Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 99, Nº. 1, pp 1-26, 2005
V Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

ORIENTE Y OCCIDENTE EN LA FORMACIÓN DE LA CIENCIA MATEMÁTICA

MANUEL LÓPEZ PELLICER *

* E.T.S. Ingenieros Agrónomos. Apartado 22012. 46071 Valencia.

INTRODUCCIÓN

Al hablar de formación de ciencia no debemos pensar sólo en el conocimiento experimental y matemático tal como lo poseemos ahora en la ciencia moderna, desarrollada desde poco antes del siglo XVII. Conocer sólo este aspecto de la ciencia proporcionaría una visión muy parcial, pues se habría prescindido de los cuatro o cinco milenios que gestaron el advenimiento de la ciencia moderna.

Es cierto que hay científicos propensos a creer que casi todas las cosas de algún valor se hicieron en los dos últimos siglos, debido a los resultados asombrosos obtenidos en tiempos recientes, y que nadie cuestiona que se apoyan en la labor preparatoria de los esfuerzos anteriores. Aún admitiendo que los resultados del presente sean más complejos y más valiosos que los del pasado, y que los han reemplazado, el pensamiento inductivo nos hace suponer que serán reemplazados por los resultados del futuro. Por tanto, la historia de la ciencia siempre ha proporcionado en cada época una visión menos presuntuosa de su participación en la evolución humana.

Las conquistas científicas antiguas nos proporcionan una mejor concepción del significado de la evolución científica, pues se extienden a lo largo de un período mucho mayor y más alejado, que nos permite ver con mejor perspectiva, ya que el valor de una teoría y la importancia de un hecho, dependen de las conclusiones que puedan deducirse de ellos, en definitiva de los frutos que producen. Además la ciencia antigua y medieval se ha desarrollado en diferentes lapsos de tiempo interrumpidos por distintas vicisitudes, mostrando que la evolución humana es más compleja de lo que muestra el proceso ordenado de los últimos siglos. Exagerando, podemos decir que un descubrimiento en la antigüedad era como una pepita de oro con la que se tropezaba con ayuda de la suerte, en tanto que hoy el trabajo científico es comparable a la explotación sistemática de una mina de oro, cuyo promedio de producción casi puede predecirse.

Tanto para entender al hombre a través del desarrollo de la civilización, como para la comprensión del significado más profundo de la ciencia se necesita la historia de la ciencia, siendo la historia antigua y medieval tan útil como la moderna. El análisis de la contribución de oriente y occidente en la formación de la ciencia nos obliga a mirar hacia la historia antigua y medieval.

ANTES DEL TERCER MILENIO DEL NACIMIENTO DE CRISTO

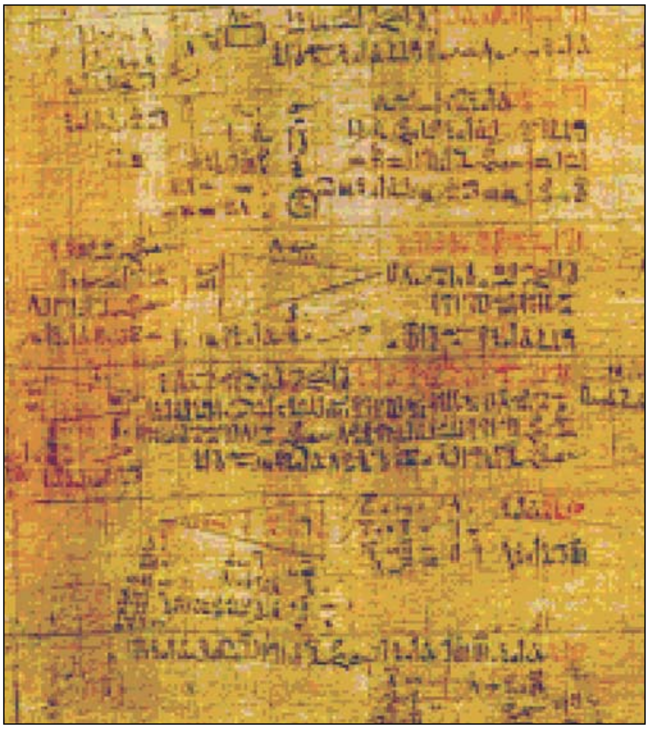
Parece que nunca tendremos información adecuada de ese período antiguo en el que el hombre satisfacía sus más urgentes necesidades y, lentamente, emergía de la oscuridad y comenzaba a aparecer su instintiva ansia por el poder y el conocimiento.

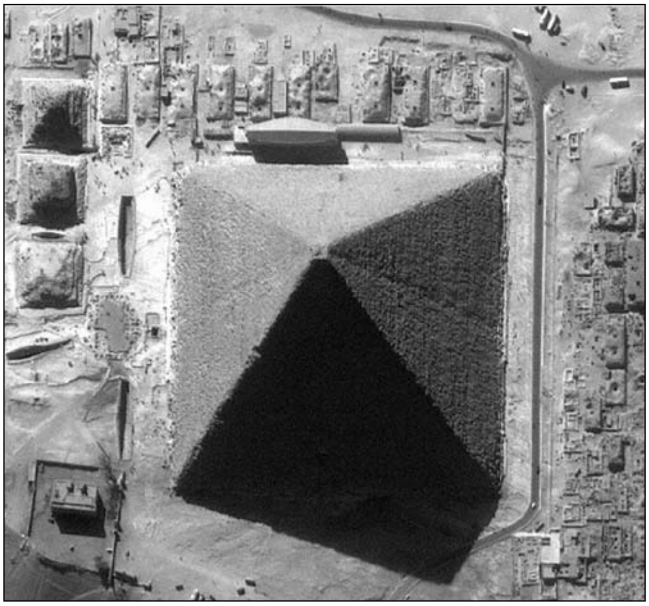
Nunca sabremos quien fue el primero que pensó en encender fuego, en fabricar instrumentos de piedra, en domesticar animales o en utilizar la rueda. Tampoco lo sabemos todo sobre el desarrollo del lenguaje y de la escritura. En cambio es obvio que sin el lenguaje articulado el hombre sería aún un animal. Sin la escritura sería imposible la transmisión y conservación del conocimiento y del progreso, que serían precarios e inciertos.

Es probable que estos descubrimientos implicasen la colaboración secular de miles de hombres y que los grandes progresos fuesen asegurados por el genio excepcional de algunos de ellos, remachando los resultados obtenidos mediante la acumulación un tanto inconsciente de muchas pequeñas aportaciones, asegurando lo conquistado y preparando nuevos lentos movimientos de progreso. Las transiciones que condujeron a cada uno de estos descubrimientos fundamentales debieron de ser extraordinariamente lentas, comparables a las evoluciones biológicas, y quedarían totalmente inadvertidas para la mayoría de los hombres.

EL AMANECER DE LA CIENCIA EN EGIPTO Y MESOPOTAMIA

La evolución que preparó el amanecer de la ciencia debe haber durado decenas de miles de años, pero al





comienzo del tercer milenio antes de Cristo ya se encontraba completada en Egipto y Mesopotamia, que habían alcanzado un elevado grado de cultura que incluía la escritura y bastantes conocimientos matemáticos, astronómicos y médicos. Esta evolución también estaba casi completada en India y China.

En el cuarto milenio antes de nuestra era se produjo un gran desarrollo cultural que trajo el uso de la escritura, la rueda y los metales. A mediados del cuarto milenio antes de Cristo los egipcios ya tenían conocimiento de un sistema decimal de numeración. A finales de este maravilloso milenio comenzó el gobierno de la primera dinastía. En una inscripción de aquella época hay una referencia a 120.000 cautivos, 400.000 bueyes y 1.422.000 cabras en las que cada unidad decimal está representada por un símbolo especial.

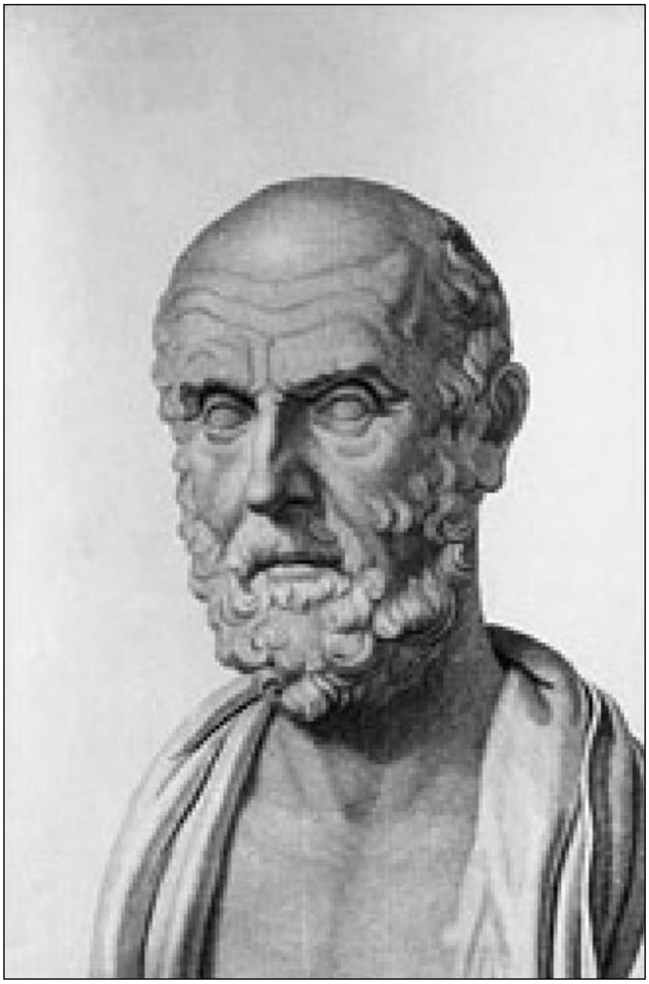
También sus conocimientos astronómicos fueron notables. Parece que el calendario egipcio de 365 días fue establecido en el año 4241 antes de Cristo.

Los conocimientos egipcios estuvieron altamente sistematizados, según se puede comprobar con el *papiro Golenishchev*, que se encuentra en Moscú, data del siglo XIX antes de Cristo y es copia de un documento del final del tercer milenio antes de Cristo, y con el *papiro Rhind*, que se conserva en Londres, proviene del siglo XVII antes de Cristo y es una copia hecha por el escriba Ahmes de un texto que le supera

en más de dos siglos de antigüedad. Gracias a este papiro sabemos que los matemáticos egipcios del siglo XVII antes de Cristo estaban ya en condiciones de resolver problemas complicados que implicaban ecuaciones determinadas e indeterminadas de grados primero y segundo, tenían gran habilidad aritmética, utilizaban el método de la falsa posición y la regla de tres. Encontraron el área de un círculo y de una esfera y los volúmenes de un cilindro y de un tronco de pirámide de base cuadrada con una aproximación considerable. El *papiro Rhind* fue escrito trece siglos antes que *Los Elementos de Euclides*, y ambas obras no son comparables. Sobre el *papiro Rhind* se necesitaron más de un milenio de esfuerzos adicionales para producir *Los Elementos*. No obstante, el papiro Rhind no debe considerarse como un comienzo, sino más bien como una culminación de una evolución muy prolongada.

Los egipcios han dejado con las pirámides un testimonio elocuente de sus posibilidades técnicas y de cálculo. Las grandes pirámides de Gizeh tienen unos 4600 años. Su masa es ahora tan imponente como en la edad en la que se construyeron, hace casi cinco mil años y, con toda probabilidad, sobrevivirán a muchos de nuestros rascacielos. Nuestra admiración aumenta al analizar su realización y apreciar la cantidad de habilidad matemática y técnica utilizada.

También sorprende la medicina egipcia. Imhotep fue un médico ilustrado que floreció unos 2700 años antes de Cristo. Solemos llamar a Hipócrates de Chios el padre de la medicina sin advertir que en el tiempo está situado a mitad de camino entre Imhotep y nosotros. Trece siglos después, en la época del papiro Rhind, encontramos un tratado médico en el papiro Edwin Smith, que no es una colección de recetas y encantamientos, sino un tratado cuyo orden sistemático se ha mantenido hasta la Edad Media.



Contiene cuarenta y ocho casos, cada uno de los cuales sigue el mismo orden: nombre, examen, diagnóstico, juicio, tratamiento y glosa.

Al igual que en Egipto durante la primera dinastía, también en el valle de Mesopotamia había un alto grado de civilización. Las casas y los templos sumerios aparecían decorados con cerámicas y las construcciones seguían diseños geométricos. Se construyeron canales para regar la tierra y controlar las inundaciones. El uso primitivo de la escritura en Mesopotamia nos es conocido por el descubrimiento de tablillas en Uruk que datan de hace unos 5000 años, con la utilización de símbolos estilizados para representar la mayor parte de las cosas. Lentamente se fue reduciendo el número de símbolos. De los iniciales 2000 signos sumerios sólo quedaron la tercera parte cuando se produjo la conquista por los acadios, y los primitivos dibujos ya se habían transformado en combinaciones de cuñas, naciendo la escritura cuneiforme.

Durante la primera época de la civilización sumeria se representaba una unidad (diez unidades) presionando oblicua (verticalmente) con el estilo fino sobre la arcilla. La misma operación con el estilo grueso servía para representar el 6 y el 60. Se han encontrado miles de tablillas en la época de la dinastía de Hammurabi (1800–1600 antes de Cristo) que muestran un sistema de numeración de base 60 completamente desarrollado, que facilitaba la división en 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 ó 30 partes iguales. Este sistema sigue utilizándose en medidas del tiempo y de ángulos. Su gran descubrimiento fue la utilización de la numeración posicional, dando diferente valor a las cifras según la posición ocupada, que también extendieron a las fracciones, en una especie de representación sexagesimal de las fracciones.

Los babilonios consiguieron gran eficacia como calculistas debido a su sistema de numeración posicional y a los algoritmos eficaces que inventaron. Manejaban las operaciones aritméticas fundamentales de manera no muy distinta a como las utilizamos hoy. Les debemos, por ejemplo, el método manual de obtener raíces cuadradas, sustituido, a veces, por los escribas por tablas que les daban aproximadamente potencias, raíces cuadradas y cúbicas. También se han encontrado tablillas cuneiformes que contienen tablas de multiplicar y tablas de inversos que permitían reducir la división a la multiplicación. Utilizaban ya interpolación en las tablas.

Los babilonios adelantaron a los egipcios en el álgebra, pues sabían como resolver las ecuaciones de segundo grado. Disponían de tablas que daban n^3+n^2 para resolver $x^3+x^2=c$, y sabían reducir a esta forma la ecuación $ax^3+bx^2=c$, mediante el cambio $x=by/a$,.

Conocían también la relación que luego se llamó de Pitágoras, pues en la tablilla 322 de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia aparecen cocientes de ternas pitagóricas del tipo p^2-q^2, 2pq y p^2+q^2 que no son más que algunas de las razones trigonométricas que empleaban para hallar longitudes de lados y áreas de triángulos. Por el contenido de otras tablillas parece que también conocían la suma de una progresión geométrica, así como la suma de los cuadrados de los números naturales.

En 1936 se desenterró en Susa, trescientos kilómetros al este de Babilonia, unas tablillas que en una lista y con notación sexagesimal dan razones de áreas y cuadrados de lados (1;40, 2;37, 30, 3;41 para el pentágono, hexágono y heptágono regulares). Tenían claro el concepto de razón de semejanza, así como que entre áreas la razón de semejanza era el cuadrado de la razón lineal de semejanza. El mismo escriba da 0;57, 36 como relación entre el perímetro del hexágono regular y la longitud de la circunferencia circunscrita, de lo que se deduce 25/8 como aproximación decimal del número π.

Los babilonios conocieron relaciones geométricas importantes, como el teorema de Thales, quien vivió más de mil años después de las época en que los babilonios comenzaron a utilizarlo, lo que hace dudar de la transmisión de su saber a los griegos. También conocieron bastantes áreas y volúmenes, si bien utilizaban fórmulas aproximadas, y como los egipcios no acotaban el error.

Se ha dicho que las matemáticas egipcia y babilonia no muestran formulaciones generales y abstracciones. Respecto a la primera observación conviene apuntar que los cientos de problemas de tipos parecidos que aparecen en las tablillas cuneiformes babilónicas parecen ser ejercicios que debían resolver los escolares, siguiendo ciertos métodos conocidos o reglas generales. El comentario de la falta de abstracción de estas matemáticas se debe a que los documentos están referidos a casos concretos, si bien en los problemas mesopotámicos se pueden interpretar las palabras “longitud” y “anchura” como las letras x e y de nuestras ecuaciones, lo que indica que algunos escribas pudieron haber recorrido el camino que lleva de ejemplos concretos a abstracciones más generales.

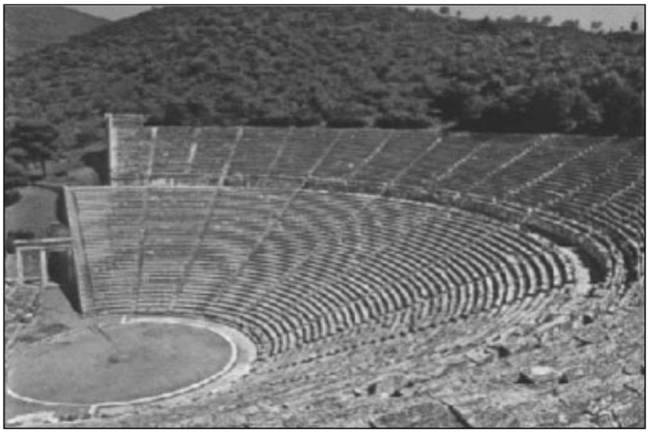
EL MILAGRO GRIEGO

De todo lo que precede se deduce que un cuerpo considerable de conocimientos sistematizados fue muy anterior a la ciencia griega. Esto ayuda a explicar el milagro de la civilización griega. Nadie puede leer la *Ilíada* y la *Odisea*, primicias de la civilización griega, sin preguntarse qué fue lo que hizo posible tales obras maestras, pues no aparecen relámpagos en un cielo sin nubes. Todo glorioso comienzo enlaza con la culminación de otra época anterior brillante, ansiosamente buscada por todos los estudiosos de la matemática, astronomía o medicina griegas. Parece claro que los griegos tomaron una gran cantidad de observaciones y teorías no clarificadas de los egipcios y de los pueblos de Mesopotamia. Desafortunadamente, es apenas posible describir la transmisión completa de elementos desde Egipto hasta Grecia, debido, en parte, a los acontecimientos revolucionarios ocurridos hacia principios del primer milenio conectados con el uso del hierro, en lugar del bronce y que casi borraron la cultura egea más antigua. Sería una gran ayuda el que se llegase a descifrar los textos minoicos y micénicos, pero no es probable que podamos conocer todos los hechos ocurridos debido a que la introducción de la edad de hierro supuso un cataclismo de una magnitud y destrucción extraordinarias.

Nos encontramos ante una laguna de más de mil años entre la edad de oro de la ciencia egipcia y la edad de oro de la ciencia griega. Se puede estar casi seguro que muchos de los conocimientos griegos fueron tomados de fuentes orientales, pero no sabemos dónde ni cómo se realizó el préstamo.

Por ejemplo, los ritos de incubación practicados en la Esculapia griega derivan con toda probabilidad de modelos egipcios. Gracias a esos ritos se concentraron en los famosos templos de Epidauro y Pergamo, Cos y Cnido gran cantidad de observaciones clínicas, necesarias para hacer inducciones científicas en Medicina. Sin esos datos el progreso de la medicina griega hubiese sido mucho más lento. Esos datos contribuyeron a la gran riqueza de la colección hipocrática, que debe ser considerada continuadora de la tradición egipcia.

La astronomía griega fue en gran parte de origen babilonio, aunque también se inspiró en modelos egipcios. Parece que no fue Hiparco el primero en descubrir la precesión de los equinoccios, sino el astrólogo babilonio Kidinnu alrededor del año 343 antes de Cristo.



La persistencia de las influencias egipcia y babilónica en la aritmética griega es muy notable. La expresión de las fracciones como suma de fracciones de numerador uno y el uso de un símbolo especial para 2/3 se debe a la imitación de los egipcios. La utilización de las fracciones sexagesimales la deben a los babilónicos.

Cuando se habla del milagro griego, referido a ese florecimiento espectacular de las ciencias y de las artes, se está confesando la ignorancia respecto a las fuentes que generaron la sabiduría griega. Los orígenes son aún más oscuros en ciencia que en arte, pues hay esculturas egipcias de las dinastías más antiguas que no son nada inferiores a las mejores producciones griegas. En cambio entre el escriba Ahmos, que copió el *papiro Rhind*, y Euclides, autor de *Los Elementos*, existe una diferencia enorme que ha llevado, un tanto

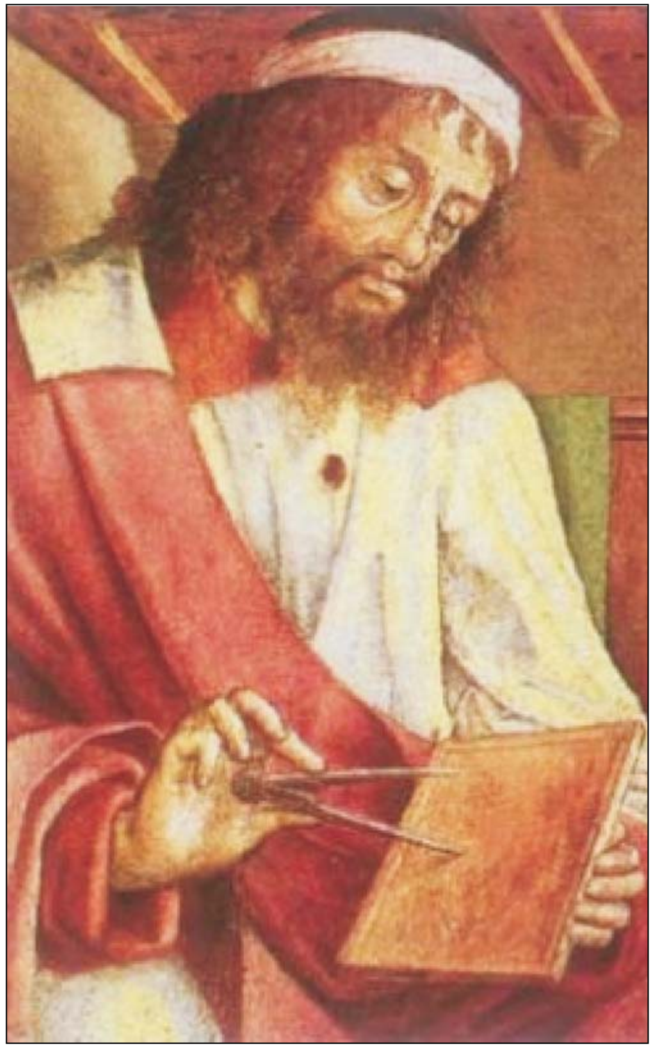
sin razón, a algunos críticos a negar la naturaleza científica de la matemática egipcia considerándola como un conjunto de recetas.

Aunque ignoramos lo ocurrido entre los siglos XVII y VI antes de Cristo parece razonable admitir que los conocimientos egipcios irían mejorando. Hay quien supone que las principales mejoras no debieron estar a cargo ni de los egipcios ni de los minoicos o micénicos, sino de los griegos, que elevaron la ciencia a un alto nivel.

El espíritu de la ciencia griega que realizó tales maravillas en un período de casi cinco siglos y cuyos triunfos constituyen el orgullo de los científicos modernos es, esencialmente, lo que conocemos como el espíritu occidental. Sería injusto no recordar que los fundadores de aquella ciencia griega fueron orientales, por lo que no tenemos derecho a desdeñar al padre egipcio y a la madre mesopotámica del genio griego.

Mientras el genio griego fue creando lo que podría llamarse el comienzo de la ciencia moderna (en oposición a la ciencia egipcia por un lado y a lo que luego sería la ciencia medieval por otro lado) los profetas hebreos establecían la moral basada sobre la noción de un Dios único.

Estos dos desarrollos fueron totalmente independientes, pues procedieron durante siglos en la casi completa ignorancia mutua. Sólo se unieron al final de los tiempos antiguos, y su unión se cimentó sobre los



cuerpos postrados de las dos civilizaciones que les habían dado nacimiento.

CAÍDA DEL ESPÍRITU GRIEGO

Después de haber hecho tantas conquistas el espíritu griego se detuvo. Muchos sentimos que si ese espíritu hubiese conservado su valor durante unos pocos siglos más, el progreso humano se hubiese acelerado notablemente y el curso de la civilización hubiese sido muy diferente.

Si un hombre hiciese su mejor obra a los veinte años y permaneciese estéril el resto de su vida diríamos que su talento fracasó, pero esta explicación, que puede valer a nivel individual, no tiene sentido para una nación.

En Grecia ocurrió que la actividad intelectual de su pueblo no estaba ni remotamente en proporción con su saber político y su moralidad. Fue semejante a una casa con malos cimientos que pronto se derrumba quedando inhábil para cualquier actividad. Además de la ciencia griega también desaparecieron su arte y su literatura. Grecia dejó de existir como nación por su pereza política e inmoralidad, mostrada por Eurípides al escribir: "*Bendito sea quien ha logrado el conocimiento científico, quien no busca las turbulencias ciudadanas, ni se precipita en las acciones injustas, sino que contempla el orden eterno de la naturaleza inmortal, cómo se ha constituido, cuándo y por qué* ... "

Grecia fue conquistada por Roma. El amor desinteresado por la verdad, que es la fuente misma del conocimiento, fue ahogado por el utilitarismo romano. Es cierto que a lo largo del tiempo Grecia conquistó a sus conquistadores, pero el espíritu antiguo fue subyugado y la ciencia romana, hasta la de sus mejores días, no fue sino un pálido reflejo de la griega. Los romanos temieron a la investigación desinteresada y desalentaron cualquier investigación cuyo valor utilitario no fuera de una evidencia inmediata.

La estrechez mental de los romanos primero y la ignorancia bárbara después consiguieron debilitar cada vez más la conexión con la cultura griega, entonces la única fuente de conocimiento. Hasta en el imperio bizantino, donde no existía barrera lingüística para la transmisión de la ciencia antigua, gran parte de ésta quedó ignorada por completo. Esto es tan cierto que en los siglos XIII y XIV, cuando el mundo latino ya había despertado, los eruditos bizantinos preparaban la restauración científica retraduciendo del árabe y del latín escritos que eran traducciones del griego o pobres imitaciones de esas traducciones. La indigencia intelectual bizantina era tal que ya no reconocían la obra de sus antecesores.

LA INVASIÓN ÁRABE

La primera ola de sabiduría vino de oriente, concretamente de Egipto y Mesopotamia y floreció en Grecia. El cristianismo también vino de oriente, de Israel en este caso, pero el contacto entre la antigua Grecia y la cristiandad occidental acabó por ser tan precario que se hubiera roto de no haber intervenido otro pueblo oriental: los árabes. Vamos a describir como la tercera ola de sabiduría vino de Arabia y de Persia.

El profeta Mahoma nació en la Meca hacia el año 570. Entonces Arabia estaba habitada por nómadas del desierto, los beduinos, que no sabían leer ni escribir. Mahoma conoció comunidades cristianas y judías en sus viajes conduciendo caravanas, Su mente fusionó diversos sentimientos religiosos que le llevaron a considerarse un profeta enviado por Dios a su pueblo para dirigirlo. Alrededor del 610 comenzó su predicación en la Meca como una nueva encarnación de los profetas judíos. Durante diez años, y con poco éxito predicó su doctrina en la Meca. Al verse amenazado por un complot se trasladó a Medina en el 622. Esta huida se conoce como la Hégira y señala el comienzo de la Era Mahometana, que iba a ejercer una poderosa influencia, a la que no fue ajena la Matemática.

Su éxito en Medina fue tan extraordinario que se convirtió en un líder militar y religioso que formó un estado mahometano con capitalidad en La Meca. Murió repentinamente en Medina el año 632, mientras planeaba atacar el Imperio Bizantino. Su muerte no fue obstáculo para la extensión del estado islámico, había logrado unir a las tribus árabes e inspirarles un gran fervor que les permitiría conquistar el mundo. Damasco fue tomada en el 635, Jerusalén en el 637, la conquista de Egipto se terminó en el 641 con la toma de Alejandría, centro matemático del mundo en los últimos mil años, y la destrucción de algunos tesoros documentales de la que había sido la mayor biblioteca del mundo. La conquista de Persia, al año siguiente, puso a los árabes en contacto con la refinada cultura iraní. Cuando en el año 712 conquistaron España, los seguidores del profeta gobernaban una ancha zona del mundo que se extendía desde el Asia central hasta el lejano Occidente.

Durante más de un siglo los conquistadores árabes lucharon entre sí y con sus enemigos hasta que hacia el año 750 el espíritu guerrero cedió y surgió un cisma entre los árabes de Occidente que ocupaban España y Marruecos y los árabes de Oriente que, bajo el califa Al-Mansur, habían establecido su capital en Bagdad. Esta ciudad pronto iba a convertirse en el centro mundial del desarrollo de la matemática debido a la combinación de varias fuerzas: El fanatismo musulmán, su curiosidad e interés por la cultura, el deseo de los árabes de asimilar las civilizaciones que habían invadido y la pasión por el conocimiento que demostraron los califas al-Mansûr, Hârûn al-Rashîd y al-Ma`mûn, bajo cuyos mandatos la nueva civilización se desarrolló con increíble velocidad y eficacia. Se llama "milagro árabe" a la celeridad con que asimilaron la cultura de sus vecinos en cuanto empezaron a saborearla y no se debe olvidar el escaso bagaje intelectual con que los árabes comenzaron sus conquistas.

Sus tutores persas les incitaban a beber hasta saciarse en las antiguas fuentes del saber sánscrito y griego. De los hindúes aprendieron aritmética, álgebra, trigonometría, y química; de los griegos, lógica, geometría, astronomía y medicina. Hacia el 766 llegó desde la India el *Sindhind*, obra astronómico-matemática traducida al árabe sobre el 775. Poco después, sobre el 780, se tradujo del griego el *Tetrabiblos*, tratado astronómico de Ptolomeo.

De inmediato se dieron cuenta de la inmensidad del tesoro griego y no descansaron hasta que la proporción que les fue accesible se tradujo al árabe.

En esta empresa recibieron ayuda de los sirios y de otros súbditos cristianos del califato que hablaban griego y árabe. Estos cristianos orientales habían sido tratados con desprecio por el gobierno bizantino, por lo que su prontitud en auxiliar a sus conquistadores no fue una sorpresa. Eran poliglotas natos. Los sirios, por ejemplo, hablaron con tal rapidez el árabe que este nuevo idioma reemplazó al propio. Ellos prepararon las más antiguas traducciones del griego al árabe, iniciando a sus dominadores en el conocimiento del griego.

La nueva cultura se extendió como fuego en el rastrojo desde Bagdad hasta la India por el oriente, y por el occidente hasta el confín del mundo.

La mayoría de la población del imperio islámico compartía el lenguaje árabe y la fe del Islam, gozando judíos y cristianos de gran tolerancia, como lo prueba que griego y hebreo eran idiomas también utilizados. La religión y el idioma fueron vínculos unificadores de

la cultura árabe, cuya extensión produjo necesariamente muchas variedades, pues los musulmanes entraron en contacto con chinos, mongoles, malayos e hindúes; más hacia el occidente con zoroastras, sirios griegos, coptos, bereberes en África, sicilianos, españoles y otros francos en el sur de Europa, y con judíos por todas partes, asimilando con rapidez la cultura de los pueblos conquistados, como en particular sucedió con los andalusíes. El grado de uniformidad cultural no resultaba alto, pues siempre hubo en el mundo árabe una división muy sensible en facciones que, a veces, desembocó en conflictos. También estas diferencias se notaron en la matemática árabe: unos utilizaban los números hindúes, llegados con la obra astronómica del *Sindhind*, otros adoptaron el sistema de numeración griego alfabético, con las letras árabes sustituyendo a las correspondientes griegas. Se impusieron los números hindúes, por lo que sería más correcto llamar a nuestro sistema de numeración hindú, o a lo sumo hindú-árabe.

Un deber del musulmán ilustrado era la lectura del *Corán* en árabe. Esta obligación y el vigor de la nueva cultura llegó a convertir al árabe en un idioma universal. Inicialmente la lengua árabe era muy bella, pero no estaba preparada para recibir la traducción de los tesoros griegos. Por tanto, hubo de ser enriquecida a medida que fue avanzando la tarea de traducir las obras griegas al árabe. En un par de siglos verdaderas multitudes estaban familiarizadas con el árabe, lengua desconocida para sus antepasados, incluso en muchas ocasiones para sus padres. Desde mediados del siglo VIII hasta fines del XI, los pueblos de habla árabe, incluyendo en sus filas una gran cantidad de judíos y cristianos, marchaban a la cabeza de la humanidad. Gracias a ellos el árabe no sólo llegó a ser el sagrado idioma del *Corán*, sino el idioma internacional de la ciencia y el vehículo del progreso humano. Hasta el siglo XII el árabe fue el idioma filosófico y científico de los judíos; la *Guía de los Perplejos*, que es el gran tratado judío de la Edad Media, fue escrita por Maimónides en árabe. Los judíos medievales estaban tan profundamente arabizados que necesitaban la ayuda del árabe para el estudio científico de su propia lengua sagrada, como lo demuestra el hecho de que las primeras gramáticas hebreas se compusieran en árabe y no en hebreo.

Después de dos siglos de gobierno del Islam por los califas omeyas y abbâsies se fue fragmentando el califato en un número creciente de reinos independientes de todos los tipos y tamaños. En lugar de uno o dos centros de cultura, como Bagdad y Córdoba, surgió poco a poco toda una serie: Ghazna, Samarquand, Marv, Herat, Tûs, Nîshâpur, Ray, Isfahân Shiraz, Mûsul, Damasco, Jerusalén, Cairo, Qairawân, Fâs, Marrâkush, Toledo, Sevilla, Granada, etc. La desintegración política se tradujo en diversas rivalidades entre las diferentes cortes, de las que no quedaron excluidas las intelectuales, si bien la obligación de todo musulmán de realizar la peregrinación a la Meca provocó incesantes comunicaciones entre las distintas partes del Islam y originó incontables reuniones de sabios procedentes de las más alejadas comarcas. Muchos sabios musulmanes realizaron la peregrinación a la Meca más de una vez, con largas estancias en las principales ciudades de la ruta, renovando contactos con colegas, copiando manuscritos o componiendo sus propias obras.

La desintegración del califato produjo que después del siglo XI la lengua árabe perdiese su hegemonía, pero continuó siendo muy importante y aún en nuestros días es uno de los idiomas más difundidos. A diferencia del latín, que se descompuso en distintas lenguas romances, el árabe sólo se fragmentó en formas dialectales cuya utilización escrita sigue aproximándose al patrón clásico de la lengua árabe, gracias a la obligación de todo musulmán letrado de tener algún conocimiento de árabe clásico para poder leer el *Corán*. El paradigma de la excelencia para todo escritor árabe es el que ofrece el *Corán* y los grandes autores de la edad clásica.

De esta forma, y con el auxilio del idioma común, el conocimiento científico adquirido en cualquier parte del Islam se transmitía con asombrosa celeridad a las demás, con el constante intercambio de nuevos estímulos.

Los intelectuales árabes no sólo transmitieron los conocimientos antiguos, sino que crearon nuevos. Es cierto que ninguno de estos alcanzó las altas cumbres del genio griego, pero fue el movimiento más creador de la Edad media hasta el siglo XIII. Los científicos árabes elaboraron el álgebra y la trigonometría sobre bases greco–hindúes; reconstruyeron y desarrollaron un poco la geometría griega; reunieron abundantes observaciones astronómicas y sus críticas al sistema de Ptolomeo prepararon la reforma astronómica del siglo XVI; enriquecieron nuestra experiencia médica; fueron los iniciadores de la química moderna; mejoraron los conocimientos de óptica, de meteorología y de medición de densidades; sus investigaciones geográficas se extendieron de un confín al otro del mundo; publicaron crónicas de muchos países civilizados y al bereber Ibn Khaldûn se debe una filosofía de la historia que es la más original y completa de toda la Edad Media.

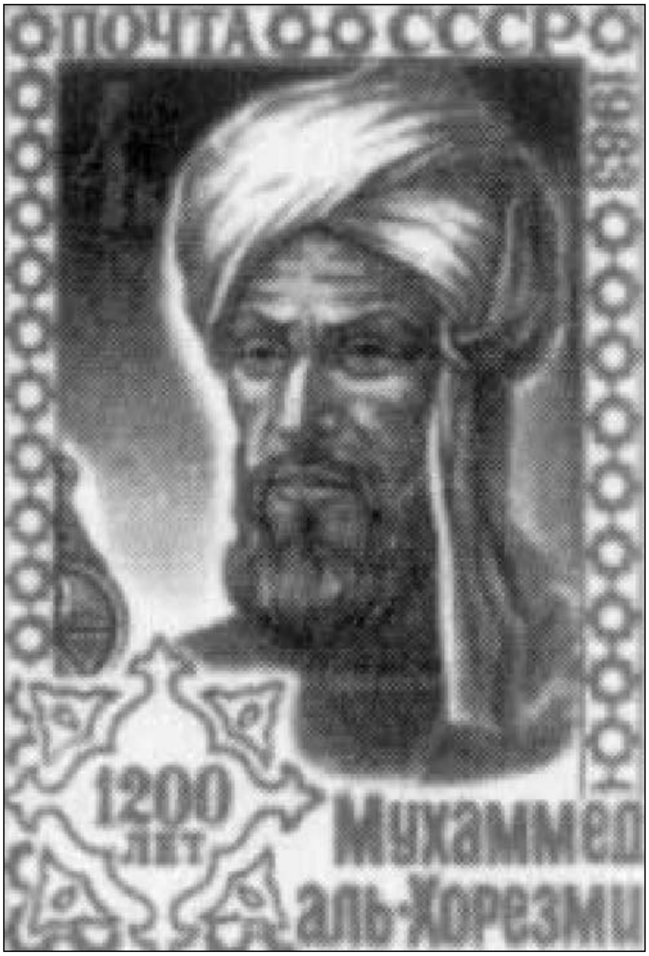
LA CASA DE LA SABIDURÍA

Entre el 650 y el 750 no hubo producción matemática. Los árabes aún no tenían el impulso intelectual necesario y en el resto del mundo había desaparecido el interés por el saber. A partir de la segunda mitad del siglo VIII se produce el despertar cultural en el Islam y son llamados a Bagdad sabios de Siria, Irán y Mesopotamia, incluidos judíos y cristianos. Como hemos indicado bajo los califatos de los tres grandes protectores abbasies de la cultura, Al.Mansur, Haroun Al-Raschid y Al-Mamun, se convirtió Bagdad en una nueva Alejandría.

Durante el califato del segundo de ellos, conocido por los cuentos de *Las mil y una noches,* se tradujo al árabe parte de la obra de Euclides. En el califato de Al-Mamun[1] se tradujeron al árabe muchas de las joyas de la antigüedad, como el *Almagesto* de Ptolomeo, y una versión completa de *Los Elementos* de Euclides.

Al-Mamun fundó en Bagdad la Casa de la Sabiduría, comparable al antiguo Museo de Alejandría. Era una especie de Universidad en la que estuvo Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi, matemático y astrónomo que iba a hacerse, junto con Euclides, muy

[1] Dice una tradición que al Califa tuvo un sueño en el que se le apareció Aristóteles y decidió traducir al árabe todas las obras griegas que se tuvieran a mano.



popular en la baja Edad Media. Murió antes del 850 y escribió una docena de libros, basados en el hindú *Sindhind*, que versaron sobre el astrolabio, el reloj de sol, aritmética y álgebra.

En el primero de los dos libros sobre aritmética y álgebra, del que sólo se conserva la traducción latina "*De numero indorum*" ("Sobre el arte de calcular hindú"), dio una exposición completa del sistema de numeración hindú, responsable de la extendida y falsa creencia de que nuestro sistema de numeración es de origen árabe. De su nombre deriva la palabra "*algoritmo*", que significa procedimiento operativo para resolver un problema.

De otra obra de Al-Khowarizmi, *Al-jabr wa'l muqäbalah*, aprendería más tarde Europa la parte de la matemática que lleva ese nombre. Contiene una exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente las de segundo grado. Es de admirar en Al-Khowarizmi el eclecticismo árabe, pues el sistema de numeración que utiliza es el hindú, la resolución sistemática de las ecuaciones de segundo grado puede haber sido un desarrollo procedente de Mesopotamia, y el marco geométrico y lógico con que justifica sus soluciones tiene origen griego.

Esta obra de Al-Khowarizmi representa para el *Álgebra* lo mismo que *Los Elementos* para la *Geometría*, debido a haber sido la mejor exposición elemental de álgebra conocida hasta tiempos modernos. Su único defecto era la necesidad de desarrollar una notación simbólica para reemplazar la forma retórica en que está escrita.

Recientemente se ha encontrado en Turquía un manuscrito de Abd Al-Hamid Ibn-Turk titulado "*Sobre las necesidades lógicas en las ecuaciones mixtas*" tal vez anterior al de Al-Khowarizmi y de contenido similar, lo que hace suponer que en la época en que aparecieron esos dos libros el álgebra ya no era un fenómeno tan reciente como muchas veces se ha querido suponer.

THABIT IBN-QURRA

El siglo IX fue muy importante para la matemática árabe, pues además de Al-Khowarizmi en su primera mitad produjo a Thabit Ibn-Qurra (826–901) en su segunda mitad. Si el primero puede ser comparado a Euclides, en cuanto productor de "*Los Elementos*", el segundo es comparable a Pappus, como comentarista de *matemática avanzada*. Fue el fundador de una importante escuela de traductores desde el griego y el sirio. Le debemos la traducción al árabe de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Eutocio, impidiendo así que fuese menor el número de obras griegas que han llegado hasta nosotros.

Thabit asimilió de forma tan completa las obras que traducía que sugirió modificaciones y generalizaciones importantes. Se le debe una fórmula notable para los números amigos[2]. Ibn-Qurra, lo mismo que antes

[2] Si $p = 3\times 2^n - 1$, $q = 3\times 2^{n-1} - 1$ y $r = 9\times 2^{n-1} - 1$, entonces $2^n pq$ y $2^n r$ son números amigos, es decir cada uno de ellos es la suma de los divisores primos del otro.

había hecho Pappus, da una generalización del teorema de Pitágoras a todos los triángulos, otra demostración del teorema de Pitágoras, resultados sobre segmentos de parábolas y paraboloides, trisecciones de ángulos, nuevas teorías astronómicas, una discusión de los cuadrados mágicos y nuevas teorías astronómicas, añadiendo una novena esfera a las ocho que se utilizaban en las versiones simplificadas de las teorías astronómicas de Aristóteles o de Ptolomeo.

También puso en cuestión diversas cuestiones de la astronomía griega, preparando así la revolución copernicana.

ESCUELAS MATEMÁTICAS ÁRABES EN LOS SIGLOS X Y XI

En la trigonometría árabe hubo competencia inicial entre la basada en la geometría de las cuerdas, tal como aparecía en la obra griega Almagesto de Ptolomeo, y la basada en las tablas de senos hindúes, como las que aparecen en el Sindhind. El conflicto también se resolvió a favor de la postura hindú, por lo que la mayor parte de la trigonometría se construyó basada sobre la función seno.

La trigonometría llegó a Europa a través de los árabes, gracias al libro de Albategnius (en árabe, Al-Battani 850–929) *Sobre el movimiento de las estrellas*, donde utiliza para el triángulo rectángulo la relación $b = c \operatorname{sen}(90 - C)/\operatorname{sen} C$.

Un poco más tarde, con Abu'l-Wefa aparece en Bagdad la tangente y las ideas básicas sistemáticas de la trigonometría moderna. También se le debe la formulación del teorema del seno para triángulos esféricos.

Con todo no debemos atribuir a Abu'l-Wefa la función tangente, pues en la India y en Arabia se utilizaba una teoría de longitudes de sombras: La sombra horizontal proyectada por una varilla de longitud unidad es lo que conocemos como cotangente. La sombra proyectada sobre una pared vertical por una varilla fijada perpendicularmente a la pared nos daría la función tangente.

Abu'l-Wefa también se ocupó del Álgebra y se le debe la traducción desde el griego de la Aritmética de Diofanto, que le permitió a su sucesor, Al-Karkhi convertirse en el discípulo árabe de Diofanto. Aunque siguió la costumbre árabe de dar demostraciones

geométricas para la resolución de ecuaciones cuadráticas no se limitó a ellas y se le atribuye la primera resolución numérica de ecuaciones de la forma $ax^{2n} + bx^n = c$. Es en esta dirección de intentar resolver de manera algebraica, por medio de radicales, las ecuaciones de grado mayor que dos, en la que iban a tener lugar los primeros desarrollos de la matemática en el Renacimiento.

En Persia destacó Ibn- Sina (980–1037), conocido en occidente como Avicena. Fue el sabio enciclopédico más importante del Islam, con un papel muy destacado en medicina y filosofía. Hizo una traducción de *Los Elementos* de Euclides y obtuvo importantes aplicaciones de la matemática a la astronomía y a la física. Dio una explicación de la regla de los nueves, por lo que se le atribuye a veces indebidamente su descubrimiento. Avicena supone la definitiva reconciliación del saber griego con el pensamiento islámico.

Al-Biruni (973–1048) fue un viajero infatigable y un pensador crítico que familiarizó a los árabes con la cultura India por medio de su libro *La India*. Da una descripción muy interesante del principio posicional del sistema de numeración, expone que Arquímedes ya conocía la fórmula de Herón, da una demostración de esta fórmula y de una análoga de Brahmagupta para el cuadrilátero, insistiendo que sólo tiene validez para los cuadriláteros cíclicos. Reduce el problema de inscribir el eneágono a la resolución de la ecuación $x^3 = 1 + 3x$, que resuelve aproximadamente por la fracción sexagesimal 1; 52, 15, 17, 13. Le debemos una interesante discusión sobre el posible giro de la Tierra alrededor de su eje, así como estudios sobre pesos específicos y pozos artesanos.

En el Cairo existió una espléndida escuela en la que destacó el gran astrónomo Ibn Yunus a quien la Matemática le debe la fórmula de transformación de productos de cosenos en sumas, tan utilizada antes de la invención de los logaritmos neperianos. Pero la figura más destacada de El Cairo fue el físico Ibn Al-Haitham (965–1039), conocido en Occidente como Alhazen, a quien se debe *La Óptica*, inspirado en la obra de Ptolomeo sobre reflexión y refracción, donde estudió la estructura del ojo, explicó el aparente aumento del tamaño de la luna al acercarse al horizonte y estimó la altura de la atmósfera por la observación de que el crepúsculo dura hasta que el sol está

unos 19 grados por debajo del horizonte. Extendió resultados de Arquímedes sobre conoides y volúmenes.

Una pregunta natural es indicar que había en Occidente durante el siglo XI. Sólo encontramos desdichados tratados sobre el calendario y sobre el uso del ábaco. La correspondencia entre los buenos calculistas Ragimbold de Colonia y Radolf de Lieja hacia finales del siglo XI es lamentable, pues muestra que su geometría estaba en un nivel prepitagórico.

La superioridad de la cultura árabe en el siglo XI era tan grande que nos explicamos su orgullo intelectual, que alcanza el máximo cuando la decadencia está próxima. En efecto, cuando la gente se envanece demasiado de su cultura es, o porque es tan reciente que aún no se ha acostumbrado a ella, o bien, por el contrario, porque se encuentra ya en decadencia y trata de ocultar su incompetencia bajo el cúmulo de las hazañas pasadas. La superioridad árabe atrajo la producción de otras confesiones y razas, cuyos científicos y literatos, como ya se ha indicado, fueron bien tratados en general. Algunos de ellos, como el judío Hasdai ibn Shaprut de Córdoba, alcanzaron posiciones de autoridad.

NUEVOS HORIZONTES MATEMÁTICOS

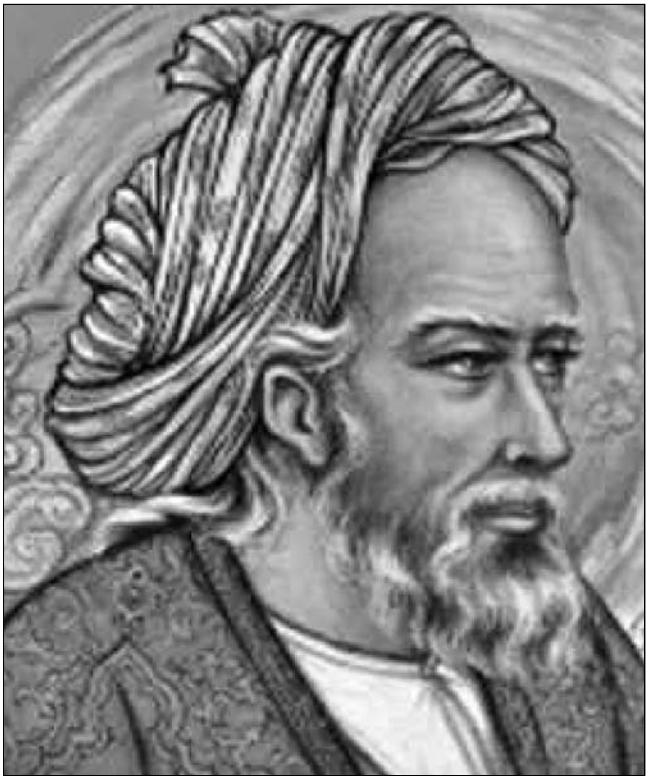
Por lo que llevamos expuesto, la matemática árabe comprendía:

- Una aritmética basada en el principio posicional que probablemente provenía de la India.
- Un álgebra con orígenes en Grecia, India y Babilonia que adoptó una forma nueva y sistemática en manos de los árabes.
- Una trigonometría proveniente de Grecia e India. Por esta última se inclinaron los árabes, ampliándola con nuevas funciones y relaciones.
- Y una geometría de corte griego que los árabes enriquecieron con generalizaciones y estudios críticos relativos al axioma del paralelismo, como vamos a exponer a continuación.

Un siglo después de Alhazen vivió en Persia el fabricante de tiendas Omar Khayyam (1050–1123), conocido en el Este como cientifico y en Occidente recordado como uno de los más grandes poetas persas. En su obra Álgebra extendió la teoría de Al-Khowarizmi incluyendo las ecuaciones cúbicas, de las que pensaba que no podían resolverse geométricamente con regla y compás por el cubo que contenían, siendo necesario usar intersecciones de cónicas, como ya habían hecho antes Menecmo, Arquímedes y Alhacen. Para resolver $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sustituye x^2 por $2py$, obteniendo la hipérbola $2pxy + 2apy + bx + c = 0$. Las soluciones reales de la ecuación cúbica vienen dadas por las intersecciones de esta hipérbola con la parábola $x^2 = 2py$.

Omar Khayyam siguió la tradición árabe de buscar soluciones aritméticas y geométricas de las ecuaciones algebraicas, pero se puso en el camino de cerrar el abismo entre el álgebra numérica y geométrica, que culminaría Descartes. Omar Khayyam escribió que "*cualquiera que piense que el Álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de las incógnitas piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho de que el álgebra y la geometría son en apariencia diferentes. Los hechos del álgebra son hechos geométricos que están demostrados*".

Al reemplazar la teoría de proporciones numéricas de Euclides por un planteamiento numérico, Omar



Khayyam se acercó a la definición de número irracional, siendo un antecedente de la introducción del número real. Por un comentario que hace en su Álgebra, referente a otro de sus libros perdido, parece que conocía el hoy llamado triángulo de Pascal para la obtención de potencias de sumas, descubierto también en China por esa época. Parece que se trata de dos descubrimientos independientes dado que entonces la comunicación entre China y Arabia se reducía a la ruta de la seda.

El intento de demostrar el quinto postulado de Euclides ejerció especial fascinación sobre los árabes. Este intento ya se había convertido para los griegos en "*el cuarto famoso problema de la geometría*". Alhazen intentó demostrarlo considerando un cuadrilátero trirrectángulo, llamado hoy cuadrilátero de Lambert en honor al matemático del siglo XVIII que lo estudió sistemáticamente. Alhazen creyó haber demostrado que el cuarto ángulo debía ser también recto, de lo que deducía la prueba del quinto postulado de Euclides. Pero en esa demostración, Alhazen supuso que el lugar geométrico de un punto que se mueve permaneciendo a distancia constante de una recta es otra recta paralela a la dada, lo que se ha demostrado modernamente que es equivalente al postulado de Euclides.

Omar Khayyam criticó la demostración de Alhazen basándose en que Aristóteles había excluido el uso del movimiento en geometría. Omar Khayyam partió de un cuadrilátero con dos lados iguales y perpendiculares a su base, llamado hoy día "cuadrilátero de Saccheri" en honor del matemático del siglo XVIII que investigó las posibilidades que pueden darse con los dos ángulos superiores, necesariamente iguales: 1) que sean agudos, 2) obtusos o 3) rectos. Los dos primeras posibilidades las excluye Omar Khayyam basándose ene que dos rectas convergentes deben contarse, principio que atribuye a Aristóteles y que supone una nueva hipótesis equivalente al postulado del paralelismo de Euclides.

LA DECADENCIA EN LA MATEMÁTICA ÁRABE

Cuando en 1123 murió Omar Khayyam la ciencia árabe se encontraba ya iniciando un período de decadencia. Los excesos de división política y religiosa en numerosas sectas, a veces fanáticas –como lo ilustra muy bien el origen de nuestra palabra "*asesino*", proveniente de la secta de los *hasisyyun* consumidores

de *hasis* (o *assassins*), situada alrededor del 1100– podrían estar entre las causas de la decadencia no sólo de la ciencia árabe sino de todo el Islam que en los siglos XII y XIII había perdido su vigor, en tanto que la cristiandad había advertido la riqueza del saber greco-árabe y hacía gigantescos esfuerzos para compartirlo.

La decadencia no pudo impedir que grandes eruditos y científicos árabes siguiesen apareciendo hasta el siglo XIV y aún más allá, si bien no se alcanzaron los niveles globales de la época de Avicena y de Al-Karkhi. Por ejemplo, matemáticos y astrónomos como Jâbir ibn Aflah, al-Bitrûji, al Hasan al-Marrâkushî, Nâsir Eddin Al Tusi y Al Kashi; físicos como al-Khâzinî, Qutb al-Dîn al-Shîrazî, Kamâl al-Dîn Ibn Yûmus; geógrafos como Yâqût, al-Qazwînî, Abû-l-Fidâ Ibn Batuta; filósofos como Ibn Rushd, Fakhr al-Dîn al-Râzî, Abd al-Latîf; médicos como Ibn Sur e Ibn al Baitâr; botánicos y tratadistas de agricultura como Ibn al.-Sûrî e Ibn al-Awwâm; historiadores como Ibn Khallîkan, Rashîd al-Dîn, Ibn Khaldûn, al-Maqrîzi, etc. Brevemente vamos a describir la obra de dos de ellos: Al Tusi y Al Kashi.

Nasir Eddin Al Tusi (1201–1274), nieto de Gengis Khan, continuó los esfuerzos por demostrar el postulado de las paralelas partiendo de las tres hipótesis posibles del cuadrilátero de Saccheri. Se considera a Nasir Eddin como uno de los precursores de la geometría no euclídea, pues la traducción de su obra por Wallis en el siglo XVII fue el punto de partida de los desarrollos llevados a cabo por Saccheri en el primer tercio del siglo XVIII.

A Nasir Eddin se le debe el primer tratado sistemático sobre trigonometría plana y esférica, exponiéndola como una materia independiente en sí misma y no como una ayuda para la astronomía. Estudió las seis funciones trigonométricas, dando reglas para la resolución de los diferentes casos de triángulos planos y esféricos. También se le debe el intento de reconciliar las cosmologías de Aristóteles y de Ptolomeo, lo que parece llamó la atención de Copérnico.

A principios del siglo XV, ya en plena decadencia de la cultura árabe, nos encontramos con otra figura, Al-Kashi, protegido del príncipe Ulugh Beg, nieto del conquistador mongol Tamerlán. Ulugh Beg estableció

su corte en Samarcanda donde hizo construir un observatorio de cuyo equipo de científicos formó parte Al-Kashi, quien escribió numerosas obras, en árabe y en persa, sobre matemática y astronomía. Destacó por la exactitud de sus cálculos. En la resolución de ecuaciones utilizó un método, llamado hoy de Horner, proveniente de China, de donde también adoptó la utilización de fracciones decimales, para obtener muchas cifras decimales exactas.

Al-Kashi fue un virtuoso cálculista y su aproximación de π mejoró todas las precedentes. El valor dado por Al-Kashi para 2π en forma sexagesimal y en forma decimal es:

6; 16, 59, 28, 34, 51, 46, 15, 50

6,2831853071795865

Hasta finales del siglo XVI nadie igualó la exactitud de esta aproximación.

Tras la muerte de Al-Kashi en 1436 el colapso cultural del mundo árabe fue aún mayor que su desintegración política. El número de matemáticos importantes posteriores a Al-Kashi es irrelevante. Afortunadamente, Europa estaba ya preparada para recibir el legado de la Antigüedad. Es injusto afirmar que los árabes sólo conservaron la ciencia griega en un frigorífico, pues la transmitieron a los occidentales en condiciones mejores que la habían recibido, con importantes incorporaciones hindúes, chinas y propias.

LAS TRADUCCIONES DEL ÁRABE

En cuanto los cristianos advirtieron la importancia de la cultura árabe sintieron la necesidad de traducirla, pues pocos tenían la esperanza de dominar un idioma tan distinto del propio y escrito con caracteres ilegibles y confusos. A finales del siglo XI, Constantino el Africano, tradujo gran número de obras greco-musulmanas del árabe al latín en el monasterio de Monte Casino, donde murió en 1087. Esta actividad lejos de aplacar el hambre de los estudiosos europeos la estimuló considerablemente, al ver los vastos tesoros de conocimiento, saber y experiencia acumulados del pasado.

Durante el siglo XII y la primera mitad del XIII la mayor actividad de los eruditos cristianos consistió en la traducción de tratados árabes al latín. Aparecieron traductores de tal entidad que casi merecen el nombre de creadores, como Adelardo de Bath, Juan de Sevilla, Domingo Gundisalvo, Gerardo de Cremona, tal vez el más famoso de todos, y muchos otros.

A fines del siglo XII el cuerpo principal de los conocimientos greco-árabes ya era accesible a los que leían en latín, pero cuanto más tenían más pedían.

Desde mediados del siglo siguiente poco quedaba de la literatura científica árabe de verdadera importancia que no estuviera ya a su alcance. Estimulados por los escritos árabes muchos traductores se esforzaron en descubrir los originales griegos, y sus traducciones directas del griego siguieron muy de cerca a las del árabe. *Almagesto* fue traducido al latín desde el griego en 1160 antes de ser traducido desde el árabe, trabajo que terminó Gerardo de Cremona en la Escuela de Traductores de Toledo en 1175. La fuerza

de la traducción árabe y el prestigio personal de Gerardo de Cremona hicieron que la primera versión, tal vez más exacta, fuese desalojada por la segunda.

Hasta el siglo XII los judíos que vivían en el Islam eran bilingües. El hebreo era su lengua religiosa y doméstica, pero en lo concerniente a filosofía y ciencia pensaban en árabe. No necesitaban traducciones y poseían secretos del saber que eran, hasta entonces, letra muerta para los cristianos, especialmente en lo referente a enfermedades de la vista estudiadas en tratados árabes.

Pero en el siglo XII la vida científica del judaísmo comenzó a desplazarse desde España a través de los Pirineos. A mediados del siglo XIII gran número de judíos había vivido tanto tiempo en países europeos que el árabe les era un idioma extraño. Hasta entonces los judíos habían estado a la cabeza de los cristianos, pero ahora la situación se invierte debido a que las traducciones del árabe al hebreo eran menos abundantes y por tanto los judíos de Europa occidental que no hablaban árabe no sólo se encontraban en inferioridad política, pues las Cruzadas habían provocado persecuciones antisemíticas, sino también en situación de inferioridad intelectual. Aprendieron latín y pudieron leer las versiones latinas de los textos árabes. Durante el siglo XIV aparecieron traducciones del latín al hebreo.

Hubo ciclos de traducciones aún más curiosos, pues en los siglos XIV y siguientes escritos árabes, persas y latinos, que eran de origen griego, fueron retraducidos al griego. Así sucedió con las *Summulae logicales* de Pedro de España, que fueron traducidas al hebreo y al griego, lengua de su primera edición.

Las traducciones nos permiten apreciar los niveles relativos de las distintas civilizaciones y nos miden su nacimiento y decadencia, pues las corrientes en el mundo intelectual y en el material, nunca fluyen aguas arriba. La masa total de las traducciones permite concluir que en el siglo XII la civilización musulmana declinaba y la judía no seguía el ritmo de expansión de la cristiana.

EL ESPÍRITU EXPERIMENTAL

El siglo XIII trajo los grandes doctores de la cristiandad: Alberto Magno, Roger Bacon, Ramón Llull. Comienza la hegemonía intelectual y política de lo que llamamos mundo occidental, vinculado entonces al cristianismo. Este vínculo se irá debilitando con el desarrollo del espíritu experimental, tal vez la aportación más importante de la Edad Media. En el siglo XVI las distinciones entre ciencia judía, cristiana y musulmana perdieron su razón de ser y sólo conservaron su valor histórico. No debemos considerar a Spinoza como un filósofo judío en el mismo sentido en que lo fueron Maimónides o Levi ben Gershon. El profundo judaísmo de Spinoza y el empleo frecuente de fuentes judías no es obstáculo para reconocer en Spinoza uno de los más nobles representantes del pensamiento humano, no oriental u occidental, sino de ambos.

Oriente y Occidente cooperaron como hermanos en el desarrollo del espíritu experimental, fundamental en la ciencia moderna y del que tan deficiente estuvo el genio griego. Los grandes médicos griegos siguieron instintivamente métodos experimentales, que nunca fueron apreciados en su justo valor por los filósofos u otros estudiosos de la naturaleza. Una historia de la ciencia experimental griega, fuera de la medicina, sería demasiado breve. El espíritu experimental creció de la mano de los alquimistas y ópticos árabes y de los mecánicos y físicos cristianos. Durante siglos se mantuvo débil, pisoteado por filósofos pedantes. La imprenta y el descubrimiento del nuevo mundo aceleró su desarrollo. A comienzos del siglo XVI el espíritu experimental tiene considerable peso, siendo Leonardo de Vinci uno de sus valedores. En el siglo siguiente la física fue admirablemente explicada por otro toscano, Galileo, heraldo de la ciencia moderna.

Una visión amplia de la historia de la ciencia nos llevaría a considerar cuatro períodos principales. El primero consiste en el desarrollo empírico del conocimiento en Egipto y Mesopotamia. El segundo es la construcción de una estructura racional de sorprendente belleza por los griegos. El tercero es el período medieval, con siglos de tanteos cuyo principal fruto fue la incubación del espíritu experimental. Su aparición definitiva señala la transición entre el tercer y cuarto período, que es el de la ciencia moderna. El primero de estos períodos y gran parte del tercero son orientales. El segundo y el cuarto son occidentales. Quienes pretendan exagerar la importancia de Occidente en la formación de la ciencia es posible que no sean científicos y que ni siquiera comprendan lo que es la Ciencia. Desde luego no merecen la superioridad de la que se envanecen.

El espíritu experimental dio paso a incontables e inimaginables descubrimientos y rompió con círculos viciosos donde los filósofos habían girado obstinadamente durante miles de años. Puede resumirse de la siguiente forma:

- Establecer los hechos mediante observaciones directas, frecuentes y cuidadosas, confrontándolos repetidamente entre sí. Los hechos serán las premisas.
- Observar lo que ocurre cuando no se mueven todas las variables que afectan al problema (por ejemplo mover las variables una a una, o por pares, etc).
- Multiplicar los experimentos cuando sea posible, realizándolos con la máxima precisión.

- Establecer las consecuencias en lenguaje matemático. Aplicar los recursos matemáticos en la transformación de las ecuaciones. Obtener el significado de las ecuaciones obtenidas, relacionándolas con la realidad.

En apariencia el método experimental es el más revolucionario de todos los métodos, pues conduce a sorprendentes descubrimientos e invenciones, pero es, al mismo tiempo, esencialmente conservador y cauteloso, pues vacila en extraer conclusiones antes de que su validez no haya sido establecida y verificada de muchas maneras. Produce una evolución de incomparable magnitud, que nos da una idea del poder intelectual del hombre, pero es tan lenta y continuada como la que producen las fuerzas naturales.

El método experimental también tiene dos limitaciones fundamentales: Hay sectores del pensamiento donde puede resultar inaplicable, como el arte, la moralidad. Además pueden ser aterradoras las consecuencias de su mala aplicación.

La unidad de la humanidad incluye Oriente y Occidente, que son dos fases complementarias de la experiencia humana que se encuentran en el alma de todo artista que es más que un artista, y cuyo amor no se limita a la belleza; se encuentran también en el alma de todo científico que ha llegado a la comprensión de que la verdad, por valiosa que sea, no es la totalidad de la vida, y que debe ser completada por la belleza y el amor.

El científico que no es demasiado orgulloso, que no adopta una actitud agresivamente "*occidental*", sino que recuerda la componente de origen oriental de sus pensamientos, incluso de los más elevados, no se avergonzará de sus ideales, será más humano y un mejor servidor de la verdad.

Apéndice: CHINA E INDIA

LA MATEMÁTICA PRIMITIVA EN CHINA

Se han hecho algunas referencias a la matemática China e India e distintos períodos temporales. Eso hace difícil intercalarlas en el texto anterior, por lo que dedicamos este apéndice a resumir estas dos culturas matemáticas.

Las civilizaciones China e India son más antiguas que las de Grecia y Roma y, en general, menos que las que surgieron en los valles de Mesopotamia y del Nilo. Sin embargo, las civilizaciones que tuvieron su cuna en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo son comparables en edad a las que surgieron a lo largo del Nilo o entre el Tigris y el Eufrates. No obstante los registros cronológicos en el caso de China son menos fiables que los que tenemos para Egipto o Babilonia.

Parece que no tiene fundamento científico la afirmación de que los chinos habían descrito los doce signos del Zodiaco en el quinceavo siglo antes de Cristo. Los orígenes de la civilización china se deben situar alrededor del año 1000 a.C.. El *Chou Pei Suan Ching*, considerado el texto chino más antiguo de contenido matemático, fue escrito por varios autores y aunque no está clara su antigüedad es un buen ejemplo de lo que era la matemática china alrededor del 1200 a.C. Contiene cálculos astronómicos, una introducción a las propiedades del triángulo rectángulo y operaciones con fracciones. Está escrito en forma de diálogo entre un ministro que va explicando a su príncipe el fundamento del calendario, indicándole que el arte de los números deriva del cuadrado, de origen humano, y del círculo, de origen divino. Revela que en China, igual que sucedió en Egipto, la geometría nació de la agrimensura. Como sucedió en Babilonia, la geometría china se reducía a un ejercicio numérico de aritmética o de álgebra. También contiene indicaciones del teorema de Pitágoras, tratado algebraicamente.

Casi tan antiguo como el *Chou Pei Suan Ching* son *Los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*, que tiene 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.

A diferencia de los libros griegos de esa época, que eran ya exposiciones sistemáticas con orden lógico, *Los Nueve Capítulos* repiten la costumbre de los babilonios y egipcios de coleccionar problemas concretos. *Los Nueve Capítulos* también recuerdan a la matemática egipcia por el uso de la regla de la falsa posición, si bien la utilización de este procedimiento, así como el origen de la matemática china, parece ser independiente de influencias occidentales.

En el último problema del Capítulo 8 se plantea la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas, siendo el inicio del estudio de los sistemas indeterminados, que va a quedar como uno de los temas favoritos de los pueblos orientales. El interés por los sistemas de ecuaciones también está relacionado con la obtención de los cuadrados mágicos, siendo

4	9	2
3	5	7
8	1	6

uno de los cuadrados mágicos más antiguos conocidos.

En el capítulo 9 aparecen problemas sobre triángulos rectángulos, preguntando determinar la profundidad de un estanque circular de 10 pies cuadrados de superficie, sabiendo que una caña que crece en su centro y se asoma exactamente un pie por encima del agua, alcanza exactamente la superficie si se la dobla hasta el borde del estanque. Otro problema dice que hay un bambú de 10 pies de altura que se ha roto de manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base; se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura.

La cultura china vio dificultado su desarrollo por bruscas rupturas. En el año 213 a.C. el emperador chino ordenó la quema de libros, salvo, tal vez, los de carácter técnico. Con dificultades sobrevivieron muchas obras con copias clandestinas.

Por otra parte algún tipo de contacto existió de China con la India y el Occidente, si bien el querer detectar una influencia babilónica o griega en China tiene la dificultad de que los chinos nunca usaron fracciones sexagesimales. El sistema de numeración chino fue esencialmente decimal con dos esquemas diferentes de notación:

El multiplicativo, que utilizaba unos símbolos para los dígitos y otros símbolos para las potencias de 10. En este esquema el 459 se escribía el 4, seguido del símbolo del 100, 5, seguido del símbolo del 10, y el 9. Se trata de una representación en la forma $4\times100+5\times10+9$. Los símbolos estuvieron formados inicialmente por varillas. De esta forma los primeros dígitos se escribían así: $|$, $||$, $|||$, $||||$. El seis se formaba añadiendo al uno una barra horizontal en la parte superior. Los potencias de 10 se representaban con rayas horizontales.

El segundo esquema de notación fue el posicional, similar al nuestro, si bien era más centesimal que decimal. La utilización de un símbolo para el cero, igual que en Babilonia, tardó en aparecer. En una obra de 1247, aparece un símbolo redondo para representar al cero.

La época exacta en que apareció la numeración a base de varillas en China no se ha podido determinar, pero fue mucho antes de que se adoptase el sistema de numeración posicional en la India. Las varillas en el 300 a.C. no eran una simple notación para escribir los resultados de una computación, sino que los administradores llevaban consigo una bolsa que contenía una colección de varillas de bambú, marfil o hierro que utilizaban como instrumentos para hacer sus cálculos. Las varillas para contar las manejaban los chinos con tanta habilidad que un escrito del siglo XI las describe "*volando con tal rapidez de un lado a otro que el ojo no podría seguir su movimiento*". Los números negativos no ocasionaron excesivas dificultades a los chinos acostumbrados a utilizar conjuntos de varillas rojas para representar los números positivos y negras para representar los números negativos. Sin embargo, no aceptaron la idea de que un número negativo pudiera ser solución de una ecuación.

Los pasos algebraicos consistentes en cancelaciones de cantidades iguales se llevaban a cabo con más rapidez usando las varillas en una tabla de calcular que con el ábaco o marco de calcular rígido con bolas móviles a lo largo de barras paralelas. Probablemente hasta el siglo VI no comenzó a utilizarse el ábaco en China. La palabra latina *abacus* deriva de la palabra semítica *abq*, que significa polvo, lo que nos indica que en otros países, lo mismo que en China, el ábaco evolucionó a partir de una bandeja llena de polvo o de arena que se utilizaba como tabla de calcular. Sigue sin saberse si la aparición del ábaco en China, en Arabia y en Europa se debió o no a inventos independientes entre sí.

Además los chinos conocían bien las operaciones con las fracciones y hallaban el mínimo común múltiplo del denominador de varias fracciones, estableciendo, al igual que hacían con otras materias

analogías con los distintos sexos, refiriéndose al numerador como "*el hijo*" y al denominador como "*la madre*".

Más importante que esta curiosidad es la tendencia a la decimalización de las fracciones en China. En Mesopotamia el sistema de medidas, básicamente sexagesimal, condujo a la numeración sexagesimal. En China la adopción de una idea directriz decimal de pesos y medidas dio como resultado que se impusiera el hábito decimal en el manejo de fracciones desde, según parece, el siglo XIV a.C. Prueba del dominio de la decimalización en el pensamiento chino es la utilización de las fórmulas

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{100a}}{10} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{1000a}}{10}$$

El uso del valor 3 para aproximar π en la matemática china primitiva puede revelar una cierta dependencia de la matemática china respecto a la matemática de Babilonia, si bien parece claro que hasta el año 400, China exportó más Matemática de la que importó. La búsqueda de valores cada vez más exactos de π fue más persistente en China que en ningún otro sitio en los primeros siglos de la era cristiana. Este proceso produjo los valores 3,1547, $\sqrt{10}$, $\frac{92}{29}$, y $\frac{142}{45}$, y en el siglo III Liu Hui, importante comentarista de los *Nueve Capítulos*, obtiene las aproximaciones 3,14 con un polígono regular de 96 lados y 3,14159 con un polígono de 3072 lados.

La fascinación que ejerció en los chinos el número π alcanzó su punto más alto en la obra de Tsu Ch'ung-Chih (430–501) quien llegó a dar las aproximaciones 3,1415926, por defecto, y 3,1415927, por exceso.

Los problemas que trató la matemática china parecen ser más pintorescos que prácticos. Sin embargo, la civilización china produjo gran número de innovaciones técnicas. La utilización de la imprenta y de la pólvora (siglo VIII), así como la del papel y la brújula marina (siglo XI) fue anterior en China que en cualquier otro lugar. Luego vino en el siglo XIII, la época más brillante de la matemática china, coincidiendo con la última parte del período Sung.

En esta época había matemáticos trabajando en distintos lugares de China, pero las relaciones entre ellos parecen haber sido escasas y, como sucedió en la matemática griega, pocos de sus tratados han llegado hasta nosotros.

El último, y tal vez el más importante de los matemáticos Sung, fue Chu Shih-Chieh, que vivió, aproximadamente entre 1280 y 1303. Vivió cerca de Pekín, pero estuvo viajando casi toda su vida como un sabio errante que se ganaba la vida enseñando matemáticas, a pesar de lo cual encontró el tiempo y la tranquilidad suficientes para escribir la "*Introducción a los estudios matemáticos*", libro elemental que también ejerció gran influencia en Corea y Japón, y el "*Espejo precioso de los Cuatro Elementos*", donde los cuatro elementos, cielo, tierra, hombre y materia, representan las cuatro incógnitas de una ecuación. En este libro Chu Shih-Chieh explica un método de transformación para ecuaciones, que le llamó *método fan fan* y que, en Occidente, le conocemos como *Método de Horner*, matemático que vivió medio milenio más tarde. Chu Shih-Chieh para resolver con su método *fan fan* la ecuación $x^2 + 252x - 5292 = 0$ sigue estos pasos:

- Obtiene por tanteo que la solución está entre $x = 19$ y $x = 20$.

- Con la transformación $x = 19 + y$ obtiene la ecuación $y^2 + 290y - 143 = 0$, que tendrá una raíz entre 0 y 1.
- Como valor aproximado de esta ecuación toma $y = \frac{143}{1+290}$.

LA MATEMÁTICA PRIMITIVA EN LA INDIA

Las excavaciones arqueológicas que se han realizado en Mohenjo Daro nos muestran la existencia de una vieja civilización con un alto nivel cultural en la India que fue contemporánea de los constructores de las grandes pirámides egipcias, pero no ha llegado hasta nosotros ningún documento matemático de aquella época lejana.

Un milenio más tarde, el país fue ocupado por los invasores arios que procedían de las altiplanicies de Irán e introdujeron el sistema social de castas y desarrollaron la literatura sánscrita.

Buda, el gran maestro religioso, enseñaba en la India por la época en que parece que Pitágoras visitó la India. Hay quien ha sugerido que Pitágoras aprendió el teorema que lleva su nombre de los hindúes, si bien hay que indicar que los babilonios ya estaban familiarizados con el teorema en cuestión por lo menos mil años antes.

En la India, como en Egipto, los conocimientos matemáticos se fueron decantando de la planificación de templos, adoptando la forma de un cuerpo de conocimientos conocido como los *Sulvasutras* (= reglas de la cuerda, en recuerdo de las cuerdas utilizadas en las mediciones). Más aún que en el caso de China, las contribuciones importantes hindúes son aportaciones separadas por largos intervalos de tiempo.

De los *Salvasutras*, escritos en verso, se conservan tres versiones. La más antigua parece ser de la época pitagórica y los problemas que tratan están relacionados tanto con los problemas de agrimensura egipcios como con el problema griego de duplicación del cubo. Se ha pretendido atribuir en el período de los *Salvasutras* (del siglo VIII a.C. al siglo II de nuestra era), y en la India, el primer reconocimiento de la existencia de los inconmensurables, lo que parece improbable por el desinterés o incapacidad de los matemáticos hindúes para enfrentarse con conceptos fundamentales.

Al período de los *Salvasutras*, que se cierra hacia el siglo II, le sigue la época de los *Siddhantas* o sistemas astronómicos, que parecen haber tenido relación con el relanzamiento o renacimiento de la cultura sánscrita al comienzo de la dinastía del rey Gupta (hacia el 290). El único *Siddhantas* que se conserva completo es el "*Sistema del Sol*", escrito en verso en estrofas épicas hacia el año 400. Las principales teorías astronómicas que contiene son griegas, mezcladas con folklore hindú. Los restantes *Siddhantas* parece que también eran tratados de Astronomía de contenido similar, escritos en verso sánscrito, con muy pocas explicaciones y sin ninguna demostración. Los autores hindúes defienden la originalidad de los *Siddhantas*, en tanto que los occidentales se inclinan a ver claros signos de influencia griega.

Por ejemplo, parece que el *Paulisha Siddhanta* proviene de la obra del astrólogo Pablo que vivió en Alejandría poco antes de la fecha presumible en que fueron compuestos los *Siddhantas* (de hecho el sabio árabe Al-Biruni atribuye este *Siddhantas* a Pablo de Alejandría). El *Paulisha Siddhanta* utiliza para π el valor $3\frac{177}{1250}$, que coincide esencialmente con el valor sexagesimal 3; 8, 30 de Ptolomeo.

Un hecho innegable es que los hindúes adquirieron sus conocimientos de trigonometría del helenismo cosmopolita de Alejandría; otro que el material helénico tomó en sus manos una nueva forma que iba a ser muy significativa. La trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación entre cuerdas y arcos o ángulos centrales. La trigonometría hindú dividió los ángulos mediante las bisectrices y estudió la relación entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco o ángulo central. Así nació en la India el antepasado de lo que hoy conocemos como función seno, lo que representa la contribución más importante de los *Siddhanta* a la matemática. Aunque algún historiador ha formulado que esta transformación de la trigonometría tuvo lugar en la Alejandría post-ptolomeaica, de lo que no se tiene ninguna duda es que el mérito en la extensión de la utilización de la semi-cuerda como seno corresponde a los hindúes y no a los griegos. La palabra seno deriva del nombre hindú *jira* a través de una traducción árabe.

Durante el siglo VI, no mucho tiempo después de la composición de los *Siddhanta* apareció el matemático Aryabhata, autor de *Aryabhativa*, delgado volumen escrito en verso hacia el 499 que cubre diversos temas de astronomía y de matemáticas.

Tanto *Aryabhativa* de Aryabhata como *Los Elementos* de Euclides, escrito ocho siglos antes en Grecia, son recopilaciones de desarrollos anteriores realizados por un solo autor, pero entre las dos obras hay notables diferencias: *Los Elementos* constituyen una síntesis de la matemática pura, expuesta con un alto grado de abstracción, bien ordenada lógicamente y con objetivo pedagógico. El *Aryabhativa* se compone de 123 estrofas métricas para suplementar las reglas de cálculo en astronomía y las técnicas de medición matemáticas, sin relación con la lógica o la metodología deductiva. Junto a reglas correctas de cálculo de áreas y volúmenes contiene otras incorrectas. Por ejemplo, dice bien la fórmula de área del triángulo y mal el volumen de la pirámide, para el que define la mitad del área de la base por la altura. Calcula correctamente el área del círculo, mediante la mitad del producto de la longitud de la circunferencia por el radio, y obtiene mal el volumen de la esfera, que lo define como el área del círculo máximo por la raíz cuadrada de su área. Contiene una regla siempre señalada por los historiadores hindúes de matemática: "*Suma 4 a 100, multiplica por 8 y súmale 62000. El resultado te da aproximadamente la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 20000*". Equivale a aproximar π por 3,1416, que es el valor utilizado por Ptolomeo.

Algunas presentaciones de *Aryabhativa* tienen lenguaje muy florido. Por ejemplo, el problema de obtener el cuarto proporcional a tres números dados lo expone así: "*En la regla de tres multiplica el fruto por el deseo y divide por la medida. El resultado será el fruto del deseo*".

Realmente puede decirse que la obra de Aryabhata es un mezcla de lo sencillo y lo complicado, a la vez que de lo correcto y lo incorrecto. El sabio árabe Al-Biruni caracterizaba, medio milenio más tarde, la matemática hindú como una mezcla de vulgares guijarros y valiosos cristales, descripción que se ajusta al *Aryabhativa.*

La segunda parte del *Aryabhativa* trata de la medida y cálculo de tiempos y de trigonometría esférica. Aquí aparece un elemento nuevo que iba a dejar huella en la matemática de las generaciones futuras: el sistema de numeración posicional decimal, pues Aryabhata afirma que de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede. La idea del valor posicional era un elemento esencial en el sistema de numeración babilónico y lo que los hindúes hicieron fue darse cuenta de que esta idea era aplicable al sistema de notación decimal que se estaba usando en la India.

El desarrollo histórico de las notaciones numéricas en la India parece haber seguido pasos análogos a los encontrados en Grecia: Las inscripciones del período cultural de Mohenjo Daro muestran la utilización de palotes reunidos en grupos. En la época de Asoka, siglo III a.C., se seguía utilizando el principio repetitivo, pero se adoptaron nuevos símbolos para las unidades de orden superior cuatro, diez, veinte y cien. Gradualmente se fue pasando al descubrimiento de que los nueve dígitos servían para representar los múltiplos de diez. En esta economía pudo haber influido el sistema de numeración seudoposicional chino de barras.

La referencia específica más antigua a los números hindúes data del 662 y se encuentra en los escritos del obispo sirio Severo Sebokt. Como consecuencia del cierre de las escuelas filosóficas atenienses ordenado por Justiniano, algunos de sus sabios se trasladaron a Siria, establecieron centros donde cultivaban el saber griego y Sebokt, sintiéndose molesto por el desprecio que mostraban por la cultura y el saber no griegos, consideró necesario mostrar a los griegos la sabiduría de otros pueblos. Llamó la atención sobre los hindúes y sus "*sutiles descubrimientos en astronomía, así como sus valiosos métodos de cálculo y sus operaciones que sobrepasan toda descripción, indicando que* ***sus cálculos se hacen por medio de nueve signos***".

De la utilización del cero por los hindúes, dígito que faltaba introducir para simplificar y reducir a la forma actual la numeración posicional hindú, no tenemos noticia de su aparición hasta el año 876, más de dos siglos después de la aparición de los nueve dígitos en la numeración hindú. Su origen puede estar vinculado a Alejandría, con lo cual el mérito en la numeración actual de los hindúes habría estado en la reunión de elementos no descubiertos por ellos: la base decimal, la numeración posicional y la utilización del cero. Finalmente, las formas hindúes medievales de los diez dígitos son muy diferentes de las actuales, pero los principios teóricos del sistema de numeración estaban ya firmemente establecidos. Esto es la principal aportación hindú.

Junto con el sistema de numeración decimal la otra gran contribución de la India a la historia de la Matemática fue la introducción de lo equivalente a la función seno en trigonometría para reemplazar a las cuerdas griegas.

Las tablas más antiguas que nos han llegado de la función seno se encuentran en los *Siddhäntas* y en el *Aryabhatiya*, donde se dan 25 senos de los ángulos menores o iguales a 90º que difieren cada uno del siguiente en 3,75º. Realizaban los cálculos de la siguiente forma: Tomaban una circunferencia de unidades y un radio de 3438 unidades. Esto supone considerar un valor de π que coincide con el de Ptolomeo hasta la cuarta cifra. Para el seno de 3,75º, tanto el *Siddhäntas* como el *Aryabhatiya* toman el número de unidades que contiene su arco, es decir $3,75 \times 60 = 225$. Traducido a lenguaje moderno significa que para ángulos pequeños consideraban el seno igual a la medida del ángulo en radianes. La división de 225 unidades entre el radio (= 3438 unidades) da un valor muy aproximado al que consideramos actualmente para el seno de 3,75º.

Las restantes entradas, que en lenguaje moderno serían los productos de los senos de los restantes ángulos por 3438, los calculaban por la siguiente fórmula recursiva:

$$S_{n+a} = S_n + S_1 - \frac{R_n}{S_1}$$

donde S_n es el n-ésimo seno por 3438 y R_n es la suma de los n-ésimos primeros senos multiplicados por por 3438.

La trigonometría fue una herramienta auxiliar para la astronomía tan útil como precisa. No conocemos como llegaron los hindúes a la fórmula recurrente para los senos, si bien pudo estar motivado por un desarrollo intuitivo o empírico del cálculo con ecuaciones en diferencias, así como de la práctica de la interpolación.

La matemática hindú se la califica de "*intuitiva*" para ponerla en contraste con el severo *racionalismo* de la geometría griega. Hay escasa evidencia en la India del estudio de problemas geométricos clásicos. En cambio a los matemáticos hindúes les fascinaban las cuestiones numéricas relacionadas con las operaciones numéricas o con la resolución de ecuaciones determinadas o indeterminadas. La suma y la multiplicación se hacían en la India casi de la misma manera que hoy en día, salvo la diferencia de que escribían las unidades de menor orden a la izquierda, por lo que la suma y la multiplicación las hacían de izquierda a derecha. Utilizaban la disposición en celdillas para hacer la multiplicación, con lo que evitaban el tener que recordar las cifras que llevaban.

Nos encontramos con un grave problema dado que su cronología es muy insegura y que los autores hindúes raramente mencionan a sus predecesores y muestran una gran independencia en sus razonamientos matemáticos. Así ocurre, por ejemplo, con Brahmagupta (alrededor del 628) que vivió en la India central algo más de un siglo después de Aryabhata, con quien tiene muy poco que ver, ni siquiera geográficamente, pues Aryabhata había vivido en la región oriental de la India.

Brahmagupta menciona dos valores de π, el "valor práctico" 3 y el "valor exacto" , pero no menciona el valor más aproximado de Aryabhata. En la trigonometría, que incluye su obra más conocida, el *Brahmasphuta Siddhánta*, adopta como radio de la circunferencia el valor 3270 en vez de 3438 de Aryabhata. Se parece a su predecesor en la mezcla indiscriminada de resultados correctos e incorrectos. Por ejemplo, Brahmagupta calcula el "área bruta" del triángulo isósceles multiplicando la mitad de la base por uno de sus lados iguales y la de un triángulo escaleno la obtiene multiplicando la base por la semisuma de los otros dos lados. En cambio para el área exacta utiliza la fórmula de Arquímedes-Herón. Un resultado muy bello de la obra de Brahmagupta es la generalización de la fórmula de Herón para la obtención del área de un cuadrilátero

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

que sólo es cierta para el caso de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. El caso general precisa la adición de un sustraendo, pues el área viene dada por

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\ \cos^2\alpha}$$

donde α es la semisuma de dos ángulos opuestos del cuadrilátero.

Las contribuciones más importantes de Brahmagupta están en el marco del álgebra. Se le deben las soluciones generales de las ecuaciones cuadráticas, incluyendo las dos raíces, aunque una de ellas sea negativa. También se le debe la primera exposición sistemática de la aritmética de números negativos, dando reglas operativas para números enteros, positivos o negativos, con el fallo de admitir que $0:0=0$. Su contribución fue muy brillante en el análisis indeterminado, siendo el primero que resolvió la ecuación diofántica lineal $\mathrm{a}x+\mathrm{b}y=\mathrm{c}$, con a, b y c enteros.

Mérito innegable de la matemática hindú fue considerar como números las raíces irracionales de otros números, lo que supuso una gran ayuda para el álgebra, que fue fruto de una inconsciencia de tipo lógico más que de una profundidad matemática.

Los matemáticos hindúes carecieron de una distinción clara entre resultados exactos e inexactos. En consecuencia era natural que no tomasen en consideración las diferencias entre magnitudes conmensurables e inconmensurables. No tenían ningún impedimento en aceptar los números irracionales, camino que siguieron las siguientes generaciones hasta que en el siglo XIX los matemáticos consiguieron fundamentar el sistema de los números reales sobre una base sólida.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

1. J. Babini. *Historia sucinta de la matemática*. Espasa Calpe, 1952
2. C.B. Boyer. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, 1968.
3. J. Dieudonné. *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Alianza Editorial, 1989.
4. P. García Barreno (dir.): *La Ciencia en tus Manos*. Espasa Fórum. Espasa Calpe, 2000.
5. J.E. Hoffmann. *Historia de la matemática.*UTEHA, 1960.
6. F. Le Lionnais. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, (Eudeba., Buenos Aires, 1962).
7. D. Maravall. *Filosofía de las matemáticas*. Dossat 1961.
8. D. Maravall. *Grandes problemas de la Filosofía Científica*. Editora Nacional, 1973.
9. B. Russell, *Historia de la filosofía occidental* (Colección Austral, Madrid, segunda edición, 1997).

BIBLIOGRAFÍA ESPECIALIZADA

1. E.J. Aiton, The application of the infinitesimal calculus to some physical problems by Leibniz and his friends, 300 Jahre "Nova methodus" von G.W. Leibniz (1684 – 1984) (Wiesbaden, 1986), 133 – 143.
2. E.N. da C. Andrade, Newton and the science of his age, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 181 (1943), 227 – 243.

3. I.H. Anellis, Russell's earliest interpretation of Cantorian set theory, 1896 – 1900, Philos. Math. (2) 2 (1) (1987), 1 – 31.

4. B. Artmann, Euclid's "Elements" and its prehistory, On Mathematics (Edmonton, AB, 1992), 1 – 47.

5. K. Bachowicz, On certain of Leibniz's observatioons concerning the substantiation of mathematical statements, Polish Acad. Sci. Inst. Philos. Bull. Sect. Logic 12 (4) (1983), 143 – 147.

6. A. Lo Bello, Descartes and the philosophy of mathematics, The Mathematical Intelligencer 13 (1991), 35 – 39.

7. D. Bertoloni Meli, Some aspects of the interaction between natural philosophy and mathematics in Leibniz, the Leibniz renaissance (Florence, 1989), 9 – 22.

8. J. Blaquier, Sir Isaac Newton: the man and the mathematician (Spanish), Anales Acad. Nac. Ci. Ex. Fis. Nat. Buenos Aires 12 (1947), 9 – 32.

9. W.J. Broad, Sir Isaac Newton: mad as a hatter, Science 213 (4514)(1981), 1341 – 1344.

10. R.W. Brumbaugh, The philosophers of Greece (Albany, New York, 1981).

11. C.B. Boyer, Fermat and Descartes, Scrpta Math. 18 (1952), 189 – 217.

12. C.B. Boyer, Descartes and the geometrization of algebra, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 390 – 393.

13. H. Breger, Le continu chez Leibniz, Le labyrinthe du continu (París, 1992), 76 – 84.

14. N. Bourbaki. Elementos de la Historia de las Matemáticas. Alianza Universidad, 1976

15. C.C. Christian, Remarks concerning Kurt Gödel´s life and work, Mathematical logic and its applications (New York – London, 1987), 3 – 7.

16. J. Crossley, A note on Cantor's theorem and Russell's paradox, Austral. J. Philos. 51 (1973), 70 – 71.

17. J.W. Dawson, the papers of Kurt Gödel, Historia Mathematica 13 (3) (1986), 277.

18. R. Dimitri'c, Sir Isaac Newton, Math. Intelligencer 13 (1) (1991), 61 – 65.

19. P. Dugac, Georg Cantor and Henri Poincaré, Bulletino Storia delle Scienze Matematiche 4 (1984), 65 – 96.

20. H. Erlichson, How Newton went from a mathematical model to a physical model for the problem of a first resistive force, Centaurus 34 (3) (1991), 272 – 283.

21. S. Feferman, Kurt Gödel: conviction and caution, Philos. Natur. 21 (2 – 4) (1984).

22. D.H. Fowler, The mathematics of Plato's academy: a new reconstruction (Oxford U.P. 1987)

23. D.H. Fowler, An invitation to read Book X of Euclid's "Elements", Historia Math. 19 (3) (1992), 233 – 264.

24. A. Franklin and C. Howson, Newton and Kepler, a Bayesian approach, Stud. Hist. Philos. Sci. 16 (4) (1985), 379 – 385.

25. F. De Gant, the mathematical style of Newton's "Principia", Mathesis 6 (2) (1990), 163 – 189.

26. H. Gispert, La théory des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres, Rev. Histoire Math. 1 (1) (1995), 39 – 81.

27. T.L. Heath, A history of Greek mathematics II (Oxford U.P. 1931)

28. M.D. Hendy, Euclid and the fundamental theorem of arithmetic, Historia Math. 2 (1975), 189 – 192.

29. M. Horvath, The problem of the infinitely small in mathematics in the wwork of Leibniz, Mat. Lapok 30 (1 – 3) (1978/82), 191 – 209.

30. C.V. Jones, La influencia de Aristóteles en los fundamentos de los Elementos de Euclides. Mathesis 3 (4) (1987), 375 – 387.

31. A. Kertész, The significance of Cantor's ideas for the development of algebra, Scientia 105 (1976), 203 – 209.

32. S.C. Kleene, The work of Kurt Gödel, J. Symbolic Logic 41 (4) (1976), 761 – 778.

33. M. Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad 1992

34. F. Le Lionnais, Descartes et Einstein, Rev. Hist. Sci. Appl. 5 (1952), 139 – 154.

35. D. Maravall. *Teoría de la Investigación Matemática*. Dossat 1966.

36. D. Maravall. *Didáctica y Dialéctica Matemáticas*. Dossat 1969.

37. D. Maravall. *Introducción a la investigación en Física y Matemáticas*. Empeño 14, 1981.

38. M. Nauenberg, Newton's early computational method, Archiv for the History of the exact Science 46 (3) (1994), 221 – 252.

39. C. Parsons, Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought, Bull. Symbolic Logic 1 (1) (1995), 44 – 74.

40. S.Q. Tong, Descartes' way of thinking about mathematics, Qufu Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 20 (1) (1994), 89 – 95.

41. V.B. Vel'meshev, Physics and mathematics and their connection in Leibniz's work, Istor. Metodol. Estestv. Nauk 34 (1988), 97 – 101.

42. H. Wang, Some facts about Kurt Gödel, J. Symbolic Logic 46 (3)(1981), 653 – 659.

43. D.T. Whiteside, The mathematical principles underlying Newton's Principia, Journal for the history of Astronomy 1 (1970), 118 – 119.

44. D.T. Whiteside, Newton the mathematician, Contemporary Newtonian research (Dordrecht, Boston, 1982), 109 –127.