Un espacio localmente convexo* $E(\tau)$ *es el* $NV$*-límite inductivo de la* $NV$*-malla creciente*

$$\mathcal{E}_T := \{E_{t(i)}(\tau_{t(i)}) : t(i) \in \bigcup_{s\in\mathbb{N}} T(s)\}$$

*de espacios localmente convexos si*

1. $E(\tau)$ *es el límite inductivo de la sucesión* $(E_{m_1}(\tau_{m_1}))_{m_1\in T(1)}$, *es decir*
$$E(\tau) = \sum_{m_1}\{E_{m_1}(\tau_{m_1}) : m_1 \in T(1)\},$$

2. *y si para cada* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ *y cada* $1 \leqslant i < p$ *se tiene que* $E_{t(i)}(\tau_{t(i)})$ *es el límite inductivo de la sucesión*
$$(E_{t(i)\times m_{i+1}}(\tau_{t(i)\times m_{i+1}}))_{t(i)\times m_{i+1}\in T(i+1)},$$

La condición 2 se abrevia así

$$E_{t(i)}(\tau_{t(i)}) = \sum_{m_{i+1}}\{E_{t(i)\times m_{i+1}}(\tau_{t(i)\times m_{i+1}}) : t(i) \times m_{i+1} \in T(i+1)\},$$

y se dice que la $NV$-malla creciente $\mathcal{E}_T$ define $E(\tau)$ con pasos $E_{t(i)}(\tau_{t(i)})$, para cada $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T$ y cada $1 \leqslant i < p$.

**Definición 77.** *Un espacio localmente convexo* $E(\tau)$ *es un espacio* $NV$*-(LF) (o* $NV$*-(LB)) si* $E(\tau)$ *está definido por una* $NV$*-malla creciente*

$$\mathcal{E}_T := \{E_{t(i)}(\tau_{t(i)}) : t = (t_1, t_2, \ldots, t_p) \in T,\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

*tal que para cada* $t \in T$ *se tiene que* $E_t(\tau_t)$ *es un espacio de Fréchet (o de Banach).*

Entonces diremos que $\mathcal{E}_T$ es una $NV$-$(LF)$ (o $NV$-$(LB)$) malla creciente que define $E(\tau)$.

**Proposición 78.** *Sea $\mu$ una medida vectorial acotada finitamente aditiva definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\Omega$ con valores en un espacio vectorial topológico $E(\tau)$. Si $\mathcal{M}$ es una $NV$-malla creciente en $E$ se tiene que los conjuntos de $\mathcal{M}$ cuyas antiimágenes por $\mu$ tienen la propiedad $N$ forman una $NV$-malla creciente $\{E_t : t \in T\}$ en $E$, tal que si $\tau_t$ es una topología en $E_t$ más fina que la topología relativa $\tau|_{E_t}$ inducida por $\tau$ y $E_t(\tau_t)$ es un espacio $NV$-$(LF)$, entonces cada $NV$-$(LF)$ malla creciente $\mathcal{W}$ que define $E_t(\tau_t)$ contiene una $NV$-$(LF)$ malla creciente*

$$\mathcal{W}'_T := \{E_{w(i)}(\tau_{w(i)}) : w = (w_1, w_2, \ldots, w_p) \in W,\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

*tal que $\mu(\mathcal{S})$ es un subconjunto acotado en cada $E_w(\tau_w)$, con $w \in W$.*

*Demostración.* La demostración es muy similar a la de la Proposición 74, sustituyendo la aplicación del Corolario 66 por el Corolario 67. Se incluye la demostración por completitud.

La antiimagen mediante $\mu$ de la $NV$ malla creciente $\mathcal{M}$ en $E$ es una $NV$-malla creciente $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{S}$. Por el Corolario 67 los conjuntos de $\mathcal{M}'$ que tienen la propiedad $wN$ forman una $NV$-malla creciente en $\mathcal{S}$. Por tanto, los conjuntos de $\mathcal{M}$ cuya antiimagen por $\mu$ tienen la propiedad $wN$ forman una $NV$-malla creciente en $E$ que representamos por $\{E_t : t \in T\}$.

Supongamos que $E_t$ provisto con la topología $\tau_t$ verifica las hipótesis de la Proposición y que $\mathcal{W}$ es una $NV$-$(LF)$ malla creciente que define $E_t(\tau_t)$. La antiimagen mediante $\mu$ de la $NV$-$(LF)$ malla creciente $\mathcal{W}$ es una $NV$-malla creciente $\mathcal{W}'$ en $\mu^{-1}(E_t)$. Dado que $\mu^{-1}(E_t)$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$ que tiene la propiedad $wN$ se tiene por el Corolario 67 que los conjuntos de $\mathcal{W}'$ que tienen la propiedad $wN$ forman una $NV$ malla creciente en $\mu^{-1}(E_t)$. Por tanto, los elementos de $\mathcal{W}$ cuya antiimagen por $\mu$ tiene la propiedad $wN$ forman una $NV$-$(LF)$ malla creciente en $E_t(\tau_t)$ que representamos por

$$\mathcal{W}'_T := \{E_{w(i)}(\tau_{w(i)}) : w = (w_1, w_2, \ldots, w_p) \in W,\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

y que tiene estas dos propiedades:

1. $\mu^{-1}(E_{w(i)})$ tiene la propiedad $wN$ para cada $w = (w_1, w_2, \ldots, w_p) \in W$ y cada $1 \leqslant i \leqslant p$.

2. $E_w(\tau_w)$ es un espacio de Fréchet y la topología $\tau_w$ es más fina que la topología relativa $\tau|_{E_w}$ inducida por $\tau$, para cada $w \in W$.

Por la Proposición 28 se tiene que el espacio $(L(\mu^{-1}(E_w)), \|\cdot\|)$ es tonelado y denso en $(L(\mathcal{S}), \|\cdot\|)$.

De la continuidad de la aplicación

$$\mu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

y de que la topología $\tau_w$ es más fina que la topología relativa $\tau|_{E_w}$ se deduce que la aplicación

$$\mu|_{L(\mu^{-1}(E_w))}\colon (L(\mu^{-1}(E_w)), \|\cdot\|) \to E_w(\tau_w)$$

tiene gráfica cerrada.

Al ser $E_w(\tau_w)$ un espacio de Fréchet se deduce de [28, Teoremas 1 y 14] que la aplicación $\mu|_{L(\mu^{-1}(E_w))}$ tiene una extensión continua

$$\nu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E_w(\tau_w) \tag{3.5.2}$$

La continuidad de la inmersión de $E_w(\tau_w)$ en $E(\tau)$ implica que la aplicación

$$\nu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau).$$

es continua que, por construcción, verifica que

$$\nu(f) = \mu(f)$$

para cada $f \in L(\mu^{-1}(E_w))$. Por tanto, de que las aplicaciones continuas

$$\mu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

$$\nu\colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$

coincidan en el subespacio denso $L(\mu^{-1}(E_w))$ se deduce la igualdad

$$\mu = \nu,$$

lo que junto a la continuidad de la aplicación $v$ indicada en (3.5.2) nos permite concluir que $\mu(\mathcal{S}) = \nu(\mathcal{S})$ es un subconjunto acotado de $E_w(\tau_w)$. ∎

Los tres resultados siguientes de esta sección generalizan los resultados que obtuvimos en el Corolario 4, la Proposición 10 y el Corolario 5 de nuestro artículo [18].

Recordemos que una sucesión $(x_k)_k$ en un espacio localmente convexo $E$ es *subserie convergente* si para cada subconjunto $J$ de $\mathbb{N}$ la serie $\sum\{x_k : k \in J\}$ es convergente.

**Corolario 79.** *Sea $(x_k)_k$ una sucesión subserie convergente en un límite inductivo $E(\tau) = \sum_m E_m(\tau_m)$ definido por una sucesión creciente $(E_m(\tau_m))_m$ de $q(m)$-(LF) espacios. Existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n_1 \geqslant m_1$ existe una $q(n_1)$-malla creciente*

$$\{E_{n_1 \times t}(\tau_{n_1 \times t}) : t \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant q(n_1)} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto acotado de cada $E_{n_1 \times t}(\tau_{n_1 \times t})$, con $t \in \mathbb{N}^{q(n_1)}$.*

*Demostración.* Dado que $(x_k)_k$ es subserie convergente se tiene que la medida finitamente aditiva vectorial $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to E(\tau)$ definida por $\mu(J) := \sum_{k \in J} x_k$, para cada $J \in 2^{\mathbb{N}}$, es acotada, pues al ser la sucesión $(f(x_k))_k$ subserie convergente para cada $f \in E'$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$. El corolario se deduce de la aplicación directa de la Proposición 74. ∎

**Proposición 80.** *Sea $\mu$ una medida acotada finitamente aditiva definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\Omega$ con valores en un espacio vectorial topológico $E(\tau)$. Cada $p$-malla creciente en $E$ contiene una $p$-malla creciente*

$$\mathcal{T} := \{E_t : t \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant p} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que cada $q(t)$-malla creciente en cada $E_t \in \mathcal{T}$ contiene una $q(t)$-malla creciente*

$$\mathcal{V}_t := \{E_{t \times v} : v \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant q} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que:*

1. *si $E_{t \times v} \in \mathcal{V}_t$*
2. *y si la topología relativa $\tau|_{E_{t \times v}}$ es sucesionalmente completa,*

*entonces* $\mu(\mathcal{S}) \subset E_{t\times v}$.

*Demostración.* De la Proposición 74 se deduce que cada $p$-malla creciente en $E$ contiene una $p$-malla creciente

$$\mathcal{T} := \{E_t : t \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p}\mathbb{N}^s\}$$

tal que cada $E_t \in \mathcal{T}$ tiene la propiedad de que $\mu^{-1}(E_t)$ tiene la propiedad $wN$.

Si volvemos a aplicar dicha Proposición 74 a un $E_t$ perteneciente a $\mathcal{T}$ se deduce que cada $q(t)$-malla creciente en $E_t$ contiene una $q(t)$-malla creciente

$$\mathcal{V}_t := \{E_{t\times v} : v \in \cup_{1\leqslant s\leqslant q}\mathbb{N}^s\}$$

tal que cada $E_{t\times v} \in \mathcal{V}_t$ verifica que $\mu^{-1}(E_{t\times v})$ tiene la propiedad $wN$.

Si además existe $E_{t\times v} \in \mathcal{V}_t$ tal que la topología relativa $\tau|_{E_{t\times v}}$ es sucesionalmente completa, se tiene entonces que:

1. El conjunto
$$\mathcal{B}_{t\times v} := \mu^{-1}(E_{t\times v})$$
tiene la propiedad $wN$, por lo que por la Proposición 28 $L(\mathcal{B}_{t\times v})$ es un subespacio tonelado y denso en $(L(S), \|\cdot\|)$.

2. La densidad, la continuidad de restricción
$$\mu|_{L(\mathcal{B}_{t\times v})} \colon (L(\mathcal{B}_{t\times v}), \|\cdot\|) \longrightarrow E_{t\times v}(\tau|_{E_{t\times v}})$$
y la completitud sucesional de $E_{t\times v}(\tau|_{E_{t\times v}})$ implican que la restricción $\mu|_{L(\mathcal{B}_{t\times v})}$ admite una extensión continua
$$v \colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E_{t\times v}(\tau|_{E_{t\times v}}). \tag{3.5.3}$$
De la continuidad de
$$\mu \colon (L(\mathcal{S}), \|\cdot\|) \longrightarrow E(\tau)$$
y de la igualdad de las restricciones de $\nu$ y $\mu$ en el subespacio denso $L(\mathcal{B}_{t\times v})$ se deduce que $\nu = \mu$, lo que junto a (3.5.3) implica que
$$\mu(\mathcal{S}) = \nu(\mathcal{S}) \subset E_{t\times v}. \quad \blacksquare$$

**Corolario 81.** *Sea $\mu$ una medida vectorial acotada finitamente aditiva definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ con valores en un límite inductivo $E(\tau) = \sum_{m_1} E_{m_1}(\tau_{m_1})$ de una sucesión creciente $(E_{m_1}(\tau_{m_1}))_{m_1}$ de espacios vectoriales topológicos de dimensión numerable. Existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal para cada $n_1 \geqslant m_1$ sucede que cada $q(n_1)$-malla creciente en $E_{n_1}$ de espacios vectoriales contiene una $q(n_1)$-malla creciente $\mathcal{V}_{n_1} := \{E_{n_1 \times v} : v \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant q(n_1)} \mathbb{N}^s\}$ tal que si:*

1. *si $E_{n_1 \times v} \in \mathcal{V}_{n_1}$*

2. *y si la dimensión de $E_{n_1 \times v}$ es finita,*

*entonces $\mu(\mathcal{S}) \subset E_{n_1 \times v}$.*

*Demostración.* Se deduce directamente de la Proposición 80, pues en cada espacio $E_{n_1 \times v}$ de dimensión finita se tiene que $(E_{n_1 \times v}, \tau|_{E_{n_1 \times v}})$ es completo. ∎

# Capítulo 4

# La propiedad $wN$ en álgebras de conjuntos Jordan medibles

## 4.1 Introducción y objetivo.

En la sección 2.5 se probó que el álgebra del Ejemplo 3 de los subconjuntos finitos y cofinitos de $\mathbb{N}$ no tiene la propiedad $N$ (Definición 23). También se expuso que Schachermayer probó en [27, Corolario 3.5] que el álgebra $\mathcal{J}(I)$ de los subconjuntos medibles Jordan del intervalo $I := [0, 1]$ tiene la propiedad $N$ y que Valdivia en [30, Teorema 2] mejoró el resultado de Schachermayer al descubrir que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ de los subconjuntos medibles Jordan en el intervalo $K := \prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ tiene la propiedad $sN$ (ver Definición 46).

En este capítulo $K$ será el intervalo

$$K := \prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\},$$

siendo su principal objetivo el Teorema 90 que demuestra que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$ (Definición 48), lo que mejora el resultado de Valdivia. En parte seguiremos nuestro artículo [19], donde en el Teorema 1 se demuestra la propiedad $wN$ de $\mathcal{J}(K)$.

## 4.2 El álgebra $J(K)$.

Recordemos que la frontera de un subconjunto $A$ de un espacio topológico es la diferencia entre su clausura y su interior, es decir

$$\mathrm{fr}(A) := \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

**Definición 82.** *Un subconjunto acotado $A$ de $\mathbb{R}^k$ es Jordan medible si la medida de Lebesgue de su frontera* $\mathrm{fr}(A)$ *es cero.*

Por completitud incluimos la proposición siguiente que prueba que $\mathcal{J}(K)$ es un álgebra de subconjuntos de $K$ y que $\mathcal{J}(K)$ no es $\sigma$-álgebra de conjuntos.

**Proposición 83.** *Sea $K := \prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ un intervalo $k$-dimensional de $\mathbb{R}^k$ provisto con la topología $\tau$ inducida por la topología de $\mathbb{R}^k$. La familia $\mathcal{J}(K)$ de los subconjuntos medibles Jordan en el intervalo $K := \prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ es un álgebra de conjuntos que no es $\sigma$-álgebra.*

*Demostración.* $\mathcal{J}(K)$ es un álgebra de conjuntos ya que:

1. El conjunto vacío $\emptyset \in \mathcal{J}(K)$, pues
$$\overline{\emptyset} \backslash \mathring{\emptyset} = \emptyset.$$

2. La unión finita de conjuntos de $\mathcal{J}(K)$ es un conjunto de $\mathcal{J}(K)$, puesto que si $A_i \in \mathcal{J}(K)$, $i = 1, 2$, se tiene que la medida de Lebesgue del conjunto
$$\overline{A_i} \backslash \mathring{A}_i$$
es cero, para $i = 1, 2$. Entonces de la igualdad
$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$
y de que la unión de los interiores de los conjuntos $A_1$ y $A_2$
$$\mathring{A}_1 \cup \mathring{A}_2$$

es un subconjunto abierto contenido en la unión $A_1 \cup A_2$ se deduce que

$$\mathrm{fr}(A_1 \cup A_2) \subset (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \backslash (\mathring{A}_1 \cup \mathring{A}_2) \subset (\overline{A_1} \backslash \mathring{A}_1) \cup (\overline{A_2} \backslash \mathring{A}_2)$$

por lo que la medida de Lebesgue del conjunto $\mathrm{fr}(A_1 \cup A_2)$ es cero, pues la frontera $\mathrm{fr}(A_1 \cup A_2)$ es un subconjunto de la unión de dos conjuntos, $\overline{A_1} \backslash \mathring{A}_1$ y $\overline{A_2} \backslash \mathring{A}_2$, que tienen medida de Lebesgue igual a cero. Por tanto $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{J}(K)$.

3. En cualquier espacio topológico la frontera de un subconjunto $A$ coincide con la frontera del subconjunto $\Omega \backslash A$, que es el complementario en $\Omega$ de $A$. Por tanto, si $A \in \mathcal{J}(K)$ se tiene que la medida de Lebesgue de $\mathrm{fr}(A)$ es cero, lo que junto a la igualdad

$$\mathrm{fr}(A) = \mathrm{fr}(K \backslash A)$$

implica que la medida de Lebesgue de $\mathrm{fr}(K \backslash A)$ es cero, luego entonces $K \backslash A \in \mathcal{J}(K)$. Esto prueba que el complementario en $K$ de un subconjunto Jordan medible es Jordan medible.

Estas tres propiedades prueban que $\mathcal{J}(K)$ es un álgebra de conjuntos. Para demostrar que $\mathcal{J}(K)$ no es una $\sigma$-álgebra hay que comprobar que no pertenece a $\mathcal{J}(K)$ la unión de una familia numerable conjuntos de $\mathcal{J}(K)$. En efecto, cada subconjunto unitario $\{a\}$ de $K$ es medible Jordan, puesto que la igualdad

$$\mathrm{fr}(\{a\}) = \{a\} \backslash \emptyset = \{a\}$$

implica que la medida de Lebesgue de $\mathrm{fr}(\{a\})$ es cero. Entonces el subconjunto de $K$ formado por la unión

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{c_n\}$$

de los puntos $c^n = (c_1^n, c_2^n, \cdots, c_k^n)$ de $K$ con coordenadas racionales es una unión numerable de conjuntos Jordan medibles. Es evidente que $C$ es denso en $K$, es decir

$$\overline{C} = K,$$

y, además,

$$\mathring{C} = \emptyset$$

pues cualquier subconjunto abierto no vacío contenido en $K$ tiene una cantidad no numerable de puntos. Por tanto

$$\overline{C} \backslash \mathring{C} = K$$

y, dado que la medida Lebesgue de $K$ es

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} (b_i - a_i),$$

se concluye que $C$ no es medible Jordan al no ser 0 la medida de Lebesgue de $\overline{C} \backslash \mathring{C}$. ∎

Afortunadamente para nuestro objetivo el álgebra $\mathcal{J}(K)$ contiene familias infinitas numerables de conjuntos medibles Jordan cuya unión es medible Jordan.

**Proposición 84.** *Sea $(B_j)_j$ una sucesión de conjuntos Jordan medibles tales que para cada $j_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\overline{\bigcup_{j > j_0} B_j}$$

*es un subconjunto de un conjunto medible Lebesgue $B'_{j_0}$ de medida menor que $\epsilon_{j_0}$. Si*

$$\lim_{j \to \infty} \epsilon_j = 0$$

*se tiene que la unión $B$ de los conjuntos $B_j$, con $j \in \mathbb{N}$, es un conjunto Jordan medible, es decir:*

$$B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{J}(K).$$

*Demostración.* Para cada $j_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$B \subset (\bigcup_{j \leqslant j_0} B_j) \bigcup B'_{j_0}.$$

El conjunto

$$C_{j_0} := \bigcup_{j \leqslant j_0} B_j$$

es Jordan medible, por lo que la medida de Lebesgue del conjunto

$$\overline{C_{j_0}} \backslash \mathring{C}_{j_0}$$

es cero. De la igualdad

$$B = C_{j_0} \cup B'_{j_0}$$

se deduce que

$$\overline{B} \backslash \mathring{B} \subset (\overline{C_{j_0}} \backslash \mathring{C}_{j_0}) \cup \overline{B'_{j_0}},$$

puesto que $\overline{B} \subset \overline{C_{j_0}} \cup \overline{B'_{j_0}}$ y $\mathring{C}_{j_0} \subset \mathring{B}$. De esta inclusión se deduce que $\overline{B} \backslash \mathring{B}$ está contenido en un conjunto medible Lebesgue cuya medida de Lebesgue es menor que $\epsilon_{j_0}$. Por tanto, de

$$\overline{B} \backslash \mathring{B} \subset \bigcap_{j_0 \in \mathbb{N}} \{(\overline{C_{j_0}} \backslash \mathring{C}_{j_0}) \cup \overline{B'_{j_0}}\}$$

se deduce que $\overline{B} \backslash \mathring{B}$ es un subconjunto de un conjunto medible Lebesgue de medida de Lebesgue 0. Por tanto, $B \in \mathcal{J}(K)$. ∎

El Lema 85 proporciona un método estándar de obtener una partición de un conjunto Jordan medible en subconjuntos Jordan medibles de medida de Lebesgue menor que cierto número positivo $\epsilon$.

Supongamos que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene que

$$(c_i^j)_{1 \leqslant j \leqslant s(i)}$$

es una sucesión finita estrictamente creciente tal que $a_i = c_i^1,\ \ b_i = c_i^{s(i)}$ y que todos los productos

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} (c_i^{j_i+1} - c_i^{j_i})$$

son menores o iguales que $\epsilon$, siendo $1 \leqslant j_i \leqslant s(i) - 1$ y $1 \leqslant i \leqslant k$. Entonces definimos

$$I_i^j := [c_i^{j_i}, c_i^{j_i+1}[, \text{ cuando } 1 \leqslant j_i < s(i) - 1$$

e

$$I_i^{s(i)-1} := [c_i^{s(i)-1}, c_i^{s(i)}],$$

y se dice que la familia $P_{K,\epsilon}$ formada por los intervalos $k$-dimensionales obtenidos al hallar los productos

$$I_1^{j_1} \times \cdots \times I_i^{j_i} \times \cdots I_k^{j_k},$$

para cada $1 \leqslant j_i \leqslant s(i) - 1$ y $1 \leqslant i \leqslant k$, es una *partición finita de $K$ en intervalos relativamente compactos de medida de Lebesgue menor que $\epsilon$.*

**Lema 85.** *Supongamos que $B \in \mathcal{J}(K)$ y que $\epsilon > 0$. Existe una partición finita $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ de $B$ en subconjuntos Jordan medibles que tienen medida de Lebesgue menor que $\epsilon$.*

*Demostración.* Sea $P_{K,\epsilon}$ una partición finita de $K$ en intervalos relativamente compactos de medida de Lebesgue menor que $\epsilon$. La familia

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$$

de las intersecciones no vacías de $B$ con los elementos de $P_{K,\epsilon}$ verifica el lema. ∎

Se dice que $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ *es la partición de $B$ correspondiente a la partición $P_{K,\epsilon}$.*

## 4.3 $B$-pr no acotación en $\mathrm{ba}(J(K))$ con medida de $B$ prefijada.

La combinación del Lema 85 y de la Proposición 41 nos proporcionan la siguiente Proposición 86.

**Proposición 86.** *Sea $\{B, Q_1, \ldots, Q_r\}$ un subconjunto del álgebra $\mathcal{J}(K)$ de subconjuntos Jordan medibles del intervalo compacto $K$, sea $M$ un subconjunto equilibrado y $B$-pr no acotado del espacio normado*

$$\big(\mathrm{ba}(\mathcal{J}(K)), \|\cdot\|\big),$$

*sean $\alpha$ y $\epsilon$ dos números reales positivos y supongamos que $\{B_1, \ldots, B_m\}$ es la partición de $B$ correspondiente a una partición finita $P_{K,\epsilon}$ de $K$ en intervalos relativamente compactos de medida de Lebesgue menor que $\epsilon$. Existe $B_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$, que admite una partición $\{C, C'\}$ en dos subconjuntos Jordan medibles y existe una medida $\mu \in M$ tales que:*

1. *$M$ es $C'$-pr no acotado,*

2. *$\sum_{1\leqslant j\leqslant r} \mu(Q_j) \leqslant 1$, $|\mu(C)| > \alpha$ y $|\mu(C')| > \alpha$.*

Obsérvese que $C \cup C'$ está contenido en un intervalo $k$-dimensional relativamente compacto de medida de Lebesgue menor que $\epsilon$. Esta observación es importante en la demostración del Teorema 90.

*Demostración.* La Proposición 40 implica que en la partición

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$$

de $B$ existe $B_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$, tal que $M$ es $B_n$-pr no acotado.

Para completar la demostración solo necesitamos aplicar el razonamiento de la demostración de la Proposición 41 a $B_n$. En efecto, la inclusión $M \subset rM$ implica que $rM$ es $B_n$-pr no acotado, por lo que el conjunto

$$\mathcal{Q} = \{e_{B_n}, e_{Q_1}, e_{Q_2}, \ldots, e_{Q_r}\}$$

verifica que

$$\sup\{|\mu(C)| : \mu \in rM \cap \mathcal{Q}^\circ, C \subset B_n, C \in \mathcal{A}\} = \infty,$$

luego existen $D_1 \subset B_n$, con $D_1 \in \mathcal{J}(K)$, y una medida $\lambda \in rM \cap \mathcal{Q}^\circ$ tales que

$$|\lambda(D_1)| > r(1 + \alpha).$$

Entonces $\mu = r^{-1}\lambda \in M$, $|\mu(B_n)| \leqslant r^{-1} \leqslant 1$ y $\sum_{1\leqslant j\leqslant r} |\mu(Q_j)| \leqslant rr^{-1} = 1$. Además, el conjunto $D_2 := B_n \backslash D_1$ verifica que

$$|\mu(D_2)| \geqslant |\mu(D_1)| - |\mu(B_n)| > 1 + \alpha - 1 = \alpha.$$

La Proposición 40 implica que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $M$ es $D_i$-pr no acotado, por lo que

$$C := D_{3-i} \quad \text{y} \quad C' := D_i$$

verifican esta proposición, pues al ser $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ la partición finita de $B$ correspondiente a una partición $P_{K,\epsilon}$ se tiene que $B_n$ es la intersección con $B$ de un intervalo $\prod_{1\leqslant i\leqslant k}[c_i^{j_i}, c_i^{j_i+1}]$ contenido en $K$ y tal que $\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(c_i^{j_i+1} - c_i^{j_i}) < \epsilon$. Por tanto,

$$C \cup C' \subset B_n \subset \prod_{1\leqslant i\leqslant k}[c_i^{j_i}, c_i^{j_i+1}],$$

siendo la medida de Lebesgue del intervalo $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant k}[c_i^{j_i}, c_i^{j_i+1}]$ menor que $\epsilon$. ∎

Por aplicación reiterada de la Proposición 86 se obtiene el corolario siguiente.

**Corolario 87.** *Sea $\{B, Q_1, \ldots, Q_r\}$ un subconjunto del álgebra $\mathcal{J}(K)$ y sea $M$ un subconjunto equilibrado de* (ba($\mathcal{J}(K)$) *que es $B$-pr no acotado. Supongamos que $q \in \mathbb{N}$, que $\alpha$ y $\epsilon$ son dos números reales positivos y que $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ es la partición de $B$ correspondiente a una partición finita $P_{K,\epsilon}$ de $K$ en intervalos relativamente compactos de medida menor que $\epsilon$. Existe $B_n$ que admite una partición $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ en subconjuntos Jordan medibles y existen $q$ medidas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q \in M$ tales que:*

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant r} \mu_i(Q_j) \leqslant 1$$

*y*

$$|\mu_i(C_i)| > \alpha,$$

*para $1 \leqslant i \leqslant q$.*

Por tanto, $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_q$ está contenido en un intervalo $k$-dimensional relativamente compacto cuya medida de Lebesgue es menor que $\epsilon$.

*Demostración.* Por la Proposición 40 existe $B_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$, tal que $M$ es $B_n$-pr no acotado. Entonces la Proposición 86 proporciona una partición de $B_n$ en dos subconjuntos disjuntos $C_1$, $C_1' \in \mathcal{J}(K)$ y una medida $\mu_1 \in M$ tales que

1. $M$ es $C_1'$-pr no acotado
2. $\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \mu_1(Q_j) \leqslant 1$, $|\mu_1(C_1)| > \alpha$, $|\mu_1(C_1')| > \alpha$,
3. donde, como se ha indicado, $C_1 \cup C_1'$ es la intersección de $B$ con un intervalo de la partición $P_{K,\epsilon}$ de medida menor que $\epsilon$.

De nuevo la Proposición 86 aplicada al conjunto $\{C_1', Q_1, \ldots, Q_r\}$ proporciona una partición de $C_1'$ formada por dos subconjuntos $C_2$, $C_2'$ medibles Jordan y una medida $\mu_2 \in M$ tales que

1. $M$ es $C_2'$-pr no acotado
2. $\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \mu_2(Q_j) \leqslant 1$, $|\mu_2(C_2)| > \alpha$, $|\mu_2(C_2')| > \alpha$,
3. siendo $B_n = C_1 \cup C_2 \cup C_2' = C_1 \cup C_1'$, que, como se indicó antes, es la intersección $B_n$ de $B$ con un intervalo de la partición $P_{K,\epsilon}$ de medida menor que $\epsilon$.

Es evidente que aplicando $q-1$ veces este razonamiento se obtiene el corolario, siendo $C_q := C_{q-1}'$ y $\mu_q := \mu_{q-1}$. ∎

Este corolario permite modificar la Proposición 63 para obtener la Proposición 88, que por tanto proviene de la Proposición 63 y del Lema 85.

**Proposición 88.** *Sea $\{B, Q_1, \ldots, Q_r\}$ un subconjunto de elementos disjuntos dos a dos de un álgebra $\mathcal{J}(K)$, $T$ un árbol NV y $\{M_t : t \in T\}$ una familia de subconjuntos equilibrados de* ba$(\mathcal{A})$ *que son $B$-pr no acotados. Entonces para cada par $\alpha$ y $\epsilon$ de números reales positivos y para cada subconjunto finito $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$ de $T$ existen:*

- *dos subconjuntos disjuntos Jordan medibles* $B_1$ *y* $B_1'$ *contenidos en* $B$*,*
- *una medida* $\mu_1 \in M_{t^1}$ *y*
- *un* $NV$ *árbol* $T_1$ *contenido en* $T$ *tal que* $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset T_1$*,*

*que verifican:*

1. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \{|\mu_1(Q_i)| :\} \leqslant 1$ *y* $|\mu_1(B_1)| > \alpha$*,*
2. *los conjuntos de* $\{M_t : t \in T_1\}$ *son* $B_1'$*-pr no acotados.*
3. *y* $B_1 \cup B_1'$ *es un subconjunto de una unión finita de intervalos* $k$*-dimensionales y relativamente compactos, de manera que la medida de Lebesgue de dicha unión es menor que* $\epsilon$*.*

*Demostración.* **La primera parte de la demostración consiste en la selección de unos índices del** $NV$ **árbol** $T$ **y de unos subconjuntos Jordan medibles contenidos en** $B$.

Sea $t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j)$, para $1 \leqslant j \leqslant k$ y definamos $q := 2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j$. Sea $P_{K,\epsilon/q}$ una partición finita de $K$ formada por intervalos relativamente compactos de medida de Lebesgue menor que $\epsilon/q$ y sea $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ la partición de $B$ correspondiente a $P_{K,\epsilon/q}$.

Por la Proposición 40 existe $W_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$, tal que $M_{t^1}$ es $W_n$-pr no acotado, siendo $1 \leqslant n \leqslant m$.

Aplicando el Corolario 87 a $\{W_n, Q_1, \ldots, Q_r\}$, $M_{t^1}$, $q \in \mathbb{N}$, y a los números reales positivos $\alpha$ y $\epsilon/q$ se obtiene una partición Jordan medible $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ de $W_n$ y un subconjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$ de $M_{t^1}$ tales que:

$$|\lambda_k(C_k)| > \alpha \quad \text{y} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_k(Q_i)| \leqslant 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, q. \tag{4.3.1}$$

Al reordenar los conjuntos

$$\{W_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash \{n\}\} \cup \{C_i : i \in \{1, 2, \ldots, q\}\}$$

en la forma

$$\{D_i : i \in \{1, 2, \dots, q'\}\}$$

se obtiene una partición de $B$ formada por elementos no vacíos de $\mathcal{J}(K)$ que tienen medida de Lebesgue menor que $\epsilon/q$, siendo obvio que $q \leqslant q'$.

Por la Proposición 40 se tiene:

- Que para cada subconjunto $M$ de ba$(\mathcal{A})$ que sea $B$-pr no acotado existe $i_M \in \{1, 2, \dots, q'\}$ tal que $M$ es $D_{i_M}$-pr no acotado.
- Por tanto, si $U$ es un árbol $NV$, $M_u$ es $B$-pr no acotado para cada $u \in U$ y
$$V_i := \{u \in U : M_u \text{ es } D_i\text{-pr no acotado}\},$$
para cada $1 \leqslant i \leqslant q'$, se tiene que
$$U = \cup_{1 \leqslant i \leqslant q'} V_i,$$
de lo que aplicando la Proposición 56 se deduce que existe $i_0$, con $1 \leqslant i_0 \leqslant q'$, tal que $V_{i_0}$ contiene un $NV$ árbol $U_{i_0}$.

De estas dos observaciones se deducen las tres propiedades siguientes:

– Existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, q'\}$ y un $NV$ árbol $T_{i_0} \subset T$ tal que
$$\text{para cada } t \in T_{i_0}$$
se tiene que
$$M_t \text{ es } D_{i_0}\text{-pr no acotado},$$
lo que se deduce aplicando la segunda observación.

– Para cada
$$t^j = (t_1^j, t_2^j, \dots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0},\ 1 \leqslant j \leqslant k,$$
existe $i^j \in \{1, 2, \dots, q'\}$ tal que
$$M_{t^j} \text{ es } D_{i^j}\text{-pr no acotado},$$
que se deduce de la primera observación. La condición $t^j \notin T_{i_0}$ se ha incluido para no repetir la adición de elementos que ya están en $T_{i_0}$.

– Además para cada $t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, y para cada sección

$$t^j(m-1) \text{ de } t^j, \text{ con } 2 \leqslant m \leqslant p_j,$$

se tiene que el conjunto

$$W_m^j := \{v \in \cup_s \mathbb{N}^s : t^j(m-1) \times v \in T\}$$

es un $NV$ árbol tal que

$$M_{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times w} \text{ es } B\text{-pr no acotado,}$$

para cada $w \in W_m^j$, por tanto la segunda observación asegura la existencia de $i_m^j \in \{1, 2, \ldots, q'\}$ y de un $NV$ árbol $V_m^j$ contenido en $W_m^j$ tal que

$$\text{para cada } (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times w \in (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times V_m^j$$

se tiene que

$$M_{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times w} \text{ es } D_{i_m^j}\text{-pr no acotado.}$$

**En la segunda parte de la demostración se prueba que la unión $T_1$ de los índices seleccionados en la primera parte es un $NV$ árbol tal que los $M_t$, con $t \in T_1$, son $D$-pr no acotados, donde $D$ es la unión de los elementos seleccionados de $\{D_i : i \in \{1, 2, \ldots, q'\}\}$.**

La unión $T_1$ de los índices utilizados en las tres propiedades obtenidas está formado por la unión del $NV$ árbol

$$T_{i_0},$$

del conjunto

$$\{t^j : t^j \notin T_{i_0}\ 1 \leqslant j \leqslant k\},$$

y de los conjuntos

$$\{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j)\} \times V_m^j$$

para cada $t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0}$, siendo $1 \leqslant j \leqslant k$ y $2 \leqslant m \leqslant p_j$.

Por la construcción efectuada resulta que el conjunto $T_1$ es dominante, luego el Lema 54 implica que $T_1$ es un $NV$ árbol, pues es un subconjunto dominante del $NV$ árbol $T$.

Por otra parte, la unión $D$ de los elementos de

$$\{D_i : i \in \{1, 2, \ldots, q'\}\}$$

utilizados en las tres propiedades obtenidas está formado por la unión de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} &D_{i_0}, \\ &D_{i^j}, \text{ con } t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0} \quad \text{y} \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \qquad \text{y} \\ &D_{i_m^j}, \text{ con } t^j \notin T_{i_0}, \ 1 \leqslant j \leqslant k \quad \text{y} \quad 2 \leqslant m \leqslant p_j. \end{aligned}$$

Las tres propiedades que se obtuvieron son:

- Que para cada $t \in T_{i_0}$

  el conjunto $M_t$ es $D_{i_0}$-pr no acotado,

- que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $t^j \notin T_{i_0}$ se tiene que

  el conjunto $M_{t^j}$ es $D_{i^j}$-pr no acotado,

- y, finalmente, que para cada $t^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{p_j}^j) \notin T_{i_0}$, con $1 \leqslant j \leqslant k$, para cada $2 \leqslant m \leqslant p_j$ y para cada $w \in V_m^j$ se tiene que

  el conjunto $M_{(t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{m-1}^j) \times w}$ es $D_{i_m^j}$-pr no acotado.

Entonces, para cada $t \in T_1$, el conjunto $M_t$ es $D$-pr no acotado, pues, por construcción, para cada $t \in T_1$ sucede que $M_t$ es profundamente no acotado para alguno de los conjuntos cuya unión es $D$, lo que implica que $M_t$ es $D$-pr no acotado.

**La tercera parte de la demostración es consecuencia de la observación de que alguno de los conjuntos de $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$**

**no se ha utilizado en la formación de** $D$. En efecto, el número de conjuntos cuya unión es $D$ es menor o igual que $q-1$. Por tanto en la partición $\{C_1, C_2, \cdots, C_q\}$ de $W_n$ existe al menos un conjunto $C_h$ tal que

$$D \subset B \backslash C_h.$$

Se definen

$$\begin{aligned} B_1 &:= C_h, \\ B_1' &:= D \qquad \text{y} \\ \mu_1 &:= \lambda_h. \end{aligned}$$

Por (4.3.1) se tiene que

$$|\mu_1(B_1)| > \alpha \quad \text{y} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |\mu_1(Q_i)| \leqslant 1.$$

Finalmente, también por construcción se tiene que $B_1 \cup B_1'$ está contenido en la unión de una familia de a lo sumo $1+(q-1) = q$ intervalos $k$ dimensionales, relativamente compactos con medida de Lebesgue menor que $\epsilon/q$. Por tanto, la medida de dicha unión es menor que $\epsilon$. ∎

Repitiendo $k$ veces esta proposición se obtiene el Corolario 89, que, además de las propiedades obtenidas en [16, Proposición 10], contiene información adicional relacionada con la medida de Lebesgue.

**Corolario 89.** *Sea* $\{B, Q_1, \ldots, Q_r\}$ *un subconjunto de elementos disjuntos dos a dos del álgebra* $\mathcal{J}(K)$ *y sea* $\{M_t : t \in T\}$ *una familia de subconjuntos equilibrados de* $\mathrm{ba}(\mathcal{A})$ *que son* $B$*-pr no acotados y cuyo conjunto de índices* $T$ *es un* $NV$*-árbol. Sean, además,* $\alpha$ *y* $\epsilon$ *dos números reales positivos y* $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$ *un subconjunto finito de* $T$*. Entonces existen:*

- *una familia* $\{Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_{r+k}, Q'_{r+k}\}$ *de subconjuntos de* $B$ *que son disjuntos dos a dos y que pertenecen al álgebra* $\mathcal{J}(K)$*,*
- $k$ *medidas* $\mu_j \in M_{t^j}$, $1 \leqslant j \leqslant k$*, y*

– *un NV árbol* $T^*$ *contenido en* $T$ *tal que* $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset T^*$,

*que verifican:*

1. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant r} |\mu_j(Q_i)| \leqslant 1$ *y* $|\mu_j(Q_{r+j})| > \alpha$, *para* $j = 1, 2, \ldots, k$,
2. *los conjuntos de* $\{M_t : t \in T^*\}$ *son* $Q'_{r+k}$*-pr no acotados y*
3. $Q_{r+1} \cup Q_{r+2} \cup \ldots \cup Q_{r+k} \cup Q'_{r+k}$ *es un subconjunto de una unión finita de intervalos* $k$*-dimensionales y relativamente compactos, de manera que la medida de Lebesgue de dicha unión es menor que* $\epsilon$.

*Demostración.* Al aplicar la Proposición 88 se obtienen:

– unos subconjuntos disjuntos $Q_{r+1}$ y $Q'_{r+1}$ contenidos en $B$ y que pertenecen al álgebra $\mathcal{J}(K)$,

– una medida $\mu_1 \in M_{t^1}$ y

– un $NV$ árbol $T_1$ tal que $\{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset T^*$,

que verifican:

1. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant r} |\mu_1(Q_i)| \leqslant 1$ y $|\mu_1(Q_{r+1})| > \alpha$
2. los conjuntos de $\{M_t : t \in T_1\}$ son $Q'_{r+1}$-pr no acotados y
3. $Q_{r+1} \cup Q'_{r+1}$ es un subconjunto de una unión finita de intervalos $k$-dimensionales y relativamente compactos, de manera que la medida de Lebesgue de dicha unión es menor que $\epsilon$.

Aplicando de nuevo la Proposición 88 a $\{Q'_{r+1}, Q_1, \ldots, Q_r\}$, a la familia $\{M_t : t \in T_1\}$ y al subconjunto finito $\{t^2, t^3, \ldots, t^k, t^1\}$ de $T_1$ se obtienen:

– unos subconjuntos disjuntos $Q_{r+2}$ y $Q'_{r+2}$ contenidos en $Q'_{r+1}$ y que pertenecen al álgebra $\mathcal{J}(K)$,

– una medida $\mu_2 \in M_{t^2}$ y

– un $NV$ árbol $T_2$ tal que $\{t^2, t^3, \ldots, t^k, t^1\} = \{t^j : 1 \leqslant j \leqslant k\} \subset T_2$,

que verifican:

1. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} |\mu_2(Q_i)| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad |\mu_2(Q_{r+2})| > \alpha$

2. los conjuntos de $\{M_t : t \in T_1\}$ son $Q'_{r+2}$-pr no acotados y

3. $Q_{r+1} \cup Q_{r+2} \cup Q'_{r+2}$ es un subconjunto de una unión finita de intervalos $k$-dimensionales y relativamente compactos, de manera que la medida de Lebesgue de dicha unión es menor que $\epsilon$, ya que $Q_{r+1} \cup Q_{r+2} \cup Q'_{r+2}$ es un subconjunto de $Q_{r+1} \cup Q'_{r+1}$.

Es pues evidente que la repetición $k$ veces de la Proposición 88, con cambios análogos a los indicados en el paso anterior, produce la demostración del corolario. ∎

## 4.4 $J(K)$ tiene la propiedad $wN$.

En el Teorema 90 demostramos que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$, resultado obtenido en el Teorema 1 de nuestro artículo [19]. El esquema de la demostración es similar al del Teorema 65 y también se utilizará la sucesión

$$(i_n)_n := (1, 1, 2, 1, 2, 3, \ldots),$$

cuyos términos son las primeras componentes de la sucesión

$$((1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), \ldots),$$

obtenida al ordenar los elementos de $\mathbb{N}^2$ con el orden diagonal.

**Teorema 90.** *El álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{J}(K)$ no tiene la propiedad $wN$. Entonces existiría una malla creciente

$$\{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : p, m_1, m_2, \ldots, m_p \in \mathbb{N}\}$$

en $\mathcal{J}(K)$ que no contendría cadenas infinitas formadas por subconjuntos de $\mathcal{J}(K)$ con la propiedad $N$.

Por la Proposición 62 existe un $NV$ árbol $T$ tal que para cada $t \in T$ existe un subconjunto $M_t$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{J}(K)), \|\cdot\|)$ que es $K$-pr no acotado, absolutamente convexo, $\tau_s(\mathcal{J}(K))$-cerrado y que, además, es puntualmente acotado en $\mathcal{B}_t$, es decir

$$\sup\{|\mu_t(H)| : t \in T\} < \infty \tag{4.4.1}$$

para cada $H \in \mathcal{B}_t$.

**La primera etapa de esta demostración es una inducción** en la que vamos a obtener:

- un $NV$ árbol $\{t^i : i \in \mathbb{N}\}$ contenido en $T$
- y una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(k_j)_j$

tales que para cada $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ con $i \leqslant k_j$ existen:

- un subconjunto $B_{i,j} \in \mathcal{J}(K)$ y una medida $\mu_{i,j} \in M_{t^i}$ que verifican

$$\sum_{s,v} \Big\{ \, |\mu_{i,j}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v, 1 \leqslant v < j \Big\} < 1, \quad \text{si } j \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \tag{4.4.2}$$

$$|\mu_{i,j}(B_{i,j})| > j \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}, \tag{4.4.3}$$

$$B_{i,j} \cap B_{i'j'} = \emptyset \quad \text{si } (i,j) \neq (i',j')$$

y, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe una familia finita

$$\Big\{ \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,j}, d^s_{i,j}] : 1 \leqslant s \leqslant q_j \Big\}$$

de intervalos compactos contenidos en $K$ tales que

$$\bigcup_{\substack{s\leqslant k_v,\\ j<v}} B_{s,v} \subset \bigcup_{1\leqslant s\leqslant q_j} \Big\{ \prod_{1\leqslant i\leqslant k} [c^s_{i,j}, d^s_{i,j}] \Big\}$$

y

$$\sum_{1\leqslant s\leqslant q_j} \Big( \prod_{1\leqslant i\leqslant k} (d^s_{i,j} - c^s_{i,j}) \Big) < 2^{-j}.$$

En el primer paso de esta inducción se elige un elemento $t^1 \in T$, se define $k_1 := 1$, $S^1 := \{t^1\}$ y se aplica el Corolario 89 con $B := K$, $\alpha = 1$, $\epsilon = 2^{-1}$ y $\{t^1\}$ y se obtienen:

- $B_{11}$, $B'_1 \in \mathcal{J}(K)$,
- $\mu_{11} \in M_{t^1}$ y
- un $NV$ árbol $T_1$, tales que

$$|\mu_{11}(B_{11})| > 1,$$

$$t^1 \in T_1 \subset T,$$

$$M_t \text{ es } B'_1\text{-pr no acotado, para cada } t \in T_1,$$

- y una familia finita $\{\prod_{1\leqslant i\leqslant k}[c^s_{i1}, d^s_{i1}],\ \ 1 \leqslant s \leqslant q_1\}$ de intervalos compactos contenidos en $K$ tales que

$$B'_1 \subset \bigcup_{1\leqslant s\leqslant q_1} \Big( \prod_{1\leqslant i\leqslant k} [c^s_{i1}, d^s_{i1}] \Big) \quad \text{y} \quad \sum_{1\leqslant s\leqslant q_1} \Big( \prod_{1\leqslant i\leqslant k} (d^s_{i1} - c^s_{i1}) \Big) < 2^{-1}.$$

Supongamos que en las $n$ primeras etapas del proceso inductivo se han obtenido:

1. Los números naturales $k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots < k_n$,
2. los $NV$ árboles $T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_j \supset \cdots \supset T_n$,

3. el subconjunto $\{t^1, t^2, \ldots, t^{k_n}\}$ de $\cup_s \mathbb{N}^s$ tal que para cada $1 \leqslant j \leqslant n$

$$S^j := \{t^i : i \leqslant k_j\} \subset T_j,$$

de manera que cuando $1 < j$ se tiene que

$$S_j := \{t^{k_{j-1}+1}, \ldots, t^{k_j}\} \text{ domina a } S^{j-1},$$

4. las medidas $\{\mu_{iv} \in M_{t^i} : i \leqslant k_v,\ \ 1 \leqslant v \leqslant n\}$ y las $n$ familias $\mathcal{B}^j := \{B'_j,\ B_{iv} : i \leqslant k_v, 1 \leqslant v \leqslant j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tales cada $\mathcal{B}^j$ está formada por elementos disjuntos dos a dos de $\mathcal{J}(K)$ que, cuando $j > 1$, los elementos de $\mathcal{B}^j$ son subconjuntos de $B'_{j-1}$, de manera que para cada $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tales que $i \leqslant k_j$, $1 < j \leqslant n$ y $t \in T_j$ se tiene que

$$\sum_{s,v} \left\{ |\mu_{i,j}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v, 1 \leqslant v < j \right\} < 1,$$

$$|\mu_{i,j}(B_{i,j})| > j,$$

$$M_t \text{ es } B'_j\text{-pr no acotado},$$

y existe una familia finita $\{\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,j}, d^s_{i,j}],\ \ 1 \leqslant s \leqslant q_j\}$ de intervalos compactos contenidos en $K$ tales que

$$B'_j \subset \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant q_j} \Big( \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,j}, d^s_{i,j}] \Big), \tag{4.4.4}$$

siendo

$$\sum_{1 \leqslant s \leqslant q_j} \Big( \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} (d^s_{i,j} - c^s_{i,j}) \Big) < 2^{-j},$$

donde en (4.4.4) se puede sustituir $B'_j$ por su clausura, pues el segundo miembro de (4.4.4) es un conjunto cerrado. Por tanto,

$$\overline{B'_j} \subset \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant q_j} \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,j}, d^s_{i,j}]. \tag{4.4.5}$$

Obsérvese que por construcción los elementos de $\mathcal{B}^{j+k}$ son subconjuntos de $B'_{j+k-1}$, por lo que se tiene la inclusión

$$\bigcup_{s,v}\{B_{s,v} : s \leqslant k_v,\ j < v \leqslant n\} \subset B'_j \tag{4.4.6}$$

Para completar el proceso inductivo se determina $k_{n+1}$ mediante la selección de un subconjunto

$$S_{n+1} := \{t^{k_n+1}, \dots, t^{k_{n+1}}\}$$

de

$$T_n \backslash \{t^i : i \leqslant k_n\}$$

que sea dominante respecto a $S^n$ y se aplica de nuevo el Corolario 89 a la familia $\mathcal{B}^n := \{B'_n,\ B_{s,v} : s \leqslant k_v, 1 \leqslant v \leqslant n\}$ de subconjuntos de $B'_{n-1}$ medibles Jordan, al $NV$ árbol $T_n$ y a su subconjunto finito $S^{n+1} := \{t^i : i \leqslant k_{n+1}\}$, con $\alpha = n+1$ y $\epsilon = 2^{-n-1}$. Se obtiene:

- Una familia $\{B'_{n+1},\ B_{i,n+1} : 1 \leqslant i \leqslant k_{n+1}\}$ de subconjuntos Jordan medibles contenidos en $B'_n$, y una familia finita

  $$\left\{ \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,n+1}, d^s_{i,n+1}],\ 1 \leqslant s \leqslant q_{n+1} \right\}$$

  de intervalos compactos contenidos en $K$ tales que

  $$B'_{n+1} \subset \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant q_{n+1}} \Big( \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,n+1}, d^s_{i,n+1}] \Big),$$

  siendo

  $$\sum_{1 \leqslant s \leqslant q_{n+1}} \left( \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} (d^s_{i,n+1} - c^s_{i,n+1}) \right) < 2^{-n-1}.$$

- Las medidas $\mu_{i,n+1} \in M_{t^i}$, $1 \leqslant i \leqslant k_{n+1}$, que para cada $1 \leqslant i \leqslant k_{n+1}$ verifican que

  $$\sum_{s,v} \left\{ |\mu_{i,n+1}(B_{s,v})| : s \leqslant k_v, 1 \leqslant v \leqslant n \right\} < 1 \qquad \text{y}$$

  $$|\mu_{i,n+1}(B_{i,n+1})| > n+1.$$

- Y el $NV$ árbol $T_{n+1}$ tal que

$$S^{n+1} \subset T_{n+1} \subset T_n \qquad \text{y}$$

$$M_t \text{ es } B'_{n+1}\text{-pr no acotado para cada } t \in T_{n+1}.$$

Así pues, las sucesivas etapas de este primer proceso inductivo producen las sucesivas columnas del siguiente esquema, compuestas por pares $(B_{i,j}, \mu_{i,j})$, con $j = 1, 2, 3 \ldots$.

$$\begin{array}{llll}
B_{11},\mu_{11} \in M_{t^1} & B_{12},\mu_{12} \in M_{t^1} & B_{13},\mu_{13} \in M_{t^1} & \ldots \\
 & B_{22},\mu_{22} \in M_{t^2} & B_{23},\mu_{23} \in M_{t^2} & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & B_{k_2 2},\mu_{k_2 2} \in M_{t^{k_2}} & B_{k_2 3},\mu_{k_2 3} \in M_{t^{k_2}} & \ldots \\
 & & \vdots & \\
 & & B_{k_3 3},\mu_{k_3 3} \in M_{t^{k_3}} & \ldots
\end{array}$$

Para cada columna $j$ la $i$ toma los valores $1, 2, \ldots, k_j$, siendo los $B_{i,j}$ subconjuntos Jordan medibles disjuntos dos a dos del intervalo compacto $K$ que verifican la relación

$$B_{i,j} \subset B'_s, \quad \text{si } s < j,$$

donde $B'_s$ es un subconjunto Jordan medible contenido en la intersección de $K$ con la unión de una familia finita de intervalos compactos tales que la suma de sus medidas de Lebesgue es menor que $2^{-s}$. Finalmente, las $\mu_{i,j}$ son medidas de ba$(\mathcal{J}(K))$ que, además de las desigualdades establecidas, verifican la relación

$$\mu_{i,j} \in M_{t^i}$$

de manera que, para cada $j \in \mathbb{N}$, los conjuntos de la familia

$$\{M_{t^i} : 1 \leqslant i \leqslant k^j\}$$

son $B'_j$-profundamente no acotados.

**La segunda etapa de esta demostración consiste en comprobar que si $H_j$ es un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, k_j\}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto**

$$B := \bigcup \{B_{i,j} : i \in H_j,\ j \in \mathbb{N}\}$$

**es Jordan medible**. En efecto, para cada $j \in \mathbb{N}$ sea

$$B_j := \bigcup \{B_{i,j} : i \in H_j\}.$$

Aplicando (4.4.6) con $j = j_0$ se obtiene la inclusión

$$\bigcup_{j_0 < j \leqslant n} B_j \subset B'_{j_0},$$

para cada $n > j_0$, lo que implica que

$$\bigcup_{j_0 < j} B_j \subset B'_{j_0}$$

y, por tanto, para cada $j_0 \in \mathbb{N}$, se obtiene que

$$B \subset (\bigcup_{j \leqslant j_0} B_j) \bigcup B'_{j_0}.$$

Además, de (4.4.5) con $j := j_0$ se deduce que

$$\overline{B'_{j_0}} \subset \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant q_{j_0}} \Big( \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} [c^s_{i,j_0}, d^s_{i,j_0}] \Big),$$

siendo

$$\sum_{1 \leqslant s \leqslant q_{j_0}} \left( \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} (d^s_{i,j_0} - c^s_{i,j_0}) \right) < 2^{-j_0}.$$

Por la Proposición 84 se tiene que $B$ es un conjunto Jordan medible.

**La tercera parte de la demostración consiste en una nueva inducción para determinar una sucesión $(j_n)_n$ estrictamente creciente de números naturales tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que**

$$|\mu_{i_n,j_n}|\left(\bigcup_{n<m} B_{i_m,j_m}\right) < 1, \tag{4.4.7}$$

donde, como se ha indicado, $(i_n)_n := (1,1,2,1,2,3,\ldots)$ es la sucesión de las primeras componentes de la sucesión obtenida al ordenar los elementos de $\mathbb{N}^2$ con el orden diagonal.

Observemos que por la construcción de $(i_n)_n$ se tiene que

$$i_n \leqslant n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que la sucesión $(k_n)_n$ es estrictamente creciente se tiene que para cada sucesión estrictamente creciente de números naturales $(j_n)_n$ se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$n \leqslant j_n \leqslant k_{j_n},$$

por lo que de

$$i_n \leqslant k_{j_n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

se deduce que el conjunto unitario $H_{j_n} := \{i_n\}$ es un subconjunto del conjunto $\{1,2,\ldots,k_{j_n}\}$. Entonces aplicando el resultado obtenido en la segunda etapa de esta demostración se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\bigcup_{n<m} B_{i_m,j_m} \in \mathcal{J}(K) \tag{4.4.8}$$

lo que nos permite obtener para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_{i_n,j_n}\left(\bigcup_{n<m} B_{i_m,j_m}\right).$$

La determinación por inducción de la sucesión estrictamente creciente $(j_n)_n$ es consecuencia de la siguiente observación, que es el paso $n$ del proceso inductivo natural que permite definir dicha sucesión $(j_n)_n$.

La inclusión $\mu_{i_n,j_n} \in \mathrm{ba}(\Omega)$ implica que la variación $|\mu_{i_n,j_n}|(\Omega)$ es un número finito, por lo que existirá un número natural $s_n$ tal que

$$|\mu_{i_n,j_n}|(\Omega) < s_n \in \mathbb{N}.$$

Entonces:

1. Si $J_n$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}\backslash\{1, 2, \ldots, j_n\}$, si

$$\{N_u,\ 1 \leqslant u \leqslant s_n\}$$

   es una partición de $J_n$ en $s_n$ conjuntos infinitos y para cada $1 \leqslant u \leqslant s_n$ se define que

$$B_u := \bigcup\{B_{s,v} : s \leqslant k_v, v \in N_u\},$$

   se tiene la desigualdad

$$\sum_{1\leqslant u\leqslant s_n} |\mu_{i_n,j_n}|(B_u) < |\mu_{i_n,j_n}|(\Omega) < s_n.$$

2. Esta desigualdad implica la existencia de $u'$, con $1 \leqslant u' \leqslant s_n$, tal que

$$|\mu_{i_n,j_n}|(B_{u'}) < 1. \tag{4.4.9}$$

3. Por tanto, al definir $j_{n+1}$ igual al primer elemento del conjunto $N_{u'}$, se tiene que $j_n < j_{n+1}$, y se completa el proceso inductivo definiendo $J_{n+1} := N_{u'}\backslash\{j_{n+1}\}$.

Para formalizar la inducción se elige $j_1 := 1$ y se aplica el razonamiento anterior a $J_1 := \mathbb{N}\backslash\{1\}$, lo que produce $j_2 > j_1$ y un subconjunto infinito $J_2$ contenido en $J_1\backslash\{1, 2, \ldots, j_2\}$. Si se suponen determinados los elementos $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, se explicó en los tres pasos anteriores cómo obtener $j_{n+1}$, resultando que para cada número natural $n$ se tiene, por construcción, que

$$\bigcup_{n<m} B_{i_m,j_m} \subset B_{u'}.$$

De esta inclusión y de la desigualdad (4.4.9) se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|\mu_{i_n,j_n}| \left( \bigcup_{n<m} B_{i_m,j_m} \right) < 1 \tag{4.4.10}$$

**Finalmente, la parte cuarta de esta demostración es una recopilación de resultados anteriores aplicados a las sucesiones $(B_{i_n,j_n})_n$ y $(\mu_{i_n,j_n})_n$ que nos dará una contradicción.**

De las desigualdades $i_m \leqslant k_{j_m}$ y $j_m < j_n$, si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ y $m < n$, y de la desigualdad (4.4.2) se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$

$$\sum_{m<n} |\mu_{i_n,j_n}(B_{i_m,j_m})| < 1. \tag{4.4.11}$$

La desigualdad (4.4.3) con $(i,j) := (i_n, j_n)$ nos dice que

$$|\mu_{i_n,j_n}(B_{i_n,j_n})| > j_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \tag{4.4.12}$$

Dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S^{n+1}$ domina a $S^n$ se tiene por la Proposición 55 que $\{t^i : i \in \mathbb{N}\}$ es un árbol $NV$ contenido en $T$, por tanto la Proposición 53 implica que

$$\bigcup_i \mathcal{B}_{t^i} = \mathcal{J}(K).$$

De (4.4.8) se deduce que

$$H := \bigcup_{s\in\mathbb{N}} B_{i_s j_s} \in \mathcal{J}(K)$$

lo que junto a la igualdad anterior implica que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$H \in \mathcal{B}_{t^r}.$$

La sucesión $(i_n)_n := (1, 1, 2, 1, 2, 3, \ldots)$ contiene una subsucesión $(i_{n_p})_p$ tal que $i_{n_p} = r$, para cada $p \in \mathbb{N}$, y además $(n_p)_p$ es estrictamente creciente. Por la construcción realizada se tiene que la medida $\mu_{i_{n_p},j_{n_p}} = \mu_{r,j_{n_p}} \in M_{t^r}$, para cada $p \in \mathbb{N}$, y de la inclusión

$$\{\mu_{i_{n_p} j_{n_p}} : p \subset \mathbb{N}\} \subset M_{t^r}$$

se deduce que $\{\mu_{i_{n_p}j_{n_p}} : p \subset \mathbb{N}\}$ es un subconjunto puntualmente acotado en $\mathcal{B}_{t^r}$. Dado que $H := \bigcup_{s\in\mathbb{N}} B_{i_s j_s} \in \mathcal{B}_{t^r}$ se tiene, en particular, que

$$\sup\{\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(H)\right| : p \in \mathbb{N}\} < \infty. \tag{4.4.13}$$

Para cada número natural $p$ se obtiene una partición del conjunto $H$ con los conjuntos Jordan medibles $C_p := \bigcup_{m<n_p} B_{i_m,j_m}$, $B_{i_{n_p}j_{n_p}}$ y $D_p := \bigcup_{n_p<m} B_{i_m,j_m}$, que por (4.4.11), (4.4.12) y (4.4.10) verifican las desigualdades

$$\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(C_p)\right| < 1,$$

$$\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(B_{i_{n_p}j_{n_p}})\right| > j_{n_p}$$

y

$$\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}\right|(D_p) < 1.$$

Dado que (4.4.8) implica que $D_p \in \mathcal{J}(K)$ y

$$\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(D_p)\right| \leqslant \left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}\right|(D_p)$$

se tiene, para cada $p \in \mathbb{N}$, la desigualdad

$$\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(H)\right| > -\left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(C_p)\right| + \left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(B_{i_{n_p}j_{n_p}})\right| - \left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(D_p)\right| > j_{n_p} - 2,$$

que implica la igualdad

$$\lim_p \left|\mu_{i_{n_p}j_{n_p}}(H)\right| = \infty,$$

que contradice a (4.4.13). ∎

**Comentario 91.** *El Teorema 90 es válido si $K$ es un subconjunto Jordan medible y acotado de $\mathbb{R}^k$, pues entonces $K$ está contenido en un intervalo compacto $\prod\{[a_i, b_i] : 1 \leqslant i \leqslant k\}$.*

No obstante se ha utilizado en el Teorema 90 un intervalo $k$-dimensional compacto $K := \prod_{1\leqslant i\leqslant k}[a_i, b_i]$ de $\mathbb{R}^k$, siguiendo el conjunto $K$ utilizado por Valdivia en su teorema de 2013 en [30], donde se prueba que $J(K)$ tiene la propiedad $sN$, resultado que inspiró nuestro Teorema 90.

**Comentario 92.** *El análisis de la demostración del Teorema 90 nos lleva directamente a la demostración de la siguiente proposición que nos da unas condiciones que implican que un álgebra de conjuntos tenga la propiedad $wN$.*

**Proposición 93.** *Sea $(\mathcal{A}_n)_n$ una sucesión decreciente de subconjuntos de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$,*

1. *$\Omega$ es la unión de una subfamilia finita de $\mathcal{A}_n$ .*
2. *$\{A \cap B : A \in \mathcal{A}_n,\ B \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}_n$.*
3. *$\{C \cup D : C, D \in \mathcal{A}_{n+1}\} \subset \mathcal{A}_n$.*

*Entonces $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $wN$ si cuando una sucesión $(A_n)_n$ de elementos disjuntos dos a dos del álgebra $\mathcal{A}$ verifica que $A_n \in \mathcal{A}_n$ y que existe un $B_n \in \mathcal{A}_n$ que contiene a $\cup_{n<m} A_m$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que entonces que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Se omite la demostración de esta proposición debido a que se deduce, con cambios obvios y naturales, de la demostración del Teorema 90, que prueba que $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$.

Es obvio que $\mathcal{J}(K)$ y cualquier $\sigma$-álgebra verifican esta proposición, por lo que los Teoremas 65 y 90 son consecuencia de esta proposición.

## 4.5 Aplicaciones

Los resultados indicados en la sección 3.5 como aplicaciones del Teorema 65 para una $\sigma$-álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$ son aplicables al álgebra $\mathcal{J}(K)$, ya que dicha álgebra tiene la propiedad $wN$, que, por la Proposición 50 es equivalente a la propiedad $w(wN) = w^2N$.

Por tanto, en los enunciados siguientes se omiten las demostraciones por su similitud con el caso de $\sigma$-álgebra considerado en la sección 3.5, sustituyendo el Teorema 65 por el Teorema 90.

La proposición siguiente es la versión $\mathcal{J}(K)$ de la Proposición 68.

**Proposición 94.** *Sea* $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_i} : (m_1, m_2, \ldots, m_i) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$ *una malla creciente en* $\mathcal{J}(K)$ *y sea*

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i} : (m_1, m_2, \ldots, m_i) \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

*la malla creciente formada por los conjuntos de* $\mathcal{B}$ *que tienen la propiedad* $wN$*. Cada sucesión* $(\mu_r)_r$ *de* $\mathrm{ba}(\mathcal{J}(K))$ *que sea*

$$\tau_s(\mathcal{C}_{m_1,m_2,\ldots,m_i}) - \textit{convergente}$$

*para algún elemento de* $\mathcal{C}$ *es* $\tau_s(\mathcal{S})$*-convergente.*

Los Corolarios 66 y 67 son obviamente válidos cuando $\mathcal{A}$ es el álgebra $\mathcal{J}(K)$ de subconjuntos Jordan medibles en un intervalo compacto $K$ de $\mathbb{R}^k$. Los enunciados análogos a las Proposiciones 74, 78 y 80 en el álgebra $\mathcal{J}(K)$ son las tres proposiciones siguientes.

**Proposición 95.** *Sea* $\mu$ *una medida vectorial finitamente aditiva y acotada definida en el álgebra* $\mathcal{J}(K)$ *de los subconjuntos Jordan medibles de* $K$ *y con valores en un espacio vectorial topológico* $E(\tau)$*. Si* $\mathcal{M}$ *es una malla creciente en* $E$ *se tiene que los conjuntos de* $\mathcal{M}$ *cuya antiimagen por* $\mu$ *tiene la propiedad* $N$ *forman una malla creciente*

$$\{E_t : t \in \cup_s \mathbb{N}^s\}$$

*en* $E$*, tal que si* $\tau_t$ *es una topología en* $E_t$ *más fina que la topología relativa* $\tau|_{E_t}$ *inducida por* $\tau$ *y tal que* $E_t(\tau_t)$ *es un espacio* $p$*-*$(LF)$*, entonces cada* $p$*-*$(LF)$ *malla creciente* $\mathcal{W}$ *que define* $E_t(\tau_t)$ *contiene una malla creciente*

$$\{F_v(\tau_v) : v \in \cup_{1\leqslant s\leqslant p} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que* $\mu(\mathcal{J}(K))$ *es un subconjunto acotado en cada* $F_v(\tau_v)$*, con* $v \in \mathbb{N}^p$*.*

**Proposición 96.** *Sea* $\mu$ *una medida vectorial finitamente aditiva y acotada definida en el álgebra* $\mathcal{J}(K)$ *y con valores en un espacio vectorial topológico* $E(\tau)$*. Si* $\mathcal{M}$ *es una* $NV$ *malla creciente en* $E$ *se tiene que los conjuntos de* $\mathcal{M}$ *cuya antiimagen por* $\mu$ *tiene la propiedad* $N$ *forman una* $NV$ *malla creciente* $\{E_t : t \in T\}$ *en* $E$*, tal que si* $\tau_t$ *es una topología* *en $E_t$ más fina que la topología relativa $\tau|_{E_t}$ inducida por $\tau$ y $E_t(\tau_t)$ es un espacio $NV$-$(LF)$, entonces cada $NV$-$(LF)$ malla creciente $\mathcal{W}$ que define $E_t(\tau_t)$ contiene una $NV$-malla creciente*

$$\mathcal{W}'_T := \{E_{w(i)}(\tau_{w(i)}) : w = (w_1, w_2, \dots, w_p) \in W,\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

*tal que $\mu(\mathcal{J}(K))$ es un subconjunto acotado en cada $E_w(\tau_w)$, con $w \in W$.*

**Proposición 97.** *Sea $\mu$ una medida finitamente aditiva y acotada definida en el álgebra $\mathcal{J}(K)$ con valores en un espacio vectorial topológico $E(\tau)$. Cada $p$-malla creciente en $E$ contiene una $p$-malla creciente*

$$\mathcal{T} := \{E_t : t \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant p} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que cada $q(t)$-malla creciente en cada $E_t \in \mathcal{T}$ contiene una $q(t)$-malla creciente*

$$\mathcal{V}_t := \{E_{t\times v} : v \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant q} \mathbb{N}^s\}$$

*tal que si:*

1. *si $E_{t\times v} \in \mathcal{V}_t$*
2. *y si la topología relativa $\tau|_{E_{t\times v}}$ es sucesionalmente completa,*

*entonces $\mu(\mathcal{J}(K)) \subset E_{t\times v}$.*

De esta proposición y de la completitud de los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita se deduce el siguiente corolario, que es la versión $\mathcal{J}(K)$ del Corolario 81.

**Corolario 98.** *Sea $\mu$ una medida vectorial finitamente aditiva y acotada definida en el álgebra $\mathcal{J}(K)$ con valores en un límite inductivo $E(\tau) = \sum_{m_1} E_{m_1}(\tau_{m_1})$ de una sucesión creciente $(E_{m_1}(\tau_{m_1}))_{m_1}$ de espacios vectoriales topológicos de dimensión numerable. Existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal para cada $n_1 \geqslant m_1$ sucede que cada $q(n_1)$-malla creciente en $E_{n_1}$ de espacios vectoriales contiene una $q(n_1)$-malla creciente $\mathcal{V}_{n_1} := \{E_{n_1\times v} : v \in \cup_{1 \leqslant s \leqslant q(n_1)} \mathbb{N}^s\}$ tal que:*

1. *si $E_{n_1\times v} \in \mathcal{V}_{n_1}$*
2. *y si la dimensión de $E_{n_1\times v}$ es finita,*

*entonces $\mathcal{J}(K) \subset E_{n_1\times v}$.*

# Capítulo 5

# Algunos problemas abiertos.

## 5.1 Un problema abierto (Valdivia, 2013).

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ y $(\widetilde{L(\mathcal{A})}, \|\cdot\|)$ el espacio de Banach obtenido al formar la completación del espacio normado $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$ generado por la envoltura lineal de las funciones características

$$\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$$

de los conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$ con la norma supremo, cuyo dual con la norma dual es isométrico al espacio de Banach $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ de las medidas finitamente aditivas definidas en $\mathcal{A}$ con la norma variación.

Si $f \in \widetilde{L(\mathcal{A})}$ y $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{A})$ se tiene que el valor de $\mu$ en $f$ es

$$\mu(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

por lo que tiene cierta dificultad evaluar $\mu(f)$ cuando $f \in \widetilde{L(\mathcal{A})} \backslash L(\mathcal{A})$.

Por el teorema de Banach-Steinhaus si

$$M := \{\mu_i : i \in I\}$$

es un subconjunto de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ puntualmente acotado en $\widetilde{L(\mathcal{A})}$ entonces $M$ es un subconjunto acotado de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$. Desde el punto de vista práctico, la principal dificultad de la aplicación de este teorema es la evaluación de las integrales

$$\mu_i(f) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_i,$$

para cada $f \in \widetilde{L(\mathcal{A})}\backslash L(\mathcal{A})$, siendo muy sencillo el cálculo de $\mu_i(g)$ cuando $g \in L(\mathcal{A})$, pues al ser

$$g = c_1 e_{A_1} + \cdots + c_n e_{A_n}$$

se tiene que

$$\mu_i(g) = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu_i = c_1\mu_i(A_1) + \cdots + c_n\mu_i(A_n).$$

La gran simplificación que aporta el Teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck (en breve *NDG* y expuesto en [3, 4, 5, 21], entre otros) consiste en probar que si $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra, una condición suficiente, y obviamente necesaria, para la acotación en norma de un subconjunto $M := \{\mu_i : i \in I\}$ de $(\mathrm{ba}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ es la acotación puntual de $M$ en $L(\mathcal{A})$, que equivale a la acotación puntual de las formas lineales $\{\mu_i : i \in I\}$ en las funciones características del conjunto

$$\{e_A : A \in \mathcal{A}\},$$

que es lo mismo que la acotación puntual de las medidas $\{\mu_i : i \in I\}$ en cada conjunto de la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$.

Valdivia simplificó aún más este teorema al demostrar en [29] que si una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ se expresa como una unión numerable creciente de subconjuntos de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \cup_m \mathcal{B}_m,$$

entonces existe un índice $n$ tal que el Teorema *NDG* tiene validez sustituyendo $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}_n$, y se dice entonces que $\mathcal{B}_n$ tiene la propiedad $N$.

Se ha expuesto que la tesis de este resultado de Valdivia lleva a decir que un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto

$\Omega$ tiene la propiedad fuerte de Nikodym, propiedad $sN$ en breve, si la versión de Valdivia del teorema $NDG$ es cierta en $\mathcal{B}$, i.e., que para cada cubrimiento numerable creciente $(\mathcal{B}_m)_m$ de $\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad $N$.

El resultado de Schachemayer en [27] de que el álgebra $\mathcal{J}([0,1])$ de los subconjuntos Jordan medibles del intervalo $[0,1]$ tiene la propiedad $N$, mejorado por Valdivia en 2013 al demostrar en [30] que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ de los subconjuntos Jordan medibles de un intervalo compacto $K$ contenido en $\mathbb{R}^k$ tiene la propiedad fuerte de Nikodym, sugirió a Valdivia proponer el siguiente problema, aún abierto:

**Problema 99** (Valdivia, 2013)**.** *¿Es cierto que en un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega$ la propiedad de Nikodym implica la propiedad fuerte de Nikodym?*

Por lo que sabemos ese problema sigue abierto y da la impresión que aún se está lejos de encontrar la solución.

## 5.2 El problema de Valdivia en espacios de Banach. Conjuntos $DAU$.

La sección anterior lleva de forma natural a plantear cuestiones en un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ relacionadas con la versión fuerte de Valdivia del teorema $NDG$. Su exposición se facilita con la definición siguiente de conjuntos $DAU$, utilizada entre otros por [7, 22, 23, 25, 26], así como con algunas propiedades relacionadas que vamos a exponer.

En las propiedades que son conocidas se ha indicado la referencia y se ha aportado una demostración, intentando siempre que fuese más sencilla que la original o las conocidas.

**Definición 100** (J. Fernández, S. Hui y H. Shapiro, 1989)**.** *Un subconjunto $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es $DAU$ si para cada subconjunto $M$ de su dual $(E', \|\cdot\|)$ provisto con la norma dual*

$$\sup_{f\in M}|f(x)| < \infty, \quad \forall x \in C \Longrightarrow \sup_{f\in M}\|f\| = \sup_{\substack{f\in M\\ x\in B_E(0,1)}}|f(x)| < \infty,$$

*i.e., en* $(E', \|\cdot\|)$ *la* $C$*-acotación puntual de un subconjunto implica su acotación respecto a la norma dual.*

Es bien conocido que puede utilizarse la norma dual o cualquier otra norma equivalente.

En inglés se dice que $C$ es "un subconjunto *ubd*" (iniciales de "*uniform boundedness deciding subset*" que traducimos por "*subconjunto que determina la acotación uniforme en* $B_E(0,1)$", de lo que procede la abreviatura $DAU$).

Se tiene pues que el subconjunto $C$ es $DAU$ si el Principio de acotación uniforme es válido en $C$, siendo obvio que son equivalentes las tres condiciones siguientes

1. $C$ es $DAU$,

2. $C\backslash\{0\}$ es $DAU$,

3. $\{\|x\|^{-1}x : x \in C\backslash\{0\}\}$ es $DAU$,

lo que nos permite reducir el estudio de los conjuntos $DAU$ a los subconjuntos de la esfera unidad $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ que tienen la propiedad de ser $DAU$.

Por el teorema de Banach-Steinhaus se tiene que la esfera unidad de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ es un conjunto $DAU$. El ejemplo siguiente proporciona subconjuntos propios de $S_E$ que son $DAU$.

**Ejemplo 101.** *Font probó en [11] que el conjunto de los puntos extremos (incluso el conjunto de los puntos expuestos) de la esfera unidad de un espacio de Banach reflexivo forman un conjunto DAU.*

La situación respecto a espacios de Banach no reflexivos es diferente, pues es sencillo probar que los conjuntos de puntos extremos de las esferas unidad de $l_\infty$ o $L_\infty[0,1]$ son conjuntos $DAU$, en tanto que no se conocen subconjuntos propios de las esferas unidad $S_{c_0}$ o $S_{l_1}$ de $c_0$ o $l_1$ que sean conjuntos $DAU$.

La proposición siguiente caracteriza cuándo un conjunto es $DAU$. Otra caracterización de los conjuntos $DAU$ se da en la Proposición 108.

**Proposición 102.** *Un subconjunto $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es $DAU$ si y solo si su envoltura lineal* $(\text{span}\{C\}, \|\cdot\|)$ *es un subespacio denso y tonelado de* $(E, \|\cdot\|)$.

*Demostración.* Supongamos que $C$ es un subconjunto $DAU$ y que $M$ es un subconjunto de $(E', \|\cdot\|)$ que es $C$-puntualmente acotado. Entonces $M$ es un subconjunto acotado de $(E', \|\cdot\|)$ por lo que su polar, $M^\circ$, es un entorno de 0 en $(E, \|\cdot\|)$, luego al ser $M^\circ \cap \text{span}\{C\}$ entorno de 0 en $(\text{span}\{C\}, \|\cdot\|)$ se deduce que $(\text{span}\{C\}, \|\cdot\|)$ es un espacio tonelado. Además, considerando el caso particular en que

$$M := C^\circ$$

se tiene, por definición de polar, que $M$ es un subconjunto de $(E', \|\cdot\|)$ que está uniformemente acotado en $C$. Por tanto, lo ya probado implica que

$$M^\circ = C^{\circ\circ} = \overline{\text{absco}\{C\}}$$

es un entorno de 0 en $(E, \|\cdot\|)$, luego

$$E = \cup_n n\overline{\text{absco}\{C\}} \subset \overline{\text{span}\{C\}} \subset E$$

prueba que $\overline{\text{span}\{C\}} = E$, i.e., $\text{span}\{C\}$ es un subespacio denso en $E$.

Recíprocamente, si $(\text{span}\{C\}, \|\cdot\|)$ es tonelado y $M$ es un subconjunto de $E'$ que es $C$-puntualmente acotado entonces del teorema de Hahn-Banach y de la definición de espacio tonelado se deduce que

$$M^\circ \cap (\text{span}\{C\})$$

es un entorno de 0 en $(\text{span}\{C\}, \|\cdot\|)$. Por tanto, si además $\text{span}\{C\}$ es un subespacio denso de $(E, \|\cdot\|)$ se tiene que

$$\overline{M^\circ \cap (\text{span}\{C\})}$$

es un entorno de 0 en $(E, \|\cdot\|)$, lo que prueba que el conjunto cerrado $M^\circ$ es entorno del origen en $(E, \|\cdot\|)$. Entonces se tiene que $M^{\circ\circ}$ es un subconjunto acotado $(E, \|\cdot\|)'$. Por tanto, $M$, que es un subconjunto del bipolar $M^{\circ\circ}$, es también un subconjunto acotado $(E, \|\cdot\|)'$, lo que demuestra que $C$ es un conjunto $DAU$. ∎

De esta Proposición y de la Proposición 28 se deduce el corolario siguiente que identifica las propiedades $N$ y $DAU$ en $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.

**Corolario 103.** *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $N$ si y solo si $\{e_B : B \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto $DAU$ de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.*

Vamos a obtener otra caracterización de la propiedad $N$ utilizando conjuntos normantes, cuya definición y algunas propiedades se recuerdan a continuación. Como se ha indicado, se facilitan demostraciones que se ha procurado que sean muy sencillas.

**Definición 104.** *Un subconjunto $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es normante si el funcional de Minkowski de su bipolar $C^{\circ\circ}$ es una norma en $E$ equivalente a la norma $\|\cdot\|$.*

La proposición siguiente prueba que dado un conjunto normante $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ la proyección de $C\backslash\{0\}$ desde el origen sobre la esfera unidad $S_E$ es un conjunto normante.

**Proposición 105.** *Si $C$ es un subconjunto normante de $(E, \|\cdot\|)$ entonces*

$$\{\|x\|^{-1}x : x \in C\backslash\{0\}\}$$

*es un conjunto normante contenido en $S_E$.*

*Demostración.* De la existencia de $0 < r < R$ tales que $B(0, r) \subset C^{\circ\circ} \subset B(0, R)$, se deduce que

$$B(0, rR^{-1}) \subset R^{-1}C^{\circ\circ} \subset B(0, 1).$$

Además es evidente que

$$R^{-1}C \subset \{\|x\|^{-1}x : x \in C\backslash\{0\}\}^{\circ\circ} \subset B(0, 1),$$

de lo que se deduce que

$$R^{-1}C^{\circ\circ} \subset \{\|x\|^{-1}x : x \in C\backslash\{0\}\}^{\circ\circ}.$$

De estas relaciones se obtiene que

$$B(0, rR^{-1}) \subset \{\|x\|^{-1}x : x \in C\backslash\{0\}\}^{\circ\circ} \subset B(0, 1).$$

Por tanto, $\{\|x\|^{-1}x : x \in C\backslash\{0\}\}$ es un conjunto normante contenido en la esfera unidad $S_E$. ∎

La proposición siguiente facilita varias caracterizaciones de la propiedad de ser conjunto normante.

**Proposición 106.** *Sea $C$ un subconjunto del espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Las condiciones siguientes referidas al par dual $< E, E' >$ son equivalentes:*

1. *$C$ es normante*
2. *$C^{\circ\circ}$ es normante*
3. *$C^{\circ\circ}$ es un entorno acotado de $0$ del espacio $(E, \|\cdot\|)$.*
4. *$C$ y $C^{\circ}$ son subconjuntos acotados de $(E, \|\cdot\|)$ y $(E', \|\cdot\|)$, respectivamente.*
5. *$C^{\circ}$ es normante.*

*Demostración.* $1 \iff 2$. Si $C$ es normante existen dos números reales $r$ y $r'$ tales que $0 < r < r'$ y

$$B_E(0, r) \subset C^{\circ\circ} \subset B_E(0, r').$$

De esta relación y de la igualdad

$$C^{\circ\circ} = (C^{\circ\circ})^{\circ\circ}$$

se deduce la equivalencia entre las dos primeras condiciones.

$1 \iff 3$. Esta equivalencia se deduce de que la existencia de $0 < r < r'$ que verifiquen las inclusiones

$$B_E(0, r) \subset C^{\circ\circ} \subset B_E(0, r')$$

equivale a que $C^{\circ\circ}$ sea un entorno de 0 del espacio $(E, \|\cdot\|)$ y a que $C^{\circ\circ}$ sea un subconjunto acotado de dicho espacio.

$1 \iff 4$. Es evidente que en los espacios $(E, \|\cdot\|)$ y $(E', \|\cdot\|)$ se tiene que:

$$C \text{ y } C^{\circ} \text{ son acotados } \iff C^{\circ\circ} \text{ y } (C^{\circ})^{\circ\circ} \text{ son acotados}$$

y que

$$B_E(0,r) \subset C^{\circ\circ} \subset B_E(0,r')$$

es equivalente a

$$C^{\circ\circ} \subset B_E(0,r') \quad \text{y} \quad (C^{\circ\circ})^{\circ} \subset B_{E'}(0,r^{-1}),$$

donde las dos últimas inclusiones caracterizan que $C^{\circ\circ}$ y $C^{\circ} = (C^{\circ})^{\circ\circ} = (C^{\circ\circ})^{\circ}$ sean subconjuntos acotados de $(E, \|\cdot\|)$ y $(E', \|\cdot\|)$, respectivamente. De estas observaciones se deduce inmediatamente la equivalencia entre las condiciones 1 y 4.

$1 \iff 5$. Tomando polares se deduce la equivalencia entre

$$B_E(0,r) \subset C^{\circ\circ} \subset B_E(0,R)$$

y

$$B_{E'}(0,R^{-1}) \subset (C^{\circ\circ})^{\circ} \subset B_E(0,r^{-1}),$$

lo que prueba la equivalencia entre las condiciones 1 y 5, pues ya se ha indicado que $(C^{\circ\circ})^{\circ} = (C^{\circ})^{\circ\circ} = C^{\circ}$. ∎

**Definición 107.** *Se dice que un subconjunto $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es fuertemente normante, s-normante para abreviar, si cada cubrimiento creciente $(C_m)_m$ de $C$ contiene un $C_n$ que es normante.*

La proposición siguiente es una formulación equivalente a la caracterización de los conjuntos $DAU$ obtenida en [22], que se llaman conjuntos *ubd* en dicho artículo.

**Proposición 108** (Nygaard 2001)**.** *Un subconjunto acotado $C$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es $DAU$ si y solo si $C$ es s-normante.*

*Demostración.* Sea $C$ un subconjunto acotado de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$.

Supongamos que $C$ es $s$-normante. Entonces si $M$ es un subconjunto de $E'$ que es $C$-puntualmente acotado se tiene que

$$C = \bigcup_m \{x \in C : |f(x)| \leqslant m,\ f \in M\}.$$

Por tanto, existe $C_n := \{x \in C : |f(x)| \leqslant n,\ f \in M\}$ que es normante y, por la condición 4 de la Proposición 106, se tiene que $C_n^\circ$ es un subconjunto acotado de $(E', \|\cdot\|)$. De $M \subset (n^{-1}C_n)^\circ = nC_n^\circ$ se deduce que $M$ es un subconjunto acotado de $(E, \|\cdot\|)$, luego $C$ es un subconjunto $DAU$ de $(E, \|\cdot\|)$.

Si el conjunto acotado $C$ no es $s$-normante entonces $C$ es la unión de una sucesión creciente $(C_m)_m$ de subconjuntos tales que ninguno de los conjuntos $C_m$ es normante. Por la condición 4 de la Proposición 106 se tiene que cada $C_m^\circ$ es un subconjunto no acotado de $(E', \|\cdot\|)$. Para cada $m$ existe $f_m \in C_m^\circ$ tal que $\|f_m\| = m$, luego $M := \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto no acotado de $(E', \|\cdot\|)$ que, por la construcción realizada, se tiene que $M$ está puntualmente acotado en $C$. Por tanto el conjunto $C$ no es $DAU$. ∎

**Corolario 109.** *Sea $C$ es un subconjunto de la esfera unidad $S$ de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Si $C$ es no-DAU existe un conjunto no normante $A$ contenido en la bola unidad cerrada de $(E, \|\cdot\|)$ tal que* $\mathrm{span}\{A\} = \mathrm{span}\{C\}$.

*Demostración.* Por la Proposición 108 se tiene que $C$ es la unión de una sucesión creciente $(C_m)_m$ de subconjuntos tales que ninguno de los conjuntos $C_m$ es normante. Por la condición 4 de la Proposición 106 se tiene que cada $C_m^\circ$ es un subconjunto no acotado de $(E', \|\cdot\|)$, por lo que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe

$$f_m \in C_m^\circ, \quad \|f_m\| = m, \quad \text{i.e.,} \quad \sup_{\overline{B(0,1)}} |f_m(x)| = m,$$

por tanto dados dos números naturales $m$ y $n$ se tiene que

$$\sup_{m^{-1}C_m} |f_n(x)| \leqslant 1,$$

puesto que:

1. Si $m \leqslant n$,

$$\sup_{m^{-1}C_m} |f_n(x)| \leqslant m^{-1} \sup_{C_n} |f_n(x)| \leqslant m^{-1} \leqslant 1,$$

2. y si $n < m$ entonces

$$\sup_{m^{-1}C_m} |f_n(x)| \leqslant m^{-1} \sup_{\overline{B_E(0,1)}} |f_n(x)| = m^{-1}n < 1.$$

   Por tanto, el conjunto

$$A := \cup_m m^{-1}C_m$$

   verifica que

$$\sup_{x\in A} |f_n(x)| \leqslant 1,$$

   para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $A$ es un subconjunto de la bola cerrada unidad $\overline{B_E(0,1)}$ cuyo conjunto polar $A^\circ$ contiene al conjunto no acotado

$$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   La condición 4 de la Proposición 106 implica que $A$ es un conjunto no normante. De la construcción realizada se deduce de inmediato que

$$\operatorname{span}\{A\} = \operatorname{span}\{C\}. \quad \blacksquare$$

De la Proposición 108 y del Corolario 103 se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 110.** *Un subconjunto $\mathcal{B}$ de un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $N$ si y solo si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad s-normante, i.e., para cada cubrimiento creciente $(\mathcal{B}_m)_m$ de $\mathcal{B}$ existe un $\mathcal{B}_n$ tal que $\{e_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ es un subconjunto normante de $(L(\mathcal{A}), \|\cdot\|)$.*

Este Corolario junto al Corolario 103 motivan la siguiente definición, así como los tres problemas comentados después de dicha Definición.

**Definición 111.** *Se dice que un subconjunto $F$ de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad DAU fuerte, sDAUen breve, si en cada cubrimiento numerable creciente $(F_m)_m$ de $F$ existe un $F_n$ que tiene la propiedad DAU.*

**Problema 112** (Versión en espacios de Banach del problema de Valdivia de 2013)**.** *Sea $F$ un subconjunto de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$. ¿Es cierto que si $F$ es un subconjunto DAU entonces $F$ es sDAU?*

Si la respuesta fuese negativa surgen nuevas preguntas, por ejemplo:

**Problema 113.** *Caracterizar los espacios de Banach para los que en sus subconjuntos las propiedades DAU y sDAUson equivalentes.*

En el supuesto de que existan espacios de Banach $(E, \|\cdot\|)$ con subespacios en los que las propiedades *DAU* y *sDAU* no sean equivalentes, aparece de forma natural la pregunta siguiente.

**Problema 114.** *Caracterizar los subespacios de un espacio de Banach para los que las propiedades DAU y sDAU son equivalentes.*

## 5.3 Consideraciones finales. Agradecimientos.

Los resultados teóricos de Teoría de la Medida obtenidos en esta Tesis sugieren nuevos problemas en espacios de Banach y en espacios normados, así como el reto de encontrar ejemplos.

En el apartado anterior hemos definido la propiedad *sDAU*, que es la versión general de la propiedad $sN$.

Recordando que en la Tesis se ha demostrado que el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad $wN$ es evidente que se puede considerar el estudio de la propiedad análoga en espacios normados, que deberíamos denominar propiedad $wDAU$, para la que se pueden formular problemas en términos parecidos a los anteriores, que nos deben llevar a obtener nuevos ejemplos y aplicaciones.

Finalmente, expresamos nuestro agradecimiento a los autores de trabajos anteriores relacionados con este tema, en particular a los que han

hecho aportaciones recientes en este campo, como el profesor Valdivia por sus descubrimientos de que tanto cualquier $\sigma$-álgebra $S$ como el álgebra $\mathcal{J}(K)$ tienen la propiedad $sN$, y a los profesores Kąkol y López-Pellicer por la obtención de que cualquier $\sigma$-álgebra $S$ tiene la propiedad $w(sN)$, que en esta tesis se ha probado que es una propiedad equivalente a la propiedad $wN$.

Es innegable que estos resultados junto al estímulo y apoyo de los directores de esta Tesis, Profesores J. Mas y S. Moll, nos han guíado hacia los nuevos resultados obtenidos, que esperamos sean el punto de partida de nuevas aportaciones.

# Bibliografía


[1] A. Aizpuru, *On the Grothendieck and Nikodym properties of Boolean algebras.* Rocky Mountain J. Math. **22** (1992) 1–10.

[2] A. Aizpuru, *The Nikodým propiedad and local properties of Boolean algebras.* Colloq. Math. **71** (1) (1996) 79–85.

[3] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1984.

[4] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures.* Mathematical Surveys and Monographs **15**, American Mathematical Society, Providence, 1977.

[5] J. Dieudonné, *Sur la convergence de suites de measures de Radon.* An. Acad. Brasi. Ciên. **23** (1951) 277–282.

[6] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators.* Part I. *General theory.* Part II. *Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space.* Part III. *Spectral operators.* Reprint of original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[7] J. Fernández, S. Hui, H. Shapiro, *Unimodular functions and uniform boundedness*, Publ. Mat. **33** (1989) 139–146.

[8] J.C. Ferrando, *Strong barrelledness properties in certain $l_0^\infty(\mathcal{A})$ spaces.* J. Math. Anal. Appl. **190** (1995) 194–202.

[9] J.C. Ferrando, M. López-Pellicer, *Strong barrelledness properties in $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ and bounded finite additive measures*, Math. Ann. **287** (1990) 727–736.

[10] J.C. Ferrando, M. López-Pellicer (Editores), *Descriptive Topology and Functional Analysis*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, PROMS **80**. Springer (2014)

[11] V.P. Font, *On exposed and smooth points of convex bodies in Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996) 51–58.

[12] W.H. Graves, R.F. Wheeler, *On the Grothendieck and Nikodým properties for algebras of Baire, Borel and universally measurable sets*. Rocky Mountain J. Math. **13** (no. 2) (1983) 333–353.

[13] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distibutions*, Dover Publications, Mineola, New York (2012).

[14] H. Jarchow, *Locally convex spaces*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, (2008, reedición por el Institute of Mathematics, University of Zürich).

[15] J. Kąkol, W. Kubiś, M. López-Pellicer, *Descriptive topology in selected topics of functional analysis*. Developments in Mathematics **24**. Springer, New York, 2011.

[16] J. Kąkol, M. López-Pellicer, *On Valdivia strong version of Nikodym boundedness propiedad*. J. Math. Anal. Appl., 446, (2017), 1–17. DOI 10.1016/j.jmaa.2016.08.032

[17] G. Köthe, *Topological Vector Spaces* I *and* II, Springer (1969, 1979).

[18] S. López-Alfonso, J. Mas, S. Moll, *Nikodym boundedness propiedad and webs in $\sigma$-álgebras*. RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 711–722, DOI 10.1007/s13398-015-0260-4

[19] S. López-Alfonso, *On Schachermayer and Valdivia results in álgebras of Jordan measurable sets*. RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. **110** (2016) 799–808, DOI 10.1007/s13398-015-0267-x

[20] M. López-Pellicer, *Webs and Bounded Finitely Additive Measures*, J. Math. Anal. Appl. **210** (1997) 257–267.

[21] O.M. Nikodym, *Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensembles abstrait.* Monatsh. Math. U. Phys. **40** (1933) 418–426.

[22] O. Nygaard, *A strong Uniform Boundedness Principle in Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001) 861–863.

[23] O. Nygaard, *Thick sets in Banach spaces and their properties*, Quaest. Math. **29** (2006) 50–72.

[24] P. Pérez Carreras, J. Bonet, *Barrelled locally convex spaces.* North-Holland Mathematics Studies, **131**. Notas de Matemática. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[25] G. Plebanek, D. Sobota, *Countable tightness in the spaces of regular probability measures.* Fund. Math. **229** (2015), 159–170.

[26] D. Sobota, *On Nikodym's Uniform Boundedness Principle and its various consequences.* Preprint.

[27] W. Schachermayer, *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean álgebras.* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **214** (1982), 33 pp.

[28] M. Valdivia, *On the closed graph theorem.* Collect. Math. **22** (1971) 51–72.

[29] M. Valdivia, *On certain barrelled normed spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979) 39–56.

[30] M. Valdivia, *On Nikodym boundedness propiedad*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **107** (2013) 355–372.