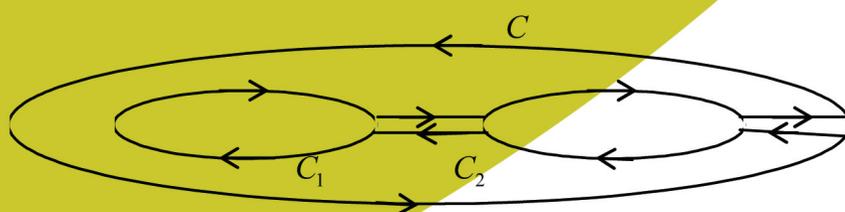


FUNDAMENTOS DE VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES

Luis Manuel Sánchez Ruiz
Matilde Pilar Legua Fernández

3ª edición



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

**Luis Manuel Sánchez Ruiz
Matilde Pilar Legua Fernández**

**Fundamentos de variable
compleja y aplicaciones**

3ª edición

2017

**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Primera edición, 2006
Segunda edición, 2010
Tercera edición, 2017

© Luis Manuel Sánchez Ruiz
Matilde Pilar Legua Fernández

© 2017, Editorial Universitat Politècnica de València
distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0625_04_03_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-593-4
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es.

Impreso en España

Índice General

1	Funciones complejas	1
1.1	Funciones elementales	1
1.1.1	Variable compleja	1
1.1.2	Función exponencial	3
1.1.3	Función logaritmo y función potencial	4
1.1.4	Funciones trigonométricas e hiperbólicas	6
1.2	Límites y continuidad	7
1.2.1	Nociones topológicas	7
1.2.2	Límites de funciones complejas	11
1.2.3	Continuidad de funciones complejas	11
1.3	Derivadas de funciones complejas	13
1.4	Integral de línea	16
1.4.1	Función compleja de variable real	16
1.4.2	Definición y cálculo	18
1.4.3	Propiedades de la integral de línea	20
1.4.4	Aplicaciones	24
1.5	Ejercicios resueltos	28
1.6	Ejercicios propuestos	35
2	Series y residuos	39
2.1	Sucesiones complejas	39
2.2	Serie de términos complejos	40
2.3	Series funcionales	43
2.4	Series de potencias	44

2.4.1	Radio y disco de convergencia	44
2.4.2	Serie derivada	47
2.5	Desarrollos en serie de potencias	48
2.5.1	Desarrollo de Taylor	48
2.5.2	Desarrollo en serie de Laurent	50
2.6	Teoría de residuos	53
2.6.1	Puntos singulares	53
2.6.2	Definición y cálculo de residuos	55
2.7	Aplicaciones de los residuos	58
2.7.1	Cálculo de integrales de línea	58
2.7.2	Cálculo de integrales impropias	59
2.7.3	Integrales $\int_0^{2\pi} R(\sin \alpha, \cos \alpha) d\alpha$	63
2.7.4	Lema de Jordan y aplicaciones	65
2.8	Ejercicios resueltos	68
2.9	Ejercicios propuestos	77
3	Transformadas de Fourier y Laplace	81
3.1	Serie compleja de Fourier	81
3.2	Integral de Fourier	84
3.3	Transformadas de Fourier	87
3.3.1	Definición	87
3.3.2	Cálculo mediante residuos	89
3.3.3	Propiedades	92
3.3.4	Transformadas seno y coseno de Fourier	97
3.4	Aplicación: Problemas de contorno	98
3.5	Transformadas de Laplace	100
3.5.1	Relación con la transformada de Fourier	100
3.5.2	Propiedades y transformadas	102
3.5.3	Fórmula de inversión compleja	109
3.6	Aplicaciones	110
3.6.1	Resolución de ecuaciones diferenciales	110
3.6.2	Sistemas dinámicos	111

3.6.3	Ecuaciones en derivadas parciales	115
3.7	Ejercicios resueltos	116
3.8	Ejercicios propuestos	128
4	Transformada \mathcal{Z}	133
4.1	Definición y propiedades	133
4.2	Transformada \mathcal{Z} inversa	138
4.3	Aplicaciones	141
4.3.1	Resolución de ecuaciones en diferencias	141
4.3.2	Función muestreada	142
4.3.3	Sistemas causales en tiempo discreto	143
4.4	Ejercicios resueltos	145
4.5	Ejercicios propuestos	146

Prólogo

Suele considerarse a Girolamo Cardano (1501–1576) como el introductor de los complejos con sus *soluciones intrigantes*. Sin embargo hoy día en muchas aplicaciones de la matemática, física e ingeniería es necesario manejar funciones de variable compleja, por ejemplo en estadística, teoría de la relatividad especial o restringida, en las transformaciones de Lorentz, teoría de fluidos, termodinámica, sistemas de control, etc.

Con esta publicación se pretende satisfacer las necesidades básicas que puedan tener los alumnos de ingeniería en variable compleja y algunas de sus aplicaciones. Con su estudio debe alcanzarse una familiaridad y soltura en su manejo que hagan lejanos algunos de los términos con los que se ha nombrado a los complejos en el pasado como “números sofisticados, inexplicables, sin sentido, imposibles o incomprensibles”.

Se ha incluido los resultados teóricos que dan el soporte matemático necesario para abordar los problemas que aparecen y, aunque se ha evitado dar demostraciones que sean excesivamente tediosas o complicadas de desarrollar; se han incluido si ayudan a conseguir una formación adecuada para abordar temas o aplicaciones no tratados en este texto.

Entre los temas no tratados citaremos los cuaterniones de Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) cuyas leyes de composición se hallan inscritas en el puente del Canal Brougham en Dublin, y confirma el hecho de que la matemática, que a veces ha ido detrás de la técnica en la resolución de problemas, otras ha ido por delante ya que los cuaterniones son utilizados en el software del sistema de control de los transbordadores espaciales *Shuttle*.

A lo largo del texto hay una amplia exposición de ejemplos que facilitan la comprensión de los diferentes temas presentados. Finaliza cada capítulo con una selección de ejercicios cuya resolución se recomienda para verificar que se ha entendido la materia desarrollada.

Las *series de Laurent* y aplicaciones del *teorema de los residuos* son expuestos extensamente en multitud de aplicaciones de las que resaltamos el cálculo de *integrales impropias, transformadas directas e inversas de Fourier y transformadas inversas de Laplace y Zeta*. Otras aplicaciones son ilustradas con ejemplos y su desarrollo completo genera asignaturas de ingeniería como son la *resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales* y los *sistemas de control*.

Agradecemos las sugerencias recibidas de Dolors Roselló respecto de la edición anterior y que son incorporadas en diversos capítulos de este texto. También ha mejorado esta edición gracias a los alumnos que con sus dudas y querer saber han señalado los temas en los cuales tenían una mayor dificultad. Fruto de sus demandas es una nueva sección con ejercicios resueltos en cada uno de los temas. Esperamos que este texto facilite el trabajo de aprendizaje de los futuros usuarios de la variable compleja y sus aplicaciones.

Los autores

Capítulo 1

Funciones complejas

1.1 Funciones elementales

1.1.1 Variable compleja

Denotando por \mathbb{C} al cuerpo de números complejos con las operaciones suma y producto, y \mathbb{R} al subconjunto de números reales, si $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$,

$$z = (x, y) = x + iy$$

es la representación cartesiana y binómica, respectivamente, de $z \in \mathbb{C}$. Su **conjugado**, denotado por z^* (o \bar{z}) es el complejo $z^* = x - iy$.

El **módulo** o **valor absoluto** de z ,

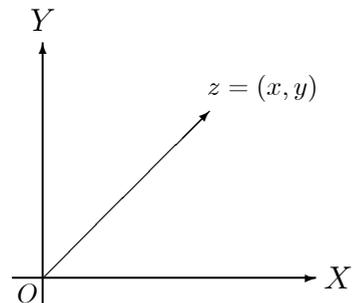
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

es la distancia entre el afijo de z y el origen $O(0, 0)$.

El **argumento** de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el ángulo α formado por el eje real y el vector definido por el origen de coordenadas y el afijo de z . Se representa $\arg z$ y toma los infinitos valores reales dados por

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x}$$

teniendo en cuenta el cuadrante en que se halla el afijo de z los cuales difieren entre sí en múltiplos enteros de 2π .



Definición 1.1.1 La *determinación principal* del argumento de z , $\text{Arg } z$, es el único valor de $\arg z$ tal que $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$. Dado $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, se define *determinación* α_0 del argumento de z , y se denota $\arg_{\alpha_0} z$, como el único valor de $\arg z$ tal que

$$\arg_{\alpha_0} z \in]\alpha_0 - \pi, \alpha_0 + \pi].$$

Evidentemente $\text{Arg } z = \arg_0 z$.

Recordamos que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo r y argumento α , entonces z puede representarse en las siguientes formas

r_α	$r(\cos \alpha + i \sen \alpha)$
forma polar	forma trigonométrica

Ejemplo 1.1.2 Representar en forma polar $-1 - i\sqrt{3}$ y hallar la determinación $\frac{15\pi}{4}$ de su argumento.

Sol.: El módulo es

$$\left| -1 - i\sqrt{3} \right| = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Teniendo en cuenta que $-1 - i\sqrt{3}$ está en el tercer cuadrante,

$$\arg(-1 - i\sqrt{3}) = \arctan \sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto en forma polar es $-1 - i\sqrt{3} = 2_{-\frac{2\pi}{3}}$.

La determinación $\frac{15\pi}{4}$ corresponde al valor del argumento que pertenece al intervalo

$$\left] \frac{15\pi}{4} - \pi, \frac{15\pi}{4} + \pi \right] = \left] \frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4} \right],$$

luego

$$\arg_{\frac{15\pi}{4}}(-1 - i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}. \quad \blacksquare$$

Definición 1.1.3 Se llama *variable compleja* a todo símbolo z que representa a cualquier elemento de un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$.

Dada una variable compleja $z = x + iy$, se representan por $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$ respectivamente a las variables reales correspondientes a las partes real x e imaginaria y de z .

Diremos que ω es una **función de la variable compleja** z , y la representamos $\omega = f(z)$, cuando los valores $f(z)$ de ω dependan de $z \in D$. La función ω tendrá una parte real u y una parte imaginaria v , cada una de las cuales dependerá de x e y , es decir,

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

La función $\omega = f(z)$ establece una aplicación entre el conjunto D de puntos del plano z donde está definida f , sobre otro conjunto D_1 del plano donde se representan los valores ω que toma f . El conjunto D_1 se llama **imagen** del conjunto D .

1.1.2 Función exponencial

Definición 1.1.4 La función *exponencial* compleja se define como

$$\boxed{\exp(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \quad x, y \in \mathbb{R}} \quad (1.1)$$

Por tanto el módulo de e^z es $e^{\operatorname{Re} z}$ y su argumento $\operatorname{Im} z$.

Las partes real u e imaginaria v de $\exp(z)$ son

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Esta definición relaciona los números trascendentes e y π con la unidad imaginaria i mediante la fórmula

$$e^{\pi i} = -1.$$

Recordamos la representación en *forma exponencial* $re^{i\alpha}$ de $r_\alpha \in \mathbb{C}$,

r_α	$r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$	$re^{i\alpha}$
<i>polar</i>	<i>trigonométrica</i>	<i>exponencial</i>

Ejemplo 1.1.5 Representar $-1 + i$ en forma exponencial y hallar e^{-1+i} .

Sol.: Como

$$|-1 + i| = \sqrt{2}, \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

la representación de $-1 + i$ en forma exponencial es

$$-1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Por otra parte $\exp(-1 + i)$ en forma polar, exponencial y binómica es

$$\exp(-1 + i) = (e^{-1})_1 = e^{-1} e^i = e^{-1} \cos 1 + i e^{-1} \sin 1. \blacksquare$$

1.1.3 Función logaritmo y función potencial

La exponencial compleja puede tomar cualquier valor complejo z diferente de 0. Los complejos w que hacen que

$$\exp(w) = z$$

constituyen el **logaritmo neperiano** de z . Se representa

$$\omega = \ln(z) \text{ (o } \log z \text{)}.$$

Hallemos la expresión binómica de los $w = u + iv = \ln(z)$. De

$$z = e^w = e^{u+iv} \Rightarrow \begin{cases} |z| = e^u & \rightarrow u = \ln |z|, \\ \arg z = v. \end{cases}$$

En consecuencia.

$$\boxed{\ln(z) = \ln |z| + i \arg z, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

Por tanto $\operatorname{Re}(\ln z)$ está unívocamente definida pero $\operatorname{Im}(\ln z)$ es una función multivaluada que toma infinitos valores.

Dado $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, se llama **determinación** α_0 (resp. **principal**) de $\ln(z)$ al valor obtenido al tomar dicha determinación en el argumento como parte imaginaria de $\ln z$. Se denota

$$\boxed{(\ln(z))_{\alpha_0} = \ln |z| + i \arg_{\alpha_0} z \text{ (resp. } \operatorname{Ln} z = (\ln(z))_0 = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \text{)}.$$

La determinación principal de $\log z$ también se denomina **valor principal** y representa por $\operatorname{Log} z$.

Si $z \in \mathbb{R}^+$, entonces $\operatorname{Ln} z$ es el logaritmo neperiano usual definido en el campo real.

Ejemplo 1.1.6 Calcular $\text{Ln}(z)$ y $\ln z$ para $z = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Sol.: La representación en forma exponencial de z es

$$z = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

y los logaritmos pedidos son

$$\begin{aligned} \text{Ln}(z) &= \ln e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\pi}{4}, \\ \ln z &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 1.1.7 Observemos que dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\exp(\ln z) = z$$

se simplifica a z mientras que no lo hace

$$\ln(\exp(z)) = \text{Re } z + i(\text{Im } z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Nota 1.1.8 Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se verifica que

$$\begin{aligned} \ln(z_1 z_2) &= \ln z_1 + \ln z_2, \\ \ln(z_1/z_2) &= \ln z_1 - \ln z_2. \end{aligned}$$

Sin embargo puede ser cierto o falso $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$ o que $\text{Ln}(z_1/z_2) = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2$. Así por ejemplo

$$\text{Ln}(-i) = -\frac{\pi}{2}i \begin{cases} \neq \text{Ln}(-1) + \text{Ln}(i) = \pi i + \frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i. \\ = \text{Ln}(2) + \text{Ln}\left(\frac{-i}{2}\right) = \ln 2 + \left(-\ln 2 - \frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}i. \end{cases}$$

Y la expresión $\ln z^2 = \ln z + \ln z$ no debe simplificarse a $2 \ln z$, ya que dado $A \subset \mathbb{C}$, $2A$ es un subconjunto de $A + A$ pudiendo no coincidir con él como puede comprobarse con $A = \ln i$. \blacksquare

Definición 1.1.9 Se define la **potencia de base y exponente complejo** z^μ como

$$\boxed{z^\mu = (e^{\ln z})^\mu = e^{\mu \ln z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

Dado $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, se llama *determinación* α_0 (resp. *principal*) de z^μ al valor obtenido al tomar dicha determinación en el logaritmo. Se denota

$$\boxed{(z^\mu)_{\alpha_0} = e^{\mu(\ln(z))_{\alpha_0}}, \text{ (resp. VP}(z^\mu) = (z^\mu)_0 = e^{\mu \text{Ln} z}), z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nota 1.1.10 Si $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $\mu = m \in \mathbb{Z}$, entonces z^μ toma un único valor que se corresponde con la **fórmula de Moivre**,

$$z^m = \boxed{(r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha))^m = r^m(\cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha).$$

Si $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es irreducible, entonces z^μ toma q valores distintos que se corresponden con las raíces q -ésimas de z^p ,

$$z^{\frac{p}{q}} = \boxed{\left(\sqrt[q]{(r\alpha)^p}\right) = \left(\sqrt[q]{r^p}\right) \frac{e^{i\frac{p\alpha}{q}}}{e^{i\frac{2\pi k}{q}}}, k = 0, 1, \dots, q-1.$$

Si μ es irracional o imaginario, obtenemos infinitos valores de z^μ . ■

1.1.4 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si en (1.1) tomamos como z los imaginarios puros $yi, -yi$ obtenemos

$$\begin{aligned} e^{yi} &= \cos y + i \operatorname{sen} y, \\ e^{-iy} &= \cos y - i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Despejando,

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Generalizando, se definen las funciones **trigonométricas**:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

De estas fórmulas se deducen las expresiones de $\tan z, \cot z, \sec z, \csc z$ siguiendo las definiciones de las correspondientes funciones reales en función de senos y cosenos. La restricción de estas funciones a \mathbb{R} coincide con la correspondiente función de variable real, siendo sencillo comprobar que se verifican las fórmulas de suma y diferencia,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ \tan(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2)}{\cos(z_1 \pm z_2)} = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}. \end{aligned}$$

Las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante **hiperbólica** se definen mediante

$$\begin{array}{l} \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \\ \coth z = \frac{1}{\tanh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \end{array}$$

Las *funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas* satisfacen:

$$\begin{array}{l} \operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \operatorname{senh} z, \\ \operatorname{cos}(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{cosh} z, \\ \operatorname{tan}(iz) = \frac{\operatorname{sen}(iz)}{\operatorname{cos}(iz)} = i \operatorname{tanh} z. \end{array}$$

1.2 Límites y continuidad

1.2.1 Nociones topológicas

Definición 1.2.1 Dado $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ la **norma euclídea** de P es $\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La **distancia** entre los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Por la representación cartesiana de \mathbb{C} , el conjunto de complejos que distan $\epsilon > 0$ de $z_0 \in \mathbb{C}$ constituye la circunferencia $C\epsilon(z_0)$,

$$C\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}.$$

Ejemplo 1.2.2 Interpretar el significado de:

a) $|z - 2| = 3$; b) $3 < |z - (1 + i)| < 5$.

Sol.: a) La ecuación dada representa al conjunto de números complejos cuyos afijos distan de 2 tres unidades, es decir $C_3(2)$.

b) Esta expresión representa una corona circular comprendida entre las circunferencias $C_3(1 + i)$ y $C_5(1 + i)$. ■

En cada conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ consideramos los mismos conceptos topológicos que tienen los afijos de D en \mathbb{R}^2 . Así, si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ se define **disco abierto** (o bola abierta) de centro z_0 y radio ϵ al conjunto

$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

El conjunto $D_\epsilon^r(z_0) = D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ se llama **disco reducido** o agujereado de centro z_0 y radio ϵ .

Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in D$, se dice que D es un **entorno** de z y que z es un **punto interior** de D si existe algún $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon(z) \subseteq D$. El conjunto formado por todos los puntos interiores a D se llama **interior** de D , y se representa por $\overset{\circ}{D}$ o $\text{int}(D)$. Un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ es **abierto** si coincide con su interior, o equivalentemente si D es entorno de cada uno de sus puntos.

Se dice que z es un **punto de acumulación** de D si existen puntos de D , diferentes de z , tan próximos a z como se quiera, esto es, si dado cualquier $\epsilon > 0$ se verifica que $D_\epsilon^r(z) \cap D \neq \emptyset$. Un punto de acumulación de D puede no pertenecer a D , y puede haber puntos de D que no sean de acumulación de D . Se denomina **conjunto derivado** de D , y se representa por D' , al conjunto formado por los puntos de acumulación de D .

Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es un **punto frontera** de D si existen puntos tan próximos a z como se quiera tanto de D como de su complementario $D^c = \mathbb{C} \setminus D$. Se denomina **frontera** de D , y se representa por $\text{Fr}(D)$ o ∂D , al conjunto formado por todos los puntos frontera de D . **Clausura** de D es el conjunto $\overline{D} = D \cup \text{Fr}(D)$ (también se representa $\text{cl}(D)$). y $D \subseteq \mathbb{C}$ se denomina **cerrado** si $D = \overline{D}$.

La clausura del disco $D_\epsilon(z_0)$ es el **disco cerrado** (o *bola cerrada*) de centro z_0 y radio ϵ , $\overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) \leq \epsilon\}$.

Ejemplo 1.2.3 *Hallar el conjunto derivado, interior y clausura de los siguientes conjuntos, indicando si son abiertos o cerrados:*

$$\begin{aligned} A &= \{z : |z| < 2\}, & C &= A \cup \{(1, 2)\}, \\ B &= \{z : |z| \leq 2\}, & D &= \{z : 1 < |z| \leq 3\}. \end{aligned}$$

Sol.: $\text{int}(A) = \text{int}(B) = \text{int}(C) = A$, $A' = B' = C' = B$, $\overline{A} = \overline{B} = B$, $\overline{C} = B \cup \{(1, 2)\}$, $\text{int}(D) = \{z : 1 < |z| < 3\}$, $D' = \overline{D} = \{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$. Luego A es abierto, B cerrado, y C y D no son abiertos ni cerrados. ■

Para seguir leyendo haga click aquí