Resumen

El clásico teorema de Nykodym (1933) afirma que si un subconjunto H de medias complejas numerablemente aditivas definidas en una σ-algebra $\mathcal{S}$ está acotado en cada elemento de $\mathcal{S}$, entonces H está uniformente acotado, es decir, $\sup\{\lambda(A) : \lambda \in H, A \in \mathcal{S}\} < \infty$. Es bien conocido que este teorema no es cierto en general si se sustituye la σ-álgebra $\mathcal{S}$ simplemente por un álgebra.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω, y consideremos el espacio de Banach $ba(\mathcal{A})$ de las medias reales (o complejas) finitamente aditivas de variación acotada definidas en $\mathcal{A}$. Un subconjunto $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ se dice que tiene la propiedad N (propiedad de Nikodym) si cada subconjunto M of $ba(\mathcal{A})$ que sea $\mathcal{B}$-puntualmente acotado se tiene que M es uniformemente acotado en $\mathcal{A}$. Recordemos que el clásico teorema de Nikodym-Dieudonné-Grothendieck's dice que cada σ-algebra tiene la propiedad N-property. Además se dice que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad N-fuerte si cada para cada cubrimiento numerable creciente $(\mathcal{B}_m)_m$ de $\mathcal{B}$ existe $\mathcal{B}_n$ que tiene la propiedad N-property. Valdivia demmostró en 1979 que cada σ-algebra tiene la propiedad N-property.

El mencionado teorema de Valdivia motivó demostrar que cada σ-algebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Ω tiene la propiedad N para mallas crecientes, es decir, si $(\mathcal{B}_{m_1})_{m_1}$ es un cubrimiento numerable creciente de $(\mathcal{S}$ y si $(\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p,m_{p+1}})_{m_{p+1}}$ es un cubrimiento numerable creciente de $\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$, para cada números naturales p, m_i, con $1 \leq i \leq p$, entonces existe una sucesión $(n_r)_r$ tal que $\mathcal{B}_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ tiene la propiedad N opara cada $r \geq 1$.

En la tesis se prueba que casi todas las cadenas infinitas en una malla

creciente $\{\mathcal{B}_{m_1,m_2,\ldots,m_p} : (m_1, m_2, \ldots, m_p) \in \bigcup_s \mathbb{N}^s\}$ están compuestas de conjuntos que tienen la propiedad N para malals crecientes.

El resultado principal de la tesis prueba que el algebra $\mathcal{J}(K)$ de los subconjuntos Jordan medibles de un intervalo compacto k-dimensional K contenido en $\mathbb{R}^k$ tiene la propiedad N para mallas crecientes. Este resultado mejora el resultado de Valdivia de 2013 de que $\mathcal{J}(K)$ tiene la propiedad fuerte de Nikodym, que a su vez mejoraba un resultado anterior de Schachermayer, quien probó que $\mathcal{J}([0,1])$ tiene la propiedad N.

Se presentan aplicaciones de los resultados obtenidos a medidas vectoriales.