UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

La distribución binomial

Apellidos, nombre	Martínez Gómez, Mónica (momargo@eio.upv.es) Marí Benlloch, Manuel (mamaben@eio.upv.es)
Departamento	Estadística, Investigación Operativa Aplicadas y Calidad
Centro	Universidad Politécnica de Valencia

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo vamos a presentar las características básicas de la distribución binomial y sus posibles aplicaciones prácticas con la finalidad de suministrar una especie de catálogo al que acudir para determinar un modelo de probabilidad para describir el comportamiento de una variable real.

2. Guía introductoria

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos si la variable es una variable aleatoria discreta, es decir, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., n suponiendo que se han realizado n pruebas. En las empresas tenemos muchas situaciones donde se espera que ocurra o no un evento específico. Éste, sólo puede ser de éxito o fracaso. Por ejemplo, en la producción de una pieza, ésta puede salir buena o defectuosa. Para situaciones como éstas se utiliza la distribución binomial.

La estructura de este objeto de aprendizaje es como sigue: en primer lugar se presentan los objetivos que se desean consigan los alumnos; a continuación se trabaja la definición y características de la distribución binomial, haciendo especial relevancia en como identificarla y diferenciarla de otras distribuciones discretas y se resuelven algunos ejemplos prácticos para ayudar a su comprensión. Finalmente, en el Cierre, se destacan los conceptos básicos de aprendizaje con respecto a la distribución binomial y sus aplicaciones prácticas.

3. Objetivos

- Utilizar la distribución binomial para obtener las probabilidades de aquellas situaciones empresariales cuyos posibles resultados, sean únicamente dos resultados.
- Identificar las propiedades de una distribución binomial, así como sus parámetros característicos, esperanza y varianza.
- Determinar los valores de p y fracasos q para establecer las bases para el cómputo de las probabilidades en la distribución binomial.

4. Definición y características de la distribución binomial

4.1. Punto de partida

La distribución binomial fue desarrollada por Jakob Bernoulli (Suiza,1654-1705) y es la principal distribución de probabilidad discreta para variables dicotómicas, es decir, que sólo pueden tomar dos posibles resultados. Bernoulli definió el proceso conocido por su nombre. Dicho proceso, consiste en realizar un experimento aleatorio **una sóla vez** y observar si cierto suceso ocurre o no, siendo *p* la probabilidad de que ocurra (éxito) y *q=1-p* de que no ocurra (fracaso) , por lo que la variable sólo puede tomar dos posibles valores, el 1 si ocurre y el 0 sino sucede.

Las distribución binomial es una generalización de la distribución de Bernouilli, cuando en lugar de realizar el experimento aleatorio una sola vez , se realiza *n,* siendo cada ensayo independiente del anterior.

La distribución binomial viene definida como sigue:

- ✓ Sea una población de tamaño ∞.
- ✓ Sea una muestra de tamaño n (número de repeticiones del experimento).
- ✓ Los n experimentos realizados son independientes.
- ✓ Cada ensayo produce uno de los dos únicos posibles resultados, a los que por comodidad de nomenclatura, les llamaremos acierto (A) y su complementario Fallo (F o $\overline{A}$).
- ✓ Sea A un suceso que tiene una probabilidad p de suceder y en consecuencia, su complementario tendrá una probabilidad 1-p de suceder.
- ✓ X: número de individuos de la muestra que cumplen A.
- ✓ El conjunto de posibles valores de A es, E = {0,1,2,3,4....}

Algunos ejemplos típicos de la distribución binomial son:

- ~ Al nacer puede ser varón o hembra.
- ~ Un equipo de baloncesto puede ganar o perder.
- ~ En un test psicotécnico hay peguntas de verdadero o falso, es decir sólo hay dos alternativas.
- ~ Un tratamiento médico, como por ejemplo la vacuna de la gripe A, puede ser efectivo o inefectivo.
- ~ El objetivo de ventas al año de coches en un concesionario se puede o no lograr.

4.2. Características

Se dice que X sigue una distribución Binomial de parámetros *n* y *p*, que se representa con la siguiente notación:

$$X \sim B(n, p)$$

Su función de probabilidad viene definida por:

$$F(X = x) = \binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{n-x}$$

Ecuación 1. Función de Probabilidad de la distribución Binomial.

Donde, n, debe ser un entero positivo y p debe pertenecer al intervalo $0 \leq p \leq 1$, por ser una proporción. Su media y su varianza, vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$E(X) = n * p$$

Ecuación 2.Esperanza de la distribución Binomial.

$$\sigma^2 = n * p * (1 - p)$$

Ecuación 3. Varianza de la distribución Binomial

Una distribución de probabilidad binomial es una distribución teórica, que se puede calcular mediante el uso de la fórmula de la función de probabilidad. Sin embargo, los cálculos pueden ser muy tediosos, especialmente cuando nos piden probabilidades acumuladas, ya que será necesario aplicar la fórmula repetidamente.

Por tal motivo existen tablas en las que se pueden consultar las probabilidades de un determinado número de éxitos para varios valores de *n* y de *p*, pero únicamente para valores máximos de n = 25. Para cualquier n superior hemos de utilizar inevitablemente la fórmula de la función de probabilidad. Se puede obtener más información al respecto en el recurso poli-media, referido en bibliografía. Sin embargo, el cálculo puede ser todavía tedioso.

Para solventar el problema del cálculo de probabilidades de la distribución binomial para n elevados, y siempre que el producto *n*p*(1-p)* es elevado, del orden de 9 o superior, las probabilidades correspondientes a una variable con distribución binomial, pueden también aproximarse, usando las tablas de la distribución normal, por el **Teorema Central del Límite**, la suma de variables aleatorias independientes, tiende a distribuirse normalmente a medida que aumenta el número de sumandos.

En caso de que podamos aproximar, debemos tener en cuenta que estamos pasando de una variable discreta (binomial) a una continua (normal), y por tanto son distribuciones diferentes. El "precio" que hay que pagar por pasar de una a otra se denomina "corrección por continuidad" y consiste en hacer determinados ajustes para que la aproximación realizada sea lo más precisa posible. En las distribuciones continuas, la probabilidad de obtener un valor exacto es cero, como se vio en temas precedentes y en consecuencia, la corrección por continuidad

Consiste en tomar un pequeño intervalo de longitud 1 alrededor del determinado punto k (aumentar y disminuir un poco el valor solicitado creando en lugar de una valor único un intervalo).

La distribución binomial se puede expresar de forma gráfica, y que en realidad consiste en un diagrama de barras, similar a los obtenidos en la función de probabilidad pero que van a ir variando su forma en función de los valores de n y de p al modificarse las probabilidades de los distintos posibles valores de *P(X=x).*

Por ejemplo, para p=0,2 (azul), y p=0,3 (rojo) y distintos valores de n:

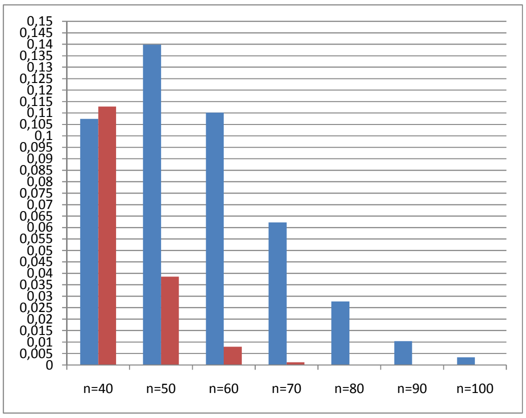

Imagen 1. Gráfica de una distribución binomial(n, 0,3) en rojo y (n, 0,2) en azul, para n = 40, 50,60, 70 ,80, 90 y 100.

En la siguiente figura, puede apreciarse como al incrementar n, se ve que los curvas de frecuencias se aproximan a una forma en forma de campana, con la típica forma de campana de Gauss, pudiendo a deducirse, que conforme aumenta n, las variables discretas que siguen una distribución binomial tiende a aproximarse a la distribución normal.

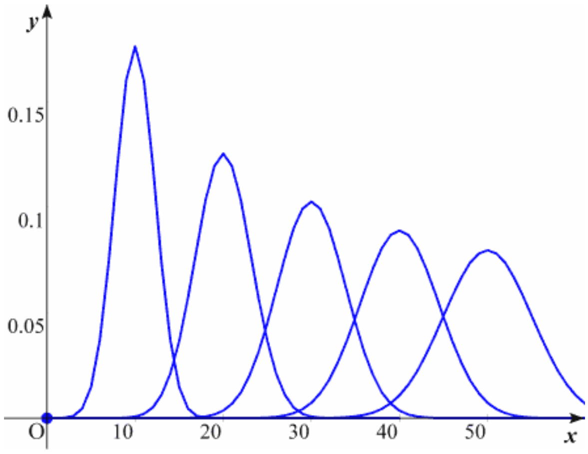

Imagen 2. *La figura es la gráfica de una distribución binomial(n, 0.5) para n = 20, 40, 60, 80, 100.*
Puede ver la aproximación a la distribución normal
Fuente: http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/es/image/nikou.html

Veamos algunos ejemplos:

- **Ejemplo 1.**

Un cazador tiene una probabilidad de acertar cada disparo que realiza con su escopeta (suceso A) del 40 %. ¿Qué probabilidad tiene de derribar a su presa si puede efectuar tres disparos consecutivos?

Sea el suceso A: derriba a la presa en el disparo.

La probabilidad de A, sería p=0,4.

Sea la variable X ~ número de disparos acertados ~ B (n=3, p=0,4).

$$P(\text{derribarla}) = P(\text{ derribarla en el primer disparo}) + P(\text{ derribarla en el segundo disparo}) + P(\text{ derribarla en el tercer disparo})$$

Sin embargo, al ser sucesos independientes, podemos calcularlo de manera más sencilla, mediante el complementario:

$$P(\text{derribarla}) = 1 - P(\text{no derribarla}) = 1 - (P(\text{no derribarla en el primer disparo}) * P(\text{no derribarla en el segundo disparo}) * P(\text{ no derribarla en el tercer disparo})$$

$$P(\text{derribarla}) = 1 - (0{,}6)^3 = 1 - 0{,}216 = 0{,}784$$

- **Ejemplo 2.**

¿Qué probabilidad hay de obtener al menos un seis al realizar seis lanzamientos consecutivos de un dado?

Sea el suceso A: obtener un seis al lanzar un dado

La probabilidad de A, sería p= 1/6.

Sea la variable X ~ número de seises obtenidos en los seis lanzamientos ~ B (n=6, p=1/6).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\binom{6}{0} * (1/6)^0 * (1 - 1/6)^{6-0}\right] = 0{,}665$$

- **Ejemplo 3.**

Con el propósito de verificar si se aceptan los lotes de piezas de que se reciben en una determinada fábrica, se lleva a cabo un plan de control consistente en seleccionar 10 artículos al azar de cada lote y determinar el número de piezas defectuosas. Un lote se rechaza si se encuentran dos o más piezas defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar lotes con un 5 % de piezas defectuosas?

Sea el suceso A: ser pieza defectuosa.

La probabilidad de A, será p= 0,05 al ser la proporción de defectuosos de lote del 5%.

Sea la variable X ~ número piezas defectuosas en el lote ~ B (n=10, p=0,05).

Sea el coeficiente de de aceptación, a (o c), a = 2.

$$P(aceptar) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(aceptar) = \binom{10}{0} * (0{,}05)^0 * (1 - 0{,}05)^{10} + \binom{10}{1} * (0{,}05)^1 * (1 - 0{,}05)^9$$

$$P(aceptar) = 0{,}599 + 0{,}315 = 0{,}914$$

5. Cierre

El modelo de distribución Binomial define experimentos consistentes en realizar ensayos repetidos e independientes. Cada uno de estos experimentos presenta dos posibles resultados que denominamos éxito o fracaso, cuya probabilidad se mantiene constante en las diferentes pruebas.

La variable binomial es una variable aleatoria discreta, sólo puede tomar los valores 0,1,2,3,4,....., n suponiendo que se han realizado n pruebas.

La variable se define como X~ "nº de veces que ocurre el suceso A en n experimentos", y viene determinada por dos parámetros:

- n = tamaño muestral, número de experimentos realizados.
- p = P(A) = probabilidad de que tenga lugar el suceso A.

En consecuencia, la distribución Binomial se suele representar por B (n,p) siendo n y p los parámetros característicos de dicha distribución.

El cálculo de la probabilidad de la distribución binomial, requiere la utilización de los números combinatorios, y aunque existe una tabla que proporciona los valores de probabilidad para diferentes valores de n y p, a veces el proceso se hace bastante tedioso, especialmente cuando es necesario calcular probabilidades acumuladas. Por ejemplo,

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - (p(X = 0)+p(X = 1)+p(X = 2))$$

En esas ocasiones, siempre que se cumpla $n*p*(1-p) \geq 9$, podemos aproximar la distribución binomial a una distribución normal.

6. Bibliografía

6.1. Libros:

[1] Martín Pliego, F.J. (2004). Introducción a la Estadística Económica y Empresarial. (Ed.) Thomson. Madrid.
[2] Montiel, A.M.; Rius, F.; Barón F.J. (1997). Elementos básicos de Estadística Económica y Empresarial. (2ª Ed.) Prentice Hall, Madrid.
[3] Peña, D. (2001). Fundamentos de Estadística. (Ed.) Alianza Editorial, S.A. Madrid. ISBN: 84-206-8696-4.
[4] Romero, R y Zúnica, L.R. (2000). Introducción a la Estadística. (Ed.) SPUPV 4071.

6.2. Referencias de fuentes electrónicas:

[5] http://www.vitutor.com/pro/3/b_g.html (Consultado 29/09/2008).
[6] http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Partes/ejercicios.html (Consultado 29/09/2008).
[7] http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T03.pdf (Consultado 30/09/2008).
[8] http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/t19_distribucion_binomial.htm (Consultado30/09/2008).
[9] http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/es/image/nikou.html (Consultado 29/09/2008)
[10] www1.uprh.edu/.../La%20distribucion%20binomial/Modulo%20Sobre%20La%20Distribucion%20Binomial
[11] https://polimedia.upv.es/visor/?id=75e9321a-de3c-8f48-b0a9-247c54db0376