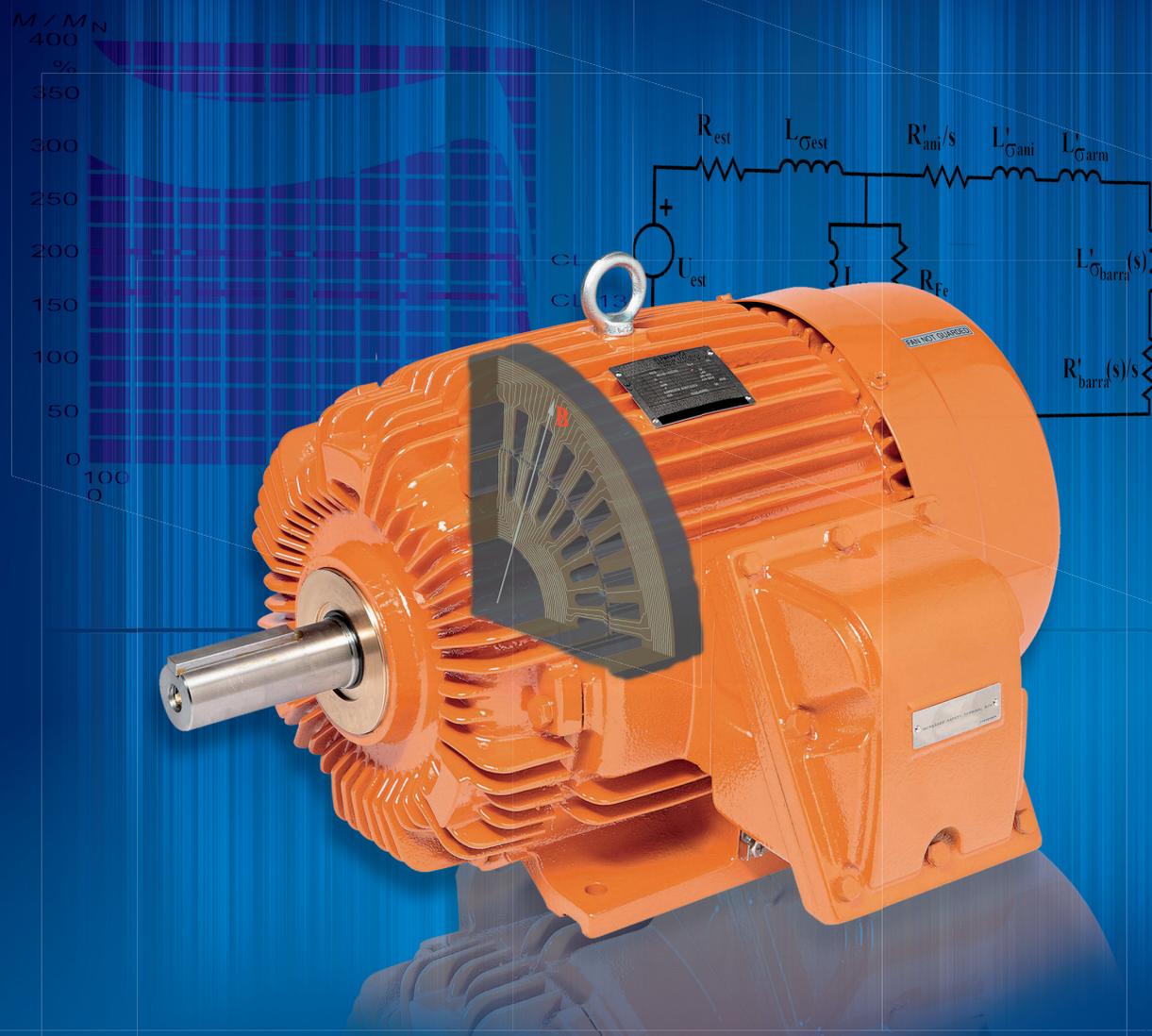


# MÁQUINAS ELÉCTRICAS

LUIS SERRANO IRIBARNEGARAY  
JAVIER MARTÍNEZ ROMÁN

4ª edición



EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

---

# **Máquinas Eléctricas**

**4ª edición**

---

Luis Serrano Iribarnegaray  
Javier Andrés Martínez Román

EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Comité Editorial de la UPV bajo el sistema *doble ciego*

Para citar esta publicación utilice la siguiente cita: Serrano Iribarnegaray, L ; Martínez Román, J.A. (2017)[4ªed]. *Máquinas eléctricas*. Valencia : Editorial Universitat Politècnica de València

Primera edición, enero 2013  
Segunda edición, noviembre 2013  
Tercera edición, diciembre 2014  
Cuarta edición, enero 2017

- © Luis Serrano Iribarnegaray  
Javier Andrés Martínez Román
- © imagen de portada: <http://www.teco.com.au/teco-flameproof-motors>
- © de las fotografías: los autores
- © todos los nombres comerciales, marcas o signos distintivos de cualquier clase contenidos en la obra están protegidos por la Ley.
- © de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución*: Telf. 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref. 622\_05\_04\_01

Imprime: Byprint Percom SL.

ISBN: 978-84-9048-586-6

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

*A María José y a Begoña*



## AUTORES

### **LUIS SERRANO IRIBARNEGARAY**

Es Ingeniero Industrial por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Bilbao (1971) y Dr. Ingeniero Industrial por la de Madrid (1978). Trabajó durante cerca de un año en el Departamento de Proyectos Eléctricos de una consultoría y durante más de tres años en el Departamento de Accionamientos Eléctricos Regulados de A. E. G., en España y Alemania (1973 – 1976). En los años 1976-1977 permaneció quince meses como becario del Gobierno Aleman (DAAD) en la Universidad Técnica de Braunschweig, investigando sobre control electrónico de motores asíncronos. Desde 1982 es catedrático de máquinas eléctricas en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Valencia. Ha sido durante años asesor técnico de varias empresas, tanto en el área de control electrónico como en la de construcción de máquinas eléctricas, y responsable en España de diferentes proyectos internacionales financiados con fondos de la Unión Europea. Sus campos de interés en ingeniería son el control de accionamientos eléctricos y el desarrollo de la teoría de los fasores espaciales.

### **JAVIER MARTÍNEZ ROMÁN**

Es Ingeniero Industrial (1991) y Dr. Ingeniero Industrial (2002) por la Universitat Politècnica de València. Trabajó durante cerca de tres años en el departamento de producción de la refinería de Cartagena, REPSOL. En 1994 se incorporó a la Universitat Politècnica de València en el programa de FPI de la Generalitat Valenciana. Desde 2008 es profesor titular de universidad del Departamento de Ingeniería Eléctrica. Ha participado en diferentes convenios con empresas y programas internacionales financiados con fondos de la Unión Europea en las áreas de construcción y control electrónico de máquinas eléctricas y automatización industrial. Su campo de interés principal en ingeniería es el análisis y control de máquinas y accionamientos eléctricos.



PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN .....	V
PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN .....	IX
PRÓLOGO A LA CUARTA EDICIÓN .....	XI
<b>I. FUNDAMENTOS DE ELECTROMAGNETISMO E INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LOS CIRCUITOS MAGNÉTICOS EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS</b> .....	<b>1</b>
I.1. PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO.....	1
I.2. REVISIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ELECTROMAGNETISMO ESENCIALES PARA EL ESTUDIO DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS .....	3
I.2.1. <i>Origen, necesidad y definición del concepto de campo en la física</i> .....	3
I.2.2. <i>Inducción magnética, campo eléctrico, tensión, potencia eléctrica y otros conceptos básicos de electricidad y magnetismo</i> .....	6
I.2.3. <i>Introducción de los Vectores D y H</i> .....	15
I.2.4. <i>Leyes generales para la determinación del campo magnético</i> .....	19
I.3. MATERIALES MAGNÉTICOS UTILIZADOS EN MÁQUINAS ELÉCTRICAS.....	22
I.3.1. <i>Chapa magnética</i> .....	23
I.3.1.1. Pérdidas por histéresis.....	24
I.3.1.2. Pérdidas por corrientes de Foucault .....	25
I.3.1.3. Pérdidas específicas totales .....	27
I.3.1.4. Calidades Normalizadas de Chapa Magnética.....	27
I.3.2. <i>Imanes permanentes</i> .....	35
I.4. CIRCUITO MAGNÉTICO PRINCIPAL DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS.....	36
I.4.1. <i>El Circuito magnético principal de transformadores y máquinas rotativas de corriente continua</i> .....	39
I.4.1.1. Distribución del flujo en el circuito magnético principal .....	39
I.4.1.2. F.m.m. y caídas de tensión magnética a lo largo del circuito magnético principal.....	41
I.4.1.3. Analogías con circuitos eléctricos de corriente continua.....	46
I.4.2. <i>El circuito magnético principal en las máquinas rotativas de corriente alterna (síncronas y asíncronas)</i> .....	71
I.4.2.1. Distribución del flujo en la corona de la máquina .....	71
I.4.2.2. Tensión magnética de entrehierro .....	73
I.4.2.3. Concepto de capa de corriente. Onda espacial de tensión magnética de entrehierro producida por una capa de corriente senoidal.....	79
I.4.2.4. Onda espacial de inducción magnética en el entrehierro producida por una capa de corriente senoidal en la máquina asíncrona con circuito magnético saturado.....	83

I.5.	FF.EE.MM. INDUCIDAS Y ENLACES DE FLUJO.....	86
	I.5.1. <i>Flujo y f.e.m. inducida en una espira. Criterio de signos</i> .....	86
	I.5.2. <i>Enlaces de flujo y f.e.m. inducida en un devanado</i> .....	89
I.6.	INDUCTANCIAS. ALTERNATIVAS PARA SUBDIVIDIR LOS ENLACES DE FLUJO DE UN DEVANADO.....	90
	I.6.1. <i>Inductancias propia y mutua. Enlaces de flujo propios y mutuos</i> .....	90
	I.6.2. <i>Enlaces de flujo principales y de dispersión. Inductancia magnetizante         y de dispersión</i> .....	95
I.7.	INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DEL CIRCUITO MAGNÉTICO DE DISPERSIÓN EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS. SU IMPORTANCIA INDUSTRIAL.....	110
<b>II.</b>	<b>TRANSFORMADORES</b> .....	<b>115</b>
II.1.	PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO .....	115
II.2.	INTRODUCCIÓN: UTILIDAD Y TIPOS DE TRANSFORMADORES.....	116
II.3.	CONSTITUCIÓN DE LOS TRANSFORMADORES .....	118
	II.3.1. <i>Devanados de transformadores</i> .....	119
	II.3.2. <i>Circuito magnético</i> .....	119
	II.3.3. <i>Envoltente y refrigeración</i> .....	121
II.4.	TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS DE POTENCIA .....	123
	II.4.1. <i>Transformador ideal</i> .....	123
	II.4.1.1. Ff.ee.mm., enlaces de flujo y flujo en el núcleo .....	125
	II.4.1.2. Relación de transformación .....	127
	II.4.1.3. Corrientes: primaria, secundaria y de vacío. Corriente del secundario referida al primario .....	128
	II.4.1.4. Circuito equivalente del transformador monofásico ideal.....	133
	II.4.1.5. Balance de potencia en el transformador ideal .....	138
	II.4.1.6. Diagramas fasoriales de funcionamiento.....	142
	II.4.2. <i>Transformador real</i> .....	143
	II.4.2.1. Caídas de tensión inductivas y resistivas.....	144
	II.4.2.2. Pérdidas de potencia en los devanados .....	146
	II.4.2.3. Corriente de vacío en el transformador real. Componentes magnetizante y de pérdidas en el hierro. Corriente de vacío senoidal equivalente.....	148
	II.4.2.4. Diagrama fasorial del transformador real en carga.....	154
	II.4.3. <i>Circuito equivalente de transformadores monofásicos</i> .....	156
	II.4.4. <i>Valores nominales, ensayos y parámetros</i> .....	161
	II.4.4.1. Ensayo de vacío .....	163
	II.4.4.2. Ensayo de cortocircuito. Tensión de cortocircuito .....	166
	II.4.5. <i>Corriente de cortocircuito</i> .....	173
	II.4.5.1. Corriente permanente de cortocircuito .....	173

II.4.5.2. Corriente transitoria de cortocircuito .....	174
II.4.6. Corriente de conexión .....	177
II.4.7. Variación de tensión en carga .....	178
II.4.8. Funcionamiento en paralelo .....	182
II.4.9. Balance de potencias y rendimiento .....	185
II.5. TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS DE POTENCIA .....	194
II.5.1. Transformador trifásico de tres columnas .....	195
II.5.2. Variantes del circuito equivalente, parámetros y principales aspectos de funcionamiento del transformador trifásico en régimen equilibrado .....	200
II.5.2.1. Relación de transformación .....	200
II.5.2.2. Corriente de vacío y sus componentes .....	201
II.5.2.3. Tensión y potencia de cortocircuito y sus componentes .....	202
II.5.2.4. Corriente permanente de cortocircuito .....	203
II.5.2.5. Variación de tensión en carga .....	203
II.5.2.6. Funcionamiento en paralelo y reparto de carga .....	203
II.5.2.7. Balance de potencias y rendimiento .....	203
II.5.2.8. Transformador equivalente Yy .....	204
II.5.3. Grupos de conexión de transformadores trifásicos: desfase y conexión en paralelo .....	221
II.5.3.1. Conexión estrella estrella Yy .....	222
II.5.3.2. Conexión triángulo estrella Dy o Yd .....	223
II.5.4. Placa de características y valores típicos .....	225
II.6. AUTOTRANSFORMADORES .....	232
<b>III. INTRODUCCIÓN A LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS .....</b>	<b>235</b>
III.1. PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO .....	235
III.2. DEFINICIÓN E IMPORTANCIA DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS .....	236
III.3. ESTUDIO DE LA MÁQUINA ELÉCTRICA ROTATIVA ELEMENTAL .....	238
III.3.1. Generalidades .....	238
III.3.2. Evolución del circuito magnético de la máquina elemental .....	238
III.3.3. F.e.m. y par en la máquina rotativa elemental .....	241
III.3.4. Principio de reversibilidad .....	243
III.4. MÁQUINAS ROTATIVAS CLÁSICAS: CONSTITUCIÓN, CARACTERÍSTICAS FUNCIONALES PRINCIPALES, ESTADO DE DESARROLLO ACTUAL Y CAMPOS INDUSTRIALES DE APLICACIÓN .....	245
III.4.1. Máquinas síncronas .....	245
III.4.2. Máquinas de corriente continua .....	256
III.4.3. Máquinas de inducción (máquinas asíncronas) .....	262
III.4.4. Motores de colector .....	270

<b>IV. MÁQUINAS ASÍNCRONAS</b> .....	273
IV.1. PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO.....	273
IV.2. BASES TEÓRICAS PARA EL ANÁLISIS DE LAS MÁQUINAS ASÍNCRONAS.....	276
IV.2.1. Fasores espaciales de inducción y de flujo de corona.....	276
IV.2.2. Obtención de campos magnéticos giratorios mediante devanados polifásicos alimentados con corrientes polifásicas. ....	287
IV.2.3. FF.EE.MM. inducidas en un devanado por un campo circular giratorio...	293
IV.2.4. Revisión del principio de funcionamiento del motor asíncrono. Igualdad de las velocidades absolutas de las ondas espaciales de estator y rotor.....	298
IV.3. CIRCUITO EQUIVALENTE DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA FUNCIONANDO EN RÉGIMEN PERMANENTE. ....	302
IV.3.1. Consideraciones previas al establecimiento de un circuito equivalente en la máquina asíncrona .....	302
IV.3.1.1. Análisis crítico sobre la posibilidad de establecer un circuito equivalente en la máquina asíncrona .....	302
IV.3.1.2. Principio del acoplamiento magnético restringido estator - rotor .....	305
IV.3.1.3. Hipótesis simplificativas para la deducción del circuito equivalente de la máquina asíncrona: enunciado y comentarios críticos.....	305
IV.3.2. Deducción del circuito equivalente de la máquina asíncrona en régimen permanente de vacío a plena carga .....	309
IV.3.2.1. Generalidades .....	309
IV.3.2.2. Alimentación polifásica del estator.....	310
IV.3.2.3. Alimentación polifásica del rotor. Corriente rotórica polifásica referida al estator. ....	312
IV.3.2.4. Alimentación conjunta de estator y rotor .....	314
IV.3.3. Campo de validez del circuito equivalente según el tipo de motor asíncrono.....	321
IV.4. DIAGRAMAS FASORIALES DEL MOTOR ASÍNCRONO EN EL ESPACIO Y EN EL TIEMPO.....	323
IV.5. BALANCE DE POTENCIAS Y RENDIMIENTO EN LA MÁQUINA ASÍNCRONA EN RÉGIMEN PERMANENTE. ....	332
IV.6. ENSAYOS DE VACÍO Y EN CARGA DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA.....	336
IV.7. CURVA PAR-VELOCIDAD (CARACTERÍSTICA MECÁNICA) DE LOS MOTORES ASÍNCRONOS .....	342
IV.7.1. Fórmulas y relaciones válidas para todos los motores asíncronos.....	342
IV.7.2. Particularización de la curva par - velocidad a los motores de jaula de ardilla simple .....	345
IV.8. CURVA CORRIENTE-VELOCIDAD (CARACTERÍSTICA ELÉCTRICA) .....	348
IV.9. MOTORES ASÍNCRONOS CON ROTOR DE DOBLE JAULA Y DE RANURA PROFUNDA: CARACTERÍSTICA MECÁNICA Y CIRCUITO EQUIVALENTE.....	356

IV.9.1. <i>Introducción</i> .....	356
IV.9.2. <i>Motores asíncronos con rotor de doble jaula</i> .....	362
IV.9.3. <i>Motores asíncronos con rotor de ranura profunda</i> .....	364
IV.10. VARIACIÓN DEL PAR DE UN MOTOR ASÍNCRONO EN FUNCIÓN DE LA TENSIÓN DE ALIMENTACIÓN. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL ARRANQUE DE LOS MOTORES ASÍNCRONOS.....	367
IV.11. CONEXIONADO DEL MOTOR ASÍNCRONO EN ESTRELLA O TRIÁNGULO. NÚMERO DE FASES Y NÚMERO DE POLOS EN ESTATOR Y ROTOR.....	376
IV.12. LA MÁQUINA ASÍNCRONA COMO GENERADOR Y COMO FRENO ELECTROMAGNÉTICO .....	378
ANEXO A. FACTORES DE DEVANADO.....	382
ANEXO A.1. <i>Factor de devanado complejo de una fase de constitución arbitraria</i> ...	384
ANEXO A.2. <i>Factor de distribución en devanados polifásicos simétricos</i> .....	385
ANEXO A.3. <i>Factor de acortamiento de paso en devanados polifásicos simétricos</i> .....	387
ANEXO B. CÁLCULO DE LA RESISTENCIA E INDUCTANCIA DE DISPERSIÓN DE RANURA DEL ROTOR EN FUNCIÓN DEL DESLIZAMIENTO EN ROTORES DE RANURA PROFUNDA .....	391
<b>V. CARACTERIZACIÓN INDUSTRIAL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS.....</b>	<b>395</b>
V.1. PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO.....	395
V.2. PÉRDIDAS Y POTENCIA EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS .....	396
V.3. CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS.....	399
V.4. SERVICIOS TIPO EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS .....	404
V.5. AISLAMIENTO EN MÁQUINAS ELÉCTRICAS .....	411
V.6. CLASES DE RENDIMIENTO.....	417
V.7. GRADOS DE PROTECCIÓN EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS .....	419
V.8. FORMAS CONSTRUCTIVAS Y DE MONTAJE .....	423
<b>APÉNDICE I. FASORES TEMPORALES .....</b>	<b>427</b>
<b>APÉNDICE II. EL PAR ELECTROMAGNETICO EN LA TEORÍA DE LOS FASORES ESPACIALES.....</b>	<b>432</b>
<b>APÉNDICE III. NOTAS ADICIONALES SOBRE EL CRITERIO DE SIGNOS DE MAXWELL–LENZ.....</b>	<b>445</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>449</b>



## PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Este libro está enfocado como texto de referencia práctica para estudiantes así como para ingenieros y técnicos en ejercicio. Dedicamos el primer capítulo a una revisión amplia y rigurosa de aquellos conceptos fundamentales de electricidad y magnetismo sobre los que, en último término, se sustenta la teoría de las máquinas eléctricas. Tras ello, se centra en los transformadores y motores asíncronos, por ser, con mucha diferencia, los dos tipos de máquinas más utilizadas en las instalaciones industriales, aunque incluye también un capítulo con la descripción de todas las máquinas rotativas clásicas, sus principales características funcionales y sus campos de aplicación. El texto, además de tres apéndices de interés, se completa con un último capítulo que muestra la caracterización y selección industrial de una máquina de acuerdo con las normas UNE, las cuales son comentadas en detalle. En relación con este punto conviene también añadir que la gran cantidad de fotografías, diagramas y tablas con datos técnicos así como el elevado número de ejercicios resueltos a lo largo de todo el texto refuerzan esa componente pragmática.

La metodología adoptada para el análisis de transformadores y motores asíncronos es la de una previa exposición, clara y conceptual, de los fenómenos físicos subyacentes a cada máquina y, *sólo después de ella*, la formulación matemática de su funcionamiento. A este respecto, se parte siempre de una base teórica rigurosa para, a continuación, y en todos los casos, *señalar de forma precisa, y justificar, las simplificaciones que van a introducirse*. Este método conduce a fórmulas, diagramas y circuitos de sencillo manejo, pero de suficiente precisión industrial en muchos casos, lo que los convierte en muy valiosos para el ingeniero. Pero, a la vez, el técnico y el estudiante quedan también así plenamente capacitados para discernir aquellas aplicaciones que requieran análisis más detallados y cálculos más complejos, puesto que se han expuesto previamente, y siempre se han dejado claros los límites de aplicación, las hipótesis simplificadoras y el margen de error de las fórmulas establecidas. *Y esto es algo muy diferente y bastante más valioso que un simple “recetario de fórmulas útiles”*.

En efecto, y a título de ejemplo muy actual, baste señalar que, en el pasado, la alimentación de casi todas las máquinas en las instalaciones industriales tenía lugar mediante una tensión trifásica, de amplitud y frecuencia constantes. Esa realidad ha dado lugar a un cuerpo de fórmulas simplificadas (el “recetario de fórmulas”) que, dada su innegable utilidad, son aplicadas por el técnico de manera cuasi-mecánica, ignorando a menudo que dicha utilidad está vinculada a las características de la alimentación arriba señaladas y a otras condiciones particulares de servicio. Sin embargo, esa situación está cambiando y, previsiblemente, lo hará a un ritmo mayor en el futuro, debido a que el porcentaje de motores que se alimentan a través de convertidores no deja de crecer. Ahora bien, en un convertidor clásico, la tensión de red es primero rectificadora y, a partir de la tensión rectificadora, el inversor proporciona una tensión de salida al motor, cuya amplitud, frecuencia y número de fases pueden modificarse a voluntad. Este hecho exige un profundo replanteamiento de los métodos de cálculo y diseño de la máquina en las oficinas técnicas, y determina, colateralmente, que muchas “fórmulas de recetario”, utilizadas sin conocer cabalmente su procedencia, pierdan su validez y sea imprescindible el saber reformularlas y readaptarlas a las nuevas condiciones de servicio.

Otro aspecto fundamental y distintivo de esta obra es *la utilización, desde el principio, de los fasores espaciales* para el análisis y la resolución de problemas de las máquinas eléctricas rotativas. Esto sitúa al lector en una excelente posición para posteriores estudios de análisis dinámico y técnicas avanzadas de control de accionamientos eléctricos.

Sea hecho aquí un breve comentario relativo a los fasores espaciales.

Es innegable que, en cuanto usuario de una máquina eléctrica rotativa, el técnico o ingeniero está interesado, sobre todo, en aquellas magnitudes que pueden definirse como electromecánicas o “externo-temporales”, y que fundamentalmente son: tensión, corriente, velocidad y par. Por otro lado, existen otras magnitudes que, por contraposición a las anteriores, pueden designarse como “interno-espaciales”, por ej., capa de corriente, inducción magnética, flujo de corona, etc.

En opinión de los autores de este texto es muy difícil entender a fondo el funcionamiento de una máquina concentrando los esfuerzos casi exclusivamente en la modelización de sus magnitudes electromecánicas, marginando, o incluso ignorando casi por completo, la realidad física interna del dispositivo (estudio de la máquina como “caja negra”). Al revés, lo que parece lógico es analizar la máquina partiendo de los fenómenos primarios ligados a sus magnitudes internas y, a continuación, correlacionar la evolución de dichas magnitudes con los cambios en las variables electromecánicas del sistema. Este enfoque permite:

- a) una comprensión profunda y directa de la raíz física de aquellos procesos que determinan el funcionamiento de la máquina.
- b) una formulación matemática rigurosa de la evolución de las magnitudes electromecánicas a través de su correlación con las internas mediante el uso de las herramientas analíticas adecuadas (fasores espaciales con sus proyecciones y/o sus adecuados productos escalares o vectoriales).

Ambos aspectos son fundamentales. Es decir, para entender una teoría, y no digamos ya para sacarle el máximo partido en la resolución de problemas prácticos e industriales, se necesita, primero, un claro conocimiento de las ideas básicas que la sustentan y, a continuación, la formulación de ese conocimiento en lenguaje matemático. En nuestra opinión, la consecución de este doble objetivo se ve muy facilitado mediante el uso de fasores espaciales y temporales.

Una parte de este libro se utiliza como base de las clases correspondientes a la asignatura de “Máquinas Eléctricas”, que se imparte en tercer curso a todos los alumnos de los Grados de Ingeniero en Tecnologías Industriales y en Energía de la Universitat Politècnica de Valencia. La asignatura tiene asignadas 36 horas lectivas de clase y 9 horas de laboratorio (4,5 créditos en total). La distribución de los temas es la siguiente: 5 horas para revisión de los conceptos fundamentales de electromagnetismo (capítulo primero), 15 horas para transformadores (capítulo 2), 15 horas para máquinas asíncronas (capítulo 4), y una hora final para una presentación rápida de las principales normas UNE a modo de introducción al capítulo 5. Dado el tiempo disponible, las explicaciones se centran, con más o menos extensión, en el núcleo fundamental de cada capítulo. Las horas de laboratorio están distribuidas en tres prácticas de 3 horas de duración cada una: la primera dedicada a circuitos magnéticos, y la segunda y tercera a ensayos y determinación del circuito equivalente de transformadores y

motores, respectivamente. Sirven de complemento eficaz para las explicaciones teóricas y los ejercicios prácticos del aula.

Con el fin de facilitar la tarea a quienes pudieran considerar de interés la utilización de este texto, o de una parte de él, para clases universitarias, cursos de formación industrial, breves seminarios, etc, una síntesis estructurada del contenido de este libro está disponible en la página web de la Editorial de la Universitat Politècnica de Valencia o bien en cualquiera de las direcciones siguientes:

<http://personales.upv.es/jmroman/MaqEl/sintesis.pdf>

<http://personales.upv.es/lserrano/MaqEl/sintesis.pdf>

Finalmente, vayan nuestras gracias sinceras por anticipado a aquellos lectores que tengan la amabilidad de avisarnos sobre las posibles erratas y/o errores que hayan podido deslizarse en el texto, y de hacernos partícipes de sus críticas y sugerencias de mejora para futuras ediciones.

Luis Serrano Iribarnegaray; Javier Martínez Román

Valencia, noviembre de 2013



## PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN

La buena acogida que, pese al muy escaso tiempo transcurrido, ha tenido la segunda edición de este libro ha impulsado a sus autores a realizar una atenta revisión del mismo antes de proceder a su reimpresión. Como consecuencia de ella, se han introducido ciertas mejoras, entre las que cabe destacar:

- Se han reforzado e incrementado, mediante nuevos comentarios, las referencias directas a las normas UNE<sup>1</sup>, tanto en temas tecnológicos (por ej., ensayos de materiales magnéticos) como en lo relativo a las definiciones de las magnitudes electromagnéticas fundamentales (tensión, diferencia de potencial, capa de corriente, flujo concatenado etc.).
- Se ha redactado un epígrafe nuevo que aborda, desde una perspectiva industrial, dos temas de gran interés: la variación del par con la tensión y una introducción general al problema del arranque de un motor asíncrono, cualquiera que sea (simple jaula, ranura profunda, etc) su constitución. El epígrafe incluye un ejemplo industrial práctico del cálculo de la duración de un arranque.
- Se ha modificado y reestructurado por completo el anexo del capítulo IV relativo a los devanados de doble capa.
- Se ha incluido un nuevo anexo en ese mismo capítulo en el que se comenta la norma UNE-EN 60034-8 así como otras cuestiones prácticas relacionadas con la alimentación del motor y la constitución de sus devanados.
- Se ha mejorado la calidad gráfica de las imágenes, imprimiendo a color las fotografías sobre máquinas rotativas del capítulo 3.
- Se han incorporado algunas figuras nuevas y se han corregido aquellas erratas detectadas en la anterior edición.

A lo largo de todo el texto se ha mantenido (e incluso reforzado mediante breves adiciones allí donde los autores hemos creído conveniente) la metodología adoptada en las anteriores ediciones (y ya subrayada entonces) para el estudio de los circuitos magnéticos, transformadores y motores asíncronos, a saber: partir siempre, primero, de una clara explicación conceptual de los fenómenos físicos subyacentes a cada equipo, enunciar a continuación el marco teórico riguroso y “exacto” en el que se encuadra su análisis y, finalmente, y en todos los casos, señalar de forma precisa y justificar las simplificaciones que van a introducirse. A nuestro entender, y aunque en un primer momento pueda parecer una paradoja, el ingeniero debe tener, más aún si cabe que el físico teórico, una clara comprensión física de todos los fenómenos que intervienen en un equipo o dispositivo industrial junto con la formulación matemática que permite su análisis en el contexto teórico más riguroso; pero no para desarrollar esa formulación teórica en toda su, en general innecesaria, extensión, sino precisamente al contrario, para decidir cuáles son

---

<sup>1</sup> Para ser precisos, en la actualidad, se trata ya, en la mayoría de los casos, de las normas UNE-EN (siglas de Una Norma Española – European Norm), que son, en definitiva, la versión oficial en español de normas técnicas de aplicación en todos los países de la Unión Europea.

las hipótesis simplificadoras que puede – y debe – aplicar en sus análisis y valoraciones. En este sentido, el buen técnico o ingeniero se define, en gran medida, como aquel que, mediante simplificaciones juiciosas, llega rápidamente a resultados y sabe acotar el error de sus cálculos, sobre todo cuando se trata de abordar y proyectar soluciones nuevas y creativas. Y lo sabe acotar precisamente porque conoce bien en qué casos está o no está justificado pasar por alto y despreciar la influencia de determinados factores que intervienen en el proceso analizado.

Por otro lado, y al igual que se hizo también en la edición anterior, con el fin de facilitar la tarea a quienes pudieran considerar de interés la utilización de este texto, o de una parte de él, para clases universitarias, cursos de formación industrial, breves seminarios, etc, se ha mantenido y ampliado en internet una síntesis estructurada de su contenido. Las direcciones de internet para su acceso son las mismas ya indicadas en el prólogo de la segunda edición.

Deseamos agradecer sinceramente a los responsables de la editorial de la Universitat Politècnica su actitud receptiva y de colaboración puesta de manifiesto durante todo el proceso de edición de este libro.

Por último, agradeceremos a aquellos lectores los comentarios, críticas y sugerencias de mejora que nos hagan llegar.

Luis Serrano Iribarnegaray; Javier Martínez Román

Valencia, diciembre de 2014

## PRÓLOGO A LA CUARTA EDICIÓN

Tomando como base los comentarios, sugerencias y experiencias obtenidas con la tercera edición del libro, la publicación de esta cuarta edición ha sido aprovechada por los autores para introducir varias mejoras en el texto, en el sentido de reforzar y ampliar aquellos temas cuyas repercusiones e importancia industriales, o cuyas dificultades en ser asimilados por parte del lector (detectadas por los autores) aconsejaban incidir en ellos con más detalle. A este respecto, destacamos los siguientes puntos principales:

- Los motores asíncronos industriales trabajan en saturación. Además, en su funcionamiento están involucrados dos sistemas referenciales (estator y rotor) y la frecuencia de las magnitudes eléctricas (corrientes, fuerzas electromotrices, caídas de tensión) del estator es muy distinta de la frecuencia de las magnitudes eléctricas del rotor. En esas condiciones no es extraño que incluso ni siquiera bastantes profesionales del área eléctrica consigan *entender en profundidad y desde una clara perspectiva conceptual* (más allá de meras manipulaciones matemáticas) los fundamentos físicos y la secuencia de transformaciones y procesos que permiten representar el funcionamiento de la máquina asíncrona en régimen permanente mediante un sencillo circuito equivalente en el cual todas sus variables eléctricas oscilan a frecuencia industrial. A la vista de estos hechos, en la deducción del circuito equivalente se han incorporado, en la nueva edición, algunas breves explicaciones adicionales, pero, sobre todo, se ha redactado un ejemplo numérico práctico (ejercicio 14 del capítulo IV) en cuya resolución se aplican y comentan sistemáticamente la práctica totalidad de las fórmulas y conceptos teóricos expuestos durante la precitada deducción del circuito equivalente. Consideramos que dicho ejercicio es de gran utilidad para el fin propuesto y recomendamos expresamente una lectura atenta del mismo.
- En claro contraste con los transformadores, la corriente de vacío de los motores asíncronos está comprendida, dependiendo del motor, entre el 20% y el 85% de la corriente nominal. Por tanto, en régimen de carga difícilmente puede considerarse aceptable (en particular y sobre todo para motores pequeños o con más de cuatro polos) la simplificación de situar la rama magnetizante del circuito equivalente directamente en bornes de la tensión de alimentación, que es lo que se hacía usualmente en el pasado (e incluso en nuestros días, en casos no infrecuentes). A ello hay que añadir que, con los ordenadores personales disponibles en la actualidad, la resolución del circuito equivalente “exacto” es muy rápida y sencilla, y que, por tanto, ha desaparecido el principal motivo aducido en el pasado para seguir aceptando los errores que implica utilizar siempre la simplificación mencionada. Por ello se ha enfatizado este punto en la nueva edición, proporcionando las fórmulas tanto para el circuito equivalente “exacto” como para el “aproximado”.
- La inmensa mayoría de los motores asíncronos para conexión directa a red utilizados hoy en día en la industria NO son motores de jaula de ardilla simple y parámetros constantes, como puede apreciarse en las curvas par-velocidad de los catálogos de diferentes fabricantes, curvas que son muy distintas de las que corresponderían a los precitados motores de jaula simple. Con el fin de destacar esta *realidad industrial*, además de mantener el anterior epígrafe 9 y el anexo B del capítulo IV, se ha reestructurado sustancialmente el epígrafe 7 de dicho capítulo IV, acentuando y primando en él aquellas explicaciones y desarrollos

teóricos relativos al par que resultan aplicables a cualquier tipo de motor asíncrono. Esto no ha sido obstáculo para que se haya dedicado un subepígrafe a tratar de forma específica la curva par-velocidad en el caso particular de los motores de jaula de ardilla simple.

Por otro lado, al igual que se hizo en ediciones anteriores, se ha mantenido en internet una síntesis estructurada del contenido de este libro. Las direcciones de internet para su acceso son las mismas que las ya indicadas en el prólogo de la segunda edición.

Finalmente, agradeceremos a aquellos lectores los comentarios, críticas y sugerencias de mejora que nos hagan llegar.

Luis Serrano Iribarnegaray; Javier Martínez Román  
Valencia, diciembre de 2016

# I. Fundamentos de Electromagnetismo e Introducción al Estudio de los Circuitos Magnéticos en las Máquinas Eléctricas

## I.1. Planteamiento y resumen del capítulo

La práctica totalidad de las máquinas eléctricas están basadas en la presencia de elevadas inducciones magnéticas en su interior. Para conseguir las, el procedimiento habitual es utilizar los efectos magnéticos de la corriente eléctrica que circula por sus devanados, arrollados sobre elementos ferromagnéticos (a veces junto con los efectos de imanes permanentes). Este campo magnético induce fuerzas electromotrices en los devanados de la máquina al variar el flujo concatenado con ellos, ya sea debida esa variación de flujo a una modificación de la intensidad del campo, a una modificación de la posición del devanado respecto del campo o a ambos factores a la vez. Y son precisamente estas f.f.e.e.mm. inducidas (junto con las corrientes que circulan por los devanados) las que permiten el intercambio de energía eléctrica de la máquina con los sistemas de alimentación a los que está conectada, en particular con las redes de distribución industriales. Por otra parte, en las máquinas eléctricas rotativas, debido a la interacción entre el campo magnético producido y las corrientes circulantes, aparecen fuerzas que, actuando sobre partes móviles, permiten la transmisión de energía mecánica entre la máquina y otros mecanismos o cargas a los que esté acoplada.

Conviene destacar el hecho arriba señalado, a saber: la utilización de devanados arrollados sobre materiales ferromagnéticos para conseguir una elevada inducción magnética (y el consiguiente flujo magnético) a lo largo de trayectorias prefijadas, y con un bajo consumo de la corriente magnetizante necesaria para ello. Esto da origen a configuraciones o estructuras que reciben el nombre genérico de “circuitos magnéticos”. Conviene señalar que dichos circuitos magnéticos se utilizan no sólo en máquinas eléctricas, sino también en otros aparatos o dispositivos tales como relés, contactores, bobinas con núcleo de hierro, etc.

En consecuencia, antes de la descripción y el análisis de las máquinas eléctricas objeto de este libro, es muy conveniente una revisión previa de ciertos conceptos fundamentales de magnetismo y electricidad y, en particular, de los siguientes: noción genérica de campo en la física, inducción, flujo magnético, intensidad de campo magnético, campo eléctrico, diferencia de potencial, tensión y potencia eléctrica. Dichos conceptos, ciertamente, se introducen ya en estudios de grado medio sobre electricidad y magnetismo, aunque no es tan infrecuente que eso se haga, al menos para algunos de ellos, de manera un tanto imprecisa (cuando no confusa o incluso incorrecta). De ahí que en el epígrafe 1.2 se proceda, con la máxima simplicidad posible, pero con rigor teórico, a la revisión arriba aludida con el fin, por un lado, de clarificar ideas y, por otro lado, poner de manifiesto el enlace de dichos conceptos con las bases sobre las que se sustenta la teoría de máquinas eléctricas. Para facilitar este segundo aspecto, el epígrafe 1.2 se cierra con la presentación de dos leyes o teoremas fundamentales que son de aplicación general para la determinación del campo magnético: el teorema de Gauss (o ley de continuidad del flujo magnético) y el teorema de Ampère (o ley de circulación del campo).

El epígrafe 1.3 describe la constitución y características más importantes de los materiales magnéticos utilizados en las máquinas eléctricas. En primer lugar justifica el origen del carácter ferromagnético de algunos materiales para tratar a continuación los dos grandes grupos de

materiales: chapa magnética e imanes permanentes. En cuanto a la chapa magnética se describen los dos fenómenos que originan la aparición de pérdidas en ella cuando está inmersa en un campo alterno (histéresis y corrientes de Foucault) y se presentan las *calidades normalizadas* típicas de chapa magnética indicando su denominación, principales características e incluso las curvas de magnetización y pérdidas específicas para algunas de ellas. Finalmente se llama la atención sobre el especial comportamiento y composición de los imanes permanentes.

En el epígrafe 1.4 se estudian los circuitos magnéticos específicos de las máquinas eléctricas. Se señala, en primer lugar, que en ellas existen siempre dos tipos de circuitos magnéticos claramente diferenciados: el *circuito magnético principal* (relacionado con los regímenes permanentes y la potencia nominal de la máquina) y el *circuito magnético de dispersión* (fundamental, sobre todo, en la evolución de los regímenes transitorios y en ciertos problemas de diseño de notable importancia industrial, como por ej. corrientes de cortocircuito, pares de arranque, pares máximos, esfuerzos máximos en conductores, o respuesta dinámica de un accionamiento.) Este segundo circuito es tratado en el epígrafe 1.7. En lo que respecta al análisis y método de estudio del circuito magnético principal hay que considerar, a su vez, dos variantes o grupos de máquinas: transformadores y máquinas rotativas de corriente continua, por un lado (epígrafe 1.4.1), y máquinas rotativas de corriente alterna (máquinas síncronas y asíncronas), por otro lado (epígrafe 1.4.2). En ambas variantes el planteamiento es similar: particularizar las leyes fundamentales a cada variante para determinar la distribución del flujo en el circuito magnético así como la relación existente entre la intensidad del campo magnético y las fuentes que lo producen. En las máquinas del primer grupo su circuito magnético principal está formado (excepto en la corona del rotor en máquinas de corriente continua) por la yuxtaposición de diferentes tramos tales que el flujo magnético tiene el mismo valor instantáneo en todas las secciones transversales de un mismo tramo. Este hecho permite aprovechar la fuerte analogía entre el comportamiento de dichos circuitos magnéticos y el de los circuitos eléctricos de corriente continua. Para las máquinas del segundo grupo, la metodología a seguir es la determinación de la distribución espacial de diferentes magnitudes (corrientes en los conductores, flujo en la corona, tensión magnética e inducción a lo largo del entrehierro de la máquina) y establecer la relación entre dichas distribuciones espaciales.

Los conceptos de *fuerza electromotriz*, *enlaces de flujo e inductancia* (en sus distintas variantes) son otros conceptos que, como los del epígrafe 1.2, también suelen introducirse en textos o cursos de grado medio sobre electricidad y magnetismo, y que resultan fundamentales para la teoría de máquinas eléctricas. Ahora bien, para la comprensión en profundidad de estos conceptos es necesario disponer de ciertos conocimientos previos relativos a circuitos magnéticos. Por ello se han pospuesto las explicaciones y comentarios sobre los aludidos conceptos a los epígrafes 1.5 (fuerzas electromotrices y enlaces de flujo) y 1.6 (inductancias). En este último epígrafe se expone en detalle y se razona por qué para un análisis industrial, práctico y realista de las máquinas eléctricas resulta muy adecuado y ventajoso utilizar las inductancias magnetizantes y de dispersión (inductancias que se correlacionan con una manera determinada de subdividir los enlaces de flujo de un devanado), en vez de las inductancias propias y mutuas, muy utilizadas en la teoría clásica de circuitos (y que se correlacionan con otra manera de subdividir los enlaces de flujo).

Finalmente, el epígrafe 1.7, como ya se ha comentado, está dedicado al circuito magnético de dispersión de las máquinas. En él se argumenta y se subraya la importancia decisiva que tiene el citado circuito, sobre todo, en la evolución de sus regímenes transitorios.

De acuerdo con todo lo anterior, el contenido restante de este capítulo se ha estructurado según el siguiente esquema:

- I.2. Revisión de conceptos básicos de electromagnetismo esenciales para el estudio de las máquinas eléctricas.
- I.3. Materiales magnéticos utilizados en máquinas eléctricas
- I.4. Circuito magnético principal de las máquinas eléctricas
- I.5. Ff.ee.mm. inducidas y enlaces de flujo
- I.6. Inductancias. Alternativas para subdividir los enlaces de flujo de un devanado.
- I.7. Introducción al estudio del circuito magnético de dispersión en las máquinas eléctricas. Su importancia industrial.

## **I.2. Revisión de conceptos básicos de electromagnetismo esenciales para el estudio de las máquinas eléctricas**

### ***I.2.1. Origen, necesidad y definición del concepto de campo en la física***

Durante los siglos XVIII y XIX, el mundo físico de la mecánica y la electricidad fue explicado mediante leyes que medían la acción a distancia entre masas (Newton), cargas eléctricas y “masas magnéticas” (Coulomb), y entre corrientes eléctricas (Ampere). Incluso hoy en día, en bastantes casos, es todavía así. El papel esencial de los fenómenos físicos es atribuido a esas masas, cargas eléctricas o corrientes, las cuales interaccionan instantáneamente en función de sus valores y de las distancias existentes entre ellas. El medio circundante (aire, vacío, etc.) apenas jugaba ningún papel o, en todo caso, uno muy secundario, en la transmisión de esas fuerzas. La concepción de la “acción instantánea a distancia” ejercida entre elementos individualizados, debido al rigor de sus formulaciones matemáticas así como a la concordancia entre las previsiones teóricas y las medidas experimentales, parecía desafiar cualquier otra alternativa en la interpretación de los fenómenos físicos.

Faraday, sin embargo, se rebeló denodadamente contra esta visión científica. Uno de los aspectos débiles de la teoría de la acción a distancia radica en la ausencia de una explicación física (pese a su exactitud en la cuantificación matemática del proceso) sobre el modo de transmitirse y actuar las fuerzas a distancia. ¿De qué forma se lleva a cabo realmente la transmisión de una fuerza a distancia? Pero en realidad, el aspecto más débil de la teoría queda claramente patente al considerar que, si en la transmisión de esa fuerza no interviene el medio, sino que depende exclusivamente de la presencia de masas o de cargas eléctricas, esa acción debe ponerse de manifiesto *instantáneamente* en cuanto se sitúen en el espacio las citadas masas o cargas eléctricas. Hoy en día se sabe taxativamente que eso es falso, puesto que ningún fenómeno puede propagarse a velocidad infinita (en realidad, la velocidad de esa propagación nunca puede superar la velocidad de la luz en el vacío).

En la física moderna el concepto de energía está estrechamente asociado al concepto de campo de fuerzas. La teoría de campos introdujo, en cierto modo, una revolución conceptual con su nuevo enfoque del proceso energético puesto que, de acuerdo con ella, la energía puesta en

juego en un sistema no está ligada primariamente a la acción de los cuerpos intervinientes (desplazamiento de masas o cargas) sino que tiene su asiento y se encuentra distribuida en todo el medio envolvente, y consiste en una *alteración o modificación de ese espacio respecto a su estado primitivo*. Precisamente porque el espacio se encuentra modificado, al colocar un cuerpo en el campo (masa, carga eléctrica, dipolo magnético), no se comporta igual que fuera de él, sino que se encuentra sometido a una fuerza.

Sin ninguna pretensión de desarrollar aquí la teoría de campos, se dará un ejemplo sencillo con el objetivo principal de ayudar a visualizar una imagen de los anteriores conceptos. Sea una membrana tensa que va a representar el espacio no alterado y sobre la que se sitúa una bolita de masa  $m$  despreciable. La bolita quedará lógicamente inmóvil, es decir, como si estuviera fuera de la zona de influencias de un posible "campo". Supóngase que a continuación se coloca sobre la membrana una bola grande. Esto alterará la horizontalidad de la membrana, es decir, se habrá modificado el espacio, creando "un campo de fuerzas" que se extenderá a toda la membrana. Al colocar ahora la bolita sobre la membrana deformada, irá hacia la bola grande (Fig. I-1), siguiendo en su trayectoria precisamente una de las llamadas líneas de fuerza del campo.



Fig. I-1 Analogía para describir la acción entre dos masas según la teoría de campos

Nótese cómo en esta imagen mecánica, la idea de la acción a distancia entre las dos masas  $M$  y  $m$  ha sido sustituida por el concepto de "campo de fuerzas" que, en realidad, constituye una profunda modificación del medio, representada en este caso por la deformación de la membrana.

Naturalmente, la alteración del espacio introducida exige la realización de un trabajo previo (en el ejemplo descrito, el necesario para deformar la membrana). Supóngase, para continuar con el mismo ejemplo, que esa deformación se hubiera efectuado mediante una serie de fuerzas (por ej., pequeños pesos convenientemente distribuidos). De acuerdo con la nueva concepción, y desde luego parece más físico, la energía no reside en los pesos desplazándose, sino que está ligada en cada instante al "grado de alteración" que presenta en ese momento el medio. La energía está así "distribuida por todo el campo". Si, mediante una función matemática adecuada, se define y caracteriza para todo punto de la membrana su estado de deformación elástica, está claro que, integrando convenientemente en todo el volumen, puede obtenerse en cualquier instante la energía del sistema.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> El ejemplo aducido, que trata de proporcionar una interpretación descriptiva del proceso de atracción entre dos masas mediante la teoría de campos, resulta, pese a su aparente simplicidad, algo más que una mera imagen ingeniosa. Baste decir de forma breve, ya que esta materia sale fuera del marco de la presente obra, que, de acuerdo con la teoría de la relatividad general, la gravedad es una propiedad métrica del espacio-tiempo y que, según Hilbert demostró en su día, actúa de forma tal que reduce a un mínimo la curvatura total del continuo espacio-tiempo. Ello llevó a Whittaker a expresar de

De manera análoga a lo que ocurría con las masas en el campo gravitatorio, en las teorías básicas de la electrotecnia, se atribuye el papel fundamental a las cargas aisladas o a las cargas en movimiento a través de conductores. En dichas teorías, el campo eléctrico o magnético aparecen más bien como una magnitud auxiliar de cálculo, sin demasiada importancia o entidad física. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell, que constituyen las ecuaciones más generales de la electrotecnia, son, a este respecto, de una naturaleza completamente distinta. En ellas, la realidad física fundamental corresponde a los campos eléctricos y magnéticos (lo que es siempre válido<sup>2</sup>, pero que queda muy especialmente de relieve en los fenómenos de alta y muy alta frecuencia). Asimismo, y en consonancia con este enfoque (y por analogía con el ejemplo previo de los pesos), se considera que la energía no reside tanto en las cargas o corrientes, sino que, utilizando el lenguaje de la física moderna, está toda ella asociada a la “deformación tensional” del espacio producida por el campo electromagnético, deformación que, en cada punto, viene caracterizada por los valores que presentan en él los campos eléctrico y magnético. Con este enfoque, además, se elimina de golpe la dificultad de admitir la existencia y transmisión de fuerzas actuantes a distancia e instantáneamente. Ello es así, porque, prosiguiendo con las ideas precursoras de Faraday y de Maxwell, no existen, sencillamente, ni transmisión instantánea, ni fuerzas eléctricas o magnéticas actuantes a distancia. De acuerdo con la concepción intuitiva y muy gráfica de Faraday y Maxwell, el universo puede imaginarse como hendido y entrecruzado en todas direcciones por las líneas de fuerza de los campos eléctrico y magnético, líneas que lo surcan como una gigantesca tela de araña, más o menos tensa en los diferentes puntos, en consonancia con la magnitud que en ellos tienen los citados campos. Cualquier “perturbación del tensionado electromagnético del espacio” (por modificación de los campos eléctricos o magnéticos) se propaga con una velocidad que depende del medio material que llena dicho espacio, dando lugar con ello a la génesis y transmisión de una perturbación electromagnética (onda electromagnética).

De acuerdo con lo expuesto, hablando pues en términos generales (aplicables tanto a procesos gravitatorios como electromagnéticos), y sin pretensiones de una precisión exhaustiva, se puede definir un campo de fuerzas (o, abreviadamente, un campo) como una región alterada del espacio, bien vacía, bien ocupada total o parcialmente por algún medio material, en la que se presentan fenómenos físicos que suponen la aparición de fuerzas o pares sobre la magnitud de prueba fundamental del campo (por ej., la masa, la carga eléctrica) y que implican, por tanto, la posibilidad de intercambios y manifestaciones energéticas. Desde el punto de vista del análisis teórico, un campo (lo que equivale a decir: los fenómenos que en él aparecen) queda completamente descrito mediante determinadas funciones matemáticas que están unívocamente definidas para todos los puntos del espacio donde se manifiesta el campo. A dichas funciones, o a algunas de ellas, se les puede asignar una interpretación o significado físico directo, propio del campo en cuestión (por ej, la inducción magnética, **B**, la intensidad del campo eléctrico, **E** etc). A su vez, estas magnitudes físicas del campo

---

forma muy gráfica que la gravitación consiste, simplemente, en “el esfuerzo continuo del universo por enderezarse”.

<sup>2</sup> Una exposición amplia y excelente sobre estos temas, dotada de una gran belleza, la constituye la obra del K. Simonyi, “Theoretische Elektrotechnik”, referenciada en la bibliografía.

(escalares o, más frecuentemente, vectoriales) suelen ser fácilmente correlacionables con los fenómenos aludidos de aparición de fuerzas y pares.

Unas herramientas utilísimas para visualizar y representar gráficamente los campos son las llamadas “líneas de fuerza del campo”, concepto introducido por Faraday en sus trabajos experimentales sobre el campo magnético. Una línea de fuerza de un campo (magnético, eléctrico, etc.) es una línea imaginaria dibujada de tal modo que su dirección en cada punto (o sea, la dirección de su tangente en él) es la misma que la dirección del campo en dicho punto. Dado que, en general, la dirección del campo varía de un punto a otro, las líneas de fuerza son prácticamente siempre líneas curvas.

Evidentemente, por todo punto del campo pasa una (y sólo una) línea de fuerza y, por tanto, sería posible, desde luego, trazar una línea de fuerza que pasase por cada uno de ellos. Pero si así se hiciera, toda la superficie del dibujo estaría completamente llena de líneas de fuerza, con lo que éstas serían indistinguibles individualmente, y la representación gráfica carecería de toda utilidad. Ahora bien, si se limita el número de las líneas que se dibujan, esa herramienta visual puede resultar muy útil, sobre todo porque si esa limitación se hace de modo juicioso es posible además utilizar la gráfica de las líneas de fuerza para indicar no sólo la dirección, sino también, a la vez, la magnitud del campo. Esto último se consigue espaciando las líneas de fuerza de tal modo que el número de las que atraviesan la unidad de superficie perpendicular a la dirección del campo sea, en cada punto, igual (o proporcional) al valor del campo en dicho punto. De esta manera, en una zona del espacio donde la intensidad del campo sea grande, las líneas de fuerza estarán juntas y apretadas y, al revés, en una región de bajo campo, las líneas estarán muy separadas<sup>3</sup>.

Por otro lado, es fácil demostrar que, si la magnitud física de prueba característica de un campo (masa, carga eléctrica, etc.) con un valor “infinitamente pequeño” (para no alterar el campo original) se mueve libremente bajo la influencia *exclusiva* de las sollicitaciones del campo, describirá, al seguir su trayectoria, una línea de fuerza del citado campo en cuyo seno ha sido introducida, materializando así las líneas de fuerza del campo.

### ***1.2.2. Inducción magnética, campo eléctrico, tensión, potencia eléctrica y otros conceptos básicos de electricidad y magnetismo***

Desde antiguo es conocida la propiedad de cierto mineral de hierro, la magnetita, consistente en la atracción de piezas de hierro y de sus aleaciones. Esta característica la presentan también otros materiales que, al igual que la magnetita, reciben el nombre de imanes.

Otra característica de los imanes, tanto naturales como artificiales, es el efecto de polaridad y orientación, consistente en que al suspender un imán de un hilo, de forma que pueda oscilar libremente, este se coloca de tal manera que, el eje de simetría que une sus dos extremos

---

<sup>3</sup> Nótese que, de acuerdo con su definición, la información que realmente proporciona una línea de fuerza es la *dirección* del campo. Evidentemente, la intensidad que tiene el campo en los distintos puntos integrantes de esa línea que, en el caso general, puede variar mucho a lo largo de la línea, no pueden deducirse a partir de ella exclusivamente.

coincide muy aproximadamente con la dirección del meridiano terrestre que pasa por allí. Por esta razón, se convino en llamar a los extremos de los imanes polo norte y polo sur.

Los dos polos de un imán están separados por una línea neutra. Si se divide el material por dicha línea, se obtienen dos imanes con sus respectivos polos norte y sur. Este efecto se presenta independientemente de la zona en donde se fraccione el imán y del número de divisiones que se realicen, y pone de manifiesto que el efecto de polaridad y orientación de un imán se mantienen al dividirlo y que no es posible aislar un polo magnético (en contraposición a lo que ocurre con las cargas eléctricas positivas y negativas).

Asimismo, es también muy conocido que, si se colocan dos imanes relativamente próximos entre sí, se ejercen entre ellos acciones (aparición de fuerzas y pares) de manera parecida a las que se manifiestan entre las cargas eléctricas.

La aparición de fuerzas y pares en una región con imanes pone de manifiesto, siguiendo el enfoque de la teoría de campos, la existencia de un campo de fuerzas que, en este caso sencillo (presencia exclusiva de imanes fijos) se denomina campo magnetostático.

La dirección en que actúan tales fuerzas puede obtenerse experimentalmente mediante una pequeña brújula o aguja imantada. En efecto, en ausencia de imanes, la brújula se orientará indicando la dirección norte-sur del campo magnético terrestre. Al colocar un imán potente en sus proximidades, la aguja imantada girará, señalando con ello la dirección y el sentido en que actúan las fuerzas del campo asociado al imán.

Además de la brújula (cuyo tamaño debe ser el mínimo posible), otro método alternativo y mucho más “visual e instructivo” para explorar experimentalmente un campo magnético consiste en espolvorear limaduras de hierro muy finas encima de superficie horizontal sobre la que se ha colocado un imán. Las limaduras, inicialmente desordenadas, se concentran en determinadas zonas del espacio cercano al imán, dando lugar a unas configuraciones que comienzan y finalizan en sus polos, llamadas espectros magnéticos (Fig. I-2). La formación de estas configuraciones puede ser explicada considerando la existencia de un campo de fuerzas magnético que actúa sobre ellas. Dicha acción es posible porque, por influencia del campo magnético, las limaduras se magnetizan al ser colocadas dentro de la región de influencia del imán, convirtiéndose en diminutos imanes (de manera análoga a cómo pueden polarizarse las moléculas de un dieléctrico introducido en un campo eléctrico, formando dipolos eléctricos, de estructura formalmente equivalente a los “dipolos magnéticos” o imanes). Sobre esos imanes elementales, de manera similar al ejemplo de la brújula, actúa entonces un par de fuerzas que hace girar cada limadura hasta orientarla en una dirección muy próxima a la que tiene el campo magnético en la posición ocupada por la limadura; es decir, hasta que cada limadura quede situada sobre una línea de fuerza del campo. Por ello, puede decirse que los espectros de limaduras materializan las líneas de fuerza y constituyen

verdaderas representaciones gráficas del campo magnético<sup>4</sup> en el sentido preconizado por la teoría de campos.

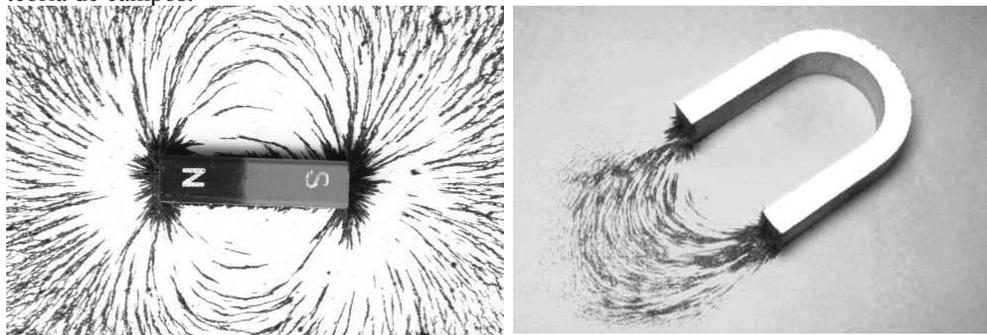


Fig. I-2 Visualización de los espectros magnéticos de imanes mediante limaduras de hierro<sup>5</sup>.

De lo expuesto se deduce que, en una primera definición (véanse párrafos posteriores para mayores precisiones) el campo magnético es aquella región alterada del espacio en la que cualquier imán o cuerpo magnetizado, tras ser introducido en ella, se encuentra sometido a sollicitaciones dinámicas (fuerzas y pares) de naturaleza magnética. A cada punto de dicha región se le asocia una magnitud física vectorial (es decir, una función vectorial, desde la perspectiva del análisis matemático) que recibe el nombre de inducción magnética, **B**. Su unidad en el sistema internacional es el tesla (T). En algunos casos, se utiliza el gauss (La relación entre ambos es  $1T = 10^4$  gauss).

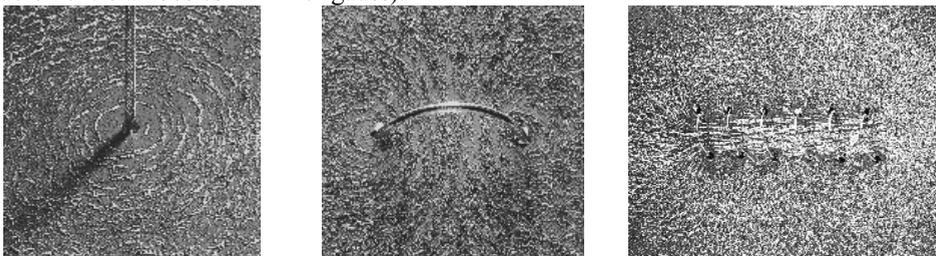


Fig. I-3 Espectros magnéticos experimentales producidos por un conductor rectilíneo, una espira circular y un solenoide<sup>6</sup>.

Hay que añadir de inmediato, que, como se comprueba experimentalmente, no sólo los imanes, sino también las cargas eléctricas *en movimiento* (o las corrientes eléctricas) se ven sometidas a fuerzas y pares en el seno de un campo magnético. Y que, recíprocamente, las cargas en movimiento, o las corrientes, dan origen también a un campo magnético, como se conoce desde el célebre experimento de Oersted, en 1820. En las fotografías de la Fig. I-3

<sup>4</sup> Seguramente no es ninguna casualidad el que Michael Faraday, considerado por muchos historiadores de la ciencia el mejor experimentador científico de todos los tiempos, recurriera sistemáticamente a los espectros magnéticos.

<sup>5</sup> <http://munty13.wordpress.com/2009/04/>; <http://www.gettyimages.com/creative/magnetic-field-stock-photos>

<sup>6</sup> [http://web.utk.edu/~cnattras/Phys250Fall2012/modules/module3/atoms\\_in\\_magnetic\\_fields.htm](http://web.utk.edu/~cnattras/Phys250Fall2012/modules/module3/atoms_in_magnetic_fields.htm)

están representados mediante sus correspondientes espectros magnéticos obtenidos experimentalmente las líneas de inducción del campo magnético producido por una corriente eléctrica rectilínea, una corriente circular y una corriente que recorre un solenoide largo.

Se trata, en todos los casos, de corrientes que se establecen en circuitos situados en el aire. Como comentario interesante se ve que en la fotografía de la derecha la inducción magnética es importante, sobre todo, en el interior del solenoide, donde hay una clara concentración de líneas de inducción (de limaduras) que, además, están uniformemente espaciadas y son paralelas al eje del solenoide. Esta configuración indica que la inducción en el interior de un solenoide o de una bobina larga debe ser uniforme y de elevado valor. Dicha configuración de líneas de fuerza, por otro lado, concuerda con la de un imán alargado (Fig. I-4) y muestra que, a efectos magnéticos, ambos dispositivos son equivalentes, hecho que concuerda con los cálculos teóricos.

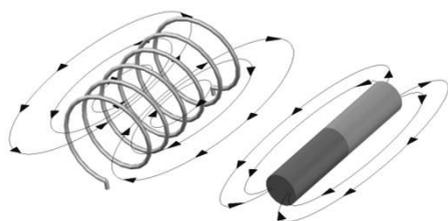


Fig. I-4 Campo magnético producido por un solenoide y por un imán.

Otra magnitud física, ésta de carácter *escalar*, también directamente asociada a la imagen de las líneas de fuerza magnéticas es el llamado flujo del vector inducción  $\mathbf{B}$  a través de una superficie dada, usualmente designado como flujo magnético que atraviesa dicha superficie, y que se representa con el símbolo  $\Phi$ . Desde una perspectiva prioritariamente gráfica, el flujo magnético de una superficie se define como el número total de líneas de fuerza de inducción que entran en, o salen de, la citada superficie.

Por convención, se considerará positivo el flujo saliente.

Sea una superficie plana,  $A_1$ , de área  $S$ , inmersa en un campo magnético cuya inducción es constante, de módulo  $B$ , y de dirección perpendicular a  $A_1$  en todos los puntos (Fig. I-5). Puesto que el número de líneas de fuerza por unidad de superficie perpendicular al campo se representa como  $B$ , el flujo que atraviesa la superficie  $A_1$  es:

$$\Phi_{A_1} = B S \quad (I.1)$$

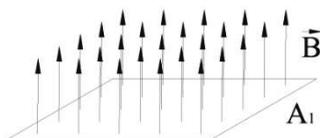


Fig. I-5 Flujo de la inducción magnética (flujo magnético) a través de una superficie plana perpendicular al campo

Si se inclina la superficie  $A_1$ , de manera que la normal a dicha superficie forme un ángulo  $\lambda$  con la dirección del campo, se obtiene la superficie  $A_2$ . El flujo que la atraviesa vale

$$\Phi_{A_2} = B S \cos \lambda \quad (I.2)$$

En el caso general de una superficie cualquiera (plana o alabeada), la inducción en sus diferentes puntos ni será constante, ni coincidirá con la perpendicular a la superficie en esos puntos. En tal caso (Fig. I-6), hay que dividir el área en superficies elementales,  $dS$ , en cada

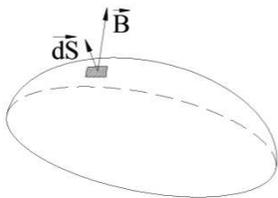


Fig. I-6 Flujo a través de un elemento diferencial de superficie

una de las cuales la inducción es constante y forma con la perpendicular a  $dS$  un ángulo  $\lambda$  (diferente, en general, para cada  $dS$ ).

El flujo elemental,  $d\Phi$ , que atraviesa cada una de esas superficies,  $dS$ , se obtiene mediante la fórmula general:

$$d\Phi = B dS \cos \lambda = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (I.3)$$

es decir, el flujo magnético que atraviesa un área infinitesimal es el producto escalar de los vectores  $d\vec{S}$  y  $\vec{B}$  en dicha área. Evidentemente, el flujo que atraviesa toda la superficie (Fig. I-6) se obtiene mediante integración<sup>7</sup> de la ecuación (I.3). Dicha ecuación (I.3) justifica el que, en ocasiones, al vector inducción magnética,  $\vec{B}$ , se le designe también con el nombre de densidad de flujo magnético.

En estudios básicos sobre electricidad y magnetismo, se introducen ya los conceptos de inducción y flujo magnético, junto con otros tales como campo eléctrico, tensión, fuerza electromotriz, etc. aunque no es tan infrecuente que se haga de manera un tanto imprecisa (cuando no incluso errónea o, al menos, confusa). Revisaremos pues a continuación, con la máxima simplicidad posible, pero con rigor teórico, las ideas más importantes típicas de esa introducción básica, acompañadas de breves comentarios con el fin de, por un lado, evitar posibles errores de concepto, y, por otro lado, enlazar dichos conocimientos básicos con los utilizados en el desarrollo de la teoría de máquinas eléctricas.

Consideremos un sistema de referencia,  $S$ , determinado. Se define el campo de fuerzas eléctrico propio de ese sistema de referencia como aquella zona o región alterada del espacio en la que cualquier carga eléctrica *estática* y, por extensión, cualquier cuerpo eléctricamente cargado y estático (es decir, fijo en dicho sistema de referencia) se ven sometidos a una fuerza de tipo eléctrico<sup>8</sup> al ser colocados en cualquier punto del campo de fuerzas. En consecuencia, si en un punto genérico  $(x, y, z)$  de dicho campo se coloca la unidad de carga eléctrica positiva, sobre ella se ejercerá una fuerza que, en general, variará con el punto y con el tiempo. Se define como intensidad de campo eléctrico o, simplemente, *campo eléctrico*  $\vec{E}$  en un punto a la fuerza que se ejerce sobre la unidad de carga positiva *estática* (magnitud de prueba) fijada en dicho punto. Si en vez de la carga unitaria, se coloca<sup>9</sup> una carga estacionaria  $q_0$ , y la fuerza que aparece sobre ella es  $\vec{F}_{q_0}$ , el campo eléctrico viene dado por la expresión (el subíndice “0”, alude a la velocidad nula de la carga):

<sup>7</sup> En la física matemática, la integración de la ecuación (I.3) se define *para cualquier campo vectorial*,  $\vec{X}$ , y recibe el nombre de flujo del vector  $\vec{X}$  a través de la superficie  $S$ . En este sentido, conviene mencionar ya aquí el flujo del vector desplazamiento eléctrico,  $\vec{D}$ , al que se hace referencia en páginas posteriores.

<sup>8</sup> Es decir, se excluye la fuerza gravitatoria así como cualquier otra fuerza externa, por ej., de origen físico-químico o de tipo elástico etc. que, en su caso, pudieran actuar sobre la carga.

<sup>9</sup> Esta definición de campo implica, por supuesto, que la carga de prueba,  $q$ , es siempre lo suficientemente pequeña como para que la distorsión introducida por ella en el campo preexistente a su introducción sea despreciable.

$$\overline{E}(x, y, z, t) = \frac{\overline{F}_{q_0}(x, y, z, t)}{q_0} \quad (I.4)$$

Desde el punto de vista dimensional, el campo eléctrico,  $\mathbf{E}$  es, por tanto, fuerza por unidad de carga. Se trata de una magnitud vectorial, por serlo también la fuerza. Su unidad en el sistema internacional es el newton por culombio (N/C), también llamado voltio por metro (V/m).

Conviene subrayar que el hecho de que para la definición o medida del campo eléctrico, tal como se ha estipulado en el párrafo precedente, se exija que la *carga de prueba sea estática* en el espacio (velocidad nula en el sistema de referencia considerado), no implica en modo alguno que el *campo eléctrico* en dicho sistema sea un campo también estático, invariable en el tiempo (Ese sería, por ej., el caso del campo más sencillo, que es el campo electrostático, producido, exclusivamente, por un conjunto de cargas eléctricas fijas y aisladas). En otras palabras, la definición dada es general y sirve cualquiera que sea el tipo de campo eléctrico.

Si se cambia de sistema de referencia,  $S$ , pasando a otro,  $S'$ , en movimiento respecto al primero con una velocidad uniforme,  $\mathbf{v}$ , muy inferior a la velocidad de la luz, entonces el campo eléctrico,  $\mathbf{E}'$ , correspondiente al punto genérico  $(x, y, z)$  medido por un observador del segundo sistema, es distinto del campo  $\mathbf{E}$ , medido por un observador de  $S$  en el mismo punto e instante, existiendo entre ambos campos la siguiente relación:

$$\overline{E}' = \overline{E} + \vec{v} \times \overline{B} \quad (I.5)$$

expresión en la cual  $\mathbf{B}$  es la inducción magnética medida en el sistema  $S$  original<sup>10</sup>.

De lo expuesto se deduce que, si en un momento dado, una carga  $q$  se desplaza a velocidad  $\mathbf{v}$  respecto a un sistema de referencia (por ej., respecto al sistema  $S$ ), la fuerza que se ejerce sobre dicha carga puede obtenerse de forma muy rápida operando en el sistema  $S'$ . En efecto, en dicho sistema la carga es estacionaria, y, por la definición de campo eléctrico, se tiene de inmediato:

$$\overline{F}_{q,v} = q \overline{E}' = q(\overline{E} + \vec{v} \times \overline{B}) \quad (I.6)$$

y la fuerza así calculada que actúa sobre la carga es, naturalmente, la misma<sup>11</sup>, cualquiera que sea el sistema en el cual se mida, en el supuesto aceptado de que se trate de sistemas de

<sup>10</sup> La ecuación precedente se deduce, por ej., a partir de las transformaciones entre sistemas proporcionadas por la teoría de la relatividad, despreciando en las fórmulas generales la velocidad relativa de los referenciales frente a la velocidad de la luz. Conviene también recordar que el campo eléctrico,  $\mathbf{E}$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}$  medidos ambos en (o propios de) *cualquier referencial*, están relacionados entre sí por la segunda ecuación de Maxwell  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$

<sup>11</sup> En efecto, supongamos varios sistemas de referencia galileanos y que sobre la carga sólo actúa la fuerza procedente de los campos eléctrico y magnético. Como efecto de esa fuerza, en uno de los sistemas la carga se moverá con una cierta aceleración. Pero esa aceleración es la misma medida en todos los demás sistemas (ya que sus velocidades respectivas son constantes). Por otro lado, para velo-

referencia galileanos (es decir, sistemas que se mueven uno respecto a otro a velocidad constante y muy inferior a la de la luz).

La ecuación (I.6) es muy conocida y célebre en la física, y proporciona, en su segundo término, la llamada *fuerza de Lorenz*, designada así en honor de Hendrik Lorenz, quien la estableció por primera vez a finales del siglo XIX. Hay que decir que en la mayoría de los libros sobre magnetismo, en vez de partir del *campo eléctrico* medido en *dos referenciales distintos* (como aquí se acaba de hacer), el enfoque teórico más usual consiste en partir directamente de la fuerza de Lorenz. Es decir, se toma como punto de arranque una carga *estacionaria* en el sistema S, y se determina o se mide la fuerza que actúa sobre ella, lo que, utilizando la fórmula (I.4), proporciona, por definición, el campo eléctrico del sistema S en cada punto. En una segunda etapa, se imprime a la carga  $q$  una velocidad constante en S y se mide en cada punto de su trayectoria la fuerza que actúa sobre ella. Se comprueba que, para cargas en movimiento, esa fuerza actuante es distinta del caso anterior de carga estática (salvo en un campo puramente electrostático). Conocidas la fuerza total, la velocidad de la carga en S y el campo eléctrico, se aplica entonces la ecuación (I.6) que, en ese enfoque, sirve como definición axiomática de la inducción magnética. En otras palabras, con ese enfoque, se afirma (se postula, más bien) que existe un campo magnético en un punto del sistema S cuando (descontando las eventuales fuerzas de gravitación, elástica etc.), se comprueba que, *además* de la fuerza eléctrica,  $\mathbf{F}_{q0}$ , aparece o se ejerce una *fuerza adicional*,  $\mathbf{F}_{\text{mag}}$ , sobre una carga  $q$  en movimiento que pasa por dicho punto con velocidad  $\mathbf{v}$ , fuerza adicional que es siempre perpendicular a la trayectoria. Se observa que, para una velocidad de módulo prefijado, dicha fuerza adicional es máxima (en cada punto) cuando el vector velocidad de la carga está contenido en un determinado plano. Se establece entonces, por definición, que el vector inducción magnética,  $\mathbf{B}$  en dicho punto es perpendicular al precipitado plano, y que el módulo de  $\mathbf{B}$  es igual al cociente de los módulos de esa fuerza magnética máxima y la velocidad. Se constata entonces experimentalmente que, cualquiera que sea  $\mathbf{v}$ , la fuerza adicional medida,  $\mathbf{F}_{\text{mag}}$ , es igual, por unidad de carga, al producto vectorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (y, por tanto, dicha fuerza es perpendicular al plano formado en todo instante por los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$ , Fig. I-7). Como se ve, en este enfoque (utilizado en bastantes libros), el elemento para explorar la constitución del campo magnético (y determinar su inducción,  $\mathbf{B}$ ) es la unidad de carga móvil desplazándose con una velocidad de módulo constante, mientras que para la definición del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se utiliza (en todos los enfoques) como magnitud de prueba del campo<sup>12</sup> una carga estacionaria.

---

idades muy inferiores a la de la luz, es válida la mecánica clásica, lo que implica que la masa de la carga se conserva. Al ser iguales masa y aceleración, la ecuación de Newton  $F=m \cdot a$ , aplicable en todos los sistemas, exige que las fuerzas electromagnéticas medidas en todos ellos sean iguales.

<sup>12</sup> Conviene observar que, a diferencia de la carga estacionaria usada en la exploración del campo E, la carga móvil, sin embargo, no constituye la llamada en la física de campos “magnitud física de prueba característica del campo” magnético. Dicha magnitud característica sería, en pura teoría, el monopolo magnético (imposible de aislar), el cual, abandonado en el campo magnético, describiría la trayectoria correspondiente a una línea de fuerza del campo.

De acuerdo con lo anterior, en la Fig 1-7 se tiene:

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB \text{sen}(\varphi) \quad (I.7)$$

Es importante percatarse de que la fuerza adicional experimentada por una carga móvil en el seno de un campo magnético, a la que acaba de aludirse, es siempre perpendicular tanto a la dirección de su movimiento,  $\mathbf{v}$ , como a la dirección de la inducción magnética,  $\mathbf{B}$ . Por consiguiente, esta fuerza adicional solamente modifica la trayectoria de la carga, sin cambiar el valor numérico de su velocidad, es decir, *sin realizar ningún trabajo mecánico*, de manera análoga a lo que ocurre con una fuerza centrípeta. (Otra forma de verlo: el ángulo entre el recorrido elemental,  $d\mathbf{l}$  – que es paralelo a  $\mathbf{v}$  – y la fuerza adicional  $\mathbf{F}_{mag}$  a lo largo de toda la trayectoria de la partícula es siempre igual a  $90^\circ$ , cuyo coseno es cero).

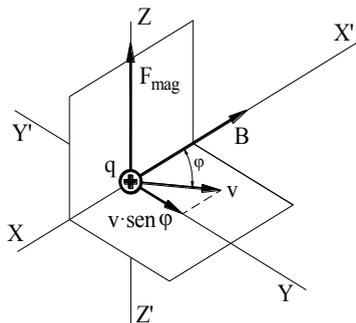


Fig. I-7 Fuerza adicional sobre una carga móvil en el seno de un campo magnético

Lo anterior determina que, aunque en el caso general, en un sistema S existen campo eléctrico y magnético (y, por tanto, *la fuerza* sobre una carga es debida a ambos campos), para calcular sin embargo *el trabajo* o la energía proporcionada por una carga  $q$ , al desplazarse a lo largo de una trayectoria “ $ab$ ” establecida en dicho sistema, sólo es necesario considerar el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en el *precitado sistema S* con el valor que presenta en cada momento y en cada punto de la trayectoria. Dicho trabajo, teniendo en cuenta (I.6), viene dado por:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F}_q \cdot d\vec{l} = \int_a^b q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_a^b q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (I.8)$$

y el trabajo producido cuando es la unidad de carga la que recorre el trayecto  $ab$  (trabajo por unidad de carga circulante a lo largo del trayecto o tramo  $ab$  de un circuito), vale:

$$\frac{W_{ab}}{q} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = u_{ab} \quad (I.9)$$

es decir, la energía por unidad de carga cuando se recorre el trayecto  $ab$  es numéricamente igual a la integral curvilínea del campo eléctrico a lo largo de dicho trayecto. Esa integral recibe el nombre de *tensión eléctrica a lo largo del tramo o trayecto  $ab$* . Su unidad es el voltio (V). A veces se designa también, de modo, en rigor, impropio, como diferencia de potencial eléctrico *entre los puntos a y b*.

Puesto que estos conceptos, de manera nada infrecuente, son confundidos y malinterpretados incluso por ingenieros eléctricos, se hará aquí un breve comentario sobre ellos. Para empezar, conviene dejar claro que, *en el caso general*, la tensión  $u_{ab}$  (que, de acuerdo con la definición dada en (I.9), es una magnitud escalar igual al trabajo proporcionado por - o suministrado a - la unidad de carga eléctrica al recorrer el trayecto “ $ab$ ”), *depende del camino* seleccionado para ir desde “ $a$ ” hasta “ $b$ ”. Por tanto, para caracterizar dicho trabajo *en el caso más general*, no es correcto hablar de tensión *entre los puntos “a” y “b”*, como si el citado trabajo por unidad de carga fuese una función exclusiva de los puntos

inicial y final de la trayectoria, sin importar el camino concreto recorrido. Esto, en sentido estricto, *solamente* es posible cuando el campo eléctrico es irrotacional (campo conservativo), que es el caso, por ej., del campo electrostático. En *ese* caso particular, la energía puesta en juego para que la unidad de carga se traslade desde “a” hasta “b”, recibe el nombre de *diferencia de potencial* existente entre los puntos a y b. Y la designación “entre los puntos” resulta aquí correcta y adecuada. De ahí que, y de una forma general, la diferencia de potencial entre dos puntos ab se defina como la integral curvilínea de la *componente conservativa* del campo eléctrico a lo largo de una trayectoria cualquiera que una dichos puntos.

$$v_{ab} = \int_a^b \overrightarrow{E}_{\text{conservativo}} \cdot d\vec{l} \quad (I.10)$$

Conviene añadir que, en algunos textos, se utiliza además la palabra “voltaje eléctrico”, sin que sus autores señalen de forma clara si la emplean como sinónimo de diferencia de potencial o de tensión. En la norma UNE 21302-121:2001 se indica que el término tensión debe representarse por el símbolo  $U$ , entenderse como sinónimo del término voltaje, y este último considerarse en desuso.

Ahora bien, si se restringe el análisis al campo de la teoría clásica de circuitos de corriente alterna y se hace uso de las adecuadas hipótesis simplificativas (casi nunca explicitadas con claridad en los textos correspondientes), la aplicación de las ecuaciones de Maxwell muestra que la tensión a lo largo de un camino arbitrario situado dentro del espacio en el que se cumplan las precitadas hipótesis coincide prácticamente, *en valor numérico*, con la diferencia de potencial entre los dos puntos extremos del camino seleccionado (Por eso, por ej. la medida de un voltímetro entre dos puntos es independiente de la trayectoria entre ellos seguida por los cables del voltímetro). Pero dicha igualdad numérica no se cumple en absoluto para el dominio de las *altas frecuencias*. Ni tampoco en el *interior* de transformadores, motores y generadores donde, aunque las frecuencias son bajas, las inducciones sin embargo suelen ser muy elevadas. En todos esos casos, y utilizando los conceptos de la teoría de campos, se constata que el campo eléctrico es un campo rotacional. (Por ello, por ej., carece de sentido la pretensión de realizar medidas con un voltímetro en el dominio de las altas frecuencias).

Por las razones expuestas en los párrafos precedentes (cuya lectura puede omitir el lector medio), resulta claro que, aunque *conceptualmente* tensión y diferencia de potencial son diferentes, en el caso particular de la teoría clásica de circuitos, sin embargo, es *numérica y operativamente* irrelevante distinguir entre ellas. Y ese mismo criterio, salvo indicación explícita en contra, se seguirá en este libro. Es decir, que (I.8) puede también escribirse

$$W_{ab} = q v_{ab} = q u_{ab} \quad (I.11)$$

Si la carga  $q$  (o un conjunto de cargas individuales, de valor total  $q$ ) recorre el trayecto  $ab$  invirtiendo en ello un tiempo  $t$ , la potencia eléctrica asociada a ese proceso de recorrer la carga total  $q$  el trayecto o tramo de circuito  $ab$  vale:

$$P_{ab} = \frac{W_{ab}}{t} = \frac{q}{t} u_{ab} = i_{ab} u_{ab} \quad (I.12)$$

Supongamos (Fig. I-8) un dispositivo eléctrico,  $D$ , siendo  $u_{ab}$  la diferencia de potencial medida entre sus bornes de entrada. Un caso práctico muy frecuente (aunque esto es irrelevante para las consideraciones que siguen) es que  $u_{ab}$  tenga su origen, por ej., en una central más o menos lejana (una fuente de tensión lejana), que lleva su energía hasta  $D$  a través de la red eléctrica, caso en el que  $u_{ab}$  suele designarse como “tensión de red” en el lugar considerado. De acuerdo con (I.12) la potencia eléctrica transferida al equipo o dispositivo  $D$  vale, en todo instante

$$P_{elec}(t) = u_{ab}(t) \cdot i(t) \quad (I.13)$$

Con los sentidos de referencia que se han elegido (arbitrariamente) como positivos para la medida de la diferencia de potencial y corriente en la parte izquierda de la Fig. I-8, si en un instante  $t_1$  se cumple que  $P(t_1) < 0$ , es decir, si la potencia eléctrica transferida a  $D$  sale negativa, significa que en ese instante  $t_1$  es en realidad el equipo  $D$  el que entrega potencia eléctrica a la red. Por supuesto, si se invierte el sentido de referencia elegido para la corriente (parte derecha de la Fig. I-8), las conclusiones son las opuestas. Para el caso particular de régimen senoidal permanente, esas conclusiones pueden formularse mediante fasores temporales en forma sencilla de la siguiente manera: con los sentidos de referencia de la parte izquierda de la figura, la red entrega potencia si el ángulo entre los fasores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{I}$  es menor de  $90^\circ$ . Por el contrario, si el ángulo entre esos dos fasores es también menor de  $90^\circ$ , pero los sentidos de referencia son los correspondientes a la parte derecha, es entonces el dispositivo  $D$  el que cede potencia a la red.

Además de los conceptos básicos de inducción, flujo magnético, campo eléctrico, diferencia de potencial, tensión y potencia eléctrica, que acaban de revisarse, existen otros conceptos que son fundamentales para el estudio de las máquinas eléctricas, y entre los que destacan los de *fuerza electromotriz, enlaces de flujo e inductancias* (en sus distintas variantes). Para la comprensión en profundidad de estos conceptos es necesario disponer de ciertos conocimientos relativos a circuitos magnéticos.

Por ello se posponen las explicaciones sobre los aludidos conceptos a los epígrafes 6 y 7 de este tema, con el fin de adquirir en los epígrafes que les preceden los citados conocimientos. Por otro lado, para el análisis físico y matemático de los circuitos magnéticos resulta indispensable el vector intensidad campo magnético,  $\mathbf{H}$ , estrechamente asociado al vector inducción magnética,  $\mathbf{B}$ . De ahí que se proceda a su introducción (junto con la del vector corriente de desplazamiento,  $\mathbf{D}$  estrechamente asociado al vector  $\mathbf{E}$ ) en el próximo epígrafe.

### I.2.3. Introducción de los Vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$

Ya se ha destacado en el epígrafe I.2.1 la gran influencia que tiene el medio material en las teorías modernas de campo y, más en concreto, en la teoría del campo electromagnético. Un caso particular muy importante lo constituye aquel en el que el medio es el vacío.

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es la fuerza que actúa sobre la unidad de carga *estática* positiva en cada punto del campo electromagnético, incluyendo los efectos del medio material que, en su caso, llena el espacio del campo. Es la magnitud fundamental del campo eléctrico, ya que proporciona el valor de la fuerza efectivamente ejercida sobre una carga estática, tal como se determina mediante una medida real, medida en la cual siempre está incluida la influencia que tiene el medio material presente. Análogamente, la inducción magnética  $\mathbf{B}$  nos permite caracterizar la fuerza *adicional* ejercida sobre una carga móvil, incluyendo asimismo los efectos debidos a la presencia de elementos materiales dentro del campo.

Por otro lado, introducidas ya, desde el punto de vista físico y matemático, las magnitudes vectoriales inducción magnética,  $\mathbf{B}$ , y campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , es necesario, para que no se re-

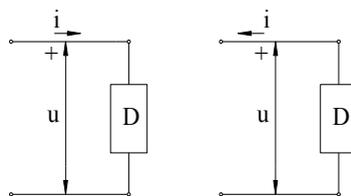


Fig. I-8. Potencia eléctrica intercambiada con el dispositivo eléctrico  $D$

duzcan a un mero formalismo desprovisto de toda utilidad práctica, correlacionar<sup>13</sup> dichas variables entre sí y con otras magnitudes de uso más directo y medida más sencilla para el ingeniero eléctrico. (y, en primer lugar, correlacionarlas con las corrientes y las cargas eléctricas).

Ahora bien, se constata que la mejor manera, con diferencia, de alcanzar dicho objetivo, es introducir dos nuevas magnitudes vectoriales: **H** (vector campo magnético) y **D** (vector desplazamiento eléctrico) que, por un lado, se relacionan, respectivamente, con las magnitudes **B** y **E** a través de parámetros que dependen de, y caracterizan, la constitución física del medio y, por otro lado, se correlacionan con las cargas y corrientes de una manera muy sencilla, cualquiera que sea la constitución del medio material.

Los susodichos vectores **D** y **H** están ligados a los vectores **E** y **B** por las siguientes ecuaciones<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}\end{aligned}\tag{I.14}$$

El vector campo magnético, **H**, en algunos libros y publicaciones, recibe también el nombre de excitación magnética. Sus unidades son A/m (Amperios /metro) aunque también se utiliza con cierta frecuencia la unidad del sistema cgs, el Oersted (Oe) que equivale a 19.58 A/m ( $10^3/4\pi$  A/m). A su vez, el vector desplazamiento eléctrico, **D**, se le designa también, en ocasiones, como vector densidad de flujo eléctrico, por razones que se comentan más adelante. Sus unidades son As/m<sup>2</sup>.

Los parámetros  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son las llamadas, respectivamente, permitividad y permeabilidad del vacío. Son dos constantes, de valores  $\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12}$  As/Vm y  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am. Los términos  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$  son la permitividad y permeabilidad relativa del medio respecto al vacío. Se trata de términos adimensionales.

Los vectores **M** y **P** son los llamados, respectivamente, vector de magnetización y vector de polarización eléctrica. Cuando el medio es el vacío, ambos vectores son nulos en todos los puntos del medio. Eso pone de manifiesto, de acuerdo con la ecuación (I.14), que en el

<sup>13</sup> La mencionada correlación, en el caso más general, viene dada por las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones que es posible (y así se hace en algunos libros) tomar, directamente, como punto de partida, es decir, como relaciones axiomáticas o postulados básicos que describen todos los procesos electromagnéticos. La justificación de este enfoque radica en que, tras casi siglo y medio de existencia, no se ha encontrado (fuera del campo cuántico) ni un sólo fenómeno electromagnético, desde la frecuencia cero (corriente continua) hasta las más altas frecuencias (microondas, radar, etc.) que esté en discrepancia con las citadas ecuaciones.

<sup>14</sup> La ecuación (I.14) implica que los vectores **H** y **B** tienen la misma dirección y sentido: la relación entre ellos es, en ese caso, una magnitud escalar,  $\mu$ . En el caso más general, esos dos vectores no son colineales y, por tanto, su relación se caracteriza por una magnitud matricial o tensor. Sin embargo la influencia de este fenómeno en el comportamiento de las máquinas es casi siempre marginal

caso de que un determinado campo electromagnético pueda ser limitado, a efectos prácticos y suficientemente precisos, a una región del vacío con presencia de corrientes y cargas eléctricas, el vector  $\mathbf{B}$  coincide en todos los puntos del medio con el vector  $\mathbf{H}$  en dirección, sentido y módulo, salvo un factor de escala (la permeabilidad del vacío,  $\mu_0$ ). Análogas consideraciones valen para los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  y la permitividad del vacío,  $\epsilon_0$ .

En consecuencia, en las condiciones precitadas de que todo el medio fuera el vacío, no tendría justificación la introducción de las nuevas magnitudes físicas  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$ , ni de las magnitudes polarización eléctrica y magnetización, asociadas a ellas. Pero eso ya no es cierto cuando existen elementos materiales (“sustancias físicas”) en el campo.

Veamos primero la conveniencia y justificación física de introducir el vector  $\mathbf{P}$ . A este respecto, recordemos en primer lugar que las cargas eléctricas pueden subdividirse en cargas eléctricas *libres* y cargas eléctricas *ligadas*. Se entiende por cargas ligadas aquellas que, al actuar sobre ellas un campo eléctrico, sólo pueden desplazarse trayectos extremadamente cortos, típicamente, los comprendidos dentro del radio de acción de un átomo, una molécula o la celdilla básica de una red cristalina. Por el contrario cuando las cargas tiene la posibilidad (al actuar sobre ellas un campo) de desplazarse “libremente” sobre grandes distancias (movimientos, por ej., en el interior de un conductor o de un electrolítico, o formando parte de un gas ionizado etc.) reciben el nombre de cargas libres. Estas son las que dan lugar a la llamada corriente eléctrica. Por su parte, las cargas eléctricas ligadas constituyen las llamadas cargas eléctricas de polarización. Esta división según el criterio expuesto, que algunos físicos consideran un tanto arbitraria, se ha impuesto sin embargo en la práctica con muy buenos resultados y queda bien reflejada en las llamadas ecuaciones de caracterización del medio físico.

Cuando en un sistema no existen cuerpos materiales y, más en concreto, cuando no existen cuerpos dieléctricos, no puede haber cargas de polarización. Estas únicamente aparecen cuando se coloca un dieléctrico en el seno del campo. En efecto, al introducir un material dieléctrico en un campo eléctrico (que, por simplicidad del razonamiento, supondremos constante), se produce un movimiento de sus cargas en dos fases:

- Separación de los centros de gravedad de las cargas contrarias en cada molécula del dieléctrico. Con ello, ésta queda polarizada, convirtiéndose en un dipolo eléctrico<sup>15</sup>.
- Giro de las moléculas hasta orientar el momento dipolar de cada una de ellas en la dirección del campo eléctrico.

Si el material fuese polar (moléculas ya polarizadas, en las cuales, de por sí, el centro de gravedad de las cargas positivas no coincide con el de las negativas, caso, por ej. del agua), la primera fase no es necesaria.

El proceso anterior, que recibe el nombre de polarización de un dieléctrico, determina la existencia de unas cargas inducidas por polarización, que, al contrario que las cargas libres, están “ligadas” al material. Las cargas inducidas aparecen en las superficies del material, como resultado de la redistribución de las cargas en el dieléctrico (la carga total del mismo continúa sin embargo siendo nula), y contribuyen, naturalmente, al campo eléctrico global del sistema. El estado de polarización del dieléctrico en cada uno de sus puntos (que depende de la naturaleza del dieléctrico) es lo que viene caracterizado por el vector  $\mathbf{P}$  en el punto considerado, y siempre que  $\mathbf{P} \neq 0$ , aparece, de acuerdo con la ecuación (I.14), el llamado campo eléctrico de polarización,  $\mathbf{P}/\epsilon_0$ .

---

<sup>15</sup> Dipolo eléctrico: conjunto formado por dos cargas iguales e “infinitamente” próximas, sin conducción eléctrica entre ellas y tal que su momento es finito.

En realidad, en la mayoría de casos de la práctica industrial (dieléctrico homogéneo, lineal e isótropo), es preferible utilizar la ecuación (I.14) en la forma que hace intervenir la permitividad relativa,  $\epsilon_r$ , en vez del vector de polarización eléctrica  $\mathbf{P}$ . La permitividad relativa también se conoce con el nombre de *constante dieléctrica del medio*, y sus valores, para los dieléctricos más usuales, se encuentran fácilmente en libros de física o en prontuarios que tabulan las principales propiedades físicas de muchos materiales.

Desde el punto de vista del cálculo, una vez conocida, en la mayoría de los casos prácticos, la constante dieléctrica,  $\epsilon_r$  (o bien conocido el vector  $\mathbf{P}$ , aunque esta segunda alternativa apenas se utiliza en ingeniería eléctrica), se necesita conocer el vector  $\mathbf{D}$ , para, de acuerdo con la ecuación (I.14), obtener a partir de ambos el vector campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , que, según lo ya dicho, es el que proporciona el valor de la fuerza eléctrica total ejercida sobre una carga estática. A tal fin, suele ser muy útil la siguiente propiedad: el flujo<sup>16</sup> del vector  $\mathbf{D}$  a través de una superficie cerrada *cualquiera* es igual a la carga eléctrica *libre* neta contenida en el volumen encerrado por dicha superficie<sup>17</sup>. Eso quiere decir, en otras palabras, que para el cálculo del *flujo* del vector  $\mathbf{D}$  es indiferente la presencia de un dieléctrico cualquiera, ya que no se necesitan conocer las cargas ligadas o cargas de polarización, sino únicamente las cargas libres contenidas en el volumen, lo que simplifica notablemente los cálculos..

Consideremos ahora el problema del campo magnético y la conveniencia de introducir la permeabilidad relativa  $\mu_r$  (o, lo que es equivalente, introducir el vector  $\mathbf{M}$ ). Las cargas *en movimiento* dan origen al fenómeno designado con el nombre genérico de corriente eléctrica. Las corrientes, por analogía con la división establecida para las cargas, se dividen también en corrientes eléctricas “libres” y “ligadas”. Las primeras están constituidas por el desplazamiento de las cargas libres, es decir, de iones (positivos y negativos) en electrolitos y en gases ionizados, y por el desplazamiento de los electrones en el interior de conductores (y es únicamente a esta última variante a la que en teoría de máquinas y de circuitos eléctricos se le da el nombre de “corriente eléctrica”, sin más). A su vez, las corrientes ligadas pueden subdividirse en corrientes de polarización (que son las que tienen lugar durante el tiempo<sup>18</sup> en el que las cargas ligadas están efectuando desplazamientos en torno a su posición fija central; dichas corrientes, por tanto, podrán ser caracterizadas por el término  $\partial\mathbf{P}/\partial t$ ), y corrientes moleculares, debidas a los movimientos de los electrones en los átomos. Estas corrientes atómicas son particularmente importantes en determinadas estructuras o configuraciones atómicas, propias de los llamados materiales ferromagnéticos que se utilizan para la construcción de máquinas eléctricas.

<sup>16</sup> La definición matemática general de flujo de un vector ya ha sido indicada en la nota a pié de página nº 5. Por otro lado, así como el flujo del vector  $\mathbf{B}$  se designa con el nombre de flujo magnético, al del vector  $\mathbf{D}$  se le llama a veces flujo eléctrico. De ahí que, en analogía con  $\mathbf{B}$  (que se designa en ocasiones como densidad de flujo magnético), al vector desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{D}$ , a veces se le da también el nombre de densidad de flujo eléctrico, tal y como se ha indicado en páginas precedentes.

<sup>17</sup> Esta propiedad se deriva de la cuarta ecuación de Maxwell ( $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ , siendo  $\rho$  la densidad volumétrica de cargas eléctricas libres,  $dQ/dV$ )

<sup>18</sup> Obsérvese que en un dieléctrico las cargas ligadas pueden estar efectuando un movimiento de oscilación continuo en torno a su posición central cuando el dieléctrico se sitúa en el seno de un campo eléctrico alterno.

En ausencia de materiales en los que puedan aparecer corrientes eléctricas *ligadas* existe una relación directa entre el vector campo magnético y el vector inducción magnética que resulta de la ecuación (I.14):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (I.15)$$

Ahora bien, de forma similar a como sucedía con las cargas eléctricas ligadas, las corrientes eléctricas *ligadas* contribuyen, junto con las libres, a la inducción magnética total del sistema  $\mathbf{B}$ . El estado de magnetización debido al material en cada uno de sus puntos (que depende de la naturaleza del material) queda caracterizado por el vector  $\mathbf{M}$  en el punto considerado, mediante el cual se tiene en cuenta la inducción magnética adicional en dicho punto debida al efecto de las corrientes ligadas. (Expresado desde otra perspectiva: lo mismo que la polarización  $\mathbf{P}$  de un dieléctrico interpreta la formación de cargas superficiales inducidas en función del desplazamiento de carga dentro del dieléctrico, así la imantación  $\mathbf{M}$  de una sustancia interpreta las corrientes superficiales en función de la reagrupación de las corrientes electrónicas internas).

En consecuencia, la ecuación a aplicar en el caso general no es la (I.15), sino la (I.14), que se repite a continuación

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (I.16)$$

De manera en parte similar a lo ya visto con la pareja de vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ , la introducción del vector  $\mathbf{H}$  (que se correlaciona fácilmente con el  $\mathbf{B}$  a través de la permeabilidad  $\mu$ ) presenta la ventaja de que dicho vector  $\mathbf{H}$  es más accesible al cálculo teórico que el  $\mathbf{B}$ . Ello es debido a que su circulación (ver I.2.4) está relacionada exclusivamente con las corrientes eléctricas libres.

No obstante, y en este contexto, conviene prevenir ya contra un error conceptual no infrecuente, a saber: aunque la *circulación del vector H* sólo depende de las corrientes libres, de ahí no puede deducirse que, en el caso más general, el valor de dicho *vector H* sólo dependa de las corrientes libres. Para hacer patente este hecho basta considerar lo que sucede en una región vacía del espacio en la que se introduce un imán: en ese caso, aunque *no hay corrientes libres*, existen, no obstante, líneas de inducción que se cierran por el aire a través del imán y, por tanto, de acuerdo con (I.15) existe un campo  $\mathbf{H}$ . En consecuencia, en el caso general, es erróneo afirmar (como se hace incluso en algunos buenos tratados de física) que el vector  $\mathbf{H}$  está ligado, exclusivamente, a la existencia de corrientes libres; o que dicho vector representa, en definitiva, el campo magnético que surgiría debido a las corrientes libres en ausencia de materiales magnéticos.

#### ***1.2.4. Leyes generales para la determinación del campo magnético***

La determinación del campo magnético en una región del espacio y, específicamente, en la ocupada por una máquina eléctrica, requiere la utilización de tres relaciones o leyes físicas fundamentales: el teorema de Gauss (o ley de continuidad del flujo magnético), el teorema de Ampère (o ley de circulación del campo) y la relación  $\mathbf{B-H}$  que define o caracteriza el comportamiento magnético del material.

Para avanzar en la descripción del campo magnético fijémonos en primer lugar en que las líneas de inducción magnética no tienen origen ni fin. Este hecho lo hemos podido observar en las imágenes ‘experimentales’ del campo magnético en el epígrafe I.2.2: las limaduras se

disponen en trayectos cerrados a los que no se les puede encontrar principio ni final. Aunque esta observación la hemos obtenido aquí para casos concretos de distribución del campo magnético en el espacio libre, el hecho es que nunca se ha encontrado una situación en la que exista una fuente o un sumidero para las líneas de inducción magnética.

Para formular matemáticamente esta característica del campo magnético podemos expresarla de la siguiente forma alternativa: sea cual sea la región finita cerrada del espacio que consideremos, la cantidad de líneas de campo que entran a dicha región coincidirá con las que salen de ella. O dicho de otra forma, la cantidad neta de líneas de campo que atraviesan la superficie que limita una región finita y cerrada del espacio es nula.

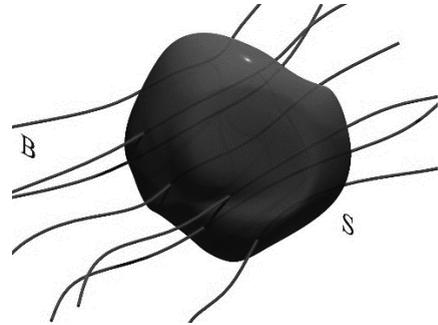


Fig. I-9 Flujo de la inducción magnética (flujo magnético) a través de una superficie cerrada S

Este principio, si tenemos en cuenta la definición de flujo magnético, se corresponde con una expresión matemática sencilla que se cumple para cualquier superficie cerrada finita S:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_S = 0 \quad (I.17)$$

La ec. (I.17) es la expresión matemática del *Teorema de Gauss* para el magnetismo y se corresponde de forma directa con una de las ecuaciones de Maxwell para describir el campo electromagnético.

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (I.18)$$

Junto con el de Gauss, un segundo teorema fundamental para la determinación del campo magnético es el llamado *teorema de Ampère*: la circulación del vector  $\mathbf{H}$  a lo largo de la curva cerrada C que delimita una superficie arbitraria S es igual a la corriente eléctrica neta que atraviesa dicha superficie<sup>19</sup> (Fig. I-10). Matemáticamente:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (I.19)$$

En (I.19)  $\mathbf{J}$  representa el vector densidad superficial de corriente (Amperios/m<sup>2</sup>), es decir, densidad superficial de cargas eléctricas libres en movimiento.

El término de la derecha de esta ecuación (flujo del vector densidad de corriente a través de la superficie S) coincide, como se ha indicado, con la corriente eléctrica neta que atraviesa

<sup>19</sup> Este teorema se deduce rápidamente de la primera ecuación de Maxwell:  $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ , despreciando el segundo término frente al primero. El orden de magnitud de la llamada densidad de corriente de desplazamiento ( $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ) en máquinas eléctricas en las que el campo eléctrico varía a la frecuencia industrial de 50 Hz es de algunos mA/m<sup>2</sup>, mientras que los valores típicos de  $\mathbf{J}$  en los conductores de esas mismas máquinas son de varios millones de amperios por metro cuadrado. Para las altas o muy altas frecuencias, sin embargo, la simplificación comentada es de todo punto inaceptable.

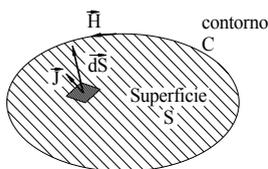


Fig. I-10 Circulación del campo magnético y su relación con la corriente eléctrica: teorema de Ampère

dicha superficie y recibe el nombre de *fuerza magnetomotriz (f.m.m.)* asociada al contorno cerrado C.

$$f.m.m._C = I_{\text{a través de } C} \quad (I.20)$$

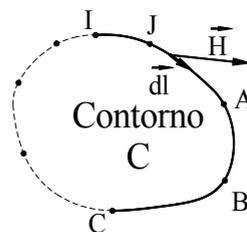
En cuanto al término de la izquierda del teorema de Ampère, es habitual que para calcular la integral de circulación sea conveniente dividir el contorno C en una serie de tramos consecutivos separados por una serie de puntos A, B, C, ... J. Una vez definidos estos tramos la integral de circulación del vector **H** se convierte en:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_I^J \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_J^A \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (I.21)$$

De una manera general, la integral curvilínea del campo magnético **H** para una trayectoria o camino específicamente definido entre dos puntos A y B, recibe el nombre de *tensión magnética o caída de tensión magnética* entre los puntos A y B para esa trayectoria concreta, y se representa por la letra F.

$$F_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (I.22)$$

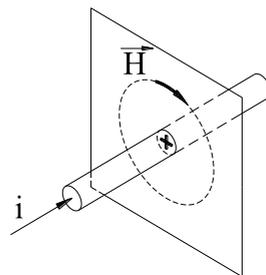
En la literatura técnica se utiliza con frecuencia, sin más, la expresión “caída de tensión magnética en AB”, y así se hará también en este libro. En cualquier caso, al usar dicha expresión abreviada el lector debe tener claro que se trata de la integral curvilínea del vector **H** que va desde “A” hasta “B” a lo largo de una trayectoria concreta (implícita o explícitamente especificada).



Haciendo uso de estos dos conceptos recién introducidos, el teorema de Ampère (I.19) puede formularse así: la fuerza magnetomotriz asociada a un circuito o contorno cerrado arbitrario es igual a la suma de las caídas de tensión magnética a lo largo de todos los tramos que forman el citado circuito.

Conviene tener en cuenta la relación entre los signos de la corriente y del campo magnético:

- Consideramos por convenio corriente positiva aquella cuyo sentido va desde el observado hacia el plano de la figura y la representamos por un símbolo  $\otimes$ . El símbolo para corriente negativa es  $\odot$ .
- Corriente neta positiva abrazada por el contorno implica circulación neta del campo magnético en el sentido de las agujas del reloj (Fig. I-11, regla del sacacorchos para el campo magnético).



Por último, la tercera ley fundamental para determinar el campo magnético es la que corresponde al comportamiento magnético del material, es decir, la relación entre inducción magnética **B** y campo magnético **H** (I.16), y se trata justo en el siguiente epígrafe.

Fig. I-11 Sentido del campo magnético según el teorema de Ampère

### I.3. Materiales magnéticos utilizados en máquinas eléctricas

La caracterización de los materiales constituyentes de las máquinas eléctricas desde el punto de vista magnético, es decir, cuando menos la determinación de la relación entre inducción y campo magnético, ver ecuación (I.14), es el primer paso en el proceso de cálculo habitual del campo magnético tal como se planteó en el epígrafe I.2.3.

Tanto para el aire como para los materiales para- y diamagnéticos (en el marco de las máquinas eléctricas: cobre y aluminio que se utilizan fundamentalmente como conductores eléctricos, y los materiales sintéticos o de base orgánica que se utilizan a menudo como aislantes eléctricos) la citada relación es tan próxima a la del vacío que es habitual considerar que son iguales, o, lo que es lo mismo, que su permeabilidad relativa es prácticamente la unidad.

Por el contrario, los *materiales ferromagnéticos* (en el ámbito de las máquinas eléctricas mayoritariamente las aleaciones de acero al silicio que forman su circuito magnético y otras aleaciones o composites, como los que constituyen los imanes permanentes) presentan una relación entre inducción y campo magnético muy superior (del orden de 100 a 10.000 veces mejor que la del vacío) que no sólo *no* es lineal sino que depende en mayor o menor medida de la ‘historia’ magnética del material (la evolución que ha seguido a lo largo del tiempo el campo magnético que lo ha excitado).

El origen del ferromagnetismo radica en la propia estructura del material y en la forma en que éste responde a la excitación por un campo magnético externo. Los materiales ferromagnéticos se caracterizan por estar constituidos principalmente por átomos que, debido a su estructura electrónica, presentan un pequeño campo magnético producido por el giro sobre si mismos (spin) de sus electrones (podríamos imaginarnos que el efecto magnético de un átomo tiene su equivalente a escala macroscópica en una corriente eléctrica circunferencial<sup>20</sup>) y que, en estado sólido, tienden a agruparse en pequeños volúmenes, llamados dominios magnéticos, en los que esos campos de escala atómica están orientados en la misma dirección y sentido. Al agruparse los átomos en los citados dominios magnéticos, las corrientes circunferenciales dan lugar a un efecto neto similar a una capa de corriente que envuelve al dominio magnético con el mismo

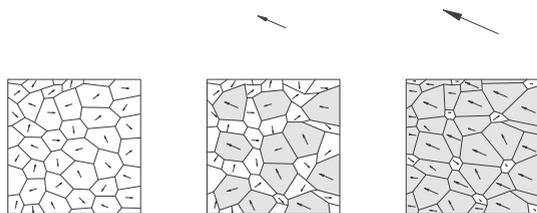


Fig. I-12 Crecimiento y rotación de los dominios magnéticos en un material ferromagnético al someterlo a un campo magnético.

sentido que las corrientes atómicas ‘equivalentes’. La elevada permeabilidad de estos materiales se debe a que, al ser sometido a un campo magnético externo, los dominios magnéticos orientados en el mismo sentido que el campo externo tienden a crecer a expensas de los que no lo están (Fig. I-12 centro) y estos últimos tienden a alinearse con dicho campo externo (Fig. I-12 derecha), dando lugar a una capa de corriente superficial en el material ferromagnético que refuerza el efec-

<sup>20</sup> Estas corrientes atómicas son las que llamamos corrientes ligadas (ya que corresponden a electrones que no se desplazan fuera de los límites de su propio átomo) por comparación con las ya mencionadas corrientes libres en los conductores.

to del campo externo en el material, es decir, dando lugar a una inducción magnética mayor que si el mismo campo actuara sobre el vacío o sobre un material cuyas corrientes atómicas no estuvieran ‘orientadas’ mayoritariamente en el sentido de reforzar el campo magnético.

Esto sólo puede suceder a temperaturas a las que los átomos puedan mantener esa estructura ordenada (que para la chapa magnética son inferiores a unos 700°C) a las que, por supuesto, el material se encuentra en estado sólido. Así, cuando un material ferromagnético se deja enfriar lentamente en ausencia de un campo magnético externo, se establecen dominios magnéticos con tamaños similares orientados en todas las direcciones del espacio por lo que el material no presenta ningún efecto magnético apreciable a escala macroscópica (Fig. I-12 izquierda).

En la práctica los materiales ferromagnéticos no muestran una relación lineal entre el campo que los excita y la magnitud de los cambios (crecimiento y giro) que dan lugar al reforzamiento del campo magnético, es decir, la inducción magnética en el material, resultando la característica no lineal típica (ver por ejemplo la Fig. I-30). En particular, a densidades de flujo del orden de magnitud de unos 2 Teslas los citados cambios de orientación y tamaño de los dominios magnéticos se han producido en su máxima intensidad en todo el material. En consecuencia, a partir de ese estado el material responde con una variación de la inducción magnética ante cambios en el campo magnético similar a la del vacío: la pendiente de la curva de magnetización es muy cercana a la permeabilidad del vacío (aunque la permeabilidad relativa tal como la define la ecuación (I.14) mantiene valores al menos dos órdenes de magnitud mayores que la del vacío).

### 1.3.1. Chapa magnética

La distribución del campo magnético en las máquinas eléctricas se puede representar por líneas de inducción que están contenidas de forma muy aproximada en planos paralelos. Resulta representativa de este hecho a título de ejemplo la Fig. I-13, en la que se puede comprobar cómo las líneas de campo están dispuestas en planos perpendiculares al eje de rotación del rotor.

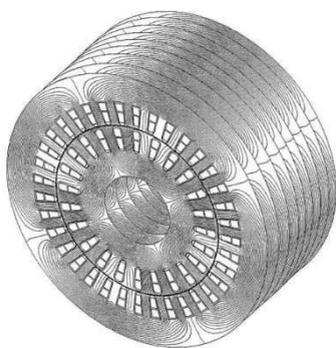


Fig. I-13 Imagen de las líneas de campo en una máquina asíncrona de 4 polos en vacío.

Esta distribución de las líneas de campo en planos paralelos determina, con el objetivo fundamental de reducir las pérdidas de potencia en la material ferromagnético (ver I.3.1.2), que la mayor parte de los circuitos magnéticos de máquinas eléctricas se construyan apilando chapa de espesor reducido hasta conseguir el ancho total necesario, de forma tal que el plano de las chapas coincida con el plano en el que se distribuyen las líneas de campo. En algunas ocasiones, en especial si se trata de partes de la máquina eléctrica que van a trabajar sometidas a un campo magnético sensiblemente constante, se utilizan piezas macizas en lugar de chapa apilada. El material más empleado es la llamada chapa ‘magnética’, un tipo de aceros con un contenido en silicio (cercano al 4%) superior al de los aceros para uso general en construcción. Estos aceros al silicio se caracterizan principalmente por presentar una permea-

bilidad garantizada en las condiciones habituales de trabajo muy superior a la del vacío (orientativamente entre 100 y 2000 veces mayor). Además de esta elevada permeabilidad, la chapa de acero al silicio presenta tres ventajas fundamentales que la convierten prácticamente en el material de uso exclusivo en la construcción del circuito magnético de máquinas eléctricas (aparte del posible uso de imanes permanentes):

- Pérdidas por histéresis reducidas asociadas a un campo coercitivo de valor muy bajo (ciclo de histéresis muy estrecho).
- Pérdidas por corrientes de Foucault reducidas gracias a la elevada resistividad de los aceros al silicio por comparación con los aceros de uso general para construcción.
- Mejor estabilidad térmica, es decir, las propiedades magnéticas se mantienen incluso aunque el material se someta a temperaturas moderadas durante periodos de tiempo prolongados.

Antes de describir las calidades industriales de las chapas usuales en la construcción de máquinas eléctricas conviene analizar primero el origen de las pérdidas mencionadas y como se ven influidas por ciertos aspectos de su fabricación.

### 1.3.1.1. Pérdidas por histéresis

Anteriormente (I.3) se han descrito los mecanismos (transformaciones en tamaño y orientación de los dominios magnéticos) por los que los materiales ferromagnéticos responden de forma tan intensa a las fuentes del campo magnético. En ese contexto se ha presentado además el fenómeno de la saturación magnética como resultado de que dicha respuesta es más o menos intensa dependiendo del nivel de excitación al que se someta al material, dando lugar a una relación no lineal entre inducción magnética e intensidad del campo. Además de esa falta de proporcionalidad, los cambios en los dominios magnéticos no son completamente reversibles, es decir, los dominios magnéticos no vuelven en su totalidad a sus dimensiones y orientación previas cuando se reduce o incluso elimina el campo magnético. Este hecho es el responsable de que el proceso de magnetización de un material ferromagnético sometido a un campo alterno periódico describa una curva cerrada en el plano B-H conocida como curva de histéresis (Fig. I-14).

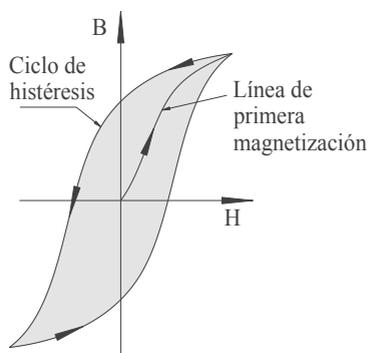


Fig. I-14 Ciclo de histéresis de un material ferromagnético

El área encerrada por la curva de histéresis en el plano B-H mide la energía que se disipa en forma de pérdidas por unidad de volumen del material al completar un ciclo de magnetización. Experimentalmente se ha comprobado que dicha área se puede calcular de forma aproximada en función de la inducción máxima en el ciclo,  $\hat{B}$ , y de un coeficiente,  $\alpha$ , que depende del material, por lo que las pérdidas específicas por histéresis magnética (potencia de pérdidas por unidad de volumen, es decir, consumo de energía por unidad de volumen en cada ciclo multiplicado por el número de ciclos por unidad de tiempo) se pueden expresar como:

$$p_H \cong k_H \cdot f \cdot \hat{B}^\alpha \quad (I.23)$$

El exponente  $\alpha$ , para obtener una primera aproximación en la mayoría de las aplicaciones industriales, toma un valor de 2 y el coeficiente  $k_H$  está comprendido entre 75 y 225 W/(m<sup>3</sup> T<sup>2</sup> Hz) para los aceros al silicio usuales en la fabricación de máquinas eléctricas.

### 1.3.1.2. Pérdidas por corrientes de Foucault

Los aceros que se utilizan para la construcción de máquinas eléctricas son, al tiempo que ‘buenos’ conductores magnéticos, relativamente buenos conductores eléctricos<sup>21</sup>. Cuando se somete un material con estas características a un campo magnético alterno, este origina inducciones magnéticas elevadas (material de permeabilidad elevada). Como consecuencia de la variación con el tiempo de la inducción magnética en el material se inducen en él ff.ee.mm., y puesto que dicho material es relativamente buen conductor, se establecen en su seno corrientes eléctricas. Estas corrientes pueden ser, si no se toman medidas para evitarlo, relativamente elevadas y dar lugar a importantes pérdidas por efecto Joule: son las que conocemos como pérdidas por corrientes de Foucault o de circulación.

En las máquinas eléctricas se adoptan principalmente dos soluciones para reducir esas pérdidas: utilizar aceros de menor conductividad que el hierro y construir los circuitos magnéticos mediante chapa apilada. En cuanto al tipo de aceros, las aleaciones con aproximadamente entre el 3 y 4 % de silicio, que son las usuales en la construcción de circuitos magnéticos, presentan la ventaja de tener una peor conductividad que el hierro (unas 5 veces menor).

Por otra parte, la construcción del circuito magnético con chapas apiladas en lugar de macizo también permite reducir drásticamente las pérdidas por corrientes de circulación. Para constatarlo y cuantificar esa reducción conviene comparar dos circuitos magnéticos contruidos uno con material macizo y otro mediante chapa apilada (ver Fig. I-15 izda.). Para una correcta comparación, el material magnético de ambos circuitos debe estar sometido a la misma intensidad de campo y, por lo tanto, a la misma inducción magnética. Las secciones totales de material en las columnas centrales de los dos circuitos deben ser también iguales. Las corrientes de Foucault, cuyos trayectos orientativos se indican en la Fig. I-15 dcha. para el circuito magnético macizo (abajo) y para el construido por chapa apilada (arriba), se establecen debido a la inducción de una f.e.m. en esos trayectos cerrados. Conviene notar que los trayectos de las corrientes de circulación en el circuito magnético con chapa apilada están comprendidos dentro de cada una de las chapas, sin cruzar de unas a otras, ya que éstas presentan un tratamiento superficial que las aísla eléctricamente<sup>22</sup>. El valor de dicha f.e.m. coincide (ley de Faraday, ver I.5.1) con la derivada respecto del tiempo del flujo magnético que encierra la línea de circulación de corriente. Para una evolución senoidal de éste, el valor eficaz de dicha f.e.m. es proporcional al valor máximo del flujo encerrado por la espira y a la frecuencia:

---

<sup>21</sup> La conductividad de hierro es aproximadamente  $10 \cdot 10^6$  ( $\Omega \text{ m}$ )<sup>-1</sup>, es decir, sólo entre 3 y 6 veces inferior a la del aluminio o el cobre. La de los aceros al silicio es aproximadamente la quinta parte de la del hierro.

<sup>22</sup> Por consiguiente, para conseguir el efecto buscado de reducción de las pérdidas es imprescindible que la chapa se disponga paralela a las líneas de campo magnético, tal como se indicó al principio del epígrafe I.3.1

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\hat{\Phi} \cos(2\pi f t))$$

$$f.e.m._{eficaz} \propto \hat{\Phi} \cdot f$$

A su vez, el flujo encerrado por cada línea de circulación de corriente es igual al producto de la inducción magnética y de la superficie delimitada por dicha línea de circulación. Observando la Fig. I-15 dcha. podemos comprobar que, aproximadamente, dicha superficie es proporcional, para una longitud frontal de chapa considerada constante, al espesor de cada chapa,  $a$ , (o de todo el núcleo,  $A$ , si éste es macizo), es decir:

$$f.e.m._{eficaz} \cong k \cdot f \cdot \hat{B} \cdot a$$

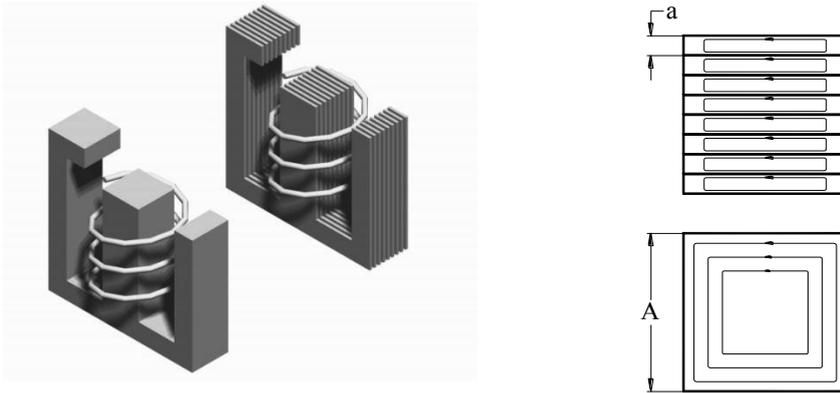


Fig. I-15 Corrientes de circulación o de Foucault en el núcleo de un transformador (dcha.)  
Constitución maciza y mediante chapas apiladas (izda.)

La densidad de corriente en el material,  $\mathbf{J}$ , es el producto de la conductividad del material ( $\gamma$ ) y del campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ . Este último es proporcional a la f.e.m. inducida en el trayecto e inversamente proporcional a la longitud del trayecto. Para el circuito magnético formado por chapas apiladas, la longitud de las líneas de circulación de corriente depende muy poco del espesor de la chapa, por lo que podemos aceptar con mucha aproximación:

$$|\vec{E}| \propto f.e.m._{eficaz}$$

$$|\vec{E}| \propto f \cdot \hat{B} \cdot a$$

$$|\vec{J}| \propto \gamma \cdot f \cdot \hat{B} \cdot a$$

Finalmente, las pérdidas específicas por corrientes de Foucault, resultan ser aproximadamente proporcionales al cuadrado de la frecuencia, de la inducción magnética máxima y del espesor de las chapas:

$$p_{Fo} = \rho \cdot J_{eficaz}^2 \propto \gamma \cdot f^2 \cdot \hat{B}^2 \cdot a^2 \tag{I.24}$$

donde se ha tenido en cuenta que las pérdidas específicas por conducción en un material conductor son proporcionales a la resistividad del material,  $\rho$  (inversa de la conductividad,  $\gamma$ ), por el cuadrado de la densidad de corriente:

$$P_{\text{Joule}} = R \cdot i^2 = \frac{\rho l}{S} (J \times S)^2 = \rho J^2 \times l \times S = \rho J^2 \text{Vol.}$$

La expresión (I.24) muestra las ventajas de utilizar aceros de baja conductividad  $\gamma$  y de reducir el espesor,  $a$ , de las chapas que forman, apiladas, el circuito magnético.

### I.3.1.3. Pérdidas específicas totales

De lo visto en los dos epígrafes precedentes se deduce que la potencia de pérdidas totales (histéresis y corrientes de Foucault) en las chapas magnéticas (llamada también, de forma simplificada, pérdidas en el hierro) viene dada, por:

$$P_{Fe} = (P_H + P_{Fo}) = (k_H \cdot f \cdot \hat{B}^\alpha + k_{Fo} \cdot \gamma \cdot f^2 \cdot \hat{B}^2 \cdot a^2) \cdot \text{Vol} \quad (I.25)$$

fórmula donde  $\text{Vol}$  representa el volumen ocupado por las chapas.

En la práctica, el fabricante de las chapas magnéticas proporciona una serie de curvas que muestran esa potencia de pérdidas totales, pero por *unidad de peso*, (es decir, los W/kg) en función de la inducción,  $B$ , y de una frecuencia determinada. Eso es lo que se conoce con el nombre de *pérdidas específicas de la chapa*, y se comenta con más detalle en el siguiente epígrafe.

### I.3.1.4. Calidades Normalizadas de Chapa Magnética

Actualmente se fabrican fundamentalmente dos tipos de chapa magnética, según se haya realizado un tratamiento térmico o no tras el laminado en frío. En la chapa laminada en frío sin posterior tratamiento térmico los cristales quedan alineados según la dirección de laminación, lo que favorece que los dominios magnéticos (ver I.3.1.1) también se orienten en esa dirección. Por este motivo la chapa laminada en frío presente una permeabilidad mucho más favorable y pérdidas específicas menores cuando se magnetiza en la dirección de laminación. Este tipo de chapa recibe la designación de *chapa magnética de grano orientado* según EN 10107. Por el contrario, en la chapa laminada en caliente, los cristales deformados por el proceso de laminación pueden reorganizarse en una estructura más desordenada y, por lo tanto, isotrópica durante el recocido posterior a la laminación. En consecuencia, este tipo de chapa presenta una anisotropía muy reducida en cuanto a la permeabilidad y pérdidas específicas por lo que se la denomina *chapa laminada en frío de grano no orientado*<sup>23</sup> según EN 10106.

Las calidades más habituales de chapa magnética para máquinas eléctricas se designan según EN 10027 mediante el siguiente código alfanumérico:

- la letra M (aceros para aplicaciones eléctricas: construcción de circuitos magnéticos)

<sup>23</sup> El nivel de anisotropía de la chapa se calcula en % según la siguiente fórmula (EN 10106):

$$T = \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} \times 100$$

donde  $W_1$  son las pérdidas en la dirección perpendicular a la laminación y  $W_2$  en la dirección de laminación. Dicha anisotropía debe ser inferior al 17% para la chapa de grano no orientado.

- un número que indica el valor máximo especificado de las pérdidas, expresado en W/kg y multiplicado por 100, que corresponden al espesor nominal del producto, a una frecuencia de 50 Hz y a una inducción (máxima) de
  - 1,5 T para chapas de grano no orientado y de grano orientado normales
  - 1,7 T para chapas de grano orientado bajas pérdidas o de alta permeabilidad
- un número que indica el espesor nominal de la chapa, expresado en milímetros y multiplicado por 100
- una letra indicativa del tipo de acero según el siguiente código para los tipos más habituales:
  - A para chapas de grano no orientado
  - N para chapas de grano orientado normales
  - S para chapas de grano orientado de bajas pérdidas
  - P para chapas de grano orientado de alta permeabilidad

Otra característica importante de la chapa magnética que se utiliza para la construcción de circuitos magnéticos es el factor de apilado: representa el tanto por uno de la sección ocupada por el paquete de chapas que está realmente constituida por material ferromagnético de las características especificadas. Su valor máximo difiere muy poco de la unidad<sup>24</sup> y esa diferencia se debe al espacio que ocupa el aislante eléctrico aplicado al menos a una de las caras para reducir la intensidad de las corrientes de Foucault. Sin embargo, en algunas aplicaciones en que la construcción no sea muy cuidadosa, este factor, debido a las rebabas resultantes del troquelado de las chapas y a su propia ondulación, puede tomar valores relativamente bajos, alrededor de 0,90.

Los circuitos magnéticos de transformadores de potencia se suelen construir con chapa magnética de grano orientado con unas pérdidas específicas comprendidas típicamente entre 0.8 y 1.1 W/kg a 1,5 T(máximo) para la chapa normal y entre 1,2 y 1,5 W/kg a 1,7 T(máximo) para la chapa de bajas pérdidas y una permeabilidad no inferior a  $2,2 \cdot 10^{-3}$  T/(A/m) a 1,7 T<sup>25</sup>, es decir, un valor unas 1700 veces mejor que la permeabilidad del vacío incluso a esa inducción relativamente elevada.

---

<sup>24</sup> Las normas EN 10106 y 10107 especifican un valor entre 0,95 y 0,98 para la chapa de grano no orientado y entre 0,945 y 0,96 para las chapas de grano orientado. Estos últimos valores son mayores debido a que el espesor de las chapas de grano orientado, para reducir lo más posible las pérdidas por corrientes de Foucault, es menor (entre 0,23 mm y 0,35 mm) que el de las chapas de grano no orientado (entre 0,35 y 1,00 mm)

<sup>25</sup> Conviene tener presentes una serie de valores habituales de algunas magnitudes en distintas partes de varios tipos máquinas eléctricas para que sirvan de referencia:

- Inducción en motores y generadores eléctricos:
  - En los dientes de 1,5 a 2,1 T
  - En el entrehierro de 0,6 1,1 T
  - En el yugo o corona de 1,2 a 1,6 T
- Inducción máxima en transformadores de potencia: entre 1,4 y 1,8 T
- Flujo por polo de máquinas rotativas asíncronas: de 20 a 200 mWb
- Inducción del campo magnético terrestre: del orden de unas décimas de gauss.

Designación EN 10027-1	Espesor	Inducción a H =800 A/m	P <sub>Fe</sub> (W/kg) a 50 Hz a		FA
			1.5 T	1.7 T	
M080-23N	0.23	1.75	0.80	1.27	0.945
M089-27N	0.27	1.75	0.89	1.40	0.950
M097-30N	0.30	1.75	0.97	1.50	0.955
M111-35N	0.35	1.75	1.11	1.65	0.960

Tabla 1 Chapa magnética de grano orientado normal

Designación EN 10027-1	Espesor	Inducción a H =800 A/m	P <sub>Fe</sub> (W/kg) a 50 Hz a		FA
			1.5 T	1.7 T	
M120-23S	0.23	1.78	0.77	1.20	0.945
M130-27S	0.27	1.78	0.85	1.30	0.950
M140-30S	0.30	1.78	0.97	1.40	0.955
M150-35S	0.35	1.78	1.05	1.50	0.960

Tabla 2 Chapa Magnética de grano orientado y bajas pérdidas

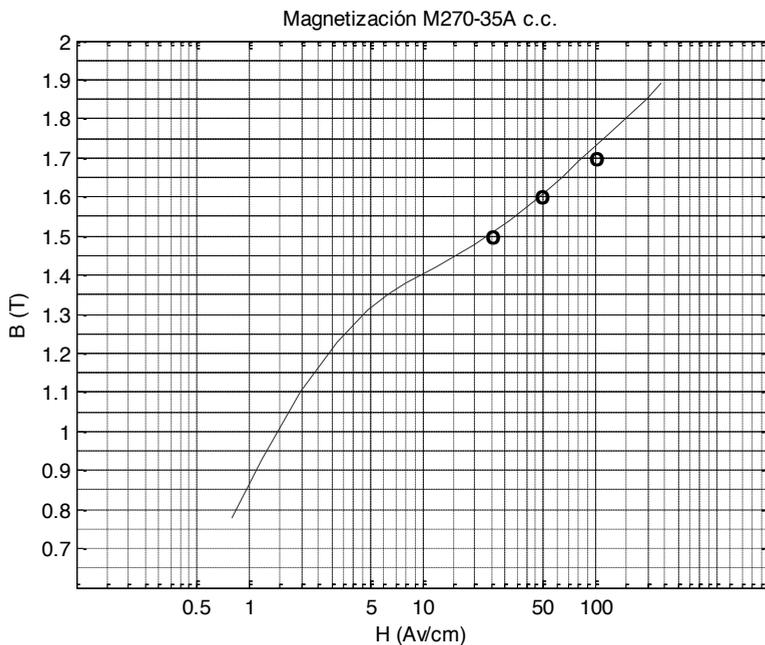
Los generadores eléctricos de gran potencia y alta velocidad (turboalternadores) se suelen construir con chapa de grano no orientado de pérdidas relativamente bajas (en torno a los 2,7 W/kg a 1,5 T (máximo); M270-50A ó M270-35A). Los generadores eléctricos de potencia intermedia y baja velocidad (alternadores hidráulicos) así como los transformadores de pequeña potencia para fuentes de alimentación se suelen construir con chapa también de grano no orientado pero con pérdidas específicas algo mayores (a menudo 3,5 W/kg a 1,5 T(máximo); M350-50A). Por último, las máquinas rotativas de grandes series, de corriente alterna (asíncronas) y continua, y potencia baja y media (desde las fracciones de CV hasta alguna centena de kW) es habitual que se construyan con chapa de grano no orientado de pérdidas relativamente elevadas (orientativamente 6 W/kg a 1,5 T(máximo); M600-65A). En todos los casos la chapa de grano no orientado presenta una permeabilidad muy inferior a la de grano orientado (por supuesto si esta se magnetiza en la dirección de laminación), más de 470 veces la del vacío a 1,5 T, pero sólo unas 130 veces superior a la del vacío a 1,7T (ver nota al pie 25).

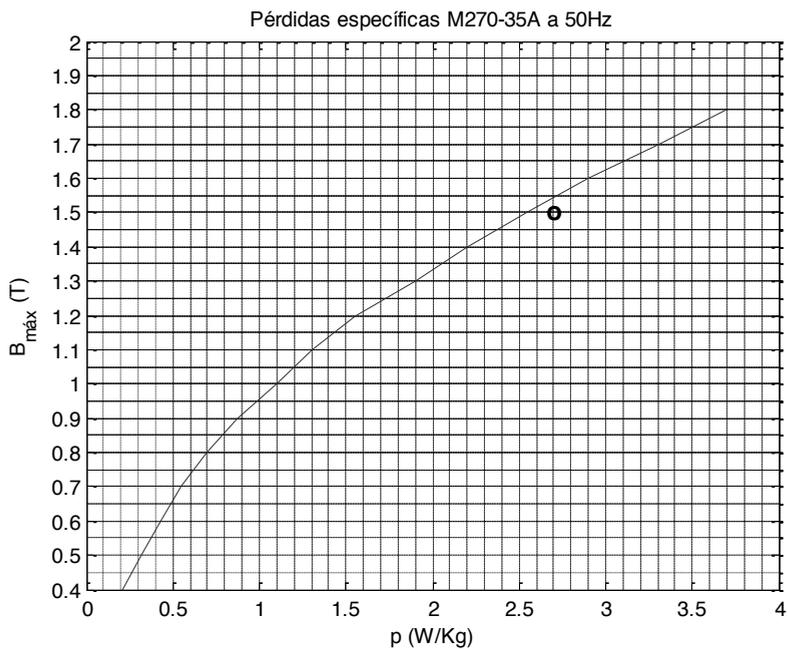
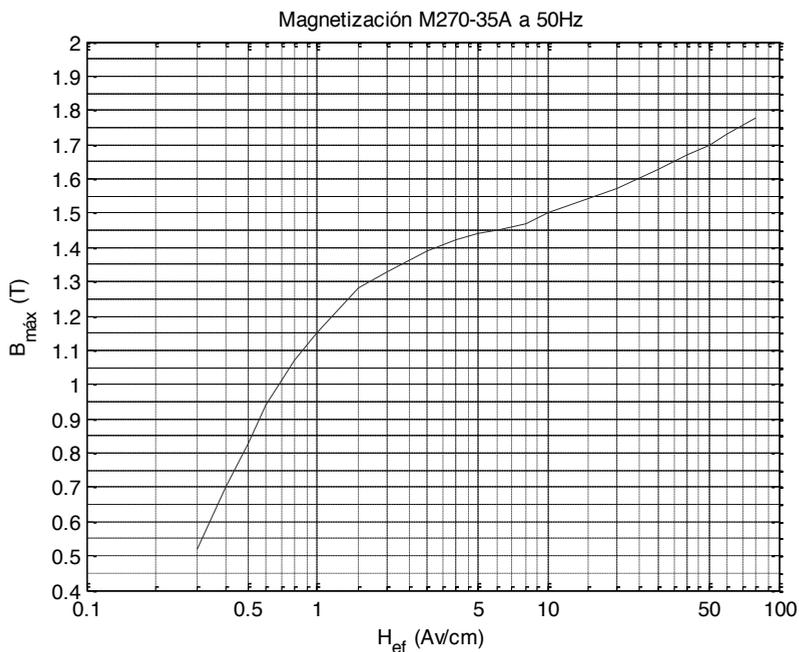
Designación EN 10027-1	e mm	P <sub>Fe</sub> (W/kg) 50 Hz ,1.5 T	Inducción a			FA
			2500 A/m	5000 A/m	10000 A/m	
M235-35A	0.35	2.35	1.49	1.60	1.70	0.95
M250-35A		2.50	1.49	1.60	1.70	
M270-35A		2.70	1.49	1.60	1.70	
M300-35A		3.00	1.49	1.60	1.70	
M330-35A		3.30	1.49	1.60	1.70	
M250-50A	0.50	2.50	1.49	1.60	1.70	0.97

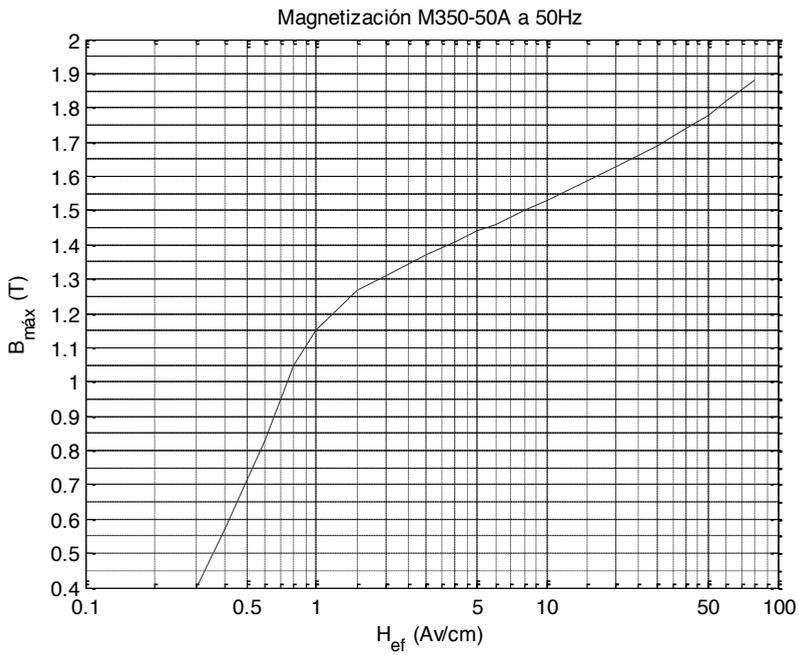
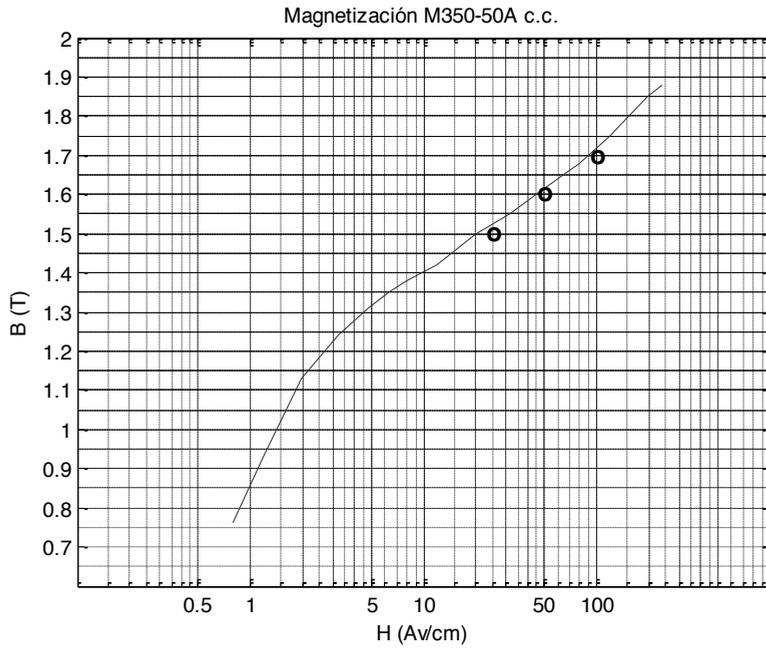
Designación EN 10027-1	e mm	P <sub>Fe</sub> (W/kg) 50 Hz, 1.5 T	Inducción a			FA
			2500 A/m	5000 A/m	10000 A/m	
M270-50A		2.70	1.49	1.60	1.70	
M290-50A		2.90	1.49	1.60	1.70	
M310-50A		3.10	1.49	1.60	1.70	
M330-50A		3.30	1.49	1.60	1.70	
M350-50A		3.50	1.50	1.60	1.70	
M400-50A		4.00	1.53	1.63	1.73	
M470-50A		4.70	1.54	1.64	1.74	
M530-50A		5.30	1.56	1.65	1.75	
M600-50A		6.00	1.57	1.66	1.76	
M700-50A		7.00	1.60	1.69	1.77	
M800-50A		8.00	1.60	1.70	1.78	
M940-50A		9.40	1.62	1.72	1.81	

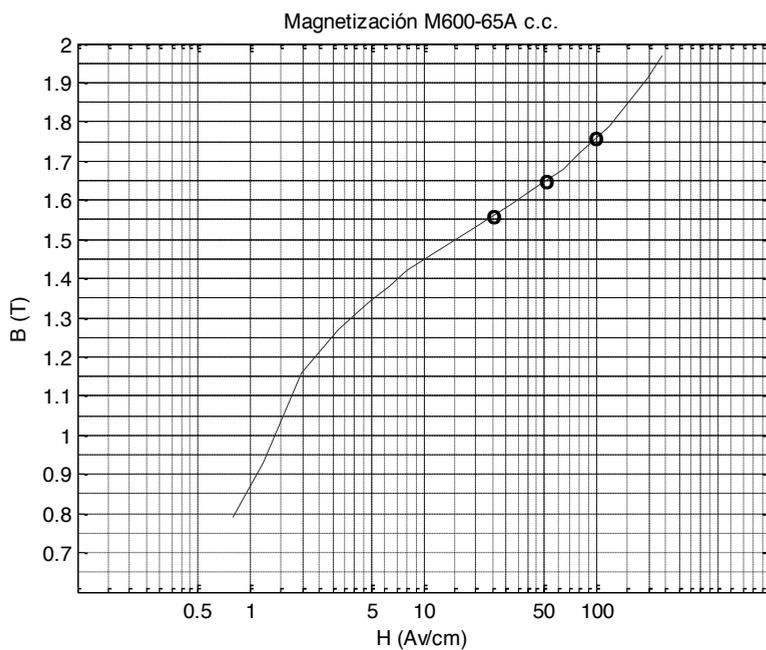
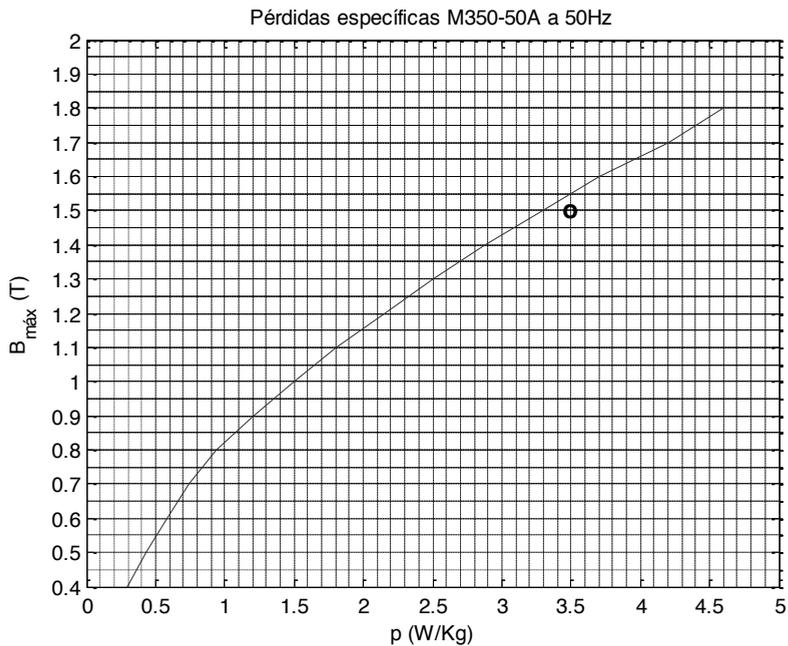
Tabla 3 Chapa magnética de grano no orientado

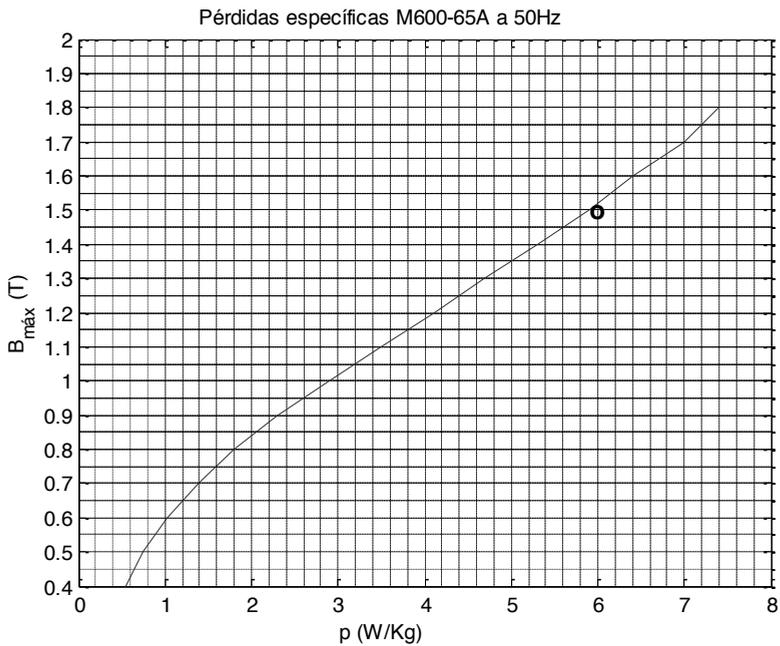
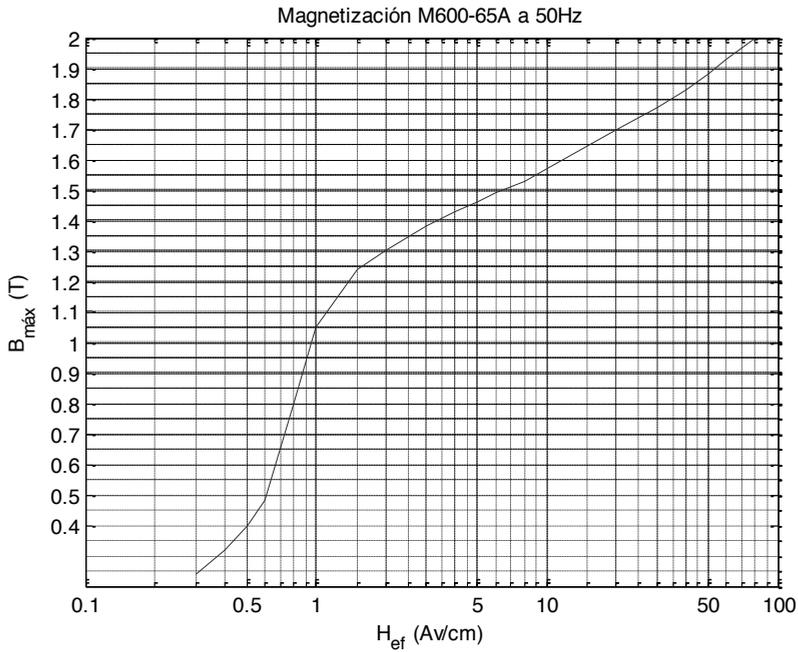
En las páginas siguientes se recogen las características de magnetización y de pérdidas para algunas de las calidades más habituales de chapa de grano no orientado. Sobre estas características se han marcado con círculos (o) las características especificadas que marca la norma EN 10106 en cuanto a polarización magnética mínima a 2500, 5000 y 10.000 A/m y en cuanto a pérdidas máximas a 1,5 T.











Las curvas de magnetización en corriente alterna de los fabricantes de chapa indican, para una evolución senoidal de la inducción magnética, *la relación entre la inducción magnética máxima con que trabaja el material a lo largo del ciclo y el valor eficaz de las amperios-vuelta/ metro*

de la corriente de excitación necesarios para conseguir dicha inducción, incluyendo la contribución requerida para cubrir las pérdidas del material. Al tratarse de materiales no lineales, si la inducción magnética evoluciona de forma senoidal, como es habitual en la mayoría de los circuitos magnéticos de máquinas eléctricas de corriente alterna, los amperios-vuelta/metro instantáneos que requiere el material no evolucionan de forma senoidal. Por este motivo se indica en el eje horizontal el valor eficaz del campo magnético (amperios-vuelta/metro) necesario a lo largo de un ciclo. Este valor eficaz del campo magnético, como ya se ha dicho, está directamente relacionado con el valor eficaz de la corriente de excitación y, en consecuencia, con las pérdidas por efecto Joule en el devanado que excita el circuito magnético.

Existen dos métodos normalizados para determinar las propiedades magnéticas de las chapas magnéticas y sus pérdidas específicas: el marco de Epstein y el ensayo sobre banda única, que se detallan en las normas UNE-EN 60404-2 y UNE-EN 10280:2001+A1, respectivamente. En aras del rigor, hay que señalar que los procedimientos descritos en ambas normas lo que proporcionan es la llamada inducción intrínseca máxima en función de los amperios-vuelta/m de la corriente en el devanado de excitación, mientras que en las curvas de los fabricantes lo habitual es proporcionar la inducción máxima (que coincide, a efectos prácticos, con la intrínseca) en función de los citados amperios-vuelta/m de la corriente de excitación. Para mayores precisiones se remite al lector a las normas UNE mencionadas así como a la información ofrecida en los catálogos de los fabricantes.

### 1.3.2. Imanes permanentes

Junto a la chapa magnética, en algunos tipos de máquinas rotativas se emplean también materiales previamente magnetizados y que presentan una fuerte resistencia a perder ese estado de magnetización. El fenómeno de histéresis magnética, a pesar de representar un inconveniente de la chapa magnética para la construcción de máquinas eléctricas, permite la construcción de máquinas eléctricas de gran importancia industrial que utilizan materiales magnéticos con un ciclo de histéresis de gran extensión (*imanes permanentes*) como fuente principal de excitación del circuito magnético principal. La utilización de imanes permanentes elimina la necesidad de incluir devanados de excitación en muchas máquinas eléctricas rotativas con la ventaja adicional de evitar sus pérdidas por efecto Joule. Las características principales de los imanes permanentes son la inducción remanente y el campo coercitivo. La primera de ellas, la inducción remanente, se define como la inducción magnética en el material cuando, después de someterlo a una intensidad de campo magnético que lo lleva a saturación, se anula este campo magnético. La segunda, el campo coercitivo, es la intensidad de campo magnético (de sentido opuesto al que produjo la imanación del material) necesaria para anular la inducción magnética en el material. Ambas en conjunto dan una idea de la energía por unidad de volumen involucrada en el proceso de desmagnetización y, relacionada con ella, de la cantidad de material necesario para magnetizar un circuito magnético.

En la Tabla se indican los valores orientativos de estas características para la chapa magnética y para los materiales más utilizados para la fabricación de imanes permanentes en máquinas eléctricas (Ferritas, Aluminio-Níquel-Cobalto, Samario-Cobalto y Neodimio-Hierro-Boro). Como se puede observar, la gran di-

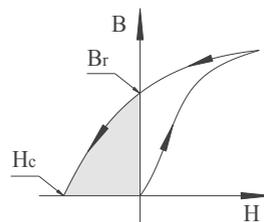


Fig. 1-16 Inducción remanente y campo coercitivo

ferencia entre la chapa magnética y los materiales para imanes permanentes es el valor del campo coercitivo, que para estos últimos es entre 3 y cuatro órdenes de magnitud superior que para la primera.

<i>Material</i>	<i>B<sub>r</sub> (T)</i>	<i>H<sub>c</sub> (kA/m)</i>
<b>Chapa magnética</b>	1,2	0,065
<b>Ferritas</b>	0,2 ~ 0,4	200~300
<b>AlNiCo</b>	0,8 ~ 1,2	60~150
<b>SmCo</b>	0,85~1,15	400~800
<b>NdFeB</b>	1~1.4	800~1000

Tabla 4. Características de imanes permanentes (comparación con chapa magnética)

#### I.4. Circuito magnético principal de las máquinas eléctricas

Como se indicó en la introducción del capítulo, para establecer una elevada inducción magnética en una región del espacio se emplean devanados recorridos por corrientes eléctricas y configuraciones de materiales ferromagnéticos dispuestos de forma que el flujo magnético se establezca mayoritariamente por caminos claramente definidos en el diseño. Dichos caminos están constituidos por tramos consecutivos de los citados materiales; entre los cuales, normalmente, hay uno o varios entrehierros, como se comenta más adelante. Este conjunto de materiales ferromagnéticos y devanados recibe prácticamente siempre el nombre genérico de *circuito magnético* y se utiliza tanto en el diseño y construcción de casi todas las máquinas eléctricas como en el de otros equipos y dispositivos eléctricos (relés, contactores, bobinas con núcleo de hierro, etc.).

Dentro de los precitados circuitos magnéticos, los que son objeto de análisis más detallados en este libro son aquellos que corresponden específicamente a las máquinas eléctricas. Para dichos circuitos, que son de baja reluctancia, se utilizará en este texto la denominación de *circuito magnético principal*. Con ello se quiere destacar que en las máquinas eléctricas existe siempre, además, el llamado *circuito magnético de dispersión*. Dicho circuito de dispersión, de escasa importancia en otros dispositivos (por ej., en relés), tiene sin embargo una importancia decisiva y fundamental en algunas de las más importantes características de funcionamiento de prácticamente todas las máquinas eléctricas (siendo algunos ejemplos la corriente de cortocircuito de transformadores y generadores, la corriente y par de arranque de máquinas asíncronas, el comportamiento transitorio en general de máquinas rotativas y la forma en que afecta a su regulación, etc.). Por ello el circuito magnético de dispersión será tratado con cierto detalle en el epígrafe I.7.

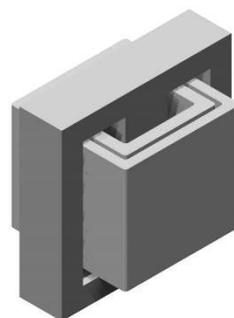
El estudio del *circuito magnético principal* está relacionado con características de las máquinas eléctricas de la mayor importancia, en concreto con su *potencia nominal*. En efecto, en todas las máquinas clásicas ya sean estáticas, como los transformadores, o rotativas como los motores, *el nivel de potencia que la máquina puede transformar*, ya sea eléctrica o mecánica, está relacionado directamente con las tensiones a las que pueden trabajar de forma permanente algunos de sus devanados sin que la máquina sufra un deterioro inadmisibles: son las llamadas tensiones nominales. Para comprender esto basta tener en cuenta que la potencia eléctrica que intercambia un devanado con otros circuitos (la red) a los que pueda estar conectado es proporcional a la tensión eléctrica entre sus terminales,  $u$ , y a la corriente que por él circula,  $i$ :

$$P(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Para la inmensa mayoría de los devanados de máquinas eléctricas industriales, ya sean estáticas o dinámicas (rotativas o lineales), existe una *relación directa entre el flujo que se establece en el circuito magnético principal de la máquina y dichas tensiones y, en consecuencia, con la potencia de la máquina.*

El problema que se plantea, ya sea de análisis (determinar la distribución del campo magnético para una configuración dada) o de síntesis (diseñar una configuración que permita obtener la distribución del campo deseada), es, en rigor, muy complejo, debido a que, en general, el campo magnético  $\mathbf{H}$  y la inducción  $\mathbf{B}$  son funciones del tiempo y del espacio, siendo además la geometría de las configuraciones habituales en máquinas eléctricas relativamente compleja y tridimensional. Por otra parte la relación entre  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  depende del material, es fuertemente no lineal para los materiales ferromagnéticos en la zona habitual de trabajo y, en muchos casos, depende incluso de su historia previa según lo expuesto en el epígrafe I.3.

Para ilustrar esta situación basta considerar dos ejemplos típicos de máquinas eléctricas: los circuitos magnéticos principales de un transformador monofásico (Fig. I-17) y de una máquina rotativa (Fig. I-18).



En cuanto al primer ejemplo (Fig. I-17), se trata de un transformador de núcleo acorazado (el material ferromagnético envuelve los devanados para protegerlos) con dos devanados (primario y secundario) concéntricos alojados sobre la columna central, configuración típica de un transformador monofásico. La aplicación principal de un transformador de potencia es transmitir potencia eléctrica entre las redes o circuitos eléctricos conectados a uno y otro devanado. El circuito magnético principal del transformador juega un papel fundamental ya que esa transmisión de potencia se puede realizar de forma competitiva (bajo coste de funcionamiento) gracias a la canalización de un elevado flujo magnético que el efecto conjunto de las corrientes circulando por ambos devanados establece en el núcleo ferromagnético del transformador.

Fig. I-17 Circuito magnético principal en un transformador monofásico acorazado

La constitución de la máquina síncrona (Fig. I-18) es considerablemente más compleja que la del transformador. En primer lugar hay que distinguir dos partes que pueden girar una respecto a la otra: el estator (fijo, en la parte exterior) y el rotor (que puede girar alrededor de su eje, concéntrico con el del estator, en la parte interior y protegido por el estator). El rotor, en el caso de la Fig. I-18, tiene una estructura de dos polos salientes: dos expansiones



Fig. I-18 Circuito magnético principal de una máquina síncrona bipolar

de material dirigidas hacia su parte exterior con una envolvente aproximadamente cilíndrica de dimensiones un poco menores que las del hueco que deja el estator en su interior. Sobre la parte central de los polos del rotor se alojan los devanados del rotor (reciben el nombre de devanados de excitación). Por estos devanados se hace circular una corriente continua de tal modo que su efecto, combinado con el de las corrientes por el inducido (estator), da lugar a un flujo total por polo magnético de valor prácticamente constante. En cuanto al estator, está constituido por un cilindro ferromagnético hueco (del que se ha eliminado un cuarto en la figura para distinguir mejor la parte interior de la máquina) dentro del cual puede girar el rotor. El estator dispone de un conjunto de bobinas alojadas en ranuras y conectadas unas con otras formando el devanado inducido (que tampoco se ha repre-

sentado completo, sino sólo una bobina y cuatro conductores).

De nuevo aquí el circuito magnético principal juega un papel fundamental en el funcionamiento de la máquina, cuyo objetivo es intercambiar potencia eléctrica (tomada o entregada por los devanados del estator de o a una red o circuito eléctrico a él conectado) y potencia mecánica (entregada o recibida por el eje hacia o desde algún mecanismo - bomba hidráulica, prensa, motor de combustión interna, turbina,... - a él acoplado). En efecto, los conductores del estator están sometidos a un campo magnético giratorio, lo que induce ff.ee.mm. en ellos que, junto con las corrientes que los recorren, dan lugar a un intercambio de energía eléctrica con el circuito o red externa. Por otra parte, al circular corriente por dichos conductores inmersos en el campo magnético de la máquina aparecen esfuerzos tangenciales que, todos ellos combinados, producen un par de rotación. Es este par de origen electromagnético actuando sobre partes en movimiento da lugar a un intercambio de potencia mecánica con el mecanismo al que esté acoplada la máquina.

Los dos ejemplos de circuito magnético principal descritos ponen de manifiesto la dificultad de resolver con total precisión el problema del campo magnético. Afortunadamente, en bastantes ocasiones el interés prioritario del estudio puede limitarse a conocer con una aproximación adecuada la relación entre el valor del flujo o de la inducción magnética en ciertas partes más significativas del circuito magnético principal de la máquina y la corriente necesaria para conseguirlos, así como el nivel de magnetización de las partes más cargadas del circuito magnético. En este sentido se pueden considerar dos casos netamente diferenciados de máquinas eléctricas: transformadores y máquinas rotativas de corriente

continua, por un lado, y máquinas rotativas de corriente alterna (máquinas síncronas y asíncronas), por otro.

En las máquinas del primer grupo, su circuito magnético principal está formado por la yuxtaposición de tramos tales que el flujo magnético tiene prácticamente el mismo valor instantáneo en todas las secciones transversales de un mismo tramo (esta característica hace que dichos circuitos magnéticos se asemejen notablemente a los circuitos eléctricos de corriente continua, lo que facilita mucho su análisis). Esos tramos, típicamente, son, en los transformadores, las columnas y el yugo o culata. En las máquinas de continua pueden señalarse la corona estatórica (que constituye siempre el “tramo natural fundamental” del circuito magnético principal de las máquinas rotativas, pues por él se canaliza el flujo de un polo a otro), los polos, las zapatas polares, y el entrehierro bajo ellas. El estudio del circuito magnético principal de este primer grupo de máquinas se lleva a cabo en el epígrafe I.4.1.

Por el contrario, en las máquinas del segundo grupo, su circuito magnético principal se caracteriza por el hecho de que el flujo magnético tiene valores muy diferentes en las distintas secciones correspondientes al “tramo natural fundamental” que es, como se ha dicho, la corona estatórica. Además, la inducción en el entrehierro suele tener una distribución espacial cercana a la senoidal, al contrario de lo que sucede en las máquinas de corriente continua (en estas, la inducción en la zona del entrehierro bajo las zapatas polares es prácticamente constante). El análisis y la caracterización del circuito magnético de este segundo grupo de máquinas se realiza de forma especialmente clara cuando se expresa en función de la distribución, bien de la inducción magnética en diferentes lugares del entrehierro, bien del flujo en las diferentes secciones de la corona del estator (ver I.4.2).

### ***1.4.1. El Circuito magnético principal de transformadores y máquinas rotativas de corriente continua***

En el epígrafe I.2.4 se introdujeron las tres relaciones físicas principales para la determinación del campo magnético. De ellas, el comportamiento magnético de los materiales constitutivos de los circuitos magnéticos se ha tratado con detalle en el epígrafe I.3. En este epígrafe se tratará la aplicación de las otras dos leyes fundamentales (los teoremas de Gauss y de Ampère) al caso particular del circuito magnético principal de transformadores y de máquinas de corriente continua atendiendo a sus especiales características: estar formado por la yuxtaposición de tramos en cada una de cuyas secciones la inducción magnética es la misma en cada instante.

#### *1.4.1.1. Distribución del flujo en el circuito magnético principal*

En el diseño y análisis del *circuito magnético principal* de las máquinas eléctricas tanto del primer como del segundo grupo (y también de otra serie de dispositivos) es muy usual y aproximado admitir que *el flujo magnético queda prácticamente confinado en los trayectos cerrados definidos por el material ferromagnético*. Esta hipótesis simplificativa equivale a despreciar el flujo que se establece por caminos fundamentalmente no ferromagnéticos en paralelo con el camino principal, que sí está constituido, casi en su totalidad, por materiales ferromagnéticos trabajando con permeabilidades muy superiores a la del vacío.

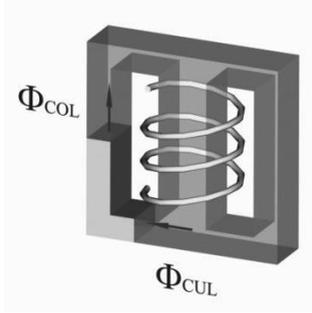


Fig. I-19 Ley de Gauss del magnetismo: Flujo en secciones consecutivas del circuito magnético principal sin derivación entre ellas

La ley de Gauss del magnetismo se reduce a leyes muy simples cuando la aplicamos al estudio de los circuitos magnéticos principales de las máquinas eléctricas del primer grupo (transformadores y máquinas rotativas de corriente continua). Recuérdese que el circuito magnético principal de dichas máquinas está formado por la yuxtaposición de tramos tales que el flujo magnético tiene prácticamente el mismo valor instantáneo en todas las secciones transversales de un mismo tramo. Así, para un tramo de circuito magnético sin derivaciones como el de la Fig. I-19 el flujo en dos secciones transversales al camino magnético principal (en este ejemplo situadas sobre la culata inferior y sobre la columna izquierda del circuito magnético) es el mismo:

$$\Phi_{S\text{ cerrada}} = (-\Phi_{CUL}) + \Phi_{COL} = 0 \Rightarrow \Phi_{CUL} = \Phi_{COL}$$

De la misma forma, en las secciones que delimitan un nudo de un circuito magnético se cumple también que el flujo total que entra es igual al que sale (Fig. I-20):

$$\begin{aligned} \Phi_{S\text{ cerrada}} &= -\Phi_{COL} + \Phi_{CUL,izq} + \Phi_{CUL,der} = 0 \\ &\Rightarrow \\ \Phi_{CUL,izq} + \Phi_{CUL,der} &= \Phi_{COL} \end{aligned}$$

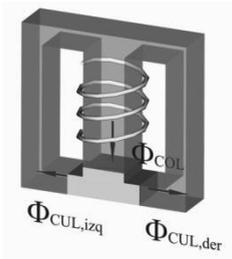


Fig. I-20 Teorema de Gauss: Flujo en secciones que delimitan un nudo del circuito magnético principal

El teorema de Gauss tiene implicaciones directas en el análisis de circuitos magnéticos típicos de máquinas eléctricas tanto estáticas como de algunas máquinas rotativas. Consideremos por ejemplo el caso de un transformador trifásico de tres columnas y el de una máquina de corriente continua. (Fig. I-21). La aplicación de la ley de Gauss al nudo del circuito magnético que se observa en la parte inferior de dicha figura proporciona como resultado:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

es decir, la suma de los flujos instantáneos en las tres columnas del transformador es nula.

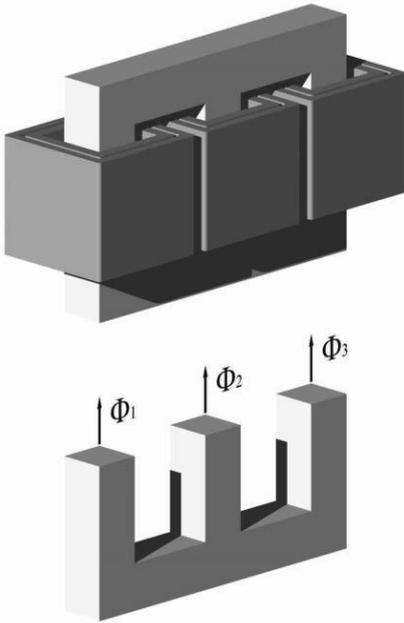


Fig. I-21 Transformador trifásico de tres columnas: flujo magnético en sus tres columnas

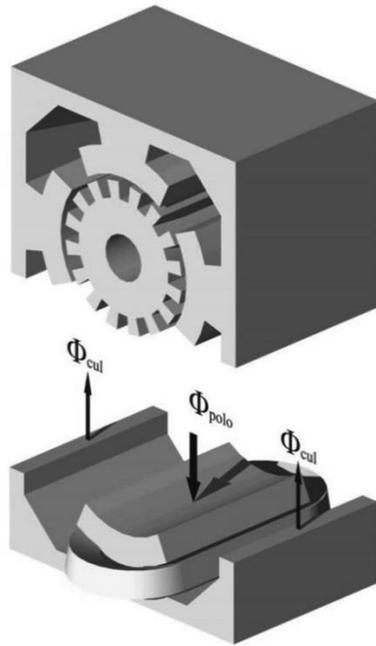


Fig. I-22 Flujo en un polo y en las culatas de una máquina de corriente continua

Para el circuito magnético de una máquina de corriente continua como la de la Fig. I-18 obtenemos también un interesante resultado: puesto que el circuito magnético tiene simetría, el flujo que pasa al polo inferior del estator procedente del rotor se divide en dos partes iguales tal como se representa en la Fig. I-22 para dirigirse por las culatas a ambos lados del polo hacia los polos de la parte superior del estator y del rotor. En consecuencia se cumple:

$$\Phi_{polo} = \Phi_{cul} + \Phi_{cul} \Leftrightarrow \Phi_{cul} = \frac{1}{2}\Phi_{polo}$$

#### I.4.1.2. F.m.m. y caídas de tensión magnética a lo largo del circuito magnético principal

Al establecer la relación entre el campo magnético y las corrientes utilizando el teorema de Ampère, ecuación (I.19), se hace necesario elegir los trayectos a los que conviene aplicar dicha ley. Esta elección no presenta dificultad en el estudio de los circuitos magnéticos formados por tramos ya que los materiales ferromagnéticos y los devanados se disponen para canalizar el flujo magnético por trayectos muy concretos. Es precisamente a estos trayectos a los que conviene aplicar, casi siempre, el teorema de Ampère.

Además, los circuitos magnéticos principales de transformadores y de las máquinas rotativas de corriente continua están dispuestos de forma que el flujo instantáneo (que es la magnitud esencial a determinar en ellos) es el mismo en todas las secciones transversales de un mismo tramo, y las dimensiones trasversales de dichos tramos suelen ser considerable-

mente inferiores a la longitud de las líneas de campo principales. Por ello, en este tipo de circuitos, *en general, proporciona resultados suficientemente aproximados* (con precisión industrial) el considerar que el vector campo magnético (y, en consecuencia, la inducción magnética) tiene un valor parecido en todos los puntos de cualquier sección transversal al campo. De este modo el problema de la distribución del campo dentro de un volumen queda reducido a su distribución a lo largo de una línea: la *línea de campo media*, que es la que transcurre por el centro geométrico de las secciones del circuito magnético transversales al campo.

Tomando como base la línea de campo media en el circuito magnético principal de los transformadores y de las máquinas rotativas de corriente continua, el teorema de Ampère permite relacionar el campo magnético con las corrientes que atraviesan la superficie delimitada por dicha línea según la ecuación (I.21)

$$\int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_I^J \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_J^A \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{a través de C}}$$

El término de la izquierda es la suma de las caídas de tensión magnética, ecuación (I.22), a lo largo de todos los tramos que, dispuestos unos a continuación de otros, forman el circuito magnético, en el que de manera genérica hemos indicado por A, B, C, ... I y J los diferentes puntos consecutivos en los que la línea media de campo cruza las secciones de unión entre los diferentes tramos del circuito magnético (Fig. I-23).

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_I^J \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_J^A \vec{H} \cdot d\vec{l} = \tag{I.26}$$

$$= F_{AB} + F_{BC} + \dots + F_{IJ} + F_{JA}$$

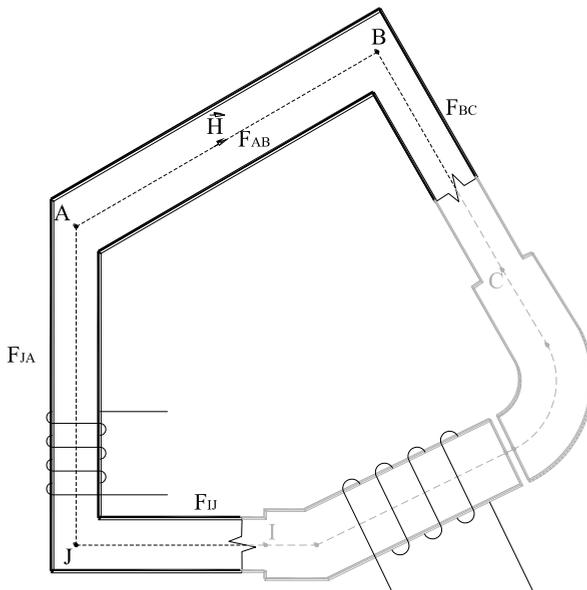


Fig. I-23 Aplicación de la Ley de Ampère: división en tramos del circuito magnético para el cálculo de las caídas de tensión magnética en cada tramo.

La mayor simplificación al calcular dichas caídas de tensión magnética se consigue cuando es posible dividir el circuito magnético principal en tramos en los que no sólo el flujo magnético instantáneo es el mismo a lo largo de cada uno de ellos sino que además todos ellos son de material homogéneo y sección uniforme, de manera que la distribución de la inducción magnética es la misma en todas las secciones a lo largo de un mismo tramo. Para cada uno de esos tramos puede escribirse:

$$B_{\text{tramo}} = \frac{\Phi_{\text{tramo}}}{S_{\text{tramo}}}$$

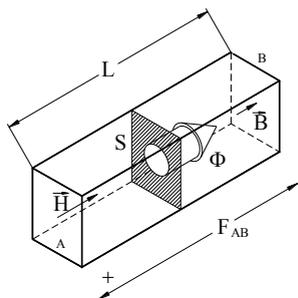


Fig. I-24 Comportamiento de un tramo de material de sección y propiedades uniformes sometido a un campo magnético

El valor así calculado de la inducción magnética representa un valor promedio sobre la totalidad de una sección transversal cualquiera del tramo, y es usual aceptar que coincide prácticamente con el que corresponde a la línea media de campo en el tramo al que se va a aplicar la ley de Ampère. Además, al tratarse, como ya se ha dicho, de un tramo de material homogéneo y sección uniforme, con igual distribución de la inducción en todas las secciones transversales del tramo, también será igual la distribución del campo magnético en todas esas secciones transversales. Y lo mismo se cumple para la permeabilidad. En consecuencia, la caída de tensión magnética a lo largo de la línea media de dicho tramo se puede calcular de forma sencilla según:

$$F_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^B H \cdot dl = H_{\text{tramo}} \int_A^B dl = H_{\text{tramo}} l_{\text{tramo}} \quad (I.27)$$

La simplificación en el cálculo se produce por dos motivos. En primer lugar, el camino a elegir para la integral debe coincidir con una línea de campo: de esta forma los vectores campo magnético,  $\vec{H}$ , y elemento de recorrido,  $d\vec{l}$ , son colineales y su producto escalar se convierte en el producto de sus módulos. En segundo lugar, el valor del campo magnético  $H$  en cualquier punto a lo largo de esa línea de campo o línea media del tramo es constante, por lo que sale fuera de la integral.

En estas condiciones (tramo de material de sección y propiedades magnéticas uniformes en cuyo interior la inducción magnética promedio es constante y de valor  $B$ , Fig. I-24) resulta muy interesante caracterizar la relación entre caída de tensión magnética y flujo en dicho tramo mediante un parámetro llamado reluctancia. En efecto, se cumple:

$$F_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot l = \frac{l}{\mu} B = \frac{l}{\mu S} \Phi = \mathfrak{R} \Phi$$

Ecuación en la que aparece el concepto de *reluctancia*,  $\mathfrak{R}$ , como relación entre la caída de tensión magnética en una parte de un circuito magnético y el flujo que en ella se establece:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} = \frac{F_{AB}}{\Phi} \quad (I.28)$$

En resumen: para abordar el cálculo de la suma de caídas de tensión magnética a lo largo del camino cerrado que constituye el circuito magnético principal se divide éste en tramos para los que sea más sencillo el cálculo de la caída de tensión magnética. Conviene recordar

que la caída de tensión magnética entre dos puntos está definida para un trayecto específico entre dichos puntos. En las máquinas eléctricas este hecho no suele representar una dificultad ya que es habitual definir y utilizar dichas caídas de tensión magnéticas para trayectos claramente definidos del circuito magnético principal. Por ejemplo, la caída de tensión magnética en la columna de la izquierda del transformador de la Fig. I-17 se entiende que se calcula a lo largo de la línea media de dicha columna (Fig. I-25).

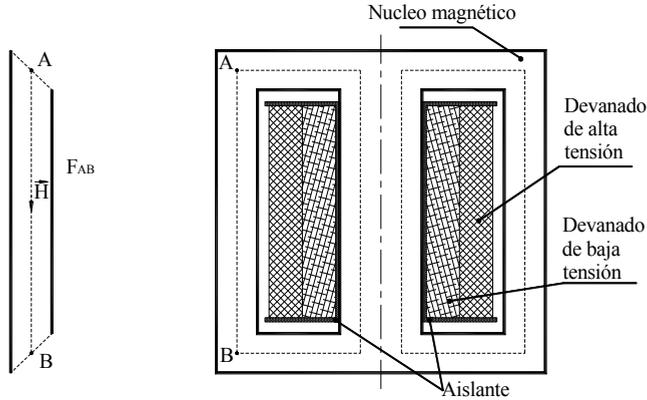


Fig. I-25 Caída de tensión magnética en la columna izda. del transformador de la Fig. I-17

Por otra parte, en circuitos magnéticos de máquinas eléctricas la corriente libre que atraviesa la superficie delimitada por la línea de campo media circula por los conductores que forman los devanados, y su valor, para cada uno de los conductores que atraviesan dicha superficie es la corriente que recorre dicho conductor.

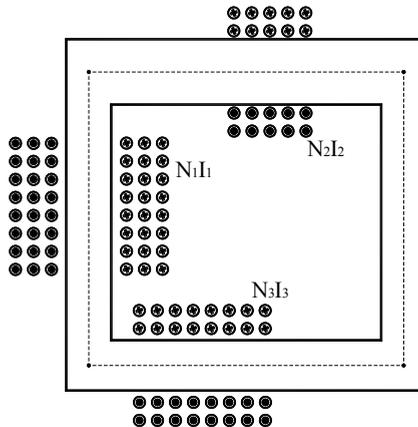


Fig. I-26 Teorema de Ampère: corriente neta abrazada por la línea de circulación del campo

En consecuencia, si la superficie delimitada por la línea media de campo es atravesada por varios devanados como en el ejemplo de la Fig. I-26, cada uno formado por  $N_i$  espiras dispuestas en serie recorridas por la corriente del devanado  $i_i$ , resulta:

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{\text{a través de C}} = \sum_i N_i I_i = f.m.m. \quad (I.29)$$

Aparece así de nuevo (ver I.2.4) el concepto de fuerza magnetomotriz (f.m.m.) para una trayectoria cerrada concreta (que es igual a la suma de las caídas de tensión magnética a lo largo de toda la trayectoria), así como la forma práctica de calcularla para el caso de máquinas eléctricas a partir de las corrientes que circulan por los devanados. Por otra parte conviene también recordar el criterio de signos de la Fig. I-11: corriente positiva (entrante al plano de la figura) produce circulación del campo magnético en el sentido de las agujas del reloj.

Es de interés aquí mencionar que, al estudiar por tramos la circulación del campo a lo largo del circuito magnético principal de las máquinas eléctricas (tanto del primero como del segundo grupo) se revelan ciertos trayectos, normalmente muy cortos, no ocupados por material ferromagnético y que tienen siempre una incidencia importante o, cuando menos, no despreciable. Se trata de los llamados entrehierros que están presentes en la práctica totalidad de las máquinas eléctricas por dos motivos diferentes. En primer lugar, especialmente en transformadores de potencia (aunque también se da este caso en algunas máquinas rotativas), aparecen entrehierros relativamente muy cortos en las uniones entre los tramos consecutivos de material ferromagnético que forma el circuito magnético. Estos entrehierros son debidos a que resulta mucho más económico construir las diferentes partes del circuito magnético principal por tramos independientes y unir después estos tramos una vez se han alojado ya los devanados completos sobre las columnas o polos correspondientes (Fig. I-27) que fabricar el circuito magnético en una sola pieza y entonces arrollar los devanados alrededor de las columnas sobre las que van alojados. (Nótese que en este segundo caso habría que arrollar una a una alrededor de la columna correspondiente las decenas o centenares de espiras que forman cada devanado). Estos entrehierros efectivos suelen ser muy estrechos o cortos, del orden de alguna décima de mm o incluso inferiores y por su origen los denominamos entrehierros constructivos.

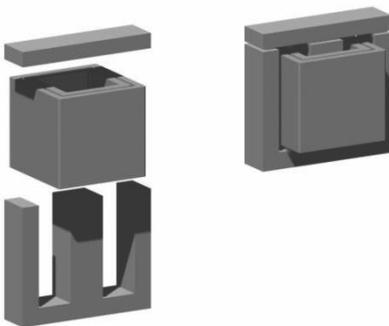


Fig. I-27 Formación del circuito magnético de un transformador monofásico de pequeña potencia

El segundo motivo de los citados antes para la aparición de entrehierros en máquinas eléctricas es la necesidad de separación entre partes móviles y fijas en las máquinas rotativas, como muestra el ejemplo de la máquina síncrona en la Fig. I-18: en ella se puede apreciar que, por bueno que sea el ajuste de concetricidad y de los diámetros exterior del rotor e interior del estator, es imprescindible dejar una cierta holgura entre ambos para garantizar un giro sin roce entre ellos. Hay que tener en cuenta además que, aunque la fabricación sea muy esmerada, el rotor y el estator se ven sometidos a variaciones de temperatura (con las consiguientes dilataciones y contracciones térmicas), a esfuerzos y a desgastes en sus apoyos durante la vida útil del motor que pueden reducir la holgura inicialmente prevista e incluso provocar la destrucción o un defecto importante en la máquina

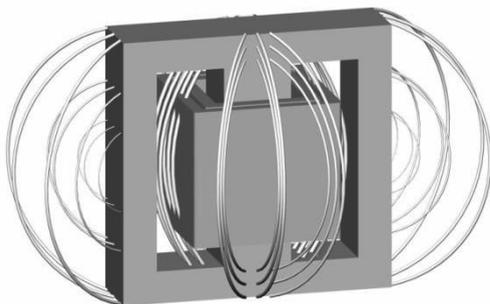
si llega a producirse el contacto entre rotor y estator (conviene tener en cuenta que la velocidad relativa entre las superficies enfrentadas de estator y de rotor es de algunas decenas de km/h en máquinas de pequeña potencia pero puede llegar a ser de varios cientos de km/h en turboalternadores de gran potencia). En algunas ocasiones es conveniente además construir la máquina rotativa con un entrehierro mayor del que sería necesario desde el punto de vista mecánico, por ejemplo para mejorar el comportamiento en carga de algunos generadores eléctricos. En cualquier caso, ya sea por motivos mecánicos o eléctricos, este tipo de entrehierros reciben el nombre de entrehierros funcionales.

En definitiva, la presencia de entrehierros en máquinas eléctricas tiene una incidencia significativa en el comportamiento de su circuito magnético principal. Así, en transformadores de potencia, de toda la f.m.m. disponible para el circuito magnético principal aproximadamente entre el 10 y el 20% se consume en caídas de tensión magnética en los entrehierros (constructivos). En máquinas eléctricas rotativas esta proporción es muy superior y puede ir desde cerca del 50% en máquinas bastante saturadas o con entrehierros cortos hasta valores cercanos al 90%.

#### 1.4.1.3. Analogías con circuitos eléctricos de corriente continua

El estudio comparado de los circuitos eléctricos de corriente continua y de los circuitos magnéticos formados por tramos cuyo flujo instantáneo es prácticamente el mismo en todas las secciones de un mismo tramo muestra que existe un grado de analogía muy importante entre ambos.

En primer lugar, tanto en el análisis de circuitos eléctricos de corriente continua como de circuitos magnéticos se utilizan magnitudes sometidas a una ley de continuidad. En un circuito eléctrico la corriente continua que atraviesa una superficie cerrada es nula, lo que da lugar a la ley de los nudos y a que la corriente sea la misma en dos secciones cualesquiera del circuito eléctrico entre las que no haya derivaciones. Análogamente, la aplicación práctica del teorema de Gauss a circuitos magnéticos (1.4.1.1), aceptando que el flujo queda confinado en los trayectos cerrados definidos por el material ferromagnético, ha dado lugar a idénticas conclusiones prácticas en cuanto al flujo magnético, es decir, *corriente eléctrica y flujo magnético son magnitudes análogas*. Las correspondientes densidades de corriente eléctrica (vector  $\mathbf{J}$ ) y de flujo magnético (vector  $\mathbf{B}$ , o inducción magnética) son también, en consecuencia, magnitudes análogas.



*Fig. 1-28 Líneas de campo externas al circuito magnético principal y en las proximidades de dicho circuito para el caso de un transformador monofásico en vacío.*

Una revisión más detallada de los fundamentos de la ley de los nudos nos obliga, sin embargo, a considerarla con cierta precaución en el análisis de los circuitos magnéticos. En los circuitos eléctricos de corriente continua es extraordinariamente preciso aceptar que la corriente queda confinada en los conductores debido a que su conductividad es del orden de  $10^{22}$  veces mayor que la conductividad de los aislantes que se emplean. Por el contrario, en los circuitos magnéticos la permeabilidad de los materiales ferromagnéticos es sólo del orden de unas 100 a 10.000 veces superior a la del aire (que se emplea como aislante) y, además, no existen materiales con una permeabilidad mucho menor que la del aire que pudieran sustituir a éste en el papel de aislante. A pesar de ello (e incluso teniendo en cuenta que la super-

ficie disponible de material no ferromagnético circundante es muy superior a la sección transversal del trayecto principal ferromagnético, *Fig. 1-28*) la simplificación de aceptar que, en régimen de servicio, todo el flujo magnético está confinado en el mencionado trayecto principal da lugar a errores que raramente superan el 8%. Dicho error depende de la configuración del circuito magnético y de la carga magnética (nivel de saturación) a la que está sometido.

También es interesante en este sentido comparar las características de los conductores con las de los materiales ferromagnéticos. Los circuitos eléctricos están constituidos mayoritariamente por materiales conductores cuya característica eléctrica, la conductividad, no depende, a temperatura del conductor constante, de la densidad de corriente (si existe algún fenómeno de saturación tiene lugar a densidades de corriente muy superiores a las admisibles desde el punto de vista térmico, Fig. I-29).

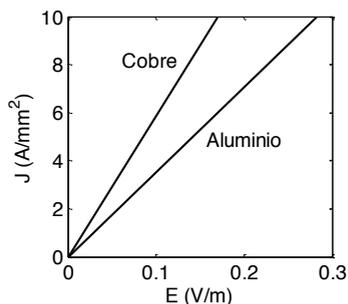


Fig. I-29 Característica eléctrica del cobre y del aluminio

Esta linealidad del comportamiento de los materiales conductores, es la base de numerosas y muy útiles técnicas de análisis de circuitos eléctricos, basadas en el principio de

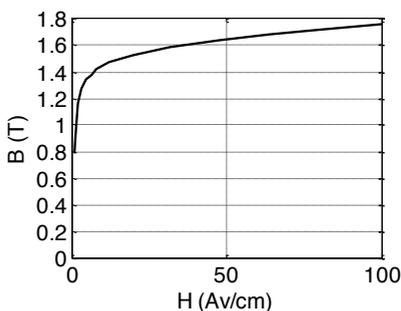


Fig. I-30 Característica magnética de chapa magnética (acero al silicio)

superposición, de las que basta citar para dar idea de su importancia a los métodos de los nudos y de las mallas o los teoremas de Thevenin y Norton. Por el contrario, los materiales ferromagnéticos utilizados en las máquinas eléctricas tienen una característica marcadamente no lineal a la inducción magnética con que se les obliga a trabajar en ellas (Fig. I-30). En efecto, aunque estos materiales presentan una característica de magnetización casi lineal para inducciones reducidas, los fabricantes se ven forzados, por razones económicas, a construir la inmensa mayoría de las máquinas eléctricas con niveles de inducción en dichos materiales (orientativamente entre 1.2 y 2 T) para los que su comportamiento magnético es fuertemente no lineal. Ciertamente sería posible construir

máquinas con inducciones más bajas, pero ello exigiría mayores secciones de material para el mismo flujo magnético y, en definitiva, una potencia específica menor y un coste por kW de potencia nominal de la máquina considerablemente más elevado.

**Para seguir leyendo haga click aquí**