UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Distribuciones de Probabilidad para Variables Aleatorias Discretas

Apellidos, nombre	Martínez Gómez, Mónica (momargo@eio.upv.es) Marí Benlloch, Manuel (mamaben@eio.upv.es)
Departamento	Estadística, Investigación Operativa Aplicadas y Calidad
Centro	Universidad Politécnica de Valencia

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo vamos a presentar las características básicas de las distribuciones de las variables aleatorias (V.A.) discretas. En este objeto de aprendizaje, se pretende mostrar el cálculo de la función de probabilidad y la función de distribución para dichas variables discretas, así como el cálculo de la Esperanza Matemática y la Varianza.

2 Introducción

¿Para qué me puede servir conocer cómo se distribuyen las probabilidades de una determinada Variable Aleatoria discreta?

Es importante para conocer las probabilidades asociadas a cada valor, así como para poder estimar probabilidades acumuladas. En este sentido es imprescindible, conocer la definición y características de Función de Probabilidad y Función de Distribución.

Así pues, la estructura que vamos a seguir en este artículo es la siguiente: en primer lugar conoceremos los objetivos que pretendemos conseguir; a continuación trabajaremos la definición y características de Función de Probabilidad y Función de Distribución características de las distribuciones discretas y resolveremos algunos ejemplos prácticos para ayudar a la comprensión; así mismo definiremos los momentos de primer y segundo orden para variables discretas. Finalmente, destacaremos los conceptos básicos de aprendizaje con respecto a ambos tipos de funciones y sus aplicaciones prácticas.

3 Objetivos

- Establecer la pauta de variabilidad de una determinada Variable Aleatoria (V.A)
- Desarrollar los conceptos y propiedades de la Función de Probabilidad y de Distribución, asociados con el cálculo de probabilidades.
- Conocer los Momentos de primer y segundo orden en una distribución de probabilidad de una V.A. discreta
- Definir e interpretar las gráficas de la Función de Probabilidad y de Distribución.

4 Definición y características de la Distribuciones de Probabilidad de la Variables Aleatorias Discretas

4.1 ¿Cuándo podemos considerar que una V.A. es discreta?

Se dice que hemos definido una variable aleatoria para un experimento aleatorio cuando hemos asociado un valor numérico a cada resultado del experimento.
Para designar a las variables aleatorias, se utilizan letras mayúsculas X, Y, ..., y las respectivas minúsculas (x, y, ...) para designar valores concretos de las mismas.

Existen varios tipos de V.A.: variables cualitativas o atributos por un lado y variables cuantitativas por otro. Dentro de estas últimas podemos diferenciar entre cuantitativas continuas y cuantitativas discretas. Una variable aleatoria es discreta cuando sólo puede tomar unos ciertos valores enteros en un número finito de valores o infinito numerable. Por ejemplo, número de caras obtenidas al lanzar tres monedas: 0, 1, 2, 3. Las variables discretas representan algo que podemos contar, y no suelen llevar decimales.

4.2 Función de Probabilidad

Sea una V.A. discreta X, que toma los valores $x_1, x_2, ..., x_n$ y se conocen las probabilidades de que la variable X tome dichos valores.

Una función de probabilidad no es más que la asignación a cada valor de la variable de la probabilidad que le corresponde. Es decir:

$$f(x_i)= P(X=x_i)$$

Ecuación 1. Función de Probabilidad

Es una idealización de la correspondiente distribución de frecuencias ya que en realidad se está estimando las frecuencias absolutas f_i y relativas h_i de forma experimental o empírica.

También se llama función de cuantía o masa.

<u>Características:</u>

- A cada valor de la variable aleatoria x_i le hacemos corresponder una probabilidad esperada teórica p_i .
- Se representa gráficamente mediante un diagrama de barras.
- La suma de todas las probabilidades esperadas es uno.

- **Ejemplo 1.**

Un dado simétrico tiene tres caras iguales con una puntuación de 6 en cada cara, en otras dos de las caras la puntuación es de 5 en cada una y en la cara restante la puntuación es de 1. Obtener la función de probabilidad o cuantía de la variable X.

Tabla 1. Cálculo de la función de probabilidad

$X=x_i$	$P(X=x_i)$
1	1/6
5	2/6
6	3/6

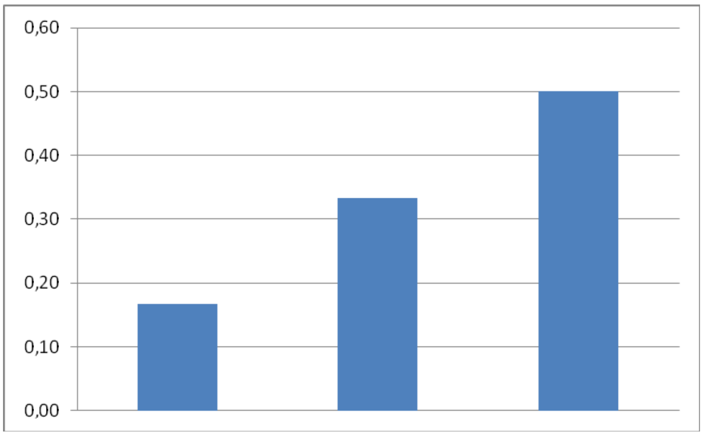

Imagen 1. Diagrama de barras de la función de probabilidad
Fuente: Elaboración Propia

4.3 Función de Distribución

En muchas ocasiones no nos interesa conocer la probabilidad de que la variables aleatoria X tome exactamente un determinado valor x_i, sino que puede interesarnos determinar la probabilidad de que tome valores menores o iguales que un cierto valor x_i. En tales casos es necesario acumular los distintos valores de la función de probabilidad hasta el valor deseado. Es lo que se denomina <u>función de distribución</u> y se representa por F (X).

$$F(x_i)= P(X\leq x_i)$$

Ecuación 2. Función de distribución

Es decir, ordenados los posibles valores de la variable aleatoria de menos a mayor, se asocia a cada valor de la misma la probabilidad acumulada hasta ese valor, es decir, que tome valores menores o iguales a x_i.

Características:

⇒ $F(-\infty)=P(X \leq -\infty)=0$

⇒ $F(\infty)=P(X \leq \infty)=1$

⇒ $0 \leq F(X) \leq 1$ por ser F(X) una probabilidad

⇒ F(X) es no decreciente. Esta propiedad se puede demostrar como sigue:

"Sea b>a, entonces podemos definir,

$$F(b) = F(a) + P(a<X\leq b)$$

Y como toda probabilidad es ≥ 0 *F(b) es* $\geq F(a)$*"*

Su representación gráfica tiene forma escalonada, siendo los saltos coincidentes con las probabilidades correspondientes a los valores x_i de la variable X.

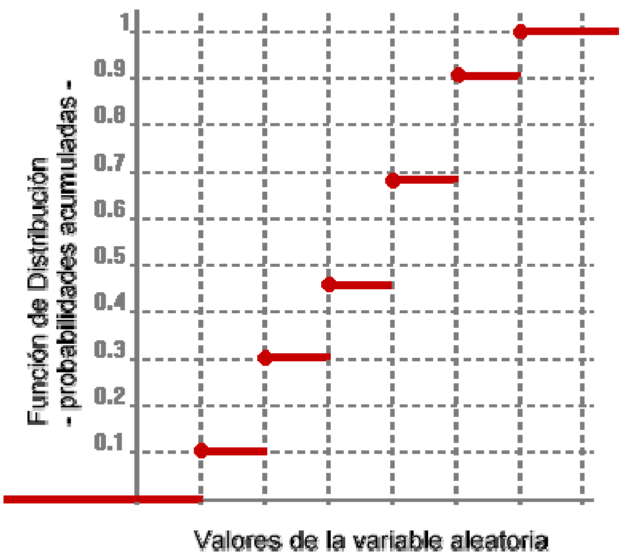

Imagen 2.Forma típica de escalera de diagrama de la función de distribución
Fuente: http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/t18_variable_aleatoria_discreta.htm

Conociendo la Función de Distribución de una determinada V.A., es posible calcular la probabilidad de que dicha variable se halle en un cierto intervalo [a, b], mediante la expresión:

$$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$$

siendo b > a.

- **Ejemplo 2.**

Sea X, el número de llamadas recibidas en una determinada empresa por minuto. En la tabla siguiente se muestra los posibles valores de la variable, así como su probabilidad de ocurrencia. Estimar y representa la función de distribución.

Tabla 2. Posible resultados de la V.A. y sus correspondiente probabilidades

$X=x_i$	$P(X=x_i)$
0	0,1
1	0,2
2	0,3
3	0,2
4	0,1
5	0,1
≥ 6	0

La resolución de este tipo de problemas es siempre igual, debiendo seguirse los siguientes pasos:

1. *Calcular Función de Probabilidad*

   En nuestro caso como ya nos daban las probabilidades asociadas a cada resultado en la tabla inicial, sólo faltaría representarlo:

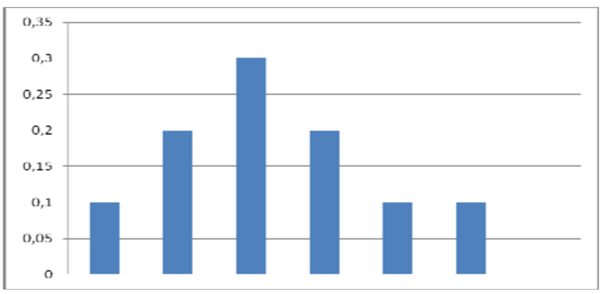

Imagen3. Diagrama de barras de la función de probabilidad
Fuente: Elaboración Propia

2. Una vez conocida la función de probabilidad, teniendo la precaución de que los posible resultados de la variable aleatoria estén ordenados de menor a mayor, sólo queda ir *acumulando las probabilidades*:

Tabla 3. Cálculo de la función de distribución

$X=x_i$	$P(X=x_i)$	$F(X)= P(X\leq x_i)$
0	0,1	0,1
1	0,2	0,3
2	0,3	0,6
3	0,2	0,8
4	0,1	0,9
5	0,1	1
≥ 6	0	1

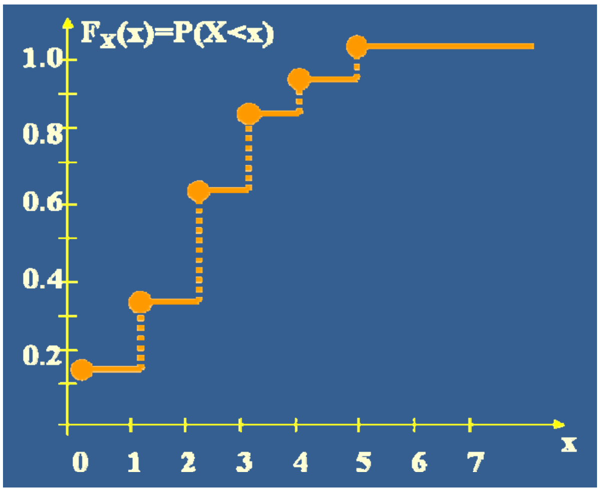

Imagen4. Diagrama de la función de distribución

Fuente: Elaboración Propia

4.4 Momentos

1. Momentos Respecto al Origen de orden 1 de la variable aleatoria X = E(x_1)

La Esperanza Matemática, que viene representa por, E(h(x)), equivale a una idealización de media aritmética o promedio. Equivaldría a considerar la media como el centro de gravedad de la nube de puntos. Su expresión en el caso de variables aleatorias discretas es:

$$\mu = E(X) = \Sigma\, x_i * f(x_i)$$

Ecuación 3. Expresión de la Esperanza Matemática siendo f(x) la función de probabilidad o de cuantía.

La Esperanza, cumple varias propiedades básicas:

- Si a y b son constantes y X una variable aleatoria con media μ, la transformada lineal de ella, Y = aX + b cumple,

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

- La combinación lineal (suma o diferencia) de dos o más funciones de una variable aleatoria X, cumple la propiedad de que su esperanza también la cumple:

$$E(g(X) \pm h(X)) = E(g(X)) \pm E(h(X))$$

- La esperanza del producto de dos variables aleatorias independientes, X e Y , es el producto de las esperanzas:

$$E(X*Y) = E(X)*E(Y)$$

2. Momento Central de orden 2

Al igual que la esperanza se definía como el centro de gravedad de una nube de puntos, la Varianza se puede considerar el momento de inercia del sistema y va a medir la dispersión o distanciamiento de cada x_i, respecto de la media. La Varianza, σ^2, de una variable aleatoria X, cuya distribución de probabilidades viene dada por f(x) y la media por μ, puede expresarse, en el caso de variables aleatorias discretas, como sigue:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)2] = \Sigma\,(xi - \mu)^2 f(x_i)$$

Ecuación 4. Expresión de la Varianza

siendo f(x) la función de probabilidad o de cuantía.

La Varianza, cumple una propiedad básica:

- Si a y b son constantes y X una variable aleatoria con media μ y formamos la transformada lineal, Y = aX + b, se cumple

$$\sigma^2\,(Y) = \sigma^2(aX + b) = a^2\sigma^2\,(X) = a^2\,\sigma^2$$

5 Cierre

Una variable aleatoria es **discreta**, si sólo puede tomar una cantidad finita de valores.

Las variables aleatorias discretas vienen caracterizadas por su **función de probabilidad y por su función de distribución**.

La función de probabilidad, de cuantía o de masa de una variable aleatoria discreta, es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra, estando definida sobre el conjunto de todos de los posibles valores de la variable aleatoria.

La función de distribución, da la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x_i. Nos permite calcular la probabilidad de que dicha variable se halle en un cierto intervalo [a, b], mediante la expresión: $P(a<X<b) = F(b) – F(a)$.

La Esperanza Matemática se define como momento central de orden 1 y equivale a la media, cumpliendo sus mismas propiedades.

La varianza se define como momento central de orden 2, y equivale a conocer la dispersión de la distribución o de los datos.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] DeGroot, M.H. (1988). Probabilidad y Estadística. (2ª Ed.). Addison-Wesley Iberoamericana. ISBN 0-201-64405-3.
[2] Martín Pliego, F.J. (2004). Introducción a la Estadística Económica y Empresarial. (Ed.) Thomson. Madrid.
[3] Mendenhall, W.; Reinmuth, J.E. (1978). Estadística para administración y economía. (Ed.) Grupo Editorial Iberoamericana. ISBN 968-7270-13-6.
[4] Montiel, A.M.; Rius, F.; Barón F.J. (1997). Elementos básicos de Estadística Económica y Empresarial. (2ª Ed.) Prentice Hall, Madrid.
[5] Peña, D. (2001). Fundamentos de Estadística. (Ed.) Alianza Editorial, S.A. Madrid. ISBN: 84-206-8696-4.
[6] Romero, R y Zúnica, L.R. (1993). Estadística (Proyecto de Innovación Educativa). SPUPV-93.637.
[7] Romero, R y Zúnica, L.R. (2000). Introducción a la Estadística. (Ed.). SPUPV- 2000.4071.

6.2 Referencias de fuentes electrónicas:

[8] http://www.vadenumeros.es/sociales/variable-aleatoria-discreta.htm
[9] http://carmesimatematic.webcindario.com/distribucionesp.htm
[10] http://www.vadenumeros.es/sociales/variable-aleatoria-discreta.htm
[11] http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/t18_variable_aleatoria_discreta.htm