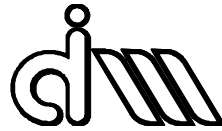


# UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



Trabajo Fin de Máster en Ingeniería Mecánica

---

## MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

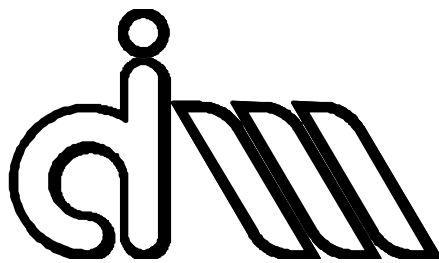
---

*Presentado por:* D. Pedro Javier Izquierdo Santandreu

*Dirigido por:* Dr. D. Javier Carballeira Morado

Valencia, septiembre de 2016







# Resumen

En este trabajo se va a desarrollar una mejora en un programa de simulación dinámica de la interacción entre un vehículo ferroviario y la vía. En particular, en el módulo de resolución del problema de contacto rueda-carril que emplea un método novedoso para obtener la solución del problema geométrico y tratar de encontrar el punto de contacto. La idea es conseguir que esta herramienta de simulación dinámica tenga el menor coste computacional posible, con una buena convergencia y precisión en los resultados incluso para curvas de radio pequeños en la que aparecen puntos de contacto en la zona de la pestaña de la rueda.

En este trabajo no se va a plantear este programa desde su inicio. La finalidad de este Trabajo Fin de Máster es la de investigar y profundizar en ciertos errores que aparecen en la resolución del modelo desarrollado en el grupo de investigación ferroviaria del Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica. El modelo se basa en los trabajos previos realizados por investigadores del grupo.

Una vez estudiado el modelo a fondo y con mayor conocimiento de este, plantear medidas o situaciones que tengan por objetivo subsanar en la medida de lo posible estos errores mencionados.

En primer lugar, se ha hecho a una extensa revisión bibliográfica para conocer como se resuelve en la actualidad el problema geométrico de contacto, en especial cuando existe toque de pestaña, que ofrecen diversos autores que han estudiado el tema. A continuación, se ha hecho un análisis exhaustivo del modelo disponible y su implementación informática, con el objetivo de detectar posibles mejoras a la hora de abordar el problema de negociación en curva, en curvas con radios pequeños.

Finalmente, el planteamiento de estas posibles soluciones se acompañará de resultados obtenidos y comparándolos de una manera gráfica con la bibliografía considerada en este Trabajo Fin de Máster.

**Palabras clave:** Simulación dinámica, contacto rueda-carril, punto de contacto, problema geométrico de contacto, toque entre la pestaña de la rueda y el carril, problema de negociación en curva.

# Abstract

This work deals with an improvement on a dynamic simulation software developed to study the interaction between a railway vehicle and the track. In particular, in the module for the solution of the wheel-rail contact problem that uses an original methodology to solve the geometrical problem when seeking for the contact point. The idea is to reduce the computational cost of this dynamic simulation tool while contact points appear in the wheel flange.

The dynamic simulation software is already available. The main goal of this Master thesis is to solve different errors that emerge in the solution of the model used in this software, which has been developed in previous works of the Railway research group of the Research Centre for Mechanical Engineering. The model will be deeply reviewed to get a better insight on how it works. Then, some changes and improvements will be proposed in order to solve the aforementioned errors.

First, a wide literature review has been done to know how the geometrical contact problem is solved, especially when dealing with flange contact conditions. Then, the model and the computer application will be thoroughly analyzed, in order to find any change that could be done to improve the performance of the software when negotiating small radius curves.

Finally, the results obtained after doing these improvements will be graphically compared with the literature reviewed in this Master thesis.

**Keywords:** Dynamic simulation, wheel-rail contact, contact point, geometrical contact problem, flange contact, curve negotiation.





# Resum

En este treball es desenvoluparà una millora en un programa de simulació dinàmica de la interacció entre un vehicle ferroviària i la via. En particular, en el mòdul de resolució del problema de contacte roda-carril que utilitza un nou mètode per a obtenir la solució del problema geomètric quan es tracta de trobar el punt de contacte. La idea és aconseguir que esta ferramenta de simulació dinàmica tinga el menor cost computacional possible, amb una bona convergència i precisió en els resultats, fins i tot per a corbes amb un radi xicotet a les quals hi apareixen punts de contacte a la zona de la pestanya de la roda.

En este treball no es va a plantejar el programa des d'un inici. La finalitat d'este Treball de Fi de Màster es la d'investigar i aprofundir en alguns errors que apareixen en la resolució del model desenvolupat al grup d'investigació ferroviària del Centre d'Investigació en Enginyeria Mecànica. El model es basa en treballs previs realitzats per investigadors d'aquest grup. Una vegada s'haja estudiat a fons model i amb major coneixment del mateix, es plantejaran mesures que tinguen per objectiu resoldre els errors anomenats abans.

En primer lloc, s'ha procedit a una àmplia revisió bibliogràfica per a conèixer com es resol en l'actualitat el problema geomètric de contacte, especialment quan existeix contacte a la pestanya entre la roda i el carril. A continuació, s'ha fet un anàlisi del model disponible i de la seua aplicació informàtica, per tal de detectar alguna millora a l'hora de resoldre el problema de negociació en corbes, i sobretot, en corbes amb radis xicotets.

Finalment, el plantejament d'aquestes possibles solucions es mostrarà amb els resultats obtesos i amb la seua comparació gràfica amb la bibliografia trobada en aquest Treball Fi de Màster

**Paraules clau:** Simulació dinàmica, contacte roda-carril, punt de contacte, problema de contacte geomètric, contacte a la pestanya, negociació d'una corba.

# Agradecimientos

Este Trabajo Fin de Máster, se ha realizado a partir de los conocimientos obtenidos en el Máster en Ingeniería Mecánica, por lo tanto, enorme gratitud a los profesores por trasladar de una manera clara y concisa esa pequeña parte de sus conocimientos, y sobretodo a mis compañeros por hacer este "viaje" tan ameno y divertido.

En primer lugar, dar las gracias a José Martínez por realizar una anterior gran contribución al programa que se ha estudiado, además de ayudarnos cuando le hemos necesitado. Especial agradecimiento a Andrés Rovira por su genial Tesis Doctoral, que me ha servido de base para los antecedentes en la memoria del trabajo presentada a continuación.

Y por último, agradecimiento infinito a Javier Carballeira, por su paciencia, saber estar, saber hacer y su exquisito trato hacía mí y mi trabajo. Si antes pensaba que eras un gran profesor, ahora estoy seguro de ello. Gracias Javier.

Y como no, a mi familia, amig@s y a mi pareja, por respetar este TFM tanto como yo, dejarme en los momentos de trabajo y saber distraerme en los momentos de "saturación de ideas".

A todos ellos, Gracias.

Valencia, septiembre de 2016



# Índice

<b>1. ANTECEDENTES.....</b>	<b>1</b>
<b>2. OBJETIVOS .....</b>	<b>5</b>
<b>3. MODELOS DE CONTACTO .....</b>	<b>7</b>
<b>3.1. Introducción .....</b>	<b>7</b>
<b>3.2. Clasificación de las teorías de contacto rueda-carril. ....</b>	<b>9</b>
<b>3.3. Problema de contacto rueda-carril.....</b>	<b>12</b>
3.3.1. Enfoques del problema de contacto. ....	18
3.3.2. Problema geométrico de contacto.....	21
3.3.3. Problema Normal. ....	37
3.3.4. Problema tangencial.....	61
<b>4. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO. ....</b>	<b>77</b>
<b>4.1. Introducción. ....</b>	<b>77</b>
4.1.1. Requisitos. ....	77
4.1.2. Antecedentes. ....	78
4.1.3. Procedimiento. ....	79
4.1.4. Hipótesis en las que se basa el modelo. ....	80
<b>4.2. Resolución del Problema. ....</b>	<b>81</b>
<b>4.3. Problema normal de Contacto. ....</b>	<b>86</b>
<b>5. SIMULACIÓN DINÁMICA.....</b>	<b>91</b>
<b>5.1. Estructura del sistema .....</b>	<b>93</b>
<b>5.2. Rutinas a destacar.....</b>	<b>100</b>
<b>5.3. Rutinas modificadas del programa original .....</b>	<b>104</b>
<b>6. COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....</b>	<b>121</b>
<b>7. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJO.....</b>	<b>131</b>
<b>7.1. Conclusiones.....</b>	<b>131</b>
<b>7.2. Futuros Trabajos. ....</b>	<b>132</b>



**Método avanzado para la resolución del problema  
geométrico de contacto rueda-carril para la simulación  
dinámica de vehículos ferroviarios.**

Autor: Pedro Javier Izquierdo Santandreu

Director: Dr. Javier Carballeira Morado

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**





## 1. ANTECEDENTES

Las referencias más importantes para la realización de este trabajo, han sido tanto Andrés Rovira y su excelente trabajo en su Tesis [38] que sirvió de base a esta memoria, como José Martínez y Luis Baeza en su artículo basado en este método [41].

Los primeros estudios del contacto que pueden aplicarse al caso ferroviario se deben a Hertz y a Carter, referido en el libro de Johnson [18].

Hertz en 1882, a partir de sus estudios en el campo del contacto entre superficies elásticas, publicó su teoría para resolver el problema de contacto normal. Este modelo ofrecía una solución analítica al problema de contacto entre los dos cuerpos cuya geometría en las cercanías del contacto se puede definir mediante paraboloides y sus superficies son suaves. Posteriormente, Carter en 1926 publicó un modelo para resolver el problema tangencial que aparece en el contacto entre una rueda y un carril ferroviarios. Se trata de un modelo bidimensional deducido a partir del contacto entre un cilindro (rueda) y un plano (carril).

Desde los años 60 y sobretodo a partir de la década de los 80 del siglo pasado se han desarrollado un gran número de teorías que formulan el problema de contacto rueda-carril. Aportaciones como las de Vermeulen y Johnson [24], Kalker [40, 1, 31, 2], Shen, Hedrick y Elkins [25] o Knothe [8, 6] permitieron obtener una mejor estimación de las fuerzas generadas en el contacto rueda-carril.

Posteriormente han aparecido numerosos trabajos en el campo del contacto rueda-carril, especialmente para superar las limitaciones de la hipótesis de contacto hertziano, que asume que las superficies tienen una curva constante y que el área de contacto es elíptica. Se propusieron diversas

soluciones, incluyendo áreas de contacto basadas en elipse equivalente, modelos semi-hertzianos o formulaciones completas en elementos finitos.

Recientemente, una de las últimas aportaciones es la inclusión de un coeficiente de rozamiento variable para resolver el problema de contacto tangencial .

Este desarrollo de modelos progresivamente más complejos se ha basado, en la mayoría de los casos, en la aplicación de relaciones cinemáticas y modelos de comportamiento del material. Sin embargo, este avance en el aspecto computacional no ha ido acompañado de estudios experimentales sobre el contacto rueda-carril.

Según Evans y Berg [40] en los desafíos aún existentes en el campo de simulación dinámica, todavía existe la necesidad de desarrollar algoritmos de contacto más exactos, más aún si las simulaciones dinámicas se basan en el uso de perfiles de rueda-carril de diseño y usan valores estimados en el coeficiente de rozamiento entre rueda-carril.

Por tanto, en líneas generales se puede afirmar que se ha dedicado gran cantidad de esfuerzo en investigación en esta área y actualmente se dispone de una variedad de alternativas con distintos grados de sofisticación para abordar aspectos como el multicontacto o áreas de contacto no hertzianas. Sin embargo, existe un compromiso entre la precisión y el tiempo de resolución del problema de contacto rueda-carril que permite clasificar los distintos modelos de contacto según sus distintas aplicaciones.

Una de las aplicaciones del contacto rueda-carril es la simulación dinámica. En este tipo de problema, a partir del cálculo de las fuerzas en el contacto rueda-carril, se obtiene el movimiento de los cuerpos que componen el vehículo ferroviario. En este caso, el modelo de contacto utilizado debe

tener asociado un coste computacional bajo, de tal forma que su uso sea compatible con el tiempo total de cálculo de la simulación..

Este trabajo está motivado por la necesidad de obtener un modelo de resolución del problema completo de contacto rueda-carril, cuyos resultados estén contrastados con medidas experimentales. La aplicación de este algoritmo de contacto será para la simulación dinámica y para la estimación del desgaste en los perfiles en el rango de baja frecuencia.

Por tanto este modelo deberá poseer un bajo coste computacional a la vez que una precisión suficiente para su aplicación a la simulación dinámica (cálculo de las fuerzas globales en la interacción rueda carril), como para la estimación del desgaste en los perfiles ( cálculo de las distribuciones de las distintas magnitudes dentro de las áreas de contacto).

Se ha desarrollado por el grupo del departamento de Ingeniería Mecánica un modelo de contacto programado en código Matlab para la resolución del problema de contacto. Este modelo comete ciertos errores en los supuestos con radio de curva pequeños.



## **2. OBJETIVOS**

El objetivo de éste trabajo es mejorar el modelo de contacto empleado en la actualidad por el grupo de ferrocarriles del Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica. En particular, se trata de desarrollar un método adecuado para resolver el problema geométrico de contacto rueda-carril en curvas de radio pequeño. El modelo actual permite resolver este problema en recta y curvas de radio grande de forma satisfactoria, pero aparecen dificultades cuando existe toque de pestaña, lo cual ocurre de forma habitual en curvas de radio pequeño.

Por tanto, la finalidad de este Trabajo Fin de Máster es la de modificar el programa para que considere el problema de una forma correcta en las condiciones mencionadas.



### 3. MODELOS DE CONTACTO

#### 3.1. Introducción

Todas las fuerzas de guiado de un vehículo ferroviario se transmiten a través de las áreas de contacto entre las ruedas y los carriles [16]. De esta manera, la determinación de estas fuerzas y la solución del problema de contacto es verdaderamente imprescindible, en cuanto a dinámica se refiere .

El número de áreas de contacto, la forma de estas, su tamaño y la distribución de presiones en cada una de ellas, es necesario para una correcta estimación de parámetros de desgaste en los perfiles de rueda y carril.

El planteamiento del problema de contacto se puede dividir en tres pasos: problema geométrico, problema normal y problema tangencial de contacto. A continuación se va a proceder a describir estos tres pasos.

Kalker [1] distingue dos problemas asociados al campo del contacto rueda-carril. Una vez conocidas la geometría y cinemática del contacto, se deberá establecer la magnitud de las fuerzas en el contacto (análisis de fuerzas). Esta cuestión forma parte de la Mecánica de Contacto.

Los datos de entrada necesarios para resolver el problema de contacto son:

- Geometría del contacto: dimensiones que definen la geometría transversal de la vía y definición de las superficies de la rueda y el carril.
- Propiedades mecánicas de los cuerpos en el contacto.
- Posición relativa del eje ferroviario con respecto a la vía, contando con el problema tridimensional.

- Cinemática del contacto: velocidades relativas de cada punto teórico de contacto dentro de cada área de contacto y velocidad longitudinal del vehículo.
- Fricción y desgaste de las superficies de contacto.

Con estos datos de entrada, y según la teoría utilizada, los resultados del problema de contacto son:

- Número de áreas de contacto.
- Forma y tamaño de las áreas de contacto.
- Posición y conicidad (orientación) de las áreas de contacto con respecto a un sistema de referencia conocido.
- Distribución de presiones, normales y tangenciales, sobre las áreas de contacto.
- Fuerzas y momentos totales, normales y tangenciales, resultantes de la distribución de tensiones sobre las áreas de contacto.

Para plantear el problema de contacto será también necesario establecer la aplicación en la que se van a usar los resultados. Según esta aplicación se aconsejará o se evitará la asunción de ciertas hipótesis o el uso de procedimientos simplificados que permitan resolver el problema con un coste computacional adecuado sin sacrificar la precisión del resultado que se busca.

En el caso en el que el problema tenga como aplicación la simulación dinámica, la distribución de tensiones sobre el área de contacto podrá sustituirse por las fuerzas y momentos totales aplicados sobre el eje y sobre los carriles. Incluso dentro de la simulación dinámica, para un trazado en vía recta donde previsiblemente los desplazamientos laterales sean pequeños,



se puede recurrir a modelos de geometría rueda-carril simplificados y modelos dinámicos lineales para el cálculo del problema tangencial.

### 3.2. Clasificación de las teorías de contacto rueda-carril.

Se pueden utilizar varias clasificaciones para las teorías de contacto. En este trabajo se seguirán las clasificaciones propuestas por Kalker [1, 2] que a su vez es seguida por Garg y Dukkipati [3].

- Según la elasticidad empleada, los modelos se pueden clasificar en exactos o simplificados. La teoría exacta se basa en el supuesto de semiespacio infinito, según el cual, los desplazamientos de un punto dependen de las fuerzas aplicadas en todos los puntos del dominio.

Esta relación se podría expresar de la siguiente manera:

(1)

$$u(x, y) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\xi, \eta) \mathbf{p}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

siendo  $u$  el vector del desplazamiento debido a deformaciones debido a deformaciones elásticas en el punto  $x, y$ ,  $\mathbf{H}$  la matriz de flexibilidad y  $\mathbf{p}$  la fuerza por unidad de área.

Las magnitudes anteriores son función de las coordenadas locales  $\xi, \eta$ , respecto a los puntos  $x, y$ , dentro de un dominio genérico  $\Omega$ .

La teoría simplificada supone que los desplazamientos en un punto dependen exclusivamente de las fuerzas aplicadas en dicho punto:

(2)

$$\mathbf{u}(x, y) = L \mathbf{p}(x, y)$$

siendo  $L$  el parámetro de flexibilidad.

- Según la consideración de los efectos dinámicos en el contacto, las teorías se pueden clasificar en teorías dinámicas o cuasiestáticas. Las teorías dinámicas incluyen en la formulación del problema de contacto rodante los efectos inerciales. En cambio, las teorías cuasiestáticas desprecian estos efectos inerciales. Según Kalker [1] los efectos inerciales sólo son perceptibles en la teoría de contacto para velocidades de circulación por encima de 500km/h.

- Según las dimensiones consideradas en el modelado, se pueden clasificar en teorías tridimensionales o teorías bidimensionales. En las teorías tridimensionales los desplazamientos  $\mathbf{u}$  y las presiones  $\mathbf{p}$  dependen de las tres coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . En las teorías bidimensionales,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$ , son independientes de la variable  $y$ . Por tanto, las teorías bidimensionales tienen una aplicación limitada en la dinámica de vehículos ferroviarios.

- Según la consideración de los efectos transitorios, se pueden distinguir entre teorías estacionarias y no estacionarias. Las teorías no estacionarias consideran los efectos transitorios que aparecen en el contacto por rodadura. Según Garg y Dukkipati [3] los fenómenos transitorios en el contacto por rodadura se consideran de menor importancia en el campo de la dinámica ferroviaria.

La expresión cinemática que expresa la relación entre el deslizamiento y los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas ambos en el plano tangencial al contacto es:

(3)

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} + \frac{1}{V} + \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t}$$

siendo  $\boldsymbol{\gamma}$  el deslizamiento adimensional,  $\boldsymbol{w}$  el deslizamiento rígido (calculado a partir de los pseudodeslizamientos),  $\boldsymbol{u}_t$  los desplazamientos tangenciales debidos a deformaciones elásticas,  $V$  la velocidad longitudinal del vehículo,  $x$  la coordenada longitudinal y  $t$  la variable temporal. En un modelo no estacionario se considera  $\partial \boldsymbol{u}_t / \partial t \neq 0$ , mientras que en un modelo estacionario variación es nula con respecto al tiempo.

- Según la condición de saturación de las fuerzas se pueden clasificar en teorías lineales o teorías no-lineales. En una teoría lineal se asume que las presiones tangenciales  $p_t$  son lineales respecto a los pseudodeslizamientos en todo el rango de análisis. En una teoría no-lineal o de saturación se considera la ley de Amontons-Coulomb en la que la tensión tangencial  $p_t$  está limitada por la magnitud de la presión normal  $p_z$  y el coeficiente de rozamiento  $\mu$  en ese punto:

(4)

$$p_t \leq \mu p_z$$

Considerando la aplicación del problema de contacto usado y teniendo en cuenta la clasificación anterior, se utilizará un modelo de contacto que cumpla las siguientes características:

- Según la teoría de elasticidad, se utilizará un modelo de contacto basado en la teoría elástica simplificada ya que, tienen un coste computacional mucho menor, siempre y cuando la precisión de los resultados sea aceptable.
- En cuanto a la consideración de los efectos dinámicos, serán teorías cuasi-estáticas, ya que en el campo de la simulación dinámica no se tienen en cuenta los efectos inerciales sobre las fuerzas en el contacto.

- También usaremos teorías tridimensionales.
- Respondiendo a la consideración de los efectos transitorios, utilizaremos teorías estacionarias. Esta teoría es la más óptima ya que, permite reducir el coste computacional y además es compatible con la aplicación para la simulación dinámica en el rango de baja frecuencia.
- Por último, se utilizarán teorías no-lineales para responder a la condición de saturación de las fuerzas para la resolución del problema tangencial.

### **3.3. Problema de contacto rueda-carril.**

Una vez hecha la clasificación de las teorías de contacto que se van a utilizar y habiendo señalado las características que debe cumplir el planteamiento del problema de contacto, se va a exponer el procedimiento seguido para el estudio del contacto entre dos superficies, en el ámbito del contacto rueda-carril.

Debido a características como la geometría de las superficies en el contacto, la alta rigidez de los materiales elegidos y la consideración de la tribología en la interfase, la resolución del contacto rueda-carril resulta un problema complejo. Además, las magnitudes asociadas al planteamiento del problema de contacto aparecen en principio superpuestas, lo que dificulta su resolución. Aquí se describe el procedimiento generalmente empleado para la resolución del contacto rueda-carril [3, 2]. Según este procedimiento se considera que los materiales en contacto son homogéneos e isotrópicos y que su comportamiento es elástico-lineal.

En el primer paso se trata de obtener el área de contacto a partir de la geometría de las superficies de rueda y carril y de la posición relativa entre ambos cuerpos. La siguiente figura (*Figura 1*) muestra un esquema del área de contacto.

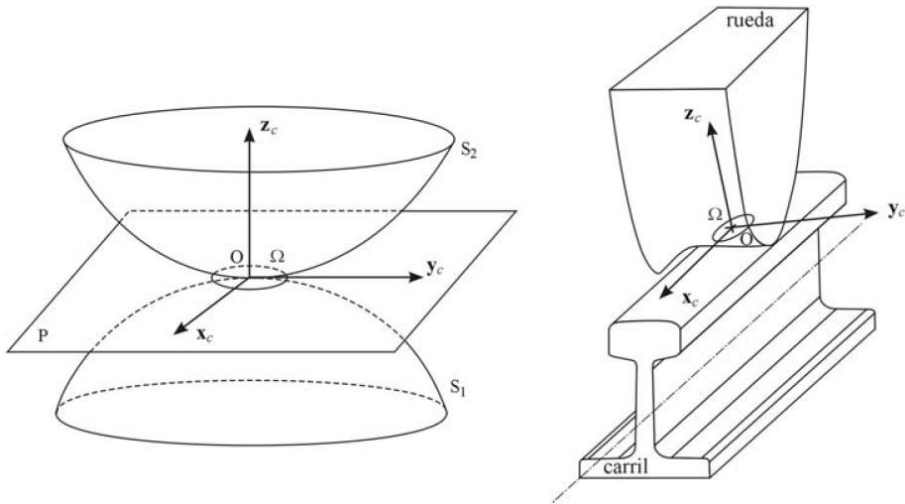


Figura 1. Izq: contacto entre dos cuerpos genéricos. Dcha: contacto entre la rueda y carril. Adaptado de [6].

Este área de contacto aparece entre dos superficies genéricas,  $S_1$  y  $S_2$ , de entre las superficies de la rueda y del carril. 'O' es el punto teórico de contacto, definido según la teoría de contacto utilizada. Este punto se usa como origen del sistema de referencia asociado al contacto, con origen en 'O' y definido por los ejes  $x_c y_c z_c$ . Los ejes  $x_c$  e  $y_c$  definen el plano tangente al contacto y el eje  $z_c$  la dirección normal.  $\Omega$  es el área de contacto, contenida en el plano  $x_c - y_c$  y calculada según la teoría de contacto utilizada. Esta área de contacto acota el dominio en el que se distribuyen las tensiones asociadas al contacto entre superficies.

Una vez obtenida el área de contacto se calcula la distribución de tensiones sobre esta área. Según las direcciones de los ejes asociados al contacto, se pueden obtener dos tipos de tensiones:

- Tensiones normales al contacto, que son paralelas al eje  $z_c$ .
- Tensiones tangenciales al contacto, que están contenidas en el plano  $x_c - y_c$ .

Para obtener las tensiones sobre el área de contacto, se parte de la relación que aparece entre dichas tensiones  $\mathbf{p}$  y los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas  $\mathbf{u}$ . Considerando la teoría elástica exacta, la ecuación (1) según Love [7] se puede expresar como:

(5)

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \\ u_z(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{yz} & h_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(\xi, \eta) \\ p_y(\xi, \eta) \\ p_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} d\xi d\eta$$

siendo  $G$  el módulo de elasticidad transversal combinado para los materiales de la rueda y del carril,  $h$  los parámetros de flexibilidad y  $\xi, \eta$  las coordenadas locales medidas al origen del sistema de referencia del contacto  $x, y$ .

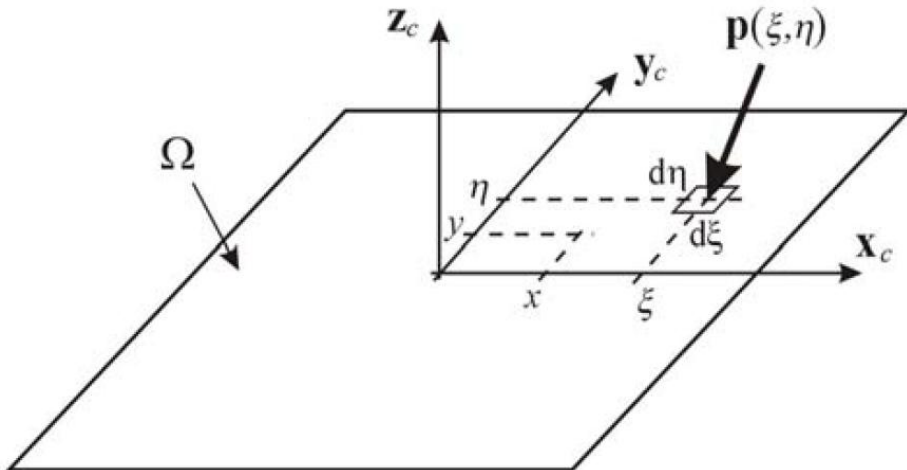


Figura 2. Aplicación de la teoría exacta de la elasticidad. Adaptación de [6].

Las expresiones de los parámetros de flexibilidad  $h$  son:

$$h_{xx} = \frac{1 - \sigma}{d} + \frac{\sigma(x - \xi)^2}{d^3} \quad h_{xy} = \frac{\sigma(x - \xi)^2(y - \eta)^2}{d^3} = h_{yx} \quad h_{xz} = \frac{k(x - \xi)}{d^2} = h_{zx} \quad (6)$$

$$h_{yy} = \frac{1 - \sigma}{d} + \frac{\sigma\eta^2}{d^3} \quad h_{yz} = \frac{k(y - \eta)}{d^2} = h_{zy}$$

$$h_{zz} = \frac{1 - \sigma}{d}$$

$$\text{con } d = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

donde las constantes  $G$ ,  $\sigma$  y  $k$  se calculan a partir de los módulos de elasticidad transversal de la rueda y carril,  $G_w$  y  $G_r$ , y a partir de los coeficientes de Poisson de rueda y carril,  $\sigma_w$  y  $\sigma_r$  según [3]:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_w} + \frac{1}{G_r} \right)$$

$$\frac{\sigma}{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_w}{G_w} + \frac{\sigma_r}{G_r} \right)$$

$$k = \frac{G}{4} \left( \frac{1 - 2\sigma_w}{G_w} - \frac{1 - 2\sigma_r}{G_r} \right) \quad (7)$$

Tomando las dos primeras ecuaciones y reordenando, queda la expresión del módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson combinados para los materiales de rueda y carril:

(8)

$$G = 2 \frac{G_w G_r}{G_w + G_r}$$

$$\sigma = \frac{G}{2} \frac{G_w \sigma_r + G_r \sigma_w}{G_w + G_r}$$

Para un material, el módulo de elasticidad transversal se puede calcular a partir del módulo de Young y del coeficiente de Poisson como:

(9)

$$G_k = \frac{E_k}{2(1 + \sigma_k)}$$

siendo  $k = r$ , para el material del carril y  $k = w$ , para la rueda.

Si ambos cuerpos son del mismo material ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $G_1 = G_2$ ) o son incompresibles ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ ), la constante  $k$  es nula y, por tanto, los parámetros  $h_{xz}$ ,  $h_{yz}$ ,  $h_{zx}$ ,  $h_{zy}$  en (6). Se cumple la hipótesis que los desplazamientos tangenciales  $u_x$ ,  $u_y$  no están influenciados por las presiones normales  $p_z$  y que los desplazamientos normales  $u_z$  no están influenciados por las tensiones tangenciales  $p_x$  y  $p_y$ . Esta situación se conoce como cuasi-identidad elástica entre materiales.

En cuanto al contacto de la rueda con el carril, como ambos cuerpos están contruidos de acero, se puede suponer que se cumple la cuasi-identidad elástica entre materiales, por lo que la ecuación para  $z$  en (2.5)



correspondiente a la distribución de tensiones normales quedaría desacoplada de las ecuaciones para  $x$ ,  $y$  correspondientes a las distribuciones de tensiones tangenciales. Según esta condición, la expresión (5) se podría desdoblar en:

(10)

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(\xi, \eta) \\ p_x(\xi, \eta) \end{Bmatrix} d\xi d\eta$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} h_{zz} p_z(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Los dos problemas se pueden resolver de forma independiente.

Para la resolución del problema tangencial, en el caso de que se use una teoría no-lineal que considere la saturación de las fuerzas tangenciales mediante la ley de Amontons-Coulomb, será necesario disponer de la distribución de tensiones normales dentro del área de contacto. Se deberá resolver en primer lugar el problema normal, usando la expresión (2.10.b), y posteriormente el problema tangencial mediante (2.10.a).

Se puede definir el siguiente procedimiento para la resolución del problema de contacto rueda-carril:

1. Se resuelve el problema geométrico de contacto, con el fin de establecer la posición y una estimación del área de contacto.
2. Se resuelve el problema normal de contacto para obtener el área de contacto y la distribución de tensiones normales.
3. Se resuelve el problema tangencial de contacto, utilizando los datos de distribución de presiones normales.

### 3.3.1. Enfoques del problema de contacto.

Considerando el procedimiento descrito, para plantear el problema de contacto, se pueden distinguir dos enfoques distintos: el contacto rígido y el contacto elástico [4, 5].

- El enfoque de contacto rígido [4] o contacto restringido [5] supone que ambos cuerpos son infinitamente rígidos y el contacto aparece en un punto. Este punto constituye el punto teórico de contacto.

Para hallar ese punto teórico de contacto se aplica un procedimiento geométrico en el que se imponen dos restricciones: la posición del punto de contacto en ambos cuerpos tiene que ser la misma, y el vector normal a ambas superficies debe ser el mismo.

La definición del área de contacto se obtiene a partir de las características de este punto de contacto según la teoría de contacto normal empleada.

En un enfoque de contacto rígido o restringido el conjunto de coordenadas que define la posición relativa del eje con respecto a la vía constituye un conjunto de coordenadas dependientes. Esto se debe a las restricciones impuestas por la vía para el movimiento del eje, que no permiten la interpenetración entre superficies.

- En el enfoque de contacto elástico [4] [5], las superficies en el contacto se suponen también infinitamente rígidas, pero con la posibilidad de que exista interpenetración. Esta interpenetración virtual se puede calcular de forma geométrica, la fuerza de interacción es función de esta interpenetración, según la teoría de contacto normal utilizada.

La definición del punto teórico de contacto dependerá de la teoría de contacto empleada. Debido a que aparece una interpenetración entre superficies, la posición del punto de contacto sobre un cuerpo no es

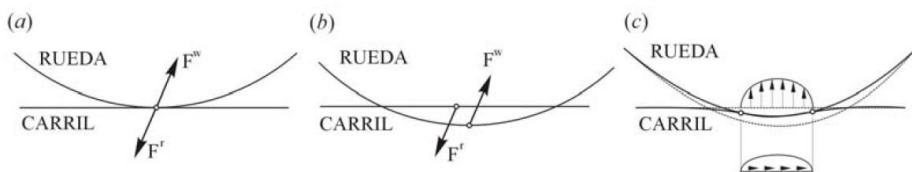
necesario que coincida con la posición del punto de contacto sobre el otro cuerpo. En cambio, el valor de la fuerza de interacción, según la tercera ley de Newton, sí que serán iguales y de sentido contrario sobre ambos cuerpos en la interfase.

La obtención del área de contacto también depende de la teoría de contacto normal empleada pero, en cualquier caso, será función de la interpenetración entre las superficies de la rueda y del carril.

En un enfoque de contacto elástico el conjunto de coordenadas que define la posición relativa del eje con respecto a la vía constituye un sistema de coordenadas independientes. De esta forma, el eje tiene libertad de movimiento dentro de la vía dando lugar a diversas áreas de interpenetración.

En la realidad al producirse un contacto entre superficies y transmitir una fuerza normal, aparece una deformación local de los cuerpos en la zona de contacto que da lugar al área de contacto. estas fuerzas en el contacto no son puntuales, sino que aparecen distribuidas en esta área de contacto.

La *Figura 3* ilustra los dos enfoques descritos para modelizar el contacto entre superficies, contacto rígido (a), contacto elástico (b) y un pequeño esquema del caso real (c).



*Figura 3. Modelos de contacto entre rueda y carril ( Adaptado de [5] ) :*

*(a) Modelo de contacto rígido.*

*(b) Modelo de contacto elástico.*

*(c) Caso Real.*

El enfoque de contacto rígido permite fácilmente estimar el área de contacto a partir de las características de este punto, con las teorías de punto teórico de contacto.

El enfoque de contacto elástico, ofrece una estimación del área de contacto a partir de la interpenetración entre la rueda y el carril, es decir, que el área de contacto será función del volumen de interpenetración entre superficies. Estos métodos están basados en la interpenetración virtual [8-9, 10].

Estas opciones pueden combinarse en la resolución del problema de contacto. Algunos autores abogan por la resolución del problema geométrico mediante contacto elástico con la resolución del problema normal mediante una teoría de punto teórico de contacto. Como es empleado en [11, 4, 12, 5].

En la aplicación del contacto rueda-carril para la simulación dinámica, los dos enfoques utilizados dan lugar a distintas formulaciones de las ecuaciones del movimiento:

- Según el enfoque de contacto rígido o enfoque restringido se utilizan una serie de ecuaciones de restricción para definir la modelización del contacto rueda-carril. Por tanto, se tiene un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas.

Las fuerzas normales al contacto se obtienen a partir de las fuerzas de reacción asociadas a las ecuaciones de restricción ( multiplicadores de Lagrange, ver [13] ).

- Según el enfoque de contacto elástico, el conjunto de ecuaciones que definen el movimiento de los cuerpos constituye un sistema de ecuaciones diferenciales.

El valor de las fuerzas normales se obtiene a partir de la indentación entre superficies (de forma geométrica). Según este enfoque el número

de áreas de contacto es una variable que depende de las zonas de interpenetración entre los perfiles de la rueda y del carril.

Este enfoque permite modelizar el caso del multicontacto (cuando aparece más de un área de contacto por rueda).

### **3.3.2. Problema geométrico de contacto.**

En este apartado se tratan los aspectos relacionados con la geometría del contacto rueda-carril.

Para una geometría de la vía dada, sabiendo las superficies de la rueda y del carril y establecida la posición relativa de estos cuerpos, la resolución del problema geométrico de contacto consiste en obtener:

- Número de áreas de contacto que aparecen entre la superficie de la rueda y del carril.
- La posición de cada área de contacto.
- La conicidad correspondiente de cada área de contacto.
- Otros parámetros en función de la teoría de contacto normal empleada.

En relación a los otros parámetros, por ejemplo, en el caso de que se emplee la teoría de Hertz estos otros parámetros son la indentación máxima y los valores de las curvaturas en el punto teórico de contacto. Si, en cambio, se usa un modelo de contacto basado en la interpenetración virtual entre superficies, los otros parámetros necesarios son la forma y tamaño del área de interpenetración.

En primer lugar se describen las coordenadas y sistemas de referencia empleados para describir el movimiento del eje ferroviario con respecto a la vía. Posteriormente, se define la geometría transversal de la vía.

Finalmente, se presentan los distintos procedimientos para la resolución del problema geométrico de contacto.

### Coordenadas y sistemas de referencia

En primer lugar se describen los sistemas de referencia utilizados para modelizar el contacto rueda-carril. Posteriormente se presenta el conjunto de coordenadas analizadas y, finalmente, se describen las transformaciones entre los sistemas de referencia utilizados.

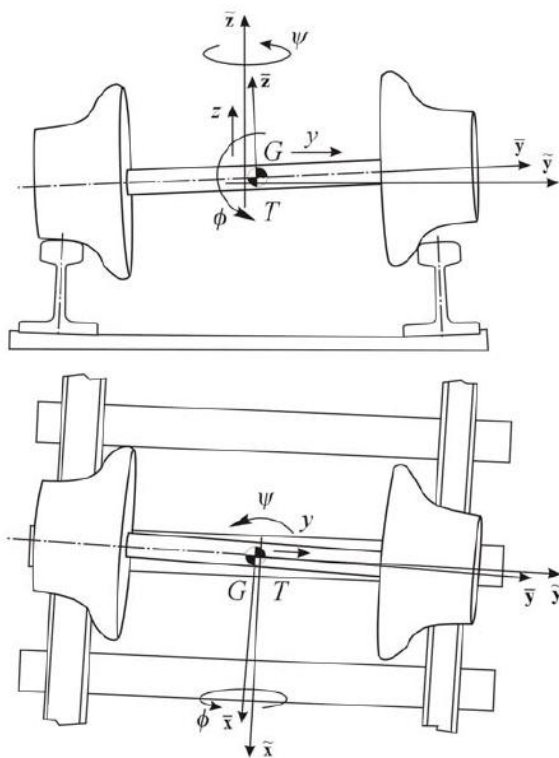


Figura 4. Sistema de referencia  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  de la vía y sistema de referencia  $x\bar{y}\bar{z}$  del eje, junto a coordenadas del eje que definen su movimiento.

a) Definición de los sistemas.

Para modelar del problema de contacto rueda-carril, se van a usar tres sistemas de referencia: sistema de referencia asociado a la vía  $\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$ , sistema de referencia asociado al eje ferroviario  $\overline{x}\overline{y}\overline{z}$  y sistema de referencia asociado a cada área de contacto  $x_c y_c z_c$ .

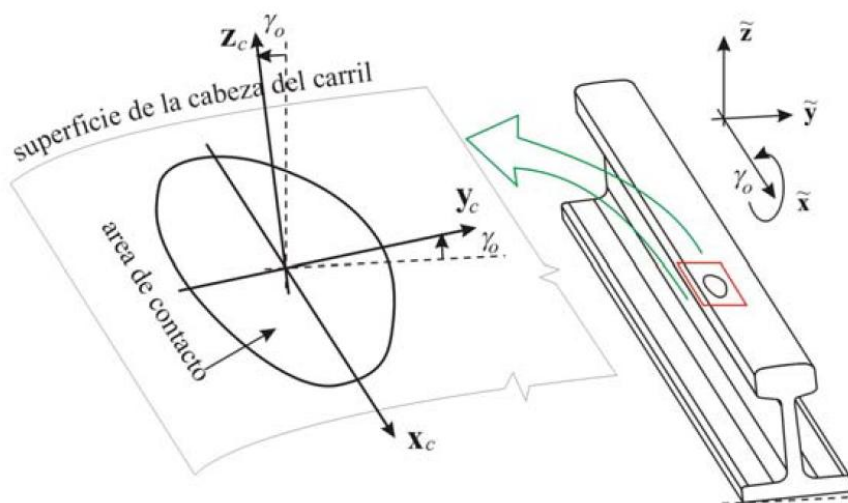
El sistema de referencia asociado a la vía  $\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}$  se define para cada posición a lo largo del trazado de la vía, de tal forma que el eje  $\widetilde{x}$  es tangente a la vía y según el sentido de avance. El eje  $\widetilde{y}$  marca la dirección lateral, de tal forma que los ejes  $\widetilde{x}$ - $\widetilde{y}$  definen el plano de la vía y el eje  $\widetilde{z}$  es vertical y hacia arriba. El origen de este sistema de referencia es el punto  $T$  que define el eje de la vía.

Para la descripción del contacto rueda-carril, se utiliza un sistema de referencia asociado a la vía para cada uno de los ejes ferroviarios. Este sistema de referencia se desplaza siguiendo el eje de la vía a una velocidad longitudinal  $V$ , que es la velocidad del vehículo.

Por otra parte, se define un sistema de referencia asociado al eje ferroviario  $\overline{x}\overline{y}\overline{z}$  para cada uno de los ejes de la composición. Los ejes del sistema de referencia están orientados según los ejes principales de inercia del cuerpo, de tal forma que  $\overline{y}$  coincide con el eje de rotación. Puesto que el eje ferroviario es una geometría de revolución, para situar este sólido en el espacio no se considera la rotación alrededor del eje  $\overline{y}$ . El eje  $\overline{x}$  indica la dirección y el sentido de avance y  $\overline{z}$  es aproximadamente vertical y hacia arriba.

Este sistema de referencia se define a partir del sistema de referencia de la vía, siguiendo a transformación de coordenadas según la secuencia  $(Z - X)$  [13, 14]. El origen del sistema de referencia es el

centro de masas del eje  $G$ . El sistema de referencia del eje coincide con el sistema de referencia de la vía si el eje está centrado. La *Figura 4* muestra los sistemas de referencia de la vía y del eje, para una posición genérica del eje.



*Figura 5. Definición del sistema de referencia del contacto.*

En tercer lugar, se tiene el sistema de referencia asociado al contacto rueda-carril  $x_c y_c z_c$ . Se obtiene a partir del sistema de referencia asociado a la vía para el eje ferroviario mediante una rotación alrededor del eje  $\tilde{x}$  que tiene en cuenta la conicidad del área de contacto. Los ejes  $x_c y_c$  marcan el plano tangencial al contacto siendo  $x_c$  la dirección longitudinal e  $y_c$  la dirección transversal o lateral. El eje  $z_c$  indica la dirección normal. El origen de este sistema de referencia se encuentra en la posición del punto teórico de contacto definido según la teoría de contacto utilizada. Se utiliza un sistema de referencia asociado al contacto para cada área de



contacto que aparece entre cada eje del vehículo y los carriles de la vía.

En la *Figura 5* se muestra el sistema de referencia asociado a un área de contacto y su obtención a partir del sistema de referencia asociado a la vía del correspondiente eje ferroviario.

Una vez definidos los sistemas de referencia utilizados para realizar el modelo de contacto rueda-carril se procede a describir las coordenadas utilizadas para expresar la posición y orientación relativa del eje ferroviario con respecto a la vía.

b) Coordenadas utilizadas.

Para expresar la posición y orientación del eje ferroviario en la vía se usa un conjunto típico de cuatro coordenadas [3,14], que son: el desplazamiento lateral  $y$ , el desplazamiento vertical  $z$  (ambos desplazamientos del centro de masas del eje  $G$  medidos en el sistema de referencia de la vía); el giro alrededor del eje  $X$ ,  $\phi$  (ángulo de balanceo) y el giro alrededor del eje  $Z$ ,  $\psi$  (ángulo de lazo):

(11)

$$q = \{y, z, \phi, \psi\}^T$$

donde los ángulos  $\phi$ ,  $\psi$  son ángulos de Euler que definen la transformación de coordenadas según la secuencia  $(Z - X)$ , desde el sistema de referencia de la vía al sistema de referencia del eje.

Con respecto al giro principal del eje ferroviario, se asume que este giro se realiza a velocidad constante, de valor  $V/r_0$  (siendo  $V$  la velocidad del vehículo y  $r_0$  el radio nominal de las ruedas). Se puede

adoptar esta hipótesis ya que, la inercia del eje ferroviario es muy grande y que las acciones que pueden producir variaciones en esta velocidad nominal son pequeñas.

Una vez definidas las coordenadas utilizadas, se pueden obtener las expresiones de las transformaciones entre los distintos sistemas de referencia.

c) Transformaciones entre sistemas de referencia.

Considerando los tres sistemas de referencia utilizados, se van a definir las correspondientes transformaciones entre éstos.

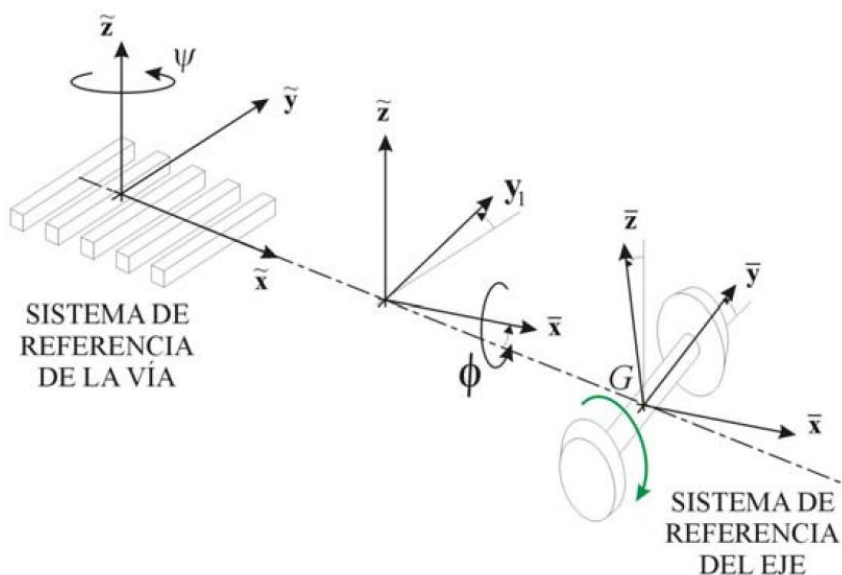


Figura 6. La imagen anterior ilustra la secuencia de rotaciones que define la transformación desde el sistema de referencia del eje al sistema de referencia de la vía.

La primera transformación es la realizada entre el sistema de referencia asociado a la vía y el sistema de referencia asociado al eje según la secuencia de rotaciones ( $Z - X$ ) (partiendo del sistema de referencia de la vía, ver *Figura 6*): en primer lugar se realiza un giro alrededor del eje  $\tilde{z}$  de valor  $\psi$ , seguido de un giro en  $\tilde{x}$  de valor  $\phi$ , tal como se observa en la figura. Esta transformación depende del valor de las coordenadas que son ángulos de Euler [13,14].

Siendo  $\bar{v}$  un vector expresado en el sistema de referencia del eje y  $\tilde{v}$ , en el sistema de referencia de la vía, la expresión de la transformación está dada por:

(12)

$$\tilde{v} = [T_Z(\psi)T_X(\phi)]\bar{v} = T_b^{eje}(\phi\psi)\bar{v}$$

donde  $T_Z$  y  $T_X$  son las matrices de transformación con respecto a los ejes  $Z$  y  $X$ , respectivamente, y  $T_b^{eje}$  es la matriz de transformación asociada a los giros del eje ferroviario.

La segunda transformación, relaciona el sistema de referencia de la vía con el sistema de referencia asociado al contacto y se realiza mediante un giro alrededor del eje  $\tilde{x}$  de la vía (*Figura 5*).

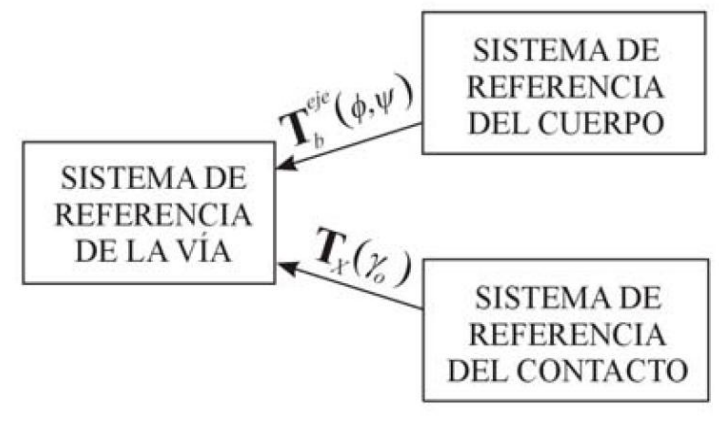
La expresión de la transformación de un vector  $v_c$  en el sistema de referencia del contacto, al sistema de referencia de la vía, es:

(13)

$$\tilde{v} = T_X(\gamma_0)v_c$$

siendo  $\gamma_0$  el ángulo de conicidad calculado para cada área de contacto.

A continuación se ilustra un esquema que muestra las transformaciones definidas entre los sistemas de referencia utilizados.



### Geometría de la vía

La geometría transversal de la vía queda definida por la posición de los perfiles de rueda y carril. Para disponer estos perfiles dentro del plano  $\tilde{x} - \tilde{y}$ , se toma como origen de referencia la posición del eje en la vía  $T$  que coincide con el centro de masas del eje  $G$  cuando el eje  $G$  cuando el eje está centrado, como se muestra en la *Figura 7*.

- Como origen del perfil de la rueda se toma el punto nominal de contacto (situado a 70 mm de su cara interna). Dentro del plano transversal a la vía, este punto se coloca por debajo del centro de masas del eje a una distancia  $r_0$  (radio nominal de la rueda) y en

sentido transversal  $e_0$  (semi-distancia transversal entre puntos de contacto).

- Para colocar el perfil del carril en su posición nominal, en primer lugar se practica una rotación igual al ángulo de montaje sobre la traviesa. El perfil rotado se coloca a una distancia transversal respecto al eje de la vía igual al semi-ancho de vía  $a$ , midiendo 14mm por debajo de la cabeza del carril. A su vez, se coloca a una distancia igual al radio nominal de la rueda  $r_0$  por debajo del eje de la vía, de tal forma que quede tangente con el perfil de la rueda.

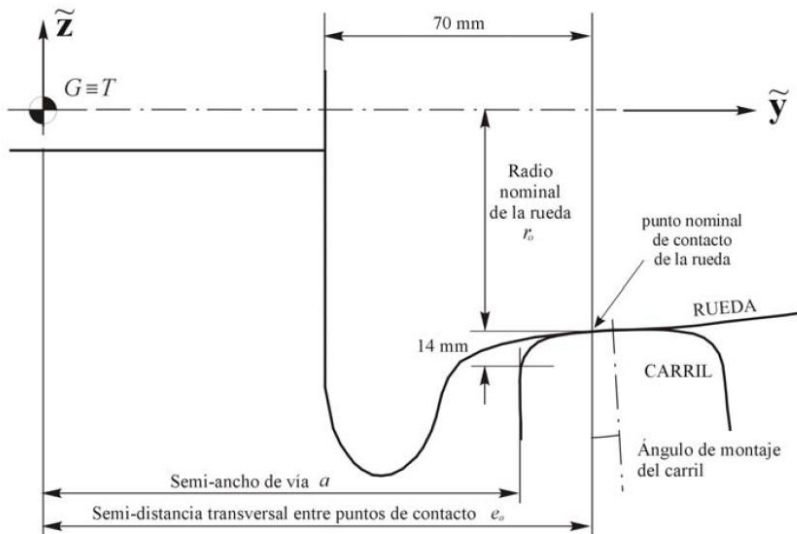


Figura 7. Geometría transversal de la vía.

### Soluciones propuestas para resolver el problema geométrico

Seguidamente, se van a comentar dos de los varios modelos para resolver el problema geométrico de contacto: En primer lugar se expondrá el modelo de Shabana y a continuación el modelo de Santamaría-Vadillo-Gómez.

a) Modelo geométrico de Shabana.

El procedimiento se describe en Shabana et al. [5] y posteriormente en [14] como un modelo de contacto rueda-carril aplicado a la simulación dinámica.

Se trata de un modelo de resolución del problema de contacto rueda-carril donde se propone un procedimiento para resolver el problema geométrico de contacto. Se utiliza un enfoque de contacto elástico. Tras la resolución del problema geométrico, el problema normal de contacto se resuelve por la teoría de Hertz. En este apartado se va a describir el modelo de resolución del problema geométrico.

Para describir la geometría del contacto con el carril, se utiliza un conjunto de cuatro parámetros, que son:

(14)

$$\{s_1^r \ s_2^r \ s_1^w \ s_2^w\}^T$$

Los cuatro parámetros de la ecuación definen la geometría de las superficies de la rueda y del carril (*Figura 8*). Estas superficies se obtienen a partir de los perfiles de rueda y carril, suponiendo una extrusión del perfil del carril a lo largo del eje  $\tilde{x}$  y una revolución del perfil de la rueda alrededor del eje  $\bar{y}$ .

- Para el carril, su perfil se obtiene mediante la función  $f(x)$  y el parámetro  $s_2^r$ . De esta forma, el perfil del carril queda definido mediante el par de puntos  $(s_2^r \ f(s_2^r))$ . Se utiliza el parámetro  $s_1^r$  para expresar la longitud del arco trazado por el eje en el circuito, según la *Figura 8*. Por tanto, con el conjunto de parámetros  $(s_1^r \ s_2^r)$  define la superficie del carril.

- Por otra parte, el perfil de la rueda se define mediante la función  $g(x)$  y el parámetro  $s_1^w$ . Un punto genérico del perfil de la rueda es  $(s_1^w, g(s_1^w))$ . El parámetro  $s_2^w$  define la revolución del perfil alrededor del eje principal  $\bar{y}$ , por lo que la superficie de la rueda queda definida mediante los dos parámetros  $(s_1^w, s_2^w)$ .

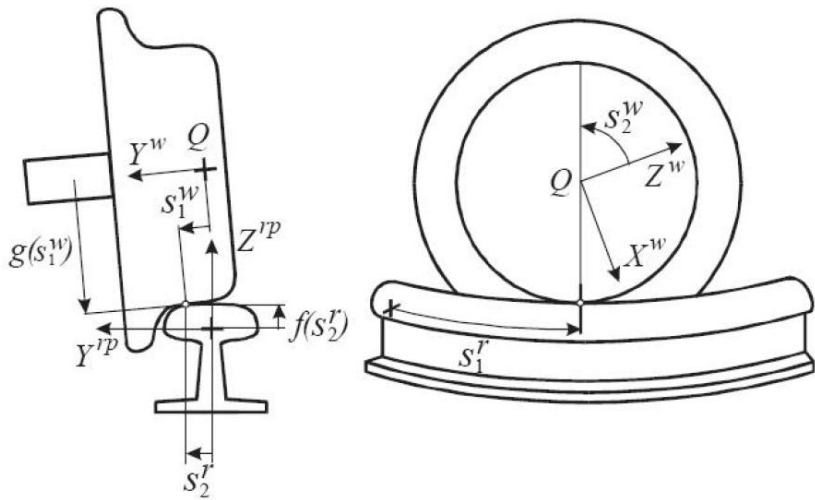


Figura 8. Parámetros geométricos usados por Shabana para definir la geometría del contacto. Extraído de [5].

Una vez definida la geometría del contacto, se usa un método basado en la interpenetración virtual entre perfiles para encontrar las áreas de contacto. Según el procedimiento descrito en [5], se obtiene la distancia entre pares de puntos de la rueda y del carril para determinar los puntos de contacto. Los puntos del carril y de la rueda con valores de interpenetración no nulos se agrupan en lotes de contacto que darán lugar a las distintas áreas de contacto (Figura 9). El número de lotes de contacto para cada combinación de rueda y

carril es una variable, aunque en [5] está limitado a un máximo de dos.

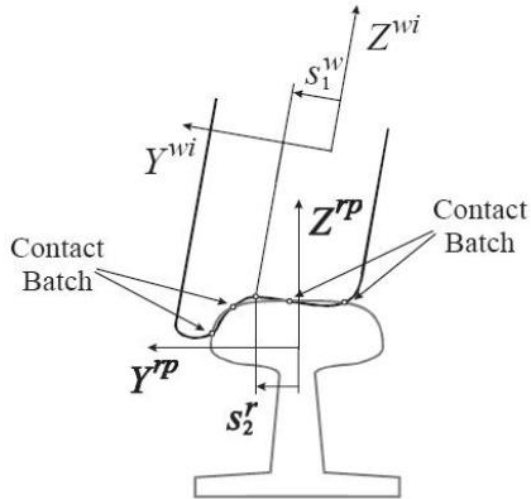


Figura 9. Obtención de las áreas de contacto entre rueda y carril a partir de lotes de contacto (contact batch). Extraído de [5].

Por otra parte Pombo et al. [11, 15] utilizan un modelo de contacto geométrico basado en el modelo de Shabana. La aplicación del modelo de contacto también es la simulación dinámica. En este trabajo se emplean splines cúbicos para expresar las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  que definen los perfiles del carril y de la rueda, respectivamente.

Además, debido a que la resolución del problema geométrico es un procedimiento computacionalmente costoso, se propone realizar un preproceso del problema geométrico de contacto que permite reducir tiempo de cálculo durante la simulación dinámica. De esta forma, se resuelve el problema geométrico de contacto para distintos valores de las coordenadas que expresan la posición relativa de la rueda con



respecto al carril y para distintos valores de irregularidades en la vía. Estos resultados se presentan en tablas (*Figura 10*), las cuales son accesibles durante el proceso de simulación dinámica. Según este procedimiento, la resolución del problema geométrico se realiza fuera del proceso de integración.

b) Modelo de Santamaría-Vadillo-Gómez.

Se trata de un procedimiento completo de resolución del contacto rueda-carril, donde se propone un modelo para el problema geométrico. Utiliza un enfoque de contacto elástico. Tras la resolución del problema geométrico, se aborda el problema normal con la teoría de Hertz. En este apartado se va a describir el modelo que plantea la resolución del problema geométrico.

Para la modelización de las superficies en el contacto se parte de la definición de los perfiles de la rueda y del carril. Como en el modelo de Shabana, la superficie de la rueda se define por revolución de su perfil, y la del carril, por extrusión. Para la definición de los perfiles se usa una discretización con puntos separados entre 0,5 y 3 mm y splines cúbicos para interpolar entre estos puntos (*Figura 11(a)*).

A partir de la definición de los perfiles y de la generación de las superficies en el contacto mediante estos perfiles, para un problema bidimensional se pueden obtener fácilmente las áreas de interpenetración entre estos dos cuerpos y el valor correspondiente de indentación (*Figura 11(b)*). El valor de indentación se usará para calcular la fuerza normal.

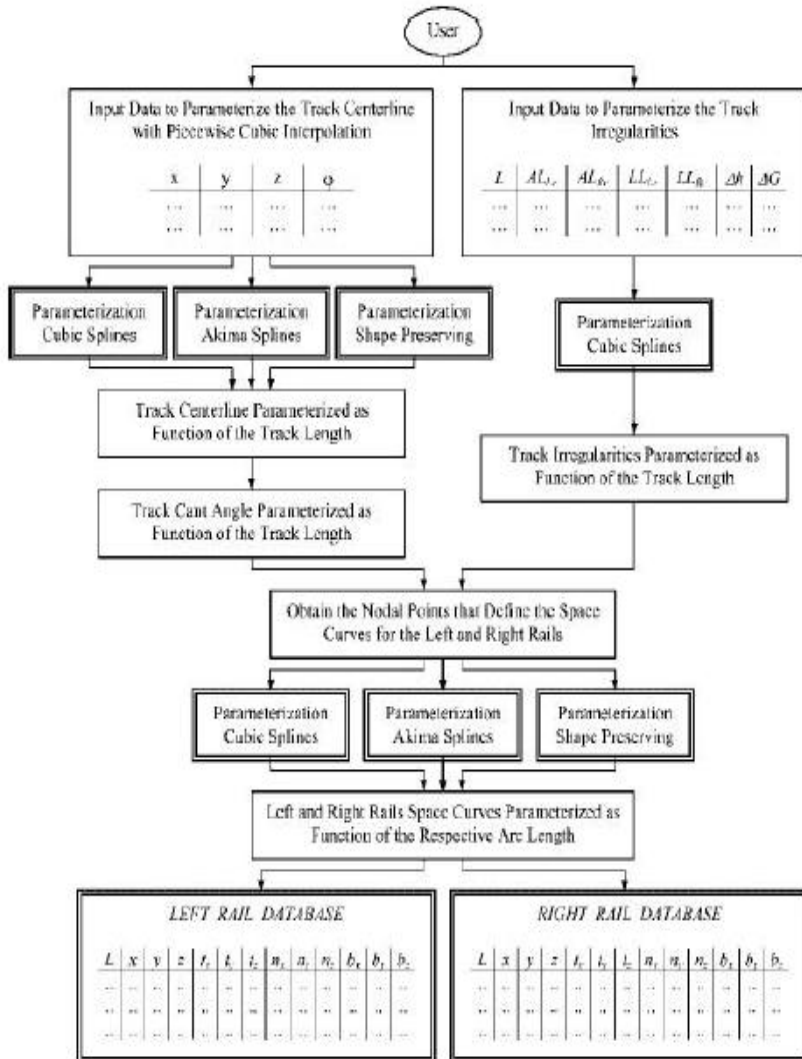


Figura 10. esquema del proceso realizado para calcular las tablas que permitan resolver el problema geométrico de contacto. Extraído de [11].

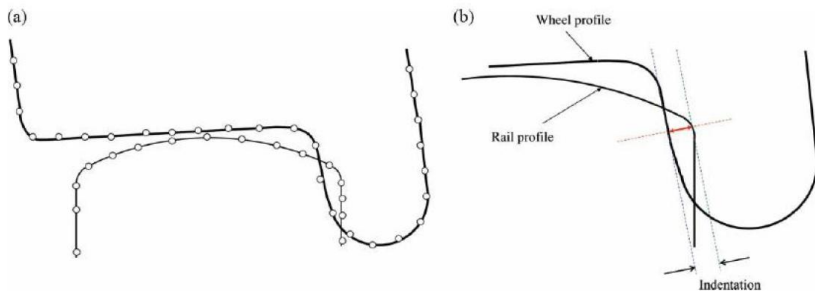


Figura 11. (a) Discretización de los perfiles de rueda y carril. (b) Indentación del área de contacto. Extraído de [4].

Para resolver el problema geométrico de contacto entre rueda y carril con un coste computacional bajo, se reduce el problema tridimensional a una serie de problemas bidimensionales. Para ello se toman distintas secciones de la rueda, definidas por planos paralelos al plano  $\bar{y} - \bar{z}$  (en el sistema de referencia del eje) y se busca la intersección de estos perfiles con el perfil del carril. Según la Figura 12 se definen planos verticales separados una distancia  $d_x$  y hasta una separación longitudinal máxima del plano central igual a  $D/8$  según el sistema de referencia del eje, siendo  $D$  el diámetro nominal de la rueda.

Para reducir el coste computacional empleado durante el cálculo de la simulación dinámica, se propone el precalcular el problema geométrico para diversas posiciones relativas del eje con respecto a la vía. Para ello se crea una tabla de contacto elástico 3D (Figura 13). La posición relativa del eje respecto a la vía en [4] se expresa mediante el mismo conjunto de coordenadas de (11), pero siendo  $\alpha$  el desplazamiento lateral,  $\alpha$  el ángulo de lazo (giro alrededor del eje  $Z$ ),

$z$  el desplazamiento vertical y  $\phi$  el ángulo de balanceo (giro alrededor del eje  $X$ ).

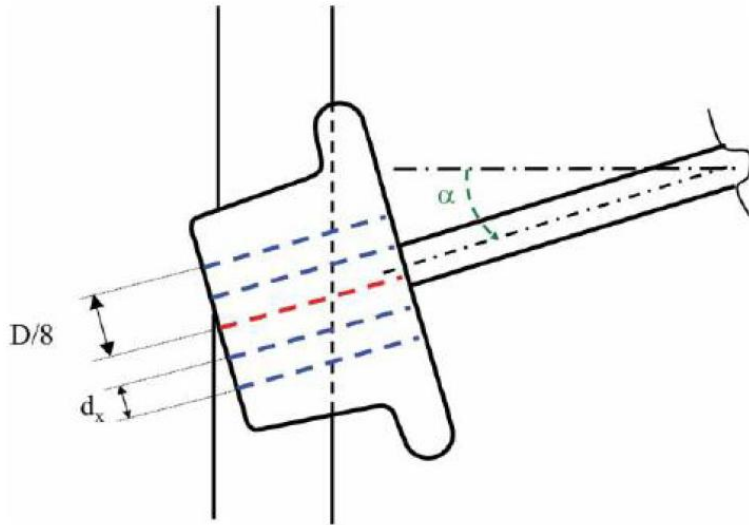


Figura 12. Procedimiento empleado para buscar los puntos de contacto entre la rueda y el carril. Extraído de [4].

Para generar la tabla de forma eficiente se hace uso de las simetrías que aparecen en la posición relativa del eje y del carril. Respecto a los valores que adoptan las coordenadas  $y, \alpha, z, \phi$  para generar la tabla, se parte de la solución de la posición relativa obtenida suponiendo contacto rígido (donde el conjunto de coordenadas es dependiente). De esta forma se reduce en gran medida el número de combinaciones que se deben precalcular en la tabla de contacto elástico 3D.

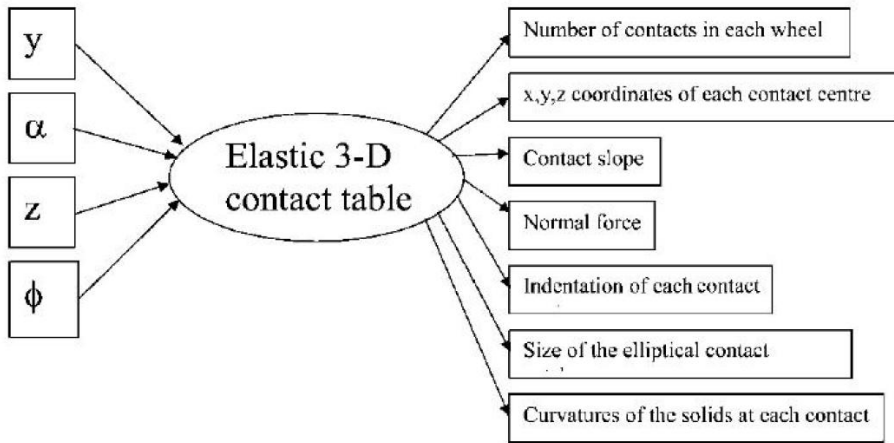


Figura 13. Tabla creada con el precálculo del problema geométrico de contacto. Extraído de [4].

### 3.3.3. Problema Normal.

En este apartado se tratan los aspectos relacionados con la resolución del problema normal de contacto. Como se ha visto anteriormente, debido a la hipótesis de cuasi-identidad elástica, para la obtención de las tensiones en el contacto se puede abordar primero el problema normal y, después, el problema tangencial..

Se van a describir una serie de modelos utilizados para resolver el problema normal de contacto en el ámbito del contacto rueda-carril. Según la distinción a partir de los dos enfoques distintos en el análisis del contacto rueda-carril, en este trabajo se propone una clasificación de las teorías de contacto normal en dos familias: los modelos de punto teórico de contacto y los modelos basados en la interpenetración virtual entre superficies.

### Modelos de punto teórico de contacto

Según la definición propuesta, los modelos para resolver el problema normal utilizando punto teórico de contacto son aquéllos que estiman las características del área de contacto a partir del punto teórico de contacto. Dentro de este grupo se va a describir la teoría de Hertz.

La teoría de Hertz se trata del primer análisis satisfactorio de las tensiones en el contacto de dos sólidos elásticos. Ésta se basa en cuatro hipótesis principales [17, 18]:

- Las superficies de los cuerpos en la zona de contacto son suaves, es decir, sin presencia de rugosidad, y no conformes.
- Cada cuerpo en el contacto se puede modelizar como un semiespacio elástico. Esta hipótesis requiere que las dimensiones del área de contacto sean pequeñas en relación con los radios de curvatura de los cuerpos. Además, según esta hipótesis se asume un comportamiento elástico lineal.
- En cuanto a la geometría de las superficies en el contacto, la distancia entre los perfiles indeformados de ambos cuerpos en la proximidad del punto de contacto se puede aproximar por un paraboloides.
- El contacto entre superficies se realiza sin rozamiento, con lo que sólo se transmite una presión normal.

Según estas hipótesis, el área de contacto es una elipse y la distribución de tensiones normales un elipsoide.

La superficie de cada uno de los cuerpos es considerada suave tanto a escala macroscópica como a escala microscópica. En la escala microscópica implica la ausencia de pequeñas irregularidades en la superficie (rugosidad) que daría lugar a un contacto fragmentado o

variaciones elevadas en la presión de contacto. A escala macroscópica los perfiles de las superficies en el contacto son continuos hasta su segunda derivada en la zona cercana al punto de contacto.

Cuando dos cuerpos de geometrías suaves y no conformes se ponen en contacto, inicialmente se tocan en un punto o a lo largo de una línea. Bajo la acción de una pequeña carga, éstos se deforman en la cercanía del contacto y se crea un área de contacto pequeñas en comparación con las dimensiones de los dos cuerpos.

Se toma como origen del sistema de referencia asociado al contacto  $x_c - y_c - z_c$ , el primer punto de contacto, donde se define el plano tangente a las dos superficies. Los ejes  $y_c - z_c$  definen el plano tangente, mientras que el eje  $z_c$  señala la dirección normal. El sentido de  $z_c$  que se toma como positivo es el dado por el vector normal del cuerpo colocado debajo.

En la situación donde se produce el primer contacto, la superficie de cada uno de los cuerpos se puede describir mediante una función cuadrática, de tal forma que la distancia entre las superficies indeformadas se puede expresar como:

(15)

$$h(x, y) = C_1x^2 + C_2y^2 + C_3xy$$

Mediante una elección adecuada de los ejes, el coeficiente  $C_3$  se puede hacer cero, con lo que queda:

(16)

$$h(x, y) = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2$$

donde  $A$  y  $B$  son capaces positivas que tienen el valor de las curvaturas combinadas y  $R'$  y  $R''$  los radios de curvatura relativos a éstas.

Considerando la situación en la que se aplica una fuerza normal  $F_z$ , aparece un acercamiento entre los dos cuerpos de valor  $\delta_0$ . Si las superficies de los cuerpos no se deformasen, aparecería una interpenetración entre sus perfiles tal como se muestra en la línea de puntos de la *Figura 14*. Debido a la presión en el contacto, cada punto de la superficie de cada cuerpo se desplaza paralelo al eje  $z_c$  una cantidad  $u_{z1}$ ,  $u_{z2}$ , respectivamente. En este caso, para un punto que pertenezca al área de contacto, se puede escribir la relación:

(17)

$$u_{z1} + u_{z2} + h = \delta_0$$

Por otra parte, si los puntos se encuentran fuera del área de contacto, se cumple:

(18)

$$u_{z1} + u_{z2} + h > \delta_0$$

Para poder resolver el problema es necesario encontrar la distribución de presiones normales transmitidas entre los dos cuerpos en la superficie de contacto, de tal forma que los desplazamientos elásticos resultantes cumplan la ecuación (17) dentro del área de contacto y (18) fuera de ésta.

Se van a estudiar dos casos con distintas geometrías: en primer lugar, el contacto entre dos cilindros de ejes paralelos que da lugar a un modelo bidimensional, y en segundo lugar, el caso general de contacto entre dos paraboloides, que constituye un caso tridimensional.



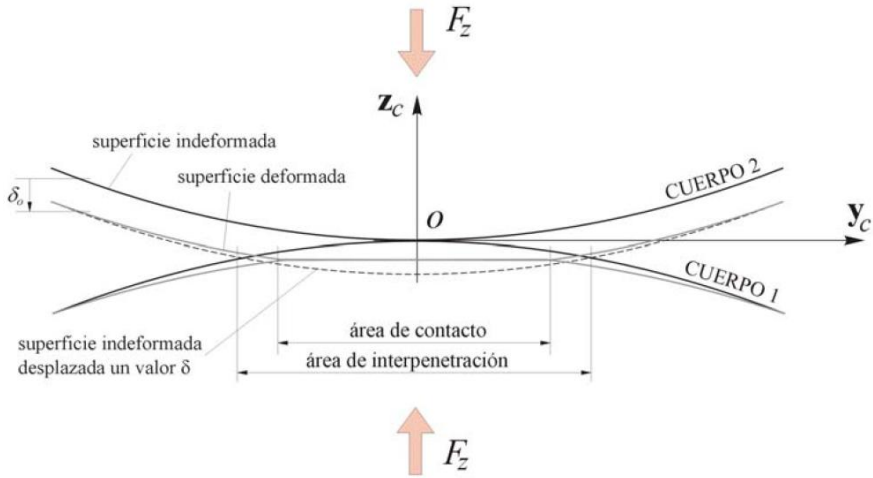


Figura 14. Representación esquemática del contacto entre dos superficies.

El primer caso que se va a describir es el contacto bidimensional que aparece entre dos cilindros de ejes paralelos, tal como aparece en la Figura 15, donde  $c$  es la longitud de los cilindros y  $R_1$ ,  $R_2$  son sus radios, respectivamente.

Para la geometría considerada, la distribución de presiones normales que da lugar a los desplazamientos que satisfacen la ecuación (17), según la teoría de Hertz [18], es:

(19)

$$p_z(x) = p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

para  $x < a$ , donde  $a$  es la longitud del área de contacto,  $x$  es la posición longitudinal medida con respecto al origen del sistema de referencia en  $O$  y  $p_{z_0}$  es el valor máximo de presión.

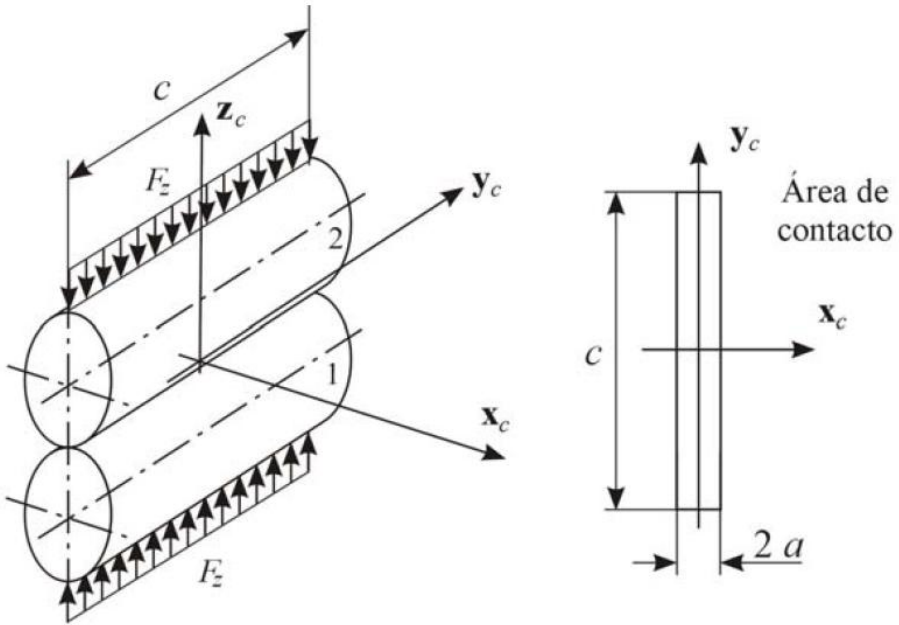


Figura 15. Contacto entre dos cilindros de ejes paralelos.

El área de contacto que aparece es un rectángulo paralelo al eje  $y_c$  de dimensiones  $2a$  en sentido longitudinal y  $c$  en transversal. Integrando la distribución de presiones en el área de contacto se obtiene la expresión de la fuerza total:

(20)

$$F_z = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-a}^a p_z(x) dx dy = \frac{\pi p_{z_0} a c}{2}$$

Por otra parte, aplicando la teoría de semiespacio elástico y con las condiciones de contorno correspondientes, se puede resolver la ecuación (17) y obtener las dimensiones del área de contacto [18]. De esta forma, la semilongitud de área de contacto se calcula como:

(21)

$$a^2 = \frac{4 F_z R^*}{\pi c E^*}$$

siendo  $R^*$ , la curvatura combinada de los dos cilindros y  $E^*$  el módulo de Young combinado de los materiales en el contacto, calculados según:

(22)

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

(23)

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2}$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$  son los módulos de Young y  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  los coeficientes de Poisson de los dos materiales en el contacto, respectivamente.

Combinando las ecuaciones (20) y (21) y despejando el valor de  $p_{z_0}$ , se puede obtener el valor de la presión máxima en función de la fuerza aplicada y de las características geométricas y resistentes de los cuerpos en el contacto:

(24)

$$p_{z_0}^2 = \frac{F_z E^*}{\pi c R^*}$$

En segundo lugar, una vez analizado el contacto entre dos cilindros paralelos, se tratará el contacto entre dos paraboloides (*Figura 16*). Esta geometría constituye el caso general de contacto que se puede describir por la teoría de Hertz.

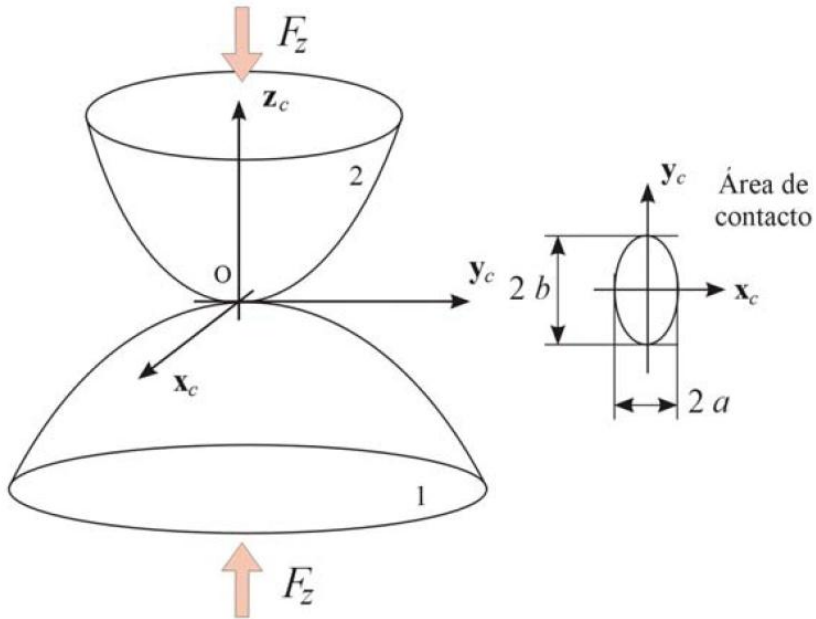


Figura 16. Contacto entre dos paraboloides (caso general).

La geometría de los cuerpos se define a partir de los radios de curvatura de los cuerpos en el punto de contacto, siendo  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$  los radios de curvatura del cuerpo 1 en dirección longitudinal y transversal, respectivamente, y  $R_{2x}$ ,  $R_{2y}$  los radios correspondientes al cuerpo 2, según las mismas direcciones.

Los valores de curvaturas combinadas  $A$  y  $B$  se pueden obtener como:

(25)

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}} \right)$$

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}} \right)$$

siendo  $A$  el valor de la curvatura longitudinal y  $B$  el valor de la curvatura transversal. Si el cuerpo 1 es el carril y el cuerpo 2 la rueda,  $R_{1x}$  es el radio longitudinal del carril ( $1/R_{1x} = 0$ ),  $R_{2x}$  es el radio de rodadura de la rueda ( $R_{2x} = R$ ),  $R_{1y}$  es el radio correspondiente a la curvatura transversal del carril y  $R_{2y}$  es el radio correspondiente a la curvatura transversal de la rueda.

En tal caso, el área de contacto es una elipse cuyos semiejes son  $a$  y  $b$ , en sentido longitudinal y transversal, respectivamente y la distribución de presiones normales es semielíptica, según:

(26)

$$p_z(x, y) = p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

siendo  $p_z$ , el valor máximo de presión.

Integrando la expresión (26) dentro del área de contacto, se obtiene el valor de fuerza normal  $F_z$ :

(27)

$$F_z = \int_{-b}^b \int_{-\bar{a}(y)}^{\bar{a}(y)} p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy$$

con  $\bar{a}(y) = a\sqrt{1 - (y/b)^2}$ , cuyo resultado es:

(28)

$$F_z = \frac{2}{3} \pi a b p_{z_0}$$

A partir de la ecuación anterior, se puede obtener el valor de la presión máxima en función de las dimensiones de la elipse y de la fuerza normal:

(29)

$$p_{z_0} = \frac{3F_z}{2\pi a b}$$

Para obtener las dimensiones de la elipse se deben resolver unas integrales elípticas completas [18]. Estos resultados se encuentran precalculados y se expresan según las fórmulas [19, 3]:

(30)

$$a = m \left[ \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^2}{E} \frac{1}{A + B} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$b = n \left[ \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^2}{E} \frac{1}{A + B} \right]^{\frac{1}{3}}$$

siendo  $m$  y  $n$  valores que se obtienen en tablas a partir de la relación entre las curvaturas  $A$  y  $B$ ,  $E$  el módulo de Young de los materiales y  $\sigma$  el coeficiente de Poisson. En caso de que los cuerpos tengan distintas características mecánicas, se empleará la relación [3]:

(31)

$$\frac{1 - \sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right)$$

También es posible hallar el valor de la indentación  $\delta_0$  que aparece entre las superficies en el contacto como consecuencia de la fuerza normal  $F_z$  a partir de la siguiente relación [19, 3]:

(32)

$$\delta_0 = r \left( \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^2}{E} \right)^2 (A + B) \right)^{\frac{1}{3}}$$

donde el parámetro  $r$  se obtiene en tablas a partir de los valores de las curvaturas  $A$  y  $B$ .

Para hallar los valores de  $m$ ,  $n$  y  $r$ , se obtiene el valor del ángulo  $\theta$  en grados que permite interpolar en la *Tabla 1*.

(33)

$$\cos \theta = \frac{|B - A|}{B + A}$$

$\theta^\circ$	0	5	10	30	60	90	120	150	170	175	180
$\lambda = A/B$	0	0.0019	0.0077	0.0717	0.3333	1	3.0	13.93	130.6	524.6	$\infty$
$n/m$	0	0.0212	0.0470	0.1806	0.4826	1	2.0720	5.5380	21.26	47.20	$\infty$
$m$	$\infty$	11.238	6.612	2.731	1.486	1	0.7171	0.4931	0.311	0.2381	0
$r$	0	0.2969	0.4280	0.7263	0.9376	1	0.9376	0.7263	0.4280	0.2969	0

*Tabla 1. Coeficientes de Hertz para  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ . Extraído de [20].*

La *Figura 17* muestra la evolución de los parámetros  $m$ ,  $n$  y  $r$  en función del ángulo  $\theta$ . Este gráfico es simétrico con respecto a  $\theta = 90^\circ$ . Por tanto, la información de la *Tabla 1* se puede presentar sólo para valores de 0 a  $90^\circ$  y cambiando los parámetros  $m$  por  $n$  y viceversa.

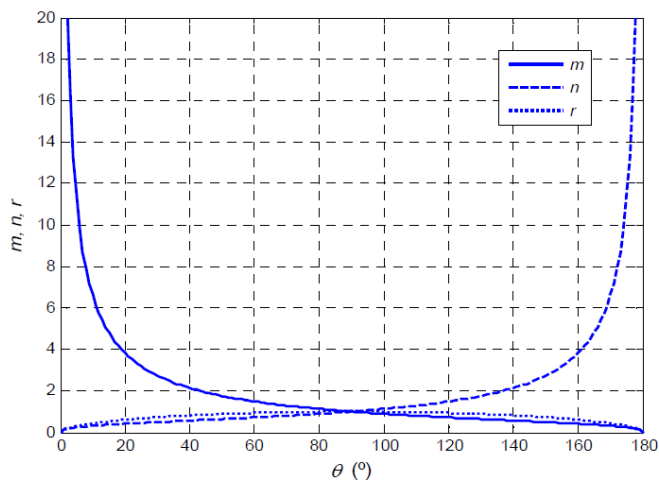


Figura 17. Valores de los parámetros  $m$ ,  $n$ , y  $r$  en función del ángulo  $\theta$ .

Una vez descrita la teoría de Hertz, que constituye un modelo de contacto normal de punto teórico de contacto, se pasarán a describir los modelos basados en la interpenetración virtual entre superficies.

### Modelos basados en la interpenetración virtual entre superficies

Según la clasificación propuesta en este trabajo, los modelos de contacto normal basados en la interpenetración virtual estiman el área de contacto a partir del área de interpenetración que aparece entre las superficies de la rueda y carril. Esta interpenetración tiene lugar como consecuencia del movimiento relativo de las superficies que se consideran indeformables y con la capacidad de solaparse.

Se van a describir dos modelos presentes en la bibliografía: en primer lugar el modelo de Kik y Piotrowski, y en segundo lugar, el modelo de Ayasse y Chollet.



a) Modelo de Kik-Piotrowski

El modelo de Kik-Piotrowski se describe en [21] y posteriormente en [10, 22]. Se trata de un modelo para resolver el problema normal y el problema tangencial de contacto.

Este modelo se trata de una teoría cuasi-herciana ya que asume la distribución de presiones de Hertz en la dirección longitudinal. En cambio, en dirección transversal la geometría de los perfiles de rueda y carril no tiene una curvatura constante, por lo que las hipótesis de Hertz no son válidas. Este tipo de teorías en [10] se conocen como semi hercianas.

- Planteamiento del problema elástico: Para la definición de la geometría en el contacto se asume que la rueda es un cuerpo de revolución de radio  $R$  y la superficie de rodadura del carril es cilíndrica. Para el cálculo de los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas se desprecia la forma real de los cuerpos y se reemplazan por semi-espacios elásticos. Esta simplificación permite el uso de las funciones de influencia de Boussinesq para el cálculo de los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas [2].

Se toma como punto geométrico de contacto, el punto en que se tocan la rueda y el carril sin transmitir ninguna carga. En este punto se define el origen del sistema de referencia asociado al contacto, donde los ejes  $x_c - y_c$  definen el plano tangencial al contacto y  $z_c$  la dirección normal, definida según el vector normal al carril. El eje  $x_c$  define la dirección longitudinal y el sentido de avance e  $y_c$  la dirección transversal.

Se definen los perfiles de rueda y carril como la sección de las superficies en contacto por el plano  $y_c - z_c$  ( $x = 0$ ). En esta sección la separación entre los perfiles indeformados de la rueda y del carril se obtiene como:

(34)

$$f(y) = f_w(y) + f_r(y)$$

siendo  $f_w(y)$  y  $f_r(y)$  los perfiles de la rueda y carril.

Para cualquier otra sección ( $x \neq 0$ ), la separación entre perfiles indeformados se calcula como:

(35)

$$h(x, y) = f(y) + \frac{x^2}{2R}$$

siendo  $R$  el valor del radio de rodadura.

Por tanto, para un punto que pertenece al área de contacto tomando la relación (17) y asumiendo el principio de cuasi-identidad elástica,  $u_{z1} = u_{z2} = u_z$  se puede escribir:

(36)

$$2u_z(x, y) + h(x, y) = \delta_0$$

donde el valor de la deformación elástica se puede calcular a partir de la ecuación (10.b):

(37)

$$u_{z(x,y)} = \frac{1 - \sigma^2}{\pi E} \int \int_{\Omega} \frac{p_z(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta$$

Particularizando la ecuación (36) para el punto geométrico de contacto se tiene:

(38)

$$\delta_0 = 2u_z(0,0) = 2u_{z_0}$$

- Estimación del área de contacto: El método parte de la solución del problema de interpenetración entre rueda y carril. Tomando el valor de indentación máxima  $\delta_0$ , se define un nuevo valor minorado  $K \delta_0$  y se calcula la nueva área de interpenetración correspondiente. Esta área será una estimación del área de contacto.

A partir de la distancia entre perfiles indeformados de la fórmula (34) se puede definir la función de interpenetración como:

(39)

$$g(y) = \begin{cases} K\delta_0 - f(y) & \text{si } f(y) \leq K\delta_0 \\ 0 & \text{si } f(y) > K\delta_0 \end{cases}$$

Y tomando este valor de interpenetración corregida, se pueden calcular los bordes del área de contacto, según:

(40)

$$x_l(y) = -x_t(y) \approx \sqrt{2R g(y)}$$

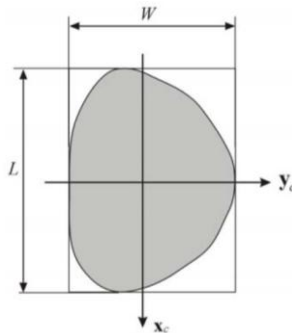
donde  $x_l(y)$  representa el borde anterior del área de contacto (del inglés leading) y  $x_t(y)$  el borde posterior (del inglés trailing);  $R$  es el radio de rodadura. Según la fórmula anterior se supone que el área de contacto es simétrica con respecto al eje  $y_c$ .

- Corrección de forma del área de contacto: Según este procedimiento, el área de contacto obtenida sólo es válida para áreas circulares. Para cualquier otra forma, será necesario realizar una corrección que tenga en cuenta la deformación de las superficies en las cercanías del contacto [10, 22]. Para aplicar esta corrección de forma se definen unas curvaturas equivalentes a partir de las dimensiones del área de contacto y de la indentación máxima y se aplica la teoría de Hertz (*Tabla 1*). Piotrowski y Kik [22] proponen el uso de las tablas de Hertz definidas para  $\theta$  que varía de 0 a 90°. Por tanto, las relaciones entre curvaturas o entre parámetros se definirán de tal modo que el rango de trabajo quede dentro de la tabla.

Los valores de las curvaturas equivalentes se obtienen a partir del largo  $L$  y el ancho  $W$  del área de contacto, tal como indica la *Figura 18*, y del valor de indentación máxima corregida  $K \delta_0$ , según:

(41)

$$A_{eq} = \frac{4 K \delta_0}{L^2} \qquad B_{eq} = \frac{4 K \delta_0}{W^2}$$



*Figura 18. Dimensiones del área de contacto: L largo, W ancho.*

A partir de los valores que aparecen en la *Figura 18*, la relación entre curvaturas  $\lambda$  se define como:

$$\lambda = \begin{cases} (W/L)^2 & \text{si } (W/L) \leq 1 \\ (L/W)^2 & \text{si } (W/L) > 1 \end{cases} \quad (42)$$

Utilizando este valor se puede obtener el factor de corrección  $\beta$ . Para ello, se define el factor  $\beta_0$  como la relación  $m/n$  o bien utilizando la fórmula empírica obtenida a partir de la *Tabla 1* (tomando los valores de  $\theta$  de 0 a 90°):

$$\beta_0 = \frac{1}{0.5837\lambda - 0.1053\lambda^2 + 0.5184\sqrt{\lambda}} \quad (43)$$

y el valor de  $\beta$  se obtiene como:

$$\beta = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } (W/L) \leq 1 \\ 1/\beta_0 & \text{si } (W/L) > 1 \end{cases} \quad (44)$$

Para realizar la corrección de forma, se usan estas dos condiciones:

$$L_c/W_c = \beta \quad L_c W_c = LW \quad (45)$$

y resolviendo se obtiene:

(46)

$$L_c = \sqrt{\beta L W}$$

$$W_c = \sqrt{L W / \beta}$$

Definiendo  $\Delta W = W_c - W$ , si  $\Delta W$  es negativo, el área se contrae en sentido transversal; en caso contrario, se expande. En cualquier caso, la superficie del área de contacto se mantiene igual.

La separación entre perfiles indeformados corregida y la función de interpenetración corregida se definen de la siguiente forma:

(47)

$$f_c(y) = f(y_1)$$

$$g_c(y) = g(y_1)$$

siendo:

(48)

$$y_1 = y - \frac{W_c - W}{W} (y_0 - y)$$

donde  $y_0$  es la coordenada lateral del punto geométrico de contacto.

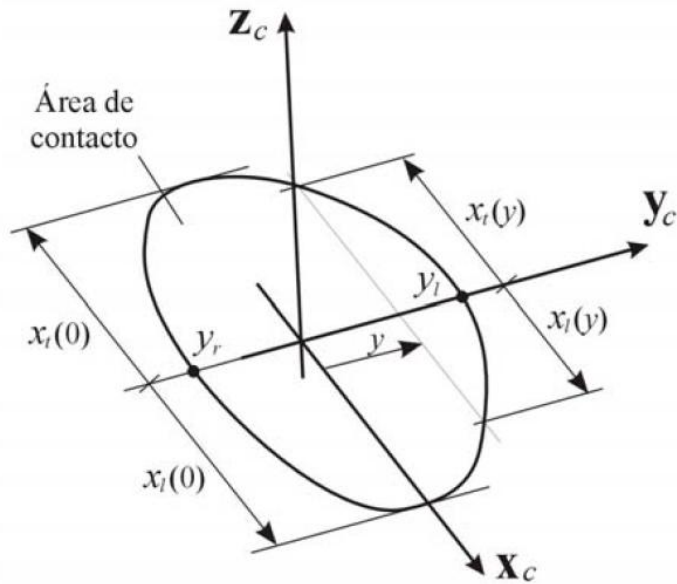
Se debe de corregir el radio de rodadura  $R$ , siendo:

(49)

$$R_c = \frac{L_c^2}{8 K \delta_0}$$

valor que se usará en lugar de  $R$  en las fórmulas (35), para calcular la separación entre superficies, y (40), para obtener las dimensiones del área de contacto corregida.

Una vez obtenida el área de contacto a partir del área de interpenetración y realizada la correspondiente corrección de forma se obtiene un área de contacto corregida como la que aparece esquemáticamente en la *Figura 19*.



*Figura 19. Área de contacto obtenida por el método de Kik-Piotrowski.  $x_l(y)$  denota el borde anterior del área de contacto y  $x_t(y)$ , el posterior.*

- Distribución de presiones normales y fuerza total: Asumiendo la distribución de presiones cuasi-herciana, de tal forma que en la dirección de rodadura la distribución es semi-elíptica, se tiene:

(50)

$$p_z(x, y) = \frac{p_{z_0}}{x_l(0)} \sqrt{x_l^2(y) - x^2}$$

donde  $p_{z_0}$  es la presión en el punto geométrico de contacto.

La fuerza total se obtiene integrando la fórmula anterior en el área de contacto:

(51)

$$F_z = \frac{p_{z_0}}{x_l(0)} \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \sqrt{x_l^2(y) - x^2} dx dy$$

siendo  $y_r$ ,  $y_l$  los límites del área de contacto según la Figura 2.21.

El valor de esta integral podría expresarse como:

(52)

$$I_l = \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \sqrt{x_l^2(y) - x^2} dx dy$$

Por otra parte, para obtener el valor de la presión en el punto geométrico de contacto, se aplica la ecuación (37) en dicho punto:

(53)

$$u_z(0,0) = \frac{1 - \sigma^2}{\pi E} \frac{p_{z_0}}{x_l(0)} \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \frac{\sqrt{x_l^2(y) - x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

donde la integral se puede expresar como:



(54)

$$I_2 = \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \frac{\sqrt{x_l^2(y) - x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

Combinando las ecuaciones (38), (51) y (53) y utilizando la definición de las integrales (52) y (54) se llega a la expresión de la fuerza normal total en función de la indentación máxima  $\delta_0$ :

(55)

$$F_z = \frac{\pi E \delta_0}{2 (1 - \sigma^2)} \frac{I_1}{I_2}$$

El modelo de Kik-Piotrowski resuelve el problema normal de contacto según este procedimiento.

#### b) Modelo de Ayasse-Chollet.

El modelo de Ayasse-Chollet se describe en [20] y posteriormente en [10]. Se trata de un modelo para resolver el problema normal y el problema tangencial de contacto. Este modelo se ha aplicado en la simulación de un paso por desvíos ferroviarios [23]. Aunque aquí tan sólo se va a exponer el problema normal.

Según la clasificación propuesta en el presente trabajo, se trata de un modelo basado en la interpenetración virtual entre perfiles. Al igual que el modelo de Kik- Piotrowski este modelo estima el área de contacto a partir del área de interpenetración, para un valor de indentación minorado. Posteriormente, realiza una corrección de forma basada en la teoría de Hertz para compensar la deformación de las superficies en las cercanías del contacto.

Al igual que el modelo anterior, se trata de una teoría quasi-herciana [8] o semi-herciana según [10]. Del mismo modo que la teoría anterior se asume la distribución de presiones de Hertz en la dirección de rodadura (longitudinal). En dirección transversal, las curvaturas de los perfiles no son constantes, por lo que no se puede aplicar directamente la teoría de Hertz.

- Estimación del área de contacto y corrección de forma: Para obtener el área de contacto, se siguen dos pasos. En primer lugar se toma  $\delta_0$  como la indentación máxima entre las superficies de la rueda y del carril para una posición dada; posteriormente se estima el área de contacto como el área de interpenetración correspondiente a una indentación minorada de valor  $K \delta_0$ . En el modelo de Ayasse-Chollet se toma un valor de  $K = 0.5$ .

En segundo lugar se realiza una corrección de forma para tener en cuenta la deformación de las superficies en el contacto. La corrección de forma se basa también en el modelo de Hertz. El procedimiento usado por Ayasse-Chollet es el siguiente: tomando las dimensiones geométricas del área de contacto y el valor de la indentación se pueden calcular unas curvaturas combinadas equivalentes. Se propone una fórmula para corregir la curvatura y calcular a partir de ésta las nuevas dimensiones corregidas.

El área de contacto obtenida por interpenetración se circunscribe por un rectángulo de dimensiones  $2 a g \cdot 2 b g$ , en sentido longitudinal y transversal, respectivamente (tal como indica la Figura 2.20, tomando  $L = 2 a g$  y  $W = 2 b g$ ). Asumiendo que las curvaturas de los cuerpos en las cercanías del contacto son

constantes, se pueden calcular los valores de estas curvaturas a partir de (16) para un valor de indentación  $\delta_0$  como:

(56)

$$\delta_0 = A_{eq} a_g^2 = B_{eq} b_g^2$$

donde  $A_{eq}$  y  $B_{eq}$  son los valores equivalentes de las curvaturas. Estas curvaturas se calculan a partir de la ecuación anterior, conocidas las dimensiones  $a_g$  y  $b_g$ .

Llegando a este punto se puede calcular la relación entre curvaturas  $\lambda$  como:

(57)

$$\lambda = \frac{A_{eq}}{B_{eq}} = \left( \frac{b_g}{a_g} \right)^2$$

y tomando la relación de curvaturas, a partir de la Tabla 2.1 se puede obtener la relación  $n/m$ .

La corrección propuesta por Ayasse-Chollet consiste en obtener el valor de la curvatura corregida en sentido longitudinal,  $A_c$ , a partir de la relación:

(58)

$$\frac{A_c}{A_{eq}} = \frac{(b_c/a_c)^2}{(b_g/a_g)^2} = \frac{(n/m)^2}{\lambda}$$

En este caso se puede redefinir la ecuación (56) para el caso de la curvatura corregida, y obtener a partir de ésta el valor de  $a_c$ :

(59)

$$\delta_0 = A_c a_c^2 = B_{eq} b_g^2$$

Por tanto las dimensiones del área corregida serán, en sentido transversal  $b = b_g$  (sin corrección) y en sentido

longitudinal  $a = a_c = \sqrt{\delta_0/A_c}$ .

- Obtención de la fuerza normal: Sobre el procedimiento de resolución del problema normal se ofrecen muy pocos detalles en los dos artículos publicados [20, 10]. Según [10], para la obtención de la fuerza normal se utiliza el concepto de elipse equivalente. El área de contacto obtenida a partir de la interpenetración virtual entre superficies y corregida según el criterio definido, se asimila a una elipse cuyos semiejes valen  $a$  y  $b$  en sentido longitudinal y transversal, respectivamente.  $a$  es el valor de la semilongitud del área de contacto corregido según la ecuación (59) ( $a = a_c$ ), mientras que  $b$  es el valor geométrico de la semianchura del área de contacto ( $b = b_g$ ).

El valor de la fuerza normal se obtiene a partir de la ecuación (32) de Hertz, a partir del valor de la indentación máxima  $\delta_0$  y de las curvaturas corregidas del área de contacto [20]. Para  $A$  se toma la curvatura corregida  $A_c$  calculada según la fórmula (58) y para  $B$  el valor de la curvatura equivalente  $B_{eq}$  calculada a partir de (59). De este modo, la ecuación (32) particularizada para el modelo de Ayasse-Chollet, quedaría:

(60)

$$\delta_0 = r \left( \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^{*2}}{E^*} \right)^2 (A_c + B_{eq}) \right)^{\frac{1}{3}}$$

En este apartado se han descrito dos modelos basados en la interpenetración virtual entre superficies, y el modelo de Hertz que constituye un modelo de punto teórico de contacto, utilizados para la resolución del problema normal de contacto.

#### **3.3.4. Problema tangencial.**

Una vez descritos modelos para la resolución del problema geométrico y del problema normal para resolver el contacto entre la rueda y el carril, se va a pasar a presentar distintos modelos de resolución del problema tangencial de contacto.

Existe una gran cantidad de modelos para la resolución del problema de contacto tangencial en el contacto rueda-carril. En este apartado se describirán los modelos que sean adecuados para su aplicación a la simulación dinámica y para la estimación del desgaste, en el rango de la baja frecuencia. Por tanto, los requisitos que deberán cumplir son:

- Tener un bajo coste computacional que haga compatible su uso dentro de un programa de simulación dinámica.
- Procesar el área de contacto de tal forma que se disponga de una distribución de las distintas magnitudes, asociadas al problema de contacto, dentro del área de contacto y que permita la evaluación de los distintos modelos para estimar el desgaste.

En [19] se propone la distinción entre modelos de contacto basados en la superficie (surface-based contact models) y modelos basados en leyes de

saturación (saturation laws). Los primeros, para resolver el problema de contacto tangencial realizan una evaluación de la superficie de contacto. En cambio, los segundos se basan en ajustes empíricos para considerar la saturación del área de contacto según el valor del coeficiente de rozamiento y la fuerza normal.

Considerando el segundo requisito se describirán los modelos de contacto basados en la superficie que además tengan un coste computacional compatible con su uso en la simulación dinámica.

Aunque no se vaya a considerar en esta Tesis es interesante mencionar los modelos basados en leyes de saturación también conocidos como modelos heurísticos. Dentro de este grupo cabría distinguir el método de Johnson y Vermeulen [24], la modificación propuesta por Shen, Hedrick y Elkins al método anterior [25] o el método de Polach [26-28]. Respecto a este último modelo, Polach [29] introduce la consideración de un coeficiente de rozamiento variable.

En cuanto a los modelos de contacto basados en la superficie, la aportación más importante se debe a Kalker [17, 30]. Este autor en primer lugar desarrolló un programa para resolver el problema normal y tangencial de contacto según la teoría de elasticidad exacta (CONTACT [2]).

Sin embargo, este programa tenía un coste computacional demasiado elevado para utilizarse en el ámbito de la simulación dinámica, por lo que diseñó nuevos modelos de resolución del problema de contacto tangencial. Tal fue el caso del modelo de contacto Kalker lineal [2] basado también en la teoría de elasticidad exacta pero limitado a áreas de contacto elípticas. Al ser lineal asume que las tensiones tangenciales son proporcionales a los valores de los pseudodeslizamientos sin tener en cuenta si existe o no saturación de éstas. Esta hipótesis es equivalente a que el coeficiente de rozamiento es infinito y, por tanto, toda el área de contacto se encuentra en adhesión.

Posteriormente Kalker [31] desarrolló un modelo de resolución del problema tangencial de contacto basado en la teoría de elasticidad simplificada que considera la saturación de las tensiones tangenciales. Este modelo de contacto, llamado FASTSIM, tiene un coste computacional mucho menor que CONTACT manteniendo un grado de precisión adecuado en el campo de la simulación dinámica [31].

Por una parte, el programa CONTACT se utiliza para investigaciones detalladas sobre aspectos mecánicos del contacto como el desgaste ondulatorio, como herramienta de validación para otros algoritmos simplificados o para la generación de tablas sobre diversos parámetros asociados al contacto [30]. Por otra parte, FASTSIM es ampliamente utilizado en aplicaciones de simulación dinámica [17].

FASTSIM inicialmente se desarrolló para la resolución de problemas estacionarios, aplicado a áreas de contacto elípticas y con el valor del coeficiente de rozamiento constante para definir la saturación de las tensiones tangenciales. Se basa en una relación lineal entre desplazamientos y tensiones en cada punto de contacto, donde los parámetros de flexibilidad se calculan a partir de la teoría de elasticidad exacta.

FASTSIM cumple los dos requisitos demandados para su aplicación en el campo de la simulación dinámica y estimación del desgaste en los perfiles: bajo coste computacional unido al procesado del área de contacto.

Sin embargo, presenta unas limitaciones según su diseño original, entre las que cabe destacar:

- Aplicación exclusiva a áreas de contacto elípticas.
- Utilización de un coeficiente de rozamiento constante.

No obstante, estas dos limitaciones son fácilmente superadas introduciendo modificaciones en el algoritmo inicial.

### Modelos utilizados para la resolución del problema tangencial

En este apartado se presentan distintos modelos para la resolución del problema tangencial y que son adecuados para la aplicación a la simulación dinámica y a la estimación del desgaste en los perfiles de rueda y carril.

En primer lugar se describe el algoritmo FASTSIM, tal como se diseñó en [31]. En segundo lugar, se expone la modificación propuesta por Alonso, Giménez y Martín [32] para mejorar el cálculo del momento de spin sin incrementar el coste computacional. Posteriormente, se presentan otros modelos y modificaciones para la consideración de áreas de contacto no elípticas, entre las que cabe destacar el modelo de Kik-Piotrowski aplicado al problema tangencial [10, 21-22], el modelo de Ayasse-Chollet también aplicado también al problema tangencial [20, 10] y la modificación de FASTSIM propuesta por Alonso y Giménez para la inclusión de áreas de contacto no elípticas [33]. Finalmente se presentan dos propuestas para la consideración de un coeficiente de rozamiento variable en el algoritmo FASTSIM: la propuesta de Giménez, Alonso y Gómez [34] y la propuesta por Piotrowski [35].

#### a) Algoritmo FASTSIM

- Relación entre desplazamientos y tensiones: El algoritmo de resolución FASTSIM está basado en la teoría de elasticidad simplificada, donde el desplazamiento tangencial debido a deformaciones elásticas de un punto es función exclusivamente de las tensiones tangenciales en dicho punto. Esta relación es lineal y se puede expresar como:



(61)

$$\mathbf{u}_t(x, y) = L \mathbf{p}_t(x, y)$$

siendo  $\mathbf{u}_t(x, y) = \{u_x(x, y); u_y(x, y)\}$ ,  $\mathbf{p}_t(x, y) = \{p_x(x, y); p_y(x, y)\}$  y  $L$  el parámetro de flexibilidad.

- Ecuación cinemática: Asumiendo un modelo estacionario según la ecuación (3), la ecuación cinemática que expresa la relación entre el deslizamiento y los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas sería:

(62)

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x}$$

donde  $\boldsymbol{\gamma}$  es el vector de deslizamiento adimensional en el plano de contacto y  $\mathbf{w}$  el vector de deslizamiento rígido adimensional, calculados según:

(63)

$$\boldsymbol{\gamma}(x, y) = \frac{1}{V} \mathbf{s}(x, y) = \begin{Bmatrix} \gamma_x(x, y) \\ \gamma_y(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{Bmatrix} \gamma_x(x, y) \\ \gamma_y(x, y) \end{Bmatrix}$$

(64)

$$\mathbf{w}(x, y) = \begin{Bmatrix} v_x - \varphi y \\ v_x - \varphi y \end{Bmatrix}$$

siendo  $\mathbf{s}$  el vector deslizamiento absoluto en el plano de contacto,  $V$  la velocidad longitudinal del vehículo y  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  las velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal, lateral

(transversal) y de spin divididas por la velocidad longitudinal del vehículo  $V$ , respectivamente.

Las velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal y lateral se calculan a partir de la velocidad relativa del punto de contacto en la rueda con respecto al carril, proyectada en el sistema de referencia asociado al contacto  $x_c y_c z_c$ . Se toman las componentes según los ejes  $x_c$  (término longitudinal) e  $y_c$  (término lateral) y se dividen por la velocidad longitudinal del vehículo (Figura 20). El término de spin se calcula como la velocidad angular relativa de la rueda con respecto al carril en el sistema de referencia asociado al contacto, proyectada en el eje  $z_c$ .

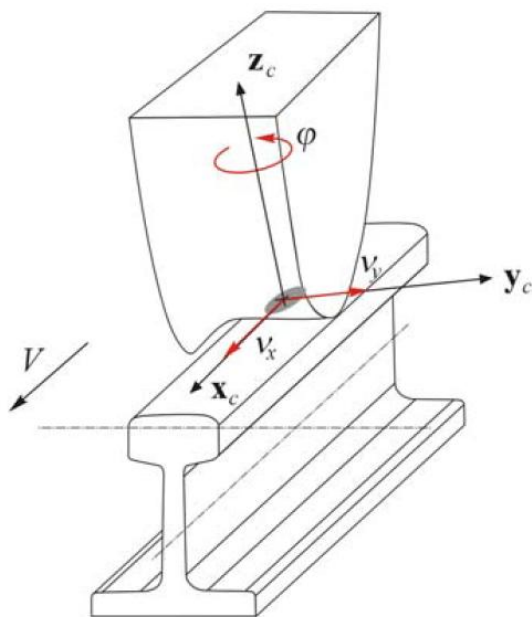


Figura 20. Velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal y lateral, y término de spin.

- Obtención de los parámetros de flexibilidad: Para poder aplicar el algoritmo FASTSIM es necesario obtener el valor de los parámetros de flexibilidad de la ecuación (61). Kalker [31] propone calcular estos parámetros de tal forma que los resultados obtenidos con la teoría de elasticidad simplificada, para valores pequeños de pseudodeslizamientos, coincidan con los valores calculados según la teoría de elasticidad exacta. La hipótesis de pequeños pseudodeslizamientos es equivalente a asumir que toda el área de contacto está en adhesión o que el coeficiente de rozamiento es infinito [32]. Con este fin se usa la teoría lineal desarrollada por Kalker [2]. Esta teoría resuelve de forma exacta el problema tangencial donde el área de contacto es elíptica y se encuentra por completo en adhesión.

Por una parte es necesario obtener la expresión de la distribución de presiones en el área de contacto según la teoría simplificada (FASTSIM). Sustituyendo la relación lineal entre tensiones y desplazamientos (61) en la relación cinemática (62), se tiene:

(65)

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} - L \frac{\partial \mathbf{p}_t}{\partial x}$$

Asumiendo adhesión ( $\boldsymbol{\gamma} = 0$ ) y despejando el valor de la tensión tangencial, se llega a la expresión:

(66.a)

$$\frac{\partial \mathbf{p}^{adh}}{\partial x} = \frac{\mathbf{w}}{L}$$

o bien

(66.b)

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} v_x - \varphi y \\ v_y - \varphi x \end{Bmatrix}$$

donde el superíndice *adh* se refiere a adhesión.

Kalker en [31] distingue tres parámetros de flexibilidad  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  asociados al pseudodeslizamiento longitudinal, lateral y término de spin, respectivamente. El objetivo de considerar estos tres parámetros de flexibilidad es realizar un ajuste con la solución calculada según la teoría exacta. Efectuando esta distinción, la ecuación (66) quedaría:

(67)

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi y}{L_3} \\ \frac{v_y}{L_2} + \frac{\varphi x}{L_3} \end{Bmatrix}$$

FASTSIM es capaz de procesar tanto áreas de contacto elípticas como no elípticas. La diferencia radica en el cálculo de los parámetros de flexibilidad  $L$ . En el artículo original [31] se consideran áreas elípticas. En tal caso, si el área de contacto es regular (como es el caso de un área elíptica), los valores de estos parámetros pueden precalcularse y obtenerse fácilmente a partir de tablas.

Integrando la ecuación (66) para un área de contacto elíptica (*Figura 21*) se obtiene la distribución de presiones tangenciales en condiciones de adhesión.

(68)

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_t^{adh}(x, y) \\ &= \int_{\bar{a}(y)}^x \frac{\mathbf{w}}{L} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi y}{L_3} \right) (x - \bar{a}(y)) \\ \frac{v_y}{L_2} (x - \bar{a}(y)) + \frac{\varphi}{2L_3} (x^2 - \bar{a}(y)^2) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

siendo  $\bar{a}(y) = a\sqrt{1 - (y/b)^2}$ .

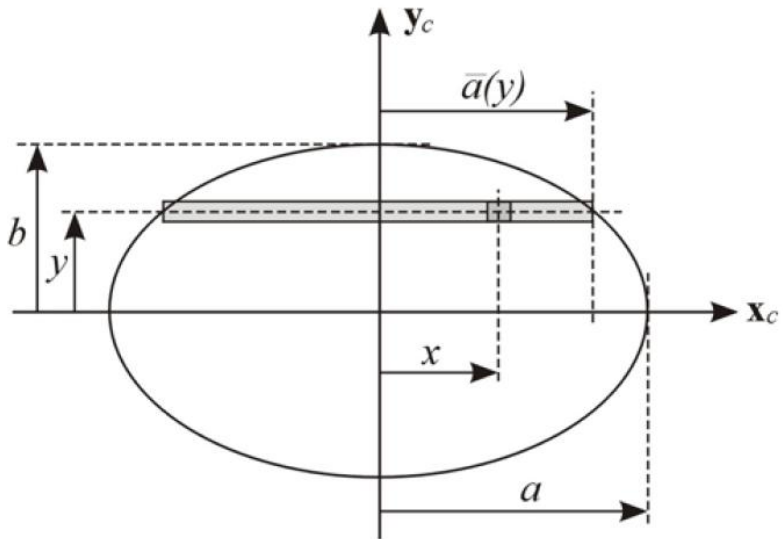


Figura 21. Integración del área de contacto elíptica.

Integrando ahora la distribución de presiones tangenciales obtenida en condiciones de adhesión, se obtienen las fuerzas

tangenciales generadas en el contacto (también en condiciones de adhesión):

(69)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} &= \int_{-b}^b \int_{-\bar{a}(y)}^{\bar{a}(y)} \mathbf{p}_t^{adh}(x, y) dx dy \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{8 a^2 b}{3 L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8 a^2 b}{3 L_2} & \frac{\pi a^3 b}{4 L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Por otra parte, según la teoría lineal de Kalker la expresión de las fuerzas tangenciales es [31]:

(70)

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{22} G a b & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} G a b & c_{22} G a b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

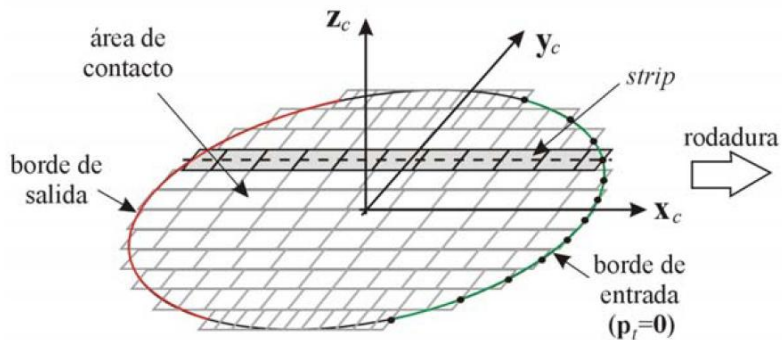
donde  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  y  $c_{23}$  son los coeficientes de Kalker obtenidos a partir de la relación  $a/b$  y de las características mecánicas de los materiales [2] y  $G$  es el módulo de elasticidad transversal combinado de los materiales en el contacto.

Igualando las expresiones (69) y (70) se pueden obtener los valores de los parámetros de flexibilidad  $L$  para áreas elípticas:

(71)

$$L_1 = \frac{8 a}{3 c_{11} G} \quad L_2 = \frac{8 a}{3 c_{22} G} \quad L_3 = \frac{\pi a \sqrt{a/b}}{3 c_{23} G}$$

- Aplicación del algoritmo: Para aplicar el algoritmo FASTSIM, se integra la ecuación (62) dentro del área de contacto. El área de contacto se divide en  $N$  tiras longitudinales o strips. Cada una de estas strips se divide a su vez en  $N$  elementos. La integración se realiza siguiendo cada una de las strips partiendo del borde de entrada de una partícula en el área de contacto hasta el borde de salida (según el sentido de rodadura, siguiendo el sentido contrario al eje  $x_c$ ), *Figura 22*. Como condición de contorno se impone que la presión tangencial es nula en el borde de entrada [31].



*Figura 22. Discretización del área de contacto elíptica para la aplicación de FASTSIM.*

Según la ecuación (67), integrando numéricamente desde el borde de entrada, donde la tensión tangencial  $\mathbf{p}_{t_0}^{adh} = \mathbf{p}_t^{adh}(\bar{a}, y)$  es conocida, los valores  $\mathbf{p}_{t_1}^{adh} = \mathbf{p}_t^{adh}(\bar{a} - \Delta x, y)$ ,  $\mathbf{p}_{t_2}^{adh} = \mathbf{p}_t^{adh}(\bar{a} - 2 \Delta x, y)$ ,...y así sucesivamente, se determina a partir del punto anterior (*Figura 23*):

(72.a)

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) - \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi y}{L_3} \\ \frac{v_y}{L_2} + \frac{\varphi x}{L_3} \end{array} \right\} \Delta x$$

o bien:

(72.b)

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) - \frac{\Delta x}{L} \mathbf{w}(x, y)$$

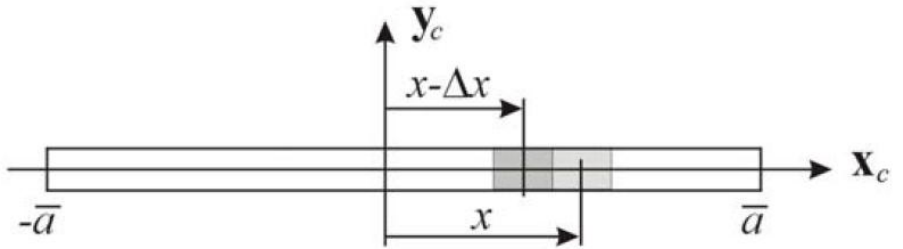


Figura 23. Integración de las tensiones tangenciales en la strip que forma parte del área de contacto.

La fórmula anterior se ha obtenido en condiciones de adhesión. Por tanto, será necesario comprobar la hipótesis de adhesión utilizando la ley de Amontons-Coulomb:

(73)

$$|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)| < \mu p_z(x - \Delta x, y)$$



donde  $\mu$  es el valor del coeficiente de rozamiento, supuesto inicialmente un valor conocido y constante. Si esta condición se cumple, el punto está en adhesión. En caso contrario, estará en deslizamiento y el valor de la tensión tangencial lo impone la ley de Amontons-Coulomb:

(74)

$$|\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y)| = \mu p_z(x - \Delta x, y)$$

En tal caso, el vector tensión tangencial en deslizamiento se supondrá colineal al vector tensión tangencial en adhesión y sus componentes son:

(75)

$$p_k(x - \Delta x, y) = \mu p_z(x - \Delta x, y) \frac{p_k^{adh}(x - \Delta x, y)}{|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)|}$$

siendo  $k = x$  (longitudinal),  $y$  (transversal).

- Elección de la distribución de tensiones normales: Según Kalker [44] existe cierto grado de libertad en la elección de la distribución de presiones normales. En [44] propone utilizar una distribución de presiones parabólica debido a que proporciona un mejor ajuste de las zonas de adhesión y deslizamiento con respecto a la solución ofrecida por CONTACT:

(76)

$$p_z(x, y) = p_{m\acute{a}x} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]$$

donde  $p_{m\acute{a}x}$  es el valor máximo de la distribución de presiones normales. Integrando la distribución de presiones dentro del área

elíptica y conocido el valor de fuerza normal, se puede obtener el valor de  $p_{m\acute{a}x}$ .

(77)

$$p_{m\acute{a}x} = \frac{2 F}{\pi a b}$$

Esta distribución se puede comparar con la distribución semielíptica de Hertz de la ecuación (26).

- Obtención del deslizamiento en el área de contacto: En el algoritmo FASTSIM original [31] no se realiza el cálculo de los deslizamientos  $\gamma$ . El cálculo de estos valores no es necesario para establecer la distribución de tensiones en el área de contacto. Sin embargo, son valores necesarios para realizar una estimación del desgaste de forma local en el área de contacto. El procedimiento descrito se trata de una extensión del algoritmo FASTSIM original.

El cálculo de los deslizamientos locales en el área de contacto se puede realizar a partir de la ecuación (65), considerando la distinción entre las zonas de adhesión y de deslizamiento.

En la zona de adhesión, el valor de la tensión tangencial según la ecuación (72) es  $\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)$  y el valor del deslizamiento es nulo por hipótesis ( $\gamma = 0$ ).

En la zona de deslizamiento, desarrollando la ecuación 2.65 y según la discretización empleada, quedaría:

(78)

$$\gamma(x, y) = \mathbf{w}(x, y) - \frac{L}{\Delta x} [ \mathbf{p}_t(x, y) - \mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) ]$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la relación de (72) se llega a la expresión del vector deslizamiento adimensional en  $(x, y)$  a partir de la diferencias entre las tensiones tangenciales calculadas y las tensiones tangenciales en condiciones de adhesión en  $(x - \Delta x, y)$ :

(79.a)

$$\boldsymbol{\gamma}(x, y) = \frac{L}{\Delta x} [ \mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) ]$$

cuyas componentes son:

(79.b)

$$\gamma_x(x, y) = \frac{L_1}{\Delta x} [ p_x(x - \Delta x, y) - p_x^{adh}(x - \Delta x, y) ]$$

$$\gamma_y(x, y) = \frac{L_2}{\Delta x} [ p_y(x - \Delta x, y) - p_y^{adh}(x - \Delta x, y) ]$$

Así, se llega a una expresión que permite obtener el valor del deslizamiento adimensional aplicando diferencias finitas según la discretización empleada por FASTSIM.

En la gran mayoría de los modelos presentados hoy en día para la resolución del problema tangencial se utilizan modificaciones del Algoritmo FASTSIM.



## **4. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO.**

### **4.1. Introducción.**

Según el planteamiento para el estudio del contacto presentado anteriormente, el procedimiento se puede dividir en tres pasos:

- Problema Geométrico.
- Problema Normal.
- Problema Tangencial.

La aplicación de este modelo se realizará mediante simulación dinámica en el rango de baja frecuencia.

En este capítulo se va a explicar la metodología utilizada para la resolución de los problemas geométrico y de contacto.

#### **4.1.1. Requisitos.**

El procedimiento propuesto debe cumplir unos requisitos ya que, la aplicación del método será su uso en programas de simulación dinámica. Estos requisitos son los siguientes:

- Elevada eficiencia computacional. El método debe ser capaz de integrarse en programas de simulación dinámica, en los que para cada incremento de tiempo  $\Delta t$ , debe resolverse el problema de contacto para todos los ejes dispuestos en el modelo. Podemos decir que es muy importante que tenga un coste computacional bajo sin penalizar la precisión de los resultados.
- No considerar efectos transitorios. Como la aplicación será el cálculo dinámico dentro del rango de baja frecuencia.

- Estimación precisa. Precisa a la hora de determinar las áreas de contacto, en cuanto a número, posición, forma y tamaño.

#### **4.1.2. Antecedentes.**

Hay distintas soluciones para resolver el problema de contacto según los diversos autores que han ahondado en este método.

Kick y Piotrowski [21, 10, 22] y Ayasse y Chollet [20, 10] utilizan métodos basados en la interpenetración virtual entre superficies y procesan el área de contacto no regular, pero asumen hipótesis de área de contacto elíptica para el cálculo de los parámetros de flexibilidad.

Alonso y Giménez [17, 37], también utilizan programas basados en la interpenetración virtual, consideran el área de contacto no regular en el problema normal y aproximan el área de contacto a figuras regulares no-elípticas para la resolución del problema tangencial [33].

Otros autores, tras resolver el problema geométrico considerando la interpenetración virtual entre superficies de contacto emplean el método de punto de contacto teórico de Hertz, donde la elipse de contacto se define a partir del punto de máxima indentación.

La diferencia básica entre los distintos métodos es el valor que cada autor acepta para la constante  $K$ .

Kik y Piotrowski  $\rightarrow K = 0.55$

Ayasse y Chollet  $\rightarrow K = 0.5$

Kalker [45]  $\rightarrow K = 0.65$

### 4.1.3. Procedimiento.

El procedimiento a seguir para la resolución del método (problema geométrico y normal) como bien dictamina Andrés Rovira en su Tesis[38] es el siguiente:

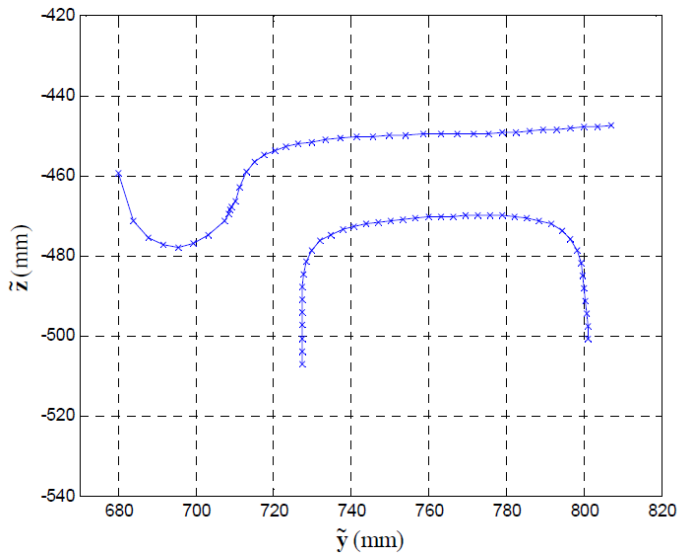


Figura 24. Definición de perfiles de rueda y carril a partir de planos.

- Rueda (Superior).
- Carril (Inferior).

1. Definición de las superficies de la rueda y el carril, definidas por sus perfiles, en el plano transversal a la vía. Ver Figura 24.
2. Cálculo de las áreas de interpenetración.
3. Obtención de las áreas de contacto.
4. Obtención del área de contacto corregida.

5. Ajuste de una elipse equivalente al área de contacto corregida mediante criterios geométricos.
6. Cálculo de la fuerza normal mediante la teoría de Hertz.
7. Aplicar una distribución de presiones semilelítica de Hertz dentro de la elipse equivalente.

#### **4.1.4. Hipótesis en las que se basa el modelo.**

##### Interpenetración Virtual

La interpenetración virtual entre superficies se puede comparar con otro método, como la teoría de Hertz, basado en el punto teórico de contacto, para estimar el área de contacto a partir de la definición de los cuerpos en contacto.

Se ha escogido la interpenetración virtual ya que representa ventajas respecto a Hertz, como la mejor estimación de las áreas de contacto ya que, se considera la geometría real de los cuerpos.

También su puede obtener una mayor eficiencia computacional. Esto se debe a que aprovecha toda la información obtenida en el problema geométrico para resolver el problema normal. Se puede entender que para el mismo coste computacional, se obtendrá un resultado de mayor precisión.

Además son métodos más robustos porque estiman las características del contacto a partir de la definición de las áreas de interpenetración.

##### Elipse Equivalente

Se asume la elección natural para la forma de un área de contacto, para esto se toma una elipse regular, debido a que las áreas de contacto son aproximadamente elípticas. Esta opción resulta muy adecuada por el motivo



de la resolución del problema de contacto ya que, esta geometría es compatible con las hipótesis de distribución normal adoptada por Hertz.

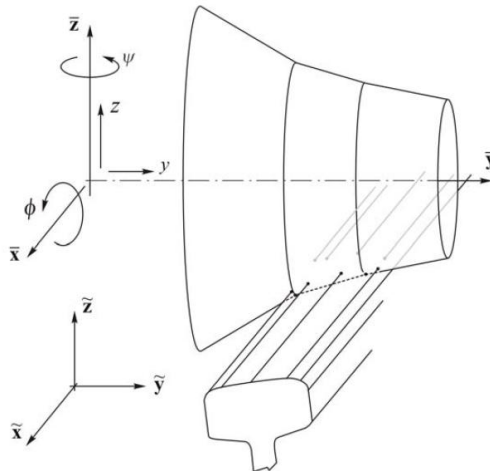
### Modelo de Hertz

Una vez aproximada el área de contacto a una elipse (elipse equivalente), se calcula la distribución de tensiones normales por el modelo de contacto de Hertz. Este modelo posee una solución analítica así que tiene un coste computacional bastante bajo.

## 4.2. Resolución del Problema.

### Planteamiento de la intersección entre superficies

El área de interpenetración se puede calcular, obteniendo la intersección entre las rectas que definen la superficie del carril y los troncos de cono que definen los perfiles de la rueda.



*Figura 25. Sistemas de referencia y superficies base del carril y de la rueda para la resolución del problema geométrico de contacto. Tesis Andrés Rovira [38].*

Estas intersecciones se obtienen de la siguiente manera:

- Cada punto del carril que define una recta longitudinal ' $i$ ', en el plano  $\tilde{y} - \tilde{z}$ .
- El tronco de cono ' $j$ ' de la rueda está definido por dos puntos consecutivos en el perfil de la rueda.
- El ángulo de revolución del tronco de cono del perfil de la rueda,  $\zeta$ .
- Se define la posición de ambos cuerpos, tomando el carril como referencia. La posición de cada tronco de cono estará definida por dos translaciones  $y$ (lateral),  $z$ (vertical), ejes  $\tilde{y}$  y  $\tilde{z}$ . También se definen dos rotaciones,  $\psi$  (lazo),  $\phi$  (balanceo). Estos giros son los ángulos de Euler que definirán la transformación de coordenadas entre los dos sistemas de referencia (eje y vía).

### Definición de Strips

Se denomina Strip a la intersección de cada recta longitudinal con la superficie de la rueda [20, 10]. Para cada strip  $k$  se calcularán las siguientes características:

- Posición  $(x_k, y_k, z_k)$ .

Las posición de cada strip en  $y_k, z_k$  son las coordenadas de la recta  $i$  que define el carril  $y^r, z^r$ . La posición  $x_k$  se calcula como la media entre las coordenadas de entrada y salida de la recta longitudinal en el cuerpo de la rueda:

(80)

$$x_k = \frac{x_{1k} + x_{2k}}{2}$$

- Longitud ( $l_k$ ).

La longitud de la strip se puede calcular como la distancia entre estos dos puntos

(81)

$$l_k = |x_{1k} - x_{2k}|$$

- Conicidad ( $\gamma_k$ ).

Esta conicidad se obtiene como la media entre la conicidad del perfil del carril (superíndice  $r$ ) y la conicidad del perfil de la rueda (superíndice  $w$ ) medidos en el sistema de referencia de la vía:

(82)

$$\gamma_k = \frac{\gamma_k^r + \gamma_k^w}{2}$$

donde cada tronco de cono, que representa la rueda, tiene conicidad constante y para la recta longitudinal, que representa el carril, se obtiene tomando las rectas longitudinales contiguas. En el caso de que los dos puntos de entrada y salida de la recta longitudinal  $i$  no estén sobre el mismo tronco de cono  $j$ , se toma la media entre las dos conicidades.

- Radio de rodadura de la rueda en la strip  $R_k$ .

En el caso de que la intersección de la recta sea con el mismo tronco de cono, se utilizará el parámetro  $\alpha$  para hallar el radio de rodadura de

cada strip y poder interpolar linealmente entre los valores del radio de rodadura de los extremos del segmento generatriz del cono  $j$ :

(83)

$$R_k(\alpha) = \alpha R_{j+1} + (1 - \alpha)R_j$$

siendo  $R_j, R_{j+1}$  los radios de la rueda que corresponden a los extremos del segmento  $j$ .

En el caso de que la entrada y la salida de la recta no estén sobre el mismo cono, se tomará la media de los valores de ambos radios de rodadura correspondientes a los puntos de entrada y salida tomados de la fórmula (83).

- Radio de indentación  $r_{id_k}$  y el valor de la indentación  $\delta_k$  del tronco de cono sobre el carril.

Para el cálculo de la indentación de la superficie de la rueda sobre el carril se utiliza un procedimiento geométrico aproximado. Se define un radio de indentación de la rueda sobre el carril [19] (*Figura 26*) como:

(84)

$$r_{id_k} = \frac{R_k}{\cos(\gamma_k)}$$

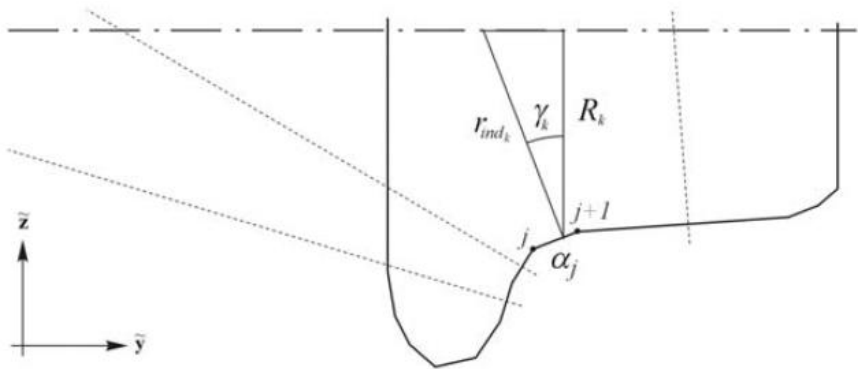


Figura 26. Cálculo del radio de indentación de la rueda.

Suponiendo que la realiza una indentación circular de radio  $r_{id}$  sobre cada strip, se puede calcular la indentación  $\delta_k$  como:

(85)

$$\delta_k r_{id_k} = \sqrt{r_{id_k}^2 - \left(\frac{l_k}{2}\right)^2}$$

Este valor está representado en la siguiente figura (Figura 27).

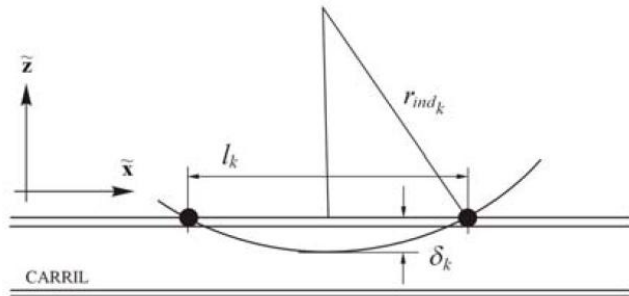


Figura 27. Cálculo de la indentación de la rueda sobre el carril para un strip.

El área de interpenetración queda definida mediante el conjunto de strips.

### Área de interpenetración

Para conseguir esta estimación se necesita extraer los parámetros característicos de esta área de interpenetración.

- Conicidad ( $\gamma_0$ ).

Esta conicidad del área de interpenetración se calcula como una media ponderada de las conicidades de cada una de las strips. El valor del ángulo de la conicidad del área de interpenetración define la transformación del sistema de referencia de la vía, al sistema de referencia asociado al contacto, mediante un giro alrededor del eje  $X$ . El valor de este giro es la conicidad  $\gamma_0$ .

- Identación ( $\delta_0$ ).

Se toma la identación máxima entre las strips que forman el área de interpenetración.

- Dimensiones.

La dimensión del área de interpenetración se obtiene definiendo las dimensiones del rectángulo circunscrito, orientado según los ejes  $x_c y_c$ ,  $L$  es el largo medido sobre el eje  $x_c$  y  $W$  es el ancho medido sobre  $y_c$ .  
*Figura (28).*

### **4.3. Problema normal de Contacto.**

Una vez hallada el área de interpenetración, se obtiene el área de contacto, la distribución de tensiones normales dentro de esta área y la fuerza total. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Estimación del área de contacto.

Esta área de contacto se obtiene a partir del área de interpenetración para una indentación con un valor  $K \cdot \delta_0$ . Tomando cada una de las áreas de interpenetración de la rueda con el carril, se aplica una elevación virtual de la rueda de valor  $\delta_0 (1 - K)$  según la dirección dada por  $\gamma_0$ . Se toma el valor de  $K$  propuesto por Kik y Piotrowski [21, 10, 22],  $K = 0.55$ .

- Corrección de forma.

Esta corrección de forma es necesaria para tener en cuenta la deformación local de las superficies en las cercanías del contacto. En el método se aplica la corrección de forma propuesta por Kik y Piotrowski [10, 22].

Según esta referencia, el área de contacto se circunscribe con un rectángulo de dimensiones  $L$  (eje  $x_c$ ) y  $W$  (eje  $y_c$ ) en el sistema de referencia asociado al contacto. Tomando el valor de la indentación máxima  $\delta_0$  y las tablas de contacto del modelo de Hertz se calculan las dimensiones corregidas  $L_c$  y  $W_c$ .

- Ajuste de la elipse equivalente.

Para la obtención de la distribución de presiones normales dentro del área de contacto, el método propuesto aproxima el área de contacto a una figura regular. Esta figura regular es una elipse, llamada elipse equivalente. Además de conseguir una resolución sólida del problema normal, esta elipse equivalente se utilizará para la resolución del problema tangencial.

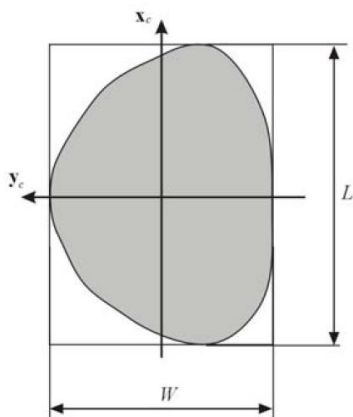


Figura 28. Área de contacto genérica de longitud \$L\$ y anchura \$W\$.

Para buscar la elipse equivalente, han de imponerse dos condiciones para hallar la elipse, según Kik y Piotrowski. Estas dimensiones vienen dadas por las ecuaciones (86), donde \$a\_e\$ y \$b\_e\$ son los semiejes de la elipse equivalente en dirección longitudinal y lateral, respectivamente.

$$a_e = \sqrt{\frac{A L}{\pi W}} \quad b_e = \sqrt{\frac{A W}{\pi L}} \quad (86)$$

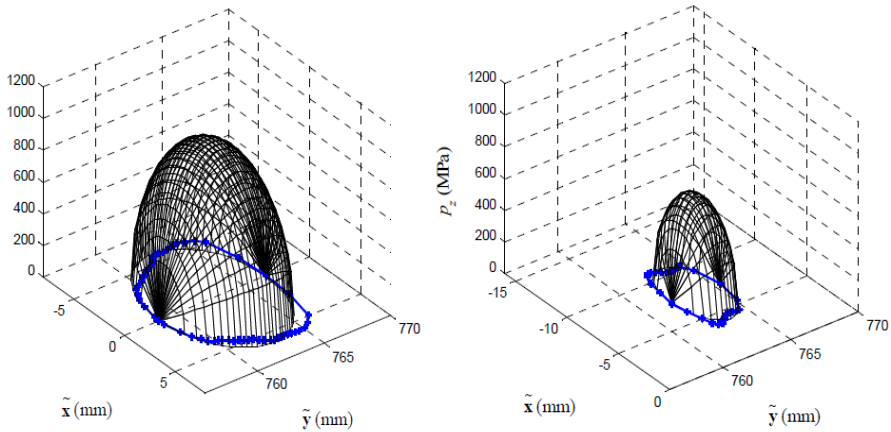
- Distribución de tensiones normales.

Una vez hemos aproximado el área equivalente a una elipse, se asume una distribución de presiones normales semielípticas, dada por el modelo de Hertz, apartado 3.3.3.

Para hallar el valor de la fuerza normal se parte de las ecuaciones ofrecidas por Hertz para el cálculo de las dimensiones de la elipse y de la indentación máxima correspondiente a una fuerza normal, ecuaciones (30) y (32) en el apartado 3.3.3.



La *Figura (28)* muestra la distribución de presiones normales dentro de la elipse equivalente junto al área de contacto corregida obtenida por interpenetración, para las áreas de contacto (a) y (b). Los valores de la fuerza normal para las dos áreas de contacto estudiadas se encuentran en la *Tabla (2)*.



*Figura 28. Distribución de tensiones normales en la elipse equivalente superpuesta al área de contacto corregida: (a) izquierda, (b) derecha.*

	Área de contacto (a)	Área de contacto (b)
$F_z$ (kN)	50,00	7,95

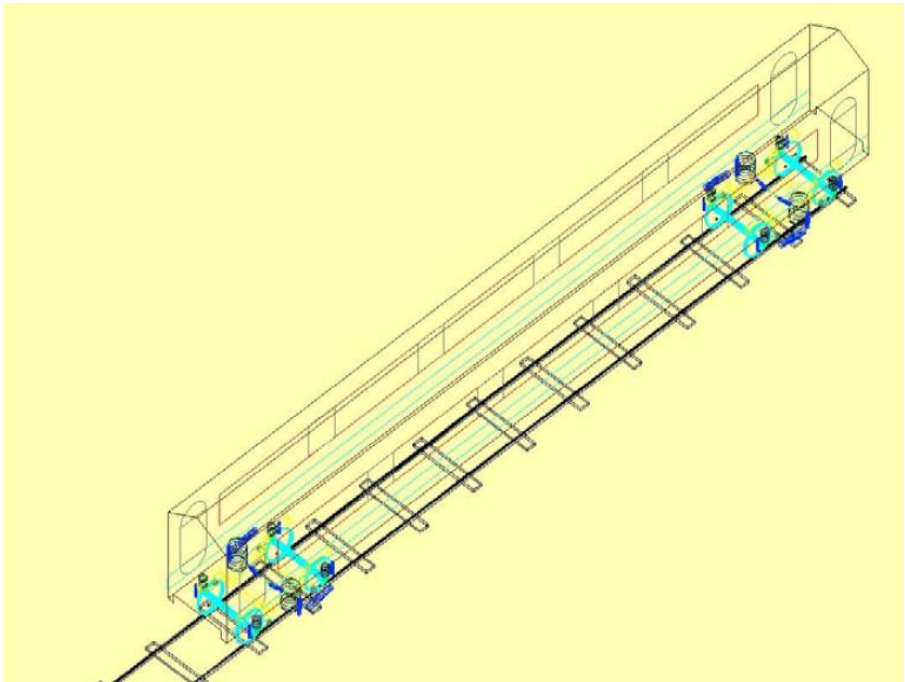
*Tabla 2. Fuerza normal ejercida por cada área de contacto.*



## 5. SIMULACIÓN DINÁMICA

El modelo dinámico está dispuesto en las siguientes subestructuras:

- Carril.
- Traviesas.
- Vehículo.



*Figura 29. Esquema del conjunto vehículo carril y traviesas. Extraído de Adams [38].*

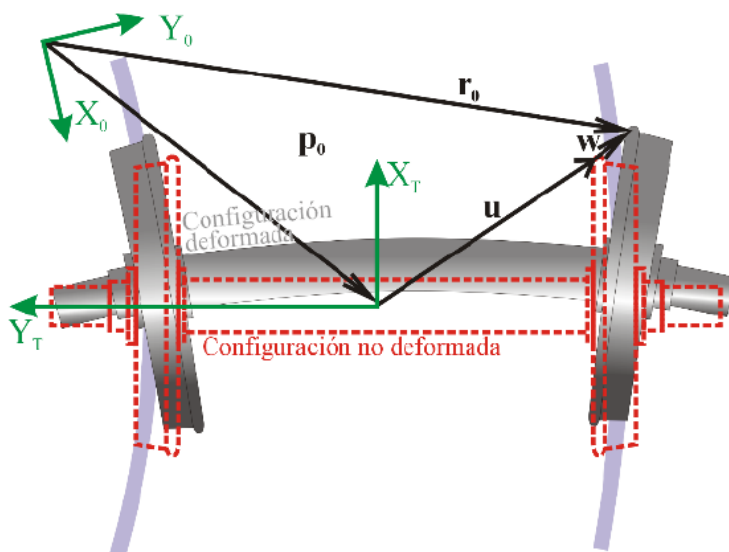


Figura 30. Sistemas de coordenadas asociados al modelo del eje [39].

Para el desarrollo de este trabajo, se utiliza un modelo general pero en el que se van a asumir en él, pequeños desplazamientos de los cuerpos sólidos respecto a una trayectoria (definiendo un sistema de coordenadas para ella) y se obtiene una formulación eficiente que reduce el coste computacional. En este apartado se presenta el modelo que se va a aplicar para analizar el efecto de un plano de rueda para diferentes condiciones, en las que se pueden combinar distintos parámetros como velocidades del vehículo, radios de curva y peraltes.

Como J. Martínez y J. Carballeira exponen en [39], el modelo del conjunto combina el modelo dinámico de la vía en curva y un modelo multicuerpo del vehículo completo. Se tienen en cuenta las no linealidades asociadas a la geometría de los perfiles de rueda y carril, la relación no lineal entre el contacto tangencial y velocidades de pseudo-deslizamiento, y la flexibilidad y los efectos inerciales y giroscópicos debidos a la rotación del eje. La

principal idea en la que se pensó cuando se desarrolló el modelo era la de presentar un sistema que fuera capaz de asumir unas condiciones realistas con un coste computacional lo más reducido posible.

El conjunto se acopla a través de las fuerzas en el contacto rueda-carril y con el railpad y las ecuaciones de movimiento se consideran independientes entre sí.

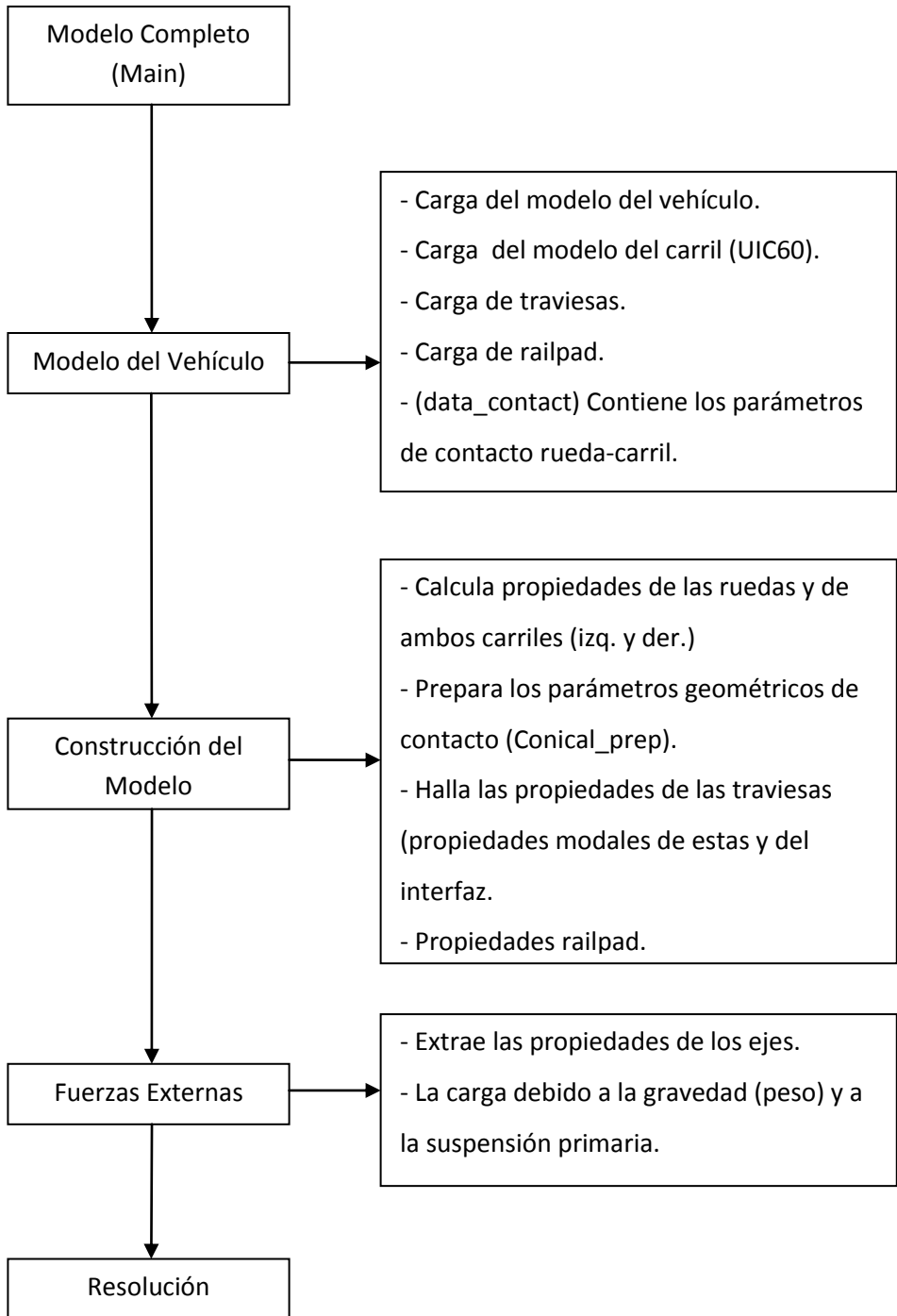
En el railpad las fuerzas son función de los desplazamientos y de la velocidad en el carril y en la traviesa, sin embargo, las fuerzas en el contacto rueda-carril las determinan los desplazamientos y la velocidad en el área de contacto.

El sistema dispone de unas coordenadas globales xyz, donde el eje 'x' es paralelo al carril en la dirección del movimiento del vehículo, el eje 'y' es transversal a la vía y el eje vertical 'z' es positivo hacia arriba. Las fuerzas deben ser definidas en este sistema global de coordenadas. Además cada subestructura posee un sistema local de coordenadas.

### **5.1. Estructura del sistema**

El modelo completo desarrollado por el grupo de ferrocarriles del departamento de Ingeniería Mecánica, consta de una estructura que engloba todas las condiciones propuestas y formuladas de una manera muy extensa. En la *página 64* se presenta un diagrama de flujo para esquematizar este programa con las funciones que cumple cada bloque de rutinas que contiene.

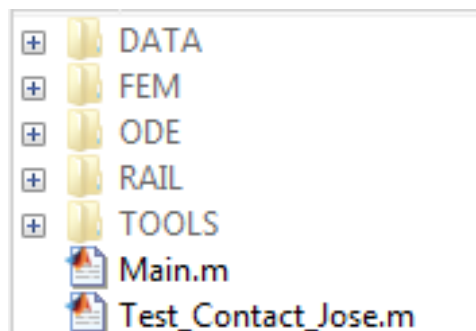
El programa queda organizado de la siguiente manera:



En este Trabajo se trabaja sobre un programa de prueba (Test Contact de la *Figura 31*). que contiene el problema de contacto y es sobre el que se modifica las rutinas luego explicadas.

Se estudia minuciosamente el código y la estructura de las subrutinas del programa de prueba de contacto ya que, en lo que al programa completo se refiere no parece que haya errores y concluimos su buen funcionamiento, una vez aceptado que el fallo está en el problema geométrico.

La parte del programa que se ha mencionado anteriormente, es la que se ha estudiado con profundidad, de hecho ha sido lo más costoso de todo. Las rutinas de la estructura detallada se va a representar en un diagrama con su estructura y seguidamente se detallara brevemente cada subrutina. A este sistema se le da el nombre de Test de Contacto.



*Figura 31. Estructura del programa de prueba Test de Contacto.*

La carpeta 'DATA' de la *Figura 31* contiene las funciones que construyen el sistema. Comprende las subestructuras y las interfaces entre las estructuras.

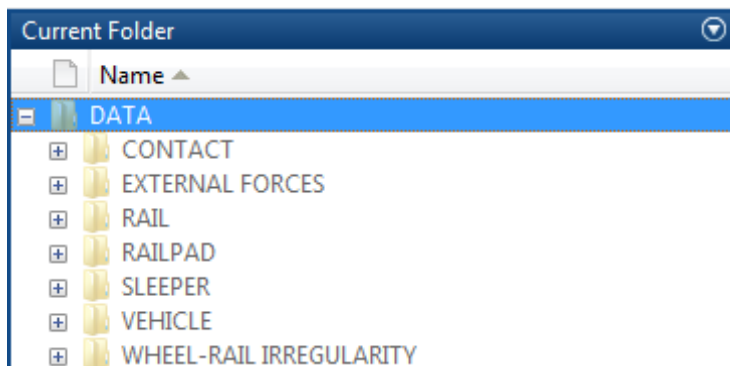


Figura 32. Contenido de la carpeta data del programa de prueba Test de Contacto.

La información que contiene cada carpeta es la siguiente:

### Vehicle

Las ecuaciones de movimiento deben ser escritas en matrices.

Estas ecuaciones deben contener las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, además de considerar las Fuerzas externas, estas últimas se estructuran en forma de vector. Una expresión práctica de esto sería:

(87)

$$\ddot{w} = M^{-1} F_{\text{ext}} - M^{-1} D\dot{w} - M^{-1} Kw$$

En las ecuaciones de movimiento debe constar un vector que contenga los desplazamientos del vehículo. El output de esta función son las variables VEH y IWR. La variable VEH contiene los parámetros del vehículo y IWR es una matriz que contiene los parámetros de las interfaces rueda/carril, estas propiedades dependen del modelo de vehículo empleado en el cálculo de la simulación. La variable IWR se define para cada contacto rueda-carril.

En la variable IWR se define una matriz que relaciona las coordenadas del modelo que define el vehículo con los desplazamientos en la zona de



contacto. El número de columnas de esta matriz será el número de grados de libertad del vehículo.

Las fuerzas se calculan a través de la misma matriz, multiplicando por esta las fuerzas de contacto en coordenadas globales.

### **Sleepers**

Las ecuaciones de movimiento de las traviesas son las correspondientes al enfoque modal, además cualquier modelo de traviesa puede ser implementado.

(88)

$$\ddot{q}_m = Q_m - \omega_m^2 q_m - 2\omega_m \xi_m \dot{q}_m$$

donde  $q_m$  es la coordenada modal,  $Q_m$  es la fuerza modal,  $\omega_m$  es la frecuencia modal no amortiguada y  $\xi_m$  es el amortiguamiento modal.

Los modelos a partir de los que se pueden obtener las propiedades modales, como las frecuencias naturales y las masas normalizadas son diferentes, como pueden ser 'solid FE modal', 'beam FE modal', etc...

Estas propiedades modales se obtienen al comienzo de la simulación. El input de la función depende del modelo empleado en la simulación. El output de la función ofrece dos resultados, las propiedades de las traviesas, representadas en la matriz SLP y las propiedades de la interfaz del railpad, estructuradas en la matriz IRP.

El número de traviesas se da en la entrada Nsl. La función recorre cada traviesa, calculando para cada ella el numero de modos de cada una de ellas. El número de modos de cada traviesa se decide después de un análisis y de su coste computacional.

En esta función se define una variable llamada que almacena las propiedades de cada interfaz del railpad.

La subestructura también dispone de un archivo llamado 'IRP.KS' que es la matriz que relaciona las coordenadas modales. El número de columnas de esta matriz es igual al número de modos en el modelo de la traviesa y el número de filas es 6 (3 desplazamientos y 3 rotaciones).

### Rail

El carril se comporta como una viga y los momentos de torsión, flexión vertical y flexión horizontal se desacoplan. Las vibraciones axiales no se consideran en este apartado, además de todo esto el carril se modela mediante un enfoque modal. Las propiedades modales del modelo se pueden calcular fácilmente ya que, son funciones de seno y coseno.

(89)

$$W_m(x) = A_m \sin \frac{x \lambda_m}{L} + B_m \cos \frac{x \lambda_m}{L}$$

$$\psi_m(x) = C_m \sin \frac{x \lambda_m}{L} + D_m \cos \frac{x \lambda_m}{L}$$

Las condiciones de contorno deben ser las mismas en ambos extremos del carril.

En la ecuación de movimiento del carril asociada con el modo 'm' del mismo se debe tener en cuenta la fuerza, frecuencia no amortiguada, amortiguamiento y coordenadas modales.

(90)

$$\ddot{q}_m = Q_m - \omega_m^2 q_m - 2\omega_m \xi_m \dot{q}_m$$

En esta rutina se recorre cada modo del carril y se almacenan las propiedades dinámicas de estos, tanto laterales, como verticales y son almacenadas en las matrices RaL (laterales) y RaV (verticales).

La variable  $IRP(i)$ , contiene las propiedades de cada interfaz y la información relativa a los carriles. El valor de  $(i)$  oscila entre 1 y el número de railpad que se esté calculando.

También existe en la rutina la variable IWR. Esta variable es una matriz que contiene las propiedades de cada rueda y la información con relación a los carriles y se definen para cada contacto de rueda.

La posición del punto de contacto depende del tiempo. Por lo tanto, los desplazamientos y las velocidades del punto de contacto deben ser calculados a partir de las funciones modales y durante la simulación. Las formas y las coordenadas modales proporcionan el desplazamiento en el eje ferroviario.

Los desplazamientos son referenciados en coordenadas globales. Sin embargo, las teorías de contacto se formulan en un marco que define el plano  $xy$  como tangencial a la superficie de contacto. Debido a la conicidad, el marco global y el de contacto difieren el ángulo de conicidad, por lo tanto, se debe rotar este eje de coordenadas. La relación entre desplazamiento y rotación es la matriz de rotación.

Por último, la variable  $IWR.x$  indica la posición longitudinal del área de contacto en el carril en el instante de tiempo inicial.

### **Wheel-Rail Irregularity**

Se asocia con las irregularidades de la trayectoria de la banda de rodadura con el carril.

## **Railpad**

Sus propiedades están incluidas en la variable IRP. Las fuerzas dadas aquí dependen de los desplazamientos y las velocidades del carril y la traviesa en la posición del railpad.

En la función F de esta rutina se calcula la fuerza en el railpad y se almacena en la variable IRP.force.

## **Contact**

Las propiedades del interfaz rueda-carril se almacena en la variable IWR(i). Esta variable se define para cada contacto de rueda/carril. El valor de 'i' será tanto como contactos rueda/carril haya.

Las irregularidades mencionadas antes se representan aquí con la variable IWR.IRR, de esta manera se asocian las dos rutinas.

La variable CONT se relaciona con la teoría de contacto. Esta contiene toda la información requerida por el modelo de contacto rueda-carril. La variable CONT debe contener el nombre de la función que resuelve el problema de contacto.

## **External Forces**

Las fuerzas externas que actúan son definidas por el usuario.

### **5.2. Rutinas a destacar.**

Para realizar la simulación del problema geométrico se enumeran unas rutinas verdaderamente importantes, las cuales se van a definir brevemente a continuación.

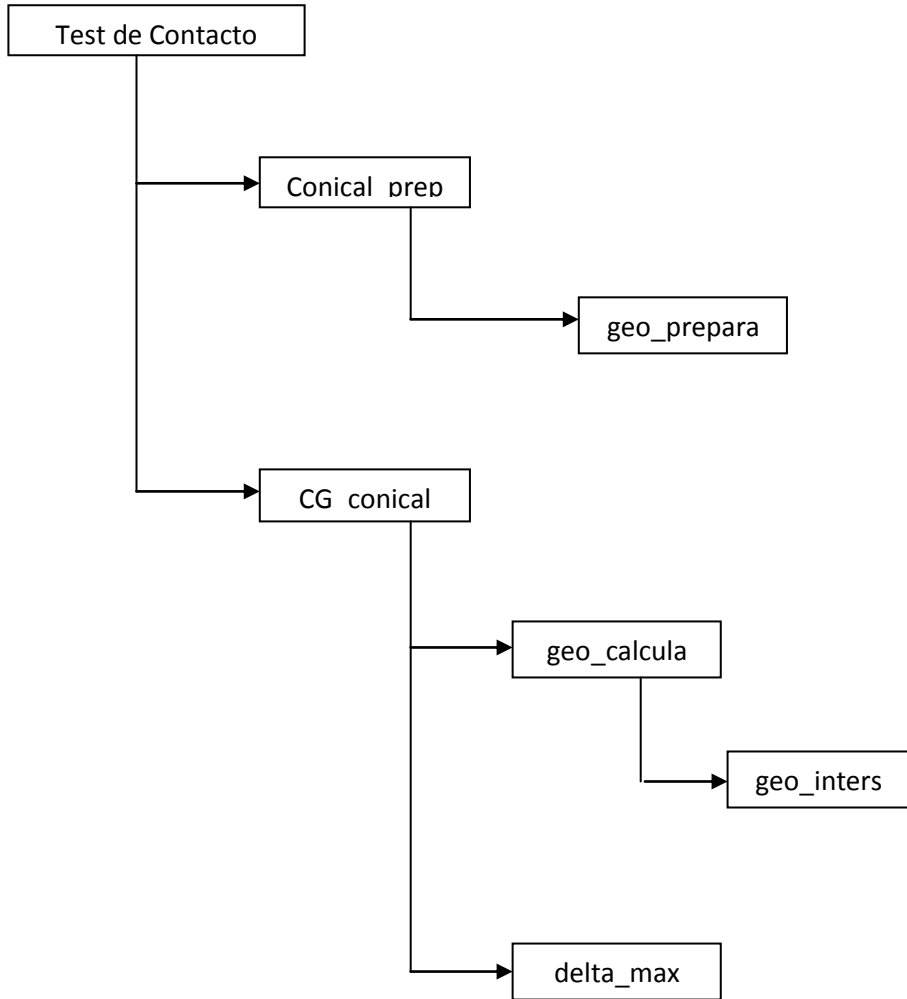


Figura 33. Estructura Test de Contacto.

El diagrama de flujo que se ilustra en la *Figura 33* define la estructura del programa de pruebas para comprobar que la geometría y el contacto son correctos. La misión de este sistema es aproximar los dos perfiles, el de la rueda y el carril y de esta manera, hacer que lleguen a contactar para poder hallar y comprobar el área de contacto. Por lo tanto, es un sistema encargado tan sólo del problema geométrico de contacto.

Este es el programa sobre el que se han realizado las modificaciones y se ha tratado de corregir para la correcta simulación dinámica del problema geométrico de contacto en vehículos ferroviarios.

La subrutinas presentadas en el diagrama de flujo de la *Figura 33* se van a detallar a continuación determinando el funcionamiento y la misión de cada una de ellas.

### ***Conical\_prep***

El output de esta rutina, es decir, el resultado que se quiere obtener de las funciones definidas en ellas, serán las propiedades geométricas en cada interfaz del contacto rueda-carril.

Esta rutina prepara los parámetros geométricos del perfil de la rueda del modelo y va ajustando la posición de los perfiles, bajando el tronco de cono hasta que este próximo al perfil del carril.

También corrige el ángulo respecto de 'x', para orientarlo y colocarlo horizontal respecto a la vía.

### ***geo\_prepara***

Debe ser ejecutado al comienzo de la simulación y su función es la de prepara los puntos de la rueda y el carril y seleccionar el conjunto de

troncos de cono, es decir, de la rueda que puedan estar en contacto con la línea que forma el perfil del carril.

Esta rutina realiza los siguientes procesos:

- Mueve los perfiles de los carriles a las posiciones en que deben estar.
- A continuación se mueven los perfiles de rueda. Se van acercando estos perfiles y orientándolos hasta tenerlo junto al perfil del carril.
- Busca los posibles puntos de contacto de la rueda con cada punto del carril.
- De estos puntos de contacto potenciales guarda el más cercano de ellos, es decir el de menor distancia.

### ***CG\_conical***

El output de esta función son varios datos como el numero de áreas de contacto y su propiedades geométricas, la penetración máxima de la rueda en el carril (delta), o el punto de contacto del carril y el nodo de la rueda con el cual contacta.

La finalidad de esta rutina es calcular los parámetros de contacto de la rueda mediante los conos de la rueda y la línea recta en la geometría del modelo.

Estos parámetros de contacto los calcula entre rueda y carril con los perfiles en dos dimensiones (y-z).

### ***geo\_calcula***

Calcula el área de interpenetración entre la rueda y el carril.

Recorre los puntos que son posibles en contactar, y comprueba que cono de rueda atraviesa una determinada línea que definirá el perfil del carril.

También determinará si la misma línea atraviesa el mismo tronco de cono a la entrada y la salida o esta entrada y salida se dan en troncos de cono distintos.

### ***geo\_inters***

Calcula la intersección entre los segmentos que representan el perfil del carril y los troncos de cono que representan los perfiles de rueda.

### **5.3. Rutinas modificadas del programa original**

Seguidamente se van a detallar las dos rutinas que se modificaron del programa original para poder llegar a obtener la mejoría en el programa que se recibió. Estas dos rutinas calculan distancias entre puntos de la rueda y el carril, pero a nuestro juicio no tenían en cuenta detalles y problemas que podrían perjudicar la resolución final del problema.

En ambas rutinas pensamos que la forma de hallar esas distancias no era la correcta ya que no tenían las restricciones necesarias para hallar la distancia determinada que se requiere para un cálculo de esta importancia. Ejemplo de ello es que una de las rutinas se medían las distancias mínimas entre ambos cuerpos, pero no existía restricción ninguna de que debían ser distancias en vertical, con lo cual el programa podía calcular o medir distancias en horizontal cuando este dato no se debe utilizar en el caso de hallar una interpenetración o una distancia mínima a la hora de aproximar ambos cuerpos, por ejemplo.

A continuación se va entrar en materia con ambas rutinas que son de vital importancia para el desarrollo y el entendimiento de este trabajo.



### ***Rutina dis\_min***

Esta rutina está dentro de la rutina Conical\_prep y se encarga de calcular la distancia mínima vertical entre rueda y carril.

El código de la rutina original es la siguiente:

```
function [h,d]=dis_min(y,z,phi,psi,IWR)
```

-----  
Input

- y = Lateral displacement of the wheelset
- z = Vertical displacement of the wheel set
- psi = Rotation about z-axis ( Yaw angle )
- phi = Rotation about x-axis ( Roll angle )
- GEO = Structure containing geometry parameters of the conical profile
- GEO.prof: Structure containing the wheel and rail profile data
- prof(1/2).RA = Left/Right rail profile data
- prof(1/2).WH = Left/Right rail profile data
- GEO.Rcur: Curvature of the rail profile [(:,1)left rail(:,2)right rail]
- GEO.Rsh: Logicale index vector for the shape type of the rail (if 0=concave if 1=convex)
- GEO.Wsh: Logicale index vector for the shape type of the wheel (if 0=concave if 1=convex)
- GEO.rad: Wheel tread raduis

Output

- h = Vector containing the minimum distance wheel and rail profiles
- h(1/2): Minimum vertical distance between left/right wheel-rail profiles

-  $d(1/2)$ : Minimum horizontal distance left/right between wheel-rail profiles

```

-----
a1=length(IWR(1).CONT.GEO.prof.RA);
a2=length(IWR(1).CONT.GEO.prof.WH);
d1=zeros(a1,a2);d_min1=zeros(a1,1);
h=zeros(2,1);d=zeros(2,1);

Tphi=[[1;0;0],[0;cos(phi);sin(phi)],[0;
sin(phi);cos(phi)]]; x rotation
Tpsi=[[cos(psi);sin(psi);0],[-
sin(psi);cos(psi);0],[0;0;1]]; z rotation
T=Tpsi*Tphi;

for k=1:2 Recorre los 2 carriles.
[aux,j]=min(abs(IWR(k).CONT.GEO.Ys-y));
Se queda con la posición (j) del desplazamiento en Ys
impuesto al principio más parecido que hay tengo (y).

[NA,CON]=geo_calcula(y,z,T,IWR(k).CONT.GEO.prof.RA,IWR(k)
).CONT.GEO.prof.WH,...

IWR(k).CONT.GEO.prof.iPCP,j,IWR(k).CONT.GEO.Wcur);
    if NA>0

[Delta(k),uc_track_ref(:,k),uc_wheel_ref(:,k),n(:,k),t(:,
k),L(:,k),CUR,cpr,indi_cnw]=delta_max(NA,T,CON,IWR(k).C
ONT.GEO.Rcur,zeros(1,3),0,0,y,z);

    h(k)=-Delta(k);

```

MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO  
 RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

```

d(k)=uc_track_ref(2,k);
else

a=IWR(k).CONT.GEO.prof.RA;
b=IWR(k).CONT.GEO.prof.WH;
    for nnn=1:length(b)
        wh1(:,nnn)=T*[0;b(nnn,1);b(nnn,2)]+[0;y;z];
        se gira y se suma el desplazamiento del eje.
    end
    W=[wh1(2,:) ', wh1(3,:) '];
    perfil girado y desplazado.
    for i=1:length(a)
        for j=1:length(W)
            d1(i,j)=sqrt((a(i,1)-W(j,1))^2+(a(i,2)-
W(j,2))^2); distancia, pero no tiene por que ser
vertical.
        end
        d_min1(i)=min((d1(i,:)));
    end
    h(k)=min(d_min1);

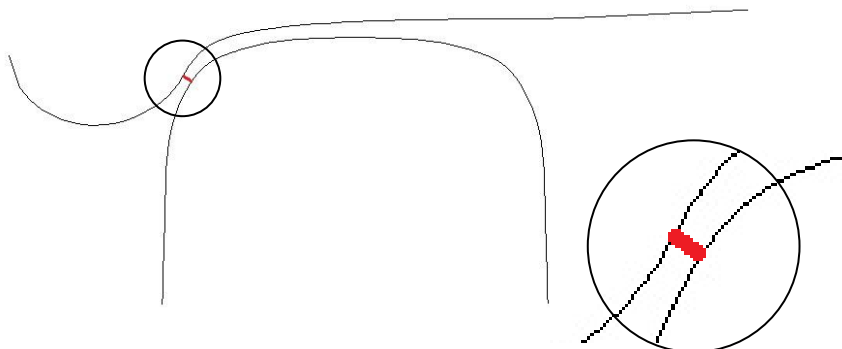
Extrae la distancia más pequeña, pero no tiene porqué
ser vertical. Si está cerca de pestaña, puede ser muy
problemático ya que será casi horizontal esta
distancia.

    Raw=find(d_min1(:)==min(d_min1(:)));
    v=Raw;
    d(k)=a(v,1); posición "y" del punto más
cercano del carril.

end
end

```

De este código podemos deducir que calcula 'h' como la distancia mínima entre cualquiera de los puntos de la rueda y los del carril, esto no quiere decir que sea vertical, por ejemplo puede tomar como 'h' la distancia marcada en rojo, con lo cual no es ni siquiera una aproximación a lo que en esta rutina se pretende hallar.



*Figura 34. Posible cálculo del método original para hallar 'h'.*

Al repasar esta rutina llegamos a la conclusión que esto era una consideración que se alejaba mucho de la simulación óptima del problema, así que intentamos plantear un código que tratara de restringir esas distancias a las meramente verticales en medida de lo posible.

A continuación en las dos siguientes páginas se detalla la nueva rutina pensada para evitar el problema que se considera puede tener el problema original.

Se pueden observar las modificaciones comparando esta nueva rutina con la original mostrada anteriormente.

Esta parte del código se implementa tanto en la condición de CONTACTO como en la de NO CONTACTO.

De esta manera para un mismo punto del carril consideraría como distancia mínima la línea trazada en color azul en la *Figura 35*.

```
function [h,d]=dis_min(y,z,phi,psi,IWR)
```

---

Input

- y = Lateral displacement of the wheelset
- z = Vertical displacement of the wheel set
- psi = Rotation about z-axis ( Yaw angle )
- phi = Rotation about x-axis ( Roll angle )
- GEO = Structure containing geometry parameters of the conical profile
- GEO.prof: Structure containing the wheel and rail profile data
- prof(1/2).RA = Left/Right rail profile data
- prof(1/2).WH = Left/Right rail profile data
- GEO.Rcur: Curvature of the rail profile [(:,1)left rail(:,2)right rail]
- GEO.Rsh: Logicale index vector for the shape type of the rail(if 0=concave if 1=convex)
- GEO.Wsh: Logicale index vector for the shape type of the wheel(if 0=concave if 1=convex)
- GEO.rad: Wheel tread raduis

Output

- h =Vector containing the minimum distance wheel and rail profiles
- h(1/2): Minimum vertical distance between left/right wheel-rail profiles
- d(1/2): Minimum horizontal distance left/right between wheel-rail profiles

---

```
a1=length(IWR(1).CONT.GEO.prof.RA);
```

```

a2=length(IWR(1).CONT.GEO.prof.WH);
d1=zeros(a1,a2);d_min1=zeros(a1,1);
h=zeros(2,1);d=zeros(2,1);

Tphi=[[1;0;0],[0;cos(phi);sin(phi)],[0;sin(phi);cos(phi)
]]; x rotation
Tpsi=[[cos(psi);sin(psi);0],[sin(psi);cos(psi);0],[0;0;1
]]; z rotation
T=Tpsi*Tphi;

for k=1:2 Recorre los 2 carriles.

a=IWR(k).CONT.GEO.prof.RA;
b=IWR(k).CONT.GEO.prof.WH;
for nnn=1:length(b)
    wh1(:,nnn)=T*[0;b(nnn,1);b(nnn,2)]+[0;y;z];
    se gira y se suma el desplazamiento del eje.
end
W=[wh1(2,:) ',wh1(3,:)'];
perfil girado y desplazado.

[aux,j]=min(abs(IWR(k).CONT.GEO.Ys-y)); Se queda con la
posición (j) del desplazamiento en Ys impuesto al
principio más parecido que hay tengo (y).
[NA,CON]=geo_calcula(y,z,T,IWR(k).CONT.GEO.prof.RA,IWR(k)
).CONT.GEO.prof.WH,IWR(k).CONT.GEO.prof.iPCP,j,IWR(k).CO
NT.GEO.Wcur);
----- Si existe área de contacto.
if NA>0

```

MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO  
 RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

```
[Delta(k),uc_track_ref(:,k),uc_wheel_ref(:,k),n(:,k),t(:,k),L(:,k),CUR,cpr,indi_cnw]=delta_max(NA,T,CON,IWR(k).C
ONT.GEO.Rcur,zeros(1,3),0,0,y,z);

    for i=1:length(a)
        yw(i)=interp1(W(:,1),W(:,2),a(i,1),'linear');
        Interpolación para un punto del carril 'x'
        encontrar el punto de la rueda en su
        vertical.

        hw(i)=yw(i)-a(i,2);
        Restar ese punto de la rueda menos el punto
        del carril, para hallar la distancia entre
        ambos.
    end
    [h(k),indh]=min(hw);
    Y de esas distancias que guarde en 'h' el
    mínimo de todas.

    d(k)=uc_track_ref(2,k);

else
----- Si no existe área de contacto

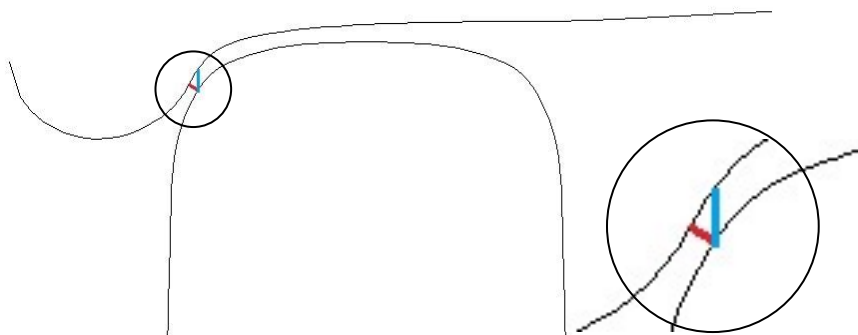
for i=1:length(a)

        yw(i)=interp1(W(:,1),W(:,2),a(i,1),'linear');
        hw(i)=yw(i)-a(i,2);

        for j=1:length(b)
            d1(i,j)=sqrt((a(i,1)-W(j,1))^2+(a(i,2)-
                W(j,2))^2);
        end
        d_min1(i)=min(d1(i,:));
    end
    [h(k),indh]=min(hw);
    Raw=find(d_min1(:)==min(d_min1(:)));
    v=Raw;
    d(k)=a(v,1);

end

end
```



*Figura 35. Posible cálculo del método modificado para hallar 'h'.*

### ***Rutina delta\_máx***

La función que tiene esta rutina es la de calcular los parámetros de contacto en el punto de máxima penetración para cada área de contacto.

Esta rutina crea un vector donde almacena la distancias máximas entre un determinado punto del carril con su correspondiente en la rueda. Luego saca cual es el valor mayor y el índice que tiene este valor. Y con este hace el cálculo de delta. Esto limita la aproximación real de delta, entonces pensamos que la función de cálculo de delta debía de considerar todos los posibles puntos, no solo los correspondientes a cada uno, de esta manera nos acercaríamos mas al resultado óptimo de la simulación.

En la *Figura 36* se ilustra un esquema de lo busca la rutina en el programa original, donde se puede observar claramente que la distancia medida por el programa original es entre un punto determinado del carril con el correspondiente de su rueda, el punto 1 del carril con el punto 1 de la rueda, el 2 con el 2, el 3 con el 3, etc...

Planteamiento del código original:



MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO  
RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

```
function[delta,uc_track_ref,uc_wheel_ref,n,t,L,CUR,cpr,indi_cnw]= delta_max (NA,T,CON,kr,XYZ_nod,ang_x,ang_z,y,z)
```

---

Input

- NA = number of contact área
- T = Rotation matrix of the wheelset sequence
- r\_alfa= Longitudinal radius of the wheel profile
- Pos\_r = Position of the points of intersection on the rail profile of each area of contact
- Pos\_w = Position of the points of intersection on the wheel profile of each area of contact
- kw = Curvature value of each point on the wheel profile
- kr = Curvature value of each point on the rail profile
- gama = Conicity values at each point of contact
- shapeR = Logical vector presenting the rail concavity shape at each point ( 1 if it is convex 0 if it is concave)
- shapeW = Logical vector presenting the wheel concavity shape at each point ( 1 if it is convex 0 if it is concave)
- XYZ\_nod = Final coordinates of the nodes of wheel profile

Output

- delta = Maximum penetration between wheel and rail profiles
- uc = Position vector of the point of maximum penetration
- n = Unit normal contact vector at the area of contact
- t = Unit tangential vector at the area of contact
- L = Unit longitudinal vector at the area of contact
- CUR = Curvature parameters at the point of contact
- CUR.RL : Curvature of the wheel profile (+ if ^) (in  $m^{-1}$ )
- CUR.RC: Curvature of the rail profile (+ if ^) (in  $m^{-1}$ )
- CUR.RR : Curvature of the wheel tread (positive) (in  $m^{-1}$ )
- cpr = contact point in the rail
- indi\_cnw = index of the contact node in the wheel

---

```

PUNT=CON.P;
r_alfa=CON.ra;
R_alfa=CON.Ra;
gama=CON.gam;
Pos_r=CON.pr;
Pos_w=CON.pw;
kw=CON.wcur;

num=(size(PUNT));
6 x número de puntos de penetración rueda-carril
dist=zeros(1,num(2));

for i=1:num(2)
    dist(i)=abs(PUNT(1,i)-PUNT(4,i));
    Distancia en x
end

d_max=max(dist(:));
máxima distancia en x. Es el punto de mayor penetración
col =find(dist(:)==max(dist(:)));
Ese es el punto de contacto, el que ha penetrado más
delta=r_alfa(col)-sqrt(r_alfa(col)^2-(d_max/2)^2);
Penetración máxima

Contact geometry curvatures
CUR.RL = kw(col);

CUR.RL = kw(Pos_w(col));
CUR.RC = kr(Pos_r(col));
CUR.RR = 1/r_alfa(col);
CUR.gamma=gama(col);
CUR.Ra=R_alfa(col);

Contact point in rail
cpr=Pos_r(col);

Contact node in wheel
uc_track_ref=(PUNT(1:3,col)+PUNT(4:6,col))/2;
uc_wheel_ref=T'*((PUNT(1:3,col)+PUNT(4:6,col))/2-
[0;y;z]);
Punto de contacto, se calcula como valor medio entre los
de penetración. Deshace los giros en "x" y "z", para
llevar el punto de contacto a la situación de reposo

```

MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO  
RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

```
XYZ_depl=[XYZ_nod(:,1)-uc_wheel_ref(1),XYZ_nod(:,2)-  
uc_wheel_ref(2),XYZ_nod(:,3)-uc_wheel_ref(3)];  
modul=sqrt(XYZ_depl(:,1).^2+XYZ_depl(:,2).^2+XYZ_depl(:,  
3).^2); % evalúa la distancia entre punto teórico de  
contacto y nodos del perfil de rueda  
[mini,indi_cnw]=min(modul);  
Se queda con el nodo más cercano, y ese será el nodo de  
contacto (índice es indi_cnw)
```

```
phix=gama(col)+ang_x;  
Giro total en x para ejes locales de contacto  
Tx=[[1;0;0],[0;cos(phix);sin(phix)],[0;-  
sin(phix);cos(phix)]];  
phiz=ang_z;  
Giro total en z para ejes locales de contacto  
Tz=[[cos(phiz);sin(phiz);0],[-  
sin(phiz);cos(phiz);0],[0;0;1]];  
Tcon=Tz*Tx;  
Matriz de rotación. Son pequeños desplazamientos, da =  
el orden  
  
L=Tcon(:,1);  
t=Tcon(:,2);  
n=Tcon(:,3);
```

Como se ha comentado antes, esta rutina original sólo considera estas distancias que nosotros pensamos que podría influir de manera considerable en el resultado final, ya que no se ajusta demasiado a la delta real.

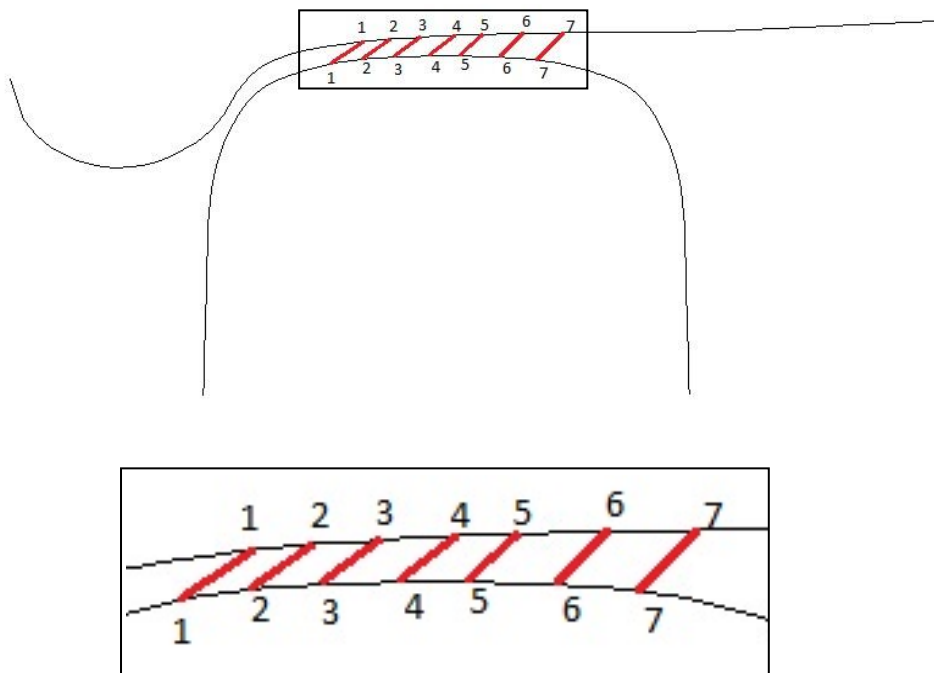


Figura 36. Método de búsqueda de la delta máxima en el programa original.

Llegados a este punto, se planteó una alternativa a este código para que tuviera la libertad de calcular la distancia entre cualquiera de los puntos, que considerábamos necesaria para el correcto funcionamiento del programa.

De esta manera se tienen en cuenta todas las deltas, no solo las de un punto determinado. Para ilustrar y ver con más claridad lo que se está planteando, se sobreimpresionará sobre la *Figura 36*, el movimiento de búsqueda de delta en esta rutina modificada .

En las páginas posteriores se detalla la rutina una vez modificada, donde comparándola con la original descrita anteriormente y prestando atención a los comentarios en verde ya que, se señala donde y que se ha modificado, se puede comprender los cambios realizados en la rutina.

MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO  
RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

```
function[delta,uc_track_ref,uc_wheel_ref,n,t,L,CUR,cpr,indi_cnw]= delta_max(NA,T,CON,kr,XYZ_nod,ang_x,ang_z,y,z)
```

-----  
-----

Input

- NA = number of contact área
- T = Rotation matrix of the wheelset sequence
- r\_alfa = Longitudinal radius of the wheel profile
- Pos\_r = Position of the points of intersection on the rail profile of each area of contact
- Pos\_w = Position of the points of intersection on the wheel profile of each area of contact
- kw = Curvature value of each point on the wheel profile
- kr = Curvature value of each point on the rail profile
- gama = Conicity values at each point of contact
- shapeR = Logical vector presenting the rail concavity shape at each point ( 1 if it is convex 0 if it is concave)
- shapeW = Logical vector presenting the wheel concavity shape at each point ( 1 if it is convex 0 if it is concave)
- XYZ\_nod = Final coordinates of the nodes of wheel profile

Output

- delta = Maximum penetration between wheel and rail profiles
- uc = Position vector of the point of maximum penetration
- n = Unite normal contact vector at the area of contact
- t = Unite tangential vector at the area of contact
- L = Unite longitudinal vector at the area of contact
- CUR = Curvature parameters at the point of contact
- CUR.RL : Curvature of the wheel profile (+ if ^) (in  $m^{-1}$ )
- CUR.RC: Curvature of the rail profile (+ if ^) (in  $m^{-1}$ )
- CUR.RR : Curvature of the wheel tread (positive) (in  $m^{-1}$ )
- cpr = contact point in the rail
- indi\_cnw = index of the contact node in the wheel

-----

```

PUNT=CON.P;
r_alfa=CON.ra;
R_alfa=CON.Ra;
gama=CON.gam;
Pos_r=CON.pr;
Pos_w=CON.pw;
kw=CON.wcur;

num=(size(PUNT));
6 x número de puntos de penetración rueda-carril
penetra=zeros(1,num(2));

for i=1:num(2)
    dist_x=abs(PUNT(1,i)-PUNT(4,i));
    Distancia en x

    penetra(i)=(r_alfa(i)-sqrt(r_alfa(i)^2-
(dist_x/2)^2));
Calcula la distancia de delta entre cualquiera de los
puntos de la rueda correspondiente a cada punto del
carril.

end

[penetra_max,col]=max(penetra);
De las distancias calculadas se guarda la mayor y
también se guarda el índice del punto que tiene este
valor.

delta=penetra_max;
Y este valor si que se guarda como delta definitivamente

Contact geometry curvatures
CUR.RL = kw(col);

CUR.RL = kw(Pos_w(col));
CUR.RC = kr(Pos_r(col));
CUR.RR = 1/r_alfa(col);
CUR.gamma=gama(col);
CUR.Ra=R_alfa(col);

Contact point in rail
cpr=Pos_r(col);

```

MÉTODO AVANZADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO DE CONTACTO  
RUEDA-CARRIL PARA LA SIMULACIÓN DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

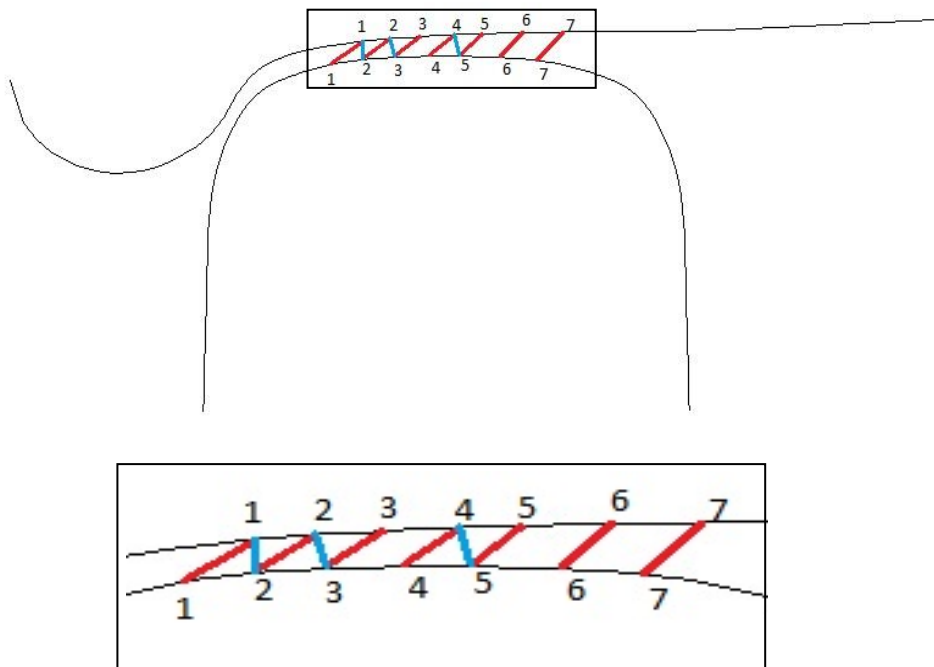
Contact node in wheel

```
uc_track_ref=(PUNT(1:3,col)+PUNT(4:6,col))/2;
uc_wheel_ref=T'*((PUNT(1:3,col)+PUNT(4:6,col))/2-
[0;y;z]);
Punto de contacto, se calcula como valor medio entre los
de penetración. Deshace los giros en "x" y "z", para
llevar el punto de contacto a la situación de reposo
XYZ_depl=[XYZ_nod(:,1)-uc_wheel_ref(1),XYZ_nod(:,2)-
uc_wheel_ref(2),XYZ_nod(:,3)-uc_wheel_ref(3)];
modul=sqrt(XYZ_depl(:,1).^2+XYZ_depl(:,2).^2+XYZ_depl(:,
3).^2); % evalúa la distancia entre punto teórico de
contacto y nodos del perfil de rueda
[mini,indi_cnw]=min(modul);
Se queda con el nodo más cercano, y ese será el nodo de
contacto (índice es indi_cnw)
```

```
phix=gama(col)+ang_x;
Giro total en x para ejes locales de contacto
Tx=[[1;0;0],[0;cos(phix);sin(phix)],[0;-
sin(phix);cos(phix)]];
phiz=ang_z;
Giro total en z para ejes locales de contacto
Tz=[[cos(phiz);sin(phiz);0],[-
sin(phiz);cos(phiz);0],[0;0;1]];
Tcon=Tz*Tx;
Matriz de rotación. Son pequeños desplazamientos, da =
el orden
```

```
L=Tcon(:,1);
t=Tcon(:,2);
n=Tcon(:,3);
```

En la *Figura 37*, se representa con líneas de color azul ejemplos sobre las nuevas posibilidades que ofrece la nueva rutina modificada, permitiendo al programa encontrar una opción más apropiada para el valor de  $\Delta_{\text{máx}}$ , que haga que tanto esta como la resolución final se aproxime más a la realidad.



*Figura 37. Variación del método de búsqueda de la delta máxima en la modificación ejercida en el programa original.*



## 6. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Para organizar la presentación de resultados, primero se va proceder a la comparación de los resultados en tres parte distintas, con otros autores, con el programa original incluyendo una gráfica enfrentando el resultado del programa original con un software comercial que proporcione unos resultados que puedan servir de referencia.

### Comparación con artículo Shackleton e Iwnicki

En este apartado se va a proceder a comparar resultados entre el método propuesto y los resultados obtenidos por los autores Shackleton e Iwnicki [36]. De este artículo vamos a comparar las formas de las huellas de contacto.

Del artículo se escogerán los resultados obtenidos del software Vampire ya que, este es un programa consolidado en el campo de vehículos ferroviarios y sus resultados son ampliamente fiables, por estas razones además de por compatibilidad con el método presentado son las que han llevado a su elección.

Para hallar estas áreas de contacto en las condiciones aportadas por los autores en su artículo, hubo que hacer varias modificaciones en el código de Matlab.

Para este apartado se ha utilizado un código apoyado en una función de Matlab conocida como for que servirá para ir bajando el perfil de la rueda poco a poco hasta que este lo más próximo posible al perfil del carril.

La función for implementada recorre las dos ruedas, primero la izquierda y luego la derecha, midiendo la distancia entre cada punto del carril con el correspondiente de la rueda, de esta manera se logra obtener cada 'zm', es decir, la distancia vertical entre cada punto de rueda y carril.

Sobre este código se extrajeron las formas de las áreas de contacto, según las condiciones propuestas por Shackleton e Iwnicki [36], en el programa implementado para, de esta manera compararlo con las gráficas aparecidas en su artículo. Es, sin duda, una manera muy fiable para comprobar la validez de los resultados obtenidos según el programa propuesto ya que, tanto los mencionados autores como el software Vampire gozan de gran reputación en el campo ferroviario.

De esta manera, se pueden extraer las formas de las áreas de contacto en todas las condiciones impuestas en el artículo de Shackleton e Iwnicki.

A continuación se presentan unas imágenes con una comparativa entre el resultado en condiciones de 20000 kN y variando el desplazamiento lateral ( $y_m$ ) en cada caso. Todos los casos serán con la condición de peso de 20000 kN.

El resultado obtenido en este trabajo se presenta con una elipse amarilla sobre la elipse obtenida por los mencionados autores con Vampire.

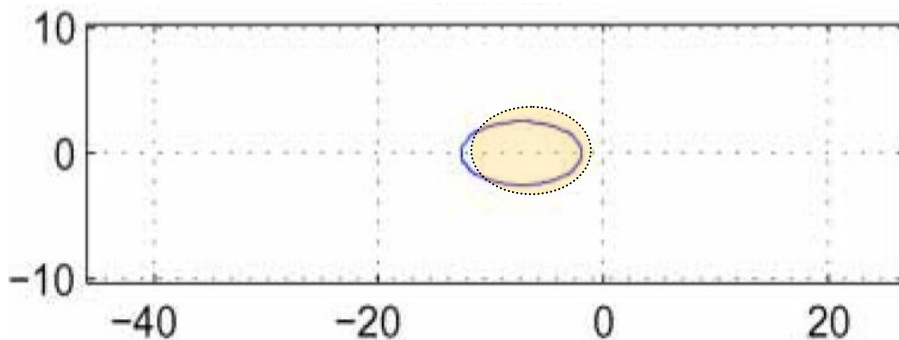


Figura 38. Comparación área de contacto con desplazamiento  $y_m=0$  mm.

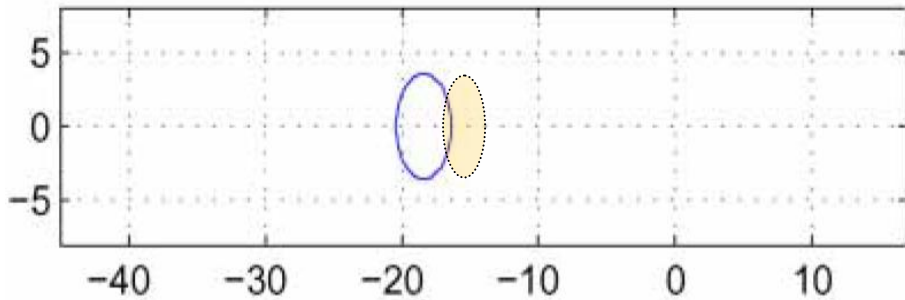


Figura 39. Comparación área de contacto con desplazamiento  $y_m = 0.5$  mm.

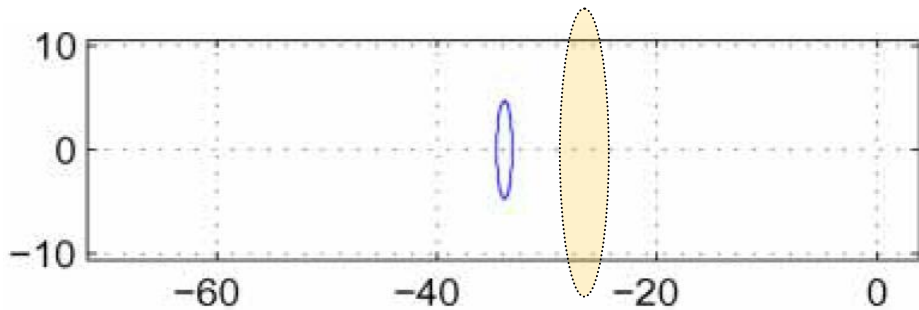


Figura 40. Comparación área de contacto con desplazamiento  $y_m = 5$  mm.

Podemos observar como en las dos primeras condiciones el método propuesto cumple bastante bien y el resultado es muy similar. Sin embargo en el tercer caso, aunque podemos extrapolarlo a todos los casos de grandes desplazamientos laterales, observamos que en la forma del área de contacto se asemeja bastante al resultado obtenido por Shackleton e Iwnicki [36], los valores de la gráfica, es decir, el tamaño del área de contacto dicta bastante del resultado con el que se compara.

En cuanto a la posición de la huella de contacto, observamos que a medida que aumentamos el valor de  $y_m$ , es decir el desplazamiento lateral, difieren más los resultados. Esto puede entrar dentro de la normalidad ya que, a

medida que se van adoptando condiciones más extremas los resultados difieren entre programas y softwares diferentes.

Con estas comparación terminamos de validar los resultados del programa implementado con las modificaciones propuestas en este Trabajo Fin de Máster. Se puede decir que dada la complejidad de los resultados y del mismo sistema, los resultados han sido satisfactorios, dado que se ha mejorado en parte la idea propuesta del departamento.

Como podemos observar en el artículo [36], hay unas enormes diferencias entre los distintos software a la hora de los resultados sobre la forma del área de contacto. Cabe destacar la gran variedad de forma y valores entre los software empleados en el artículo, así que por eso se comparan los resultados obtenidos en la simulación del programa con Vampire ya que, son los más se asemejan a la forma del área de contacto de la resolución final del programa estudiado en este Trabajo.

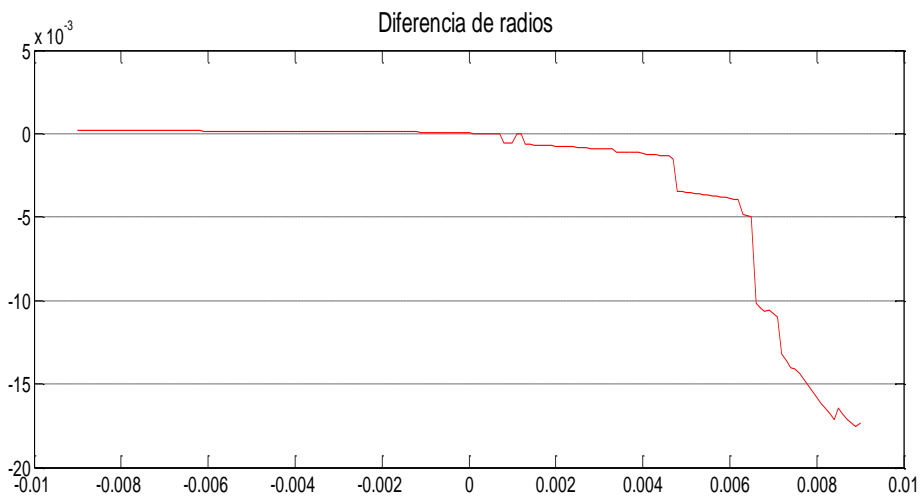
#### Comparación con el método original

Para compararlas con el método original, se emplearán dos gráficas tan importantes como son la que representa la diferencia de radios ( $\Delta r$ ), que está asociado a la conicidad del equivalente y la del giro  $\theta_x$ , que representa el balanceo del eje.

La diferencia de radios de rodadura es de vital importancia ya que, permite estudiar la estabilidad de los vehículos ferroviarios. Siempre que tenga un valor, es decir  $\Delta r = f(y)$ , quiere decir que habrá contacto, y cuando la diferencia entre radios sea cero  $\Delta r = 0$ , significará que no hay contacto.

La Figura 41 pertenece a una representación de este parámetro, vemos como al inicio de la gráfica toma como valor cero hasta que entran los perfiles en contacto y empieza a tomar valores distintos a cero.

Por lo tanto, como puede observarse en la *Figura 41*, el programa original da un resultado ilógico ya que, una vez han entrado los perfiles en contacto al valor vuelve a ser cero  $\Delta r = 0$ , lo que quiere decir que durante un instante de tiempo deja de haber contacto, lo cual no tiene ningún sentido. Esto se interpreta observando en la parte superior de la gráfica, el rizado que presenta representa lo que se acaba de comentar.



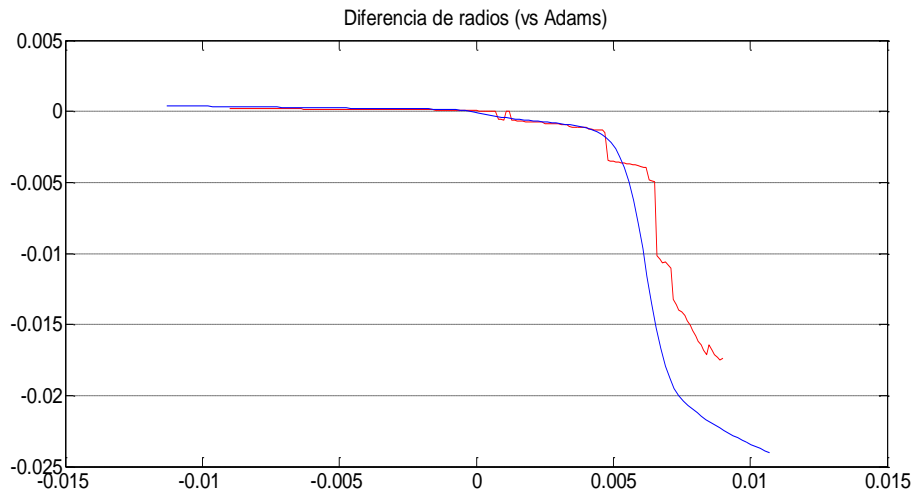
*Figura 41. Representación de la diferencia de radios obtenida según el programa original.*

Para ilustrar de una manera mejor el fenómeno que se produce en esta simulación se va a comparar con una gráfica de referencia, como puede ser en este caso, la obtenida con el software comercial Adams.

En la *Figura 42*, se representa la gráfica obtenida del modelo, superpuesta a la gráfica que presenta Adams que sirve de referencia a este modelo. En esta, se puede observar con más detalle que el valor de  $\Delta r$  vuelve a ser

cero una vez entrado en contacto, lo que es una de los errores a solucionar durante el estudio del programa.

Una vez modificado el código y ejecutado el programa de nuevo este problema desaparece, como se puede observar en la *Figura 43*, una vez entran en contacto ambos perfiles no se vuelven a separar. Por el contrario, no presenta una mejora ostensible en el resto de la gráfica ya que, evita el resto del rizado. Pero podemos suponer que esta aproximación es más correcta y realista que la del programa original.



*Figura 42. Representación que enfrenta el resultado del programa original con la curva que presenta Adams.*

- Programa Original (rojo).
- Adams (azul).

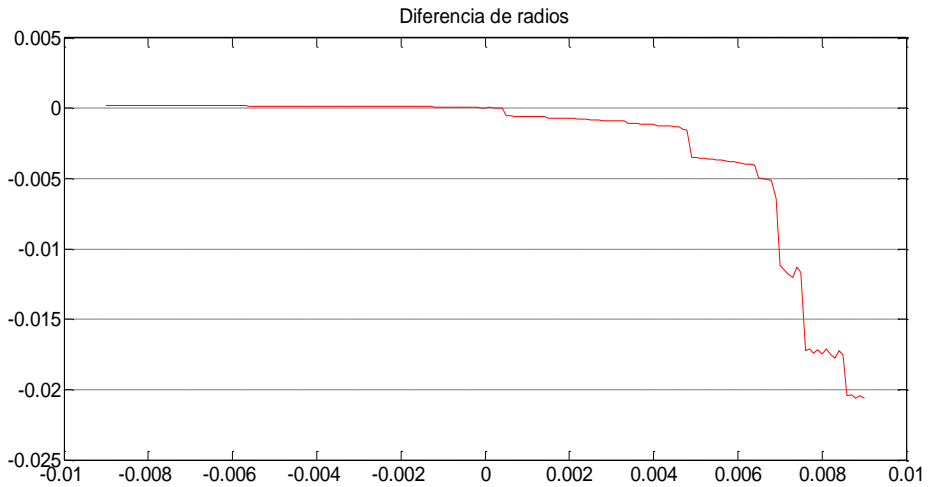
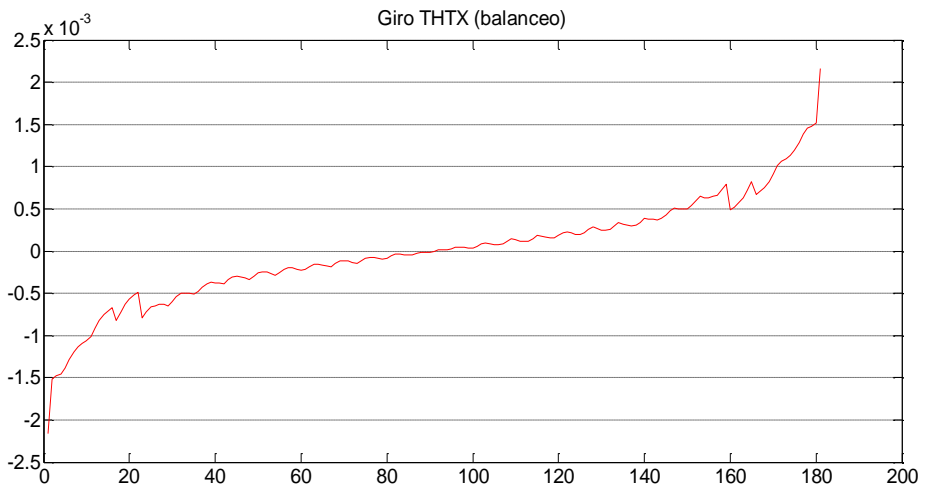


Figura 43. Representación de la diferencia de radios obtenida según la modificación del programa.

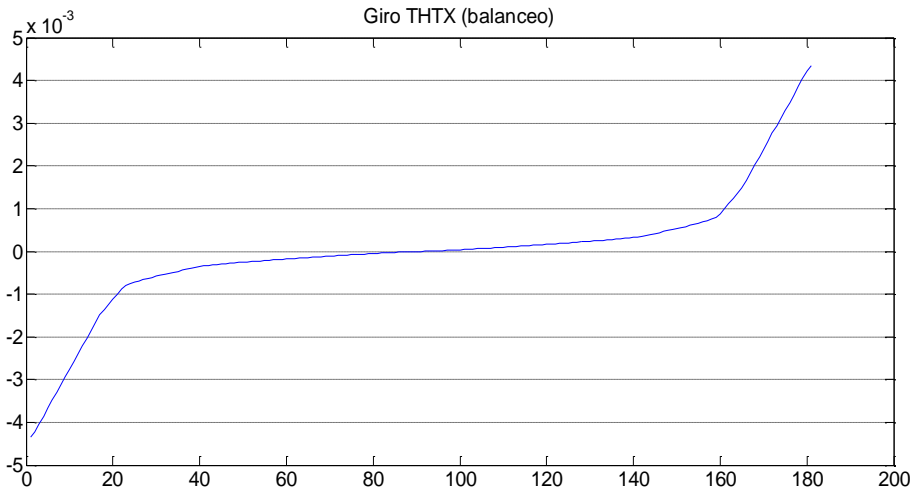
También se va a proceder a comparar otro parámetro tan importante como es el giro que mide el balanceo del eje  $\theta_x$  ya que, que puede proporcionar una información muy importante respecto al control de movimiento del vehículo ferroviario y el comportamiento, en este aspecto, del eje.



*Figura 44. Representación del giro  $\theta_x$  según el problema original.*

En la *Figura 44* se representa el resultado inicial al ejecutar el programa original, donde se puede observar que existe un rizado muy alarmante. La curva debería ser mucho más suave y esto es lo que se va a tratar de resolver después de la modificación realizada sobre el programa original.

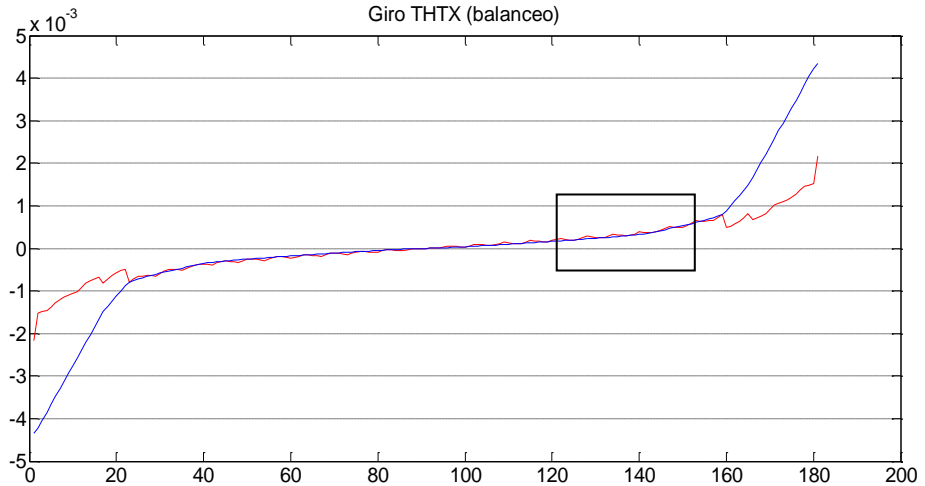
Realizando la modificación se soluciona prácticamente este problema, como se puede ver en la *Figura 45*, el rizado desaparece casi por completo, lo que suaviza este parámetro tan importante. Como se ha mencionado anteriormente, el ángulo de giro  $\theta_x$  indica el grado de balanceo del vehículo, es decir cómo se mueve el eje. De esto, se puede deducir que es un parámetro importantísimo a la hora del estudio del problema de contacto rueda-carril, por lo tanto se puede afirmar que que las modificaciones aplicadas al programa expuestas en este trabajo han tenido un impacto positivo en lo que al comportamiento del vehículo en movimiento se refiere.



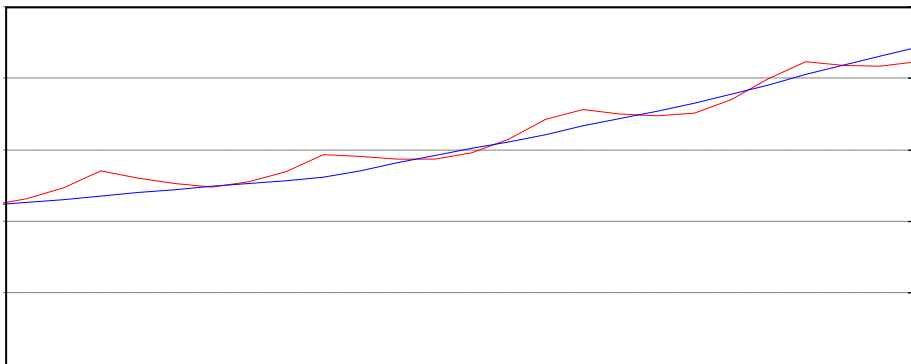
*Figura 45. Representación del giro  $\theta_x$  obtenida según la modificación del programa.*



A continuación se muestra una gráfica *Figura 45* donde se superpone ambos resultados, los del programa original con la modificación realizada, donde se puede ver más claramente el efecto causado por las nuevas rutinas en este parámetro.



*Figura 45. Representación del giro  $\theta_x$  mostrando ambos resultados simultáneamente.*



*Figura 45. Zoom de una sección de la representación del giro  $\theta_x$  con ambos resultados *Figura 44*.*



## 7. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJO

### 7.1. Conclusiones

A continuación se exponen las principales conclusiones y se destacan las aportaciones realizadas en el programa original sobre el que se ha trabajado, habiéndolo estudiado y analizado previamente de forma minuciosa.

- Se han detallado ampliamente los antecedentes que han llevado a plantearse la resolución de un problema de este tipo, apoyándose en la bibliografía mencionada y resaltando la importancia de varios autores.
- Se han revisado las bases del problema geométrico de contacto general y su resolución.
- Se ha estudiado ampliamente la bibliografía relacionada con el problema geométrico y normal de contacto, incluyendo una exhaustiva búsqueda de alternativas al cálculo del problema de contacto, particularmente lo relativo al toque de la pestaña con el carril.
- Se ha planteado el problema estudiado, además de las modificaciones realizadas en el, para la mejoría en la resolución del programa y la validez de sus resultados.
- Se han comparado los resultados obtenidos con otras versiones del mismo problema, validándolo, de esta manera, con el programa original y con un software comercial como Adams que proporciona un resultado de referencia. Además se ha procedido a verificar resultados con parte de la bibliografía de conocidos y considerados autores, para validar los resultados con otra fuente fiable de datos.

## **7.2. Futuros Trabajos.**

A pesar de los excelentes resultados obtenidos en algunos parámetros, tras la modificación del problema original respecto a la resolución del problema de contacto rueda-carril, no se ha podido mejorar un punto muy importante en problemas de dinámica ferroviaria, que es el toque de la pestaña de la rueda con el carril.

Se considera interesante que en un futuro se realicen trabajos que propongan otros planteamientos y desarrollos, además de investigaciones y modificaciones en estos resultados obtenidos del programa estudiado y de las variaciones planteadas en este Trabajo Fin de Máster.

## Bibliografía

- [1] J.J. Kalker. Survey of wheel-rail rolling contact theory. *Vehicle System Dynamics* 5 (1979) 317-358.
- [2] J.J. Kalker. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1990.
- [3] V.K. Garg, R.V. Dukkipati. *Dynamics of Railway Vehicle Systems*. Academic Press, New York, 1984.
- [4] J. Santamaría, E.G. Vadillo, J. Gómez. A comprehensive method for the elastic calculation of the two-point wheel-rail contact. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 240-250.
- [5] A.A. Shabana, K.E. Zaaza, J.L. Escalona, J.R. Sany. Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 295-325.
- [6] K. Knothe, H. Le-The. A method for the analysis of the tangential stresses and the wear distribution between two elastic bodies of revolution in rolling contact. *International Journal of Solids and Structures* 21 (1985) 889-906.
- [7] A.E.H. Love. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 228 (1929) 377-420.
- [8] K. Knothe, H. Le-The. Ermittlung der Normalspannungsverteilung beim Kontakt von Rad und Schiene. *Forschung im Ingenieurwesen* 49 (1983) 79-85.
- [9] K. Knothe, H. Le-The. A contribution to the calculation of the contact stress distribution between two elastic bodies of revolution with non-elliptical contact area. *Computers & Structures* 18 (1984) 1025-1033.

- [10] J. Piotrowski, H. Chollet. Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 455-483.
- [11] J. Pombo, J. Ambrósio, M. Silva. A new wheel-rail contact model for railway dynamics. *Vehicle System Dynamics* 45 ( 2007) 165-189.
- [12] J. Santamaría, E.G. Vadillo, O. Oyarzabal. Wheel-rail wear index prediction considering multiple contact patches. *Wear* 267 (2009) 1100-1104.
- [13] A.A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, Cambridge 2005.
- [14] A.A. Shabana, K.E. Zaazaa, H. Sugiyama. *Railroad Vehicle Dynamics, A Computational Approach*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2008.
- [15] J. Pombo, J. Ambrósio. Application of a wheel-rail contact model to railway dynamics in small radius curved tracks. *Multibody System Dynamics* 19 (2008) 91-114.
- [16] S. Iwnicki. Simulation of wheel-rail contact forces. *Fatigue & Fracture Engineering Materials & Structures* 26 (2003) 887-900.
- [17] A. Alonso, J.G. Giménez. A new method for the solution of the normal contact problem in the dynamic simulation of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 149-160.
- [18] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [19] J.B. Ayasse, H. Chollet: Chapter 4 Wheel-rail contact. In: S. Iwnicki, Editor: *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2006.
- [20] J.B. Ayasse, H. Chollet. Determination of the wheel rail contact patch in semi-Hertzian conditions. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 161-172.
- [21] W. Kik, J. Piotrowski. A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep force during rolling,

- In: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Mini Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail Systems, Budapest, July 29-31, 1996.
- [22] J. Piotrowski, W. Kik. A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 27-48.
- [23] M. Sebes, J.B. Ayasse, H. Chollet, P. Pouligny and B. Pirat. Application of a semi-Hertzian method to the simulation of vehicles in high-speed switches. *Vehicle System Dynamics* 44, Supp (2006) 341-348.
- [24] P.J. Vermeulen, K.L. Johnson. Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces. *Journal of Applied Mechanics* 31 (1964) 338-340.
- [25] Z.Y. Shen, J.K. Hedrick, J.A. Elkins. A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamics analysis. Proceedings of the 8<sup>th</sup> IAVSD Symposium held at MIT, Cambridge (MA), USA, Aug 1983. 591-605.
- [26] O. Polach. Solution of wheel-rail contact forces suitable for calculation of rail vehicle dynamic, In: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Railway Bogies, Budapest, September 14-16, 1992, 10-17.
- [27] O. Polach. A fast wheel-rail forces calculation computer code. *Vehicle System Dynamics*, Suppl. 33 (1999) 728-739.
- [28] O. Polach. Influence of locomotive tractive effort on the forces between wheel and rail. *Vehicle System Dynamics* 25 (2001) 7-22.
- [29] O. Polach. Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit. *Wear* 258 (2005) 992-1000.
- [30] E.A.H. Vollebregt. Survey of programs on contact mechanics developed by J.J. Kalker. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 85-92.
- [31] J.J. Kalker. A fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact, *Vehicle System Dynamics* 11 (1982) 1-13.

- [32] A. Alonso, J.G. Giménez, L.M. Martín. Spin moment calculation and its importance in railway dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 223 (2009) 453-460.
- [33] A. Alonso, J.G. Giménez. Tangential problem solution for non-elliptical contact areas with the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics* 45 (4) (2007) 341-357.
- [34] J.G. Giménez, A. Alonso, E. Gómez. Introduction of a friction coefficient dependent on the slip in the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 233-244.
- [35] J. Piotrowski. Kalker's algorithm FastSim solves tangential contact problems with slip-dependent friction and friction anisotropy. *Vehicle System Dynamics* 48 (2010) 869-889.
- [36] P. Shackleton, S. Iwnicki. Comparison of wheel-rail contact codes for railway vehicle simulation: an introduction to the Manchester Contact Benchmark and initial results. Department of Engineering and Technology, Manchester Metropolitan University, Manchester, UK. *Vehicle System Dynamics*, 46:1, (2008) 129-149.
- [37] A. Alonso, J.G. Giménez. Some new contributions to the resolution of the normal wheel-rail contact problem. *Vehicle System Dynamics* 44, Supplement (2006), 230-239.
- [38] Andrés Rovira Cardete. Modelado del contacto rueda-carril para aplicaciones de simulación de vehículos ferroviarios y estimación del desgaste en el rango de baja frecuencia. Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Universidad Politécnica de Valencia. 2012. DOI: 10.4995/Thesis/10251/14671.
- [39] J. Martínez-Casas, J. Carballeira. Modelo de interacción dinámica del vehículo ferroviario completo con ejes y vía flexible en curva. Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica, Universidad Politécnica de Valencia. XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. 2016.



- [40] J. Evans, M. Berg. Challenges in simulation of rail vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics* 47 (2009) 1023-1048.
- [41] J. Martínez-Casas, L. Baeza. Dynamic model of the track-railway vehicle interaction on curves. Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica, Universidad Politécnica de Valencia. 24<sup>th</sup> Symposium of the International Association for Vehicle System Dynamics, 2015.









