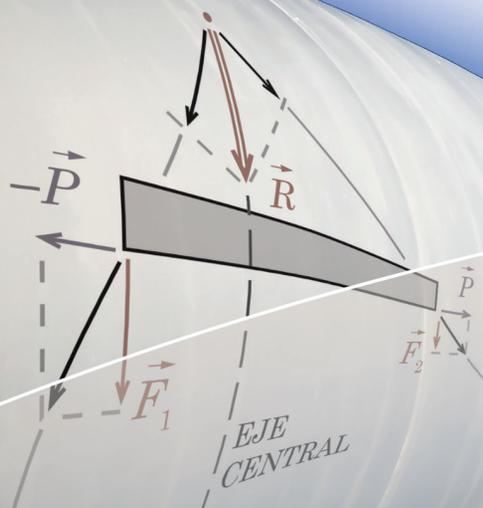
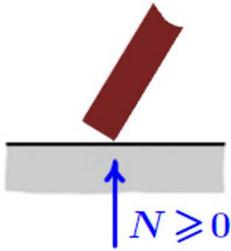


Mecànica: estàtica y càlculo vectorial

Pedro Museros Romero

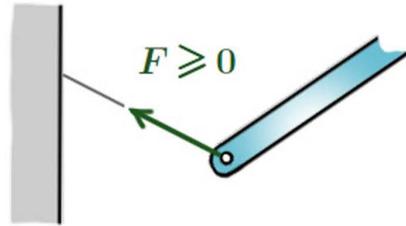


ENLACES UNILATERALES



Contacto con superficie sin rozamiento (lisa):

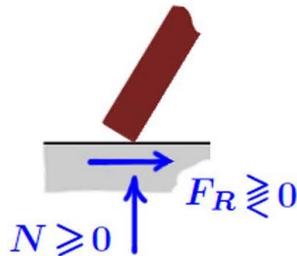
Fuerza normal a la superficie



Cable de peso despreciable:

Fuerza (tensión) del cable sobre el cuerpo

ENLACE PARCIALMENTE BILATERAL

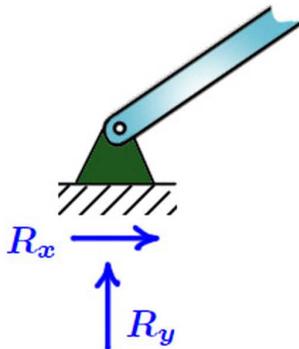


Contacto con superficie con rozamiento (rugosa):

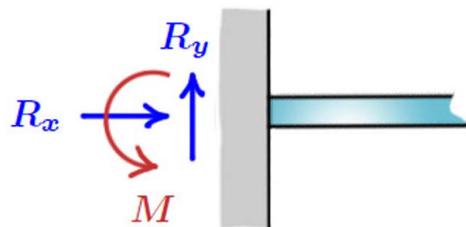
Fuerza normal a la superficie (unilateral)

Fuerza de rozamiento (bilateral)

ENLACES BILATERALES



Apoyo fijo: Dos fuerzas no paralelas



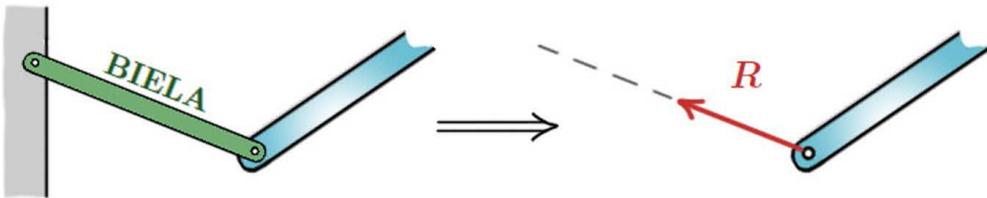
Empotramiento:

Dos fuerzas no paralelas y un momento

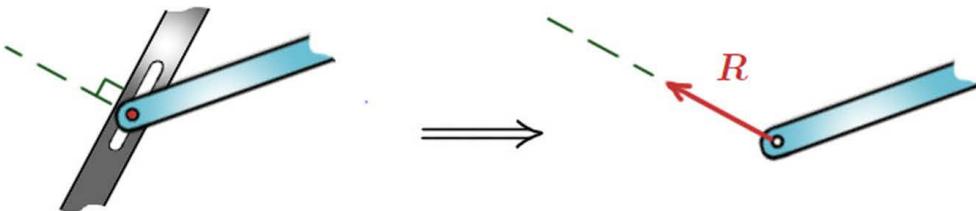
ENLACES BILATERALES



Apoyo móvil o "carrito": Fuerza de dirección conocida



Barra de peso despreciable: Fuerza de dirección conocida



Guía o corredera: Fuerza de dirección conocida

Mecánica: estática y cálculo vectorial

Pedro Museros Romero

2016
EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección Académica

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universitat Politècnica de València

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: MUSEROS ROMERO, P. (2016). *Mecánica: estática y cálculo vectorial*. Valencia: Universitat Politècnica de València

© Pedro Museros Romero

© 2016, Editorial Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0488_08_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-505-7

Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es.

Impreso en España

A mis padres y a mi abuela, por su enorme esfuerzo en estos últimos años.

Agradecimientos

Gracias al profesor José Lavado Rodríguez, de la Universidad de Granada, por las imágenes de estructuras reales incluidas en el Tema 6.

Vaya expresada también mi gratitud a Marta y a Emilio, por su inestimable ayuda.

Playa de Nules, Octubre de 2016.

Prólogo

Este libro constituye el primer volumen de un manual docente completo de *Mecánica*. Esta materia se divide en dos grandes bloques: Estática y Dinámica. En este primer volumen se aborda el estudio de la estática y los sistemas de vectores (particularmente *fuerzas*). Se trata de una publicación destinada a explicar todos los conceptos fundamentales, con aplicaciones prácticas seleccionadas que los ilustren y faciliten su comprensión. No es, por tanto, un libro de ejercicios, si bien en un futuro próximo se completará con otros volúmenes dedicados a la resolución exclusiva de problemas prácticos.

Los ejemplos resueltos incluidos en este volumen no se presentan como casos aparte de los conceptos teóricos expuestos. Al contrario, en ciertas ocasiones la explicación de determinados conceptos mediante su aplicación a un caso particular es mucho más clara, sin que ello implique pérdida de generalidad. En tal caso se ha optado por esta vía, que contribuirá seguramente a una mejor y más rápida comprensión por parte del alumno.

El enfoque habitual de los textos clásicos de Mecánica parte de la formación de un sólido cuerpo teórico basado en geometría, cálculo infinitesimal, álgebra, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales. Sin embargo, las asignaturas antaño anuales, de 12 o 15 créditos, se han debido adaptar a los estudios de grado en el marco de la Declaración de Bolonia, con lo que el tiempo disponible para demostraciones rigurosas se ha reducido. Aunque no todos los docentes comparten el actual planteamiento, es un hecho que determinados aspectos de los denominados “teóricos” han quedado pospuestos para estudios especializados de Máster o Doctorado. Partiendo pues del *statu quo*, este modesto libro pretende adaptar la enseñanza de la Estática y el Cálculo vectorial para facilitar un adecuado progreso de los estudiantes hacia cursos posteriores.

Dado que no se trata de un trabajo de investigación ni de recopilación, las referencias bibliográficas citadas son únicamente las necesarias para completar determinados apartados donde se ha estimado conveniente. Se han añadido además cuatro referencias adicionales cuya lectura se aconseja al estudiante: el libro de Beer&Johnston (y Mazurek) por lo completo de su tratamiento y su presentación

clara y didáctica; el de Prieto Alberca como referencia fundamental por su alcance y su rigor; el de Meriam (edición de 1965) particularmente por sus ilustraciones, además de su enfoque también muy didáctico; finalmente, el primer tomo de la colección de Scala por su tratamiento integral, enciclopédico, de los sistemas de vectores.

Si se detecta cualquier error o errata, pueden ponerlo en conocimiento del autor escribiendo a *pmuseros@mes.upv.es*. Gracias.

Índice general

Prólogo	VII
Índice general	IX
I Introducción	1
1 Principios de la Mecánica	3
1.1 ¿Qué es la Mecánica?	3
1.2 Conceptos básicos.	5
1.3 Principios fundamentales	6
1.4 Sistemas de unidades.	8
1.5 Precisión numérica	12
II Cálculo vectorial y Estática básica	15
2 Estática de la partícula	17
2.1 Introducción	17
2.2 Magnitudes vectoriales: las fuerzas	18
2.2.1 Concepto de fuerza.	18
2.2.2 Vectores: suma de vectores y resultante	22
2.2.3 Componentes de un vector	29
2.3 Equilibrio de una partícula. Diagrama de cuerpo libre.	36

3	Sistemas de vectores y fuerzas sobre sólidos rígidos	45
3.1	Introducción	45
3.2	Sistemas de fuerzas coplanarias	46
3.2.1	Resultante y momento respecto de un punto	46
3.2.2	Pares de fuerzas	51
3.2.3	Reducción a una fuerza resultante: línea de acción o eje central	53
3.3	Sistemas tridimensionales de fuerzas	61
3.3.1	Momento respecto de un punto	62
3.3.2	Momento respecto de un eje	65
3.3.3	Pares de fuerzas	68
3.3.4	Reducción de un sistema en un punto	68
3.3.5	Reducción mínima de un sistema: eje central	75
3.4	Sistemas de fuerzas concurrentes: teorema de Varignon	77
3.5	Sistemas de fuerzas paralelas	78
4	Estática del sólido rígido	81
4.1	Introducción	81
4.2	Grados de libertad del sólido rígido	82
4.3	Tipos de enlace	84
4.3.1	Enlaces externos en problemas planos (2D)	86
4.3.2	Enlaces externos en problemas espaciales (3D)	91
4.3.3	Enlaces externos elásticos: muelles ideales o resortes	94
4.3.4	Enlaces internos: contacto entre cuerpos y uniones articuladas	94
4.4	Equilibrio y diagrama de cuerpo libre	98
4.5	Determinación e indeterminación estática	110
4.5.1	Introducción	110
4.5.2	Determinación e indeterminación estática en problemas planos (2D)	112
4.5.3	Determinación e indeterminación estática en problemas espaciales (3D)	120
4.6	Equilibrio y movimiento a velocidad constante	124
5	Rozamiento	127
5.1	Introducción	127
5.2	Leyes del rozamiento seco. Coeficientes de rozamiento	127
5.3	Ángulos de rozamiento	133

5.4 Rozamiento en cables	137
5.5 Resistencia a la rodadura.	139
III Estática aplicada	143
6 Estructuras isostáticas	145
6.1 Introducción	145
6.2 Estructuras de barras: clasificación	149
6.3 Estructuras de nudos rígidos.	153
6.3.1 Grados de libertad y enlaces: determinación e indeterminación estática. . .	153
6.3.2 Cálculo de estructuras de nudos rígidos	160
6.4 Estructuras de nudos articulados.	166
6.4.1 Grados de libertad y enlaces: determinación e indeterminación estática. . .	167
6.4.2 Cálculo de estructuras articuladas: barras que no trabajan	175
6.4.3 Cálculo de estructuras articuladas: método de los nudos	177
6.4.4 Cálculo de estructuras articuladas: método de las secciones o de Ritter . . .	181
7 Cables	183
7.1 Introducción	183
7.2 Cables sometidos a cargas concentradas	184
7.3 Cables sometidos a cargas distribuidas	190
7.3.1 Cable parabólico	191
7.3.2 Catenaria.	196
Formulario	205
Referencias bibliográficas	211

Bloque I

Introducción

Tema 1

Principios de la Mecánica

1.1 ¿Qué es la Mecánica?

La Mecánica es una ciencia antigua cuyos orígenes se remontan a la escuela Pitagórica en la Grecia clásica (siglo VI a. C.). Su larga evolución desde entonces ha recogido contribuciones de un gran número de ilustres científicos como Nicolás Copérnico, Galileo Galilei, Johannes Kepler, Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, los hermanos Jakob y Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Jean le Rond D'Alembert, Joseph L. Lagrange, William R. Hamilton y muchos otros.

El campo de estudio abarcado por la Mecánica es muy vasto. Para precisar más concretamente sus objetivos, es de interés citar la definición de Mecánica que hizo Bruno Finzi en su libro *Mecánica Racional* (Finzi, 1964), recogiendo el pensamiento de Ernst Mach:

¿Qué es la Mecánica? “La ciencia de los movimientos que resultan de fuerzas cualesquiera, y de las fuerzas requeridas por cada movimiento” dice Newton y, con él, repiten muchos autores; “descripción simple y completa de los movimientos que ocurren en la naturaleza”, dice Kirchhoff; [...] Estas definiciones son todas demasiado amplias, porque todos los fenómenos ocurren en el espacio y en el tiempo, e implican un movimiento; aun cuando se prescindiera del concepto cartesiano de explicar y representar todo el mundo físico, tan sólo con la extensión y el movimiento, la mecánica racional, entendida según las anteriores definiciones, desbordaría hasta confundirse con casi toda la Física. Mach es menos impreciso: observa que todos los fenómenos pertenecen,

en rigor, a todas las ramas de la Física. Pero, si en el estudio del movimiento son despreciables, o se desprecian a efectos del mismo movimiento, las variaciones térmicas, electromagnéticas, químicas, etc., entonces se entra en el dominio de la Mecánica.

La definición anterior es suficientemente concreta y precisa los objetivos de este curso. Excluyendo los movimientos a velocidades cercanas a la de la luz (Mecánica Relativista), y los de las partículas atómicas y subatómicas (Mecánica Cuántica), que pese a su indudable interés no son fundamentales para el Ingeniero Civil o de Obras Públicas, se entra en el ámbito restringido que aquí se denomina **Mecánica** (o también Mecánica Newtoniana, Racional, Clásica o Vectorial).

Es importante destacar que la Mecánica tratada en este texto no tiene el carácter empírico o experimental de otras ramas de la Física, y por tanto pertenece al campo de la *Mecánica teórica* (que trata de establecer las leyes del movimiento). Para ello es necesario partir de los denominados *Principios Fundamentales* (ver apartado 1.3), los cuales son verdades axiomáticas, no demostrables, que se verifican de manera experimental. A partir de estos principios, el resto de resultados se deducen mediante razonamiento lógico, empleando como herramienta fundamental las Matemáticas.

Sin embargo, la Mecánica tampoco es una ciencia pura o abstracta como son las Matemáticas. Es una disciplina que entra dentro del campo de las *ciencias aplicadas*, como otras ramas de la física que incluyen la Termodinámica, el Electromagnetismo, etc. Todas ellas tienen vocación de resolver problemas de manera teórica para su posterior aplicación práctica.

Se pueden distinguir tres ramas principales dentro de la Mecánica:

- **Mecánica de sólidos rígidos:** se ocupa de los sólidos, considerados como cuerpos idealmente indeformables. Puede subdividirse a su vez en *Estática* y *Dinámica*. La Estática es la parte de la Mecánica de la que se ocupa este texto, enfocada en concreto al estudio de los cuerpos en reposo bajo la acción de fuerzas. Para ello se hace uso de una herramienta matemática particular que es el *Cálculo vectorial*.
- **Mecánica de sólidos deformables:** estudia el equilibrio estático o movimiento de los cuerpos sólidos, teniendo en cuenta su deformabilidad.
- **Mecánica de fluidos:** estudia el equilibrio estático o movimiento de los fluidos (líquidos y gases).

► Así pues, se entenderá en lo sucesivo que la Mecánica es la disciplina que, a partir de los Principios Fundamentales, se ocupa de deducir las leyes del movimiento y equilibrio de los sólidos, considerados estos como idealmente indeformables.

1.2 Conceptos básicos

Para formular las leyes del movimiento y del equilibrio de los sólidos indeformables es necesario emplear cuatro conceptos básicos que expresan distintas magnitudes.

Conceptos absolutos

- **Espacio:** concepto asociado a la noción de posición de un punto P dada en términos de tres coordenadas medidas desde un punto de referencia u origen. En muchas ocasiones se tratan también problemas en los que las posiciones quedan fijadas por dos coordenadas que situamos en un plano XY: son los denominados *problemas planos o bidimensionales* (2D).
- **Tiempo:** magnitud escalar que permite asociar a cada evento un *instante* en el que este ocurre.
- **Masa:** magnitud escalar que mide la cantidad de materia que tiene un cuerpo. Se emplea para caracterizar y comparar la respuesta de los sólidos a la atracción gravitatoria y su resistencia frente a cambios en su movimiento de traslación.

En la Mecánica Newtoniana, el espacio, el tiempo y la masa son conceptos absolutos, independientes unos de otros. En Mecánica relativista, por el contrario, existen relaciones entre ellos, derivadas de la constancia de la velocidad de la luz.

Concepto derivado

- **Fuerza:** representa la acción de un cuerpo (o sólido) sobre otro. En general, una fuerza se caracteriza por su punto de aplicación, su módulo o magnitud, su dirección y su sentido. Por lo tanto, la fuerza es una magnitud vectorial.

La fuerza no es independiente del espacio, tiempo y masa. Como se verá a continuación, la fuerza que actúa sobre un cuerpo está relacionada con su masa y con el cambio de su velocidad en el tiempo.

1.3 Principios fundamentales

Existen una serie de hechos ciertos, comprobados mediante la experimentación pero indemostrables, que en Mecánica se toman como *axiomas*¹. Estos axiomas son los Principios Fundamentales. En Mecánica suelen considerarse seis principios. A continuación se enuncian, en cambio, siete principios:

- **Primera ley de Newton:** “Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que se vea obligado a cambiar ese estado a causa de la acción de fuerzas”. En otras palabras, si no actúa ninguna fuerza sobre un cuerpo (considerado de dimensiones muy pequeñas), este continuará en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, observado en un sistema de referencia inercial².
- **Segunda ley de Newton:** “La alteración del movimiento es siempre proporcional a la fuerza motriz aplicada, y se hace en la línea concreta en la que dicha fuerza se aplique”. Newton entendía por “movimiento” de un cuerpo de masa m su velocidad \vec{v} ; la alteración o variación del movimiento será la aceleración \vec{a} . La masa m es la constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración, lo que permite escribir la segunda ley de Newton como

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.1)$$

- **Tercera ley de Newton, o principio de acción y reacción:** “Para cada acción siempre se opone una reacción igual; o las acciones mutuas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas a las partes contrarias”. Actualmente se suele enunciar diciendo que las acciones mutuas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales en magnitud y de sentidos opuestos.
- **Ley de la gravitación universal de Newton:** la fuerza con que se atraen mutuamente dos cuerpos de masas M y m , separados por una distancia r entre sus centros, es

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (1.2)$$

Por lo tanto, si el peso de un objeto en la superficie de la tierra es $W = mg$, donde $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ es la aceleración de la gravedad, entonces se deduce que la constante G de gravitación y g se relacionan con la masa de la tierra M y su radio R mediante la igualdad

¹Según el diccionario de la Real Academia Española (www.rae.es) los axiomas son “Cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría”.

²Un sistema de referencia inercial es aquel que está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

$$g = \frac{GM}{R^2}. \quad (1.3)$$

- **Ley del paralelogramo:** sean dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo y cuyas líneas de acción se cortan en un punto (ver figura 1.1). Dichas fuerzas producen sobre el cuerpo el mismo efecto que una fuerza resultante, igual a la diagonal del paralelogramo formado por ambas fuerzas si se aplican en el punto de corte de sus líneas de acción.
- **Principio de transmisibilidad:** sea una fuerza que actúa sobre un cuerpo en una determinada línea de acción (ver figura 1.2). El efecto de dicha fuerza sobre el cuerpo es idéntico si la fuerza se aplica en cualquier otro punto de la misma línea de acción. Este principio se resume en ocasiones diciendo que la fuerza *puede trasladarse* a lo largo de su línea de acción sin alterar el estado del cuerpo.
- **Conservación del momento cinético:** el séptimo y último de los principios fundamentales está sometido a cierta controversia dado que es demostrable en algunos casos muy importantes pero, como han afirmado distintos autores, no es demostrable de forma general (ver apartado 4.4).

En todo sistema aislado, el momento cinético o momento angular es constante. Esto implica que las fuerzas internas entre las distintas partes o partículas de un sistema no solo tienen resultante nula (lo cual se deriva de la tercera ley de Newton), sino que su momento total es también nulo.

Este principio puede deducirse de las Leyes de Newton en el caso de fuerzas centrales entre las partículas. En otros casos no es posible deducirlo y debe aceptarse como verdad empírica, ya que nunca se ha observado variación del momento cinético de un sistema aislado.

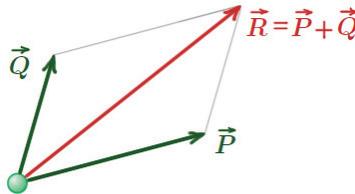


Figura 1.1: Ley del paralelogramo.

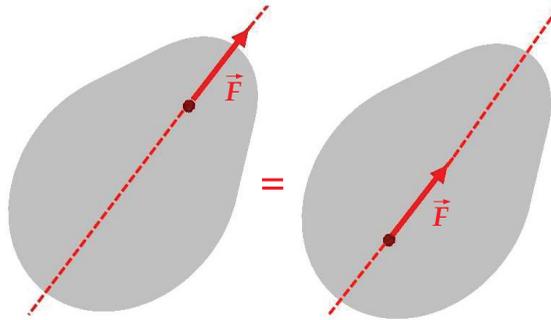


Figura 1.2: Principio de transmisibilidad.

Volviendo al principio de transmisibilidad, este afirma que el estado del cuerpo no varía al trasladar la fuerza, es decir, estará en equilibrio o en movimiento con la misma aceleración, independientemente del punto donde se aplique la fuerza siempre que sea en la misma línea. Sin embargo, sí puede suceder que se altere la *naturaleza de un estado de equilibrio*.

En la figura 1.3(a) se observa un bloque de peso W que está suspendido por una fuerza $F = W$ en equilibrio. La fuerza F la ejerce un cable del que cuelga el cuerpo. Este es un estado de equilibrio estable, ya que si se aplicara cualquier pequeña fuerza lateral sobre el objeto para desestabilizarlo, al estar colgado del cable retornaría a la posición de equilibrio una vez que la fuerza lateral desapareciese.

En cambio, la figura 1.3(b) muestra un estado de equilibrio inestable, en el que la misma fuerza $F = W$ la realiza un punto de apoyo bajo el cuerpo. Puesto que la superficie de apoyo es muy pequeña, si se aplicase una fuerza lateral el cuerpo volcaría. Por lo tanto, en este caso se ha trasladado la fuerza F por su línea hacia abajo y se tiene un nuevo estado de equilibrio que no es estable.

1.4 Sistemas de unidades

Los sistemas de unidades de medida son fundamentales a la hora de expresar las magnitudes. Su uso correcto es indispensable y debe ser uno de los objetivos básicos elementales de cualquier estudiante de Mecánica.

Para seguir leyendo haga click aquí